

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE ABDELHAMIDE IBN BADIS DE
MOSTAGANEM



FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET
D'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET
INFORMATIQUE

MEMOIRE

Présenté par
Melle **Fatiha BOUALAM**

Pour obtenir le
DIPLÔME DE MASTER

Spécialité: Mathématiques
Option : Analyse Harmonique et EDP

Intitulé :

Calcul Fractionnaire et L'ondelette CAS
(Cosin And Sin)

Soutenu le 13/06/2013

Devant les membres du jury:

Président:	Sadek GALA	MC	UMAB
Examineur:	Mansouria SAIDANI	MA	UMAB
Encadreur:	Sidi Mohamed BAHRI	MCA	UMAB

Promotion :2012-2013

1 L-Z transformée

1.1 La transformée de laplace

Table des matières

Introduction	1
1 Calcul fractionnaire	2
1.1 Outils de base	2
1.1.1 La fonction Gamma d'Euler	2
1.1.2 La fonction Bêta	3
1.2 Intégration non entière	3
1.2.1 Propriétés	4
1.3 Dérivation non entière:	7
1.3.1 Opérateur de dérivée $n^{i\grave{e}me}$	7
1.3.2 Approche de Riemann-Liouville	7
1.3.3 Approche de Caputo	9
2 L'ondelette CAS(Cosin And Sin)	11
2.1 Définition des ondelettes	11
2.1.1 Ondelettes CAS	12
2.1.2 Fonction d'approximation	12
2.2 Matrice opérationnelle d'ondelette CAS	13
2.2.1 Matrice opérationnelle d'intégration d'ondelette CAS	13
2.2.2 L'avantage de la méthode d'ondelette CAS	19
3 Application	20
3.1 Solution Numérique d'une Equation Intégrale de Fredholm	20
3.1.1 Equation linéaire de Fredholm	20
3.1.2 Méthode de résolution des équations intégrales de Fredholm	21
3.2 Les équations intégro -différentielles	27

3.2.1	La méthode de résolution des équations intégrales linéaires de Fredholm	27
3.3	Une méthode d'ondelettes CAS pour la résolution d'une équation intégrale non linéaire de Fredholm d'ordre fractionnaire	36
3.3.1	Les fonctions à plusieurs blocs	37
3.3.2	Matrice opérationnelle d'intégration fractionnaire	38
3.3.3	Application de la méthode	41
3.3.4	Analyse d'erreur	43
3.3.5	Exemples numériques	43
	Conclusion	47
	Bibliographie	50

Remerciement

Avant tout, je remercie Dieu le tout puissant qui m'a donné le courage.

Je tiens tout d'abord à adresser mes plus vifs remerciements à Monsieur Sidi Mohamed BAHRI mon encadreur qui m'a guidé dans cette étude, pour son aide continue ses en couragements sans cesse et ses conseils précieux.

Je n'oublierai pas de remercier également Monsieur le président du jury, Monsieur Sadek GALA et l'examinatrice Madame Mansouria.SAIDANI

Je remercie l'ensemble des membres du département de Mathématique et Informatique à l'université de Abdelhamid Ibn Badis-Mostaganem.

Mon remerciement s'adresse aussi a tous ceux qui m'ont poussé vers la réussite en particulier :

Mes parents, mon frère et mes sœurs, tous mes enseignants.

Introduction

La conception du calcul fractionnaire était présenté au milieu du 19^{ème} siècle. L'utilisation des opérateurs intégrals et différentiels d'ordre fractionnaire dans les modèles mathématiques est devenue de plus en plus répandue ces dernières années. Cependant, dans le dernier siècle la plus part des problèmes fractionnaires dans des applications de la technologie et des sciences ont été trouvés . Par exemple, l'oscillation non linéaire du tremblement de terre peut être modelisé avec les dérivées fractionnaires.

Parallement, la théorie des ondelettes est un nouveau domaine naissant dans la recherche mathématique. Son utilisation a eu un grand succès dans l'analyse du signal pour la représentation et les segmentations de forme d'onde.

Dans ce travail, nous introduisons les ondelettes CAS (Cosin And Sin) pour présenter une méthode numérique pour approcher la solution des équations intégrales,intégro-différentielles et intégro-différentielles non linéaires d'ordre fractionnaire .

Ce mémoire comporte trois chapitres. Le premier chapitre consiste en les généralités sur les outils de bases : fonction Gamma, fonction Beta, dérivation et intégration d'ordre non entier.

Dans le second chapitre, on étudie les ondelettes d'une maniere générale ensuite on prend comme exemple les ondelettes CAS.

Pour le dernier chapitre, on prend quelques exemples numériques qui illustres la méthode des ondelettes CAS introduite dans le scond chapitre.

Chapitre 1

Calcul fractionnaire

La théorie de dérivation fractionnaire est un sujet presque aussi ancien que le calcul classique tel que, nous le connaissons aujourd'hui, ses origines remontent [22] à la fin du 17^{ème} siècle. A cet époque, Newton et Leibniz ont développé les fondements du calcul différentiel et intégral. En particulier, Leibniz a présenté le symbole $\frac{d^n}{dt^n} f$ pour désigne, a $n^{\text{ième}}$ dérivée d'une fonction f .

Quand il l'a annoncé dans une lettre adressée à l'Hôpital, il a répondu : que signifie $\frac{d^n}{dt^n} f$ si $n = \frac{1}{2}$?

Dans ce chapitre on va rappelle, les notions et les définitions de base sur du calcul fractionnaire, dont le but de résolution des équations intégral-différentielles d'ordre fractionnaire par une méthode numérique (dans chapitre 3).

1.1 Outils de base

1.1.1 La fonction Gamma d'Euler

L'une des fonctions de base utilisée dans le calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler qui prolonge le factoriel aux valeurs réelles.

Définition 1 *La forme intégrale de la fonction Gamma est donnée par [22] :*

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad z > 0. \quad (1.1)$$

L'intégration par partie de (1.1) conduit à la relation de récurrence suivante :

Pour tout $z \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$, et $m \in \mathbb{N}$, on a

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$$

et

$$\Gamma(z + m) = z(z + 1) \dots (z + m - 1) \Gamma(z).$$

$$\Gamma(n + 1) = n!.$$

Au- dessus le graphe de fonction Gamma d'Euler

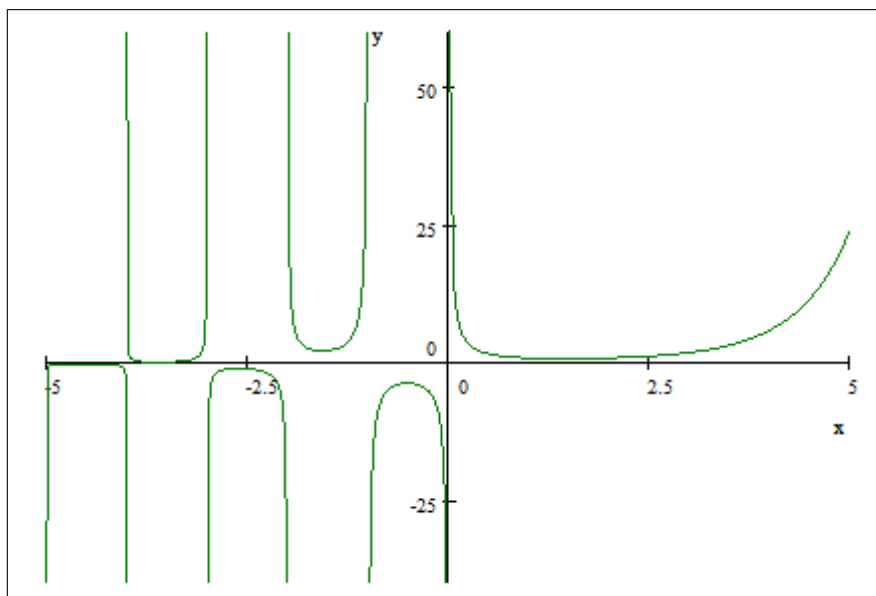


Figure 1.1 :Graphe de la fonction Gamma d'Euler

1.1.2 La fonction Bêta

Définition 2 On définit la fonction Bêta par [22] :

$$B(\alpha, \beta) := \int_0^1 (1 - u)^{\alpha-1} u^{\beta-1} du, \quad \alpha > 0, \beta > 0. \quad (1.2)$$

Les fonctions Gamma et Bêta sont reliées par la relation :

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} \quad (1.3)$$

1.2 Intégration non entière

Dans ce paragraphe, on donne les définitions de base liées aux intégrales au sens de Riemann-Liouville.

Définition 3 Soit f une fonction continue sur $[0, \infty[$. On définit l'opérateur intégral fractionnaire d'ordre α au sens de Riemann-Liouville par la formule :

$$\begin{aligned} J^\alpha f(t) &: = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau; & \alpha > 0, t > 0 \\ J^0 f(t) &: = f(t). \end{aligned} \quad (1.4)$$

1.2.1 Propriétés

Dans ce paragraphe, on donne quelques propriétés liées aux intégrales fractionnaires.

Proposition 1 Soit J^α l'opérateur intégral fractionnaire d'ordre α de Riemann-Liouville. On a :

$$J^\alpha t^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} t^{\alpha+\beta}, \quad \alpha > 0, \beta > -1, t > 0, \quad (1.5)$$

Preuve. Par définition, on a

$$J^\alpha t^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \tau^\beta d\tau$$

ce qui est équivalent à :

$$J^\alpha t^\beta = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \left(1 - \frac{\tau}{t}\right)^{\alpha-1} \tau^\beta d\tau$$

On pose $\frac{\tau}{t} = y$, on obtient alors :

$$\begin{aligned} J^\alpha t^\beta &= \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (1-y)^{\alpha-1} t^{\beta+1} y^\beta dy \\ &= \frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-y)^{\alpha-1} y^\beta dy \\ &= \frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha, \beta+1) \end{aligned}$$

Puis, en utilisant la relation (1.3) entre les deux fonctions Γ et B , on a :

$$J^\alpha t^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} t^{\alpha+\beta}, \quad \alpha > 0, \beta > -1, t > 0$$

Ainsi la propriété (1.4) est démontrée. □

Proposition 2 Soient $\alpha > 0, \beta > 0$, on a la propriété du semi -groupe suivante :

$$(J^\alpha \circ J^\beta) f(t) = (J^\beta \circ J^\alpha) f(t) = J^{\alpha+\beta} f(t) \quad (1.6)$$

Preuve. Par définition, on a :

$$\begin{aligned} J^\alpha J^\beta f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \left[\int_0^\tau (\tau-\rho)^{\beta-1} f(\rho) d\rho \right] d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t \left[\int_0^\tau (t-\tau)^{\alpha-1} (\tau-\rho)^{\beta-1} f(\rho) d\rho \right] d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^\tau \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} (\tau-\rho)^{\beta-1} f(\rho) d\tau \end{aligned}$$

En utilisant (1.5), on obtient :

$$\begin{aligned} J^\alpha J^\beta f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^\tau \left(J^\alpha (\tau-\rho)^{\beta-1} f(\rho) \right) d\rho \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^\tau \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (\tau-\rho)^{\alpha+\beta-1} f(\rho) d\rho \\ &= J^{\alpha+\beta} f(t) \\ &= J^{\beta+\alpha} f(t). \end{aligned}$$

□

Proposition 3 Soient $c > 0, \alpha > 0$, on a alors :

$$J_{-\infty}^\alpha e^{ct} = c^{-\alpha} e^{ct}. \quad (1.7)$$

Preuve. Avec les mêmes arguments que précédemment, on obtient :

$$J_{-\infty}^\alpha e^{ct} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^t (t-\tau)^{\alpha-1} e^{c\tau} d\tau,$$

Si on pose $(t-\tau) = y$, on obtient alors :

$$\begin{aligned}
J_{-\infty}^{\alpha} e^{ct} &= -\frac{e^{ct}}{\Gamma(\alpha)} \int_{+\infty}^0 y^{\alpha-1} e^{-cy} dy \\
&= \frac{e^{ct}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} y^{\alpha-1} e^{-cy} dy
\end{aligned}$$

Le changement de variable $t = cy$ transforme cette dernière intégrale en :

$$J_{-\infty}^{\alpha} e^{ct} = \frac{e^{ct}}{c^{\alpha} \Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt,$$

Donc, si on pose $(t - \tau) = y$, on obtient :

$$\begin{aligned}
J_{-\infty}^{\alpha} e^{ct} &= -\frac{e^{ct}}{\Gamma(\alpha)} \int_{+\infty}^0 y^{\alpha-1} e^{-cy} dy \\
&= \frac{e^{ct}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} y^{\alpha-1} e^{-cy} dy
\end{aligned}$$

