REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE MOSTAGANEM
Abd el Hamid Ibn Badis

Faculté des Sciences Exactes et d'Informatique
Département de Mathématiques-Informatique

Mémoire de Master en mathématiques
Option : Analyse Harmonique

Intitulé

ETUDE D'ÉQUATION PARABOLIQUE DÉGÉNÉRÉE SUR LES ESPACES LP

Présenté par
Achite Henni Mouna

Soutenu le : 13/06/2013.

Devant les membres du jury :

Présidente : F. BOUZIANI, Maître de conférences B, Université de Mostaganem.

Examinateur : H. HAMMOU, Maître assistant A, Université de Mostaganem.

Encadreur :K.Limam, Maître de conférences B, Université de Mostaganem.

Année universitaire : 2012-2013

Table des matières

Introduction **1**

0.1 Position du problème 1

0.2 Contenu des chapitres 4

1 Outils et Rappels **5**

1.1 Les opérateurs linéaires 5

1.2 Les semi-groupes 6

1.2.1 Semi-groupes fortement continus 7

1.2.2 Semi-groupes analytiques 7

1.3 Les espaces d'interpolations 8

1.4 Théorème de trace de Lions 8

1.5 Lemme de Schur 9

1.6 Espace UMD 9

1.6.1 Transformation de Hilbert 9

1.7 La classe Bip(E, θ) 10

1.8 La fonction Gamma 10

1.9 Sur la théorie des sommes d'opérateurs 10

1.9.1 La méthode de Labbas-Terreni 10

1.9.2 La méthode de Dore-Venni 11

1.10 Espaces de Sobolev 12

1.11 Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ 12

1.12 Théorème de Mikhlin 12

1.13 Inégalité de Hölder 13

1.14 Convolution des fonctions 13

2 Etude du problème dégénéré de type parabolique par la méthode de Labbas-Terreni **15**

2.1 Introduction 15

2.2 Formulation abstraite 16

2.3 Résultat d'existence, d'unicité et de régularité dans le domaine Ω 31

2.4 Retour au domaine U 31

2.5 Régularité de la solution 32

3 Etude du problème parabolique dégénéré autonome par la méthode de Dore-Venni 33

3.1 Introduction 33
3.2 Formulation abstraite 34
3.3 Solution stricte 41
3.4 Retour au domaine U 41

Introduction

Le travail accompli dans ce mémoire a pour objectif de faire une synthèse sur le travail de R. Labbas, A. Medeghri et B. K. Sadallah [12] concernant l'étude d'une classe des équations paraboliques dégénérées dans le cadre des espaces L^p posées dans des domaines non-cylindriques de la forme :

$$U = U_{t\in]0,1[}(t) \times I_t$$

avec

$$I_t = \{x : 0 < x < \varphi(t)\}.$$

$\varphi : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue donnée telle que $\varphi(0) = 0$.On montrera des résultats de régularité pour les solutions obtenues. La régularité optimale est obtenue dans les espaces L^p avec $p > \dfrac{3}{2}$ lorsque

$$\varphi(t) = t^{\alpha}, \alpha > \frac{1}{2}$$

avec une régularité sur le second membre qui est dans un sous espace de $L^p(U)$ avec

$$p > 1 + \alpha$$

dont on utilisera les résultats de Labbas-Terreni et lorsque $\alpha = \frac{1}{2}$ c'est à dire

$$\varphi(t) = t^{\frac{1}{2}}$$

avec second membre dans $L^p(U)$ et dans cette approche, on utilisera les résultats de Dore-Venni.

0.1 Position du problème

On étudie l'équation parabolique autonome :

$$\begin{cases} D_t u(t,x) - D_x^2 u(t,x) + \lambda m(t,x) u(t,x) = f(t,x) \\ u\backslash_{\partial U - \Gamma_1} = 0 \end{cases} \tag{0.1}$$

Où U est un domaine non-cylindrique de la forme :

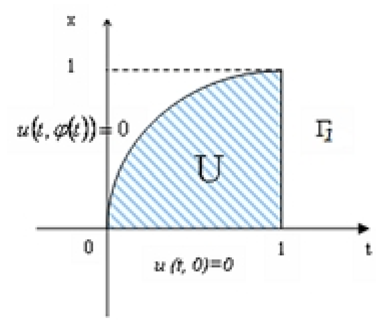
$$U = U_{t\in]0,1[}(t) \times I_t$$

Avec

$$I_t = \{x : 0 < x < \varphi(t)\}$$

$\Gamma_1 = \{1\} \times [0,1[$, λ est le paramètre spectral positif. Le second membre f étant dans $L^p(U)$ avec

$$p > \frac{3}{2} \tag{0.2}$$



Le domaine non-cylindrique par rapport au temps du bord $\partial U_\varphi = \{(t, \varphi(t) : 0 < t < 1\}$ peut être considéré comme une approximation d'une flamme ce qui donne un intérêt à l'équation (0.1) dans la théorie de combustion. D'autre part, l'analyse de l'équation avec le paramètre spectrale λ et le multiplicateur à poids $m(.)$ joue un rôle important puisqu'il provient naturellement de la linéarisation des équations de diffusion non linéaires ([7],[8]). La fonction $m(.)$ peut aussi modéliser le coefficient de l'échange avec l'environnement extérieur.
Le changement de variable :

$$(t, x) \to (t, y) = (t, \frac{x}{\varphi(t)})$$

transforme U en un rectangle $\Omega =]0,1[\times]0,1[$.
Posons :

$$u(t, x) = w(t, y) \text{ et } f(t, x) = g(t, y)$$

on a

$$D_t u(t, x) = D_t w(t, y) - \frac{\acute{\varphi}(t)}{\varphi(t)} y,$$

$$D_x u(t, x) = \frac{1}{\varphi(t)} D_y w(t, y)$$

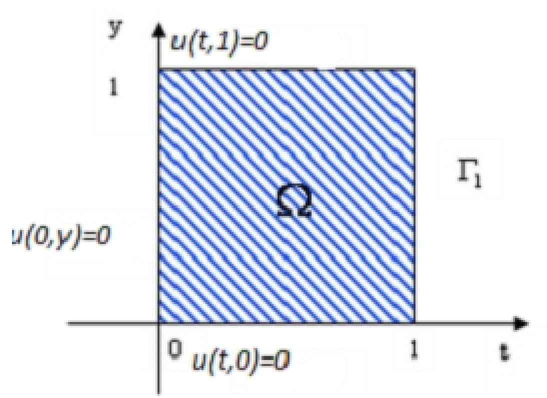
et

$$D_x^2 u(t, x) = \frac{1}{\varphi^2(t)} D_y^2 w(t, y)$$

Donc, le problème (0.1) est transformé dans Ω en un problème d'évolution dégénéré :

$$\begin{cases} \varphi^2(t) D_t w(t, y) - D_y^2 w(t, y) - \acute{\varphi}(t)\varphi(t) y D_y w(t, y) + \lambda M(t, y)\varphi^2(t) w(t, y) = \varphi^2(t) g(t, y) \\ w \backslash_{\partial\Omega - \Gamma_1} = 0 \end{cases} \tag{0.3}$$

Avec $\Gamma_1 = \{1\} \times]0,1[$ et $M(t, y) = m(t, x)$



Il est facile à voir que $f \in L^p(U)$ si et seulement si $\varphi^{-2+\frac{1}{p}}h \in L^p(\Omega)$ tel que $h = \varphi^2 g$ car

$$
\begin{aligned}
f \in L^p(U) &\Longleftrightarrow \int_0^1 \left(\int_0^{\varphi(t)} |f(t,x)|^p \, dx \right) dt < \infty \\
&\Longleftrightarrow \int_0^1 \int_0^1 (|g(t,y)|^p \varphi(t) dy) dt < \infty \\
&\Longleftrightarrow \int_0^1 \int_0^1 \left| \varphi^{\frac{1}{p}} g \right|^p dy dt < \infty \\
&\Longleftrightarrow \varphi^{-2+\frac{1}{p}} h \in L^p(\Omega)
\end{aligned}
$$

Ce qui implique que $h \in L^p(\Omega)$.
Puisque $h = (\varphi^{-2+\frac{1}{p}}h)\varphi^{2-\frac{1}{p}}$ et $-2 + \frac{1}{p} > 0$, alors la fonction h appartient au sous espace fermé de $L^p(U)$ défini par :

$$E_\varphi = \left\{ h \in L^p(0,1,L^p(0,1)) : \varphi^{-2+\frac{1}{p}} h \in L^p(0,1,L^p(0,1)) \right\}$$

muni de la norme :

$$\|h\|_{E_\varphi} = \left\| \varphi^{-2+\frac{1}{p}} h \right\|_{L^p(0,1,L^p(0,1))}$$

Dans ce travail, on est intéressé particulièrement à la question : quelles sont les conditions sur φ qui assurent une régularité optimale i.e. une solution u appartenant à l'espace anisotropique de Sobolev :

$$H_p^{1,2}(U) = \left\{ u \in L^p(U) : D_t u; D_x^j u \in L^p(U); j = 1,2 \right\}$$

L'approche qu'on utilisera dans ce travail est basée sur l'application directe de la théorie des sommes d'opérateurs dans les espaces de Banach.
On montrera que la réponse à la question précédente est positive dans les deux cas suivants :

1. Quand f est régulier, la fonction $t \to \acute{\varphi}(t)\varphi(t)$ est holderienne et le coefficient du multiplicateur à poids m est une fonction du bord parabolique dans le sens que $m(t,x) = m(t) = (\varphi(t))^{-2}$. Il correspond pour le moment au cas modèle $\varphi(t) = t^{\alpha}$ avec $\alpha > \frac{1}{2}$ et dans ce cas, on utilisera les résultats de Labbas-Terreni.
2. Quand f est uniquement dans $L^p(U)$, on traite le cas $\varphi(t) = \sqrt{t}$ et $m(t,x) = t^{-1}$ et ici, on utilisera le célèbre théorème de Dore-Venni donné dans [2].

Ce travail est aussi une extension du cas hilbertien ($p = 2$) étudié dans Sadallah[17] dont les auteurs ont considérés les cas : $\lambda = 0$ et $m = 0$

0.2 Contenu des chapitres

Ce travail est organisé comme suit :
Le **chapitre 1** est consacré aux rappels et définitions qu'on aura besoin dans la suite du travail.
Au **chapitre 2**, on fera l'étude du problème (0.1) dans le cas où

$$\varphi(t) = t^{\alpha} \text{ avec } \alpha > \frac{1}{2}, m(t) = t^{-2\alpha}$$

Et supposons que

$$p - 1 > \alpha \tag{0.4}$$

Pour $\sigma \in]0,1[$, on introduit le sous espace de $L^p(U)$ suivant :

$$L^p_{\varphi^{2\sigma}}(0,1;W^{2\sigma,p}_{\varphi}) = \left\{ f \in L^p(U) : \int_0^1 \varphi(t)^{2\sigma p} \int_0^{\varphi(t)} \int_0^{\varphi(t)} \frac{|f(t,x) - f(t,x')|^p}{|x - x'|^{2\sigma p+1}} dx d\acute{x} dt < \infty \right\}$$

Le résultat essentiel dans ce chapitre est le suivant :

Théorème 0.1 *Supposons (0.4) et soit $\sigma \in]0,1[$ tel que $0 < \sigma < \frac{1}{2p}$, alors $\exists \lambda^*$ tel que $\forall \lambda \geq \lambda^*$ et $\forall f \in L^p_{\varphi^{2\sigma}}(0,1;W^{2\sigma,p}_{\varphi})$ le problème (0.1) admet une unique solution stricte u vérifiant les propriétés de régularité :*

$$u, D_t u, D_x u \quad \textit{et } D_x^2 u \in L^p_{\varphi^{2\sigma}}(0,1;W^{2\sigma,p}_{\varphi})$$

Dans le **chapitre 3**, on considère le cas limite $\alpha = \frac{1}{2}$ c'est à dire $\varphi(t) = t^{\frac{1}{2}}$ et $m(t) = t^{-1}$ et on montrera le résultat suivant :

Théorème 0.2 *Pour $f \in L^p(U)$ et $\lambda \geq \frac{1}{2p}$, le problème (0.1) admet une unique solution $u \in H^{1,2}_p(U)$.*

Remarque 0.1 *Notons que dans le $3^{\text{ème}}$ chapitre, on obtient des résultats maximales pour tout $\lambda \geq \frac{1}{2p}$.*

Chapitre 1

Outils et Rappels

Dans ce chapitre, nous introduisons les outils nécessaires par la suite, nous rappellerons certains théorèmes utiles à la compréhension des démonstrations.
Dans ce qui suit ; E est un espace de Banach.

1.1 Les opérateurs linéaires

Soit A un opérateur linéaire de domaine $D(A)$ inclus dans un espace de Banach complexe E à valeurs dans E.

