MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS - MOSTAGANEM

Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique
Département de Mathématiques et d'Informatique
Filière : Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES
Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques
Option : **Analyse Fonctionnelle**

THEME :

Etude d'une équation elliptique complète avec conditions de Robin généralisées dans le cadre non commutatif

Présenté par :

MESKI KARIMA

Président : « Mme. LIMAM Kheira »
Examinateur : « Mr. HAOUA Rabah »
Encadreur : « Mr. MEDEGHRI Ahmed »

Année Universitaire 2017/2018

UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de fin d'étude
Pour l'obtention du diplôme de Licence en Mathématiques
Cycle LMD
Spécialité :AF
Thème :

Présenté par :

MESKI KARIMA
Soutenu le .

Les membres de jury

Président	Sidi mohemed bahri	**U. MOSTAGANEM.**
Examinateur		**U. MOSTAGANEM.**
Encadreur	professeur Dahmani Zobir	**U. MOSTAGANEM.**

Dédicace

Je dédie ce travail de fin d'étude a toute ma famille, notamment les parents qui m'ont toujours conseilles et pensé a moi, et qui m'ante fait au bonne éducation.

Je dédie ce travail celle qui ma soutenu avec toute sa tendresse et son affection pour ma mère

je dédié aussi à tout mes amis ainsi que la le chef de département mathématiques

Et toute la famille de département de mathématiques et ma promotion 2015

Remerciements

Tout d'abord, Louange A Allah, le Tout Puissant de m'avoir donné le courage et la volonté d'avoir réaliser ce travail

Je tiens à remercier mes parents qui ont toujours prié pour me voir réussir. Et à leurs conseils judicieux durant cette année.

J'adresse également remerciements envers mes amis et mes collègues pour leur soutien

Mes remerciements sont adressés également à tous les enseignants de département de mathématiques

En fin, je remercie tous ceux et celles qui m'ont aidé de loin ou de prés pour l'élaboration de ce travail et tout la famille de département de mathématiques. et promotion 2015

Table des matières

INTRODUCTION

Résumé

Ce travail est consacré à l'étude d'une équation différentielle abstraite complète du second ordre de type elliptique :

$$u''(x) + (L - M)\, u'(x) - \frac{1}{2}(LM + ML)\, u(x) = f(x) \tag{1}$$

Sous les conditions aux limites de Robin généralisé dans l'espace $\mathrm{L}^p(0,1;X)$

$$\begin{cases} u'(0) - Hu(0) = d_0 \\ u(1) = u_1 \end{cases} \tag{2}$$

Où L, M et H sont des opérateurs linéaire fermés dans un espace de Banach complexe X, aves $LM \neq ML$, $f \in L^p(0,1;X)$ et d_0, u_1 sont des éléments donnés dans X.

Le but est d'obtenir l'éxistence, l'unicité et la régularité maximale de la solution, c'ést-à-dire une fonction u telle que

$$\begin{cases} u \in W^{2,p}(0,1;X) \cap L^p(0,1;D(M_w L_w) \cap D(L_w M_w)) \\ u' \in L^p(0,1;D(L_w - M_w)) \\ u(0) \in D(H) \\ u \text{ satisfait } (1), (2) \end{cases}$$

Ce travail est une synthèse de l'article de M.Cheggag , A. Favini , R . Labbas , S. Maingot, Kh . Ould Melha "New Results on Complete Elliptique equations with Robin boundary coefficient-operator conditions in non commutative case". Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programing & Computer Software (Bulletin SUSU MMCS), 2017, vol. 10, no. 1, pp. 70-96

la méthode utilisée est basée sur la construction d'une représentation de la solution à l'aide des semi groupes.

Mots clés : EDA elliptique ; conditions de Robin généralisées dans le cadre non commutatif ; Semi groupes analytiques ; régularité maximale .

Bibliographie

[1] Igor Podlubny, FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

[2] Shantanu Das, FUNCTIONAL FRACTIONAL CALCUUS

[3] K. B. Oldam, J. Spanier, The fractional calculus, Academic Press. Inc (1974).

[4] F. Mainardi, Fractional calculus and waver in linear vixoelasticity, Co. Pte. Ltd. Univ Bologna. Italy, (2005).

[5] M. GÖkçen, Non integer order derivatives, Univ ·Izmir (2007).

[6] C. M. Zener, Elasticity and Unelasticity of Metals, University of Chicago Press, Illinois, 1948.

[7] S. Westerlund, Dead matter has memory !, Phys. Scripta 43 (1991), 174–179.

[8] L. Rogers, Operators and fractional derivatives for viscoelastic constitutive equations,J. Rheol. 27 (1983), 351–372

[9] M. Riesz, L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy, Acta Math.81 (1949), 1–223 (French).

[10] A. Oustaloup, Systèmes Asservis Linéaires d'Ordre Fractionnaire, Masson, Paris,1983 (French).

[11] The Fractional Calculus, Mathematics in Science and Engineering, vol.111, Academic Press, New York, 1974.

[12] N. Engheta, On fractional calculus and fractional multipoles in electromagnetism, IEEE Trans. Antennas and Propagation 44 (1996), no. 4, 554–566.

[13] A brief historical introduction to fractional calculus, to appear in Internat.J. Math. Ed. Sci. Tech., 2003

[14] Fractional calculus in the transient analysis of viscoelastically dampedstructures, AIAA J. 23 (1985), 918–925.

[15] On the appearence of the fractional derivative in the behavior of realmaterials, J. Appl. Mech. 51 (1984), 294–298.

[16] URL : http ://www.emath.fr/proc/Vol.5/.

[17] Ross B. (1977) The Development of Fractional Calculus 1695-1900. Historia Math 4 :75-89.

[18] K.S. Miller, B. Ross, An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional DiEerential Equations, John Wiley and Sons, 1993

[19] K.B.Oldham and J.Spanier, the Fractional Calculus : Intégrations and Différentiations of Arbitrary Order. New york : Academic Press, 1974

[20] G. M. Fikhtengoltz, Course of Di erential and Integral Calculus, vol.2, Nauka, Moscow, 1969

[21] J. D. Munkhammar, Riemann-Liouville fractional derivatives and the Taylor-Riemann series, Uppsala University, Department of Mathematics,2004

[22] K. B. Oldham and J. Spanier, The Fractional Calculus, Academic Press, New York - London, 1974.

[23] B. Ross, Fractional calculus : an historical apologia for the development of a calculus using di erentiation and antidi erentiation of non integral orders, Mathematics Magazine, vol. 50, no. 3, May 1977, p. 155-122.

UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de fin d'étude
Pour l'obtention du diplôme de Licence en Mathématiques
Cycle LMD
Spécialité :Analyse Fonctionelle
Thème : Etude d'une équation elliptique complète avec conditions de Robin généralisées dans le cadre non commutatif

Présenté par :

MESKI KARIMA
Soutenu le .

/06/2018
Les membres de jury

Président	LIMAM KHEIRA	MCA	**U. MOSTAGANEM.**
Examinateur	HAOUA RABAH	MCB	**U. MOSTAGANEM.**
Encadreur	MEDEGHRI AHMED	Professeur	**U. MOSTAGANEM.**

Dédicace

Je dédie ce travail de fin d'étude à mes parents, Que dieu leur procure bonne santé et longue vie.

Je dédie ce travail aux personnes qui m'ont toujours aidé et encouragé, qui étaient toujours à mes côtés,

je dédie aussi ce travail à tous mes aimables amis surtout mon amie **Soumia,** mes collègues d'études

Et toute la famille du département de mathématiques.

Remerciements

Tout d'abord, Louange A Allah, le Tout Puissant de m'avoir donné le courage et la volonté d'avoir réaliser ce travail

Je tiens à remercier le directeur de mon mémoire, Professeur Ahmed Medeghri, qui m'a permis de bénéficier de son encadrement, pour ses conseils précieux, et ses encouragements durant la rédaction de ce travail. Je lui exprime le respect et la gratitude profonde.

Aussi, je voudrais remercier chaleureusement madame LIMAM KHEIRA, de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ce mémoire.

Un grand remerciement à monsieur HAOUA RABAH pour avoir accepté d'éxaminer ce travail

Mes sincères remerciements s'étendent également à tous mes enseignants durant les années d'études.

Bien sur, je n'oublie pas de remercier mes parents pour leur soutien et leur patience. Sans eux, je ne serais pas là.

En fin, je remercie tous ceux et celles qui m'ont aidé de loin ou de près pour l'élaboration de ce travail et toute la famille du département de mathématiques.

Table des matières

INTRODUCTION

Dans ce mémoire on fait la synthèse de l'article de M.Cheggag , A. Favini , R . Labbas , S. Maingot, Kh . Ould Melha "New Results on Complete Elliptique equations with Robin boundary coefficient-operator conditions in non commutative case". Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programing & Computer Software (Bulletin SUSU MMCS), 2017, vol. 10, no. 1, pp. 70-96
On étudie l'équation différentielle abstraite complète du second ordre de type elliptique (en abrégé EDA) :

$$u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) = f(x) \tag{1}$$

dans X espace de Banach et $f \in L^p(0,1;X)$, avec des conditions aux limites de Robin à Coefficient opérateur :

$$u'(0) + Hu(0) = d_0 \ , \ u(1) = u_1 \tag{2}$$

pour obtenir une solution vérifiant l'existence, l'unicite et la régularité maximale c'est-à-dire une fonction u telle que

$$\begin{cases} i) \ u \in W^{2,p}(0,1;X) \cap L^p(0,1;D(A)), u' \in L^p(0,1;D(B)) \\ ii) \ u(0) \in D(H) \\ iii) \ u \text{ vérifiant } (1) \text{ et } (2) \end{cases}$$

Pour étudier le problème (1) et (2), on considère un cas plus général en supposant des opérateurs linéaires fermés non commutatifs L_w, M_w en fonction d'un paramètre $w \geq 0$, ce qui ramène à traiter le problème :

$$\begin{cases} u''(x) + (L_w - M_w)u'(x) - \frac{1}{2}(L_wM_w + M_wL_w)u(x) = f(x) \ \ x \in (0,1) \\ u'(0) - Hu(0) = d_0 \\ u(1) = u_1 \end{cases} \tag{3}$$

avec $L_w = B - \sqrt{B^2 - A}$; $M_w = -B - \sqrt{B^2 - A}$
On s'intéresse à l'existence et l'unicité d'une solution classique du problème (3), c'ést-à-dire une fonction u telle que

$$\begin{cases} u \in W^{2,p}(0,1;X) \cap L^p(0,1;D(M_wL_w) \cap D(L_wM_w)) \\ u' \in L^p(0,1;D(L_w - M_w)) \\ u(0) \in D(H) \\ u \text{ satisfait } (3) \end{cases}$$

L'étude du problème (3) est faite dans un cadre non commutatif, plus précisement :

$$M_wL_w \neq L_wM_w$$

Remarque : Le commutateur de deux opérateurs P et Q sur X est définie par :

$$\begin{cases} D([P;Q]) = D(PQ) \cap D(QP) \\ [P;Q]\xi = PQ\xi - QP\xi \ \in D([P;Q]) \end{cases}$$

Dans ce travail on suppose que :

$$X \text{ est } UMD$$

Définition : Soit X un espace de Banach et $p \in \,]1;+\infty[$, on dit que X est UMD si et seulement si la transformation de Hilbert est continue dans $L^p(\mathbb{R};X)$

Le cadre non commutatif a été étudié dans l'article [5] pour le problème de Dirichlet suivant,

$$\begin{cases} u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) - wu(x) = f(x) & x \in (0,1) \\ u(0) = u_0, \quad u(1) = u_1 \end{cases}$$

avec $w > 0$ assez grand

Dans ce travail on utilise les conditions aux limites de Robin généralisées en 0 :

$$u'(0) - Hu(0) = d_0$$

avec H opérateur linéaire fermé .

Les techniques utilisées sont basées sur les semi groupes, la théorie des sommes d'opérateurs (l'approche de Dore-Venni), le théorème de réitération dans la théorie d'interpolation.

Ce mémoire est composé de quatre chapitres.

-Le premier chapitre est consacré à un ensemble de rappels sur les outils mathématiques qu'on utilise dans ce travail : les notions d'opérateurs lineaires fermés, les semi-groupes, définitions de quelques espaces fonctionnels, les espaces d'interpolations et les sommes d'opérateurs de Dore-Venni.

-Le deuxième chapitre, comporte quatre parties :

Dans la première partie, on donne les hypothèses et le résultat principal.

La deuxième partie contient certains lemmes techniques .

Dans la troisième partie, on construit une représentation de la solution du problème (3) en utilisant la formule de représentation de la solution dans le cas commutatif, pour obtenir une équation intégrale vérifiée par la solution classique éventuelle $u = (L_w + M_w)^{-2} v$ du problème (3) , cette équation intégrale est écrite sous la forme

$$v + R_w(v) = F_w(f) + \Gamma$$

où R_w, F_w et Γ_w dépendent de L_w, M_w ce qui nous permettera d'écrire

$$u = (L_w + M_w)^{-2} \left((I + R_w)^{-1} (F_w(f) + \Gamma_w) \right).$$

Dans la quatrième partie, on étudie la régularité de la solution.

-Le troisième chapitre est une comparaison entre notre travail et celui du cas commutatif traité dans le récent papier [1] .

-Au dernier chapitre, on donne un exemple concret d'EDP auquel on applique les résultats obtenus.

Chapitre 1

Rappels

Ce chapitre est constitué d'un rappel de quelques notions fondamentales utilisées dans ce travail.

1.1 Définitions et propriétés des opérateurs

Définition 1.1 Soit X un espace de Banach, on dit que A est un opérateur linéaire sur X si et seulement si c'est une application linéaire définie sur un sous espace vectoriel $D(A)$ ($D(A)$ le domaine de définition de A) de X à valeur dans X i.e :

$$A : D(A) \subset X \to X \quad \text{est linéaire.}$$

Proprietés :
Soit A un opérateur linéaire sur X, on dit que :

1 A est borné si : $D(A) = X$ et $\sup\limits_{\|x\|<1} \|Ax\| < +\infty$

et on écrit : $A \in \mathcal{L}(X)$

2 A est fermé si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D(A)$

telle que :$\begin{cases} x_n \to x \\ Ax_n \to y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x \in D(A) \\ Ax = y \end{cases}$

3 A est fermable si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D(A)$

telle que :

$$\begin{cases} x_n \to 0 \\ Ax_n \to y \end{cases} \Longrightarrow y = 0$$

Définition 1.2 On appelle l'ensemble résolvant de l'opérateur A et on note $\rho(A)$ l'ensemble :
$$\rho(A) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda I)^{-1} \text{ existe dans } \mathcal{L}(X)\right\}$$

les éléments de $\rho(A)$ sont appelés les valeurs résolvantes de A et si $\lambda \in \rho(A)$, on définit la résolvante $R_\lambda(A)$ de A au point λ par

$$R_{\lambda}(A) = (A - \lambda I)^{-1}$$

Définition 1.3 On appelle le spèctre de A et on note $\sigma(A)$ l'ensemble

$$\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A).$$

Les éléments de $\sigma(A)$ sont appelés les valeurs spectrales de A.

1.2 Les Semi groupes fortement continus

Définition 1.4 Soit X un espace de Banach, on définit un semi groupe sur X par une famille $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés vérifiant :
$i)$ propriété algébrique : $G(t+s) = G(t).G(s) \quad \forall t, s \in \mathbb{R}_+$.
$ii)$ Identité dans $\mathcal{L}(X)$: $G(0) = I$
$iii)$ propriété topoloqique : $\lim\limits_{t\to 0^+} G(t)x = x.\ \forall x \in \mathbb{R}$

Remarque 1.1 : si $i)$ est vérifiée pour tout $s, t \in \mathbb{R}$ alors $\{G(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ est dit groupe.