Le changement de variable $t = cy$ transforme cette dernière intégrale en :

$$J_{-\infty}^{\alpha} e^{ct} = \frac{e^{ct}}{c^{\alpha} \Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt,$$

D'où

$$J_{-\infty}^{\alpha} e^{ct} = \frac{e^{ct} \Gamma(\alpha)}{c^{\alpha} \Gamma(\alpha)} = \frac{e^{ct}}{c^{\alpha}},$$

ce qui achève la démonstration de la proposition . □

Exemple 1 *Considérons la fonction $f(x) = (t - a)^{\beta}$. Alors*

$$J^{\alpha} (t - a)^{\beta} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} (\tau - a)^{\beta} d\tau$$

Pour évaluer cette intégrale on pose le changement $\tau = a + (t - a)s$, d'où

$$\begin{aligned}
J^{\alpha} (t - a)^{\beta} &= \frac{(t - a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1 - s)^{\alpha-1} s^{\beta} ds \\
&= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 + \alpha)} (t - a)^{\beta+\alpha}
\end{aligned}$$

après utilisation de la relation (1.3)

On voit bien que c'est une généralisation du cas $\alpha = 1$ où on a

$$J^1 (t - a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 2)} (t - a)^{\beta+1} = \frac{(t - a)^{\beta+1}}{\beta + 1}$$

à cause de la relation $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$

Exemple 2 Considérons la fonction $f(x) = x^\beta$, pour $\beta > -1$

$$J^\alpha x^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} \tau^\beta d\tau, \text{ pour } \alpha > 0, \beta > -1$$

on pose $\tau = pt, dt = tdp$, on aura :

$$\begin{aligned} J^\alpha &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (t - pt)^{\alpha-1} (pt)^\beta t dp \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1} (1 - p)^{\alpha-1} p^\beta t^\beta t dp \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1+\beta+1} \int_0^1 (1 - p)^{\alpha-1} p^\beta dp \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1+\beta+1} B = (\beta - 1, \alpha). \end{aligned}$$

1.3 Dérivation non entière:

Il y a beaucoup d'approches pour la dérivation fractionnaire, nous allons souligner quelques unes, à savoir l'approche de Riemann-Liouville et l'approche de Caputo.

1.3.1 Opérateur de dérivée $n^{\text{ième}}$

Définition 4 La dérivation entière d'ordre n d'une fonction f est donnée par :

$$D^n f(t) = \frac{d^n}{dx^n} f(t). \quad (1.8)$$

1.3.2 Approche de Riemann-Liouville

Définition 5 1. Soit $f \in C^1([a, b])$, la dérivée fractionnaire d'ordre α ($0 < \alpha < 1$) au sens de Riemann-Liouville est

$$D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t - \tau)^{-\alpha} f(\tau) d\tau. \quad (1.9)$$

2. Soit $f \in C^n([a, b])$, on définit la dérivée d'ordre α ($0 \leq n - 1 < \alpha < n$) au sens de

Riemann-Liouville par

$$D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau = D^n J^{n-\alpha} f(t) \quad (1.10)$$

3. Soit $f \in C([a, b])$, la dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha < 0$ au sens de Riemann-Liouville est

$$\begin{aligned} D^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha-1} f(\tau) d\tau \\ &= J^{-\alpha} f(t). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Propriétés:

Soient α, β deux paramètres réels et $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$. Alors, on a :

1. $D^\alpha J^\alpha f(x) = f(x), \alpha > 0$.
2. $J^\alpha D^\alpha f(x) \neq f(x), \alpha > 0$.
3. $D^\beta J^\alpha f(x) = D^{\beta-\alpha} f(x), \beta < 0, \alpha > 0$.
4. $D^n D^\alpha f(x) = D^{n+\alpha} f(x), \alpha > 0, n \in \mathbb{N}$.
5. $D^\alpha D^\beta f(x) \neq D^\beta D^\alpha f(x)$.
6. $D^\beta D^\alpha f(x) \neq D^{\alpha+\beta} f(x)$.

Exemples

1. En général la dérivée non entière d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville n'est pas nulle ni constante mais on a :

$$D^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)} (t-a)^{-\alpha}.$$

2. La dérivée de $f(t) = (t-a)^\beta$ au sens de Riemann-Liouville

Soit α non entier et $0 \leq n-1 < \alpha < n$ alors on a

$$D^\alpha (t-a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} (\tau-a)^\beta d\tau.$$

En faisant le changement de variable $\tau = a + s(t - a)$ on aura :

$$\begin{aligned}
D^\alpha (t - a)^\beta &= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dt^n} (t - a)^{n+\beta-\alpha} \int_0^1 (1 - s)^{n-\alpha-1} s^\alpha ds \\
&= \frac{\Gamma(n + \beta - \alpha + 1) \beta(n - \alpha, \beta + 1)}{\Gamma(n - \alpha) \Gamma(\beta - \alpha + 1)} (t - a)^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(n + \beta - \alpha + 1) \Gamma(n - \alpha) \Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(n - \alpha) \Gamma(\beta - \alpha + 1) \Gamma(n + \beta - \alpha + 1)} (t - a)^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} (t - a)^{\beta-\alpha}
\end{aligned}$$

Par exemple

$$\begin{aligned}
D^{0.5} t^{0.5} &= \frac{\Gamma(1.5)}{\Gamma(1)} \\
&= \Gamma(1.5).
\end{aligned}$$

1.3.3 Approche de Caputo

Définition 6 Soit $f \in C^n([a, b])$. On définit la dérivée fractionnaire au sens de Caputo de la fonction f comme suit :

$$\begin{aligned}
D_*^\alpha f(t) &= \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau; & n - 1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}^* \\ \frac{d^n}{dt^n} f(t); & \alpha = n, a < t \leq b \end{cases} \quad (1.12) \\
&= J^{n-\alpha} D^n f(t).
\end{aligned}$$

Propriétés :

1. $D_*^\alpha C = 0$; C est une constante.
2. $D_*^\alpha t^\beta = \begin{cases} \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(-\alpha + \beta + 1)} t^{\beta-\alpha}; & \text{si } \beta > \alpha - 1 \\ 0; & \text{si } \beta \leq \alpha - 1. \end{cases}$
3. $D^\alpha f(t) = D_*^\alpha f(t) + \sum_{K=0}^{n-1} f^{(k)}(0) \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k - \alpha + 1)}$, $a = 0, t > 0, n - 1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}^*$.

Exemple 3 la dérivée de $f(t) = (t - a)^\beta$ au sens de Caputo

Soit α non entier $0 \leq n - 1 < \alpha < n$ avec $\beta > n - 1$ alors on a :

$$f^{(n)}(\tau) = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - n + 1)} (\tau - a)^{\beta-n} \quad d'où$$

$$D_*^\alpha (t - a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(n - \alpha) \Gamma(\beta - n + 1)} \int_a^t (t - \tau)^{n-\alpha-1} (\tau - a)^{\beta-n} d\tau$$

En faisant le changement de variable $\tau = a + s(t - a)$ on aura :

$$\begin{aligned}
D_*^\alpha (t-a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} (\tau-a)^{\beta-n} d\tau \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} (t-a)^{\beta-\alpha} \int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1} s^{\beta-n} ds \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)B(n-\alpha, \beta-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} (t-a)^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha}
\end{aligned}$$

Chapitre 2

L'ondelette CAS(Cosin And Sin)

Les ondelettes sont des fonctions mathématiques qui coupent les données en différents composantes fréquentielles et étudient chaque composante avec une résolution assortie à sa échelle. L'avantage qu'elles ont sur la transformée de Fourier traditionnelle réside dans l'analyse physique de situations dans les quelles le signal contient des discontinuités et des fluctuations (changements rapide). Les ondelettes ont été développées différemment dans les champs de mathématique, de la physique quantique, l'électrotechnique, et géologie sismique. Dans ce chapitre on étudie les ondelettes d'une manière générale, ensuite on prend comme exemple les ondelettes CAS.

2.1 Définition des ondelettes

Les ondelettes constituent une famille de fonctions construites à partir de la dilatation et la translation d'une fonction unique appelée "ondelette mère". Lorsque le paramètre de dilatation a et le paramètre de translation b varient de façon continue, nous avons une famille d'ondelettes continues [7]

$$\psi_{a,b}(t) = |a|^{\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right); a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0. \quad (2.1)$$

Si nous choisissons les paramètres a et b alors des valeurs discrètes $a = a_0^{-k}, b = nb_0 a_0^{-k}, a_0 > 1, b_0 > 0$ et n et k sont entiers positifs, alors on aura la famille suivante des ondelettes discrètes :

$$\psi_{k,n}(t) = |a_0|^{\frac{k}{2}} \psi(a_0^k t - nb_0) \quad (2.2)$$

où les $\psi_{k,n}(t)$ forment une base d'ondelettes dans $L^2(\mathbb{R})$. En particulier, lorsque $a_0 = 2, b_0 = 1$

alors $\psi_{k,n}$ forment une base orthonormée [7].

2.1.1 Ondelettes CAS

L'ondelette CAS $\psi_{n,m}(t) = \psi(k, n, m, t)$ admet quatre arguments n, m, k, t où $n = 0, 1, 2, \dots, 2^k - 1$, on peut suppose k un entier positif quelconque, m est un entier et t est le temps normalisé. Elles définies sur l'intervalle $[0, 1]$ par :

$$\psi_{n,m}(t) = \begin{cases} 2^{\frac{k}{2}} f_m(2^k t - n) & ; \text{si } \frac{n}{2^k} \leq t \leq \frac{n+1}{2^k} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.3)$$

où

$$f_m(t) = \cos(2\pi mt) + \sin(2\pi mt).$$

Le paramètre de dilatation est $a = 2^{-k}$ et le paramètre de translation est $b = n2^{-k}$.

Propriétés

- 1) L'ensemble des ondelettes CAS forme une base orthonormée pour $L^2([0, 1])$.
- 2) L'ondelette CAS admet un support compact

$$\text{supp } \psi_{n,m}(t) = \overline{\{x : \psi_{n,m}(x) \neq 0\}} = \left[\frac{n}{2^k}, \frac{n+1}{2^k} \right].$$

Pour plus de détails voir [11].

2.1.2 Fonction d'approximation

Toute fonction f définie sur $[0, 1]$ peut être développée comme suit :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m \in \mathbb{Z}} C_{n,m} \psi_{n,m}(t) \text{ où } C_{n,m} = (f(t), \psi_{n,m}(t)) \quad (2.4)$$

$(., .)$ désigne le produit scalaire dans $L^2([0, 1])$.

Si la série infinie de l'équation (2.4) est troncquée, on peut écrire l'équation (2.4) comme suit

$$f(t) \cong \sum_{n=0}^{2^k-1} \sum_{m=-M}^{+M} C_{n,m} \psi_{n,m}(t) = C^T \Psi(t) \quad (2.5)$$

où: C et Ψ sont des matrices de dimension $2^k(2M + 1) \times 1$ donnés par :

$$C = \left[C_{0(-M)}, C_{0(-M+1)}, \dots, C_{0M}, C_{1(-M)}, \dots, C_{1M}, \dots, C_{(2^{k-1})(-M)}, \dots, C_{2^{k-1}M} \right]^T \quad (2.6)$$

et

$$\Psi(t) = \left[\psi_{0(-M)}, \psi_{0(-M+1)}, \dots, \psi_{0M}, \psi_{1(-M)}, \dots, \psi_{1M}, \dots, \psi_{(2^{k-1})(-M)}, \dots, \psi_{(2^{k-1})M} \right]^T. \quad (2.7)$$

2.2 Matrice opérationnelle d'ondelette CAS

2.2.1 Matrice opérationnelle d'intégration d'ondelette CAS

Dans cette partie, on présente une méthode pour construire une matrice opérationnelle d'intégration d'ondelette CAS, nous utiliserons cette matrice dans le dernier chapitre pour résoudre certaines équations.

On a la définition de la matrice opérationnelle d'intégration d'ondelette CAS de dimension comme suit :

$$\int_0^t \Psi_6(t') dt' = P_{6 \times 6} \Psi_6(t)$$

Pour construire la matrice P de dimension 6×6 , on prend $M = 1$ et $k = 1$, les six fonctions de bases obtient par : (2.8) et (2.9)

$$\begin{aligned} \psi_{0(-1)}(t) &= 2^{\frac{1}{2}}(\cos(2\pi(-1))(2t - 0)) + \sin(2\pi(-1)(2t - 0)) \\ &= 2^{\frac{1}{2}}(\cos(-4\pi t) + \sin(-4\pi t)) \end{aligned}$$

on a $\cos(-t) = \cos(t)$ et $\sin(-t) = -\sin(t)$

donc $\cos(-4\pi t) = \cos(4\pi t)$ et $\sin(-4\pi t) = -\sin(4\pi t)$

alors

$$\psi_{0(-1)}(t) = 2^{\frac{1}{2}}(\cos(4\pi t) - \sin(4\pi t))$$

et

$$\begin{aligned}\psi_{00}(t) &= 2^{\frac{1}{2}}(\cos(0) + \sin(0)) \\ &= 2^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

donc $\psi_{00}(t) = 2^{\frac{1}{2}}$.