Définition 1.1 *On dit qu'un opérateur A est borné si et seulement si :*

$$D(A) = E \text{ et } \sup_{\|\varphi\|<1} \|A\varphi\| < \infty.$$

Définition 1.2 *Soit $A : D(A) \subset E \to E$ un opérateur linéaire dans E. A est fermé si et seulement si : $\forall(\varphi_n) \subset D(A)$ et $\forall(\varphi, \psi) \subset E \times E$, on a*

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \varphi_n & \longrightarrow & \varphi \\ A\varphi_n & \longrightarrow & \psi \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \varphi \in D(A) \\ A\varphi = \psi \end{array} \right.$$

Définition 1.3 *Soit A un opérateur linéaire fermé. A est dit sectoriel si :*

1. *$D(A)$ et $\operatorname{Im}(A)$ sont denses dans E*
2. *$\ker(A) = \{0\}$*
3. *$]-\infty, 0[\subset \rho(A)$ et $\exists M \geq 1$ tel que $\|t(A + tI)^{-1}\| \leq M$, pour tout $t > 0$*

Définition 1.4 *A est dit positif si $]-\infty, 0] \subset \rho(A)$ et il existe $C \geq 0$ telle que*

$$\left\|(A - t)^{-1}\right\|_{L(E)} \leq \frac{C}{1 + |t|}, \forall t \leq 0$$

1.2 Les semi-groupes

Définition 1.5 *Une famille $T(t)$, $0 \leq t \leq \infty$ d'opérateurs linéaires bornés de E dans E est un semi-groupe si :*

1. $T(t+s) = T(t)T(s)$ *pour $s \geq 0$ et $t \geq 0$*
2. $T(0) = I$, *(I est l'opérateur identité).*

Remarque 1.1 *Lorsque la première propriété est vraie pour $s, t \in \mathbb{R}$ alors, on dit que $T(t)$ est un groupe.*

Exemple 1.1 *Soit $A \in L(E)$: Alors $t \mapsto G(t) = e^{tA}$ est un groupe sur E.*

Exemple 1.2 *Soit $E = L^p(\mathbb{R}), 1 \leq p < \infty$ et $(G(t)f)(x) = f(x-s)$ alors ;G est un groupe appelé groupe de translation de L^p.*
On a

$$\|f(x-s)\|_{L^p} = \|f(x)\|_{L^p} \ \text{donc} \ \|G(t)\| = 1$$

Alors $G(t) \in L(E)$ et

$$\begin{aligned}(G(t)G(s))(x) &= (G(t)f)(x-s) \\ &= f(x-s-t) \\ &= (G(t+s)f)(x)\end{aligned}$$

donc : $G(t+s) = G(t)G(s)$

Définition 1.6 *On appelle générateur infinitésimal du semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$, l'opérateur A défini sur le domaine*

$$D(A) = \left\{\varphi \in E : \lim_{t\to 0}\frac{(T(t)\varphi - \varphi)}{t} \ \text{existe}\right\}$$

par

$$A\varphi = \lim_{t\to 0}\frac{(T(t)\varphi - \varphi)}{t}, \ \text{pour} \ \varphi \in D(A).$$

Exemple.
Soit A un opérateur borné dans E, alors $\forall t \geq 0, G(t) = e^{tA}$ est un semi-groupe uniformément continu et son générateur infinitésimal est l'opérateur A.
En effet

$$\begin{aligned}\|G(t) - G(t+h)\| &= \|G(t) - G(t)G(h)\| \\ &= \|G(t)\| \, \|I - G(h)\| \\ &= \|G(t)\| \, \left\|e^{t\|A\|} - 1\right\|\end{aligned}$$

Donc

$$\|G(t) - G(t+h)\| \to 0 \text{ quand } h \to 0$$

D'où la continuité uniforme.
D'autre part,

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{t}(G(t)-I)-A\right\| &= \left\|\frac{1}{t}(e^{tA}-I)-A\right\| \\ &= \left\|\frac{1}{t}\sum_{n\geq 2}\frac{t^n}{n!}A^n\right\| \\ &\leq t\,\|A\|^2\,e^{t\|A\|}\end{aligned}$$

Quand $t \to 0$ alors, $A = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(G(t)-I)$ limite uniforme donc forte.

1.2.1 Semi-groupes fortement continus

Définition 1.7 *On dit qu'un semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires est fortement continu si :*

$$\lim_{t\to 0}\|T(\varphi)-\varphi\|_E = 0\ , \qquad \textit{pour tout } \varphi \in E$$

On dit aussi que $(T(t))_{t\geq 0}$ est C_0 semi-groupe.

Théorème 1.1 *Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un C_0 semi-groupe. Il existe deux constantes réelles $M \geq 1$, $\omega \geq 0$ telles que*

$$\|T(t)\| \leq M\exp\omega t, \quad \textit{pour } t \in [0,\infty[\,.$$

Corollaire 1.1 *Si A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ sur E, alors $D(A)$ est dense dans E et A est un opérateur fermé.*

Remarque 1.2 *D'après ce corollaire, le graphe de A est un sous espace fermé du produit $E \times E$ alors, on peut munir $D(A)$ d'une structure d'espace de Banach en considérant sur $D(A)$ la norme dite, norme du graphe, définie par*

$$\|\varphi\|_{D(A)} = \|\varphi\| + \|A\varphi\|\,.$$

1.2.2 Semi-groupes analytiques

Définition 1.8 *Soient le secteur $\Sigma = \{z \in \mathbb{C} : \theta_1 < \arg z < \theta_2\}$ et $T(z)$ un opérateur linéaire borné. La famille $(T(z))_{z\in\Sigma}$ est dite semi-groupe analytique, si :*

1. $T(0) = I$
2. $T(z_1+z_2) = T(z_1)T(z_2)$ *pour* $z_1,z_2 \in \Sigma$
3. $\lim_{z\to 0, z\in\Sigma} T(z)\varphi = \varphi$ *pour tout* $\varphi \in E$
4. $z \to T(z)$ *est analytique sur* Σ.

1.3 Les espaces d'interpolations

Soient $(E, \|.\|_0)$ et $(E_1, \|.\|_1)$ deux espaces de Banach s'injectent continûment dans un espace topologique séparé $\mathcal{F}$, posons

$$\begin{cases} \|\varphi\|_{E_0\cap E_1} = \|\varphi\|_{E_0} + \|\varphi\|_{E_1} & \text{si } \varphi \in E_0 \cap E_1 \\ \|\varphi\|_{E_0+E_1} = \inf\limits_{\varphi_i\in E_i, \varphi_0+\varphi_1=\varphi} (\|\varphi_0\|_{E_0} + \|\varphi_1\|_{E_1}) & \text{si } \varphi \in E_0 + E_1 \end{cases}$$

Il est connu que les espaces $(E_0 \cap E_1, \|.\|_{E_0\cap E_1})$ et $(E_0 + E_1, \|\varphi\|_{E_0+E_1})$ sont des espaces de Banach.

Définition 1.9 *On dira que $x \in (E_0, E_1)_{\theta,p}$ (avec $0 < \theta < 1$) et $p \in [1, \infty])$ si*

1. *$\forall t > 0$, $\exists u_0(t) \in E_0$, $\exists u_1(t) \in E_1$: $x = u_0(t) + u_1(t)$*
2. *$t^{-\theta}u_0 \in L^p_*(\mathbb{R}^+, E_0)$ et $t^{1-\theta}u_1 \in L^p_*(\mathbb{R}^+, E_1)$*

avec la modification usuelle pour $p = \infty$.

Remarque 1.3 *L^p_* désigne l'espace des fonctions $p-$intégrable avec la mesure $\dfrac{dt}{t}$, alors on a :*

$$t^{-\theta}u_0 \in L^p_*(\mathbb{R}^+, E_0) \iff \int_0^{+\infty} t^{-\theta} \|u_0(t)\|^p_{E_0} \tfrac{dt}{t} < \infty$$

Résultats utiles sur les espaces d'interpolation

Lorsque A vérifie certaines propriétés spectrales, on sait donner des caractérisations explicites de l'espace $D_A(\sigma, p)$ pour $p \in [1, \infty]$ et $0 < \sigma < 1$, comme par exemple :

1^{er} **cas :** Supposons que $\rho(A) \supset \mathbb{R}^+_*$ et qu'il existe une constante $c > 0$ tel que

$$\forall \lambda > 0 : \left\|(A - \lambda I)^{-1}\right\|_{L(E)} \leq \frac{c}{\lambda}$$

alors,

$$D_A(\sigma, p) = \left\{\varphi \in E, t^\sigma A(A - \lambda I)^{-1}\varphi \in L^p(\mathbb{R}_+, E)\right\}$$

$2^{ème}$ **cas :** Si A génère un semi-groupe fortement continu et borné dans E, alors

$$D_A(\sigma, p) = \left\{\varphi \in E : t^{-\sigma}(\exp tA - I)\varphi \in L^p_*(\mathbb{R}_+, E)\right\}$$

$3^{éme}$ **cas :** Si A génère un semi-groupe analytique dans E, alors

$$D_A(\sigma, p) = \left\{\varphi \in E : t^{1-\sigma} A \exp(tA)\varphi \in L^p_*(\mathbb{R}_+, E)\right\}.$$

1.4 Théorème de trace de Lions

Théorème 1.2 *$x \in (E_0, E_1)_{\theta,p}$ si et seulement s'il existe une fonction $u : \mathbb{R}_+ \to E_0$ avec $u = u_0 + u_1$ telle que :*

1. *$t^{-\theta}u_0 \in L^p_*(E_0)$*
2. *$t^{1-\theta}u_1 \in L^p_*(E_1)$*

On dit que $x = u(0)$ est la trace de u en 0.

1.5 Lemme de Schur

Définition 1.10 *Soit $k : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ mesurable, on définit l'opérateur K par :*

$$(Kf)(x) = \int_{\Omega_1} k(x_1, x_2) f(x_1) dx_1$$

Si

1. $\exists a > 0, \forall x_2 \in \Omega_2 : \int_{\Omega_1} |k(x_1, x_2)| \, dx_1 \leq a$
2. $\exists b > 0, \forall x_1 \in \Omega_1 : \int_{\Omega_2} |k(x_1, x_2)| \, dx_2 \leq b$

Alors $K \in \mathcal{L}(L^p(\Omega_1, L^p(\Omega_2)), \forall \ 1 \leq p \leq \infty$.

1.6 Espace UMD

Définition 1.11 *Un espace de Banach possède la propriété UMD (Unconditional Martingales Differences) si :*

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \zeta_k d_k \right\|_{L^p(\mathbb{R},E)} \leq C(p) \left\| \sum_{k=1}^{n} d_k \right\|, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Pour toute martingale $(d_k)_{k=1,\ldots n}$ et pour toute suite $(\zeta_k) \in \{-1, 1\}^n$.

1.6.1 Transformation de Hilbert

Définition 1.12 *Soit $\epsilon \in \,]0, 1[$. Pour toute fonction $f \in L^p(\mathbb{R})$ avec $p \in \,]1, +\infty[$, on peut définir la transformée de Hilbert par :*

$$Hf = \lim_{\epsilon \to 0} H_\epsilon(f)(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon < |s| < \frac{1}{\epsilon}} \frac{f(x-s)}{s} ds.$$

Théorème 1.3 *Soit E un espace de Banach et $p \in \,]1, +\infty[$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *ξ symétrique et biconvexe*
2. *$\xi(0, 0) > 0$*
3. *$\xi(x, y) \leq \|x + y\|, \quad \forall x, y \in E$ avec $\|x\| + \|y\| = 1$.*

Remarque 1.4 *Si $1 < p < \infty$ et E est UMD alors $L^p(0, 1, E)$ est UMD.*

Exemple $L^1(\mathbb{R})$ n'est pas UMD.

1.7 La classe $\mathrm{Bip}(E,\theta)$

Définition 1.13 *Si $A : E \to E$ est un opérateur borné positif, la puissance complexe de l'opérateur A est définie par*

$$A^z x = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma t^z (tI - A)^{-1} x dt,$$

Où z est un nombre complexe arbitraire.

Définition 1.14 *Si A est un opérateur linéaire fermé sectoriel, on définit la puissance complexe de partie réelle positive (pour 0 <Re z <1) par la représentation suivante :*

$$A^z x = \frac{1}{\Gamma(1-z)\Gamma(z)} \int_0^{+\infty} t^{-z} (tI + A)^{-1} x dt.$$

Définition 1.15 *On dit que $A \in \mathrm{Bip}(E)$ (Bounded Imaginary Powers) si : $A^{is} \in L(E)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$ et*

$$\sup_{s \in]-1,1[} \left\| A^{is} \right\| < \infty.$$

Remarque 1.5 *Pour un opérateur sectoriel, les puissances complexes A^z, $z \in \mathbb{C}$ sont bien définis mais non nécessairement bornées (voir [10]).*

1.8 La fonction Gamma

Définition 1.16 *La fonction gamma est donnée par :*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad z > 0.$$

1.9 Sur la théorie des sommes d'opérateurs

1.9.1 La méthode de Labbas-Terreni

Supposons que les opérateurs A et B vérifient les hypothèses suivantes :

$$\textbf{(LT1)} \begin{cases} \exists r, C_A, C_B > 0, \epsilon_A, \epsilon_B > 0 \text{ tel que} \\ i) \begin{cases} \rho(-A) \supset \sum_{\epsilon_A} = \{z : |z| \geq r \text{ et } |\arg z| < \epsilon_A\} \\ \forall z \in \sum_{\epsilon_A} : \|(A + zI)^{-1}\|_{L(E)} \leq \frac{C_A}{|z|}. \end{cases} \\ ii) \begin{cases} \rho(-B) \supset \sum_{\epsilon_B} = \{z : |z| \geq r \text{ et } |\arg z| < \epsilon_B\} \\ \forall z \in \sum_{\epsilon_B} : \|(B + zI)^{-1}\|_{L(E)} \leq \frac{C_B}{|z|}. \end{cases} \\ iii) \ \epsilon_A + \epsilon_B > \pi. \end{cases}$$

Où $\rho(-A)$ (respectivement $\rho(-B)$) désigne l'ensemble résolvant de $(-A)$ (respectivement $(-B)$)

$$(\mathbf{LT2})\left\{\begin{array}{l} \exists C>0,\ \lambda_0>0\ (avec\ \lambda_0\in\rho(-B)),\ \tau,\ \rho\ tel\ que \\ i)\ \left\{\begin{array}{l}\forall\lambda\in\rho(-A)\ et\ \forall\mu\in\rho(-B), \\ \left\|(A+\lambda_0)(A+\lambda I)^{-1}\left[(A+\lambda_0)^{-1};(B+\mu I)^{-1}\right]\right\|_{L(E)}\leq\frac{C}{|\lambda|^{1-\tau}|\mu|^{1+\rho}}\end{array}\right. \\ ii)\ 0\leq\tau<\rho\leq 2.\end{array}\right.$$

Alors, le résultat principal de Labbas-Terreni est donné par le théorème suivant :

Théorème 1.4 ***(de Labbas-Terreni)***
Sous les hypothèses (LT1) et (LT2), il existe λ^* tel que $\forall\lambda\geq\lambda^*$ et $\forall h\in D_A(\sigma,p)$, l'équation

$$Aw+Bw+\lambda w=h$$

admet une unique solution $w\in D(A)\cap D(B)$ avec les régularités :

$$Aw,Bw\in D_A(\theta,p)\ et\ Aw\in D_B(\theta,p)$$

Pour tout θ vérifiant $\theta\leq\min(\sigma,\rho-\tau)$.

