MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS - MOSTAGANEM

Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique
Département de Mathématiques et d'Informatique
Filière : Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES
Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques
Option : **Modélisation Contrôle et Optimisation**

THÈME:

Les équations elliptiques linéaires

Etudiant(e) : « **TAYEBI Soumia** »

« **SERRADJ Asma** »

Président : Mr M. OULDALI
Encadrant : Mme Dj. BENSIKADDOUR
Examinateur : Mme BELARBI

Année Universitaire 2015/20016

UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE

...

Présenté par

...

Table des matières

Remerciements

Nous tenons tout d'abord à exprimer notre plus profonde gratitude à notre encadreur Mme BENSIKADDOUR Djemaïa qui nous a proposé le sujet de ce mémoire et nous a aider à réaliser ce travail. Nous la remercions pour sa disponibilité et ses précieux conseils. Ce travail n'aurait jamais vu le jour si nous n'avons pu profiter de ses compétances.

C'est pour nous beaucoup d'honneur que d'avoir Mr OULDALI Mohand président de notre jury, nous le remercions vivement.
Un grand merci aussi à Mme BELARBI Samira pour avoir accepté d'examiner notre mémoire.

Nous présentons nos remerciements les plus sincères aux personnes qui nous ont apporté leurs aide et qui ont contribué à l'élaboration de ce travail ainsi qu'à la réussite de cette formidable année universitaire.

Nous n'oublions pas nos parents pour leur contribution, leur soutien et leur patience.

Enfin, nous adressons nos plus sincères remerciements à tous nos proches et amis, qui nous ont toujours soutenu et encouragé au cours de la réalisation de ce travail.

Merci à tous et à toutes

Résumé

On s'intérèsse dans ce mémoire à étudier les propriétés des solutions de quelques problèmes elliptiques linéaires en se basant sur des résultats d'analyse fonctionnelle.

INTRODUCTION

Comme son titre l'indique, ce mémoire ne constitue qu'une brève et succincte introduction d'une classe particulière des équations aux dérivées partielles (edp).

Étant donnée une famille d'edp, il est intéressant de les classer en sous-familles ayant des propriétés communes. On s'intéresse ici à la famille des edp elliptiques linéaires vérifiant une certaine condition au bord, c'est à-dire aux problèmes de la forme :

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\partial_i(\ \partial_j u)(x) & = & f(x), \quad x \in \Omega. \\ u(x) & = & g(x), \quad x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{0.0.1}$$

où Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\partial\Omega = \bar{\Omega} \setminus \Omega$, $a_{i,j}(x) \in L^\infty(\Omega)$ des fonctions vérifient l'hypothèse d'éllipcité uniforme, $f \ \in L^2(\Omega)$, $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ et $\partial_i u$ désigne la dérivée partielle de u par rapport à sa $i^{ème}$ variable. Pour étudier le problème (0.0.1), on a divisé le travail en trois chapitre :

1/ Dans le premier on a rappelé des définitions et des propriétes des edp ainsi que quelques notions sur les espaces L^p et les espaces de Sobolev utilisées tout au long de ce mémoire.

2/ Le deuxième chapitre est consacré à prouver l'existence, l'unicité et la régularité de la solution du problème (0.0.1) dans l'espace fonctionnel $H^2(\Omega)$.

3/ Le dernier chapitre consiste à appliquer les résultats du chapitre précédent pour étudier les problèmes suivants :

   i/ Équation de Laplace avec conditions de Dirichlet non homogènes.

   ii/ Équation de Poisson avec conditions de Dirichlet homogènes.

Chapitre 1

Rappels et notations

Ce chapitre est consacré à rappeler l'essentiel des notions et résultats utilisés tout au long de ce travail. Il est organisé comme suit : en premier lieu, on présente brièvement les équations aux dérivées partielles et leurs propriétés puis dans la deuxième section on donne quelques définitions et résultats sur les espaces L^p et les espaces de Sobolev.

1.1 Présentation des edp

On introduit tout d'abord quelques opérateurs différentiels qui interviennent dans les équations aux dérivées partielles.

1.1.1 Les opérateurs différentiels

Dans toute la suite Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ muni de la mesure de Lebesgue dx.

Définition 1.1.1 ***"Le gradiant"*** *Soit $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Le gradiant de u noté par $\bigtriangledown u$ ou $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, u$ est donné par:*

$$\bigtriangledown u(x) = \left(\frac{\partial u}{x_1}(x), ..., \frac{\partial u}{x_n}(x) \right)^t .$$

Définition 1.1.2 ***"Le Laplacien"*** *Soit u une fonction de classe $C^2(\Omega)$, on définit le Laplacien de u par :*

$$\Delta u(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial {x_1}^2}(x) + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial {x_n}^2}(x).$$

1.1.2 Définitions et propriétés des edp

Définition 1.1.3 *Une équation aux d'érivées partielles (edp) est une équation dont l'inconnue est une fonction et portant sur les dérivées partielles de cette fonction. Si on note*

$$\begin{array}{rlcl} u: & \mathbb{R}^n \ (ou\ \Omega\ ) & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & u(x) \end{array}$$

alors l'équation s'écrit sous la forme :

$$F(x, u(x), Du(x), D^2u(x)...D^pu(x)) = 0 \tag{1.1.1}$$

avec n *et* p *sont des entiers strictement positifs donnés et* $F \ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n^2} \times ... \times \mathbb{R}^{n^P}$ *est une fonction donnée.*

Définition 1.1.4 ***"L'ordre d'une edp"*** *L'ordre d'une edp est l'ordre le plus élevé parmi les dérivées partielles apparaissant dans l'edp.*

Définition 1.1.5 ***"La dimension d'une edp"*** *La dimension d'une edp est le nombre de variables indépendantes de la fonction inconnue* u*.*

Remarque 1.1.1 *L'équation (1.1.1) est une edp d'ordre* p *et de dimension* n*.*

Définition 1.1.6 ***"Les edp's linéaires, quasi-linéaires, non linéaires"***

1. *On dit qu'une edp est* **linéaire** *si elle ne fait intervenir que des combinaisons linéaires des dérivées partielles de la varaible dépendante.*
2. *On dit qu'une edp est quasi-linéaire si elle est linéaire par rapport aux dérivées d'ordre le plus élevé.*
3. *En dehors des critères cités ci-dessus l'edp est non linéaire.*

1.1.3 Classification des edp

On distingue trois grandes catégories d'équations aux d´érivées partielles :

1/ Les équations de type elliptique dont le prototype est l'équation de Poisson donnée par :

$$-\Delta u(x) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x) = f(x) \tag{1.1.2}$$

pour tout $x = (x_1.....x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\quad f \quad : \Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction donnée, et l'inconnue est la fonction $u : \Omega \to \mathbb{R}$.