D'une manière similaire, on obtient :

$$\left. \begin{aligned}\psi_{0(-1)}(t) &= 2^{\frac{1}{2}}(\cos(4\pi t) - \sin(4\pi t)) \\ \psi_{00}(t) &= 2^{\frac{1}{2}} \\ \psi_{01}(t) &= 2^{\frac{1}{2}}(\cos(4\pi t) + \sin(4\pi t))\end{aligned}\right\} 0 \leq t < \frac{1}{2} \quad (2.8)$$

$$\left. \begin{aligned}\psi_{1(-1)}(t) &= 2^{\frac{1}{2}}(\cos(4\pi t) - \sin(4\pi t)) \\ \psi_{1(0)}(t) &= 2^{\frac{1}{2}} \\ \psi_{1(1)}(t) &= 2^{\frac{1}{2}}(\cos(4\pi t) + \sin(4\pi t))\end{aligned}\right\} \frac{1}{2} \leq t < 1 \quad (2.9)$$

Quelques graphes

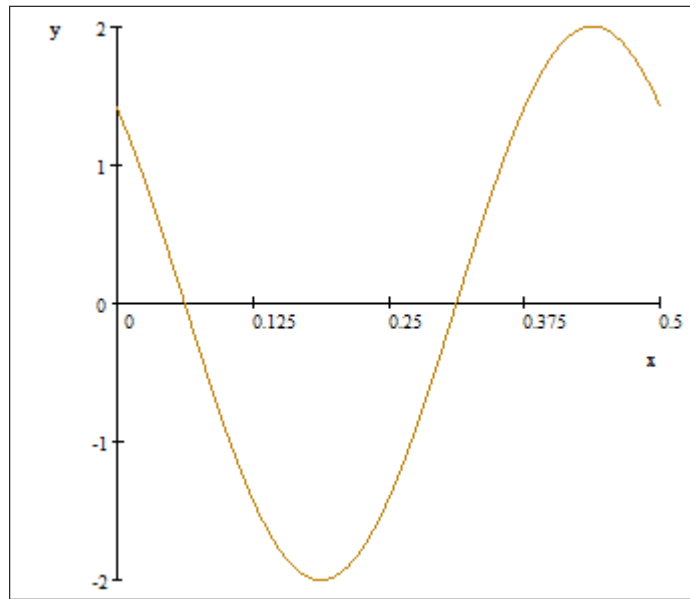


Figure 2.1 : Graphe de la fonction de base $\psi_{0(-1)}(t)$

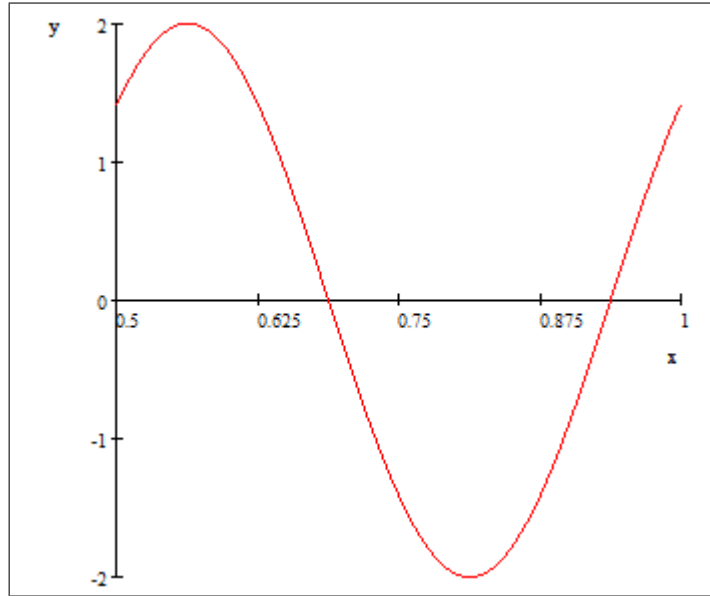


Figure 2.2 : Graphe de la fonction de base $\psi_{11}(t)$

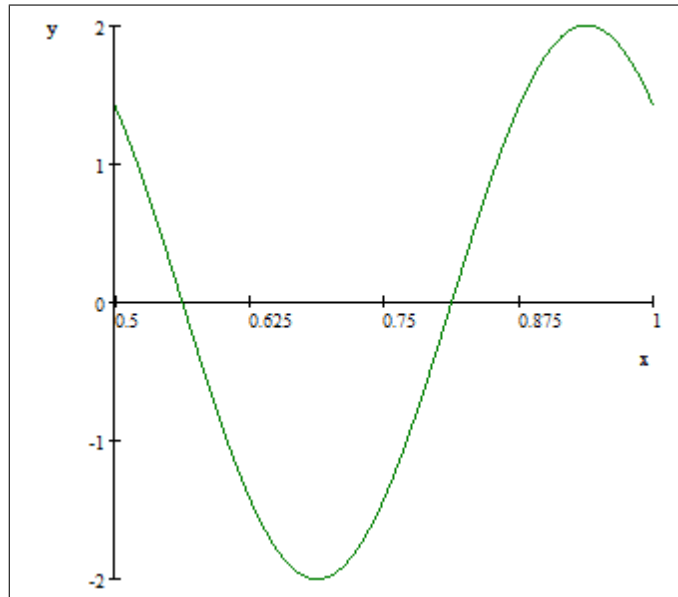


Figure 2.3 : Graphe de la fonction de base $\psi_{1(-1)}(t)$

En intégrant (2.8) et (2.9) de 0 à t , on obtient :

$$\begin{aligned}
 \int_0^t \psi_{0(-1)}(\dot{t}) dt &= \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{4\pi}(\cos(4\pi t) + \sin(4\pi t) - 1) & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \leq t < 1 \end{cases} \\
 &= \frac{1}{4\pi}(-\psi_{00}(t) + \psi_{01}(t)) \\
 &= \left[0, -\frac{1}{4\pi}, \frac{1}{4\pi}, 0, 0, 0\right] \Psi_6(t).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^t \psi_{00}(t') dt' &= \begin{cases} \sqrt{2t} & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \leq t < 1 \end{cases} \\
&= \frac{1}{4\pi} \psi_{0(-1)}(t) + \frac{1}{4} \psi_{00}(t) + \psi_{01}(t) + \frac{1}{2} \psi_{10}(t) \\
&= \left[\frac{1}{4\pi}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4\pi}, 0, \frac{1}{2}, 0 \right] \Psi_6(t).
\end{aligned}$$

De la même manière, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^t \psi_{01}(t') dt' &= \frac{1}{4\pi} (\psi_{0(-1)}(t) + \psi_{00}(t)) \\
&= \left[\frac{1}{4\pi}, \frac{1}{4\pi}, 0, 0, 0, 0 \right] \Psi_6(t). \\
\int_0^t \psi_{1(-1)}(t') dt' &= \frac{1}{4\pi} (-\psi_{10}(t) + \psi_{11}(t)) \\
&= \left[0, 0, 0, 0, -\frac{1}{4\pi}, \frac{1}{4\pi} \right] \Psi_6(t). \\
\int_0^t \psi_{10}(t') dt' &= \frac{1}{4\pi} \psi_{1(-1)}(t) + \frac{1}{4} \psi_{10}(t) - \frac{1}{4\pi} \psi_{11}(t) \\
&= \left[0, 0, 0, \frac{1}{4\pi}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4\pi} \right] \Psi_6(t). \\
\int_0^t \psi_{11}(t') dt' &= \frac{1}{4\pi} (\psi_{1(-1)}(t) + \psi_{10}(t)) \\
&= \left[0, 0, 0, 0, \frac{1}{4\pi}, -\frac{1}{4\pi} \right] \Psi_6(t).
\end{aligned}$$

Graphes :

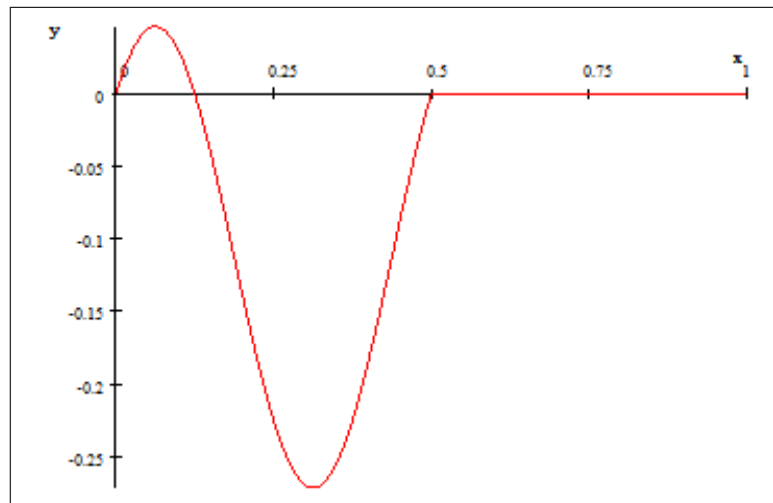


Figure 2.4 : Graphe de $\int_0^t \psi_{0(-1)}(t') dt'$

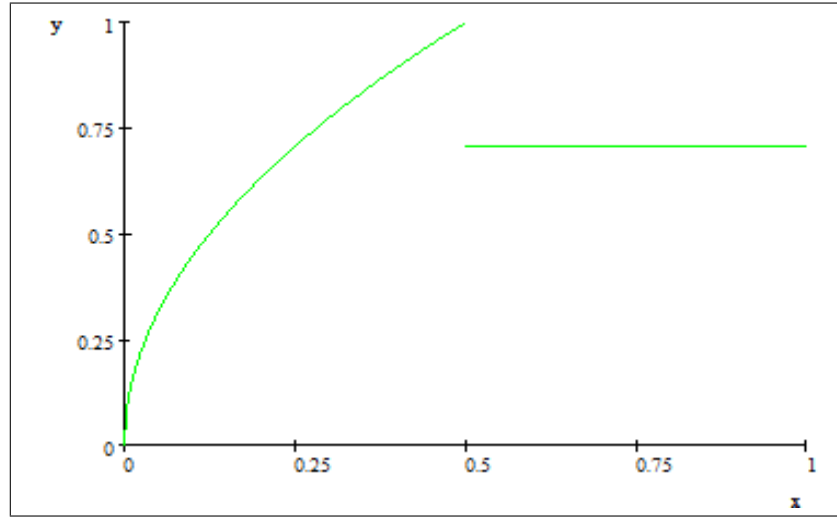


Figure 2.5 : Graphe de $\int_0^t \psi_{00}(t') dt'$

Ainsi, comme

$$\int_0^t \Psi_6(t') dt' = P_{6 \times 6} \Psi_6(t) \quad (2.10)$$

où : $\Psi_6(t) = [\psi_{0(-1)}, \psi_{00}, \psi_{01}, \psi_{1(-1)}, \psi_{10}, \psi_{11}]^\top$

alors

$$P_{6 \times 6} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\pi} & \frac{1}{\pi} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\pi} & 1 & -\frac{1}{\pi} & 0 & 2 & 0 \\ \frac{1}{\pi} & \frac{1}{\pi} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\pi} & \frac{1}{\pi} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\pi} & 1 & -\frac{1}{\pi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\pi} & \frac{1}{\pi} \end{bmatrix}.$$

L'indice de $P_{6 \times 6}$ et $\Psi_6(t)$ désigne la dimension, on peut écrire la matrice $P_{6 \times 6}$ comme suit :

$$P_{6 \times 6} = \begin{bmatrix} L_{3 \times 3} & F_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & L_{3 \times 3} \end{bmatrix}$$

où :

$$L_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\pi} & \frac{1}{\pi} \\ \frac{1}{\pi} & 1 & -\frac{1}{\pi} \\ \frac{1}{\pi} & \frac{1}{\pi} & 0 \end{bmatrix}$$

et

$$F_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En général, on trouve:

$$\int_0^t \Psi(\acute{t})d\acute{t} = P\Psi(t)$$

où $\Psi(t) = [\psi_{0(-M)}, \psi_{0(-M+1)}, \dots, \psi_{0M}, \psi_{1(-M)}, \dots, \psi_{1M}, \dots, \psi_{(2^k-1)(-M)}, \dots, \psi_{(2^k-1)M}]^\top$ et P est une matrice de dimension $(2^k(2M+1)) \times (2^k(2M+1))$ obtenue par

$$P = \frac{1}{2^{k+1}} \begin{bmatrix} L & F & F & . & F \\ 0 & L & F & . & F \\ . & 0 & \ddots & \ddots & . \\ . & . & . & . & F \\ 0 & 0 & . & 0 & L \end{bmatrix}$$

où F et L sont des matrices de dimension $(2M+1) \times (2M+1)$ données par :

$$F = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

et

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{M\pi} & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{M\pi} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{(M-1)\pi} & 0 & \dots & \frac{1}{(M-1)\pi} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{\pi} & \frac{1}{\pi} & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{\pi} & \frac{1}{\pi} & \dots & \frac{1}{\pi} & 1 & \frac{1}{\pi} & \dots & \frac{1}{\pi} & \frac{1}{\pi} \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\pi} & \frac{1}{\pi} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \frac{1}{(M-1)\pi} & \dots & 0 & \frac{1}{(M-1)\pi} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{M\pi} & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{M\pi} & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

L'intégration d'un produit de deux fonctions vectorielles CAS donne :

$$I = \int_0^t \Psi(t)\Psi(t)^\top dt \quad (2.11)$$

où I est la matrice identité.