Définition 1.5 générateur infinitésimal d'un C$_0$-semi groupe
On appelle générateur infinitisémal d'un C$_0$-semi groupe $(G(t))_{t\geq 0}$ l'opérateur A défini par :

$$\begin{cases} D(A) = \left\{x \in X : \lim\limits_{t\to 0^+} \frac{G(t)x - x}{t} \text{ existe dans X}\right\} \\ \forall x \in D(A), Ax = \lim\limits_{t\to 0^+} \frac{G(t)x - x}{t} \end{cases}$$

1.3 Semi groupe analytique

Définition 1.6 Soient X un espace de Banach et Δ tel que :
$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : \varphi_1 < \arg z < \varphi_2, \varphi_1 < 0 < \varphi_2\}$, une famille $\{G(t)\}_{z\in\Delta}$ forme un semi groupe analytique dans X si elle vérifie :

$$\begin{cases} i)\ z \to G(z) \text{ est analytique} \\ ii)\ G(0) = I \text{ et } \forall x \in X\ , \quad \lim\limits_{\substack{z \longrightarrow 0 \\ z\in\Delta}} G(z)x = x \\ iii)\ \forall z_1, z_2 \in \Delta,\ G(z_1 + z_2) = G(z_1)G(z_2) \end{cases}$$

Générateur infinitésimal d'un semi groupe analytique :

Théorème 1.1 Soit $A : D(A) \subset X \to X$ un opérateur linéaire tel que

1. A est fermé
2. D_A est dense
3. $\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{C}^* \setminus \operatorname{Re}\lambda \geq 0\}$ et $\forall \lambda \in \rho(A)$:
   $\left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{L}{|\lambda|}.\ \forall L > 0$

Alors A est générateur infinitésimal d'un C$_0$-semi groupe analytique tel que :

1. $\exists\ M > 0\,;\ \forall\ t > 0 : \|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M$
2. $\forall\ t > 0, G(t) \in \mathcal{L}(X, D(A))$ et $\|AG(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{t}$.

1.4 Définition de quelques espaces

Définition 1.7 Espace de Banach
Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet

Définition 1.8 Espace métrique complet
Un espace métrique (X, d) est complet si toute suite de cauchy dans X est convergente

Définition 1.9 l'espace $\mathcal{L}^p$
On appelle espace $\mathcal{L}^p$ l'ensemble des fonctions mesurables telle que

$$\left(\int |f|^p \, dm\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \text{ et on note : } f \in \mathcal{L}^p$$

Définition 1.10 l'espace $\mathbf{L^p}$
Soient $(E; T; m)$ un espace mesuré et $1 < p < +\infty$; on définit l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(E; T; m)$ comme l'ensemble des classes d'équivalence des fonctions de $\mathcal{L}^p$ pour la relation d'équivalence égalité presque partout $(= p.p)$

Définition 1.11 Espace séparé
On dit que l'espace topologique $(E; T)$ est séparé si :
$$\forall x \in E, \forall y \in E, x \neq y \implies \exists v \in V(x), \exists w \in V(y) : v \cap w = \phi$$
telle que : V est l'ensemble des voisinages de x

1.5 Les espaces d'interpolation

Soient E_0, E_1deux espaces de Banach, tout deux inclus dans un même espace vectoriel topologique séparé E.
On considère les espaces $E_0 \cap E_1$ et $E_0 + E_1$ (espace de $a \in E$ de la forme $a = a_0 + a_1, a_i \in E_i \subset E$) munis des normes (respectivement) :

$$\begin{aligned} \|a\|_{E_0 \cap E_1} &= \max\left(\|a\|_{E_0}, \|a\|_{E_1}\right) \\ \|a\|_{E_0 + E_1} &= \inf\left(\|a_0\|_{E_0} + \|a_1\|_{E_1}\right) \end{aligned}$$

ce sont des espaces de Banach et on a :

$$E_0 \cap E_1 \subset E_i \subset E_0 + E_1 \quad (\ E_i \subset E_1).$$

On appelle espace intermédiare (entre E_0, E_1) tout espace vectoriel topologique localement convexe séparé E telle que :

$$E_0 \cap E_1 \subset E \subset E_0 + E_1.$$

Définition 1.12 Soit X un espace de Banach, on désigne par $L^p_*(\mathbb{R}_+, X)$ $(1 < p < +\infty)$ l'espace de Banach des fonctions f fortement mesurables définies pour presque tout $t \in \mathbb{R}_+$ à valeurs dans X telle que :

$$\left(\int_0^{+\infty} \|f(t)\|_X^p \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{L_*^p(\mathbb{R}_+,X)} < +\infty$$

soit $p \in [1, +\infty[$ et $\theta \in [0,1]$, on dit que $x \in (E_0, E_1)_{\theta,p}$ l'espace intermédiare entre $E_0 \cap E_1$ et $E_0 + E_1$ si et seulement si :

$$\begin{cases} i) \ \forall t > 0, \exists u_0(t) \in E_0 \ , \ u_1 \in E_1 : x = u_0(t) + u_1(t) \\ \\ ii) \quad t^{-\theta} u_0 \in L_*^P(E_0) \qquad \text{et} \qquad t^{1-\theta} u_1 \in L_*^p(E_1) \end{cases}$$

Espaces de Besov

Définition 1.13 Soient $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$, $s > 0$ et $1 \leq p \leq +\infty$. On définit l'espace de Besov $B_p^1(\mathbb{R}^n) = \left\{ \varphi \in L^p(\mathbb{R}^n) : \ (x,y) \longrightarrow \frac{\varphi(x)+\varphi(y)-2\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right)}{|x-y|^{1+\frac{n}{p}}} \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \right\}$,
puis pour $s > 1$ entier

$$B_p^s := \left\{ \varphi \in W^{s-1,p}(\mathbb{R}^n) : D^\alpha \varphi \in B_p^1(\mathbb{R}^n), |\alpha| = s-1 \right\},$$

et enfin pour s non entier

$$B_p^1(\mathbb{R}^n) := W^{s,p}(\mathbb{R}^n).$$

Définition 1.14 Soient $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}, s > 0$ et $1 < p < \infty$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On définit

$$B_p^1(\Omega) = \left\{ \varphi = \psi_{/n} \ ,\psi \in B_p^s(\mathbb{R}^n) \right\}.$$

Définition 1.15 Soient $m, n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}, s > 0$ et $1 \leq p, q \leq \infty$. On définit **l'espace de Besov**

$$B_{p,q}^1(\mathbb{R}^n) := \left\{ \varphi \in L^p(\mathbb{R}^n), \sum_{k=1}^n \left(\int_0^{+\infty} t^{-q} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x+t_{e_k}) + \varphi(x-t_{e_k}) - 2\varphi(x)|^p \right) \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \right\},$$

et pour $0 < s < 1$

$$B_{p,q}^1 := \left\{ \varphi \in L^p(\mathbb{R}^n), \sum_{k=1}^n \left(\int_0^{+\infty} t^{sq} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x+t_{e_k}) - \varphi(x)|^p \right) \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \right\}$$

puis

$$B_{p,q}^m(\mathbb{R}^n) := \left\{ \varphi \in W^{m-1,p}(\mathbb{R}^n) : D^\alpha \varphi \in B_{p,q}^1(\mathbb{R}^n), |\alpha| = m-1 \right\}$$

et enfin pour $m < s < m+1$

$$B_{p,q}^m(\mathbb{R}^n) := \left\{ \varphi \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n) : D^\alpha \varphi \in B_{p,q}^{s-m}(\mathbb{R}^n), |\alpha| = m \right\}$$

où $(e_1, ..., e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$

Définition 1.16 Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $s > 0, 1 \leq p, q \leq \infty$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On définit

$$B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) := \left\{ \varphi = \psi_{\setminus \Omega} \ , \psi \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \right\}$$

Dans le cas particulier $p = q$, on a le résultat suivant.

Définition 1.17 $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $s > 0, 1 \leq p, q \leq \infty$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$.On a

$$B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) = B_p^s(\mathbb{R}^n)$$

et

$$B_{p,q}^s(\Omega) = B_p^s(\Omega)$$

Théorème 1.2 ([6] p .681) Pour $1 < p < +\infty$ et $1 \leq q \leq +\infty$; on a

$$(W^{m,p}(\mathbb{R}^n) ; L^p(\mathbb{R}^n))_{\theta,p} = B_{p,q}^{m(1-\theta)}(\mathbb{R}^n)$$

Proposition 1.1 ([6] p .683) Soit une variété différentielle de classe C^m de dimension n de bord de dimension $n-1$ contenu dans $\mathbb{R}^n$,alors pour $1 < p < +\infty$ et $1 \leq q \leq +\infty$ on a

$$(W^{m,p}(\Omega) ; L^p(\mathbb{R}^n))_{\theta,p} = B_{p,q}^{m(1-\theta)}(\Omega)$$

1.6 Théorie des sommes d'opérateurs approche de Dore-Venni

Dans un espace de Banach X, on considère l'équation suivante :

$$Au + Bu = f$$

où A et B sont deux opérateurs linéaires fermés de domaines D_A et D_B inclus dans X et on pose l'opérateur somme L telle que :

$$\begin{cases} Lu = Au + Bu \\ u \in D_A \cap D_B \end{cases}$$

cette approche s'applique pour un espace UMD X et donne des résultats pour tout f dans X et utilise des intégrales des puissances complexes de A et B qui sont des opérateurs BIP.

Définition 1.18 Espace UMD
soit X un espace de Banach et $p \in \left]1, +\infty\right[$,on dit que X est UMD si et seulement si la transformation de Hilbert est continue dans $L^p(\mathbb{R}, X)$.

Définition 1.19 Transformation de Hilbert
soit $\varepsilon \in \left]0, 1\right[$ et $p \in \left]1, +\infty\right[$, $\forall f \in L^p(\mathbb{R}, X)$:

$$Hf = \lim_{\varepsilon \to 0} H_\varepsilon f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int \frac{f(x-s)}{s} ds.$$

Définition 1.20 Opérateur BIP

Soit A un opérateur linéaire fermé on dit que A est BIP si :

$$\forall s \in \mathbb{R},\ A^{is} \in \mathcal{L}(X)\ \ et\ \exists\ K > 0, \exists\ \theta_A \in [0, \pi[\ \ \forall s \in \mathbb{R} : \left\|A^{is}\right\| \leq K \exp\left(|s|\,\theta_A\right)$$

Les hypotbèses de l'approche de Dore-Venni sont les suivantes :

Soit X un espace de UMD et A, B sont deux opérateurs linéaires fermés de domaines D_A , D_B denses dans X, vérifiant :

$$(\mathbf{DV1}) \begin{cases} \rho(A) \supset\,]-\infty, 0]\ \text{ et } \exists M_A > 0\ \forall\lambda \geq 0 : \left\|(A+\lambda)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M_A}{1+\lambda} \\ \rho(B) \supset\,]-\infty, 0]\ \text{ et } \exists\ M_B > 0\ \forall\lambda \geq 0 : \left\|(B+\lambda)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M_B}{1+\lambda} \end{cases}$$

$$(\mathbf{DV2}) \left\{\forall\lambda \in \rho(-A), \forall\mu \in \rho(-B) : (B+\mu)^{-1}(A+\lambda)^{-1} = (A+\lambda)^{-1}(B+\mu)^{-1}\right.$$

$$(\mathbf{DV3}) \begin{cases} \forall s \in \mathbb{R},\ A^{is} \in \mathcal{L}(X)\ \text{ et } \exists\ K > 0, \exists\ \theta_A \in [0, \pi[, \forall s \in \mathbb{R} : \|A^{is}\| \leq K \exp\left(|s|\,\theta_A\right) \\ \forall s \in \mathbb{R},\ B^{is} \in \mathcal{L}(X)\ \text{ et } \exists\ K > 0, \exists\ \theta_B \in [0, \pi[, \forall s \in \mathbb{R} : \|B^{is}\| \leq K \exp\left(|s|\,\theta_B\right) \\ \theta_A + \theta_B < \pi \end{cases}$$

Téorème 1.3 (**Dore- Venni**)

Soit X un espace UMD et sous les hypothèses $(\mathbf{DV1}), (\mathbf{DV2})$ et $(\mathbf{DV3})$, l'opérateur L est fermé et il existe $L^{-1} \in \mathcal{L}(X)$
tel que :

$$L^{-1} = \frac{1}{\pi i}\int_\gamma \frac{A^{-z}B^{z-1}}{\sin \pi z}dz$$

où γ est une courbe verticale continue dans la bande $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} < 1\}$.

1.7 Application de l'approche de Dore-Venni

On considère le problème de Cauchy abstrait :

$$(P_c) \begin{cases} u'(t) + Au(t) = f(t)\ \ ,\ \ 0 < t < T \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

où : $f \in X = L^p((0,T);Y)$, $1 < p < +\infty$ et Y est $UMD \implies X$ est UMD
$A : D(A) \to Y$ un opérateur linéaire fermé de domaine dense tel que :

$$\exists C > 0 :\ \ \left\|(A+\lambda I)^{-1}\right\| \leq \frac{C}{1+\lambda}.\forall\lambda \geq 0$$

Et $\xi \longrightarrow A^{i\xi}$ est un groupe fortement continue dans $\mathcal{L}(X)$ vérifiant :

$$\exists C > 0 : \left\|A^{i\xi}\right\| \leq C \exp\left(\theta_A\,|\xi|\right) et 0 \leq \theta_A \leq \frac{\pi}{2}.$$

On pose

$$\begin{cases} B : D(B) \longrightarrow Y \\ Bu = u' \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} D(A) = \left\{u \in L^P(0,T,Y), u(t) \in D(A)\right\} \\ (Au)(t) = Au(t) \end{cases}$$

donc

$$(Pc) \implies Bu(t) + Au(t) = f(t), \text{ dans } X$$

On montre que B est linéaire fermé : $\mathbb{R}^- \cup \{0\} \subset \rho(B)$ et $\forall\lambda \geq 0; \left\|(\lambda I - B)^{-1}\right\| \leq \frac{C_0}{1+|\lambda|}$.
De plus

$$\forall s \in \mathbb{R}; B^{is} \in \mathcal{L}(X) : s \longrightarrow B^{is} \textit{ groupe et } \left\|B^{is}\right\| \leq C_1\left(1+s^2\right) e^{\left(\frac{\pi}{2}|s|\right)}.$$

Théorème 1.4 $\forall f \in L^p(0,T;Y)$, $1 < p < +\infty$, le problème de Cauchy admet une unique solution u tel que :

$$u \in W^{1,p}(0,T;Y) \cap L^p(0,T;D(A))$$

Remarque 1.2 : A générateur infinitésimal d'un semi groupe analytique et :

$$u(t) = \int_0^t e^{(t-s)A} f(s) ds$$

on a

$$Au(t) = A\int_0^t e^{(t-s)A} f(s) ds$$

pour tout $f \in L^p(0,T;Y)$, X espace UMD alors le problème (Pc) admet une unique solution u telle que :

$$u \in W^{1,p}(0,T;X) \cap L^p(0,T;D(A))$$

et donc $\quad Au \in L^p(0,T,Y)$.