1.9.2 La méthode de Dore-Venni

Supposons que E est UMD et que A et B vérifient les hypothèses suivantes :

$$(\mathbf{DV1})\left\{\begin{array}{l} i)\ D(A)\text{ et }D(B)\text{ sont denses dans }E \\ ii)\left\{\begin{array}{l}\rho(A)\supset\left]-\infty,0\right[et\exists M_A\geq 1\text{ tel que} \\ \forall\lambda\geq 0,\left\|(A+\lambda I)^{-1}\right\|_{L(E)}\leq\frac{M_A}{(1+\lambda)}.\end{array}\right. \\ iii)\ \left\{\begin{array}{l}\rho(B)\supset\left]-\infty,0\right[et\exists M_B\geq 1\text{ tel que} \\ \forall\lambda\geq 0,\left\|(B+\lambda I)^{-1}\right\|_{L(E)}\leq\frac{M_B}{(1+\lambda)}.\end{array}\right.\end{array}\right.$$

$$(\mathbf{DV2})\left\{\begin{array}{l} \exists K>0,\theta_A,\theta_B\in\left[0,\pi\right[\text{ tel que} \\ i)\ A^{is}\in L(E),\forall s\in\mathbb{R}\ \ \|A^{is}\|\leq K\exp(|s|\,\theta_A) \\ ii)\ B^{is}\in L(E),\forall s\in\mathbb{R}\ \ \|B^{is}\|\leq K\exp(|s|\,\theta_B) \\ iii)\ \theta_A+\theta_B<\pi.\end{array}\right.$$

$$(\mathbf{DV3})\left\{\begin{array}{l}\text{Pour tout }\zeta\in\rho(-A)\text{ et tout }\eta\in\rho(-B) \\ (A+\zeta I)^{-1}(B+\eta I)^{-1}=(B+\eta I)^{-1}(A+\zeta I)^{-1}\end{array}\right.$$

Alors, le résultat principal de Dore-Venni est donné par le théorème suivant :

Théorème 1.5 ***(de Dore-Venni)***
Sous les hypothèses (DV1), (DV2) et (DV3) ; $(A+B)$ est fermé, inversible et $(A+B)^{-1}\in L(E)$.

Remarque 1.6 *En général, l'hypothèse (DV2) est difficile à vérifier dans les cas concrets.*

1.10 Espaces de Sobolev

Définition 1.17 *Soient m un entier positif et $\alpha \in \mathbb{N}$. On définit la norme $\|.\|_{m,p}$ pour $1 \leq p < \infty$ par :*

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{0 \leq \alpha \leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

et pour $p = \infty$, par

$$\|u\|_{m,\infty} = \max_{0 \leq \alpha \leq m} \|D^\alpha u\|_\infty .$$

Alors, on définit l'espace de Sobolev comme suit

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega), D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ pour } 0 \leq \alpha \leq m \}$$

Où $D^\alpha u$ est la dérivée de u au sens des distributions.

Exemple.

$$W^{2,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega), u' \in L^p(\Omega) \text{ et } u'' \in L^p(\Omega)\}$$

muni de la norme

$$\|u\|_{2,p} = \left(\sum_{0 \leq \alpha \leq 2} \left\|u^{(\alpha)}\right\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} .$$

est un espace de Sobolev.

1.11 Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$

Définition 1.18 *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, on a*

$$F(f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \exp(-ix\xi) f(x) dx$$

Où $F(f)$ est la transformée de Fourier (T.F) de f.

1.12 Théorème de Mikhlin

Définition 1.19 *Soit E un espace UMD, $p \in (1, \infty)$, $m(\xi) \in C^2(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ et*

$$Y(m) = \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \max \left\{ |m(\xi)| , |\xi \acute{m}(\xi)| , \left|\xi^2 m(\xi)\right| \right\} < \infty$$

alors, la transformation $(Tu)(t) = F^{-1}(m(\xi) F u(\xi))(t)$ vérifie

$$\|Tu\|_{L^p(\mathbb{R},E)} \leq C Y(m) \|u\|_{L^p(\mathbb{R},E)}$$

Où C dépend uniquement de p et de E.

Théorème 1.6 ***(de Fubini)*** *Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}$ une fonction mesurable et $E \times F$ un ensemble mesurable de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$*

i) *Si f est positive sur $E \times F$, on a*

$$\int\limits_{E\times F} f(x,y)dxdy = \int\limits_{E} dx \int\limits_{F} f(x,y)dy = \int\limits_{F} dy \int\limits_{E} f(x,y)dx \qquad (*)$$

ii) *Si f est intégrable sur $E \times F$, la fonction $x \to f(x,y)$ (respectivement $y \to f(x,y)$) est intégrable pour presque tout x (respectivement y), alors (*) est vérifiée*

iii) *f est intégrable sur $E \times F$ si et seulement si :*
$\int\limits_{E} dx \int\limits_{F} |f(x,y)|\, dy$ *ou* $\int\limits_{F} dy \int\limits_{E} |f(x,y)|\, dx$ *est finie.*

1.13 Inégalité de Hölder

Définition 1.20 *Soient $f \in L^p(U)$ et $g \in L^q(U)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors*
$fg \in L^1(U)$ et $\int\limits_{U} |f(t)g(t)|\, dt \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

1.14 Convolution des fonctions

Définition 1.21 *Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. On appelle convolution de f et g la fonction $f * g$, si elle existe, définie par :*

$$f * g(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)dt = \int\limits_{\mathbb{R}} f(u)g(x-u)du.$$

Théorème 1.7 *Soient E un espace de Banach complexe et $B : D(B) \to E$ un opérateur positif à puissances imaginaires bornées de plus, B forme un groupe fortement continu avec*

$$\left\|B^{is}\right\| \leq M \exp(\delta\, |s|).$$

Supposons que : $A : D(A) \to E$ est un opérateur fermé et que $D(B^\theta) \subseteq D(A)$, pour $\theta \in \left]0,1\right[$. S'il existe $\beta \in [0, \pi[$ tel que les spectres de B et de $A+B$ sont contenus dans le secteur

$$\Sigma_\beta = \{r \exp(i\phi) : r > 0, \ \ -\beta \leq \phi \leq \beta\}$$

et

$$\max\left\{\left\|(r\exp(i\phi) - B)^{-1}\right\|, \left\|(r\exp(i\phi) - A - B)^{-1}\right\|\right\} \leq C(\phi)(1+r)^{-1}$$

quand $\beta < \phi < 2\pi - \beta$. Alors, les puissances imaginaires de $A+B$ sont bornées et forment un groupe fortement continu avec

$$\left\|(A+B)^{-z}\right\| \leq \acute{M} \exp((\zeta + \max\{\delta, \beta\})\operatorname{Im}(z)), \quad \textit{pour } \zeta > 0 \textit{ arbitraire.}$$

Corollaire 1.2 *Si* $\zeta + \frac{1}{p} > 0$ *alors,* $\forall s \in \mathbb{R}$, A^{is} *est un opérateur borné dans*

$$L^{p,\zeta}(\mathbb{R}^+, E) := \left\{ f; \mathbb{R}^+ \to E : \int\limits_{\mathbb{R}^+} \left\| t^{\zeta} f(t) \right\|_E^p < \infty \right\},$$

De plus $s \to A^{is}$ *est un groupe fortement continu et*

$$\left\| A^{is} \right\| \leq C_{\zeta}(1 + s^2) \exp(\frac{\pi}{2} \left| s \right|).$$

Chapitre 2

Etude du problème dégénéré de type parabolique par la méthode de Labbas-Terreni

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons faire l'étude de l'équation

$$\left\{\begin{array}{l} D_t u(t,x) - D_x^2 u(t,x) + \lambda m(t,x) u(t,x) = f(t,x) \\ u\backslash_{\partial U - \Gamma_1} = 0 \end{array}\right. \tag{2.1}$$

dans le cas où $\varphi(t) = t^{\alpha}$ avec $\alpha > \frac{1}{2}$, $m(t) = t^{-2\alpha}$ et

$$p - 1 > \alpha, \quad \alpha \geq \frac{1}{2} \tag{2.2}$$

Le changement de variable :

$$(t,x) \rightarrow (t,y) = (t, \frac{x}{\varphi(t)})$$

transforme U en un rectangle $\Omega =]0,1[\times]0,1[$.
Donc, le problème 0.1 est transformé dans Ω en un problème d'évolution dégénéré :

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi^2(t) D_t w(t,y) - D_y^2 w(t,y) - \acute{\varphi}(t)\varphi(t) y D_y w(t,y) + \lambda M(t,y)\varphi^2(t) w(t,y) = \varphi^2(t) g(t,y) \\ w\backslash_{\partial\Omega - \Gamma_1} = 0 \end{array}\right. \tag{2.3}$$

Avec $\Gamma_1 = \{1\} \times]0,1[$ et $M(t,y) = m(t,x)$.
Posons $X = L^p(0,1)$ et $w(t) = w(t,.)$, alors le problème (2.3) est équivalent au problème de Cauchy dégénéré :

$$\left\{\begin{array}{l} t^{2\alpha} w'(t) + L(t) w(t) + \lambda w(t) = t^{2\alpha} g(t) \ ; t \in (0,1) \\ w(0) = 0 \end{array}\right. \tag{2.4}$$

Où la famille $(L(t))_{t\in[0,1]}$ est définie par :

$$\begin{cases} D(L(t)) = \{\psi \in W^{2,p}(0,1) : \psi(0) = \psi(1) = 0\} \\ ([L(t)]\,\psi)\,(y) = -\psi''(y) - \alpha t^{2\alpha-1} y\acute{\psi}(y) \ p.p.t \in (0,1)\,. \end{cases}$$

Avec

$$\overline{D(L(t))} = X. \tag{2.5}$$

On doit résoudre l'équation :

$$\begin{cases} t^{2\alpha} w'(t) + L(t)w(t) + \lambda w(t) = h(t) \ ; t \in (0,1) \\ w(0) = 0, \end{cases} \tag{2.6}$$

où $h(t) = t^{2\alpha} g(t)$ appartient à l'espace E_1 avec :

$$E_1 = \left\{ h \in L^p(0,1;X) : t^{-2\alpha+\frac{\alpha}{p}} h \in L^p(0,1;X) \right\}$$

muni de la norme :

$$\|h\|_{E_1} = \left\| t^{-2\alpha+\frac{\alpha}{p}} h \right\|_{L^p(0,1,X)}.$$

2.2 Formulation abstraite

L'équation (2.6) peut s'écrire sous la forme opérationnelle :

$$Bw + Aw + \lambda w = h,$$

où

$$\begin{cases} D(A) = \left\{ w \in E_1 : t^{-2\alpha+\frac{\alpha}{p}} w \in L^p(0,1;W^{2,p}(0,1) \cap W_0^{1,p}(0,1) \right\} \\ (Aw)(t) = L(t)w(t); \quad t \in (0,1) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} D(B) = \left\{ w \in E_1 : t^{\frac{\alpha}{p}} w' \in L^p(O,1;X) \text{ et } w(0) = 0 \right\} \\ (Bw)(t) = t^{2\alpha} w'(t); \quad t \in (0,1)\,. \end{cases}$$

Notons que la trace $w(0)$ est bien définie dans $D(B)$. En effet, on a :

$$t^{\frac{\alpha}{p}} w \in L^p(0,1;X); \quad t^{\frac{\alpha}{p}} w' \in L^p(0,1;X)$$

et

$$\frac{\alpha}{p} + \frac{1}{p} < 1$$

en virtue de (2.2). Alors, w est continue sur $[0,1]$ (voir [19], lemme page 42). Maintenant, on va montrer les hypothèses (LT1) et (LT2).

Remarque 2.1 $w(0)$ *est bien définie d'après le théorème de traces de Lions avec*

$$\frac{1}{p} - \frac{\alpha}{p} = 1 - \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{p} > 0$$

cette dernière relation est vraie si $p > 1 + \alpha$.

Proposition 2.1 *Les opérateurs A et B sont linéaires fermés à domaines denses dans E_1. De plus, A et B vérifient (LT1).*

Preuve.
Les propriétés de l'opérateur B sont basées sur la résolution de l'équation spectrale :

$$Bw + zw = h, \ \ z \in \mathbb{Z}$$

qui donne

$$\left\{ \begin{array}{l} t^{2\alpha} w'(t) + zw(t) = h(t) \\ w(0) = 0. \end{array} \right.$$

La solution de l'équation homogène est donnée par :

$$w(t) = k \exp\left(\frac{-z}{1-2\alpha} t^{-2\alpha+1} \right), \ \ k \in \mathbb{R}$$

Pour l'équation non homogème, on utilise la méthode de variation de la constante, on obtient

$$\begin{aligned} h(t) &= t^{2\alpha} k'(t) \exp\left(\frac{-z}{1-2\alpha} t^{-2\alpha+1} \right) - k(t) z \exp\left(\frac{-z}{1-2\alpha} t^{-2\alpha+1} \right) \\ &\quad + k(t) z \exp\left(\frac{-z}{1-2\alpha} t^{-2\alpha+1} \right). \end{aligned}$$

ce qui entraine que :

$$k'(t) = \frac{h(t)}{t^{2\alpha}} \exp\left(\frac{z}{(1-2\alpha)} t^{-2\alpha+1} \right).$$

donc

$$k(t) = \int_0^t \frac{h(\sigma)}{\sigma^{2\alpha}} \exp\left(\frac{z}{(1-2\alpha)} t^{-2\alpha+1} \right) d\sigma + c.$$

en utilisant les conditions initiales, on trouve :

$$\begin{aligned} w(t) &= ((B + zI)^{-1} h)(t) \\ &= \exp\left(\frac{z}{(2\alpha-1) t^{2\alpha-1}} \right) \int_0^t \sigma^{-2\alpha} h(\sigma) \exp\left(\frac{-z}{(2\alpha-1)\sigma^{2\alpha-1}} \right) d\sigma. \end{aligned}$$

Vérifions que cette formule est bien définie sur $[0,1]$ et que $w(0) = 0$. Posons $\mu = \dfrac{z}{(2\alpha-1)}$, alors

$$\begin{aligned}
\|w(t)\| &\leq \exp\left(\frac{\operatorname{Re}\mu}{t^{2\alpha-1}}\right)\int_0^t \left\|\sigma^{-2\alpha+\frac{\alpha}{p}}h(\sigma)\right\|\sigma^{-\frac{\alpha}{p}}\exp\left(\frac{-\operatorname{Re}\mu}{\sigma^{-2\alpha-1}}\right)d\sigma \\
&\leq \left(\int_0^t \left\|\sigma^{-2\alpha+\frac{\alpha}{p}}h(\sigma)\right\|^p d\sigma\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^t \sigma^{\frac{-\alpha q}{p}}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\frac{1}{1-\frac{\alpha q}{p}}\right)^{\frac{1}{q}} t^{\frac{1}{q}-\frac{\alpha}{p}}\|h\|_{E_1},
\end{aligned}$$

où $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$.