2/ Les équations de type parabolique dont le prototype est l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} - \Delta T(x,t) = \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2}(x,t) = 0 \tag{1.1.3}$$

pour tout $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ et $t > 0$. L'inconnue est la fonction $T : \Omega \times]0, +\infty[\to \mathbb{R}$

3/ Les équations de type hyperbolique dont les prototypes sont :

i/ Léquation de transport

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + a\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0 \tag{1.1.4}$$

pour tout $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $t > 0$ et $a \in \mathbb{R}$.

ii/ L'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + a\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x,t) = 0 \tag{1.1.5}$$

pour tout $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $t > 0$ et a un réel donné.

1.1.4 Conditions initiales et conditions frontières

Comme pour les équations différentielles ordinaires, lorsque l'équation aux dérivées partielles dépend du temps, il faut spécifier les conditions au temps initial $t = t_0$.

1/ **Condition initiale** : Si u est une fonction de $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ (par exemple les éqautions (1.1.3), (1.1.4) , (1.1.5)) on donne $u(x,t_0) = \phi_0(x)$ ou $D^p u(x,t_0) = \phi_p(x)$, ce type de conditions est appelé conditions de Cauchy.

La notion de conditions aux limites est spécifique aux équations aux dérivées partielles. Elle consiste à donner des conditions au bord du domaine sur lequel est posée l'edp.

2/ **Conditions aux bord :** Si u est une fonction de $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, on a trois types de contraintes :

i/ **Condition de Dirichlet :** où u est fixé sur le bord de Ω : $u_{/\partial\Omega} = f$, $\quad$ (f est une fonction donnée).

ii/ **Conditions de Neumann :** où la dérivée normale u est fixé $\left(\frac{\partial u}{\delta \vec{n}}\right)_{/\partial\Omega} = g$, (g est une fonction donnée).

iii/ **Condition de Fourier ou de Robin (ou mixte) :** $c(x)u + \tilde{c}(x)\frac{\partial u}{\partial n} = h$ sur $\partial\Omega$, où h est une fonction donnée.

Si f , g et h sont toutes des fonctions nulles on dit que les conditions aux bord définies ci–dessus sont homogènes.

3/ **<u>Condition à l'infinie :</u>** Si Ω n'est pas borné on a des conditions de la forme $u(x) \to \varphi(x)$

4/ **<u>Condition sur l'interfaces</u>** : Si $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ avec $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ et si l'on a détermine u sur Ω_1 et Ω_2 , alors pour pouvoir définir u sur Ω , on a des condition sur u respectivement $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}$ sur $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$.

1.2 Les espaces fonctionnels [3]

Définition 1.2.1 *Un espace fonctionnel est un ensemble d'applications d'une certaine forme d'un ensemble X vers un ensemble Y.*

Définition 1.2.2 *Soit f une fonction définie sur Ω. On dit que f est :*

- de classe $\mathcal{C}^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ si toutes ses différentielles jusqu'à l'ordre n existent sur Ω, et si $D^n f$ (sa différentielle d'ordre n) est continue sur Ω.
- de classe $\mathcal{C}^\infty$ si elle est indéfiniment différentiable sur Ω.

Définition 1.2.3 *On note par $D(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact, son dual est noté par $D'(\mathbb{R}^n)$*

1.2.1 Les espaces L^p

Définition 1.2.4 ***"Fonction mesurable"*** *Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est dite mesurable si pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'ensemble :*

$$E_\alpha = \{x \in \Omega \ , \quad f(x) \geq \alpha\}$$

est mesurable au sens de Lebesgue.

Définition 1.2.5 ***"Fonction integrable"*** *On dit qu'une fonction mesurable $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Lebesgue si :*

$$\int_\Omega |f\ (x)|\, dx \leq \infty.$$

Définition 1.2.6 ***"L'espace** L^p"* *Soit $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$. On appelle l'espace $L^p(\Omega)$ l'ensemble :*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R},\ f \ \textit{mesurable et} \ \ |f|^p \ \textit{integrable}\}.$$

De plus, pour toute fonction $f \in L^p(\Omega)$ on pose :

$$\|f\|_{L^p} = \left[\int_\Omega |f(x)|^p\, dx\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Proposition 1.2.1 *Les espaces L^p vérifient les propriétés suivantes :*

1/ L^pest un espace vectoriel et $\|\|_{L^p}$ est une norme pour tout $1 \leq p \leq \infty$.

2/ L^pest un espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq \infty$.

Définition 1.2.7 ***"Cas particulier"*** *Pour $p = 2$, on définit l'espace $L^2(\Omega)$ par*

$$L^2(\Omega) = \left\{u : \Omega \to \mathbb{R} \ / \int_\Omega \left|u^2(x)\right| dx < \infty\right\}$$

muni de la norme

$$\|u(x)\|_{L^2(\Omega)} = \left[\int_\Omega u^2(x)dx\right]^{1/2}.$$

1.2.2 Les espaces préhilbertien

Définition 1.2.8 *Le produit scalaire sur un espace vectoriel H est une application*

$$\left\{\begin{array}{llll} \langle .,. \rangle : & H \times H & \to & \mathbb{R} \\ & (u,v) & \mapsto & \langle u,v \rangle \end{array}\right. . \qquad (1.2.1)$$

Soient α, $\beta \in \mathbb{R}$ et $u, v, u_1, u_2 \in H$, le produit scalaire (1.2.1) vérifie les propriétés suivantes :

1/ $\langle u,u \rangle \geq 0$ *et* $\langle u,u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$

2/ $\langle \alpha u_1 + \beta u_2, v\rangle = \alpha \langle u_1, v\rangle + \beta \langle u_2, v\rangle$.

3/ $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$

Définition 1.2.9 *Un espace vectoriel H muni d'un produit scalaire est dit **préhilbertien** $(H, \langle ., .\rangle)$. On appelle un espace préhilbertien **normé** tout espace préhilbertien H muni de la norme induite du produit scalaire définie par :*

$$\|u\|_H = (\langle u, u\rangle)^{1/2}.$$

Définition 1.2.10 *"**Espace de Hilbert**" Tout espace préhilbertien qui est complet par rapport à la norme induite d'un produit scalaire est dit espace de Hilbert.*

Exemple 1.2.1 *$(L^2(\Omega), \|.\|_{L^2})$ est espace de Hilbert.*

1.2.3 Espaces de sobolev

Les espaces $W^{1,p}(\Omega)$

Il y a deux manières classiques d'introduire les espaces de Sobolev H^moù $W^{m,p}$. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert **,** $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \ \leq p \leq \ \infty$ et q l'exposant conjugué de p vérifiant $1/p + 1/q = 1$.