1.8 Espace d'interpolation et réitération

soit $\theta \in (0,1)$, $q \in [1,+\infty[$, $m \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathbb{R}$ et V un opérateur linéaire fermé sur X vérifiant $]\mu,+\infty[\subset \rho(V)$ et $\sup\limits_{\lambda} \left\|\lambda(V-\lambda I)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} < +\infty$,
on considère l'espace d'interpolation $(X, D(V))_{\theta,q}$.
On définit :$(X, D(V))_{m+\theta,q} = \left\{\phi \in D(V^m), V^m\phi \in (X, D(V))_{\theta,q}\right\}$ quand $\theta \neq \frac{1}{2}$,on peut utiliser le résultat de réitération

$$\left(X, D\left(V^2\right)\right)_{\theta,q} = (X, D(V))_{2\theta,q} \tag{1.3}$$

et on a : $(D(V), X)_{\theta,q} = (X, D(V))_{1-\theta,q}$ donc d'après (1.3) on a :

$$\left(D\left(V^2\right), X\right)_{\theta,q} = \left(X, D\left(V^2\right)\right)_{1-\theta,q} = (X, D(V))_{2-2\theta,q} \tag{1.4}$$

et

$$V\varphi \in (X, D(V))_{\theta,q} \Leftrightarrow \varphi \in (X, D(V))_{1+\theta,q}.$$

Chapitre 2

Hypothèses, représentation et régularité de la solution du problème

2.1 Hypothèses et Résultat principal

On étudie le problème

$$\begin{cases} u''(x) + (L_w - M_w)\, u'(x) - \frac{1}{2}(L_w M_w + M_w L_w)\, u(x) = f(x), \ x \in (0,1) \\ u'(0) - Hu(0) = d_0 \\ u(1) = u_1 \end{cases}$$

posé dans X un espace de Banach, $f \in L^p(0,1;X)$, $1 < p < +\infty$; $u_1, d_0 \in X$, $w > 0$
Les opérateurs L_w, M_w et H sont linéaires non bornés, on suppose que :

$$X \text{ est un espace } UMD \tag{2.1.1}$$

et qu'il existe un réel positif fixé w_0 tel que les opérateurs linéaires fermés L_w et M_w vérifient :

$$\begin{cases} \exists C_0 > 0; \forall w \geq w_0 : \left]0,+\infty\right[\subset \rho(L_w) \cap \rho(M_w) \\ \ker(L_w) = \ker(M_w) = \{0\} \ , \ \overline{R(L_w)} = \overline{R(M_w)} = X \\ \sup\limits_{\lambda>0} \left\| \lambda (L_w - \lambda I)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C_0 \text{ et } \sup\limits_{\lambda>0} \left\| \lambda (M_w - \lambda I)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C_0 \end{cases} \tag{2.1.2}$$

Et

$$\begin{cases} \exists \theta_1, \theta_2 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \exists C \geq 1 : \forall w \geq w_0, \forall s \in R \\ (-L_w)^{is}, (-M_w)^{is} \in \mathcal{L}(X) \\ \|(-L_w)^{is}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C e^{\theta_1 |s|} \text{ et } \|(-M_w)^{is}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C e^{\theta_2 |s|} \end{cases} \tag{2.1.3}$$

Remarque 2.1.1 *Grâce aux hypothèses* (2.1.2) *et* (2.1.3), *pour* $w \geq w_0$, $-L_w$ *et* $-M_w$ *appartiennent à la classe BIP*(X,θ) [10, *Definition 1, p. 431*]. *Puisque* $\theta_1, \theta_2 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, L_w *et* M_w *génèrent des semi-groupes analytiques unifomément bornés dans X, respectivement* $\left(e^{\xi L_w}\right)_{\xi \geq 0}$ *et* $\left(e^{\xi M_w}\right)_{\xi \geq 0}$ [10, p. 437].

Pour tout $w \geq w_0$, on suppose :

$$D(L_w) = D(M_w), \tag{2.1.4}$$

$$D\left((L_w + M_w)^2\right) \subset D\left((M_w - L_w)^2\right), \tag{2.1.5}$$

$$L_w + M_w \text{ est inversible dans } \mathcal{L}(X) \tag{2.1.6}$$

On considère l'opérateur :

$$\Lambda_w = (M_w - H) + e^{L_w} e^{M_w} (L_w + H)$$

qui sera, dans un certain sens, le déterminant abstrait de notre problème, alors on suppose que

$$\forall w \geq w_0,\ \Lambda_w \text{ est inversible dans } \mathcal{L}(X) \tag{2.1.7}$$

Et

$$\forall \xi \in D(L_w), \forall w \geq w_0, \Lambda_w^{-1}\xi \in D\left((L_w + M_w)^2\right). \tag{2.1.8}$$

Le commutateur est donnée par

$$\begin{aligned} C_{L_w,M_w} &= (M_w L_w - L_w M_w)(L_w + M_w)^{-2} \\ &= [M_w; L_w](L_w + M_w)^{-2}. \end{aligned} \tag{2.1.9}$$

L'hypothèse de non commutativité est

$$\forall w \geq w_0, \|C_{L_w,M_w}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \chi(w) \tag{2.1.10}$$

avec

$$\chi : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+ \text{ avec } \lim_{w \longrightarrow \infty} \chi(w) = 0 \tag{2.1.11}$$

On verra que dans des cas concrets, on a

$$\chi(w) = \frac{c}{w^\alpha} \text{ pour } w \text{ assez grand, avec } c, \alpha > 0$$

Le commutateur défini en (2.1.9) a été utilisé pour la première fois par Favini et al.[4] .

Remarque 2.1.2 *de l'hypothèse* (2.1.6)*, on déduit que* $(L_w + M_w)^2$ *est fermé.*

Remarque 2.1.3 *nous n'avons pas supposé que* L_w *et* M_w *sont inversibles comme dans Cheggag et al.*[1, 2].

Remarque 2.1.4 *Supposons* (2.1.1) $\sim$ (2.1.10)*, on verra alors dans le lemme* 1 *ci-dessous que*

$$D(L_w M_w) \cap D(M_w L_w) = D\left((L_w + M_w)^2\right).$$

Supposons que le problème (3) *a une solution classique* u*. Donc*

$$u \in W^{2,p}(0,1;X) \cap L^P\left(0,1; D\left((L_w + M_w)^2\right)\right) \text{ et } u(0) \in D(H)$$

qui implique

$$u(0), u(1) \in \left(D(L_w + M_w)^2, X\right)_{\frac{1}{2p},p} = \left(X, D(L_w + M_w)^2\right)_{1-\frac{1}{2p},p} \tag{2.1.12}$$

Voir [6] .

Remarque 2.1.5 *par le théorème de réitération, nous avons*

$$\begin{aligned}\left(X, D\left((L_w+M_w)^2\right)\right)_{1-\frac{1}{2p},p} &= \left(X, D\left((L_w+M_w)\right)\right)_{2-\frac{1}{p},p}\\ &= \left(X, D\left(L_w\right)\right)_{1+1-\frac{1}{p},p}\\ &= \left\{\phi\in D\left(L_w\right) : L_w\phi \in \left(X, D\left(L_w\right)\right)_{1-\frac{1}{p},p}\right\}\end{aligned}$$

donc

$$u(0), u(1) \in D\left(L_w\right) = D\left(M_w\right) \tag{2.1.13}$$

Le résultat principal de ce travail est :

Théorème 2.1.1 *On suppose* (2.1.1) $\sim$ (2.1.10)

Soit $f\in L^p(0,1;X), 1<p<+\infty$. Alors il existe $w^*\geq w_0$ tel que pour tout $w\geq w^*$ les deux assertions suivantes sont équivalentes:

$$\begin{array}{c}1)\ \text{le problème (3) admet une unique solution classique } u\\ 2)\ u_1, \Lambda_w^{-1}d_0 \in \left(X, D\left(L_w+M_w\right)^2\right)_{1-\frac{1}{2p},p}\end{array} \tag{2.1.14}$$

2.2 Lemmes techniques

Dans les calculs qui suivent, la dépendance en w n'étant pas nécessaire, on dénote L_w, M_w, Λ_w par L, M, Λ.

Lemme 2.2.1 *On suppose* (2.1.2) $\backsim$ (2.1.5)*. Alors*

1. $D(LM) = D(M^2)$ *et* $D(ML) = D(L^2)$,
2. $D\left((L+M)^2\right) = D(L^2)\cap D(M^2) = D(ML)\cap D(LM)$,
3. $D\left((L-M)^2-(L+M)^2\right) = D(LM)\cap D(ML) = D\left((L+M)^2\right)$.

Preuve.
1. Voir [4, lemme 2.2 p. 1499] .
2. La preuve peut être trouvée dans [9], nous donnons les détails :
Soit $\phi\in D\left((L+M)^2\right)$, il existe $\xi\in X$, tel que

$$\phi = (L+M)^{-2}\xi.$$

Alors

$$\begin{aligned}M\phi &= M(L+M)^{-2}\xi = \frac{1}{2}\left(I-(L+M-2M)(L+M)^{-1}\right)(L+M)^{-1}\xi\\ &= \frac{1}{2}\left(I-(L-M)(L+M)^{-1}\right)(L+M)^{-1}\xi\\ &= \frac{1}{2}(L+M)^{-1}\xi - \frac{1}{2}(L-M)(L+M)^{-2}\xi\end{aligned}$$

mais $(L+M)^{-1}\xi \in D(M)$ et de $(2.1.5)$,on a

$$(L-M)(L+M)^{-2}\xi \in D(M).$$

d'où $M\phi \in D(M)$ donc $\phi \in D(M^2)$. En échangeant les roles de L et M, on obtient $\phi \in D(L^2)$

Inversement, Soit $\phi \in D(L^2) \cap D(M^2)$ .Alors

$$L\phi \in D(L) = D(L+M) \ \ et \ M\phi \in D(M) = D(L+M)$$

donc $(L+M)\phi \in D(L+M)$, ainsi $\phi \in D\left((L+M)^2\right)$.

3. L'assertion 2 et l'hypothèse $(2.1.5)$ permettent de déduire

$$D\left((L-M)^2 - (L+M)^2\right) = D\left((L+M)^2\right) = D(LM) \cap D(ML)$$

$\square$

Lemme 2.2.2 *Supposons* $(2.1.1) \sim (2.1.9)$ *.Pour tout opérateur* $S, \widetilde{S} \in \{L, M, L+M, L-M\}$, *on a*

1. $S(L-I)^{-1}, S(L+M)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$
2. $S(L-M)(L+M)^{-2}, S\widetilde{S}(L+M)^{-2} \in \mathcal{L}(X)$
3. $(L+H)\Lambda^{-1}, (M+H)\Lambda^{-1} \in \mathcal{L}(X)$

Preuve. La preuve est basée sur les hypothèses$(2.1.4) \sim (2.1.10)$ et la remarque suivante : Si S est un opérateur linéaire fermé sur X (ou une somme d'opérateurs linéaires fermés sur X) et $W \in \mathcal{L}(X)$ avec $W(X) \subset D(S)$ alors $SW \in \mathcal{L}(X)$. $\square$

Lemme 2.2.3 *Supposons*$(2.1.1) \sim (2.1.7)$. *Alors*

1. $(L \pm M)^2 = L^2 \pm LM \pm ML + M^2$ et pour $\phi \in D((L+M)^2)$ on a
$$(L \pm M)^2\phi = L^2\phi \pm LM\phi \pm ML\phi + M^2\phi$$
2. $LM + ML = \frac{1}{2}\left((L+M)^2 - (L-M)^2\right)$
3. $\left[(L-M);(L+M)^{-1}\right] = -2\left[M;(L+M)^{-1}\right] = 2\left[L;(L+M)^{-1}\right]$
4. $C_{L,M} = \frac{1}{2}(L+M)\left[(L-M);(L+M)^{-1}\right](L+M)^{-1}$
5. $(L+H)\Lambda^{-1} = (L+M)\Lambda^{-1} + e^L e^M (L+H)\Lambda^{-1} - I$
6. $(L+M)^{-1}M - (L+M)^{-1}C_{L,M}(L+M) = M(L+M)^{-1}$ et
$(L+M)^{-1}L + (L+M)^{-1}C_{L,M}(L+M) = L(L+M)^{-1}$
7. $$\begin{cases} M(L+M)^{-1}M + \frac{1}{2}(L-M)(L+M)^{-1}C_{L,M}(L+M) \\ \qquad = \frac{1}{2}M - \frac{1}{2}(L-M)M(L+M)^{-1} \\ L(L+M)^{-1}L + \frac{1}{2}(L-M)(L+M)^{-1}C_{L,M}(L+M) \\ \qquad = \frac{1}{2}L + \frac{1}{2}(L-M)L(L+M)^{-1} \end{cases}$$

8. $M+(L-M)\,M\,(L+M)^{-1}-(LM+ML)\,(L+M)^{-1}=0$ sur $D\,(M)$.
$L-(L-M)\,L\,(L+M)^{-1}-(LM+ML)\,(L+M)^{-1}=0$ sur $D\,(L)$

Preuve. □

Pour le point 1 et 2 voir la preuve du lemme 2.2 dans [4] et pour le point 3 voir le lemme 2.1 dans [4].

4. On a

$$\begin{aligned} C_{L,M} &= [M;L]\,(L+M)^{-2} \\ &= (ML-LM)\,(L+M)^{-2} \end{aligned}$$

et pour $\phi\in D\,((L+M)^{\,2})$
$$\begin{cases} (L+M)\,(L-M)\,\phi=L^2\phi-LM\phi+ML\phi-M^2\phi \\ (L-M)\,(L+M)\,\phi=L^2\phi+LM\phi-ML\phi-M^2\phi \end{cases}$$

alors

$$((L+M)\,(L-M)-(L-M)\,(L+M))\,\phi=2\,(ML-LM)\,\phi$$

d'où

$$\begin{aligned} C_{L,M} &= (ML-LM)\,(L+M)^{-2} \\ &= \frac{1}{2}\,((L+M)\,(L-M)-(L-M)\,(L+M))\,(L+M)^{-2} \\ &= \frac{1}{2}\,(L+M)\,\big((L-M)\,(L+M)^{-1}-(L+M)^{-1}\,(L-M)\big)\,(L+M)^{-1} \\ &= \frac{1}{2}\,(L+M)\,[(L-M)\,;(L+M)^{-1}]\,(L+M)^{-1} \end{aligned}$$

5. Il suffit d'écrire

$$\begin{aligned} &(L+M)^{-1}\,\Lambda^{-1}+e^Le^M\,(L+H)\,\Lambda^{-1}-I \\ =\;& \big[(L+M)+e^Le^M\,(L+H)-(M-H)-e^Le^M\,(L+H)\big]\,\Lambda^{-1} \\ =\;& (L+H)^{-1}\,\Lambda^{-1} \end{aligned}$$

6. D'après le point 4, on a

$$(L+M)^{-1}\,C_{L,M}\,(L+M)=\frac{1}{2}\left[(L-M)\,;(L+M)^{-1}\right] \tag{*}$$

puis, en utilisant l'assertion 3, on obtient

$$\begin{aligned} (L+M)^{-1}\,M-(L+M)^{-1}\,C_{L,M}\,(L+M) &= (L+M)^{-1}\,M-\frac{1}{2}\left[(L-M)\,;(L+M)^{-1}\right] \\ &= (L+M)^{-1}\,M+\left[M;(L+M)^{-1}\right] \\ &= M\,(L+M)^{-1}. \end{aligned}$$

La deuxième égalité est obtenue de la même manière .

7. D'aprés l'assertion 3 et (*), on a

$$\begin{aligned}
& M(L+M)^{-1}M+\frac{1}{2}(L-M)(L+M)C_{L,M}(L+M) \\
= \; & M(L+M)^{-1}M+\frac{1}{4}(L-M)\left[(L-M);(L+M)^{-1}\right] \\
= \; & M(L+M)^{-1}M-\frac{1}{2}(L-M)\left[M;(L+M)^{-1}\right] \\
= \; & M(L+M)^{-1}M-\frac{1}{2}(L-M)M(L+M)^{-1}+\frac{1}{2}(L-M)(L+M)^{-1}M \\
= \; & M(L+M)^{-1}M-\frac{1}{2}(L-M)M(L+M)^{-1}+\frac{1}{2}M-M(L+M)^{-1}M \\
= \; & \frac{1}{2}M-\frac{1}{2}(L-M)M(L+M)^{-1}.
\end{aligned}$$

De même, on obtient
$L(L+M)^{-1}L+\frac{1}{2}(L-M)(L+M)C_{L,M}(L+M)=\frac{1}{2}L-\frac{1}{2}(L-M)L(L+M)^{-1}.$

8. Sur le domaine $D(L)=D(M)$, on a d'après l'assertion 2

$$\begin{aligned}
& M+(L-M)M(L+M)^{-1}-(LM+ML)(L+M)^{-1} \\
= \; & M+(L-M)M(L+M)^{-1}+\frac{1}{2}\left((L-M)^2-(L+M)^2\right)(L+M)^{-1} \\
= \; & M+(L-M)M(L+M)^{-1}+\frac{1}{2}(L-M)^2(L+M)^{-1}-\frac{1}{2}(L+M) \\
= \; & (L-M)M(L+M)^{-1}+\frac{1}{2}(L-M)^2(L+M)^{-1}-\frac{1}{2}(L+M-2M) \\
= \; & \frac{1}{2}(L-M)\left[2M+(L-M)\right](L+M)^{-1}-\frac{1}{2}(L-M) \\
= \; & \frac{1}{2}(L-M)(L+M)(L+M)^{-1}-\frac{1}{2}(L-M) \\
= \; & 0
\end{aligned}$$

La deuxième égalité est obtenue de manière similaire
Nous avons également besoin des résultats classiques suivants.