Donc, $w(t)$ est bien définie et $w(0)=0$ car $\dfrac{1}{q}-\dfrac{\alpha}{p}=1-\dfrac{1}{p}-\dfrac{\alpha}{p}>0$.

D'autre part, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
t^{-2\alpha+\frac{\alpha}{p}}((B+zI)^{-1}h)(t) &= t^{-2\alpha+\frac{\alpha}{p}}\omega(t) \\
&= \int_0^1 \sigma^{-2\alpha+\frac{\alpha}{p}}h(\sigma)K_\mu(t,\sigma)d\sigma.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Où

$$K_\mu(t,\sigma)=\begin{cases}\frac{1}{t^{2\alpha-\frac{\alpha}{p}}\sigma^{\frac{\alpha}{p}}}\exp\mu(t^{-2\alpha+1}-\sigma^{-2\alpha+1}) & \text{si } t>\sigma\\ 0 & \text{si } t<\sigma\end{cases} \tag{2.8}$$

Alors

$$\int_0^1 |K_\mu(t,\sigma)|\,d\sigma=\frac{1}{t^{2\alpha-\frac{\alpha}{p}}}\exp(\operatorname{Re}(\mu)t^{-2\alpha+1})\int_0^t \frac{\exp(-(\operatorname{Re}\mu)\sigma^{-2\alpha+1})}{\sigma^{\frac{-\alpha}{p}}}d\sigma$$

Posons $\sigma^{-2\alpha+1}=s$ alors $ds=(-2\alpha+1)\sigma^{-2\alpha}d\sigma$ et donc $d\sigma=\dfrac{ds}{(-2\alpha+1)\sigma^{-2\alpha}}$.

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |K_\mu(t,\sigma)|\,d\sigma &\leq \frac{1}{t^{2\alpha}}\exp(\operatorname{Re}(\mu)t^{-2\alpha+1})\int_{t^{-2\alpha+1}}^{+\infty}\exp(-s\operatorname{Re}\mu)\frac{ds}{(2\alpha-1)\sigma^{-2\alpha}} \\
&\leq \frac{1}{t^{2\alpha}t^{-2\alpha}}\exp(\operatorname{Re}(\mu)t^{-2\alpha+1})\int_{t^{-2\alpha+1}}^{+\infty}\exp(-s\operatorname{Re}\mu)\frac{ds}{2\alpha-1} \\
&\leq \frac{1}{2\alpha-1}\exp(\operatorname{Re}(\mu)t^{-2\alpha+1})\int_{t^{-2\alpha+1}}^{+\infty}\exp(-s\operatorname{Re}\mu)ds.
\end{aligned}$$

et
$$\int_{t^{-2\alpha+1}}^{+\infty} \exp(-s\operatorname{Re}\mu)ds = \left[\frac{-\exp(-\operatorname{Re}(\mu))s}{\operatorname{Re}\mu}\right]_{t^{-2\alpha+1}}^{+\infty} = \frac{1}{\operatorname{Re}\mu}\exp(-\operatorname{Re}(\mu)t^{-2\alpha+1}).$$
Ce qui entraine que :
$$\int_0^1 |K_\mu(t,\sigma)|\,d\sigma \leq \frac{1}{2\alpha-1}\frac{1}{\operatorname{Re}\mu} \leq \frac{1}{\operatorname{Re} z}$$
et
$$\max_{t\in[0,1]}\int_0^1 |K_\mu(t,\sigma)|\,d\sigma \leq \frac{1}{\operatorname{Re} z} \tag{2.9}$$
D'autre part,
$$\int_0^1 |K_\mu(t,\sigma)|\,dt = \frac{\exp(-\operatorname{Re}(\mu)\sigma^{-2\alpha+1}}{\sigma^{\frac{\alpha}{p}}}\int_\sigma^1 \frac{1}{t^{2\alpha-\frac{\alpha}{p}}}\exp(\operatorname{Re}(\mu)t^{-2\alpha+1})dt$$
Posons
$$t^{-2\alpha+1} = s \text{ alors } ds = (-2\alpha+1)t^{-2\alpha+1}dt \text{ et donc } dt = \frac{t^{2\alpha}}{(-2\alpha+1)}ds$$
On obtient :
$$\begin{aligned}
\int_0^1 |K_\mu(t,\sigma)|\,dt &= \frac{\exp(-\operatorname{Re}(\mu)\sigma^{-2\alpha+1})}{\sigma^{\frac{\alpha}{p}}}\int_{\sigma^{-2\alpha+1}}^1 \frac{1}{t^{2\alpha-\frac{\alpha}{p}}}\exp(s\operatorname{Re}\mu)\frac{t^{2\alpha}}{(2\alpha-1)}ds \\
&= \int_{\sigma^{-2\alpha+1}}^1 t^{\frac{\alpha}{p}}\exp(\operatorname{Re}(\mu)s)\frac{ds}{2\alpha-1}\frac{\exp(-\operatorname{Re}(\mu)\sigma^{-2\alpha+1})}{\sigma^{\frac{\alpha}{p}}} \\
&= \frac{1}{2\alpha-1}\frac{\exp(-\operatorname{Re}(\mu)\sigma^{-2\alpha+1})}{\sigma^{\frac{\alpha}{p}}}\int_1^{\sigma^{-2\alpha+1}} \frac{1}{s^{\frac{\alpha}{p(2\alpha-1)}}}\exp(s\operatorname{Re}\mu)ds,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\int_1^{\sigma^{-2\alpha+1}} \frac{1}{s^{\frac{\alpha}{p(2\alpha-1)}}}\exp(s\operatorname{Re}\mu)ds &= \int_1^{\frac{1+\sigma^{-2\alpha+1}}{2}} \frac{1}{s^{\frac{\alpha}{p(2\alpha-1)}}}\exp(s\operatorname{Re}\mu)ds \\
&\quad + \int_{\frac{1+\sigma^{-2\alpha+1}}{2}}^{\sigma^{-2\alpha+1}} \frac{1}{s^{\frac{\alpha}{p(2\alpha-1)}}}\exp(s\operatorname{Re}\mu)ds \\
&\leq \int_1^{\frac{1+\sigma^{-2\alpha+1}}{2}} \exp(s\operatorname{Re}\mu)ds \\
&\quad + \frac{1}{\left(\frac{1+\sigma^{-2\alpha+1}}{2}\right)^{\frac{\alpha}{p(2\alpha-1)}}} \int_{\frac{1+\sigma^{-2\alpha+1}}{2}}^{\sigma^{-2\alpha+1}} \exp(s\operatorname{Re}\mu)ds \\
&\leq I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

Alors, on a :

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq \frac{1}{\operatorname{Re}\mu}\left[\exp(\operatorname{Re}\mu\left(\frac{1+\sigma^{-2\alpha+1}}{2}\right) - \operatorname{Re}\mu)\right] \\
&\leq \frac{1}{\operatorname{Re}\mu}\exp(\operatorname{Re}\mu\left(\frac{1+\sigma^{-2\alpha+1}}{2}\right).
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\alpha-1}\frac{\exp(-\operatorname{Re}(\mu)\sigma^{-2\alpha+1})}{\sigma^{\frac{\alpha}{p}}}I_1 &\leq \frac{1}{2\alpha-1}\frac{1}{\operatorname{Re}\mu}\frac{\exp(-\operatorname{Re}(\mu)\sigma^{-2\alpha+1})}{\sigma^{\frac{\alpha}{p}}}\exp\left(\operatorname{Re}\mu\left(\frac{1+\sigma^{-2\alpha+1}}{2}\right)\right) \\
&\leq \frac{1}{\operatorname{Re} z}\exp\left(\operatorname{Re}\mu\left(\frac{-\sigma^{-2\alpha+1}}{2}+\frac{1}{2}\right)\right) \\
&\leq \frac{1}{\operatorname{Re} z}\frac{\exp(-\operatorname{Re}(\mu)(\sigma^{-2\alpha+1}+1)\backslash 2)}{\sigma^{\frac{\alpha}{p}}} \\
&\leq \frac{1}{\operatorname{Re} z}\frac{(\exp-\mu_0(\sigma^{-2\alpha+1}-1)\backslash 2)}{\sigma^{\frac{\alpha}{p}}} \\
&\leq \frac{C_1(\alpha,p)}{\operatorname{Re} z}.
\end{aligned}$$

Car la fonction $\sigma \to \dfrac{\exp(-\mu_0(\sigma^{-2\alpha+1}+1)\backslash 2)}{\sigma^{\frac{\alpha}{p}}}$ est continue sur $[0,1]$.

De plus,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\alpha-1}\frac{\exp(-\operatorname{Re}(\mu)\sigma^{-2\alpha+1})}{\sigma^{\frac{\alpha}{p}}}I_2 &\leq \frac{1}{2\alpha-1}\frac{\exp(-\operatorname{Re}(\mu)\sigma^{-2\alpha+1})}{\sigma^{\frac{\alpha}{p}}\left(\frac{1+\sigma^{-2\alpha+1}}{2}\right)^{\frac{\alpha}{p(2\alpha-1)}}}\int_{\frac{1+\sigma^{-2\alpha+1}}{2}}^{\sigma^{-2\alpha+1}}\exp(s\operatorname{Re}\mu)ds \\
&\leq \frac{1}{2\alpha-1}\frac{\exp(-\operatorname{Re}(\mu)\sigma^{-2\alpha+1})}{\sigma^{\frac{\alpha}{p}}\left(\frac{1+\sigma^{-2\alpha+1}}{2}\right)^{\frac{\alpha}{p(2\alpha-1)}}}\frac{-1}{\operatorname{Re}\mu}\exp\operatorname{Re}\mu\left(\frac{1+\sigma^{-2\alpha+1)}}{2}\right) \\
&\leq \frac{1}{\operatorname{Re}z}\frac{\exp(-\operatorname{Re}\mu(\sigma^{-2\alpha+1}-1)\backslash 2)}{\sigma^{\frac{\alpha}{p}}\left(\frac{1+\sigma^{-2\alpha+1}}{2}\right)^{\frac{\alpha}{p(2\alpha-1)}}} \\
&\leq \frac{1}{\operatorname{Re}z}\frac{\exp(-\mu_0(\sigma^{-2\alpha+1}-1)\backslash 2)}{\sigma^{\frac{\alpha}{p}}\left(\frac{1+\sigma^{-2\alpha+1}}{2}\right)^{\frac{\alpha}{p(2\alpha-1)}}} \\
&\leq \frac{C_2(\alpha,p)}{\operatorname{Re}z\,\sigma^{\frac{\alpha}{p}}\left(\frac{1+\sigma^{-2\alpha+1}}{2}\right)^{\frac{\alpha}{p(2\alpha-1)}}} \\
&\leq \frac{C_3(\alpha,p)}{\operatorname{Re}z}
\end{aligned}$$

En virtue que $\lim\limits_{\sigma\to 0}\dfrac{1}{\sigma^{\frac{\alpha}{p}}\left(\dfrac{1+\sigma^{-2\alpha+1}}{2}\right)^{\dfrac{\alpha}{p(2\alpha-1)}}} = 1$

Par conséquent, $\exists C(\alpha,p)>0$ tel que :

$$\max\int_0^1 |K_\mu(t,\sigma)|\,dt \leq \frac{C(\alpha,p)}{\operatorname{Re}z}\left\|t^{-2\alpha+\frac{\alpha}{p}}h\right\|_{L^p(0,1;X)} \tag{2.10}$$

On applique le lemme de Schur en utilisant (2.9) et (2.10), on obtient :

$$\left\|t^{-2\alpha+\frac{\alpha}{p}}w\right\|_{L^p(0,1;X)} \leq \frac{C(\alpha,p)}{\operatorname{Re}z}\left\|t^{-2\alpha+\frac{\alpha}{p}}h\right\|_{L^p(0,1;X)}$$

D'où

$$\left\|(B+zI)^{-1}\right\|_{L(E_1)} \leq \frac{C(\alpha,p)}{\operatorname{Re}z}$$

On peut prendre $\epsilon_B = \dfrac{\pi}{2} - \epsilon_0$ (pour tout $\epsilon_0 \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$).

L'étude des propriétés spectrales de l'opérateur A est basée sur celles de l'opérateur $L(t)$ qui est sa réalisation.