2.2.2 L'avantage de la méthode d'ondelette CAS

Puisque, l'intégration du produit de deux fonctions vectorielles d'ondelettes CAS est une matrice d'identité et la matrice des équations algébriques est un bon outil, alors la méthode d'ondelette CAS est numériquement efficace.

Chapitre 3

Application

3.1 Solution Numérique d'une Equation Intégrale de Fredholm

3.1.1 Equation linéaire de Fredholm

Dans cette section, nous sommes concernés par l'application des ondelettes CAS à la résolution numérique d'une équation intégrale de Fredholm de la forme :

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 K(x, t)y(t)dt, \quad 0 \leq x, t \leq 1. \quad (3.1)$$

Les équations intégrales linéaires de Fredholm de la deuxième forme est une équation du type

$$\Phi(x) - \lambda \int_0^1 K(x, y)\Phi(y)dy = f(x), \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (3.2)$$

Tandis que l'équation intégrale linéaire de Fredholm de la première forme est donnée par :

$$\int_0^1 K(x, y)\Phi(y)dy = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (3.3)$$

Dans l'équation (3.1), où $f(x)$ et le noyau $K(x, t)$ sont supposés dans $L^2(\mathbb{R})$ sur l'intervalle $0 \leq x, t \leq 1$ et l'équation (3.1) a une solution unique y à déterminer.

Dans cette section, une nouvelle méthode numérique pour résoudre des équations intégrales de Fredholm est présentée. La méthode réduit les équations intégrales à un ensemble d'équations algébriques.

3.1.2 Méthode de résolution des équations intégrales de Fredholm

Considérons les équations intégrales de Fredholm qui sont données par l'équation (3.1). Pour employer des ondelettes CAS, on pose :

$$y(x) = C^\top \Psi(x), \quad (3.4)$$

$$f(x) = d^\top \Psi(x) \quad (3.5)$$

et

$$K(x, t) = \Psi(x)^\top \mathbf{K} \Psi(t) \quad (3.6)$$

où C et $\Psi(x)$ sont définies par les équations (2.6), (2.7) respectivement.

De plus, \mathbf{K} est une matrice de dimension $2^k (2M + 1) \times 2^k (2M + 1)$ et les éléments de \mathbf{K} sont calculés par

$$\int_0^1 \int_0^1 \psi_{ni} \psi_{lj} K(x, t) dt dx \quad (3.7)$$

où $n = 1, 2, \dots, 2^k, i = -M, \dots, M, l = 1, \dots, 2^k, j = -M, \dots, M$.

On remplace (3.4), (3.5) et (3.6) dans (3.1), on trouve

$$\begin{aligned} C^\top \Psi(x) &= d^\top \Psi(x) + \lambda \int_0^1 \Psi(x)^\top \mathbf{K} \Psi(t) C^\top \Psi(t) dt \\ &= d^\top \Psi(x) + \lambda \Psi(x)^\top \mathbf{K} C^\top \int_0^1 \Psi(t) \Psi(t) dt. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Ainsi avec l'orthonormalité des ondelettes CAS nous avons

$$\Psi(x)^\top C = \Psi(x)^\top d + \lambda \Psi(x)^\top \mathbf{K} C \int_0^1 \Psi(t)^\top \Psi(t) dt.$$

Puisque $\int_0^1 \Psi(t)^\top \Psi(t) dt = 1$,

alors

$$\Psi(x)^\top C = \Psi(x)^\top d + \lambda \Psi(x)^\top \mathbf{K} C. \quad (3.9)$$

L'équation (3.9) est un système linéaire en C , ainsi $C = (I - \mathbf{K})^{-1} d$, où I est la matrice identité.

Exemple 4 Soit $y(x) = \cos(4\pi t) + \int_0^1 ty(t) dt$.

On pose, $y(x) = C^\top \Psi(x)$ et $f(x) = d^\top \Psi(x)$

Soit $k = 1$ et $M = 1$.

Pour $x = 0$, on trouve

$$\begin{aligned}
\psi_{0(-1)}(x) &= \sqrt{2}(\cos(4\pi x) + \sin(4\pi x)) = \sqrt{2}, \\
\psi_{00}(x) &= \sqrt{2}, \\
\psi_{01}(x) &= \sqrt{2}(\cos(4\pi x) + \sin(4\pi x)) = \sqrt{2}, \\
\psi_{1(-1)}(x) &= 0, \\
\psi_{10}(x) &= 0, \\
\psi_{11}(x) &= 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\Psi(x) = [\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, 0, 0, 0]^\top$ et $f(x) = d^\top \Psi(x)$.

$$\begin{aligned}
\text{Alors } \cos(4\pi x) &= [d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6] [\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, 0, 0, 0]^\top \\
&\implies \cos(4\pi x) = \sqrt{2}d_1 + \sqrt{2}d_2 + \sqrt{2}d_3.
\end{aligned}$$

Donc

$$f(x) = \cos(4\pi(0)) = \sqrt{2}d_1 + \sqrt{2}d_2 + \sqrt{2}d_3. \quad (3.10)$$

Pour $x = \frac{1}{4}$, on trouve

$$\begin{aligned}
\psi_{0(-1)}(x) &= \sqrt{2}(\cos(4\pi x) - \sin(4\pi x)) = -\sqrt{2}, \\
\psi_{00}(x) &= \sqrt{2}, \\
\psi_{01}(x) &= \sqrt{2}(\cos(4\pi x) + \sin(4\pi x)) = -\sqrt{2}, \\
\psi_{1(-1)}(x) &= 0, \\
\psi_{10}(x) &= 0, \\
\psi_{11}(x) &= 0.
\end{aligned}$$

Ainsi $\Psi(x) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0, 0, 0]^\top$ et $f(x) = d^\top \Psi(x)$.

$$\text{Alors } \cos(4\pi x) = [d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6] [-\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0, 0, 0]^\top.$$

D'où

$$\cos(4\pi(\frac{1}{4})) = -1 = -\sqrt{2}d_1 + \sqrt{2}d_2 - \sqrt{2}d_3. \quad (3.11)$$

Pour $x = \frac{1}{8}$, on trouve

$$\begin{aligned}
\psi_{0(-1)}(x) &= \sqrt{2}(\cos(4\pi x) - \sin(4\pi x)) = -\sqrt{2}, \\
\psi_{00}(x) &= \sqrt{2}, \\
\psi_{01}(x) &= \sqrt{2}(\cos(4\pi x) + \sin(4\pi x)) = \sqrt{2}, \\
\psi_{1(-1)}(x) &= 0, \\
\psi_{10}(x) &= 0, \\
\psi_{11}(x) &= 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\Psi(x) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, 0, 0, 0]^\top$ et $f(x) = d^\top \Psi(x)$.

Alors $\cos(4\pi x) = [d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6] [-\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, 0, 0, 0]^\top$.

Donc

$$\cos(4\pi(\frac{1}{8})) = 0 = -\sqrt{2}d_1 + \sqrt{2}d_2 + \sqrt{2}d_3. \quad (3.12)$$

Pour $x = \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned}
\psi_{0(-1)}(x) &= 0, \\
\psi_{00}(x) &= 0, \\
\psi_{01}(x) &= 0, \\
\psi_{1(-1)}(x) &= \sqrt{2}(\cos(4\pi x) - \sin(4\pi x)) = \sqrt{2}, \\
\psi_{10}(x) &= \sqrt{2}, \\
\psi_{11}(x) &= \sqrt{2}(\cos(4\pi x) + \sin(4\pi x)) = \sqrt{2},
\end{aligned}$$

et $f(x) = d^\top \Psi(x)$.

Alors $\cos(4\pi x) = [d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6] [0, 0, 0, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}]^\top$

Donc

$$\cos(4\pi(\frac{1}{2})) = 0 = \sqrt{2}d_4 + \sqrt{2}d_5 + \sqrt{2}d_6. \quad (3.13)$$

Pour $x = \frac{3}{4}$,

$$\begin{aligned}
\psi_{0(-1)}(x) &= 0, \\
\psi_{00}(x) &= 0, \\
\psi_{01}(x) &= 0, \\
\psi_{1(-1)}(x) &= \sqrt{2}(\cos(4\pi x) - \sin(4\pi x)) = -\sqrt{2}, \\
\psi_{10}(x) &= \sqrt{2}, \\
\psi_{11}(x) &= \sqrt{2}(\cos(4\pi x) + \sin(4\pi x)) = -\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Ainsi $\Psi(x) = [0, 0, 0, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{2}]^\top$ et $f(x) = C^\top \Psi(x)$.

Donc $f(x) = \cos(4\pi x) = d^\top \Psi(x) = [d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6] [0, 0, 0, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{2}]^\top$.

Alors $\cos(4\pi x) = -\sqrt{2}d_4 + \sqrt{2}d_5 - \sqrt{2}d_6$.

Donc

$$\cos(4\pi(\frac{3}{4})) = -1 = -\sqrt{2}d_4 + \sqrt{2}d_5 - \sqrt{2}d_6. \quad (3.14)$$

Pour $x = \frac{3}{8}$,

$$\begin{aligned} \psi_{0(-1)}(x) &= 0, \\ \psi_{00}(x) &= 0, \\ \psi_{01}(x) &= 0, \\ \psi_{1(-1)}(x) &= \sqrt{2}(\cos(4\pi x) + \sin(4\pi x)) = \sqrt{2}, \\ \psi_{10}(x) &= \sqrt{2}, \\ \psi_{11}(x) &= \sqrt{2}(\cos(4\pi x) + \sin(4\pi x)) = -\sqrt{2} \end{aligned}$$

Ainsi, $\Psi(x) = [0, 0, 0, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}]^\top$ et $f(x) = d^\top \Psi(x)$.

Alors $\cos(4\pi t) = [d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6] [0, 0, 0, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}]^\top$.

Donc

$$\cos(4\pi(\frac{3}{8})) = 0 = \sqrt{2}d_4 + \sqrt{2}d_5 - \sqrt{2}d_6. \quad (3.15)$$

D'après (3.10), (3.11) et (3.12), nous obtenons : $d_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}, d_2 = 0, d_3 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

D'après (3.13), (3.14) et (3.15), nous obtenons : $d_4 = \frac{1}{2\sqrt{2}}, d_5 = 0, d_6 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Ainsi, $d = [d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6]^\top = [\frac{1}{2\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{2\sqrt{2}}]^\top$.

Maintenant, \mathbf{K} est la matrice de dimension $2^k(2M+1) \times 2^k(2M+1)$ où les éléments de \mathbf{K} peuvent être calculer par

$$\int_0^1 \int_0^1 \psi_{ni}(x) \psi_{Ij}(t) K(x, t) dt dx,$$

où $n = 1, 2, \dots, 2^k, i = -M, \dots, M, I = 1, \dots, 2^k, j = -M, \dots, M$,

Alors nous avons

$$C^\top \Psi(x) = d^\top \Psi(x) + \lambda \int_0^1 \Psi(x)^\top \mathbf{K} \Psi(t) \Psi(t)^\top C dt.$$

Ainsi avec l'orthonormalité des ondelettes CAS, nous avons

$$\Psi(x)^\top C = \Psi(x)^\top d + \lambda \Psi(x)^\top \mathbf{K} C.$$

tel que $C = (I - \mathbf{K})^{-1}d$.