Lemme 2.2.4 *Soit* $f\in L^p(0,1;X);1<p<+\infty$, *sous les hypothèses* $(2.1.1),(2.1.2),(2.1.3)$ *et* Q$\in\{L,M\}$ *on a :*

1. $x\mapsto K(x,f)=\mathrm{Q}\int\limits_0^x e^{(x-s)\mathrm{Q}}f(s)\,ds\in L^p(0,1;X).$

2. $x\mapsto F(x,f)=\mathrm{Q}\int\limits_x^1 e^{(s-x)\mathrm{Q}}f(s)\,ds\in L^p(0,1;X).$

3. $x \mapsto T(x, f) = \mathrm{Q}\int\limits_0^1 e^{(x+s)\mathrm{Q}} f(s)\, ds \in L^p(0,1;X)$.

4. $\int\limits_0^1 e^{s\mathrm{Q}} f(s)\, ds,\ \int\limits_0^1 e^{(1-s)\mathrm{Q}} f(s)\, ds \in (D(\mathrm{Q}), X)_{\frac{1}{p},p}$.

Preuve. 1) X étant UMD et Q un opérateur linéaire fermé dans X vérifiant les hypothèses de Dore-Veni, alors :

$$v(x) = \int_0^x e^{(x-s)Q} f(s)\, ds$$

est la solution stricte et unique du problème de Cauchy :

$$(Pc) : \begin{cases} v'(x) + Qv(x) = f(x) \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

alors, en appliquant le théorème (1.3) et la remarque (1.2) (voir chapitre rappels) sur ce problème de Cauchy (P_c), on obtient

$$v \in W^{1,p}(0,1;X) \cap L^p(0,1;D(Q))$$

Donc

$$K(.,f) \in L^p(0,1;X)$$

2) En posant $t = 1 - s$, on obtient :

$$\begin{aligned} K(x,f) &= \mathrm{Q}\int_x^1 e^{(s-x)} f(s)\, ds \\ &= \mathrm{Q}\int_x^1 e^{(s-1+1-x)} f(s)\, ds \\ &= \mathrm{Q}\int_x^1 e^{((1-x)-(1-s))} f(s)\, ds \\ &= \mathrm{Q}\int_0^{1-x} e^{((1-x)-t)} f(1-t)\, dt \\ &= F((1-x), f(1-\bullet)) \end{aligned}$$

donc $x \mapsto K(x,f) = x \mapsto F((1-x), f(1-\bullet)) \in L^p(0,1;X)$ d'après 1.

3) $\forall x \in (0,1)$

$$\begin{aligned} T(x,f) &= \mathrm{Q}\int_0^1 e^{(x+s)\mathrm{Q}} f(s)\,ds \\ &= \mathrm{Q}\int_0^x e^{(x+s)\mathrm{Q}} f(s)\,ds + \mathrm{Q}\int_x^1 e^{(x+s)\mathrm{Q}} f(s)\,ds \\ &= \mathrm{Q}\int e^{(x-s)\mathrm{Q}} e^{2s\mathrm{Q}} f(s)\,ds + \mathrm{Q}\int_x^1 e^{(s-x)\mathrm{Q}} e^{2x\mathrm{Q}} f(s)\,ds \\ &= F\left(x, e^{2.\mathrm{Q}} f\right) + e^{2x\mathrm{Q}} K(x,f) \end{aligned}$$

donc, d'après 2

$$x \longmapsto F\left(x, e^{2.\mathrm{Q}}\right) + e^{2x\mathrm{Q}} K(x,f) \in L^p(0,1;X) \ .$$

4) C'est une conséquence du point 1 et 2, on procède comme dans la remarque 3, on utilise

$$x \mapsto \int_0^x e^{(x-s)\mathrm{Q}} f(s)\,ds,\ x \mapsto \int_x^1 e^{(s-x)Q} f(s)\,ds \in W^{1,p}(0,1;X) \cap L^p(0,1,D(\mathrm{Q}))$$

□

Lemme 2.2.5 *On suppose* $(2.1.1) \sim (2.1.8)$ *et* $\varphi \in (D(\mathrm{Q}), X)_{\frac{1}{p},p}$, *avec* $\mathrm{Q}\in \{L, M\}$. *Alors*

1. $(L+M)\Lambda^{-1}\varphi \in (D(\mathrm{Q}), X)_{\frac{1}{p},p}$
2. $(L+H)\Lambda^{-1}\varphi \in (D(\mathrm{Q}), X)_{\frac{1}{p},p}$

Preuve.
1. On pose $T = (L+M)\Lambda^{-1}$, alors T est un opérateur linéaire continu de X dans X.
En utilisant l'hypothèse $(2.1.8)$, on obtient

$$T(D(L)) \subset D(L) \text{ et } T \in \mathcal{L}(D(L), D(L))$$

(ici $D(L)$ est un espace de Banach muni de la norme de graphe). Alors, en utilisant les propriétés de l'interpolation, on trouve

$$T \in \mathcal{L}\left((X, D(L))_{\frac{1}{p},p}, (X, D(L))_{\frac{1}{p},p}\right)$$

Voir $[8,\ p.\ 19]$.
2.D'après l'assertion 5 du lemme $(2.2.3)$, on a

$$(L+H)\Lambda^{-1} = (L+M)\Lambda^{-1} + e^L e^M (L+H)\Lambda^{-1} - I$$

donc, d'après le point 1, on obtient

$$(L+H)\Lambda^{-1}\varphi \in (D(\mathrm{Q}), X)_{\frac{1}{p},p}$$

pour $\varphi \in (D(\mathrm{Q}), X)_{\frac{1}{p},p}$. □

2.3 Représentation de la solution

De même dans cette partie, la dépendance en w n'est pas necessaire. On suppose qu'il existe une solution clasique u de (3), Nous esssayerons d'obtenir une équation vérifiée par

$$v(.) = (L+M)^{2} u(.) \tag{2.3.1}$$

On commence par rappeler que la solution dans le cas commutatif s'écrit sous la forme suivante :(Voir 1)

$$u = \Phi + \Psi + d$$

où, pour presque tout $x \in [0,1]$

$$\Phi(x) = (L+M)^{-1} \int_0^x e^{(x-s)M} f(s)\, ds + (L+M)^{-1} \int_x^1 e^{(s-x)L} f(s)\, ds \tag{2.3.2}$$

$$\begin{aligned} \Psi(x) \quad = \quad & -(L+M)^{-1} e^{xM} (L+H) \Lambda^{-1} e^{L} \int_0^1 e^{(1-s)M} f(s)\, ds \\ & +(L+M)^{-1} e^{xM} (L+H) \Lambda^{-1} \int_0^1 e^{sL} f(s)\, ds \\ & -(L+M)^{-1} e^{(1-x)L} e^{M} (L+H) \int_0^1 e^{sL} f(s)\, ds \\ & (L+M)^{-1} e^{(1-x)L} \left[I - e^{M} (L+H) \Lambda^{-1} e^{L} \right] \int_0^1 e^{(1-s)M} f(s)\, ds \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

et

$$\begin{aligned} d(x) \quad = \quad & e^{xM} \Lambda^{-1} d_0 - e^{(1-x)L} e^{M} \Lambda^{-1} d_0 + e^{xM} e^{L} (L+H) \Lambda^{-1} u_1 + \\ & e^{(1-x)L} u_1 - e^{(1-x)L} e^{M} e^{L} (L+H) \Lambda^{-1} u_1. \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

Voir Cheggag et al. dans [1, p.63]
Maintenant, dans notre cas non commutatif puisque u satisfait (3),
pour presque tout $x \in (0,1)$
on a :

$$\begin{aligned} \Phi(x) \quad = \quad & (L+M)^{-1} \int_0^x e^{(x-s)M} \left[u''(s) + (L-M) u'(s) - \frac{1}{2} (LM + ML) u(s) \right] ds \\ & +(L+M)^{-1} \int_x^1 e^{(s-x)L} \left[u''(s) + (L-M) u'(s) - \frac{1}{2} (LM + ML) u(s) \right] ds \end{aligned}$$

alors Φ s'écrit:

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{6} \Phi_i(x)$$

Où

$$\begin{aligned}
\Phi_1(x) &= (L+M)^{-1} \int_0^x e^{(x-s)M} u''(s)\, ds \\
\Phi_2(x) &= (L+M)^{-1} \int_x^1 e^{(s-x)L} u''(s)\, ds \\
\Phi_3(x) &= (L+M)^{-1} \int_0^x e^{(x-s)M} (L-M)\, u'(s)\, ds \\
\Phi_4(x) &= (L+M)^{-1} \int_x^1 e^{(s-x)L} (L-M)\, u'(s)\, ds \\
\Phi_5(x) &= -\frac{1}{2} (L+M)^{-1} \int_0^x e^{(x-s)M} (LM+ML)\, u(s)\, ds \\
\Phi_6(x) &= -\frac{1}{2} (L+M)^{-1} \int_x^1 e^{(s-x)L} (LM+ML)\, u(s)\, ds
\end{aligned}$$

L'idée principale est d'éffectuer des integrations par parties et d'appliquer $(L+M)^2$ afin de déduire l'équation intégrale satisfaite par v
Alors

$$\begin{aligned}
\Phi_1(x) &= (L+M)^{-1} \int_0^x e^{(x-s)M} u''(s)\, ds \\
&= (L+M)^{-1} u'(x) - (L+M)^{-1} e^{xM} u'(0) + (L+M)^{-1} M u(x) \\
&\quad - (L+M)^{-1} M e^{xM} u(0) + (L+M)^{-1} \int_0^x M^2 e^{(x-s)M} u(s)\, ds
\end{aligned}$$

De même, On a

$$\begin{aligned}
\Phi_2(x) &= (L+M)^{-1} \int_x^1 e^{(s-x)L} u''(s)\, ds \\
&= (L+M)^{-1} e^{(1-x)L} u'(1) - (L+M)^{-1} u'(x) - (L+M)^{-1} L e^{(1-x)L} u_1 \\
&\quad + (L+M)^{-1} L u(x) + (L+M)^{-1} \int_x^1 L^2 e^{(s-x)L} u(s)\, ds
\end{aligned}$$

Le calcul de $(L+M)^2 (\Phi_1(x) + \Phi_2(x))$:
d'après (2.1.13), $u(0), u_1 \in D(L) = D(M)$; alors

$$\begin{cases} (L+M)^{-1} M e^{xM} u(0) = (L+M)^{-1} e^{xM} M u(0) \\ (L+M)^{-1} L e^{(1-x)L} u_1 = (L+M)^{-1} e^{(1-x)L} L u_1 \end{cases}$$

Puisque $v(.) = (L+M)^2 u(.)$ et $u'(0) = d_0 + Hu(0)$, on obtient

$$\begin{aligned}(L+M)^2(\Phi_1(x)+\Phi_2(x)) &= v(x) - (L+M)e^{xM}(H+M)u(0) \\ &+ (L+M)e^{(1-x)L}(u'(1)-Lu_1) - (L+M)e^{xM}d_0 \\ &+ (L+M)\int_0^x M^2 e^{(x-s)M}(L+M)^2 v(s)\,ds \\ &+ (L+M)\int_x^1 L^2 e^{(s-x)L}(L+M)^{-2} v(s)\,ds.\end{aligned} \tag{2.3.5}$$

De la même manière, pour $\Phi_3(x) + \Phi_4(x)$, l'intégration par partie donne :

$$\begin{aligned}\Phi_3(x)+\Phi_4(x) &= -(L+M)^{-1}e^{xM}(L-M)u(0) + (L+M)^{-1}e^{(1-x)L}(L-M)u(1) \\ &+ (L+M)^{-1}\int_0^x Me^{(x-s)M}(L-M)u(s)\,ds \\ &- (L+M)^{-1}\int_x^1 Le^{(s-x)L}(L-M)u(s)\,ds.\end{aligned}$$

Le calcul de $(L+M)^{\mathbf{2}}(\Phi_3(x)+\Phi_4(x))$
Puisque

$$\begin{cases} M(L-M)u(x) = M(L-M)(L+M)^{-2}(L+M)^2 u(x) \\ L(L-M)u(x) = L(L-M)(L+M)^{-2}(L+M)^2 u(x)\end{cases}$$

En appliquant $(L+M)$ à $\Phi_3(.) + \Phi_4(.)$, on obtient

$$\begin{aligned}(L+M)(\Phi_3(x)+\Phi_4(x)) &= -e^{xM}(L+M)u(0) + e^{(1-x)L}(L-M)u_1 \\ &+ \int_0^x e^{(x-s)M}M(L-M)(L+M)^{-2}v(s)\,ds \\ &- \int_x^1 e^{(s-x)L}L(L-M)(L+M)^{-2}v(s)\,ds.\end{aligned}$$

Donc, en appliquant encore $(L+M)$, on trouve

$$\begin{aligned}(L+M)^2(\Phi_3(x)+\Phi_4(x)) &= -(L+M)e^{xM}(L-M)u(0) \\ &+ (L+M)e^{(1-x)L}(L-M)u_1 \\ &+ (L+M)\int_0^x e^{(x-s)M}ML(L+M)^{-2}v(s)\,ds \\ &+ (L+M)\int_x^1 e^{(s-x)L}LM(L+M)^{-2}v(s)\,ds \\ &- (L+M)\int_0^x e^{(x-s)M}M^2(L+M)^{-2}v(s)\,ds \\ &- (L+M)\int_x^1 e^{(s-x)L}L^2(L+M)^{-2}v(s)\,ds.\end{aligned} \tag{2.3.6}$$

Le calcul de $(L+M)^2(\Phi_5(x)+\Phi_6(x))$

Enfin, en appliquant $(L+M)^2$ à $(\Phi_5(.)+\Phi_6(.))$ pour presque tout $x\in(0,1)$, on obtient

$$\begin{aligned}(L+M)^2(\Phi_5(x)+\Phi_6(x)) &= -\frac{1}{2}(L+M)\int_0^x e^{(x-s)M}LM(L+M)^{-2}v(s)\,ds \qquad (2.3.7)\\ &\quad -\frac{1}{2}(L+M)\int_0^x e^{(x-s)M}ML(L+M)^{-2}v(s)\,ds\\ &\quad -\frac{1}{2}(L+M)\int_x^1 e^{(s-x)L}LM(L+M)^{-2}v(s)\,ds\\ &\quad -\frac{1}{2}(L+M)\int_x^1 e^{(s-x)L}ML(L+M)^{-2}v(s)\,ds\end{aligned}$$

Après sommation, on trouve

$$\begin{aligned}(L+M)^2\Phi(x) &= v(x)-(L+M)e^{xM}((H+L)u(0)+d_0)+(L+M)e^{(1-x)L}(u'(1)-Mu_1)\\ &\quad +\frac{1}{2}(L+M)\int_0^x e^{(x-s)M}ML(L+M)^{-2}v(s)\,ds\\ &\quad -\frac{1}{2}(L+M)\int_0^x e^{(x-s)M}LM(L+M)^{-2}v(s)\,ds\\ &\quad +\frac{1}{2}(L+M)\int_x^1 e^{(s-x)L}LM(L+M)^{-2}v(s)\,ds\\ &\quad -\frac{1}{2}(L+M)\int_x^1 e^{(s-x)L}ML(L+M)^{-2}v(s)\,ds\end{aligned}$$