Définition 1.2.11 *L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par :*

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega), \exists\ g_1, .., g_n \in L^p(\Omega) : \int_\Omega u\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i\ \varphi\ \forall\ \varphi \in C_c^\infty(\Omega),\ \forall i = \overline{1, .., n} \right\}$$

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}.$$

On note $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$, où :

$$H^1(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R},\ u \in L^2(\Omega)\ et\ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \forall i = \overline{1, .., n} \right\}.$$

L'espace $H^1(\Omega)$ est muni de produit scalaire

$$\begin{aligned} \langle u, v\rangle_{H^1(\Omega)} &= \langle u, v\rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\rangle_{L^2(\Omega)} \\ &= \int_\Omega u(x)v(x)dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}.\frac{\partial v}{\partial x_i}dx \end{aligned}$$

La norme associée est :

$$\begin{aligned}\|u\|_{H^1(\Omega)} &= \left(\langle u,u\rangle_{H^1(\Omega)}\right)^{1/2} = \left(\langle u,u\rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n}\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial u}{\partial x_i}\right\rangle_{L^2(\Omega)}\right)^{1/2} \\ &= \left(\int_\Omega (u(x))^2 dx + \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega (\frac{\partial u}{\partial x_i})^2 dx\right)^{1/2}\end{aligned}$$

qui est éqivalente à la norme de $W^{1,2}(\Omega)$.

Les espaces $W_0^{1,p}(\Omega)$

Définition 1.2.12 *On définit l'espace* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *comme suit :*

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \left\{u \in W^{1,p}(\Omega),\ u = 0 \ sur\ \partial\Omega\right\},$$

et on a $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$.

Définition 1.2.13 *On désigne par* $W^{-1,q}(\Omega)$ *l'espace dual de* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *et par* $H^{-1}(\Omega)$ *l'espace dual de* $H_0^1(\Omega)$.

Remarque 1.2.1 *L'espace de Sobolev* $H_0^1(\Omega)$ *et son dual* $H^{-1}(\Omega)$ *vérifient les inclusions suivantes :*

$$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$$

avec injections continues et denses.

Les espaces $W^{m,p}(\Omega)$:

Définition 1.2.14 *Soient* $m \geq 2$ *un entier et* $p \in \mathbb{R}$ *avec* $1 \leq p \leq \infty$. *On définit par récurrence*

$$\mathbf{W}^{m,p}(\Omega) = \left\{u \in L^p(\Omega),\ \forall\alpha\ :\ |\alpha| \leq m,\ \exists g_\alpha \in L^p(\Omega) : \int_\Omega u\ D^\alpha\varphi = |-1|^\alpha \int_\Omega g_\alpha\ \varphi\ \forall\varphi \in C_c^\infty(\Omega)\right\}$$

tel que α *est un un multi-indice* $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ *avec* $\alpha_i \geq 0$ *entier, on pose :*

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i \quad et \quad D^\alpha\varphi = \frac{\partial^{\alpha+,\alpha_2+......+\alpha n}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}...\partial x_n^{\alpha_n}}\varphi.$$

L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}.$$

On a $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$ où

$$H^m(\Omega) = \left\{u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : u \in L^2(\Omega), D^\alpha u \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq m, \alpha = (\alpha_1, .., \alpha_n)\right\}.$$

$H^m(\Omega)$ est muni de la norme

$$\langle u, v\rangle_{H^m(\Omega)} = \langle u, v\rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{1\leq|\alpha|\leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v\rangle_{L^2(\Omega)}$$

Les espace $W_0^{m,p}(\Omega)$

Etant donné un entier $m \geq 2$ et un réel $1 \leq p \leq \infty$.

Définition 1.2.15 *On définit l'espace $W_0^{m,p}(\Omega)$ comme suit :*

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \left\{u \in W^{m.p}(\Omega),\ u = Du = .. = D^{m-1}u = 0 \ sur\ \partial\Omega\right\}.$$

1.3 Problème variationnel

Tout problème de résolution d'une équation aux dérivées partielles avec des conditions aux bord se ramène à un problème variationnel ou formulation variationnel de type

$$\text{trouver } u \in V \ \text{ solution de } a(u, v) = \quad T(v),\ \forall v \in V$$

où V est un espace de Hilbert, $a(u, v)$ est une forme bilinéaire et $T(v)$ est une forme linéaire.

Lemme 1.3.1 ***"Lax-Miligrame"*** *([3]) Soient V un espace de Hilbert réel muni du produit scalaire, $a(.,.)$ une forme bilinéaire qui est :*

i/ continue sur $V \times V$ c'est-à-dire :

$$\exists\ c > 0, \forall(u, v) \in V^2,\ |a(u, v)| \leq c\,\|u\|_V\,\|v\|_V\,,$$

ii/ coercive sur V c'est-à-dire :

$$\exists \alpha > 0, \forall u \in V, \quad a(u,u) \geq \alpha \left\| u \right\|_V^2,$$

et $T(.)$ est une forme linéaire continue sur V. Alors il existe un unique u de V tel que l'équation $a(u,v) = T(v)$ soit vérifiée pour tout v de V

$$\exists! u \in V, \ \forall v \in V, \ a(u,v) = T(v).$$

Si de plus la forme bilinéaire a est symétrique, alors u est l'unique élément de$V$ qui minimise la fonctionnelle $J : V \to IR$ définie par :

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - T(v)$$

pour tout v de V, c'est-à-dire :

$$\exists! u \in V, \ J(u) = min \ J(v).$$

Lemme 1.3.2 ***"Inégalité de Poincaré"*** *([3]) Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ (ou qui est au moins borné dans une direction), alors il existe C_Ω ne dépendant que de Ω tel que*

$$\left\| u \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \left\| \nabla u \right\|_{L^2(\Omega)}.$$

Exemple 1.3.1 *Problème avec condition de type Dirichlet*

$$P_c : \begin{cases} -u''(x) & = & f(x) \quad sur \ ]a,b[\\ u(a) & = & u(b) \quad = \quad 0, \quad f \in L^2(]a,b[) \end{cases}$$

devient

$$P_V \ : \left\{ trouver \ \ u \in H_0^1(]a,b[\ ) \quad solution \ de \ a(u,v) = T(v), \ \forall \ v \in H_0^1(]a,b[) \right\}$$

avec

$$a(u,v) = \int_a^b u'(x)v'(x)dx$$

et

$$T\ (v) = \int_a^b f\ (x)v(x)dx.$$

Chapitre 2

La résolution des équations elliptiques linéaires

Le but de ce chapitre est d'étudier la classe particulière des équations elliptiques linéaires d'ordre 2. En particulier on montrera des resultats d'existence et d'unicité de solutions du problème continu (1.1.2). On fera évoquer aussi les résultats de régularité de la solution ainsi que ses propriétés qualitatives (positivité, continuité par rapport aux données du problème).