Dans l'exemple $K(x, t) = t, k = 1, M = 1$, alors $n = I = 1, 2; i = j = -1, 0, 1$ et \mathbf{K} devient une matrice de dimension 6×6 .

D'abord on calcule les éléments de \mathbf{K} :

$\psi_{ni}(x)$, pour $n = 1, i = -1, 0, 1$:

$$\psi_{1(-1)}(x) = \sqrt{2}(\cos(4\pi x) - \sin(4\pi x)),$$

$$\psi_{10}(x) = \sqrt{2},$$

$$\psi_{11}(x) = \sqrt{2}(\cos(4\pi x) + \sin(4\pi x)).$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \psi_{ni}(x) dx, \text{ pour } n = 1, i = -1, 0, 1$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \psi_{1(-1)}(x) dx = 0,$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \psi_{10}(x) dx = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \psi_{11}(x) dx = 0.$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \psi_{Ij}(t) t dt, \text{ pour } I = 1, j = -1, 0, 1$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \psi_{1(-1)} t dt = \frac{\sqrt{2}}{8\pi},$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \psi_{10}(t) t dt = \frac{\sqrt{2}}{\pi},$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \psi_{11}(t) t dt = \frac{-\sqrt{2}}{8\pi}.$$

$\psi_{ni}(x)$, pour $n = 2, i = -1, 0, 1$

$$\psi_{2(-1)}(x) = \sqrt{2}(\cos(4\pi x) - \sin(4\pi x)),$$

$$\psi_{20}(x) = \sqrt{2},$$

$$\psi_{21}(x) = \sqrt{2}(\cos(4\pi x) + \sin(4\pi x)).$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \psi_{ni}(x) dx, \text{ pour } n = 2; i = -1, 0, 1$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \psi_{2(-1)}(x) dx = 0,$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \psi_{20}(x) dx = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \psi_{21}(x) dx = 0.$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \psi_{Ij}(t) t dt, \text{ pour } I = 2; j = -1, 0, 1$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \psi_{21}(t) t dt = \frac{\sqrt{2}}{8\pi},$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \psi_{20}(t) t dt = \frac{3\sqrt{2}}{8},$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \psi_{21}(t) t dt = \frac{-\sqrt{2}}{8\pi}.$$

Alors :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{8\pi} & 0 & 0 & \frac{1}{8\pi} & 0 \\ 0 & 0.125 & 0 & 0 & 0.125 & 0 \\ 0 & \frac{1\pi}{8\pi} & 0 & 0 & \frac{-1}{8\pi} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8\pi} & 0 & 0 & \frac{1}{8\pi} & 0 \\ 0 & 0.375 & 0 & 0 & 0.375 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{8\pi} & 0 & 0 & \frac{-1}{8\pi} & 0 \end{bmatrix}.$$

On a $C = (1 - \mathbf{K})^{-1}d$ tel que $(1 - \mathbf{K})^{-1} = \frac{1}{\det(1-K)}(C')^\top$,

$$\text{Maintenant } (1 - \mathbf{K})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -0.0796 & 0 & 0 & -0.0796 & 0 \\ 0 & 1.2500 & 0 & 0 & 0.2500 & 0 \\ 0 & -0.0796 & 1 & 0 & -0.0796 & 0 \\ 0 & 0.0796 & 0 & 1 & 0.0796 & 0 \\ 0 & 0.7500 & 0 & 0 & 1.7500 & 0 \\ 0 & -0.0796 & 0 & 0 & -0.0796 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{donc } C = (1 - K)^{-1}d = \begin{bmatrix} 1 & -0.0796 & 0 & 0 & -0.0796 & 0 \\ 0 & 1.2500 & 0 & 0 & 0.2500 & 0 \\ 0 & -0.0796 & 1 & 0 & -0.0796 & 0 \\ 0 & 0.0796 & 0 & 1 & 0.0796 & 0 \\ 0 & 0.7500 & 0 & 0 & 1.7500 & 0 \\ 0 & -0.0796 & 0 & 0 & -0.0796 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix},$$

$$\text{D'où } C = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

On a donc :

$$y(x) = C^\top \Psi(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}(\cos(4\pi x) - \sin(4\pi x)) \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2}(\cos(4\pi x) + \sin(4\pi x)) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

D'où $y(x) = \frac{1}{2}(\cos(4\pi x) - \sin(4\pi x)) + \frac{1}{2}(\cos(4\pi x) + \sin(4\pi x))$.

c.à.d $y(x) = \cos(4\pi x)$.

Enfin $y(x) = \cos(4\pi x)$ est la solution exacte de l'équation intégrale de Fredholm.

3.2 Les équations intégrales -différentielles

Les ondelettes $\psi_{nm}(t) = \psi(k, n, m, t)$ admet 4 arguments n, m, k, t , ou $n = 0, 1, \dots, 2^k - 1$, k une entier positif quelconque, m est nombre entier, t est le temps normalisé. Récemment, [11] ont présenté les ondelettes CAS qui sont définies près dans cette thèse, nous présentent une nouvelle méthode numérique pour résoudre l'équation intégrale-différentielle linéaire de Fredholm

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) + f(t) + \int_0^1 K(t, s)y(s)ds & , 0 \leq t \leq 1, \\ y(0) = 0, \end{cases} \quad (3.16)$$

où la fonction $f \in L^2([0, 1])$, le noyau $K(s, t) \in L^2([0, 1] \times [0, 1])$ est connue, $y(t)$ est la fonction inconnue à déterminer. Cette méthode ramène les équations intégrales à l'ensemble des équations algébriques par l'expansion $y(t)$ comme ondelettes de CAS avec des coefficients inconnus.

3.2.1 La méthode de résolution des équations intégrales-différentielles linéaires de Fredholm

On considère l'équation (3.16). On pose :

$$y(t) \approx Y^\top \Psi(t); y(0) = Y_0^\top \Psi(t); f(t) \approx X^\top \Psi(t); y'(t) \approx Y^\top(t); K(t, s) \approx \Psi(t)^\top K \Psi(s) \quad (3.17)$$

où Y, Y', Y_0 , et X sont des coefficients, aussi \mathbf{K} est la matrice de dimension $(2k(2M + 1)) \times (2k(2M + 1))$ dont les éléments se calculent par :

$$\int_0^1 \int_0^1 \psi_{ni}(t)\psi_{Ij}(s)K(t, s)dt ds, n = I = 0, \dots, 2k - 1; i = j = -M, \dots, M.$$

Ensuite, nous avons :

$$\begin{aligned}
y(t) &= \int_0^t y'(s)ds + y(0) \approx \int_0^t Y'^{\top} \Psi(s)ds + Y_0^{\top} \Psi(t) \\
&= Y'^{\top} \int_0^t \Psi(s)ds + Y_0^{\top} \Psi(t) \\
&= Y'^{\top} P \Psi(t) + Y_0^{\top} \Psi(t) \\
&= \left(Y'^{\top} P + Y_0^{\top} \right) \Psi(t).
\end{aligned}$$

On remplace (3.17) dans (3.16) , on obtient :

$$\begin{aligned}
\Psi(t)^{\top} Y' &= \Psi(t)^{\top} X + \Psi(t)^{\top} (P^{\top} Y' + Y_0) + \int_0^1 \Psi(t)^{\top} \mathbf{K} \Psi(s)^{\top} (P^{\top} Y' + Y_0) ds \\
&= \Psi(t)^{\top} X + \Psi(t)^{\top} (P^{\top} Y' + Y_0) + \Psi(t)^{\top} \mathbf{K} (P^{\top} Y' + Y_0) \int_0^1 \Psi(s) \Psi(s)^{\top} ds \\
&= \Psi(t)^{\top} X + \Psi(t)^{\top} (P^{\top} Y' + Y_0) + \Psi(t)^{\top} \mathbf{K} (P^{\top} Y' + Y_0).
\end{aligned}$$

Puisque

$$\int_0^1 \Psi(s) \Psi(s)^{\top} ds = 1,$$

alors

$$(I - \mathbf{K} P^{\top} - P^{\top}) Y' = \mathbf{K} Y_0 + Y_0 + X. \tag{3.18}$$

Ainsi, nous pouvons obtenir le vecteur Y' .

et puis

$$Y^{\top} = Y'^{\top} P + Y_0^{\top}, \text{ où } y(t) \approx Y^{\top} \Psi(t).$$

Exemple 5 *Considérons l'équation intégral-défférentielle*

$$\begin{cases} y'(x) = xe^x + e^x + \int_0^1 xy(t)dt, \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

La solution exacte est xe^x .

D'abord, on pose $y(0) = Y_0^{\top} \Psi(x)$.

Alors

$$y(0) = 0 = Y_0^\top \begin{bmatrix} \psi_{0(-1)}(x) \\ \psi_{00}(x) \\ \psi_{01}(x) \\ \psi_{1(-1)}(x) \\ \psi_{10}(x) \\ \psi_{11}(x) \end{bmatrix}.$$

Pour $x = 0$,

$$\psi_{0(-1)}(x) = \sqrt{2}(\cos(4\pi x) - \sin(4\pi x)) = \sqrt{2},$$

$$\psi_{00}(x) = \sqrt{2},$$

$$\psi_{01}(x) = \sqrt{2}(\cos(4\pi x) + \sin(4\pi x)) = \sqrt{2},$$

$$\psi_{1(-1)}(x) = 0,$$

$$\psi_{10}(x) = 0,$$

$$\psi_{11}(x) = 0.$$

$$\text{Alors } \Psi(x) = [\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, 0, 0, 0]^\top, \text{ où } y(x) = [y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6] \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

D'où

$$y(0) = \sqrt{2}y_1 + \sqrt{2}y_2 + \sqrt{2}y_3. \quad (3.19)$$

Pour $x = \frac{1}{4}$,

$$\psi_{0(-1)}(x) = \sqrt{2}(\cos(4\pi x) - \sin(4\pi x)) = -\sqrt{2},$$

$$\psi_{00}(x) = \sqrt{2},$$

$$\psi_{01}(x) = \sqrt{2}(\cos(4\pi x) + \sin(4\pi x)) = -\sqrt{2},$$

$$\psi_{1(-1)}(x) = 0,$$

$$\psi_{10}(x) = 0,$$

$$\psi_{11}(x) = 0.$$

Alors $\Psi(x) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0, 0, 0]^\top$, où $y(x) = [y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6]$

$$\begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

D'où

$$y\left(\frac{1}{4}\right) = 0 = -\sqrt{2}y_1 + \sqrt{2}y_2 - \sqrt{2}y_3. \quad (3.20)$$

Pour $x = \frac{1}{8}$,

$$\begin{aligned} \psi_{0(-1)}(x) &= \sqrt{2}(\cos(4\pi x) - \sin(4\pi x)) = -\sqrt{2}, \\ \psi_{00}(x) &= \sqrt{2}, \\ \psi_{01}(x) &= \sqrt{2}(\cos(4\pi x) + \sin(4\pi x)) = \sqrt{2}, \\ \psi_{1(-1)}(x) &= 0, \\ \psi_{10}(x) &= 0, \\ \psi_{11}(x) &= 0. \end{aligned}$$

Alors $y(x) = [y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6]$

$$\begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

D'où

$$y\left(\frac{1}{8}\right) = 0 = -\sqrt{2}y_1 + \sqrt{2}y_2 + \sqrt{2}y_3. \quad (3.21)$$

Pour $x = \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned} \psi_{0(-1)}(x) &= 0, \\ \psi_{00}(x) &= 0, \\ \psi_{01}(x) &= 0, \\ \psi_{1(-1)}(x) &= \sqrt{2}(\cos(4\pi x) - \sin(4\pi x)) = +\sqrt{2}, \\ \psi_{10}(x) &= \sqrt{2}, \\ \psi_{11}(x) &= \sqrt{2}(\cos(4\pi x) + \sin(4\pi x)) = \sqrt{2}, \end{aligned}$$

$$\text{Alors } y(x) = [y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

D'où

$$y\left(\frac{1}{2}\right) = 0 = \sqrt{2}y_4 + \sqrt{2}y_5 + \sqrt{2}y_6. \quad (3.22)$$

Pour $x = \frac{3}{4}$,

$$\begin{aligned} \psi_{0(-1)}(x) &= 0, \\ \psi_{00}(x) &= 0, \\ \psi_{01}(x) &= 0, \\ \psi_{1(-1)}(x) &= \sqrt{2}(\cos(4\pi x) - \sin(4\pi x)) = -\sqrt{2}, \\ \psi_{10}(x) &= \sqrt{2}, \\ \psi_{11}(x) &= \sqrt{2}(\cos(4\pi x) + \sin(4\pi x)) = -\sqrt{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Alors } y(x) = [y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

D'où

$$y\left(\frac{3}{4}\right) = 0 = -\sqrt{2}y_4 + \sqrt{2}y_5 - \sqrt{2}y_6. \quad (3.23)$$

Pour $x = \frac{3}{8}$,

$$\begin{aligned} \psi_{0(-1)}(x) &= 0, \\ \psi_{00}(x) &= 0, \\ \psi_{01}(x) &= 0, \\ \psi_{1(-1)}(x) &= \sqrt{2}(\cos(4\pi x) - \sin(4\pi x)) = \sqrt{2}, \\ \psi_{10}(x) &= \sqrt{2}, \\ \psi_{11}(x) &= \sqrt{2}(\cos(4\pi x) + \sin(4\pi x)) = -\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Donc $[y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6]$
$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

D'où

$$y\left(\frac{3}{8}\right) = 0 = \sqrt{2}y_4 + \sqrt{2}y_5 - \sqrt{2}y_6. \quad (3.24)$$

D'après les équations (3.19) , (3.20) et (3.21) , nous obtenons :

$$y_1 = -y_2 = y_3 = 0.$$

D'après les équations (3.22) , (3.23) et (3.24) nous obtenons :

$$y_4 = y_5 = y_6 = 0.$$

On trouve $Y_0 = y_0^\top \Psi(t) = [0, 0, 0, 0, 0, 0]^\top$.