Pout tout t, on écrit l'opérateur L sous forme d'une somme de deux opérateurs :

$$(L(t)\psi) = L_0\psi + P(t)\psi$$

Avec

$$\begin{cases} D(L_0) = \{\psi \in W^{2,p}(0,1) : \psi(0) = \psi(1) = 0\} \\ L_0\psi = -\psi'' \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} D(P(t)) = W^{1,p}(0,1) \\ P(t)\psi = -\alpha t^{2\alpha-1} y\psi' = -b(t)y\psi' \end{cases}$$

Pour montrer que L_0 est sectoriel, il suffit de calculer sa résolvante :

$$\begin{cases} -\psi''(t) - z\psi(t) = f(t) \\ \psi(0) = \psi(1) = 0. \end{cases} \tag{2.11}$$

Il est connu que la solution de l'équation homogène est de la forme :

$$\psi(t) = C_1 e^{\sqrt{-z}t} + C_2 e^{-\sqrt{-z}t}$$

On choisit la détermination analytique de la racine carrée de $-z$ de telle sorte que :

$$\operatorname{Re}\sqrt{-z} > 0$$

En appliquant la méthode des variations constantes pour l'équation non homogène, posons

$$\psi(t) = C_1(t) e^{\sqrt{-z}t} + C_2(t) e^{-\sqrt{-z}t}$$

Où C_1et C_2 sont deux fonctions vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} C_1'(t) e^{\sqrt{-z}t} + C_2'(t) e^{-\sqrt{-z}t} = 0 \\ \sqrt{-z}C_1'(t) e^{\sqrt{-z}t} - \sqrt{-z}C_2'(t) e^{-\sqrt{-z}t} = f(t) \end{cases} \tag{2.12}$$

Après la résolution du système (2.12) et des simplifications, on trouve :

$$(L_0 - z)^{-1} f = -\int_0^1 K_{\sqrt{-z}}(t,s) f(s) ds$$

Où

$$K_{\sqrt{-z}}(t,s) = \begin{cases} \frac{\sinh\sqrt{-z}(1-t)\sinh s\sqrt{-z}}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}} & \text{si } 0 \le s \le t \\ \\ \frac{\sinh\sqrt{-z}(1-s)\sinh t\sqrt{-z}}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}} & \text{si } t \le s \le 1 \end{cases}$$

Pour $\operatorname{Re}\sqrt{-z} > 0$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left|K_{\sqrt{-z}}(t,s)\right| ds &\le \frac{\cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}(1-t)\int_0^s \cosh(t\operatorname{Re}\sqrt{-z})dt}{|z|^{\frac{1}{2}}\left|\sinh\sqrt{-z}\right|} \\ &\quad + \frac{\cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}(1-s)\int_s^1 \cosh(t\operatorname{Re}\sqrt{-z})dt}{|z|^{\frac{1}{2}}\left|\sinh\sqrt{-z}\right|} \\ &\le \frac{\cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}(1-t)\sinh \operatorname{Re}\sqrt{-z}s + \cosh\operatorname{Re}\sqrt{-z}t\sinh\operatorname{Re}\sqrt{-z}(1-t)}{|z|^{\frac{1}{2}}\operatorname{Re}\sqrt{-z}\left|\sinh\sqrt{-z}\right|} \\ &\le \frac{\sinh\operatorname{Re}\sqrt{-z}}{|z|^{\frac{1}{2}}\operatorname{Re}\sqrt{-z}\left|\sinh\sqrt{-z}\right|} \le \frac{C}{|z|}. \end{aligned}$$

car

$$\left|\sinh\sqrt{-z}\right| = \frac{e^{\mathrm{Re}\sqrt{-z}}}{2}\left|1-e^{-2\sqrt{-z}}\right| \geq C.\frac{e^{\mathrm{Re}\sqrt{-z}}}{2}.$$

Ainsi l'opérateur L est sectoriel et son inverse est donné par :

$$L_0^{-1}f = t\int_0^1 (1-s)f(s)d + \int_0^t (s-t)f(s)ds.$$

Or, grâce à l'inégalité de Hölder, pour $\psi \in D(L_0) \subset D(P(t))$, on a :

$$\begin{aligned}
\|P(t)\psi\|_{L^p(0,1)} &= (\int_0^1 |-b(t)y\psi'(y)|^p\, dy)^{\frac{1}{p}} \\
&= \int_0^1 \left|-b(t)y(\int_0^y s\psi''(s)ds + \int_y^1 (1-s)\psi''(s)ds)\right|^p dy)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_0^1 \left|-b(t)y\int_0^y s\psi''(s)ds\right| dy\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^1 \left|-b(t)y\int_y^1 (1-s)\psi''(s)ds\right|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq b(t)(C_1(p)\left\|\psi''\right\|_{L^p} + C_2(p)\left\|\psi''\right\|_{L^p}) \\
&\leq C(p)\left\|\psi\right\|_{D(L_0)},
\end{aligned}$$

car :

$$\|\psi\|_{D(L_0)} = \|\psi\|_{L^p} + \|L_0\psi\|_{L^p} = \|\psi\|_{L^p} + \|\psi''\|_{L^p}.$$

Ce qui donne :

$$\|\psi''\|_{L^p} \leq \|\psi\|_{D(L_0)}$$

D'autre part, on introduit les opérateurs suivants :

$$\begin{array}{llll}
m(t): & L^p(0,1) & \rightarrow & L^p(0,1) \\
 & \psi & \rightarrow & [m(t)\psi(y)] = -b(t)y\psi(y) \\
 & & & \\
i: & W^{1,p}(0,1) & \rightarrow & L^p(0,1) \\
 & \psi & \rightarrow & \psi \\
 & & & \\
d: & W^{2,p}(0,1) & \rightarrow & W^{1,p}(0,1) \\
 & \psi & \rightarrow & d(\psi) = \psi'
\end{array}$$

Alors, $P(t)$ est compact de $D(L_0)$ dans E_1 car i est compact et $d, m(t)$ sont continues. Donc, pour tout $t \in [0,1]$, l'opérateur $L(t) = L_0 + P(t)$ est sectoriel d'après Lunardi [15] proposition 2.4.3 ; page 65.
Par conséquent ; $\exists r > 0$ tel que

$$\rho(-L(t)) \supset \sum\nolimits_{\pi-\epsilon_1} = \{z : |z| \geq r; |\arg z| < \pi - \epsilon_1\}$$

où $\epsilon_1 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, pour $h \in E_1$ et $z \in \sum_{\pi-\epsilon_1}$, l'équation spectrale :

$$Aw + zw = h$$

devient :

$$L(t)w(t) + zw(t) = h(t)$$

qui admet une unique solution donnée par :

$$w(t) = (L(t) + z)^{-1}h(t)$$

et vérifie

$$\|w\|_{L^p(0,1)} \leq \frac{K}{|z|} \|h\|_{L^p(0,1)}$$

et

$$\|w\|_{E_1} = \left(\int_0^1 \left\| t^{-2\alpha+\frac{\alpha}{p}} w(t) \right\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{K}{|z|} \|h(t)\|_{E_1}$$

Finalement, les opérateurs A et B vérifient (LT1).
Dans un premier temps, on va montrer que l'opérateur $L(t)$ vérifie l'estimation donnée dans le lemme suivant qui va être utile pour montrer l'hypothèse (LT2).

Lemme 2.1 *l'opérateur $L(t)$ vérifie*

$$\left\| \left[L(t)L(\sigma)^{-1} - I \right] \right\|_{L(E_1)} \leq M \left| t - \sigma \right|^{\rho}$$

Preuve. *Soit $g \in X = L^p(0,1)$, l'équation $\psi = L(\sigma)^{-1} g$ est équivalente à*

$$\begin{cases} ([L(\sigma)]\psi)(y) = -D_y^2\psi(y) - \varphi(\sigma)\varphi'(\sigma)yD_y\psi(y) = g(y) \\ \psi(0) = \psi(1) = 0 \end{cases}$$

car

$$\left(L(t)L(\sigma)^{-1} - I\right) = (L(t) - L(\sigma))L(\sigma)^{-1}$$

donc

$$\begin{aligned} \left[(L(t) - L(\sigma))L(\sigma)^{-1}g\right](y) &= \left[(L(t) - L(\sigma))(\psi)\right](y) \\ &= \left[L(t)\psi\right](y) - \left[L(\sigma)\psi\right](y) \\ &= -\psi''(y) - \alpha t^{2\alpha-1}y\psi'(y) + \psi''(y) + \alpha\sigma^{2\alpha-1}y\psi'(y) \\ &= \left[\alpha\sigma^{2\alpha-1} - \alpha t^{2\alpha-1}\right] y\psi'(y). \end{aligned}$$

On a $\varphi(t) = t^{\alpha}$ alors $\varphi'(t) = \alpha t^{\alpha-1}$, ce qui donne

$$\left[(L(t) - L(\sigma))(\psi)\right](y) = \left[\varphi(\sigma)\varphi'(\sigma) - \varphi(t)\varphi'(t)\right] y\psi'(y)$$

D'où

$$\begin{aligned}
\left\| \left[(L(t) - L(\sigma))L(\sigma)^{-1} g \right](y) \right\|_X &\leq \alpha \left| \sigma^{2\alpha-1} - t^{2\alpha-1} \right| \| y\psi'(y) \|_X \\
&\leq M_1 \left| t - \sigma \right|^{\min(1,2\alpha-1)} \| \psi'' \|_X \\
&\leq M_1 \left| t - \sigma \right|^{\min(1,2\alpha-1)} \| \psi \|_{W^{2,p}(0,1)} .
\end{aligned} \tag{2.13}$$

La constante dans le lemme $\rho = \min(1, 2\alpha - 1)$. d'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\|\psi\|_{W^{2,p}(0,1)} &= \|\psi\|_{L^p(0,1)} + \|\psi'\|_{L^p(0,1)} + \|\psi''\|_{L^p(0,1)} \\
&\leq K \|L(\sigma)\psi\|_{L^p(0,1)} \\
&\leq K \|g\|_{L^p(0,1)} .
\end{aligned} \tag{2.14}$$

d'après (2.13) et (2.14), la preuve du lemme est achevée.

Proposition 2.2 *Les opérateurs A et B vérifient l'hypothèse (LT2).*

Preuve. Pour montrer l'hypothèse (LT2), il suffit d'estimer :

$$\left\| A(A + \lambda I)^{-1} \left[A^{-1}; (B + zI)^{-1} \right] \right\|_{L(E_1)}$$

Où $\lambda \in \rho(A); z \in \rho(-B)$. Soit $h \in E_1$, alors :

$$\begin{aligned}
\Delta &= (t^{-2\alpha+\frac{\alpha}{p}} A(A + \lambda I)^{-1} \left[A^{-1}; (B + zI)^{-1} \right])(h)(t) \\
&= t^{-2\alpha+\frac{\alpha}{p}} ((A + \lambda I)^{-1} (A^{-1}(B + zI)^{-1} - (B + zI)^{-1} A^{-1})h)(t) \\
&= t^{-2\alpha+\frac{\alpha}{p}} L(t)(L(t) + \lambda I)^{-1} \left[(L(t)^{-1}(B + zI)^{-1}h)(t) - (B + zI)^{-1} A^{-1}h)(t) \right] .
\end{aligned}$$

On a : $\mu = \dfrac{z}{2\alpha - 1}$ et en utilisant (2.7) et (2.8), on obtient

$$\begin{aligned}
\Delta &= L(t)(L(t) + \lambda I)^{-1} L(t)^{-1} \int_0^1 \sigma^{-2\alpha+\frac{\alpha}{p}} K_\mu(t, \sigma)h(\sigma)d\sigma \\
&\quad - L(t)(L(t) + \lambda I)^{-1} \int_0^1 \sigma^{-2\alpha+\frac{\alpha}{p}} K_\mu(t, \sigma)L(\sigma)^{-1}h(\sigma)d\sigma \\
&= L(t)(L(t) + \lambda I)^{-1} \int_0^1 \sigma^{-2\alpha+\frac{\alpha}{p}} K_\mu(t, \sigma) \left[L(t)^{-1} - L(\sigma)^{-1} \right] h(\sigma)d\sigma.
\end{aligned}$$

Puisque $L(t)^{-1}$ et $L(t)(L(t) + \lambda I)^{-1}$ sont bornés, alors :

$$\Delta = \int_0^1 \sigma^{-2\alpha+\frac{\alpha}{p}} K_\mu(t, \sigma)L(t)(L(t) + \lambda I)^{-1} \left[L(t)^{-1} - L(\sigma)^{-1} \right] h(\sigma)d\sigma$$

$L(t)(L(t)+\lambda I)^{-1}\xi = (L(t)+\lambda)^{-1}L(t)\xi$ si $\xi \in D(L(t)) = D(L(0)) = D(L(\sigma))$ car $L(t)$ est à domaine constant. D'après la remarque précédente, on peut prendre $\xi = L(t)^{-1}h(\sigma)$ ou $\xi = L(\sigma)^{-1}h(\sigma)$ et dans les deux cas $\xi \in D(L(t))$. Ce qui entraine que :

$$\Delta = \int_0^1 \sigma^{-2\alpha+\frac{\alpha}{p}} K_\mu(t,\sigma)(L(t)+\lambda I)^{-1}(I - L(t)L(\sigma))^{-1}h(\sigma)d\sigma.$$

D'après le lemme (2.1), on a :

$$\|\Delta\|_X = \frac{K}{|\lambda|}\int_0^1 |K_\mu(t,\sigma)|\,|t-\sigma|^\rho\,\sigma^{-2\alpha+\frac{\alpha}{p}}\,\|h(\sigma)\|_X\,d\sigma$$

avec $\rho = \min(1, 2\alpha - 1)$.

Maintenant, on utilise l'inégalité de Hölder pour estimer : $\displaystyle\int_0^1 K_\mu(t,\sigma)\,|t-\sigma|^\rho\,d\sigma$

Rappelons que :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 K_\mu(t,\sigma)\,|t-\sigma|^\rho\,d\sigma &= \frac{1}{t^{-2\alpha+\frac{\alpha}{p}}}\exp(\mathrm{Re}(\mu)t^{-2\alpha+\frac{\alpha}{p}})\int_0^1 \sigma^{\frac{-\alpha}{p}}(t-\sigma)^\rho\exp(-\mathrm{Re}(\mu)\sigma^{-2\alpha+\frac{\alpha}{P}}) \\
&= \frac{1}{t^{-2\alpha+\frac{\alpha}{p}}}\exp(\mathrm{Re}(\mu)t^{-2\alpha+\frac{\alpha}{p}}) \times I.
\end{aligned}$$

Calculons I, posons :

$$f^{p'}(\sigma) = \sigma^{\frac{-\alpha}{p}}(t-\sigma)^\rho\exp(-\mathrm{Re}(\mu)\sigma^{-2\alpha+\frac{\alpha}{P}}) \text{ avec } p' = \frac{1}{1-\rho} \text{ Alors}$$

$$f = (f^{p'}(\sigma))^{1-\rho} = (\sigma^{\frac{-\alpha}{p}}(t-\sigma)^\rho\exp(-\mathrm{Re}(\mu)\sigma^{-2\alpha+\frac{\alpha}{P}}))^{1-\rho}$$

et

$$g^q = \sigma^{\frac{-\alpha}{p}}(t-\sigma)^\rho\exp(-\mathrm{Re}(\mu)\sigma^{-2\alpha+\frac{\alpha}{P}}) \text{ avec } q = \frac{1}{\rho} \text{ Alors}$$

$$g = (g^q)^\rho = (\sigma^{\frac{-\alpha}{p}}(t-\sigma)\exp(-\mathrm{Re}(\mu)\sigma^{-2\alpha+\frac{\alpha}{P}}))^\rho$$

donc

$$f.g = \sigma^{\frac{-\alpha}{p}}(t-\sigma)^\rho\exp(-\mathrm{Re}(\mu)\sigma^{-2\alpha+\frac{\alpha}{P}})$$