2.1 Présentation du problème

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\partial\Omega = \bar{\Omega} \setminus \Omega$ et soient les fonctions $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$ vérifiant l'hypothèse d'éllipticité uniforme, c'est à dire

$$\exists \alpha > 0, \forall \xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{i,\ j=1}^{n} a_{i,j}\xi_i\xi_j \geq \alpha \left|\xi\right|^2. \tag{2.1.1}$$

On se donne f, g des fonctions telles que $f \in L^2(\Omega)$ et $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$, on cherche une solution au problème

$$\left\{ \begin{array}{lcll} \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}\ \partial_i(\partial_j u)(x) & = & f(x), & x \in \Omega. \\ u(x) & = & g(x), & x \in \partial\Omega \end{array} \right. \tag{2.1.2}$$

Exemple 2.1.1 ***"Le laplacien"*** *Si on prend*

$$a_{i,\ j} = \delta_{i;j} = \left\{ \begin{array}{lll} 1, & si & i = j \\ 0 & si & i \neq j \end{array} \right.$$

alors le problème (2.1.2) devient

$$\begin{cases} \Delta u &= f, & sur\ \Omega \\ u &= g, & sur\ \partial\Omega \end{cases}.$$

Définition 2.1.1 ***"Solution classique"*** *Si $a_{i,j} \in C^1(\Omega)$ pour $i,\ j = 1...n,\ \ f\ \in C(\Omega)$ et $g \in C(\partial\Omega)$, alors la solution classique du problème (2.1.2) est une fonction $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ vérifiant (2.1.2).*

Remarque 2.1.1 *Cette solution n'existe pas toujours mais elle existe au sens faible.*

Soit $\varphi \in C_c^\infty\ (\Omega)$, On multiplie (2.1.2) par $\varphi(x)$ puis on intègre sur Ω, on obtient

$$\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}\partial_i(\ \partial_j u)(x) \right) \varphi(x)dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx,\ \forall\varphi \in C_c^\infty(\Omega). \tag{2.1.3}$$

D'près la formule de Green (2.1.3) devient

$$\int_\Omega (\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}\partial_i(\ \partial_j u)(x)\varphi(x)dx = -\int_\Omega \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}\ \partial_i u(x)\partial_j\varphi(x) + \int_{\partial\Omega} a_{i,j}\ \partial_j u.\varphi(x) \tag{2.1.4}$$

Puisque $\varphi \in C_c^\infty\ (\Omega)$ alors (2.1.4) implique

$$-\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}\ \partial_i u(x)\partial_j\varphi(x) \right) dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx,\ \forall x \in \Omega. \tag{2.1.5}$$

Comme $u \in C^2(\Omega)$, on a $\partial_i u \in C^1(\Omega) \subset C(\bar{\Omega}) \subset L^2(\Omega)$ et $D_i u = \partial_i u$ p.p. De plus $u \subset C(\bar{\Omega}) \subset L^2(\Omega)$ donc $u \in H^1(\Omega)$. Pour le cas particulier

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}\partial_i(\partial_j u)(x) &= f(x), & x \in \Omega. \\ u(x) &= 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{2.1.6}$$

on a $v \in H_0^1(\Omega)$, par densité de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$, il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\Omega)$ telle que $\varphi_n \to v$ dans $H^1(\Omega)$, c'est-à-dire $\varphi_n \to v$ dans $L^2(\Omega)$ et $D_i\varphi_n \to v$ dans $L^2(\Omega)$ pour $i = 1, ..., n$ ce qui conduit à

$$-\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}\ \partial_i u(x)\partial_j\varphi_n(x) \right) dx = \int_\Omega f(x)\varphi_n(x)dx.$$

En passant à la limite, on trouve que u satisfait le problème suivant, qu'on appelle **formulation faible** du problème (2.1.6)

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ \int\limits_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \ \partial_i u(x) \partial_j v(x) \right) dx = -\int\limits_{\Omega} f(x)v(x)dx, \ \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases} . \tag{2.1.7}$$

Remarque 2.1.2 ***"Problème minimale"*** *Dans le cas $a_{i,j} = a_{j,i}$ pour $i \neq j$, u est la solution de (2.1.7) si et seulement si u est solution du problème suivant :*

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ J(u) \leq J(v), \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

où la fonctionnelle J est définie par :

$$J(v) = \frac{1}{2} \left(\int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \ D_i v D_j v \right) dx - T(v). \tag{2.1.8}$$

2.2 Existence et unicité de la solution

On considère le problème (2.1.7) présenté ci-dessus

Théorème 2.2.1 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $f \in L^2(\Omega)$, et soient $(a_{i,j})_{i,\ j=1\ldots n} \subset L^\infty(\Omega)$ et $\alpha > 0$ tels que (2.1.1) soit vérifiée. Alors le problème (2.1.7) admet une unique solution. Pour démontrer l'existence et l'unicité des solutions des problèmes (2.1.7) et (2.1.8) on utilise le lemme de Lax-Milgram, pour appliquer ce dernier, on écrit le problème (2.1.7) sous la forme :*

$$\left\{ u \in H_0^1(\Omega), \ a(u,v) = T(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \right\},$$

avec

$$a(u,v) = \int\limits_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \ D_i u(x) D_j v(x) \right) dx$$

et

$$T(v) = -\int\limits_{\Omega} f(x)v(x)dx.$$

On remarque tout d'abord que la forme linéaire T est continue

$$|T(v)| = \|v\|_{L^2(\Omega)} \|f\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)} \|f\|_{L^2(\Omega)},$$

et a est bilinéaire (évident) et continue

$$|a(u,v)| \leq \sum_{i,\ j=1}^{n} \|a_{i,j}\|_{L^\infty(\Omega)} \|D_i u\|_{L^2(\Omega)} \|D_j v\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

où $C = \sum_{i,\ j=1}^{n} \|a_{i,j}\|_{L^\infty(\Omega)}$ *. De plus a est coercive, comme*

$$a(u,u) = \int_\Omega (\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\ D_i u(x) D_j u(x))dx \geq \left[\inf_\Omega\ (a_{i,\ j})\right]\ \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} |D_i u(x)|^2$$

alors

$$a(u,u) \geq \alpha \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} (|D_i u(x)|)^2 dx = \alpha \int_\Omega (|\nabla u(x)|)^2 dx$$

avec $\alpha = \left[\inf_\Omega\ (a_{i,\ j})\right]$. *En appliquant l'inégalité de Poincaré, on obtient*