Pour $k = 1, M = 1$, tel que \mathbf{K} est une matrice de dimension 6×6 et le noyau $K(x, t) = x$

Alors $\mathbf{K} =$
$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{8\pi} & 0 & 0 & \frac{1}{8\pi} & 0 \\ 0 & 0.125 & 0 & 0 & 0.125 & 0 \\ 0 & \frac{1\pi}{8\pi} & 0 & 0 & \frac{-1}{8\pi} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8\pi} & 0 & 0 & \frac{1}{8\pi} & 0 \\ 0 & 0.375 & 0 & 0 & 0.375 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{8\pi} & 0 & 0 & \frac{-1}{8\pi} & 0 \end{bmatrix}.$$

Maintenant, on pose $f(x) = X^\top \Psi(t)$.

Pour $x = 0$,

$$\psi_{0(-1)}(x) = \sqrt{2}(\cos(4\pi x) - \sin(4\pi x)) = \sqrt{2},$$

$$\psi_{00}(x) = \sqrt{2},$$

$$\psi_{01}(x) = \sqrt{2}(\cos(4\pi x) + \sin(4\pi x)) = \sqrt{2},$$

$$\psi_{1(-1)}(x) = 0,$$

$$\psi_{10}(x) = 0,$$

$$\psi_{11}(x) = 0.$$

Alors $\Psi(x) = [\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, 0, 0, 0]^\top$.

On a $f(x) = e^x - x$, pour $x = 0$, $f(x) = e^0 - 0 = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6]$ $\begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,

d'où

$$f(0) = 1 = \sqrt{2}x_1 + \sqrt{2}x_2 + \sqrt{2}x_3. \quad (3.25)$$

Pour $x = \frac{1}{4}$,

$$\psi_{0(-1)}(x) = \sqrt{2}(\cos(4\pi x) - \sin(4\pi x)) = -\sqrt{2},$$

$$\psi_{00}(x) = \sqrt{2},$$

$$\psi_{01}(x) = \sqrt{2}(\cos(4\pi x) + \sin(4\pi x)) = -\sqrt{2},$$

$$\psi_{1(-1)}(x) = 0,$$

$$\psi_{10}(x) = 0,$$

$$\psi_{11}(x) = 0.$$

Alors $\Psi(x) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0, 0, 0]^\top$.

On a $f(x) = e^x - x$, pour $x = \frac{1}{4}$, $f(x) = e^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{4} = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6]$ $\begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,

d'où

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = 1.034 = -\sqrt{2}x_1 + \sqrt{2}x_2 - \sqrt{2}x_3. \quad (3.26)$$

Pour $x = \frac{1}{8}$,

$$\begin{aligned}
\psi_{0(-1)}(x) &= \sqrt{2}(\cos(4\pi x) - \sin(4\pi x)) = -\sqrt{2}, \\
\psi_{00}(x) &= \sqrt{2}, \\
\psi_{01}(x) &= \sqrt{2}(\cos(4\pi x) + \sin(4\pi x)) = \sqrt{2}, \\
\psi_{1(-1)}(x) &= 0, \\
\psi_{10}(x) &= 0, \\
\psi_{11}(x) &= 0.
\end{aligned}$$

Alors $\Psi(x) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, 0, 0, 0]^\top$.

On a $f(x) = e^x - x$, pour $x = \frac{1}{8}$, $f(\frac{1}{8}) = e^{\frac{1}{8}} - \frac{1}{8} = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6]$

$$\begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

D'où

$$f\left(\frac{1}{8}\right) = 1.008 = -\sqrt{2}x_1 + \sqrt{2}x_2 + \sqrt{2}x_3 \quad (3.27)$$

Pour $x = \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned}
\psi_{0(-1)}(x) &= 0, \\
\psi_{00}(x) &= 0, \\
\psi_{01}(x) &= 0, \\
\psi_{1(-1)}(x) &= \sqrt{2}(\cos(4\pi x) - \sin(4\pi x)) = \sqrt{2}, \\
\psi_{10}(x) &= \sqrt{2}, \\
\psi_{11}(x) &= \sqrt{2}(\cos(4\pi x) + \sin(4\pi x)) = \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Alors $\Psi(x) = [0, 0, 0, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}]^\top$.

On a $f(x) = e^x - x$, pour $x = \frac{1}{2}$, $f(\frac{1}{2}) = e^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6]$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

D'où

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1.1487 = \sqrt{2}x_4 + \sqrt{2}x_5 + \sqrt{2}x_6. \quad (3.28)$$

Pour $x = \frac{3}{4}$,

$$\begin{aligned}\psi_{0(-1)}(x) &= 0, \\ \psi_{00}(x) &= 0, \\ \psi_{01}(x) &= 0, \\ \psi_{1(-1)}(x) &= \sqrt{2}(\cos(4\pi x) - \sin(4\pi x)) = -\sqrt{2}, \\ \psi_{10}(x) &= \sqrt{2}, \\ \psi_{11}(x) &= \sqrt{2}(\cos(4\pi x) + \sin(4\pi x)) = -\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Alors $\Psi(x) = [0, 0, 0, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{2}]^\top$.

On a $f(x) = e^x - x$, pour $x = \frac{3}{4}$, $f(\frac{3}{4}) = e^{\frac{3}{4}} - \frac{3}{4} = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6]$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

D'où

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = 1.3670 = -\sqrt{2}x_4 + \sqrt{2}x_5 - \sqrt{2}x_6. \quad (3.29)$$

Pour $x = \frac{3}{8}$,

$$\begin{aligned}\psi_{0(-1)}(x) &= 0, \\ \psi_{00}(x) &= 0, \\ \psi_{01}(x) &= 0, \\ \psi_{1(-1)}(x) &= \sqrt{2}(\cos(4\pi x) - \sin(4\pi x)) = \sqrt{2}, \\ \psi_{10}(x) &= \sqrt{2}, \\ \psi_{11}(x) &= \sqrt{2}(\cos(4\pi x) + \sin(4\pi x)) = -\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Alors $\Psi(x) = [0, 0, 0, \sqrt{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{2}]^\top$.

On a $f(x) = e^x - x$, pour $x = \frac{3}{8}$, $f(\frac{3}{8}) = e^{\frac{3}{8}} - \frac{3}{8} = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6]$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

D'où

$$f\left(\frac{3}{8}\right) = 1.0799 = \sqrt{2}x_4 + \sqrt{2}x_5 - \sqrt{2}x_6. \quad (3.30)$$

D'après les équations (3.25), (3.26) et (3.27), on obtient $x_1 = -0.002, x_2 = 0.179, x_3 = -0.009$.

D'après les équations (3.28), (3.29) et (3.30), on obtient $x_4 = -0.101, x_5 = 0.889, x_6 = 0.024$.

D'où

$$X = [-0.002, 0.179, -0.009, -0.101, 0.889, 0.024].$$

On a

$$(I - \mathbf{K}P^\top - P^\top)Y' = \mathbf{K}Y_0 + Y_0 + X$$

d'où

$$Y' = [-0.123759, 0.337076, -0.0590784, -0.22257, -0.255339, 0.1557].$$

Maintenant

$$Y^\top = Y'^\top P + Y_0^\top,$$

d'où

$$Y^\top = [0.01223, 0.342209, 0.0366578, 0.0203233, 0.448058, 0.448058, 0.0141958].$$

En plus $y(t) = Y^\top \Psi(t)$,

d'où

$$y(t) = 0.083127613 \cos(4\pi t) + 0.020556301 \sin(4\pi t) + 0.483956609.$$

3.3 Une méthode d'ondelettes CAS pour la résolution d'une équation intégrale-différentielle non linéaire de Fredholm d'ordre fractionnaire

L'objectif de cette partie est de présenter une méthode numérique pour l'approximation de la solution d'une équation intégrale-différentielle non linéaire d'ordre fractionnaire de deuxième forme

$$D_*^\alpha f(x) - \lambda \int_0^1 K(x, t) [f(t)]^q dt = g(x), \quad q > 1 \quad (3.31)$$

avec les conditions supplémentaires :

$$f^{(i)}(0) = \delta_i, i = 0, 1, \dots, r-1, r-1 < \alpha \leq r, r \in \mathbb{N} \quad (3.32)$$

où, $g \in L^2([0, 1])$, $K(x, t) \in (L^2[0, 1]^2)$ sont des fonction connues et $f(x)$ la fonction inconnue, D_*^α l'opérateur différentiel fractionnaire de Caputo et q un entier positif.

La relation entre l'opérateur de Riemann-Liouville et l'opérateur de Caputo est donnée par le lemme suivant.

Lemme 1 Si $m-1 < \alpha \leq m, m \in \mathbb{N}$, alors $D_*^\alpha J^\alpha f(x) = f(x)$, et

$$J^\alpha D_*^\alpha f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0^+) \frac{x^k}{k!}, x > 0.$$

D'abord on définit les fonctions à plusieurs blocs puis nous introduisons la matrice opérationnelle d'intégration fractionnaire. Après ca, on décrit la méthode et l'erreur d'approximation. Enfin, nous donnons des résultats numériques.

3.3.1 Les fonctions à plusieurs blocs

Un m-ensemble de fonctions à plusieurs blocs (*F.P.B*) sur l'intervalle $[0, T]$ est définie par

$$b_i(x) = \begin{cases} 1, si \frac{iT}{m} \leq x < \frac{(i+1)T}{m} \\ 0, sinon \end{cases} ; i = 0, 1, 2, \dots, m-1$$

avec m un entier positif. On suppose que $T = 1$; donc les fonctions (*F.P.B*) sont définies sur l'intervalle $[0, 1]$. Maintenant on définit quelques propriétés des fonctions (*F.P.B*)

1. Disjonction

$$b_i(x)b_j(x) = \begin{cases} b_i(x) & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} . \quad (3.33)$$

2. Orthogonalité

$$\int_0^1 b_i(x)b_j(x) = \begin{cases} \frac{1}{m} & ; i = j \\ 0 & ; i \neq j \end{cases} . \quad (3.34)$$

3. Exhaustivité

Pour tout $f \in L^2([0, 1])$, soit $\{b_i\}$ est complete si $\int b_i f = 0$ on a $f = 0$ presque par tout.

En raison de l'exhaustivité de $(b_i(x))$, l'identité de parseval est vérifiée :

$$\int_0^1 f^2(x)dx = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f_i^2 \|b_i(x)\|^2.$$

Pour toute fonction bornée réelle $f(x) \in L^2([0, 1])$ et

$$f_i = m \int_0^1 b_i(x)f(x)dx \quad (3.35)$$

Les fonctions (*F.P.B*) admettent un support compact, i.e

$$\text{supp}(b_i(x)) = \left[\frac{i}{m}, \frac{i+1}{m} \right].$$

Notation

A partir de maintenant, nous définissons $m' = 2^k(2M + 1)$, telque $k, M \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. D'aparés orthogonalité des fonctions(*F.P.B*), il est possible d'étendre les fonctions dans leur series de plusieurs blocs [21], ce qui signifie que pour chaque fonction $f(x) \in L^2([0, 1])$, nous pouvons écrire :

$$f(x) \cong \sum_{i=0}^{m-1} f_i b_i(x) = \mathbf{f}^\top \mathbf{B}_m(x) \quad (3.36)$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= [f_0, f_1, \dots, f_{m-1}]^\top \\ \mathbf{B}_m(x) &= [b_0(x), b_1(x), \dots, b_{m-1}(x)] \end{aligned}$$

tel que les f_i , pour $i = 0, 1, \dots, m - 1$, sont obtenues par (3.35).