En appliquant l'inégalité de Hölder, on obtient :

$$\begin{aligned} I &\leq (\int_0^t f^{p'}(\sigma)d\sigma)^{1-\rho}(\int_0^t g^q(\sigma)d\sigma)^\rho \\ &\leq (\int_0^t \sigma^{\frac{-\alpha}{p}}(t-\sigma)^\rho \exp(-\operatorname{Re}(\mu)\sigma^{-2\alpha+\frac{\alpha}{P}})d\sigma)^{1-\rho} \\ &\quad \times(\int_0^t \sigma^{\frac{-\alpha}{p}}(t-\sigma)\exp(-\operatorname{Re}(\mu)\sigma^{-2\alpha+\frac{\alpha}{P}})d\sigma)^\rho \\ &\leq J_1 \times J_2. \end{aligned}$$

Pour J_1, on pose :
$u = -\operatorname{Re}(\mu)\sigma^{-2\alpha+1}$ donc $u' = \frac{du}{d\sigma} = -\operatorname{Re}(\mu)(-2\alpha+1)\sigma^{-2\alpha}$,
et $u'e^u = -\operatorname{Re}(\mu)(-2\alpha+1)\sigma^{-2\alpha}\exp(-\operatorname{Re}(\mu)\sigma^{-2\alpha+1})$.
On a alors : $\int_0^t u'e^u = [e^u]_0^t$ et $e^u(0) = 0$ car $\alpha > \frac{1}{2}$ alors $2\alpha - 1 > 0$ et donc $1 - 2\alpha < 0$ et

$$\exp(-\operatorname{Re}(\mu)t^{-2\alpha+1}) = -\operatorname{Re}\mu(-2\alpha+1)\sigma^{-2\alpha}\exp(-\operatorname{Re}(\mu)\sigma^{-2\alpha+1})$$

Alors :

$$\sigma^{-2\alpha}\exp(-\operatorname{Re}(\mu)\sigma^{-2\alpha+1}) = \frac{\exp(-\operatorname{Re}(\mu)t^{-2\alpha+1})}{\operatorname{Re}\mu(2\alpha-1)}$$

Doù

$$J_1 \leq t^{-2\alpha+\frac{\alpha}{P}}\frac{1}{(\operatorname{Re}\mu)^{1-\rho}(2\alpha-1)^{1-\rho}}(\exp(-\operatorname{Re}(\mu)t^{-2\alpha+1}))^{1-\rho}$$

Et pour J_2, on a

$$\begin{aligned} J_2 &= (\int_0^t \sigma^{\frac{-\alpha}{p}}(t-\sigma)^\rho \exp(-\operatorname{Re}(\mu)\sigma^{-2\alpha+\frac{\alpha}{P}})d\sigma)^\rho \\ &= (\int_0^t \sigma^{2\alpha-\frac{\alpha}{p}}(t-\sigma)\sigma^{-2\alpha}\exp(-\operatorname{Re}(\mu)\sigma^{-2\alpha+\frac{\alpha}{P}})d\sigma)^\rho. \end{aligned}$$

Posons :

$$\varkappa(\sigma) = \exp(-\operatorname{Re}(\mu)\sigma^{-2\alpha+1})$$
$$\varkappa'(\sigma) = -\operatorname{Re}\mu(-2\alpha+1)\sigma^{-2\alpha}\exp(-\operatorname{Re}(\mu)\sigma^{-2\alpha+1})$$

Alors

$$\sigma^{-2\alpha}\exp(-\operatorname{Re}(\mu)\sigma^{-2\alpha+1}) = \frac{-1}{\operatorname{Re}\mu(-2\alpha+1)}\varkappa'(\sigma)$$

On obtient

$$
\begin{aligned}
J_2 &= \left(\int_0^t \sigma^{\frac{-\alpha}{p}}(t-\sigma)\exp(-\operatorname{Re}(\mu)\sigma^{-2\alpha+\frac{\alpha}{P}})d\sigma\right)^\rho \\
&= \left(\int_0^t \sigma^{2\alpha-\frac{\alpha}{p}}(t-\sigma)\sigma^{-2\alpha}\exp(-\operatorname{Re}(\mu)\sigma^{-2\alpha+\frac{\alpha}{P}})d\sigma\right)^\rho \\
&= \left(\int_0^t \sigma^{2\alpha-\frac{\alpha}{p}}(t-\sigma)\frac{-1}{\operatorname{Re}\mu(-2\alpha+1)}\varkappa'(\sigma)d\sigma\right)^\rho \\
&\leq \left(\frac{t^{2\alpha-\frac{\alpha}{p}}}{\operatorname{Re}\mu(2\alpha-1)}\right)^\rho\left(\int_0^t (t-\sigma)\varkappa'(\sigma)d\sigma\right)^\rho.
\end{aligned}
$$

De plus,

$$
\begin{aligned}
\int_0^t (t-\sigma)\varkappa'(\sigma)d\sigma &= [(t-\sigma)\varkappa(\sigma)]_0^t - \int_0^t \varkappa(\sigma)d\sigma \\
&= \int_0^t \exp(-\operatorname{Re}(\mu)\sigma^{-2\alpha+1})d\sigma \\
&= \int_0^t \sigma^{2\alpha}\sigma^{-2\alpha}\exp(-\operatorname{Re}(\mu)\sigma^{-2\alpha+1})d\sigma \\
&\leq \frac{t^{2\alpha}}{(2\alpha-1)}\frac{1}{\operatorname{Re}\mu}\exp(-\operatorname{Re}(\mu)\sigma^{-2\alpha+1})d\sigma.
\end{aligned}
$$

On déduit :

$$
\begin{aligned}
J_2 &= \left(\int_0^t \sigma^{\frac{-\alpha}{p}}(t-\sigma)\exp(-\operatorname{Re}(\mu)\sigma^{-2\alpha+\frac{\alpha}{P}})d\sigma\right)^\rho \\
&= \left(\int_0^t \sigma^{2\alpha-\frac{\alpha}{p}}(t-\sigma)\sigma^{-2\alpha}\exp(-\operatorname{Re}(\mu)\sigma^{-2\alpha+\frac{\alpha}{P}})d\sigma\right)^\rho \\
&= \left(\int_0^t \sigma^{2\alpha-\frac{\alpha}{p}}(t-\sigma)\frac{-1}{\operatorname{Re}\mu(-2\alpha+1)}\varkappa'(\sigma)d\sigma\right)^\rho \\
&\leq \left(\frac{t^{2\alpha-\frac{\alpha}{p}}}{\operatorname{Re}\mu(2\alpha-1)}\right)^\rho\left(\int_0^t (t-\sigma)\varkappa'(\sigma)d\sigma\right)^\rho.
\end{aligned}
$$

Donc

$$J_2 \leq \left(\frac{t^{2\alpha-\frac{\alpha}{p}}}{(2\alpha-1)}\right)^{\rho} \frac{1}{(\operatorname{Re}\mu)^{\rho}} \left(\frac{t^{2\alpha}}{(2\alpha-1)}\right)^{\rho} \frac{1}{(\operatorname{Re}\mu)^{\rho}} \left(\exp(-\operatorname{Re}(\mu)\sigma^{-2\alpha+1})\right)^{\rho}$$

Finalement, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 K_\mu(t,\sigma)\,|t-\sigma|^{\rho}\,d\sigma &\leq \frac{\exp(-\operatorname{Re}(\mu)\sigma^{-2\alpha+1})}{t^{-2\alpha+\frac{\alpha}{p}}} \left(\frac{t^{-2\alpha+\frac{\alpha}{p}}}{2\alpha-1}\right)^{1-\rho} \left(\frac{\exp(-\operatorname{Re}(\mu)t^{-2\alpha+1})}{\operatorname{Re}\mu}\right)^{1-\rho} \\
&\quad \times \left(\frac{t^{-2\alpha+\frac{\alpha}{p}}}{2\alpha-1}\right)^{\rho} \frac{1}{(\operatorname{Re}\mu)^{\rho}} \left(\frac{t^{2\alpha}}{(2\alpha-1)}\right)^{\rho} \left(\frac{\exp(-\operatorname{Re}(\mu)t^{-2\alpha+1})}{\operatorname{Re}\mu}\right)^{\rho} \\
&\leq \frac{(t^{2\alpha})^{\rho}}{(2\alpha-1)^{1-\rho}} \frac{1}{(\operatorname{Re}\mu)^{1+\rho}}.
\end{aligned}$$

et

$$\max_{t\in[0,1]} \int_0^1 K_\mu(t,\sigma)\,|t-\sigma|^{\rho}\,d\sigma \leq \frac{C}{(\operatorname{Re}\mu)^{1+\rho}} \tag{2.15}$$

De même manière, on montre que

$$\max_{\sigma\in[0,1]} \int_0^1 K_\mu(t,\sigma)\,|t-\sigma|^{\rho}\,dt \leq \frac{C}{(\operatorname{Re}\mu)^{1+\rho}}. \tag{2.16}$$

On applique le lemme de Schur en utilisant (2.15) et (2.16), on conclue

$$\left\|A(A+\lambda I)^{-1}\left[A^{-1};(B+zI)^{-1}\right]\right\|_{L(E_1)} \leq \frac{C}{|\lambda|\,(\operatorname{Re}\mu)^{1+\rho}} = \frac{C}{|\lambda|\,(\operatorname{Re}z)^{1+\rho}}$$

Ce qui implique :

$$\left\|A(A+\lambda I)^{-1}\left[A^{-1};(B+zI)^{-1}\right]\right\|_{L(E_1)} \leq \frac{C}{|\lambda|^{1+\rho}\,|z|^{1+\rho}}, \text{ pour tout } \lambda\in\rho(-A) \text{ et tout } \mu\in\rho(-B)$$

Alors, (LT2) est vérifiée pour $\tau = 0$ et $\rho = \min(1, 2\alpha-1)$.

Proposition 2.3 *$\exists\lambda^*$ tel que pour tout $\lambda \geq \lambda^*$ et $h \in D_A(\sigma,p)$, le problème (2.6) admet une unique solution $w \in D(A)\cap D(B)$ tel que pour tout $\theta \leq \frac{1}{2p}$, on a :*

i) $L(.)w \in D_A(\theta,p)$.

ii) $\varphi(t)w' \in D_A(\theta,p)$.

iii) $L(.)w \in D_B(\theta,p)$.

Remarque 2.2 *On a les mêmes résultats lorsque $h \in D_B(\theta,p)$.*

Pour préciser la régularité de w, on doit spécifier l'espace $D_A(\sigma,p)$, d'où le lemme suivant :

Lemme 2.2

$$D_A(\sigma,p)=\begin{cases}\left\{w\in E_1 : t^{-2\alpha+\frac{\alpha}{P}}w\in L^P(0,1;W^{2\sigma,p}(0,1)); w(t,0)=w(t,1)=0\right\} & si\ 2\sigma>\frac{1}{p}\\ \left\{w\in E : t^{-2\alpha+\frac{\alpha}{P}}w\in L^P(0,1;W^{2\sigma,p}(0,1))\right\} & si\ 2\sigma<\frac{1}{p}.\end{cases}$$

De plus, on sait que

$$D_A(\sigma,p)=\left\{w\in E_1 : \left\|\zeta^{1-\sigma}Ae^{-\zeta A}w\right\|_{E_1}\in L^p_*\right\}$$

si $(-A)$ est générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique $\left\{e^{-\zeta A}\right\};\zeta\geq 0$.
On a :

$$\begin{aligned} w \quad \in \quad & D_A(\sigma,p)\Longrightarrow \left\|\zeta^{1-\sigma}Ae^{-\zeta A}w\right\|_{E_1}\in L^p_*\\ &\Longrightarrow \int_0^\infty \left\|\zeta^{1-\sigma}Ae^{-\zeta A}w\right\|_{E_1}\frac{d\zeta}{\zeta}<\infty\\ &\Longrightarrow \int_0^\infty \left\|t^{-2\alpha+\frac{\alpha}{p}}\zeta^{1-\sigma}Ae^{-\zeta A}w\right\|^p_{L^p(0,1;L^p(0,1))}\frac{d\zeta}{\zeta}<\infty\\ &\Longrightarrow \int_0^\infty\left(\int_0^1 \left\|t^{-2\alpha+\frac{\alpha}{p}}\zeta^{1-\sigma}(Ae^{-\zeta A}w)(t)\right\|^p_{L^p(0,1;L^p(0,1))}dt\right)\frac{d\zeta}{\zeta}<\infty\end{aligned}$$

Comme :

$$(Ae^{-\zeta A}w)(t)=L(t)e^{-\zeta L(t)}(w(t))$$

et d'après le théorème de Fubini, on obtient :

$$w\in D_A(\sigma,p)\Longrightarrow \int_0^1\left\|t^{-2\alpha+\frac{\alpha}{p}}\right\|^p\left(\int_0^\infty \left\|\zeta^{1-\sigma}L(t)e^{-\zeta L(t)}w(t)\right\|_{L^p(0,1)}\frac{d\zeta}{\zeta}\right)dt<\infty$$

Ce qui entraine que

$$y\to t^{-2\alpha+\frac{\alpha}{p}}w(t)(y)\in D_{L(t)}(\sigma,p),\quad p.p.t.$$

D'autre part, il est connu que l'espace d'interpolation $D_{L(t)}(\sigma,p)$ est constant et défini comme suit :

$$\begin{aligned} D_{L(t)}(\sigma,p) &= D_{L(0)}(\sigma,p)=\left(W^{2,p}(0,1)\cap W^{2,p}_0(0,1);L^p(0,1)\right)_{1-\sigma,p}\\ &=\begin{cases}\{w\in W^{2,p}(0,1); w(0)=w(1)=0\} & \text{si } 2\sigma>\frac{1}{p}\\ W^{2\sigma,p}(0,1) & \text{si } 2\sigma<\frac{1}{p}.\end{cases}\end{aligned}$$

tel que $0<\sigma<\frac{1}{2p}$. De la proposition précédente, on déduit le résultat suivant :