On trouve finalement

$$\begin{aligned}(\mathbf{L}+\mathbf{M})^2\mathbf{\Phi}(x) &= v(s)-(L+M)e^{xM}[(H+L)u(0)+d_0] \qquad (2.3.8)\\ &\quad +(L+M)e^{(1-x)L}(u'(1)-Mu_1)\\ &\quad +\frac{1}{2}(L+M)\int_0^x e^{(x-s)M}C_{L,M}v(s)\,ds\\ &\quad -\frac{1}{2}(L+M)\int_x^1 e^{(s-x)L}C_{L,M}v(s)\,ds \qquad (2.3.9)\end{aligned}$$

avec

$$C_{L,M}:=[M;L](L+M)^{-2}=(ML-LM)(L+M)^{-2}.$$

Concernant Ψ, par la même méthode, on obtient

$$\begin{aligned}\left(\mathbf{L}+\mathbf{M}\right)^{\mathbf{2}}\mathbf{\Psi}\left(\mathbf{x}\right) &= (L+M)\,e^{xM}\,(L+M)\,u\,(0)-(L+M)\,e^{(1-x)L}u'\,(1) \\ &\quad -(L+M)\,e^{xM}\,(L+H)\,\Lambda^{-1}e^{L}\,(L+M)\,u_1 \\ &\quad -(L+M)\,e^{xM}\,(L+H)\,\Lambda^{-1}\left(I-e^{L}e^{M}\right)d_0 \\ &\quad +(L+M)\,e^{(1-x)M}\,(L+H)\,\Lambda^{-1}e^{L}\,(L+M)\,u_1 \\ &\quad +(L+M)\,e^{(1-x)L}e^{M}\,(L+H)\,\Lambda^{-1}\left(I-e^{L}e^{M}\right)d_0 \\ &\quad -(L+M)\,e^{(1-x)L}Lu_1+(L+M)\,e^{(1-x)l}e^{M}d_0 \\ &\quad -\frac{1}{2}\,(L+M)\,e^{xM}\,(L+H)\,\Lambda^{-1}e^{L}\int_0^1 e^{(1-s)M}C_{L,M}v\,(s)\,ds \\ &\quad -(L+M)\,e^{xM}\,(L+H)\,\Lambda^{-1}\int_0^1 e^{sL}C_{L,M}v\,(s)\,ds \\ &\quad +\frac{1}{2}\,(L+M)\,e^{(1-x)L}e^{M}\,(L+H)\,\Lambda^{-1}\int_0^1 e^{sL}C_{L,M}v\,(s)\,ds \\ &\quad -\frac{1}{2}\,(L+M)\,e^{(1-x)L}\left[I-e^{M}\,(L+H)\,\Lambda^{-1}e^{L}\right]\int_0^1 e^{(1-s)M}C_{L,M}v\,(s)\,ds.\end{aligned} \tag{2.3.10}$$

Cette dernière équation avec (2.3.8) , permet de définir

$$v+R\,(v)=F\,(f)+\Gamma$$

avec pour presque tout $x\in\,]0,1[$

$$\begin{aligned}\mathbf{R}\,(v)\,(x) &= \frac{1}{2}\,(L+M)\int_0^x e^{(x-s)M}C_{L,M}v\,(s)\,ds-\frac{1}{2}\,(L+M)\int_x^1 e^{(s-x)L}C_{L,M}v\,(s)\,ds \\ &\quad -\frac{1}{2}\,(L+M)\,e^{xM}\,(L+H)\,\Lambda^{-1}\int_0^1 e^{sL}C_{L,M}v\,(s)\,ds \\ &\quad -\frac{1}{2}\,(L+M)\,e^{xM}\,(L+H)\,\Lambda^{-1}e^{L}\int_0^1 e^{(1-s)M}C_{L,M}v\,(s)\,ds \\ &\quad -\frac{1}{2}\,(L+M)\,e^{(1-x)L}\left[I-e^{M}\,(L+H)\,\Lambda^{-1}e^{L}\right]\int_0^1 e^{(1-s)M}C_{L,M}v\,(s)\,ds \\ &\quad +\frac{1}{2}\,(L+M)\,e^{(1-x)L}e^{M}\,(L+H)\,\Lambda^{-1}\int_0^1 e^{sL}C_{L,M}v\,(s)\,ds,\end{aligned} \tag{2.3.11}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{F}\left(\mathbf{f}\right)\left(\mathbf{x}\right) &= (L+M)\int_0^x e^{(x-s)M}f(s)\,ds+(L+M)\int_x^1 e^{(s-x)L}f(s)\,ds \\ &-(L+M)\,e^{xM}(L+H)\,\Lambda^{-1}e^{L}\int_0^1 e^{(1-s)M}f(s)\,ds \\ &+(L+M)\,e^{xM}(L+H)\,\Lambda^{-1}\int_0^1 e^{sL}f(s)\,ds \\ &-(L+M)\,e^{(1-x)L}e^{M}(L+H)\,\Lambda^{-1}\int_0^1 e^{sL}f(s)\,ds \\ &-(L+M)\,e^{(1-x)L}\left[I-e^{M}(L+H)\,\Lambda^{-1}e^{L}\right]\int_0^1 e^{(1-s)M}f(s)\,ds,\end{aligned} \tag{2.3.12}$$

et

$$\begin{aligned}\mathbf{\Gamma}\left(\mathbf{x}\right) &= (L+M)\,e^{xM}(L+H)\,\Lambda^{-1}\left(I-e^{L}e^{M}\right)d_0 \\ &+(L+M)\,e^{xM}d_0-(L+M)\,e^{(1-x)L}e^{M}d_0 \\ &-(L+M)\,e^{(1-x)L}e^{M}(L+H)\,\Lambda^{-1}\left(I-e^{L}e^{M}\right)d_0 \\ &+(L+M)\,e^{xM}(L+H)\,\Lambda^{-1}e^{L}(L+M)\,u_1 \\ &-(L+M)\,e^{(1-x)L}e^{M}(L+H)\,\Lambda^{-1}e^{L}(L+M)\,u_1 \\ &+(L+M)\,e^{(1-x)L}(L+M)\,u_1.\end{aligned} \tag{2.3.13}$$

Finalement, si u est une solution classique de (3), alors $v\,(.) := (L+M)^{2}u\,(.)$ vérifie l'équation intégrale

$$v+R\,(v)=F\,(f)+\Gamma \tag{2.3.14}$$

avec $R, F\,(f)$ et Γ sont définie par $(2.3.11)\,,(2.3.12)\,,(2.3.13)$

Remarque 2.3.1

Comme

$$(L+H)\,\Lambda^{-1}=(L+M)\,\Lambda^{-1}+e^{L}e^{M}(L+H)\,\Lambda^{-1}-I$$

donc on peut écrire

$$\Gamma\,(x)=\widetilde{R}\,(x)+S\,(x)$$

avec

$$\begin{aligned}\widetilde{R}\,(x) &= (L+M)\,e^{xM}e^{L}e^{M}(L+H)\,\Lambda^{-1}d_0 \\ &-(L+M)\,e^{xM}(L+M)\,\Lambda^{-1}e^{L}e^{M}d_0 \\ &-(L+M)\,e^{xM}e^{L}e^{M}(L+H)\,\Lambda^{-1}e^{L}e^{M}d_0+(L+M)\,e^{xM}e^{L}e^{M}d_0 \\ &-(L+M)\,e^{(1-x)L}e^{M}\left[I+(L+H)\,\Lambda^{-1}\left(I-e^{L}e^{M}\right)\right]d_0 \\ &+(L+M)\,e^{xM}e^{L}e^{M}(L+H)\,\Lambda^{-1}e^{L}(L+M)\,u_1-(L+M)\,e^{xM}e^{L}(L+M)\,u_1 \\ &-(L+M)\,e^{(1-x)L}e^{M}(L+H)\,\Lambda^{-1}e^{L}(L+M)\,u_1 \\ &+(L+M)\,e^{xM}(L+M)\,\Lambda^{-1}e^{L}(L+M)\,u_1\end{aligned}$$

et

$$S(x) = (L+M)\, e^{xM} (L+M)\, \Lambda^{-1} d_0 + (L+M)\, e^{(1-x)L} (L+M)\, u_1$$

$\widetilde{R}$ sera régulier puisqu'il correspond aux termes de Γ contenant e^L, e^M. Alors pour obtenir un résultat d'unicité et d'éxistence pour notre problème, il suffira d'étudier la régularité de R, $F(f)$ et S

2.4 Régularité de la solution

L'étude de $F_w(f)$, $\widetilde{R}_w$, R_w et S_w

Supposons que $u_1 \in D(L+M) = D(L)$, on note encore $L_w = L$, $M_w = M$, et $R_w = R$

Rappelons le résultat suivant Voir [11, p. 96]

Proposition 2.4.1 *Soit Q un générateur infinitisémal d'un semi groupe analytique $\left(e^{xQ}\right)_{x\geq 0}$ sur X, $\varphi \in X$;$1 < p < +\infty$ et $m \in \mathbb{N}^*$.*
Alors

1. $e^{\cdot Q}\varphi \in L^p(0,1,X)$;
2. $Q^m e^{\cdot Q}\varphi \in L^p(0,1;X) \iff e^{\cdot Q}\varphi \in W^{m,p}(0,1;X)$
$\iff \varphi \in (D(Q^m), X)_{\frac{1}{mp},p}$

On pose pour $x \in (0,1)$

$$G(g)(x) = \int_0^x e^{(x-s)M} g(s)\, ds, K(g)(x) = \int_x^1 e^{(s-x)L} g(s)\, ds$$

où g est une fonction de $(0,1)$ de X

On applique la remarque dans [3, p. 25] et en utilisant le théorème des graphes fermés, on obtient

Proposition 2.4.2 *on suppoose* (2.1.1) $\sim$ (2.1.4). *Soit $g \in L^p(0,1)$, $1 < p < \infty$. Alors*

$$K(g), G(g) \in W^{1,p}(0,1;X) \cap L^p(0,1;D(M)),$$

ce qui implique

$$G(g)(1), K(g)(0) \in (D(M), X)_{\frac{1}{p},p}. \tag{2.4.1}$$

De plus, pour presque tout $x \in (0,1)$

$$G'(g)(x) = MG(g)(x) + g(x) \text{ et } k'(g)(x) = -LK(g)(x) - g(x),$$

et il existe $C > 0$ tel que

$$\begin{cases} \|G(g)\|_{L^p(0,1;X)} \leq C\|g\|_{L^p(0,1;X)}, \|K(g)\|_{L^p(0,1;X)} \leq C\|g\|_{L^p(0,1;X)} \\ \|x \mapsto MG(g)(x)\|_{L^p(0,1;X)} \leq C\|g\|_{L^p(0,1;X)} \\ \|x \mapsto LK(g)(x)\|_{L^p(0,1;X)} \leq C\|g\|_{L^p(0,1;X)}. \end{cases}$$

Proposition 2.4.3 *On suppose*(2.1.1) $\sim$ (2.1.4) *et* (2.1.7) , (2.1.8)*. Soit* $g \in L^p(0,1;X)$ *avec* $1 < p < \infty$*. Alors les fonctions suivantes*

$$\begin{array}{lcl}
\Psi_1(g) & : & = e^{\cdot M}(L+H)\Lambda^{-1}K(g)(0) \\
\Psi_2(g) & : & = e^{\cdot M}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}G(g)(1) \\
\Psi_3(g) & : & = e^{(1-\cdot)L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}G(g)(1) \\
\Psi_4(g) & : & = e^{(1-\cdot)L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}K(g)(0) \\
\Psi_5(g) & : & = e^{(1-\cdot)L}G(g)(1),
\end{array}$$

sont dans $L^p(0,1;D(L))$ *et il existe* $C > 0$*, tel que*

$$\left\{\begin{array}{l}
\|\Psi_i(g)\|_{L^p(0,1;X)} \leq C\|g\|_{L^p(0,1;X)}\,;\ i = \overline{1,5} \\
\|x \mapsto M\Psi_i(g)(x)\|_{L^p(0,1;X)} \leq C\|g\|_{L^p(0,1;X)}\,,\ i = 1,2 \\
\|x \mapsto L\Psi_i(g)(x)\|_{L^p(0,1;X)} \leq C\|g\|_{L^p(0,1;X)}\,,\ \ i = 3,4,5
\end{array}\right.$$

Preuve. On étudie seulement $\Psi_1(g)(x)$ (les autres fonctions sont traitées de la même manière) . Dans la suite C désigne les différentes constantes qui peuvent dépendre de p mais ne dépendent pas de g. Il est clair que $\Psi_1 \in L^p(0,1;X)$ et

$$\|\Psi_1(g)\|_{L^p(0,1;X)} \leq C\|g\|_{L^p(0,1;X)}\,.$$

Maintenant, on montre que $\Psi_1 \in L^p(0,1;X)$. On a

$$\begin{array}{rcl}
\Psi_1(g)(x) & = & e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}\displaystyle\int_0^1 e^{sL}g(s)\,ds \\
& = & \displaystyle\int_0^x e^{(x-s)M}e^{sM}(L+H)\Lambda^{-1}e^{sL}g(s)\,ds + e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}\int_x^1 e^{sL}g(s)\,ds,
\end{array}$$

donc, on peut écrire

$$\Psi_1(g)(x) = G(\tilde{g})(x) + \widetilde{\Psi}_1(g)(x)\,,$$

où

$$\left\{\begin{array}{l}
\widetilde{g}(s) = e^{sM}(L+H)\Lambda^{-1}e^{sL}g(s) \\
\widetilde{\Psi}_1(g) = e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}\int_x^1 e^{sL}g(s)\,ds,
\end{array}\right.$$

mais $\widetilde{g} \in L^p(0,1;X)$, alors d'après la proposition (2.4.2) , $G(\tilde{g}) \in L^p(0,1;D(M))$ et

$$\begin{array}{rcl}
\|x \mapsto MG(\widetilde{g})(x)\|_{L^p(0,1;X)} & \leq & C\|\tilde{g}\|_{L^p(0,1;X)} \\
& \leq & C\|g\|_{L^p(0,1;X)}\,.
\end{array} \tag{2.4.2}$$

Maintenant du lemme (2.2.3) , l'assertion 5, on a

$$(L+H)\Lambda^{-1} = (L+H)\Lambda^{-1} = e^{L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1} - I,$$

et donc

$$\begin{aligned}\widetilde{\Psi}_1(g)(x) &= e^{xM}(L+M)\Lambda^{-1}\int_x^1 e^{sL}g(s)\,ds \\ &\quad +e^{xM}e^{L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}\int_x^1 e^{sL}g(s)\,ds \\ &\quad -e^{xM}\int_x^1 e^{sL}g(s)\,ds \\ &= I_1(x)+I_2(x)+I_3(x),\end{aligned}\tag{2.4.3}$$

comme $e^{L}(X)\subset D(M)$, on a $Me^{L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}\in\mathcal{L}(X)$, et on peut écrire

$$\begin{aligned}\int_0^1\|MI_2(x)\|^p\,dx &= \int_0^1\left\|e^{xM}Me^{L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}e^{xL}\int_x^1 e^{(s-x)L}g(s)\,ds\right\|^p dx \\ &\leq C\int_0^1\left\|\int_x^1 e^{(s-x)L}g(s)\,ds\right\|^p dx \\ &\leq C\,\|K(g)\|^p_{L^p(0,1;X)} \\ &\leq C\,\|g\|^p_{L^p(0,1;X)}.\end{aligned}$$

comme $e^{L}(X)\subset D(M)$, on a $Me^{L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}\in\mathcal{L}(X)$, et on peut écrire

$$\begin{aligned}\int_0^1\|MI_2(x)\|^p\,dx &= \int_0^1\left\|e^{xM}Me^{L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}e^{xL}\int_x^1 e^{(s-x)L}g(s)\,ds\right\|^p dx \\ &\leq C\int_0^1\left\|\int_x^1 e^{(s-x)L}g(s)\,ds\right\|^p dx \\ &\leq C\,\|K(g)\|^p_{L^p(0,1;X)} \\ &\leq C\,\|g\|^p_{L^p(0,1;X)}.\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}\int_0^1\|MI_2(x)\|^p\,dx &= \int_0^1\left\|e^{xM}M(L-I)^{-1}(L-I)\int_x^1 e^{sL}g(s)\,ds\right\|^p dx \\ &\leq C\int_0^1\left\|(L-I)\int_x^1 e^{sL}g(s)\,ds\right\|^p dx \\ &\leq C\left(\|LK(g)\|_{L^p(0,1;X)}+\|K(g)\|\right)^p \\ &\leq C\,\|g\|^p_{L^p(0,1;X)}.\end{aligned}$$