3.3.2 Matrice opérationnelle d'intégration fractionnaire

La formule (3.36) implique que les ondelettes CAS peuvent construire aussi un $m' - F.P.B$, à savoir :

$$\psi_{nm}(x) \cong \sum_{i=0}^{m'-1} f_i b_i(x).$$

En utilisant les propriétés des ondelettes CAS et (3.35) nous avons :

$$\begin{aligned}
f_i(x) &= m' \int_{\frac{i}{m'}}^{\frac{(i+1)}{m'}} \psi_{nm}(x) dx \\
&= m' \int_{\frac{i}{m'}}^{\frac{(i+1)}{m'}} 2^{\frac{k}{2}} [\cos(2\pi m(2^k x - n)) + \sin(2\pi m(2^k x - n))] dx \\
&= m' 2^{\frac{k}{2}} \left[\int_{\frac{i}{m'}}^{\frac{(i+1)}{m'}} \cos(2\pi m(2^k x - n)) dx + \int_{\frac{i}{m'}}^{\frac{(i+1)}{m'}} \sin(2\pi m(2^k x - n)) dx \right] \\
&= m' \frac{2^{\frac{k}{2}}}{2^k 2\pi m} \left(\left[\sin(2\pi m(2^k x - n)) \right]_{\frac{i}{m'}}^{\frac{(i+1)}{m'}} + \left[\cos(2\pi m(2^k x - n)) \right]_{\frac{i}{m'}}^{\frac{(i+1)}{m'}} \right) \\
&= m' \frac{2^{\frac{k}{2}}}{2^k 2\pi m} \left[\left(\sin(2\pi m(2^k (\frac{i+1}{m'}) - n)) - \sin(2\pi m(2^k (\frac{i}{m'}) - n)) \right) + \left(-\cos(2\pi m(2^k (\frac{i+1}{m'}) - n)) \right) \right. \\
&\quad \left. + \cos(2\pi m(2^k (\frac{i}{m'}) - n)) \right]
\end{aligned}$$

on pose

$$\tilde{\psi}_{nm}(\frac{i}{m'}) = \cos(2\pi m(2^k (\frac{i}{m'}) - n)) + \sin(2\pi m(2^k (\frac{i}{m'}) - n))$$

et

$$\tilde{\psi}_{nm}(\frac{i+1}{m'}) = (-\cos(2\pi m(2^k (\frac{i+1}{m'}) - n)) + \sin(2\pi m(2^k (\frac{i+1}{m'}) - n))$$

D'où

$$f_i(x) = \frac{m'}{2m\pi 2^{\frac{k}{2}}} \left[\tilde{\psi}_{nm}(\frac{i}{m'}) - \tilde{\psi}_{nm}(\frac{i+1}{m'}) \right]$$

Pour $i = n(2M+1), \dots, (n+1)(2M+1) - 1$, et $f_i = 0$ ailleurs. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
\psi_{nm}(x) &\cong \frac{m'}{2^{\frac{k}{2}+1} m \pi} \left[0, 0, \dots, 0, \tilde{\psi}_{nm}(\frac{i}{m'}) - \tilde{\psi}_{nm}(\frac{i+1}{m'}), \dots, \tilde{\psi}_{nm}(\frac{i+2M}{m'}) \right. \\
&\quad \left. - \tilde{\psi}_{nm}(\frac{i+2M+1}{m'}), 0, \dots, 0 \right] \times \mathbf{B}_m(x)
\end{aligned}$$

où $i = n(2M+1), n = 0, 1, \dots, 2^k - 1$ et $m = -M, \dots, M$

Par conséquent

$$\Psi(x) = \phi_{m' \times m} \mathbf{B}_m(x) \tag{3.37}$$

où

$$\phi_{m' \times m} = \text{Diag}(\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{2^k-1})$$

et ϕ_n est une matrice de dimension $(2M + 1) \times (2M + 1)$ introduit sous forme

$$\phi_n = \wedge \left(\left[\tilde{\Psi}_n\left(\frac{i}{m'}\right) \tilde{\Psi}_n\left(\frac{i+1}{m'}\right) \dots \tilde{\Psi}_n\left(\frac{i+2M}{m'}\right) \right] - \left[\tilde{\Psi}_n\left(\frac{i+1}{m'}\right) \tilde{\Psi}_n\left(\frac{i+2}{m'}\right) \dots \tilde{\Psi}_n\left(\frac{i+2M+1}{m'}\right) \right] \right)$$

Avec

$$\wedge = \frac{m'}{2^{\frac{k}{2}+1}\pi} \begin{bmatrix} \frac{1}{-M} & \frac{1}{-M+1} & \dots & \frac{1}{M} \\ \frac{1}{-M} & \frac{1}{-M+1} & \dots & \frac{1}{M} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{-M} & \frac{1}{-M+1} & \dots & \frac{1}{M} \end{bmatrix}$$

$$\text{et } \tilde{\Psi}_n(x) = \left[\tilde{\psi}_{n,-M}(x) \tilde{\psi}_{n,-M+1}(x) \dots \tilde{\psi}_{n,M}(x) \right]^\top.$$

Kilicman and Zhou [18] ont donné la matrice opérationnelle d'intégration fractionnaire de fonctions à plusieurs blocs (*F.P.B*) tel que

$$(J^\alpha \mathbf{B}_{m'}) (x) \cong \mathbf{F}^\alpha \mathbf{B}_{m'} (x)$$

où

$$\mathbf{F}^\alpha = \frac{1}{m'^\alpha \Gamma(\alpha + 2)} \begin{bmatrix} 1 & \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 & \dots & \zeta_{m'-1} \\ 0 & 1 & \zeta_1 & \zeta_2 & \dots & \zeta_{m'-2} \\ 0 & 0 & 1 & \zeta_1 & \dots & \zeta_{m'-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \zeta_1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et $\zeta_k = (k + 1)^{\alpha+1} - 2k^{\alpha+1} + (k - 1)^{\alpha+1}$, soit :

$$(J^\alpha \Psi_{m'}) (x) \cong \mathbf{P}_{m' \times m'}^\alpha \Psi_{m'} (x) \quad (3.38)$$

où $\mathbf{P}_{m' \times m'}^\alpha$ est appelée matrice opérationnelle d'ondelette CAS d'intégration fractionnaire. En utilisant (3.37) et (3.38), on obtient

$$(J^\alpha \Psi_{m'}) (x) \cong (J^\alpha \phi_{m' \times m'} \mathbf{B}_{m'}) (x) = \phi_{m' \times m'} (J^\alpha \mathbf{B}_{m'}) (x) \cong \phi_{m' \times m'} \mathbf{F}^\alpha \mathbf{B}_{m'} (x). \quad (3.39)$$

D'après (3.38) et (3.39), on obtient

$$\mathbf{P}_{m' \times m'}^\alpha \Psi_{m'} (x) \cong \phi_{m' \times m'} \mathbf{F}^\alpha \mathbf{B}_{m'} (x).$$

Par conséquent, la matrice opérationnelle d'ondelette CAS d'intégration fractionnaire $\mathbf{P}_{m' \times m'}^\alpha$ est donnée par

$$\mathbf{P}_{m' \times m'}^\alpha \cong \phi_{m' \times m'} \mathbf{F}^\alpha \phi_{m' \times m'}^{-1}$$

3.3.3 Application de la méthode

Considérons (3.31). La fonction variable $K(x, t) \in L^2([0, 1])^2$ peut être estimée comme suit :

$$K(x, t) \cong \sum_{n=0}^{2^k-1} \sum_{I_1=-M}^M \sum_{m=0}^{2^k-1} \sum_{I_2=-M}^M K_{ij} \psi_{n, I_1}(x) \psi_{n, I_2}(t).$$

Pour $i = n(2M + 1) + I_2 + M + 1; j = m(2M + 1) + I_2 + M + 1$, ou sous forme matricielle

$$K(x, t) \cong \Psi^\top(\mathbf{x}) \mathbf{K} \Psi(t) \quad (3.40)$$

avec $\mathbf{K} = [k_{i,j}]$ et $K_{i,j} = \langle \Psi_{n, I_1}(x), \langle K(x, t), \Psi_{m, I_2} \rangle \rangle$, de plus le membre droit de (3.31) peut être écrit comme suit :

$$g(x) \cong \mathbf{g}^\top \Psi(\mathbf{x}). \quad (3.41)$$

Maintenant, nous posons

$$D_*^\alpha f(x) \cong \mathbf{c}^\top \Psi(x). \quad (3.42)$$

Pour simplifier, on peut supposer que $\delta_i = 0$ (dans les conditions supplémentaires (3.32)), d'où, en utilisant le lemme 1, (3.38) et (3.42), on obtient

$$f(x) = \mathbf{c}^\top \mathbf{P}_{m' \times m'}^\alpha \Psi(x). \quad (3.43)$$

D'après (3.37), on obtient

$$f(x) = \mathbf{c}^\top \mathbf{P}_{m' \times m'}^\alpha \phi_{m' \times m'} \mathbf{B}_m(x).$$

On définit

$$a = [a_0, a_1, \dots, a_{m'-1}] = \mathbf{c}^\top \mathbf{P}_{m' \times m'}^\alpha \phi_{m' \times m'}$$

si, $f(x) \cong a\mathbf{B}_m(x)$, par la propriété disjointe des fonctions (*F.P.B*) nous avons

$$\begin{aligned}
[f(x)]^2 &\cong [a\mathbf{B}_m(x)]^2 = [a_0b_0(x) + a_1b_1(x), \dots, a_{m-1}b_{m-1}(x)]^2 \\
&= [a_0^2b_0(x) + a_1^2b_1(x) + \dots + a_{m-1}^2b_{m-1}(x)] \\
&= [a_0^2, a_1^2, \dots, a_{m-1}^2] \mathbf{B}_m(x) \\
&= \tilde{a}_2 \mathbf{B}_m(x).
\end{aligned}$$

Par récurrence, on a :

$$\begin{aligned}
[f(x)]^q &\cong [a_0^q, a_1^q, \dots, a_{m-1}^q] \mathbf{B}_m(x) \\
&= \tilde{a}_q \mathbf{B}_m(x)
\end{aligned} \tag{3.44}$$

où

$$\tilde{a}_q = [a_0^q, a_1^q, \dots, a_{m-1}^q]$$

pour tout les entiers positifs q . En utilisant les équations (3.37), (3.40) et (3.44) on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 k(x, t) [f(t)]^q dt &= \int_0^1 \Psi^\top(x) \mathbf{K} \Psi(t) \mathbf{B}_m^\top(t) \tilde{a}_q dt \\
&= \int_0^1 \Psi^\top(x) \mathbf{K} \phi_{m \times m} \mathbf{B}_m(t) \mathbf{B}_m^\top(t) \tilde{a}_q^\top dt \\
&= \Psi^\top(x) \mathbf{K} \phi_{m \times m} \int_0^1 \mathbf{B}_m(t) \mathbf{B}_m^\top(t) \tilde{a}_q^\top dt
\end{aligned} \tag{3.45}$$

en utilisant les propriétés des équations (3.33), (3.34).

On simplifit le membre droit de (3.45), comme suit :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \mathbf{B}_m(t) \mathbf{B}_m^\top(t) \tilde{a}_q^\top dt &= \int_0^1 \left\{ \begin{bmatrix} b_0(t) & & & 0 \\ & b_1(t) & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{m-1}(t) \\ 0 & & & & b_{m-1}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0^q \\ a_1^q \\ \vdots \\ a_{m-1}^q \end{bmatrix} \right\} dt \\
&= \int_0^1 [a_0^q b_0(t), a_1^q b_1(t), \dots, a_{m-1}^q b_{m-1}(t)]^\top dt \\
&= \frac{1}{m} [a_0^q, a_1^q, \dots, a_{m-1}^q]^\top \\
&= \frac{1}{m} \tilde{a}_q.
\end{aligned}$$

Ainsi, dans (3.45), nous avons :

$$\int_0^1 k(x, t) [f(t)]^q dt \cong \frac{1}{m} \Psi^\top(x) \mathbf{K} \phi_{m' \times m} \tilde{a}_q \quad (3.46)$$

En remplaçant les approximations (3.41) et (3.42) dans (3.41), on obtient :

$$\Psi(\mathbf{x})^\top \mathbf{c} - \lambda \frac{1}{m} \Psi^\top(x) \mathbf{K} \phi_{m' \times m} \tilde{a}_q \cong \Psi(x)^\top \mathbf{g}. \quad (3.47)$$

Maintenant, en multipliant les deux membres de (3.47) par $\Psi(\mathbf{x})$, on trouve :

$$\mathbf{c} - \lambda \frac{1}{m} \mathbf{K} \phi_{m' \times m} \tilde{a}_q = \mathbf{g}$$

qui est un système non linéaire des équations algébriques, pour résoudre ce système nous pouvons obtenir la solution approchée de l'équation(3.31) à partir de (3.43).