2.3 Résultat d'existence, d'unicité et de régularité dans le domaine Ω

Proposition 2.4 *Pour tout h tel que : $t^{-2\alpha+\frac{\alpha}{p}}h \in L^p(0,1;W^{2\sigma,p}(0,1))$; le problème (2.6) admet une unique solution vérifiant les propriétés de régularité suivantes :*

i) $w \in L^p(\Omega); t^{-2\alpha+\frac{\alpha}{p}}w \in L^p(\Omega); w(0)=0.$

ii) $t^{-2\alpha+\frac{\alpha}{p}}D_y^2 w \in L^p(\Omega).$

iii) $t^{\frac{\alpha}{p}}D_t w \in L^p(\Omega).$

iv) $t^{-2\alpha+\frac{\alpha}{p}}D_y^2 w \in L^p(0,1;W^{2\sigma,p}(0,1)).$

v) $t^{\frac{\alpha}{p}}D_t w \in L^p(0,1;W^{2\sigma,p}(0,1)).$

2.4 Retour au domaine U

Rappelons que : $h(t,y) = t^{2\alpha}g(t,y); g(t,y) = f(t,x)$ et $w(t,y) = u(t,x)$ où $(t,y) = (t, \frac{x}{t^\alpha})$ alors, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left\|t^{-2\alpha+\frac{\alpha}{p}}h(t,.)\right\|_{W^{2\sigma,p}(0,1)} dt &= \int_0^1 t^{\alpha-2\alpha p}\int_0^1\int_0^1 \frac{|h(t,y)-h(t,y')|^p}{|y-y'|^{2\sigma p+1}}dydy'dt \\
&= \int_0^1 t^{\alpha-2\alpha p}\int_0^{t^\alpha}\int_0^{t^\alpha} \frac{|t^{2\alpha}f(t,x)-t^{2\alpha}f(t,x')|}{\left|\frac{x}{t^\alpha}-\frac{x'}{t^\alpha}\right|^{2\sigma p+1}}\frac{dx}{t^\alpha}\frac{dx'}{t^\alpha}dt \\
&= \int_0^1 t^{2\alpha\sigma p}\left(\int_0^{t^\alpha}\int_0^{t^\alpha} \frac{|f(t,x)-f(t,x')|^p}{|x-x'|^{2\sigma p+1}}dxdx'\right)dt.
\end{aligned}$$

On peut alors conclure que : $\varphi^{-2+\frac{1}{p}}h \in L^p(0,1;W^{2\sigma,p}(0,1))$ i.e.

$$\varphi^{-2+\frac{1}{p}}h \in L^p(0,1;W^{2\sigma,p}(0,1)) \Leftrightarrow \int_0^1 \varphi(t)^{2\sigma p}\int_0^{t^\alpha}\int_0^{t^\alpha}\frac{|f(t,x)-f(t,x')|^p}{|x-x'|^{2\sigma p+1}}dxdx'dt < \infty$$

Ce qui est notée par l'espace

$$L^p_{\varphi^{2\sigma}}(0,1;W^{2\sigma,p}_\varphi).$$

De même manière, on peut démontrer les équivalences suivantes :

Proposition 2.5 .

i) $t^{-2\alpha+\frac{\alpha}{p}}w \in L^p(0,1;L^p(0,1))$ *si et seulement si* $u \in L^p_{\varphi^2}(U)$.

ii) $t^{-2\alpha+\frac{\alpha}{p}}D_y^2 w \in L^p(0,1;W^{2\sigma,p}(0,1))$ *si et seulement si* $D_x^2 u \in L^p_{\varphi^{2\sigma}}(0,1;W^{2\sigma,p})$.

iii) $t^{\frac{\alpha}{p}}D_t w \in L^p(0,1;W^{2\sigma,p}(0,1))$ *si et seulement si* $D_t u \in L^p_{\varphi^{2\sigma}}(0,1;W^{2\sigma,p})$.

De cette dernière proposition, on peut lancer le théorème d'existence, d'unicité et de régularité de la solution du problème (2.1).

2.5 Régularité de la solution

Théorème 2.1 *Supposons (2.2) et soit* $\sigma \in \,]0,1[$ *tel que* $0 < \sigma < \frac{1}{2p}$ *alors,* $\exists \lambda^*$ *tel que* $\forall \lambda \geq \lambda^*$ *et pour tout* $f \in L^p_{\varphi^{2\sigma}}(0,1;W^{2\sigma,p}_{\varphi})$*, le problème (2.1) admet une unique solution* u *vérifiant les propriétés de régularité :* $u, D_t u, D_x u$ *et* D_x^2 *appartiennent à* $L^p_{\varphi^{2\sigma}}(0,1;W^{2\sigma,p})$.

Chapitre 3

Etude du problème parabolique dégénéré autonome par la méthode de Dore-Venni

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons faire l'étude de l'équation

$$\begin{cases} D_t u(t,x) - D_x^2 u(t,x) + \lambda m(t,x) u(t,x) = f(t,x) \\ u\backslash_{\partial U - \Gamma_1} = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

dans le cas où $\varphi(t) = \sqrt{t}$ avec $m = t^{-1}$ et $\lambda \geq \dfrac{1}{2p}$.
On commencera par l'écriture abstraite du problème

$$\begin{cases} \varphi^2(t) D_t w(t,y) - D_y^2 w(t,y) - \acute{\varphi}(t)\varphi(t) y D_y w(t,y) \\ +\lambda M(t,y)\varphi^2(t) w(t,y) = \varphi^2(t) g(t,y) \\ w\backslash_{\partial\Omega - \Gamma_1} = 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

puis, on vérifiera que les opérateurs A et B vérifient (DV1) (DV2) et (DV3) et finalement, on lancera le théorème d'existence et d'unicité de la solution.
Le problème (3.1) est équivalent au problème suivant posé dans l'espace de Banach $X = L^p(0,1)$

$$\begin{cases} t w'(t) + L w(t) + \lambda w(t) = t g(t) \\ w(0) = 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

où

$$\begin{cases} D(L) = \{\psi \in W^{2,p}(0,1) : \psi(0) = \psi(1) = 0\} \\ (L\psi)(y) = -\psi''(y) - \frac{1}{2} y \psi'(y). \end{cases} \tag{3.4}$$

Remarque 3.1 $\overline{D(L)} = X$

On commence par l'étude du problème (3.3) dans le cas particulier : $\lambda = \frac{1}{2p}$.
Donc, le problème (3.3) devient :

$$\begin{cases} tw'(t) + Lw(t) + \dfrac{1}{2p}w(t) = h_1(t) \\ w(0) = 0 \end{cases} \tag{3.5}$$

Avec $h_1(t) = tg(t)$ appartenant à l'espace E_2 tel que :

$$E_2 = \left\{ h \in L^p(0,1; L^p(0,1)) : t^{-1+\frac{1}{2p}} h \in L^p(0,1; L^p(0,1)) \right\}$$

$$\|h\|_{E_2} = \left\| t^{-1+\frac{1}{2p}} h \right\|_{L^p(0,1)}$$

3.2 Formulation abstraite

D'après ce qui précède, le problème (3.5) peut s'écrire sous la forme abstraite suivante :

$$Aw + Bw = h_1$$

où

$$\begin{cases} D(A) = \left\{ w \in E_2 : t^{-1+\frac{1}{2p}} \in L^p(0,1; W^{2,p}(0,1) \cap W_0^{1,p}(0,1)) \right\} \\ (Aw)(t) = Lw(t); \quad t \in (0,1) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} D(B) = \left\{ t^{\frac{1}{2p}} w' \in L^p(0,1; X) \right\} \\ (Bw)(t) = tw'(t) + \frac{1}{2p} w(t); \quad t \in (0,1) \,. \end{cases} \tag{3.6}$$

Remarque 3.2 *Il est clair que la condition (DV3) est satisfaite, il reste alors à montrer que les opérateurs A et B vérifient (DV1) et (DV2) afin d'appliquer le théorème de Dore-Venni.*

Proposition 3.1 *L'opérateur B vérifie (DV1) et (DV2).*

Preuve. La preuve est basée sur la résolution de l'équation spectrale :

$$Bw + zw = h_1, \;\; h_1 \in E_2, z \geq 0$$

cette dernière est équivalente à

$$tw'(t) + \frac{1}{2p}w(t) + zw(t) = h_1(t)$$

qui admet la solution suivante :

$$w(t) = t^{-z-\frac{1}{2p}} \int\limits_0^1 s^{-z+\frac{1}{2p}-1} h_1(s) ds.$$

Montrons que $w(0) = 0$. On a :

$$\begin{aligned}
\left\| t^{-z-\frac{1}{2p}} \int_0^1 s^{-z+\frac{1}{2p}-1} h_1(s)ds \right\|_X &\leq \int_0^1 s^{\frac{-1}{2p}} s^{-1+\frac{1}{2p}} \|h_1(s)\| \, ds \\
&\leq \|h_1\|_{E_2} (\int_0^1 s^{\frac{-q}{2p}} ds)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \|h_1\|_{E_2} \frac{1}{(1-\frac{q}{2p})^{\frac{1}{q}}} t^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2p}} \\
&\leq \frac{t^{\frac{2p-3}{2p}}}{(1-\frac{q}{2p})^{\frac{1}{q}}} \|h_1\|_{E_2}
\end{aligned}$$

d'où le résultat car $p > \frac{3}{2}$ (rappelons que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).
D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
\left\| (zI+B)^{-1} h_1 \right\|_{E_2}^p &= \|w\|_{E_2}^p \\
&= \int_0^1 \left\| t^{-1+\frac{1}{2p}} w(t) \right\|_X^p dt
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
t^{-1+\frac{1}{2p}} w(t) &= \int_0^1 t^{-z-1} s^{z-1+\frac{1}{2p}} h(s)ds \\
&= \int_0^1 t^{-z-1} K_z(t,s) s^{-1+\frac{1}{2p}} h(s)ds
\end{aligned}$$

où

$$K_z(t,s) = \begin{cases} t^{-z-1} s^z & \text{si } s < t \\ 0 & \text{si } s > t. \end{cases}$$

Alors :

$$\sup_{t\in[0,1]} \int_0^1 |K_z(t,s)| \, ds \leq \sup_{t\in[0,1]} \int_0^t t^{-z-1} s^z ds \leq \frac{1}{z+1}, \quad \text{pour tout } z > 0$$

car :

$$\int_0^1 t^{-z-1} s^z ds = t^{-z-1} \left[\frac{s^{z+1}}{z+1} \right]_0^t = \frac{1}{z+1}$$

et

$$\sup_{s\in[0,1]}\int_0^1 |K_z(t,s)|\,dt \leq \sup_{s\in[0,1]}\int_0^t t^{-z-1}s^z dt \leq \frac{1}{z},\ \text{ pour tout } z>0$$

car :

$$\int_0^1 |K_z(t,s)|\,dt = \int_0^s |K_z(t,s)|\,dt + \int_s^1 |K_z(t,s)|\,dt = \int_s^1 |K_z(t,s)|\,dt = s^z\left[\frac{t^{-z}}{-z}\right]_s^1 = \frac{1}{z}.$$

Donc, il existe une constante $C(p)$ telle que :

$$\left\|(B+zI)^{-1}\right\|_{L(E_2)} \leq \frac{C(p)}{z}, \text{ pour } z \text{ assez grand}$$

De plus, on peut voir que :

$$(B^{-1}h_1)(t) = t^{\frac{-1}{2p}}\int_0^t s^{1-\frac{1}{2p}}h(s)ds$$

et

$$\left\|(B^{-1}h_1)(t)\right\|_X \leq t^{1-\frac{1}{2p}}\left\|h_1\right\|_{E_2}$$

ce qui implique que :

$$\left\|B^{-1}h_1\right\|_{L(E_2)} \leq C(p)\left\|h_1\right\|_{E_2}.$$

Donc, l'opérateur B vérifie (DV1).
Maintenant, pour montrer que $B\in \mathrm{Bip}(E_2)$, on pose :

$$Bw = B_0 w + \frac{1}{2p}w$$

avec

$$\begin{cases} D(B_0) = \left\{w\in E : t^{\frac{1}{2p}}w' \in L^p(0,1;X); w(0)=0\right\} \\ (B_0 w)(t) = tw'(t); t\in(0,1). \end{cases}$$

Il suffit de montrer que $B_0\in \mathrm{Bip}(E_2)$ (voir[16], théorème 3).
D'après les mêmes techniques de Dore-Venni utilisées dans[2], on a :

$$\begin{aligned}
\left(B_0^{-z}w\right)(t) &= \frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)}\int_0^\infty \lambda^{-z}((\lambda+B_0)^{-1}w)(t)d\lambda \\
&= \frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)}\int_0^\infty \lambda^{-z}t^{-\lambda}\int_0^t s^{\lambda-1}w(s)dsd\lambda \\
&= \frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)}\int_0^\infty \lambda^{-z}\int_0^t (\frac{s}{t})^\lambda w(s)\frac{ds}{s}d\lambda \\
&= \frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)}\int_0^\infty \lambda^{-z}\int_0^t \exp(\lambda\ln(\frac{s}{t}))w(s)\frac{ds}{s}d\lambda.
\end{aligned}$$

En faisant le changement de variable

$$\mu = -\lambda \ln(\frac{s}{t}) = \lambda \ln(\frac{t}{s}) \text{ donc } d\mu = \ln \frac{t}{s} d\lambda \text{ et } \lambda^{-z} = \left(\frac{\mu}{\ln(\frac{t}{s})} \right)^{-z}.$$

D'où

$$\begin{aligned} \left(B_0^{-z} w\right)(t) &= \frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} \int_0^t w(s) \left(\ln \frac{t}{s}\right)^{z-1} \left(\int_0^\infty \mu^{-z} e^{-\mu} d\mu \right) \frac{ds}{s} \\ &= \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^t \left(\ln \frac{t}{s}\right)^{z-1} w(s) \frac{ds}{s}. \end{aligned}$$

Posons maintenant pour $\tau < 0$;

$$t = e^\tau \text{ et } s = e^\sigma \text{ donc } \ln \frac{t}{s} = \ln e^\tau - \ln e^\sigma = \tau - \sigma.$$

Ce qui implique que :

$$\left(B_0^{-z} w\right)(e^\tau) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_{-\infty}^{\tau} (\tau - \sigma)^{z-1} w(e^\sigma) d\sigma, \ \tau < 0$$

Posons pour $\omega = -1 + \dfrac{1}{2p}$,

$$\psi(\sigma) = \frac{1}{\Gamma(z)} \left(\max\{\sigma, 0\}\right)^{z-1} e^{\sigma(\omega + \frac{1}{p})}, \sigma \in \mathbb{R};$$

Et

$$\phi(\sigma) = \begin{cases} e^{\sigma(\omega+\frac{1}{p})} w(e^\sigma) & \text{pour } \sigma \in (-\infty, 0) \\ 0 & \text{pour } \sigma \in (0, +\infty) \end{cases}$$