Pour I_1, on utilise l'hypothèse (2.1.8), ce qui montre que $M(L+M)\Lambda^{-1}(L-I)^{-1}\in\mathcal{L}(X)$ et donc

$$\begin{aligned}\int_0^1\|MI_1(x)\|^p\,dx &= \int_0^1\left\|e^{xM}M(L+M)\Lambda^{-1}(L-I)^{-1}(L-I)\int_x^1 e^{sL}g(s)\,ds\right\|^p dx \\ &\leq C\int_0^1\left\|(L-I)\int_x^1 e^{sL}g(s)\,ds\right\|^p dx \\ &\leq C\,\|g\|^p_{L^p(0,1;X)}.\end{aligned}$$

Finalement, les estimations précédentes concernant $I_1, I_{2,}$ et I_3, avec $(2.4.2), (2.4.3)$ montrent que $\Psi_1 \in L^p(0,1;D(M))$ et$\|M\Psi_1(g)\|_{L^p(0,1;X)} \leq C\|g\|_{L^p(0,1;X)}$ □

Proposition 2.4.4 *Soit* $f \in L^p(0,1;X)$*,* $1 < p < \infty$*. Supposons* $(2.1.1) \sim (2.1.8)$*. Alors*

$$F(f) \in L^p(0,1;X)$$

Preuve. En utilisant les notations de la proposition $(2.4.1)$ et $(2.4.3)$, on peut écrire $F(f)$ de la forme :

$$\begin{aligned} F(f) \ : \ &= (L+M)(M-I)^{-1}(M-I)G(f) + (L+M)(L-I)^{-1}(L-I)[K(f)(.)] \\ &-(L+M)(M-I)^{-1}(M-I)\Psi_2(f) + (L+M)(M-I)^{-1}(M-I)[\Psi_1(f)(.)] \\ &-(L+M)(L-I)^{-1}(L-I)\Psi_4(f) + (L+M)(L-I)^{-1}(L-I)[\Psi_3(f)(.)] \\ &-(L+M)(L-I)^{-1}(L-I)[\Psi_5(f)(.)]. \end{aligned}$$

Mais $(L+M)(L-I)^{-1}, (L+M)(M-I)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Alors $F(f) \in L^p(0,1;X)$. □

Proposition 2.4.5 *On suppose* $(2.1.1) \sim (2.1.8)$*. Soit* $1 < p < \infty$*, alors*

$$\widetilde{R} \in L^p(0,1;X)$$

Preuve. on note

$U := (L+M)(L-I)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ et $V := (L+M)(M-I)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$

il est bien connu que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\xi \in X$, on a

$$e^L\xi \in D(L^n) \text{ et } e^M\xi \in D(M^n)$$

ainsi $(M-I)e^L, (L-I)e^M \in \mathcal{L}(X)$ et aussi d'après l'hypothèse(2.1.8)

$$(M-I)(L+M)\Lambda^{-1}e^L = M(L+M)\Lambda^{-1}(L-I)^{-1}(L-I)e^L - (L+M)\Lambda^{-1}e^L \in \mathcal{L}(X)$$

Pour $x \in (0,1)$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \widetilde{R}(x) \ &= \ Ve^{xM}(M-I)e^Le^M(L+H)\Lambda^{-1}d_0 \\ &-Ve^{xM}(M-I)(L+M)\Lambda^{-1}e^Le^Md_0 \\ &-Ve^{xM}(M-I)e^Le^M(L+M)\Lambda^{-1}e^Le^Md_0 \\ &+Ve^{xM}(M-I)e^Le^Md_0 \\ &-Ve^{(1-x)}(L-I)e^M\left[I+(L+H)\Lambda^{-1}\left(I-e^Le^M\right)\right]d_0 \\ &+Ve^{xM}(M-I)e^Le^M(L+H)\Lambda^{-1}e^L(L+M)u_1 \\ &-Ve^{xM}(M-I)e^L(L+M)u_1 \\ &-Ve^{(1-x)L}(L-I)e^M(L+H)\Lambda^{-1}e^L(L+M)u_1 \\ &+Ve^{xM}(M-I)(L+M)\Lambda^{-1}e^L(L+M)u_1 \end{aligned}$$

Alors, d'après la proposition 1, assertion 1. On obtient

$$\widetilde{R} \in L^p(0,1;X)$$

□

Proposition 2.4.6 *Soient* $(2.1.1) \backsim (2.1.7)$, $1 < p < \infty$. *Alors*

$$S \in L^p(0,1;X) \text{ Si et seulement si } u_1, \Lambda^{-1}\, d_0 \in \left(X, D\left(L+M\right)^2\right)_{1-\frac{1}{2p},p}$$

Preuve. Pour $x \in (0,1)$, on a

$$\begin{aligned} S(x) &= (L+M)\, e^{xM}(L+M)\,\Lambda^{-1}d_0 + (L+M)\, e^{(1-x)L}(L+M)\, u_1 \\ &= (L+M)(M-I)^{-1}(M-I)\, e^{xM}(L+M)\,\Lambda^{-1}d_0 \\ &\quad + (L+M)(L-I)^{-1}(L-I)\, e^{(1-x)L}(L+M)\, u_1 \\ &= S_1(x) + S_2(x) \end{aligned}$$

puisque $(L+M)(M-I)^{-1}$ est inversible dans $\mathcal{L}(X)$, alors
$S_1 \in L^p(0,1;X)$ si et seulement si

$$x \mapsto (M-I)\, e^{xM}(L+M)\,\Lambda^{-1}d_0 \in L^p(0,1;X)$$

et ceci, d'après la proposition (2.4.1), est équivalente à :

$$(L+M)\,\Lambda^{-1}d_0 \in (X, D(M))_{1-\frac{1}{p},p} = (X, D(L+M))_{1-\frac{1}{p},p}$$

De même, $S_2 \in L^p(0,1;X)$ si et seulement si

$$(L+M)\, u_1 \in (X, D(L))_{1-\frac{1}{p},p} = (X, D(L+M))_{1-\frac{1}{p},p}.$$

On a $S_1 \in L^p\left(0,\frac{1}{2};X\right)$ et $S_2 \in L^p\left(\frac{1}{2},1;X\right)$, alors

$$\begin{aligned} S \in L^p(0,1;X) &\iff S \in L^p\left(0,\tfrac{1}{2};X\right) \text{ et } S \in L^p\left(\tfrac{1}{2},1;X\right) \\ &\iff S_1 \in L^p\left(0,\tfrac{1}{2};X\right) \text{ et } S_2 \in L^p\left(\tfrac{1}{2},1;X\right) \\ &\iff \begin{cases} (L+M)\,\Lambda^{-1}d_0 \in (X, D(L+M))_{1-\frac{1}{p},p} \\ (L+M)\, u_1 \in (X, D(L+M))_{1-\frac{1}{p},p} \end{cases}, \end{aligned}$$

et, grâce à la propriéte de réitération, on obtient :

$$S \in L^p(0,1;X) \iff u_1, \Lambda^{-1}d_0 \in \left(X, D\left(L+M\right)^2\right)_{1-\frac{1}{2P},p}.$$

□

Maintenant , on a besoin de la dépendence de w. Les opérateurs R, $\widetilde{R}$, $F(f)$ et S deviennent $R_w, \tilde{R}_w$, $F_w(f)$ et S_w où L et M sont remplacés par M_w et L_w.
On doit estimer $\|R_w\|$ afin d'inverser $(I+R_w)$ pour w assez grand et obtenir la formule de représentation suivante pour la solution classique u de (2.1.3)

$$u(.) = (L_w + M_w)^{-2}\left[(I+R_w)^{-1}\left(F_w(f) + \tilde{R}_w + S_w\right)(.)\right]. \tag{2.4.4}$$

Proposition 2.4.7 *On suppose* $(2.1.1) \sim (2.1.10)$. *Soit* $1 < p < \infty$, *alors* $R_w \in \mathcal{L}(L^p(0,1;X))$ *et il existe* $w^* \geq w_0$ *tel que pour tout* $w \geq w^*$,

$$I + R_w \text{ est inversible dans } \mathcal{L}(L^p(0,1;X)).$$

Preuve. Soit $v \in L^p(0;1;X)$. Puisque $C_{L_w,M_w} \in \mathcal{L}(X)$ alors $C_{L_w,M_w}v \in L^p(0,1;X)$ En utilisant les notations des propositions (2.4.2) et (2.4.3), on peut écrire

$$\begin{aligned} 2R_w(v) \quad : \quad &= (L_w + M_w)(M_w - I)^{-1}(M_w - I)\, G\left(C_{L_w,M_w}v(.)\right)(.) \\ &-(L_w + M_w)(L_w - I)^{-1}(L_w - I)\, K\left(C_{L_w,M_w}v(.)\right)(.) \\ &-(L_w + M_w)(M_w - I)^{-1}(M_w - I)\,\Psi_1\left(C_{L_w,M_w}v(.)\right)(.) \\ &-(L_w + M_w)(M_w - I)^{-1}(M_w - I)\,\Psi_2\left(C_{L_w,M_w}v(.)\right)(.) \\ &-(L_w + M_w)(L_w - I)^{-1}(L_w - I)\,\Psi_3\left(C_{L_w,M_w}v(.)\right)(.) \\ &+(L_w + M_w)(L_w - I)^{-1}(L_w - I)\,\Psi_4\left(C_{L_w,M_w}v(.)\right)(.) \\ &+(L_w + M_w)(L_w - I)^{-1}(L_w - I)\,\Psi_5\left(C_{L_w,M_w}v(.)\right)(.) \end{aligned}$$

Rappellons que $(L_w + M_w)(M_w - I)^{-1}, (L_w + M_w)(L_w - I)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$.Alors d'après les propositions (2.4.2) et (2.4.3), on a $R_w(v) \in L^p(0,1;X)$ et il existe une constante $b > 0$ telle que, pour $w \geq w_0$

$$\|R_w(v)\|_{L^p(0,1;X)} \leq b \left\|C_{L_w,M_w}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \|v\|_{L^p(0,1;X)}$$

et de l'hypothèse (2.1.10), on obtient

$$\|R_w(v)\|_{L^p(0,1;X)} \leq C\chi(w)\|v\|_{L^p(0,1;X)}$$

avec $\lim_{w \to +\infty} \chi(w) = 0$. Par conséquence, il existe $w^* \geq w_0$ telle que pour $w \geq w^*$

$$\|R_w\|_{\mathcal{L}(L^p(0,1;X))} \leq 1.$$

D'où $I + R_w$ est inversible dans $\mathcal{L}(L^p(0,1;X))$ pour tout $w \geq w^*$ □

On a alors le résultat fondamental suivant :

Théorème : On suppose (2.1.1) $\backsim$ (2.1.10). Soit $f \in L^p(0,1;X)$ avec $1 < p < \infty$. Alors il existe $w^* \geq w_0$ tel que , pour tout $w \geq w^*$, les deux assertions suivantes sont équivalentes.

1. Le problème (3) admet une unique solution classique u
2. $u_1, \Lambda^{-1}d_0 \in (X, D(L_w + M_w)^2)_{1-\frac{1}{2p},p}$

2.5 Preuve du théorème

On considère w^* assez grand et $w \geq w^*$

Assertion 1 implique l'asssertion 2

On suppose l'assertion 1, i.e u définie par (2.4.4), est une solution classique du problème (3) . Alors

$$x \mapsto (L+M)^2 u(x) = (I+R)^{-1}\left(F_w(f) + \widetilde{R}_w(x) + S_w(x)\right) \in L^p(0,1;X)$$

et on obtient $F_w(f) + \widetilde{R_w} + S_w \in L^p(0,1;X)$. Donc d'après les propositions $(2.4.4), (2.4.5)$ et $(2.4.6)$, l'assertion est satisfaite

Assertion 2 implique l'assertion 1

On suppose l'assertion 2, on doit montrer que u définie par (2.4.4) est une solution classique de (3).

Soit

$$v(x) = (L+M)^2 u(x) = (I+R_w)^{-1}\left(F_w(f) + \widetilde{R}_w(x) + S_w(x)\right)$$

▶ **Première étape** : Montrons que $u \in L^p\left(0,1; D(L_w - M_w)^2\right)$

D'après les propositions $(2.4.4), (2.4.5), (2.4.6)$ et $(2.4.7)$, on obtient que $v \in L^p(0,1;X)$ comme

$$(L_w - M_w)^2 (L_w + M_w)^{-2} \in \mathcal{L}(X)$$

donc

$$x \longmapsto (L_w - M_w)^2 u(x) = (L_w - M_w)^2 (L_w + M_w)^{-2} v(x) \in L^p(0,1;X).$$

▶ **Deuxième étape :** Montrons que $(L_w - M_w) u' \in L^p(0,1;X)$

Puisque $v = F_w(f) + \Gamma_w - R_w(v)$, on a

$$u(.) = (L_w + M_w)^{-2}(F_w(f)(.) + \Gamma_w(.)) - (L_w + M_w)^{-2} R_w(v)(.) \tag{2.5.1}$$

donc, en utilisant $(2.3.11), (2.3.12)$ et $(2.3.13)$, on peut écrire u sous la forme suivante :

$$u = \overline{u} + \widetilde{u} + \widehat{u}$$

telles que

$$\begin{cases} \overline{u} = (L_w + M_w)^{-1} G(f)(x) + (L_w + M_w)^{-1} K(f)(x) \\ \qquad - \frac{1}{2}(L_w + M_w)^{-1} G\left(C_{L_w,M_w} v(.)\right)(x) \\ \qquad + \frac{1}{2}(L_w + M_w)^{-1} K\left(C_{L_w,M_w} v(.)\right)(x) \\ \\ \widetilde{u} = (L_w + M_w)^{-1} e^{xM_w} f_0 \\ \\ \widehat{u} = (L_w + M_w)^{-1} e^{(1-x)L_w} f_1 \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned} f_0 \quad = \quad & -(L_w + H)\Lambda^{-1} e^{L_w} G(f)(1) + (L_w + H)\Lambda_w^{-1} K(f)(0) \\ & + (L_w + H)\Lambda_w^{-1}\left[\left(I - e^{L_w} e^{M_w}\right) d_0 + e^{L_w}(L_w + M_w) u_1\right] + d_0 \\ & + \frac{1}{2}(L_w + H)\Lambda_w^{-1} K\left(C_{L_w,M_w} v(.)\right)(0) + \frac{1}{2}(L_w + H)\Lambda_w^{-1} e^{L_w} G\left(C_{L_w,M_w} v(.)\right)(1) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f_1 \quad = \quad & -e^{M_w}(L_w + H)\Lambda_w^{-1} K(f)(0) + \left(-e^{M_w} d_0 + (M_w + L_w) u_1\right) \\ & - \left[I - e^{M_w}(L_w + H)\Lambda_w^{-1} e^{L_w}\right] G(f)(1) \\ & - e^{M_w}(L_w + H)\Lambda_w^{-1}\left[\left(I - e^{L_w} e^{M_w}\right) d_0 + e^{L_w}(M_w + L_w) u_1\right] \\ & + \frac{1}{2}\left[I - e^{M_w}(L_w + H)\Lambda_w^{-1} e^{L_w}\right] G\left(C_{L_w,M_w} v(.)\right)(0) \\ & \frac{1}{2} e^{M_w}(L_w + H)\Lambda_w^{-1} K\left(C_{L_w,M_w} v(.)\right)(0). \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}(L_w+M_w)\,\overline{u}'(x) &= M_wG(f)(x)-L_wK(f)(x)-\frac{1}{2}M_wG\left(C_{L_w,M_w}v(.)\right)(x)\\ &\quad -\frac{1}{2}L_wK\left(C_{L_w,M_w}v(.)\right)(x)-C_{L_w,M_w}v(x)\end{aligned}$$

or $f\in L^p(0,1;X)$ et ainsi v (Voir premier étape) alors, en vertu de la proposition (2.4.2) et lemme (2.2.2) , on obtient $(L_w+M_w)\,\overline{u}'(.)\in L^p(0,1;X)$.
Comme

$$(L_w-M_w)\,\overline{u}'(.)=(L_w-M_w)(L_w+M_w)^{-1}(L_w+M_w)\,\overline{u}'(.)$$