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=0}^{n} \|D_i u(x)\|^2 \leq (C_\Omega + 1) \sum_{i=0}^{n} \|D_i u(x)\|^2$$

ce qui implique

$$\sum_{i=0}^{n} \|D_i u(x)\|^2 \geq \frac{1}{C_\Omega + 1} \|u\|^2_{H^1(\Omega)}$$

par conséquent

$$a(u,u) \geq \alpha \sum_{i=0}^{n} \|D_i u(x)\|^2 \geq \frac{\alpha}{C_\Omega + 1} \|u\|^2_{H^1(\Omega)}$$

finalement le lemme de Lax-Milgram, assure l'existence et l'unicité de la solution du problème (2.1.7).

2.3 Régularité et positivité de la solution

2.3.1 La régularité de la solution

Théorème 2.3.1 *On considère le problème (2.1.6) tel que* $u \in H_0^1(\Omega)$, $a_{i,j} \in C^1(\bar{\Omega})$ *pour* $i,j = 1...n$ *et* Ω *un ouvert à frontiere de classe* C^2. *Alors pour tout* $f \in L^2(\Omega)$, *on a* $u \in H^2(\Omega)$.

Pour démontrer ce théorème (2.3.1) on se ramène par la technique dite des “cartes locales" au cas

$$\Omega = \left\{(x_1, x_2)\ tel\ que\ \ x_1 > 0\ \ et\ x_2 \in \mathbb{R}^{n-1}\ \right\},$$

du problème suivant :

$$\left\{\begin{array}{c} u \in H_0^1(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega a_{i,j} \nabla u \ \nabla v \ dx = \int_\Omega f \ v \ dx, \forall \ v \in H_0^1(\Omega), \ x = (x_1, x_2) \end{array}\right.$$

puis on utilise le théoreme de Nirenberg énoncé un peu plus loin qui necessite les lemmes techniques suivantes :

Lemme 2.3.1 *Soient $g \in L^2(\Omega)$ et $h > 0$. Pour toute fonction $\omega_{h,g}$ définie par :*

$$\omega_{h,g} \ = \frac{1}{h}(g_h - g)$$

où $g_h \in H_0^1(\Omega)$ s'écrit :

$$g_h(x) = g(x_1, \ x_2 + h)$$

on a

$$\|\omega_{h,g}\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \|g\|_{L^2(\Omega)} \ .$$

Preuve. Soit $g \in L^2(\Omega)$, par définition

$$\|\omega_{h,g} \ \|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} \left\{ \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \omega_{h,g} \ v \ dx_1 dx_2, \ v \in H_0^1(\Omega) \ et \ \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq 1 \right\}$$

puisque $C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$, on peut écrire

$$\|\omega_{h,g} \ \|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} \left\{ \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \omega_{h,g} \ v \ dx_1 dx_2, \ v \in C_c^\infty(\Omega) \ et \ \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq 1 \right\}.$$

Soit $v \in C_c^\infty(\Omega)$ tel que $\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq 1$.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \omega_{h,g} \ v \ dx_1 dx_2 \ &= \ \frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left[g(x_1, x_2 + h) - g(x_1, x_2) \right] v(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \ \frac{1}{h} \left[\int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g(x_1, \tilde{x}_2) v(x_1, \tilde{x}_2 - h) dx_1 d\tilde{x}_2 - \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g(x_1, x_2) v(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right] \\ &= \ \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g(x_1, x_2) \frac{v(x_1, x_2) - v(x_1, x_2 - h)}{-h} dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

Donc, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left|\int_{\Omega} \omega_{h,g}\ v\ dx\right| \leq \|g\|_{L^2(\Omega)} \left\|\frac{v(x_1,x_2)-v(x_1,x_2-h)}{-h}\right\|_{L^2(\Omega)} \leq \|g\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq \|g\|_{L^2(\Omega)}.$$

On en déduit que

$$\|\omega_{h,g}\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \|g\|_{L^2(\Omega)}.$$

□

Lemme 2.3.2 *Sous les hypothèses du lemme précedent (2.3.1), soit $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, alors $\omega_h u \to D_2 u$ dans D' lorsque $h \to 0$.*

Preuve. Soit $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, on veut montrer que :

$$\int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \omega_h u\ \varphi\ dx_1 dx_2 \to -\int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} u\ \partial_2\varphi\ dx_1 dx_2 = \langle \partial_2 u, \varphi\rangle_{D',D} \text{ lorsque } h \to 0.$$

Or

$$\int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \omega_h\ u\ \varphi\ dx_1 dx_2 = \int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\frac{u(x_1,x_2+h)-u(x_1,x_2)}{h}\right)\varphi(x_1,x_2) dx_1 dx_2$$

$$\int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \omega_h\ u\ \varphi\ dx_1 dx_2 = \int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} u(x_1,x_2)\frac{\varphi(x_1,x_2)-\varphi(x_1,x_2-h)}{-h} dx_1 dx_2$$

comme

$$\lim_{h\to 0} \frac{\varphi(x_1,x_2)-\varphi(x_1,x_2-h)}{-h} = -\partial_2\varphi,$$

alors

$$\lim_{h\to 0} \int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \omega_h\ u\ \varphi\ dx_1 dx_2 = -\int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} u\ \partial_2\varphi\ dx_1 dx_2\ .$$

□

Théorème 2.3.2 ***(Nirenberg)*** *Si $f \in L^2(\Omega)$ telle que*

$$\Omega = \left\{(x_1,x_2),\ x_1 > 0\ et\ \ x_2 \in \mathbb{R}^{n-1}\right\} \subset\ \mathbb{R}^n$$

et $u \in H_0^1(\Omega)$ est la solution unique du problème

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} \nabla u\ \nabla v\ dx = \int_{\Omega} f\ v\ dx, \forall\ v \in H_0^1(\Omega),\ x = (x_1,x_2) \end{cases} \tag{2.3.1}$$

alors $u \in H^2(\Omega)$.