3.3.4 Analyse d'erreur

On peut facilement déterminer l'exactitude de la méthode. Comme la série en ondelette CAS trancuée est une solution approchée de l'équation.(3.31), quand on substitue les fonctions (3.41), (3.42) et (3.46) dans l'équation.(3.31), l'équation résultante(3.47) doit être satisfaite, si $x \in [0,1]$

Soit

$$R_{m'}(x) = \left| \Psi(x)^\top \mathbf{c} - \lambda \frac{1}{m} \Psi^\top(x) \mathbf{K} \phi_{m' \times m} \tilde{a}_q - \Psi(x)^\top \mathbf{g} \right| \cong 0.$$

Si l'on pose $x = x_i$, alors notre but est d'avoir $R_{m'}(x_i) \leq 10^{r_i}$, où r_i est un entier positif quelconque.

Si l'on suppose, $\text{Max} \{r_i\} = 10^r$, alors on accroît m' aussi longtemps que l'inégalité suivante est vérifiée en tout point x_r :

$$R_{m'}(x_i) \leq 10^r.$$

En d'autres termes, en augmentant m' , la fonction d'erreur $R_{m'}(x_i)$ tend vers zéro ($R_{m'}(x_i) \rightarrow 0$), quand m' est suffisant grand, alors l'erreur décroît.

3.3.5 Exemples numériques

Pour montrer la validité de la méthode proposée, nous considérons les exemples suivants.

Il est à remarque que :

$$\|e_m(x)\|_2 = \left(\int_0^1 e_m^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \cong \left(\frac{1}{N} \sum_{i=0}^N e_m^2(x_i) \right)^{\frac{1}{2}} (\text{erreur quadratique})$$

où $e_m(x_i) = f(x_i) - f_m(x_i), i = 0, 1, \dots, N$. $f(x)$ est la solution exacte et $f_m(x)$ est la solution approximée obtenue par l'équation (3.43).

Exemple 6 Soit l'équation intégrale-différentielle non linéaire d'ordre fractionnaire

$$D_*^\alpha f(x) - \int_0^1 xt [f(t)]^2 dt = 1 - \frac{x}{4}, 0 \leq x < 1; 0 < \alpha \leq 1$$

avec la condition supplémentaire $f(0) = 0$: la figure 3.1 montre les résultats numériques pour $k = 4, M = 1$ et $0 < \alpha \leq 1$. Les comparaisons montrent que $\alpha \rightarrow 1$, les solutions approchées ont tendance à $f(x) = x$, ce qui est la solution exacte de l'équation de cas $\alpha = 1$. L'erreur dans le cas $\alpha = 1$, pour différentes valeurs de k et M , est montré dans le tableau .

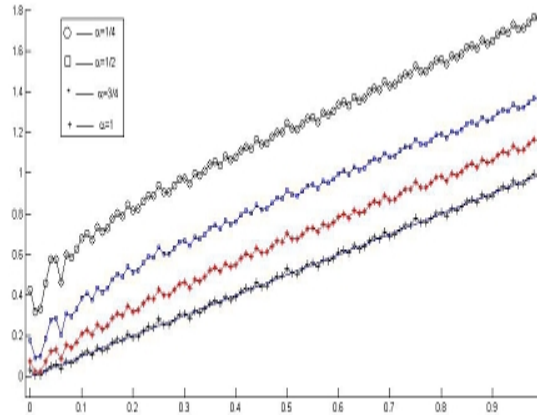


Figure 3.1

Exemple 7 Soit l'équation

$$D_*^{\frac{1}{2}} f(x) - \int_0^1 xt [f(t)]^4 dt = g(x), 0 \leq x < 1$$

telle que $f(0) = 0$ et $g(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \left(\frac{8}{3} \sqrt{x^3} - 2\sqrt{x} \right) - \frac{x}{1260}$. Par la figure 3.2 et le tableau nous pouvons voir les solutions numériques qui sont en très bon accord avec la solution exacte, $f(x) = x^2 - x$.

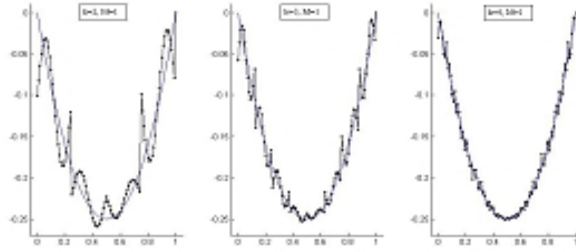


Figure 3.2

Exemple 8 *Considérons l'équation d'ordre $\alpha = \frac{5}{6}$:*

$$D_*^{\frac{5}{6}} f(x) - \int_0^1 xt [f(t)]^2 dt = g(x), 0 \leq x < 1$$

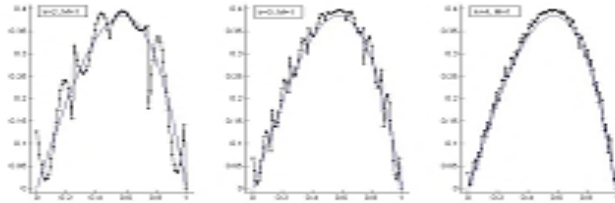


Figure 3.3

où $g(x) = \frac{3}{\Gamma(\frac{1}{6})}(2\sqrt[6]{x} - \frac{432}{91}\sqrt[6]{x^{13}}) + x(248e - 674)$ avec les conditions supplémentaires $f(0) = f'(0)$. La figure 3.3 montre le comportement des solutions numériques pour différents k et M , qui sont en accord avec la solution exacte, $f(x) = x - x^3$. L'erreur pour différentes valeurs de k et M , sont présentés dans le tableau .

Exemple 9 *Considérons l'équation intégro-différentielle non linéaire d'ordre $\alpha = \frac{5}{3}$*

$$D_*^{\frac{5}{3}} f(x) - \int_0^1 (x+t) [f(t)]^3 dt = g(x), 0 \leq x < 1$$

où $g(x) = \frac{6}{(\frac{1}{3})}\sqrt[3]{x} - \frac{x^2}{7} - \frac{x}{4} - \frac{1}{9}$, avec ces conditions supplémentaires $f(0) = f'(0) = 0$, La figure 3.4 montre les solutions numériques pour différents K et M , avec la solution exacte $f(x) = x^2$ L'erreur pour différentes valeurs de k et M , est présentée au tableau

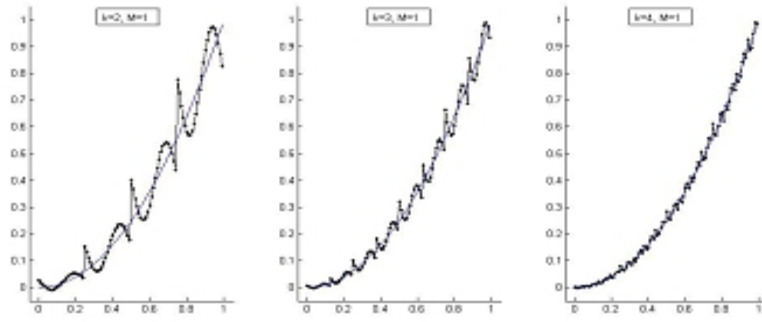


Figure 3.4

Tableau

Ce tableau montre le différence entre la solution exacte et de solution numérique. là où est la solution exacte et est la solution numérique.

Erreurs absolues dans la méthode d'ondelette CAS ($M = 1, k = 1$)

<i>les exemples</i>	$\ e_{12}\ _2 (k = 2, M = 1)$	$\ e_{24}\ _2 (k = 3, M = 1)$	$\ e_{48}\ _2 (k = 4, M = 1)$
<i>exemple 1</i>	2.7133×10^{-3}	6.8179×10^{-4}	1.6745×10^{-5}
<i>exemple 2</i>	7.711×10^{-4}	2.0755×10^{-5}	5.3445×10^{-6}
<i>exemple 3</i>	2.0862×10^{-3}	6.3440×10^{-4}	2.5659×10^{-4}
<i>exemple 4</i>	3.5560×10^{-3}	9.0145×10^{-4}	2.2537×10^{-5}

Conclusion

L'ondelette CAS donne une méthode efficace et précise pour résoudre les équations intégrales de Fredholm. Cette méthode réduit les équations intégrales en des équations algébriques. L'intégration du produit de deux vecteurs des fonctions ondelettes CAS est la matrice d'identité, ce qui rend le calcul de l'équation intégrale attrayante. Il est également montré que les ondelettes CAS fournissent une solution exacte.

Les ondelettes CAS fournissent également une méthode efficace pour résoudre les équations intégrales-différentielles en réduisant des équations intégrales en un ensemble d'équations algébriques.

Aussi dans ce travail, nous introduisons une matrice opérationnelle d'intégration d'ordre fractionnaire d'ondelette CAS, et l'utiliser pour résoudre une classe d'équation intégrales-différentielles non linéaires d'ordre fractionnaire de Fredholm.

Bibliography

- [1] C.K. Chui, Wavelets: A mathematical Tool for signal Analysis, SIAM, Philadelphia PA, 1997.
- [2] G. Beylkin, R. Coifman, V. Rokhlin, Fast wavelet transforms and numerical algorithms, I, Commun. Pure Appl. Math. 44 (1991) 141-183.
- [3] F.G. Tricomi, Integral Equations, Dover Publications, 1982.
- [4] L.J. Lardy, A variation of Nystrom's method for Hammerstein equations, J. Integral Equat. 3 (1981) 43-60.
- [5] S. Kumar, I.H. Sloan, A new collocation-type method for Hammerstein integral equations, J. Math. Comp. 48 (1987) 123-129.
- [6] S. Yalcinbas, Taylor polynomial solution of nonlinear Volterra–Fredholm integral equations, Appl. Math. Comp. 127 (2002) 195-206.
- [7] J.S. Gu, W.S. Jiang, The Haar wavelets operational matrix of integration, Int. J. Sys. Sci. 27 (1996) 623-628.
- [8] A.M. Wazwaz, A First Course in Integral Equations, World scientific Publishing Company, New Jersey, 1997.
- [9] M. Razzaghi, S. Yousefi, The Legendre wavelets operational matrix of integration, Int. J. Syst. Sci. 32 (4) (2001) 495-50241.
- [10] F.Khellat, S.A.Yousefi, The Linear Legendre mother wavelets operational matrix of integration and its application, J. Franklin Inst. 343 (2006) 181-190.
- [11] S. Yousefi, A. Banifatemi, Numerical Solution of Fredholm integral equations by using CAS wavelets, Appl. Math. Comput. (2006), doi:10.1016/j.amc.2006.05.081.

- [12] J.S. Gu, W.S. Jiang, The Haar wavelets operational matrix of integration, *Int. J. Sys.Sci.* 27 (1996) 623628.
- [13] M. Tavassoli Kajani, A. Hadi Venchch, Solving linear integro-differential equation with Legendre wavelets, *Int. J. Comp. Math.* 81 (6) (2004) 719726.
- [14] P. Darania Ali Ebadian, A method for the numerical solution of the integro-differential equations, *Appl. Math. Comput.* (2006), doi:10.1016/j.amc.2006.10.046.
- [15] H. Danfu, S. Xufeng, Numerical solution of integro-differential equations by using CAS wavelet operational matrix of integration, *Applied Mathematics and computation* 194 (2007) 460-466.
- [16] IEEE Computational Science and Engineering summer 1995, vol.2, num.2, Published by IEEE Computer society, 10662 Los vaqueros Circle, Los Alamitos, CA 90720, USA.
- [17] J. H. He, Nonlinear oscillation with fractional derivative and its applications, in: *International Conference on Vibrating Engineering98*, Dalian, China, 1998, pp. 288291.
- [18] Kilicman A, Al Zhou ZAA. Kronecker operational matrices for fractional calculus and some applications. *Appl Math Comput* 2007;187(1):25065.
- [19] C. R. Rao, *Piecewise orthogonal functions and their applications on system and control*, Springer, Berlin, 1983.
- [20] K.S. Miller, B. Ross, *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Diferential Equations*, John Wiley and Sons, 1993.
- [21] I.Podlubny; *Fractional Differential Equations*, Academic press, New York, 1999.
- [22] R.Gorenflo, F-Mainardi, *Fractional calculus : integral and differntial aquations of fractional order*, Spring Verlag, Wien(1997), 223-276.

Bibliographie

.