On a bien que :

$$(\psi * \phi)(\tau) = e^{\sigma(\omega+\frac{1}{p})} \left(B_0^{-z} w\right)(e^\tau)$$

car :

$$\begin{aligned} (\psi * \phi)(\tau) &= \int_{\mathbb{R}} \psi(\tau - \sigma)\phi(\sigma) d\sigma \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\Gamma(z)} \left(\max\{\sigma, 0\}\right)^{z-1} e^{\sigma(\omega+\frac{1}{p})} e^{\sigma(\omega+\frac{1}{p})} w(e^\sigma) d\sigma \\ &= \int_{-\infty}^{\tau} \frac{1}{\Gamma(z)} (\tau - \sigma)^{z-1} e^{\sigma(\omega+\frac{1}{p})} w(e^\sigma) d\sigma \\ &= e^{\sigma(\omega+\frac{1}{p})} \left(B_0^{-z} w\right)(e^\tau). \end{aligned}$$

Alors, pour tout $\tau \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\|\phi\|_{L^p((-\infty,+\infty);X)} &= \left(\int_{-\infty}^{0} \left\|e^{\sigma(\omega+\frac{1}{p})} w(e^\sigma)\right\|_X^p d\sigma\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_{-\infty}^{0} e^{\sigma(\omega+\frac{1}{p})} \|w(e^\sigma)\|_X^p d\sigma\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

En faisant le changement de variable $e^\sigma = t$, on obtient :

$$\begin{aligned}\|\phi\|_{L^p((-\infty,+\infty);X)} &= \left(\int_{0}^{1} t^{\omega p} \|w(t)\|_X^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_{0}^{1} \|t^\omega w(t)\|_X^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|w\|_{E_2}.\end{aligned}$$

Puisque $\psi \in L^1(\mathbb{R})$ alors, sa transformée de Fourier est donnée par :

$$\begin{aligned}F(\psi)(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2p}\Gamma(z)} \int_0^\infty e^{-i\sigma\xi} \sigma^{z-1} e^{-\sigma(\omega+\frac{1}{p})} d\sigma \\ &= \frac{1}{\sqrt{2p}\Gamma(z)} \int_0^\infty e^{-\sigma(i\xi-\omega-\frac{1}{p})} \sigma^{z-1} d\sigma.\end{aligned}$$

En faisant le changement de variable $\mu = \sigma(i\xi - \omega - \frac{1}{p})$, on obtient :

$$\begin{aligned}F(\psi)(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2p}\Gamma(z)} \int_0^\infty e^{-\mu}\mu^{z-1}(i\xi-\omega-\frac{1}{p})^{-(z-1)} d\mu (i\xi-\omega-\frac{1}{p})^{-1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2p}\Gamma(z)} \int_0^\infty e^{-\mu}\mu^{z-1} d\mu (i\xi-\omega-\frac{1}{p})^{-z} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2p}}(i\xi-\omega-\frac{1}{p})^{-z}.\end{aligned}$$

Cette dernière égalité est obtenue en utilisant la définition de la fonction Gamma :
On a

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\xi}F(\psi)(\xi) &= \frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\sqrt{2p}}(-\frac{1}{p}-\omega+i\xi)^{-z}\right) \\ &= -iz(-\frac{1}{p}-\omega+i\xi)^{-z-1}.\frac{1}{\sqrt{2p}} \\ &= -iz(-\frac{1}{p}-\omega+i\xi)F(\psi)(\xi).\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{d\xi}F(\psi)(\xi) &= \frac{d}{d\xi}\left(\frac{d}{d\xi}F(\psi)(\xi)\right) \\
&= \frac{d}{d\xi}(-iz(-\frac{1}{p}-\omega+i\xi)^{-z-1}.\frac{1}{\sqrt{2p}}) \\
&= -z(z+1)(-\frac{1}{p}-\omega+i\xi)^{-z-2}.\frac{1}{\sqrt{2p}} \\
&= -z(z+1)(-\frac{1}{p}-\omega+i\xi)^{-2}F(\psi)(\xi).
\end{aligned}$$

Maintenant, posons : $z=\eta-ir$ avec $(\eta,r)\in\,]0,1[\,\times\mathbb{R}$ et

$$\widetilde{(\psi*\phi)}(\tau)=\begin{cases}(\psi*\phi)(\tau) & \text{pour } \tau\in(-\infty,0)\\ 0 & \text{pour } \tau\in(0,+\infty)\end{cases}$$

D'après le théorème de multiplicateur de Mikhlin, on a

$$\begin{aligned}
\|B_0^z w\|_{E_2} &\leq \left\|\widetilde{(\psi*\phi)}\right\|_{L^p((-\infty,+\infty);X)} \\
&\leq C\max_{0\leq j\leq 2}(\sup\left|\xi^j\frac{d^j}{d\sigma^j}F(\psi)(\xi)\right|)\,\|\phi\|_{L^p(X)} \\
&\leq C(1+|z|^2)\sup\left[((\omega+\frac{1}{p})^2+\zeta^2)^{-\frac{\operatorname{Re} z}{2}}e^{\left(\operatorname{Im} z\arg(-\omega+\frac{1}{p}+i\xi)\right)}\right]\|w\|_{E_2} \\
&\leq C(1+\eta^2+r^2)e^{\frac{\pi}{2}|r|}\,\|w\|_{E_2}.
\end{aligned}$$

Puisque $-\omega-\frac{1}{p}=1-\dfrac{1}{2p}-\dfrac{1}{p}>0$, alors d'après le corollaire (1.2), on a :

$$\left\|B_0^{ir}\right\|_{L(E_2)}\leq C(1+r^2)e^{\frac{\pi}{2}|r|}.$$

Voir Annexe A.9 de Dore et Venni D.V [2] ; Par conséquent, la condition ii) de (DV2) est satisfaite avec $\theta_B=\dfrac{\pi}{2}+\epsilon$, pour tout $\epsilon>0$.

Proposition 3.2 *L'opérateur A vérifie (DV1) et (DV2).*

Preuve.
Maintenant, on s'intéresse à l'opérateur A et sa réalisation définie par :

$$(L\psi)=L_0\psi+P\psi$$

Où L_0 et P sont définis comme suit :

$$\begin{cases}D(L_0)=\left\{\psi\in W_p^2(0,1):\psi(0)=\psi(1)=0\right\}\\ L_0\psi=-\psi''\end{cases}$$

et

$$\begin{cases} D(P) = W_p^1(0,1) \\ P\psi = \frac{-1}{2} y\psi'. \end{cases}$$

L'opérateur L_0 est sectoriel (chapitre 2). De plus, grâce à l'inégalité de Hölder, pour $\psi \in D(L_0) \subset D(P)$, on a

$$\|P\psi\|_{L^p(0,1)} \leq C(p)\,\|\psi\|_{D(L_0)}$$

Et l'opérateur $P = m \circ i \circ d$ est compact de $D(L_0)$ dans E_2 donc L est sectoriel.
De plus, il existe $r_0 > 0$ tel que :

$$\rho(-L) \supset \sum_{\pi-\epsilon_1} = \{\lambda : |\arg\lambda| < \pi - \epsilon_1\} \text{ où } \epsilon_1 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

La théorie classique des équations différentielles du second ordre avec les conditions de Dirichlet nous donne, pour tout $\delta > 0$;

$$\begin{aligned} \rho(-(L+\delta I)) &\supset \sum_{\pi-\epsilon_1} = \{\lambda : |\arg\lambda| < \pi - \epsilon_1\} \\ \forall\lambda &\in \sum_{\pi-\epsilon_1} : \left\|(L_\delta + \delta I)^{-1}\right\|_{L(E_2)} \leq \frac{M_\delta}{(1+|\lambda|)} \end{aligned}$$

où $L_\delta = L + \delta I$. Par conséquence, L_δ est un opérateur positif.
D'après Labbas-Moussaoui [13] ; $(L_0 + \delta I)^{is}$ forme un groupe fortement continu tel que pour tout $\gamma_1 > 0$, $\exists M_0 > 0$ vérifiant :

$$\left\|(L_0 + \delta I)^{is}\right\|_{L(E_2)} \leq M_0 e^{\gamma_1(s)}, \forall s \in \mathbb{R}$$

D'autre part, pour tout $\eta \in]0,1[$, $(L_0+\delta I)^\eta$ est défini et son domaine $D((L_0+\delta I)^\eta)$ coïncide avec l'espace d'interpolation complexe :

$$[L^p(0,1), D(L_0+\delta I)]_\eta \supset W^{1,p}(0,1) = D(P) \text{ quand } \eta \to 1.$$

Voir Triebel[19]. Alors, d'après le théorème (1.7), l'opérateur $(L_\delta)^{is}$ est borné pour tout $s \in \mathbb{R}$ et

$$\left\|(L_\delta)^{is}\right\|_{L(E_2)} \leq M'_\delta e^{(\epsilon+\gamma_1)|s|}, \forall s \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0$$

Alors, on a les mêmes résultats pour l'opérateur $A + \delta I$, pour tout $\delta > 0$.
Maintenant, appliquons les mêmes techniques utilisées dans la preuve du théorème A1 et le lemme A2, pages : 89-90 dans [6], on obtient :

$$\theta_A = \theta_{L_\delta} = \epsilon + \gamma_1 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

La condition $\theta_A + \theta_B < \pi$ est vérifiée.
D'où la preuve de la proposition est achevée.

3.3 Solution stricte

Puisque les opérateurs A et B vérifient (DV1), (DV2) et (DV3) alors, en appliquant le théorème de Dore-Venni, on obtient le résultat suivant :

Proposition 3.3 *Soit $h_1 \in E_2$, alors le problème (3.3) admet une unique solution vérifiant :*

1. $w \in E_2; w(0) = 0$.
2. $t^{-1+\frac{1}{2p}} w \in L^p(0,1; W^{2,p}(0,1) \cap W_0^{1,p}(0,1))$.
3. $t^{\frac{1}{2p}} w' \in L^p(0,1; L^p(0,1)$.

3.4 Retour au domaine U

Dans le domaine triangulaire U, utilisons les changements de variables :

$$h_1(t,y) = t.g(t,y) \quad ; \quad g(t,y) = f(t,x)$$

avec $f \in L^p(U)$, on a alors :

$$h_1 \in E_2.$$

De la dernière proposition, on peut tirer le résultat suivant :

Proposition 3.4 .

1. $w \in E_2 \Longrightarrow t^{-1}u \in L^p(U)$.
2. $t^{-1+\frac{1}{2p}} D_x^2 w \in L^p(0,1; L^p(0,1)) \Longrightarrow D_x^2 u \in L^p(U)$.

Donc l'équation (3.1) implique

$$D_t u = D_x^2 u - \lambda t^{-1} u + f \in L^p(U).$$

D'où le théorème suivant :

Théorème 3.1 *Pour $f \in L^p(U)$ et $\lambda \geq \frac{1}{2p}$, le problème (3.1) admet une unique solution $u \in H_p^{1,2}(U)$.*

Remarque 3.3 *Notre approche pour résoudre (2.6) et (3.4) peut être aussi utilisée dans des situations plus générales pour l'opérateur elliptique $L(t)$ et L.*

Bibliographie

[1] **Burkholder D.L.** :*A Geometrical Characterisation of Banach Spaces in Which Maringale Difference Sequences are Unconditional,* Ann.Probab.9 (1981), 997-1011.

[2] **Dore G., Venni A.** :*On the closedness of the Sum of Two Closed Operators,* Mathematische Zeitschrift 196 (1987), 270-286.

[3] **Dore G., Venni A.** : *An Opretional Method to Solve a Dirichlet Problem for the Laplace Operator in a Plane Sector*, Differential and Integral equations, Volume 3, Number 2, (1990), 323-334.

[4] **Dore G., Venni A.** : *Some Results About Complex Powers of Closed Operators,* J.Math.Anal.Appl., 149 (1990), 124-136.

[5] **Favini A., Yagi A.** : *Degenerate Differential Equations in Banach Space*, M. Dekker, New York (1999).

[6] **Giga Y., Sohr H.** : *Abctract L^p Estimates for the Cauchy Problem with Applications to the Navier-Stockes Equations in Exterior Domains*, Journal of functional analysis, 102 (1991), 72-94.

[7] **Hess P., Kato T.** : *On some Linear and Nonlinear Eigenvalue Problems with an Indefinite Weight Function,* Comm.in Partial Differential Equations, 5 (10), (1980), 999-1030.

[8] **Hess P.** : *Periodic Parabolic Boundary Value Problems and Positivity*, Longman Scientific &Technical, 1991.

[9] **Hofmann S., Lewis J.L.** : *The L^p Neumann and Regularity Problems For the Heat Equation in Non Cylindrical Domains*, Journées Equations aux Dérivées Partielles, Saint-Jean-de-Monts,

2-5 Juin 1998, GDR 1151, (CNRS).

[10] **Komatsu H.** : *Fractional Powers of Operators*. Pacific J. Math., 1, (1966), 285-346.

[11] **Labbas R., Terreni B.** : *Sommes d'Opérateurs Linéaires de Type Parabolique*, 1ére partie,Boll. Un. Mat. Italiana, (7), 1-B (1987), 545-569.

[12] **Labbas R., Medeghri A., Sadallah B-K.** : *An Lp-Approach For The Study of Degenerate Parabolic Equations*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2005(2005), No. 36, pp. 1–20.

[13] **Labbas R., Moussaoui M.** : *On the Resolution of the Heat Equation With Discontinuous Coefficients*, Semigroup Forum, Vol. 60, (2000), 187-201.

[14] **Lederman C, Vazquez J. L. & Wolanski N.** : *A Mixed Semilinear Parabolic Problem From Combustion Theory*, Electron. J. Diff. Eqns., Conf. 06, (2001), 203-214.

[15] **Lunardi A.** : *Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems*, Birkäuser Verlag, Boston, 1995.

[16] **Prüss J., Sohr H.** : *On Operators with Bounded Imaginary Powers in Banach Spaces*, Math-ematische Zeitschrift 203 (1990), 429-452.

[17] **Sadallah B.-K.** : *Relationship Between two Boundary Problems, the First Concerns a Smooth Domain and the Second Concerns a Domain with Corners*, Arab Gulf J. Scient. Res. 11 (1) (1993) 125-141.

[18] **Savaré G. :** *Parabolic Problems with Mixed Variable Lateral Conditions : an Abstract Approach*, J. Math. Pures et Appl. 76, (1997), 321-351.

[19] **Triebel H.** : *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators*. Amsterdam, NewYork, Oxford, North Holland (1978).