On va effectuer la démonstration dans le cas $n = 2$. Soit $u \in H_0^1(\Omega)$ solution de (2.3.1) u vérifie donc:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^+}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \nabla u\, .\nabla v\, dx_1 dx_2 + \int\limits_{\mathbb{R}^+}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} u.v\, dx_1 dx_2 = \int\limits_{\mathbb{R}^+}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} g.v\, dx_1 dx_2;\ \forall v \in H_0^1(\Omega),\ \text{où } g = u + f \in L^2(\Omega).$$

$$\langle u, v\rangle_{H^1(\Omega)} = \int\limits_{\mathbb{R}^+}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} g\ v\ dx_1 dx_2 \leq \|g\|_{H^{-1}(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \tag{2.3.2}$$

avec

$$\|g\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} \left\{ \int\limits_{\mathbb{R}^+}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} g\ v\ dx_1 dx_2, v \in H_0^1(\Omega),\ \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq 1 \right\}.$$

On considère l'opérateur auto-adjoint

$$\begin{array}{rccc} T_g: & H_0^1(\Omega) & \rightarrow & H^{-1}(\Omega) \\ & v & \mapsto & \displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^+}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} g\ v\ dx_1 dx_2 \end{array}$$

avec $g \in L^2(\Omega)$. On prend maintenant $v = u$ dans (2.3.2) pour avoir :

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \|g\|_{H^{-1}(\Omega)}$$

On introduit la fonction

$$\omega_h u = \frac{1}{h}(u_h - u),\ \text{où } u_h \in H_0^1(\Omega)$$

où u_h est définie par :

$$u_h(x) = u(x_1, x_2 + h).$$

puisque u est une solution de (2.3.1), alors u_h vérifie

$$\int\limits_{\mathbb{R}^+}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \nabla u_h\, .\nabla v\ dx_1 dx_2 = \int\limits_{\mathbb{R}^+}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} f_{\ h} v\ dx_1 dx_2\ \text{ où }\ f_{\ h}(x) = f(x+h)\ \textit{pour tout}\ h > 0$$

ce qui conduit à

$$\int\limits_{\mathbb{R}^+}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \nabla \omega_h u\, .\nabla v\ dx_1 dx_2 = \int\limits_{\mathbb{R}^+}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \omega_h f\ \ v dx_1 dx_2$$

En supposant $\omega_h f = \omega_h g - \omega_h u$, $g \in L^2(\Omega)$ on en déduit que

$$\langle \omega_h u, v\rangle_{H^1(\Omega)} = \int\limits_{\mathbb{R}^+}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \omega_h g\ v dx_1 dx_2$$

ce qui implique

$$\|\omega_h u\|_{H^1(\Omega)} \leq \|\omega_h g\|_{H^{-1}(\Omega)}$$

en appliquant le lemme (2.3.1), on a donc

$$\|\omega_h g\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \|g\|_{L^2(\Omega)} .$$

On prend maintenant $h = \frac{1}{n}$ et fait tendre $n \to +\infty$. Par ce qui précède la suite $(\omega_{\frac{1}{n}} u)_{n \in IN}$ est bornée, donc il existe $w \in L^2(\Omega)$ telle que

$$\omega_{\frac{1}{n}} u \to w \ dans \ L^2(\Omega).$$

Donc $\omega_{\frac{1}{n}} u \to w$ dans D'. $\omega_{\frac{1}{n}} u \to \partial_{x_2} u$ dans D' d'après (2.3.2), ce qui implique $\partial_{x_2} u = w \in L^2(\Omega)$, par conséquent $\partial_{x_1}\partial_{x_2} u \in L^2(\Omega)$ et $\partial^2_{x_2} u \in L^2(\Omega)$. Pour conclure il ne reste plus qu'à montrer que $\partial^2_{x_1} u \in L^2(\Omega)$. En effet, comme u est solution faible de (2.3.1) on a $\Delta u = f$ dans D' ce qui implique $\partial^2_{x_1} u = f - \partial^2_{x_2} u \ u$. D'où $\partial^2_{x_1} u \in L^2(\Omega)$ ceci termine la preuve.

2.3.2 Principe de maximum

On désigne par principe du maximum divers théorèmes affirmant l'existence ou la position du maximum (ou du minimum) de certaines fonctions numériques. En théorie des équations aux dérivées partielles, le principe du maximum faible est un théorème de **Eberhard Hopf ([7])**, généralisant un théorème de **Gauss** sur les fonctions harmoniques et sous-harmoniques qui représente une propriété des solutions de certaines edp , de type elliptique ou parabolique assurant que le maximum (ou le minimum) de la fonction solution est atteint sur la frontière de son domaine de définition Ω, mais peut aussi éventuellement être atteint à l'intérieur du domaine.
Ce principe permet de montrer la positivité de la solution du problème (2.1.7).

Proposition 2.3.1 *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$, pouri, $j = 1, ..., n$. On suppose que toutes les fonctions $a_{i,j}$ vérifient (2.1.1). Soient $f \in L^2(\Omega)$ et u la solution de (2.1.7). Si $f \geq 0$ presque partout (p.p) alors $u \geq 0$ presque partout (p.p).*

On considère pour tout $u \in C^2(\Omega)$, le problème

$$\begin{cases} -\Delta u & = & f, & \text{sur } \Omega \\ u & = & 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} .$$

tel que $f > 0$ dans Ω et la fonction u est une solution classique du problème (2.1.6) avec $a_{i,j} = 0$ si $i \neq j$ et $a_{i,j} = 1$ si $i = j$. Pour montrer que $u \geq 0$ dans Ω on raisonne par l'absurde. On suppose qu'il existe $a \in \Omega$ telle que $u(a) < 0$. On choisit alors $x \in \Omega$ tel que

$$u(x) = \{min\ u(y),\ y \in \Omega\}$$

(un tel x existe car $\bar{\Omega}$ est compact, u est une fonction continue et $u = 0$ sur le bord de Ω). On a alors

$$\nabla u(x) = 0 \text{ et } D_i^2 u(x) \geq 0 \text{ pour tout } i = 1, ..., n$$

donc $\Delta u(x) \geq 0$ en contradiction avec $\Delta u(x) = -f(x) < 0$. Finalement on en déduit que $u(x) \geq 0$ pour tout $x \in \Omega$.