On obtient

$$x\longmapsto (L_w-M_w)\,\overline{u}'(.)\in L^p(0,1;X) \tag{2.5.2}$$

Maintenant dans f_1, on rassemble tous les termes qui contiennet e^{M_w}, on peut réécrire

$$f_1=(M_w+L_w)\,u_1-G(f)(1)+\frac{1}{2}G\left(C_{L_w,M_w}v(.)\right)(1)+e^{M_w}\mu_1$$

où $\mu_1\in X$. Alors de (2.1.14) et (2.4.1) ,on conclut

$$f_1\in\left(D(M_w),X\right)_{\frac{1}{p},p}$$

et

$$x\longmapsto (L_w-M_w)\,\widehat{u}'\in L^p(0,1;X)\,. \tag{2.5.3}$$

Il reste à étudier $\widetilde{u}$. Pour f_0, en utilisant le lemme (2.2.3) , le point 5, on peut écrire

$$\begin{aligned}f_0 &= (L_w+M_w)\,\Lambda^{-1}w_0+e^{L_w}e^{M_w}(L_w+H)\,\Lambda_w^{-1}(w_0+d_0)+e^{L_w}e^{M_w}d_0\\ &\quad -e^{L_w}(L_w+M_w)\,u_1+e^{L_w}G(f)(1)-\frac{1}{2}e^{L_w}G\left(C_{L_w,M_w}v(.)\right)(1)-K(f)(0)\\ &\quad -\frac{1}{2}K\left(C_{L_w,M_w}v(.)\right)(0)+(L_w+M_w)\,\Lambda^{-1}d_0\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}w_0 &= -e^{L_w}e^{M_w}d_0+e^{L_w}(L_w+M_w)\,u_1-e^{L_w}G(f)(1)\\ &\quad +K(f)(0)+\frac{1}{2}K\left(C_{L_w,M_w}v(.)\right)(0)\\ &\quad +\frac{1}{2}e^{L_w}G\left(C_{L_w,M_w}v(.)\right)(1)\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}f_0 &= (L_w+M_w)\,\Lambda_w^{-1}w_0-K(f)(0)-\frac{1}{2}K\left(C_{L_w,M_w}v(.)\right)(0)\\ &\quad +(L_w+M_w)\,\Lambda_w^{-1}d_0+e^{Lw}\mu_0\end{aligned}$$

où $\mu_0 \in X$. Il est clair que $w_0 \in (D(M_w), X)_{\frac{1}{p},p}$, donc

$$f_0 \in (D(M_w), X)_{\frac{1}{p},p}$$

et

$$x \longmapsto (L_w - M_w)\, \widetilde{u}' \in L^p(0,1;X) \tag{2.5.4}$$

Finalement, (2.5.2), (2.5.3) et (2.5.4), assurent que

$$x \longmapsto (L_w - M_w)\, u'(x) \in L^p(0,1;X)$$

▶ **Troisième étape :** Montrons que u satisfait (3)

À partir de cette étape et d'autres, on déduit que $u \in W^{2,p}(0,1;X)$ puisque

$$x \longmapsto u''(x) = -(L_w + M_w)\, u'(x) + \frac{1}{2}(L_w M_w + M_w L_w)\, u(x) = f(x) \in L^p(0,1;X)$$

De plus, on a pour presque tout $x \in (0,1)$

$$\begin{aligned} v(x) &= (L_w + M_w)\, G(f)(x) + (L_w + M_w)\, K(f)(x) \\ &\quad -\frac{1}{2}(L_w + M_w)\, G(C_{L_w,M_w} v(.))(x) + \frac{1}{2}(L_w + M_w)\, K(C_{L_w,M_w} v(.))(x) \\ &\quad + (L_w + M_w)\, e^{xM_w} f_0 + (L_w + M_w)\, e^{(1-x)L_w} f_1 \end{aligned} \tag{2.5.5}$$

et

$$\begin{aligned} (L_w + M_w)\, u'(x) &= M_w G(f)(x) - L_w K(f)(x) \\ &\quad -\frac{1}{2} M_w G(C_{L_w,M_w} v(.))(x) - \frac{1}{2} L_w K(C_{L_w,M_w} v(.))(x) \\ &\quad + M_w e^{xM_w} f_0 - L_w e^{(1-x)L_w} f_1 - C_{L_w,M_w} v(x) \end{aligned}$$

Par conséquent en substituant (2.5.5) dans $(L_w + M_w)\, u\prime(x)$ et en utilisant le lemme (2.3.3), assertion 6, pour presque tout $x \in (0,1)$, on obtient

$$\begin{aligned} u'(x) &= M_w (L_w + M_w)^{-1} G(f)(x) - L_w (L_w + M_w)^{-1} K(f)(x) \\ &\quad -\frac{1}{2} M_w (L_w + M_w)^{-1} G(C_{L_w,M_w} v(.))(x) \\ &\quad -\frac{1}{2} L_w (L_w + M_w)^{-1} K(C_{L_w,M_w} v(.))(x) \\ &\quad + M (L_w + M_w)^{-1} e^{xM} f_0 - L_w (L_w + M_w)^{-1} e^{(1-x)L_w} f_1 \end{aligned} \tag{2.5.6}$$

Alors pour tout $x \in (0,1)$

$$\begin{aligned} u''(x) &= f(x) + M_w (L_w + M_w)^{-1} M_w G(f)(x) + L_w (L_w + M_w)^{-1} L_w K(f)(x) \\ &\quad -\frac{1}{2} M_w (L_w + M_w)^{-1} M_w G(C_{L_w,M_w} v(.))(x) \\ &\quad +\frac{1}{2} L_w (L_w + M_w)^{-1} L_w K(C_{L_w,M_w} v(.))(x) \\ &\quad +\frac{1}{2}(L_w + M_w)(L_w + M_w)^{-1} C_{L_w,M_w} v(x) + M_w (L_w + M_w)^{-1} M_w e^{xM} \end{aligned} \tag{2.5.7}$$

En substituant (2.5.5) dans (2.5.7), on obtient pour tout $x \in (0,1)$

$$\begin{aligned} u''(x) &= f(x) + E_1 G(f)(x) + T_1 K(f)(x) - \frac{1}{2} E_1 G\left(C_{L_w,M_w} v\right)(x) \\ &\quad + \frac{1}{2} T_1 K\left(C_{L_w,M_w} v\right)(x) + E_1 e^{xM} f_0 + T_1 e^{(1-x)L} f_1 \end{aligned} \tag{2.5.8}$$

où, sur le domaine $D(L_w + M_w)$, E_1 et T_1 sont défini par :

$$\begin{aligned} E_1 &= M_w (L_w + M_w)^{-1} M_w + \frac{1}{2}(L_w - M_w)(L_w + M_w)^{-1} C_{L_w,M_w}(L_w + M_w) \\ &= \frac{1}{2} M_w - \frac{1}{2}(L_w - M_w) M_w (L_w + M_w)^{-1} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} T_1 &= L_w + (L_w + M_w)^{-1} L_w + \frac{1}{2}(L_w - M_w)^{-1} C_{L_w,M_w}(L_w + M_w) \\ &= \frac{1}{2} M_w + \frac{1}{2}(L_w - M_w) L_w (L_w + M_w)^{-1} \end{aligned}$$

en vertu du lemme (2.2.3), assertion 6, on utilise (2.5.1), (2.5.6) et (2.5.8), pour presque tout $x \in (0,1)$, on trouve

$$\begin{aligned} & u''(x) + (L_w - M_w) u'(x) - \frac{1}{2}(L_w M_w + M_w L_w) u(x) \\ = \; & f(x) + E_2 G(f)(x) + T_2 K(f)(x) - \frac{1}{2} E_2 G\left(C_{L_w,M_w} v(.)\right)(x) + \frac{1}{2} T_2 K\left(C_{L_w,M_w} v(.)\right)(x) \\ & + E_2 e^{xM_w} f_0 + T_2 e^{(1-x)L_w} f_1 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} E_2 &= \frac{1}{2} M_w - \frac{1}{2}(L_w - M_w) M_w (L_w + M_w)^{-1} + (L_w - M_w) M_w (L_w + M_w)^{-1} \\ &\quad - \frac{1}{2}(L_w M_w + M_w L_w)(L_w + M_w)^{-1} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{1} L_w + \frac{1}{2}(L_w - M_w) L_w (L_w + M_w)^{-1} \\ &\quad - (L_w - M_w) L_w (L_w + M_w)^{-1} - \frac{1}{2}(L_w M_w + M_w L_w)(L_w + M_w)^{-1} \end{aligned}$$

et, en vertu du lemme (2.2.3) ,assertion 8, on obtient

$$E_2 G(f)(.) = T_2 K(f)(.) = 0 \text{ dans } L^p(0,1;X)$$

Finalement, on trouve

$$u''(x) + (L_w + M_w) u'(x) - \frac{1}{2}(L_w M_w + M_w L_w) u(x) = f(x)$$

D'autre part la solution (2.4.4)
vérifie les conditions aux limites

$$\begin{cases} u'(0) - Hu(0) = d_0 \\ u(1) = u_1 \end{cases}$$

On conclut alors que u, déterminée par (2.4.4) est une solution classique de (3) .

Chapitre 3

Retour au cas commutatif

Ce chapitre est consacré à la comparaison avec le récent article [1]. On montre que ce travail améliore les résultats dans [1]. En effet, plutôt que de considérer des familles d'opérateurs linéaires $(L_w)_{w\geq w_0}, (M_w)_{w\geq w_0}$, on considère les deux opérateurs linéaires fermés L, M dans X tels que

$$\begin{cases} D(L) = D(M) \\ LM = ML \end{cases} \tag{3.1.1}$$

comme hypothèses (11) et (12) dans $[1, p.59]$. Mais, on ne suppose ni la commutativité entre L et H, ni entre M et H, comme dans les hypothèses (15) et (16) dans $[1, p.59]$
D'après (3.1.1), on a

$$\Lambda = (M - H) + e^L e^M (L + H) = (M - H) + e^{L+M}(L + H)$$

et puisque $C_{L,M} = 0$, on a $R = 0$. Alors grâce à la formule

$$u = (L + M)^{-2}\left((I + R)^{-1}(F(f) + \Gamma)\right)$$

la solution du problème

$$\begin{cases} u''(x) + (L - M)u(x) - LMu(x) = f(x) \\ u'(0) + Hu(0) = d_0 \\ u(1) = u_1 \end{cases} \tag{3.1.2}$$

est

$$u(.) = (L + M)^{-2}(F(f)(.) + \Gamma(.))$$

où ici $(I + R)^{-1} = I$. De plus, pour $x \in [0, 1]$

$$
\begin{aligned}
(L+M)^{-2} F(f)(x) &= (L+M)^{-1} \int_0^x e^{(x-s)M} f(s)\, ds + (L+M)^{-1} \int_x^1 e^{(s-x)L} f(s)\, ds \\
&\quad - (L+M)^{-1} e^{xM} (L+H) \Lambda^{-1} e^{L} \int_0^1 e^{sL} f(s)\, ds \\
&\quad - (L+M)^{-1} e^{xM} (L+H) \Lambda^{-1} \int_0^1 e^{sL} f(s)\, ds \\
&\quad - (L+M)^{-1} e^{(1-x)L} e^{M} (L+H) \Lambda^{-1} \int_0^1 e^{sL} f(s)\, ds \\
&\quad - (L+M)^{-1} e^{(1-x)L} \left[I - e^{M} (L+H) \Lambda^{-1} e^{L}\right] \int_0^1 e^{(1-s)M} f(s)\, ds
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
(L+M)^{-2} \Gamma(x) &= (L+M)^{-1} e^{xM} \left[(L+H) \Lambda^{-1} + I - (L+H) \Lambda^{-1} e^{L+M}\right] d_0 \\
&\quad - (L+M)^{-1} e^{(1-x)L} e^{M} \left[(L+H) \Lambda^{-1} + I - (L+H) \Lambda^{-1} e^{L+M}\right] d_0 \\
&\quad + (L+M)^{-1} e^{xM} (L+H) \Lambda^{-1} e^{L} (L+M) u_1 \\
&\quad + (L+M)^{-1} e^{(1-x)L} \left[I - e^{M} (L+H) \Lambda^{-1} e^{L}\right] (L+M) u_1
\end{aligned}
$$

Maintenant, en utilisant le fait que

$$
(L+H) \Lambda^{-1} = (L+M) \Lambda^{-1} + e^{L+M} (L+H) \Lambda^{-1} - I
$$

$(Voir$ le lemme $(2.2.3)$, point 5), on déduit

$$
\begin{aligned}
& e^{M} d_0 + e^{M} (L+H) \Lambda^{-1} d_0 - e^{M} (L+H) \Lambda^{-1} e^{L+M} d_0 \\
= \;& e^{M} d_0 + e^{M} \left[(L+M) \Lambda^{-1} + e^{L+M} (L+H) \Lambda^{-1} - I\right] d_0 \\
& - e^{M} (L+H) \Lambda^{-1} e^{L+M} d_0 \\
= \;& e^{M} (L+M) \Lambda^{-1} d_0 + e^{M} e^{L+M} (L+H) \Lambda^{-1} d_0 \\
& - e^{M} (L+M) \Lambda^{-1} e^{L+M} d_0 \\
= \;& e^{M} (L+M) \Lambda^{-1} d_0 + e^{M} \left[e^{L+M}; (L+H) \Lambda^{-1}\right] d_0
\end{aligned}
$$

et puisque

$$
\begin{aligned}
& (L+H) \Lambda^{-1} d_0 + d_0 - (L+H) \Lambda^{-1} e^{L+M} d_0 \\
= \;& \left[(L+H) + (M-H) + e^{L+M} (L+H)\right] \Lambda^{-1} d_0 - (L+H) \Lambda^{-1} e^{L+M} d_0 \\
= \;& \left[(L+M) + e^{L+M} (L+H)\right] \Lambda^{-1} d_0 - (L+H) \Lambda^{-1} e^{L+M} d_0 \\
= \;& (L+M) \Lambda^{-1} d_0 + \left[e^{L+M}; (L+H) \Lambda^{-1}\right] d_0
\end{aligned}
$$

alors, on obtient

$$\begin{aligned}(L+M)^{-2}\Gamma(x) &= e^{xM}\Lambda^{-1}d_0+(L+M)^{-1}e^{xM}\left[e^{L+M};(L+H)\Lambda^{-1}\right]d_0 \\ &\quad -e^{(1-x)L}e^{M}\Lambda^{-1}d_0-(L+M)^{-1}e^{(1-x)L}e^{M}\left[e^{L+M};(L+H)\Lambda^{-1}\right]d_0 \\ &\quad +(L+M)^{-1}e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}(L+M)u_1 \\ &\quad +(L+M)^{-1}e^{(1-x)L}\left[I-e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\right](L+M)u_1.\end{aligned}$$

Finalement la représentation de la solution du problème (3.1.2) pour p.p $x\in(0,1)$, est

$$\begin{aligned}u(x) &= e^{xM}\Lambda^{-1}d_0+(L+M)^{-1}e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}(L+M)u_1 \\ &\quad -(L+M)e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\int_0^1 e^{(1-s)}f(s)\,ds \\ &\quad +(L+M)^{-1}e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}\int_0^1 e^{sL}f(s)\,ds \\ &\quad -e^{(1-x)L}e^{M}\Lambda^{-1}d_0+(L+M)^{-1}e^{(1-x)L}\left[I-e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\right](L+M)u_1 \\ &\quad -(L+M)^{-1}e^{(1-x)}e^{M}(L+M)\Lambda^{-1}\int_0^1 e^{sL}f(s)\,ds \\ &\quad -(L+M)^{-1}e^{(1-x)L}\left[I-e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\right]\int_0^1 e^{(1-s)M}f(s)\,ds \\ &\quad +(L+M)^{-1}\int_0^1 e^{(x-s)M}f(s)\,ds+(L+M)^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)}f(s)\,ds \\ &\quad +(L+M)^{-1}\left(e^{xM}-e^{(1-x)L}e^{M}\right)\left[e^{L+M};(L+H)\Lambda^{-1}\right]d_0\end{aligned}$$

cette représentation généralise celle utilisée dans $[1,p.63]$
on note que , le dernier terme

$$(L+M)^{-1}\left(e^{xM}-e^{(1-x)L}\right)\left[e^{L+M};(L+H)\Lambda^{-1}\right]d_0$$

s'annule lorsque l'opérateur H commute, au sens des résolvantes, avec les opérateurs L et M donc, notre solution coincide avec celle utilisée dans $[1]$.