Chapitre 3

Applications

3.1 Problème 1 : Équation de Laplace avec conditions de Dirichlet

Soit Ω un ensemble borné de $\mathbb{R}^2$ tel que $\Omega = [0,1] \times [0,1]$, on considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) & = & 0, & \forall x, y \in \,]0,1[\times]0,1[\\ u(0,y) & = & u(1,y) & = 0, \forall \; 0 \leq y \leq 1 \\ u(x,0) & = & 0, & \forall 0 \leq x \leq 1 \\ u(x,1) & = & f(x) \; , & \forall 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \tag{3.1.1}$$

Pour déterminer la fonction harmonique u en connaissant ces valeurs aux bords, on suit les étapes :

Étape 1 : On commence par **la formulation variationnelle** du problème (3.1.1).

a/ L'exictence et l'unicité de la solution faible du problème (3.1.1) :

On multiplie la première équation du système (3.1.1) par une fonction $v(x,y) \in C_c^2(\Omega)$ ayant le même comportement de u (x,y) sur le bord puis on intègre le résultat sur Ω, on trouve :

$$\int\limits_{\Omega} \Delta u(x,y).v(x,y) dxdy = 0$$

ce qui est équivalent à

$$\int\limits_{\Omega} \nabla u(x,y).\nabla v(x,y) \; dxdy = 0 \tag{3.1.2}$$

Résoudre le problème (3.1.2) revient à trouver

$$\left\{ u \in H^1(\Omega) \text{ solution de } a(u,v) = T(v), \; \forall v \in H^1(\Omega) \right\} \tag{3.1.3}$$

avec

$$T(v) = 0,\ \ a(u,v) = \int\limits_{\Omega} \nabla u(x,y).\nabla v(x,y)\ dxdy.$$

D'après le thèorme de Lax-Miligram (3.1.3) admet une unique solution sur $H^1(\Omega)$:

i/ Il est clair que la forme $a(u,v)$ est bilinéare grace à la linéarité de l'intégrale et de l'opérateur ∇

ii/ On vérifie la continuité de $a(u,v)$:

On a

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &= \left| \int\limits_{\Omega} \nabla u(x,y).\nabla v(x,y)\ dxdy \right| \\ &\leq \int\limits_{\Omega} |\nabla u(x,y).\nabla v(x,y)\ dxdy| \\ &\leq \int\limits_{\Omega} \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \right] \left[\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \right] dxdy. \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Cauchy Schewartz

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &\leq \left(\int\limits_{\Omega} (\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial u}{\partial y}(x,y))^2 \right)^{1/2} \left(\int\limits_{\Omega} (\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial v}{\partial y}(x,y))^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left\| \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \left[\left\| \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) \right\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \right\|_{L^2(\Omega)} \right] \left[\left\| \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \right\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \right\|_{L^2(\Omega)} \right] \\ &\leq 2 \left\| u(x,y) \right\|_{H^1(\Omega)} . \left\| v(x,y) \right\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

iii/ la coercivité :

$$\begin{aligned} a(u,u) &= \int\limits_{\Omega} (\nabla u(x,y))^2\ dxdy \\ &= \left\| \nabla u(x,y) \right\|^2_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned}
\|u(x,y)\|^2_{H^1(\Omega)} &= \|u(x,y)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u(x,y)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C_\Omega \|\nabla u(x,y)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u(x,y)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq (1+C_\Omega) \|\nabla u(x,y)\|^2_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

alors

$$a(u,u) \geq \frac{1}{(1+C_\Omega)} \|u(x,y)\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

b/ Retour à la solution classique :

La solution $u \in H^1(\Omega)$ du problème (3.1.3) est aussi solution de (3.1.1) dans un sens faible

$$\int_\Omega \nabla u(x,y).\nabla v(x,y)\ dxdy = 0,\ \forall v \in C^1_c(\Omega). \tag{3.1.4}$$

Après une integration par partie de (3.1.4), on trouve $\Delta u = 0$ $p.p$ sur Ω. Puisque $C^1_c(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$ on a alors $\Delta u = 0$ pour tout point de Ω. D'où u est une solution classique ce qui affirme la régularité de la solution implicite. Pour vérifier ce résultat on cherche la solution du problème (3.1.1) par une méthode analytique.

Étape 2 : Résolution analytique du problème (3.1.1).

La méthode proposée ici repose sur la séparation des variables x et y.NousOn suppose une solution u de la forme suivante :

$$u(x,,y) = X(x).Y(y)$$

En injectant cette dernière sur $\Delta u(x,y) = 0$, on obtient l'équation suivante :

$$X''(x).Y(y) = -Y''(y)X(x)$$

ce qui implique

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} \tag{3.1.5}$$

La solution du système (3.1.5) s'il existe est une constante λ appelée la constante de séparation telle que

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda,\ (\lambda \in \mathbb{R}). \tag{3.1.6}$$

On distingue alors trois cas :

1/ $\lambda > 0$.

2/ $\lambda = 0$.

3/ $\lambda < 0$.

Résoudre le système (3.1.6) revient à résoudre les deux éqution différentielles suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lcl} X''(x) - \lambda X(x) & = & 0, \quad \forall x \in]0,1[\\ Y''(y) + \lambda Y(y) & = & 0, \quad \forall y \in]0,1[\end{array}\right. .$$

En vérifiant les conditions aux bord données dans la deuxième équation du système (3.1.1) on obtient le problème en x suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} X''(x) & = & \lambda X(x), \quad \forall x \in]0,1[\\ X(0) & = & X(1) \quad = 0 \end{array}\right. \tag{3.1.7}$$