Corollaire 3.1.1 Soient L, M deux opérateurs linéaires fermé dans X vérifiant $(3.1.1)$. On suppose $(2.1.1)\sim(2.1.8)$ où $L_w=L$, $M_w=M$ pour tout $w\geq w_0$ et $LM=ML$
Soit $f\in L^p(0,1;X)$ avec $1<p<\infty$. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes

1. le problème (3.1.2) admet une unique solution classique
2. $u_1,\ \Lambda^{-1}d_0\in\left(X,D(L+M)^2\right)_{1-\frac{1}{2p},p}$

Remarque 3.1.1 Notez que, au lieu de la commutativité entre H et les opérateurs L et M, nous avons supposé l'hypothèse suivante :

$$\forall\xi\in D(L)=D(M)=D(L+M),\Lambda^{-1}\xi\in D\left((L+M)^2\right)$$

ce qui est evidement vérifié lorsque l'opérateurs H commute avec L et M au sens des résolvantes .
On note ainsi la condition (3.1.1) implique (2.1.5)

Chapitre 4

Application

Soit $X = L^2(\mathbb{R})$. On définit les opérateurs L_w, M_w et H comme suit

$$\begin{cases} D(L_w) = D(M_w) = H^2(\mathbb{R}), D(H) = H^1(R) \\ L_w\varphi(y) = \varphi''(y) + a(y)\varphi'(y) - w^\alpha\varphi(y) \\ M_w\varphi(y) = \varphi'' - w^\alpha\varphi(y) \\ H\varphi(y) = \varphi'(y) \end{cases} \tag{4.1}$$

avec $\alpha > 0, w > 0$ et $\alpha \in C_b^2(\mathbb{R}), a \neq 0$

i Vérification des hypothèses

L'espace $L^2(\mathbb{R})$ est un UMD

On va montrer que les opérateurs L_w, M_wet H_w vérifient les hypothèses (2.1.1) $\backsim$ (2.1.8)

L_w, M_w vérifient (2.1.2) et (2.1.3) donc L_w et M_w génèrent des semi groupes analytiques et $L_w + M_w$ est inversible : $\exists (L_w + M_w)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$

D'après (4.1) on a $D(L_w) = D(M_w)$. D'autre part on a

$$D\left((L_w + M_w)^2\right) = H^4(\mathbb{R}) \subset D\left((L_w - M_w)^2\right) = H^2(\mathbb{R})$$

car

$$\begin{cases} D(L_w + M_w) = H^2(\mathbb{R}) \\ (L_w + M_w)\varphi(y) = 2\varphi''(y) + \alpha(y)\varphi'(y) - 2w^\alpha\varphi(y) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} D(L_w - M_w) = H^1(\mathbb{R}) \\ (L_w - M_w)\varphi(y) = \alpha(y)\varphi'(y) \end{cases} \quad , \; y \in \mathbb{R}$$

De plus $M_wL_w \neq L_wM_w$, car

$$D(M_wL_w) = D(L_wM_w) = H^4(\mathbb{R})$$

$$\begin{aligned} (M_wL_w)\varphi(y) &= (\varphi''(y) + a(y)\varphi'(y) - w^\alpha\varphi(y))'' - w^\alpha(\varphi''(y) + a(y)\varphi'(y) - w^\alpha\varphi(y)) \\ &= \varphi^{(4)}(y) + \alpha''(y)\varphi'(y) + \alpha'(y)\varphi''(y) + \alpha(y)\varphi^{(3)}(y) \\ &\quad + \alpha'(y)\varphi''(y) - w^\alpha\varphi''(y) - w^\alpha(\varphi''(y) + a(y)\varphi'(y) - w^\alpha\varphi(y)) \\ &= \varphi^{(4)}(y) + \alpha(y)\varphi^{(3)}(y) + (2\alpha'(y) - 2w^\alpha)\varphi''(y) \\ &\quad + (\alpha''(y) - w^\alpha a(y))\varphi'(y) + w^{2\alpha}\varphi(y) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(L_w M_w)\varphi(y) &= (\varphi''(y)-w^\alpha\varphi(y))''+a(y)(\varphi''(y)-w^\alpha\varphi(y))'-w^\alpha(\varphi''(y)-w^\alpha\varphi(y))\\ &= \varphi^{(4)}(y)+a(y)\varphi^{(3)}(y)-2w^\alpha\varphi''(y)-w^\alpha a(y)\varphi'(y)+w^{2\alpha}\varphi(y)\end{aligned}$$

– Vérification de l'hypothèse (2.1.7) ; Pour montrer l'inversibilité de Λ_w, on a

$$\begin{cases} D(M_w-H)=H^2(\mathbb{R}) \\ (M_w-H)\varphi(y)=\varphi''(y)-w^\alpha\varphi(y)-\varphi'(y)=\psi(y)\end{cases}$$

Par la transformation de Fourier, on résout l'équation

$$(M_w-H)\varphi(y)=\varphi''(y)-w^\alpha\varphi(y)-\varphi'(y)=\Psi(y) \qquad \text{où } \Psi\in L^2(\mathbb{R})$$

ce qui implique

$$\varphi(y)=(M_w-H)^{-1}\psi(y)$$

Soit $\varphi\in H^2(\mathbb{R})$ alors

$$(M_w-H)\varphi=\varphi''-w^\alpha\varphi-\varphi'\in L^2(\mathbb{R})$$

d'où M_w-H est bien défini. Il est fermé à domaine dense
La transformation de Fourier donne

$$(2\pi i\xi)^2\widehat{\varphi}(\xi)-w^\alpha\widehat{\varphi}(\xi)-2\pi i\xi\widehat{\varphi}(\xi)=\widehat{\psi}(\xi)$$

d'où

$$\widehat{\varphi}(\xi)=-\frac{\widehat{\psi}(\xi)}{4\pi^2\xi^2+w^2+2i\pi\xi}$$

$\widehat{\varphi}\in L^2(\mathbb{R})$. D'où

$$\varphi(.)=-\overline{\mathcal{F}}\left(\frac{\widehat{\psi}(\xi)}{4\pi^2\xi^2+w^2+2i\pi\xi}\right)(.)$$

d'où le résultat. On en déduit que

$$\begin{aligned}\left[(M_w-H)^{-1}\psi\right](y) &= -\overline{\mathcal{F}}\left(\frac{\widehat{\psi}(\xi)}{4\pi^2\xi^2+w^\alpha+2i\pi\xi}\right)(y)\\ &= -\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{2i\pi y\xi}\widehat{\psi}(\xi)}{4\pi^2\xi^2+w^\alpha+2i\pi\xi}d\xi\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\Lambda_w &= (M_w-H)+e^{L_wM_w}(L_w+H)\\ &= \left(I+e^{L_wM_w}(L_w+H)(M_w-H)^{-1}\right)(M_w-H)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
(L_w + H)\left[(M_w - H)^{-1}\psi\right](y) &= L_w\left[(M_w - H)^{-1}\psi\right](y) + H\left[(M_w - H)^{-1}\psi\right](y) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{4\pi^2\xi^2 e^{2i\pi y\xi}\widehat{\psi}(\xi)}{4\pi^2\xi^2 + w^\alpha + 2i\pi\xi} d\xi - (\alpha(y) + 1)\int_{\mathbb{R}} \frac{2i\pi\xi e^{2i\pi y\xi}\widehat{\psi}(\xi)}{4\pi^2\xi^2 + w^\alpha + 2i\pi\xi} d\xi \\
&\quad + w^\alpha \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{2i\pi y\xi}\widehat{\psi}(\xi)}{4\pi^2\xi^2 + w^\alpha + 2i\pi\xi} d\xi.
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
\left\|(L_w + H)\left[(M_w - H)^{-1}\psi\right]\right\|_{L^2(\mathbb{R})} &\leq C\left\|\hat{\psi}\right\|_{L^2(\mathbb{R})} + Cw^\alpha\left\|\hat{\psi}\right\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= C(1 + w^\alpha)\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\left\|e^{L_w}e^{M_w}(L_w + H)(M_w - H)^{-1}\psi\right\| &\leq C(1 + w^\alpha)\left\|e^{L_w}\right\|\left\|e^{M_w}\right\|\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
&\leq \frac{C}{w^{2\alpha}}(1 + w^\alpha)\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, pour w assez grand, on a l'inversibilité de Λ_w

– Pour l'hypothèse(2.1.8),

$$\forall\varphi \in D(L_w) = H^2(\mathbb{R}), \ \Lambda_w^{-1}\varphi \in D(L_w + M_w)^2 = H^4(\mathbb{R})$$

Soit $\Lambda_w^{-1}\varphi = \psi$, alors

$$\varphi = \Lambda_w\psi = \left[(M_w - H) + e^{L_w}e^{M_w}(L_w + H)\right]\psi.$$

ainsi

$$(M_w - H)\psi = \psi'' - w^\beta\psi - \psi' \in D(L_w) = H^2(\mathbb{R})$$

ce qui implique

$$\Lambda_w^{-1}\varphi = \psi \in H^4(\mathbb{R})$$

De plus, il existe $C > 0$ tel que, pour tout $w > 0$

$$\left\|[M_w, L_w](L_w + M_w)^{-2}\right\|_{L(X)} \leq \frac{C}{w^\gamma}$$

où $\begin{cases} \gamma = 2\alpha \text{ si } 0 < w < 1 \\ \gamma = \alpha \text{ si } w \geq 1 \end{cases}$

ii **Existence et Unicité d'une solution classique**

Tous nos résultats obtenus pour w positif assez grand s'appliquent au problème suivant :

$$\begin{cases}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + a(y)\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}(x,y) - \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x,y) - a(y)\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x,y) \\
-a'(y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) - \frac{1}{2}a''(y)\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + w^\alpha a(y)\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \\
+w^\alpha\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + 2w^\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) - w^{2\alpha}u(x,y) = f(x,y), \ x \in (0,1), \ y \in \mathbb{R} \\
\frac{\partial u}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial u}{\partial y}u(0,y) = d_0(y) \\
u(1,y) = u_1(y) \qquad y \in \mathbb{R}
\end{cases} \tag{4.2}$$

Alors on a
Résultat : Soit $f \in L^p(0,1;L^2(\mathbb{R}))$ avec $1 < p < \infty$. Alors pour $w > 0$, les deux assertions suivantes sont équivalentes

1. le problème (4.2) admet une unique solution classique u
2. $u_1, \Lambda_w^{-1} d_0 \in \left(H^4(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R})\right)_{\frac{1}{2p},p}$

où $\left(H^4(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R})\right)_{\frac{1}{2p},p} = B_{2p}^{4(1-1/2p)}(\mathbb{R}) \quad (\text{Voir } [7, p.680-681])$.
En ce qui concerne $\Lambda_w^{-1} d_0$. Soit $V_w = e^{L_w} e^{M_w} (L_w + H)(M_w - H)^{-1}$
Notant que $(I + V_w)^{-1} = I - V_w (I + V_w)^{-1}$
on a

$$\begin{aligned} \Lambda_w^{-1} d_0 &= (M_w - H)^{-1} (I + V_w)^{-1} d_0 \\ &= (M_w - H)^{-1} d_0 - (M_w - H)^{-1} V_w (I + V_w)^{-1} d_0 \end{aligned}$$

Et comme V_w contient l'opérateur régulier e^{L_w}, alors $\Lambda_w^{-1} d_0 \in B_{2p}^{4(1-1/2p)}(\mathbb{R})$ si et seulement si $(M_w - H)^{-1} d_0 \in B_{2p}^{4(1-1/2p)}(\mathbb{R})$
c'est-à- dire

$$y \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{2i\pi y\xi} \widehat{d_0}(\xi)}{(w^\alpha + 4\pi^2\xi^2 + 2i\pi\xi)} d\xi \in B_{2p}^{4(1-1/2p)}(\mathbb{R}).$$

CONCLUSION

Dans ce travail on a étudié une E.D.A du second ordre avec des conditions de Robin généralisées dans un cadre non commutatif.

C'est une synthèse de l'article de M.Chegag , A. Favini , R . Labbas , S. Maingot, Kh . Ould Melha "New Results on Complete Elliptique equations with Robin boundary coefficient-operator conditions in non commutative case". On a utilisé les semi-groupes analytiques, les espaces d'interpolations, les sommes d'opérateurs pour trouver un résultat d'existence, d'unicité et de régularité maximale de la solution.

On a illustré notre travail par une application concrète du résultat à un problème d'EDP

Bibliographie

[1] Cheggag M., Favini A., Labbas R., Maingot S., Medeghri A. Elliptic Problems with Robin Boundary Coefficient-Operator Conditions in General L^p Sobolev Space and Applications. *Bulletin of the South Ural State University. Series : Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2015, vol. 8, no. 3, pp. 56-77. DOI :10.14529/mmp150304.

[2] Cheggag M., Favini A., Labbas R., Maingot S., Medeghri A. Complete Abstract Differential Equations of Elliptic Type with General Robin Boundary Conditions, in UMD Spaces. *Discrete and Continuous Dynamics System. Series S*, 2011, *vol.* 4, *no.* 3, *pp.* $523-538$. *DOI* : 10.3934/*dcdss*.2011.4.523

[3] Dore G. L^p Regularity for Abstract Differential Equation. *Functional Analysis and Related Topics. Kyoto* 1991. *Lecture Notes in Mathematics.* Vol. 1540. 1993, Berlin, Springer-Verlag , pp. 25-38. DOI : 10.1007/BFb0085472

[4] Favini A., Labbas R., Maingot S., Meisner M. Study of Complete Abstract Elliptic Differential Equations in Non Commutative Cases. Applicable Analysis, 2012, vol. 91, issue 8, pp. 1495-1510. DOI : 10.10801.000365652

[5] Favini A., Labbas R., Maingot S., Meisner M. Boundary Value Problem For Elliptic Diffrential Equations in Non-Commutative Cases. Discrete and Continuous Dynamics System. Series A, 2013, vol. 33, issue 11-12, pp. 4967-4990. DOI : 10.3934/dcds.2013.33.4967

[6] Favini A., Labbas R., Maingot S., Tanabe H., Yagi A. Complete Abstract Differential Equation of Elliptic Type in UMD Space. *Funkcialaj Ekvacioj*, 2006, vol. 49, no. 2, pp. 193-214.

[7] Grisvard P. Spazi di trace ed applicazioni. Rendiconti di mathmatica. Serie VI, 1972, vol. 5, pp. 657-729. (in Italian).

[8] Lunardi A., Analytic Semigroupe and Optimal Regularity in Parabolic Problems. Basel, Birkhauser, 1995.

[9] Meisner M. *Etude unifiée d'équations aux dérivées partielles de type elliptique régies par des équations différentielles à coeficients dans un cadre non mcommutatif : applications concrètes dans les espaces de Holder et les espaces* L^p. Thèse de doctorat de l'Université du Havre, 2012.

[10] Pruss J., Sohr H. On Operators with Bounded Imaginary Powers in Banach Spaces. Mathematische Zeitschrift, 1990, vol. 2003, issue 3, pp. 429-452.

[11] Triebel H. Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators. Amsterdam, N.Y., Oxford, North-Holland, 1978