Le problème (3.1.7) consiste à chercher les valeurs propres et les vecteurs (les fonctions) propres de l'opérateur "dérivée seconde" dans le sous espace vectoriel de $L^2([0,1])$ formé par les fonctions de classe $\mathcal{C}^2\ (]0,1[)$ qui s'annullent en $x = 0$ et $x = 1$.
On multiplie la première équation du système (3.1.7) par $X(x)$ puis on intègre par parties, on obtient

$$\underbrace{X'(x)X(x)]_0^1}_{\to 0} - \int_0^1 (X'(x))^2\, dx = \lambda \int_0^1 (X(x))^2\, dx$$

on a donc $\lambda \leq 0$.
Pour $\lambda = 0$, le système (3.1.7) admet uniquement la solution trivial $X(x) = 0,\ \forall x \in [0,1]$ ce qui conduit à $u(x,,y) = 0,\ \forall x \in \Omega$.
On pose maintenant $\lambda = -w^2,\ w \in \mathbb{R}^*$ et on résout l'équation différentielle du second ordre

$$X''(x) + w^2 X(x) \quad = \quad 0, \quad \forall x \in]0,1[\tag{3.1.8}$$

Les solutions de (3.1.8) sont données par :

$$X(x) \quad = \quad A\sin(wx) + B\cos(wx); \quad A,\ B \in \mathbb{R}$$

En vérifiant les conditions de Dirichlet du problème (3.1.7), on trouve

$$\left\{\begin{array}{l} X(0) = B\cos 0 = 0 \\ X(1) = A\sin w = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} B = 0 \\ \sin w = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} B = 0 \\ w = n\pi \end{array}\right.$$

parce qu'on cherche des solutions non identiquement nulles. Par conséquent les valeurs propres sont

$$\lambda_n = (n\pi)^2\,,\ n \in \mathbb{N}$$

et les fonctions propres associées sont :

$$X_n(x) = A_n \sin(n\pi x),\ A_n \in \mathbb{R}.$$

De même on résout l'équation en y, la solution est donnée par

$$Y_n(x) = C_n\ \cosh(n\pi y) + D_n \sinh(n\pi y);\ C_n,\ D_n \in \mathbb{R}.$$

En vérifiant les conditions sur y, on obtient

$$Y(0) = C_n \sinh(0) + D_n \cosh(0) = 0 \Rightarrow D_n = 0.$$

D'où

$$Y(y) = C_n \sinh(n\pi y),\ C_n \in \mathbb{R}$$

Finalement la solution u_n est donnée par :

$$u_n(x,y) = A_n \sin(n\pi x).C_n \sinh(n\pi y),\ n \in \mathbb{N}^* \text{ et } A_n,\quad C_n \in \mathbb{R}$$

où u_n est l'une des solutions de l'équation de Laplace. Or d'après le principe de superposition, toute combinaison linéaire de la solution $u_n,\ n \in \mathbb{N}^*$ est elle aussi est solution de l'équation. i.e :

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} K_n \sin(n\pi x)\sinh(n\pi y),\ K_n = A_n C_n$$

Le coefficient K_n sont déterminés en vérifiant la dernière condition du problème (3.1.1).

$$u(x,1) = f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} K_n \sin(n\pi x)\sinh(n\pi)$$

représente la série de Fourier impaire de la fonction $f(x)$ où le coefficient K_n s'obtient de manière classique

$$K_n = \frac{2}{\sinh(n\pi)} \int_0^1 f(x). \sin(n\pi x) dx$$

ce qui permet d'expliciter la solution à l'équation :

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{\sinh(n\pi)} \int_0^1 f(x). \sin(n\pi x) dx \right) \sin(n\pi x) \sinh(n\pi y) \qquad (3.1.9)$$

Comme les fonctions sinus et sinus hyperbolique sont de classe C^∞ $(\mathbb{R})$ en particulier sur $[0, 1]$ alors la solution u (3.1.9) est régulière si et seulement si la fonction donnée f est régulière.

3.2 Problème 2 : Équation de Poisson avec conditions de Dirichlet homogènes

Soit un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ de bord régulier, $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$. On cherche une fonction $u \in C^2(\Omega)$ solution de problème aux limites :

$$\begin{cases} -\Delta u\,(x, y) & = & \sin(\pi x)\sin(\pi y)\,, & sur \quad (]0, 1[\times]0, 1[) \\ u\,(0, y) & = & u\,(1, y) = u\,(x, 0) = u\,(x, 1) = 0 & sur\ \partial \ \ ([0, 1] \times [0, 1]) \end{cases} \qquad (3.2.1)$$

avec

$$\Delta u\,(x, y) = \frac{\partial^2 u\,(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u\,(x, y)}{\partial y^2}$$

où $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (respectivement $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$) désigne la dérivée partielle seconde de u par rapport à x (respectivement y).

• Le système (3.2.1) est un problème aux limites car la solution est déterminée par des conditions en tous les points du bord du domaine Ω.

• C'est un problème linéaire elliptique car l'opérateur des dérivées partielles Δ est linéaire.

En appliquant la méthode de séparation de variables présentée dans l'exemple (3.1), on trouve la solution exacte du problème (3.2.1)

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi^2} \sin(\pi x) \sin(\pi y)\,. \qquad (3.2.2)$$

Il est clair que la solution (3.2.2) est unique, positive et régulière dans l'espace $\mathcal{C}^2\left([0, 1] \times [0, 1]\right)$, donc du théorème (2.3.1), on a $u \in H^2\left([0, 1] \times [0, 1]\right)$.

CONCLUSION

Les équations aux dérivées partielles de types elliptiques ont été étudiées depuis longtemps et la recherche des solutions implicites des problèmes linéaires à données dans H^{-1} dans le cadre variationnel

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ \int\limits_\Omega (A\nabla u)\,\nabla v = \langle f, v\rangle\,, \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases},$$

où $A = (a_{ij})$ est une matrice bornée et coercitive, est bien connue grâce à l'´emergence de l'analyse fonctionnelle qui fournit des informations sur l'existence, l'unicité et la stabilité de solutions sans qu'il soit besoin de recourir à leur calcul explicite.

Bibliographie

[1] G, Allaire : Analyse Numérique et Optimisation. Éditions Ellipses, Paris, (2006).

[2] D.Bettebghor, S.Marchesseau : Résolution d'Équations aux Dérivées Partielles Non Linéaires et Couplées, Ecole des Mines de Nancy, (2006-2007).

[3] H, Brezis : Analyse Fonctionnelle. Théorie et Application, Masson, Paris, (1983).

[4] C. Daveau : Méthodes d'Approximation des Équations aux Dérivées Partielles. Cours de Master 2 de l'Université de Cergy-Pontoise.

[5] B.Helffer : Introduction aux Équations aux Dérivées Partielles, Université Paris-Sud, Version de Janvier - Mai, (2007).

[6] R. Herbin : Analyse Numérique des EDP. Cours de Master de mathématiques de l'Université Aix Marseille 1.

[7] S. Morawetz, James B. Serrin and Yakov G. Sinai : Selected works of Eberhard Hopf with commentariesAmerican Mathematical Society, Providence, RI, 2002. xxiv+386 pp (ISBN 978-0-8218-2077-3).

[8] M. H. Vignal : Modélisation, Équations aux Dérivées Partielles. Cours de Master Mathématique de l'Université Paul Sabotier, Toulouse, (2000).