République Algérienne Démocratique et Populaire

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE ABDELHAMID BEN BADIS MOSTAGANEM

FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES-INFORMATIQUE

THESE DE DOCTORAT

Option : ANALYSE FONCTIONNELLE

Intitulée

CALCUL FRACTIONNAIRE :
ETUDE ANALYTIQUE ET NUMERIQUE

Présentée par : Ahmed ANBER

Thèse soutenue, le 05 Mai 2014, devant le Jury composé de :

Encadreur	:	Zoubir DAHMANI	M.C.A. Université de Mostaganem
Président	:	Benharrat BELAIDI	Prof. Université de Mostaganem
Examinateur	:	Mamer BENBACHIR	M.C.A. Université de Khemis Miliana
Examinateur	:	Abdelkader SENOUCI	Prof. Université de Tiaret

Année Universitaire : **2013 − 2014**

Liste des Travaux de Recherche et des Publications

1. Dahmani. Z, Anber. A : The Variational Iteration Method for Solving the Fractional Foam Drainage Equation. International Journal of Nonlinear Science. Vol.10 No.1,pp.39-45 (2010). ISSN 1749-3889.

2. Dahmani. Z, Anber. A, Mesmoudi. M. M : Solutions of the Coupled Witham-Broer-Kaup Equations With Fractional Derivatives. Appl. Math. Comput. Sci. 1 , No. 2, 125-138 (2010). ISSN 0976-1586.

3. Anber. A, Dahmani. Z : The Variational Iteration Method for Solving the Fractional Coupled Lotka-Volterra Equation. J. Interdis cip. Math. 14, No. 4, 373-388 (2011). ISSN 0972-0502.

4. Anber. A, Dahmani. Z, Bendoukha. B : New Integral Inequalities of Feng Qi Type Via Riemann-Liouville Fractional Integration. Ser. Math. Inform. Vol. 27, No 2 (2012), 157-166.

5. Anber. A, Dahmani. Z, Bendoukha. B : Some New Results Using Integration of Arbitrary Order, Int. J. Nonlinear Anal. Appl. 4 (2013) No. 2, 45-52.

6. Anber. A, Belarbi. S, Dahmani. Z : New Existence and Uniqueness Results for Fractional Differential Equations. Accepted in Journal of Analete Stiintifice Ale Universitatii Ovidius Constanta, (2013).

Dedicaces

Ce travail est dédié à :

Ma chère mère qui m'a beaucoup soutenue, à mon très cher père, qui était toujours présent pour moi aux moments où j'avais vraiment besoin de lui et qui cherche toujours mon bien.

Mes frères et soeurs.

Toute ma famille.

Toute personne qui m'a soutenue, aidé ou contribué de près ou de loin.

Remerciements

*Au nom d'**ALLAH** Clément et Miséricordieux !*

*Louange à **ALLAH** le Tout Puissant de m'avoir donné la force, le courage et la volonté d'accomplir ce travail.*

J'adresse mes sincères remerciements à mon Directeur de thèse, Monsieur Zoubir DAHMANI , Maître de Conférences à l'Université de Mostaganem, pour m'avoir proposé le sujet, encouragé, orienté, aidé et guidé, pour son soutien et son encouragement, sa confiance en moi tout au long de ce travail.

J'adresse mes vifs remerciements à Monsieur Benharrat BELAIDI, Professeur à l'Université de Mostaganem, pour l'honneur qu'il me fait de présider le Jury de these thèse.

Mes remerciements vont également à tous les membres du Jury, pour l'honneur qu'ils me font en acceptant d'être dans le Jury de ma thèse, en l'occurrence :
Monsieur Mamer BENBACHIR, Maître de Conférences à l'Université de Khemis Miliana.
Monsieur Abdelkader SENOUCI, Professeur à l'Université de Tiaret.

Je voudrais également exprimer mes grands remerciements à tous les enseignants et personnel administratif du Département de Mathématiques-Informatique de l'Université de Mostaganem.

Je remercie encore mes parents, mes sœurs et mes frères pour m'avoir encouragé durant ces années d'études.

Je remercie aussi mes collègues et amis, EL-FARISSI Abdellah, TAMI Abdelkader et BENNOUAR Abdelmadjid.

Table des matières

INTRODUCTION

Le calcul fractionnaire est une généralisation du calcul différentiel. L'histoire de cette théorie remonte au $17^{éme}$ siècle, lorsque l'Hôpital se pose la question à Leibniz sur le résultat de la dérivée d'ordre un demi. Ensuite plusieurs chercheurs se sont penchés sur ce sujet.

L'objectif principal de cette thèse est de présenter une contribution analytique et numérique au calcul fractionnaire.

Cette Thèse se compose d'une Introduction et cinq Chapitres :
Dans le premier chapitre, intitulé : Notions de Calcul Fractionnaire, on va rappeler quelques notations, définitions et résultats relatifs au calcul fractionnaire dont on aura besoin dans les autres chapitres.

Dans le deuxième chapitre : "Inégalités Intégrales Fractionnaires", on donnera une contribution intégrale et on généralise des résultats de F. Qi, de Cassel, de Sulaiman et autres.

Dans le troisième chapitre, intitulé : Applications des Inégalités Fractionnaires aux EDFs, on donnera des résultats assurant l'existence et l'unicité / l'existence pour des problèmes d'équations differentielles fractionnaires avec conditions intégrales. On fait appel, en particulier, à la théorie des inégalités fractionnaires. Cette théorie, on va rencontrer ses aplications dans les démonstrations de nos résultats principaux.

Dans le quatrième chapitre : "Méthode ADM et Methode VIM", on rappelera la Méthode d'Itération Variationnelle et celle d'Adomian. Ces méthodes numériques sont applicables sur des EDFs linéaires ainsi que sur des problèmes non linéaires.

Enfin, le cinquième chapitre portera sur les : "Equations Differentielles Fractionnaires : Applications Numériques". On présentera quelques applications numériques sur les équations différentielles fractionnaires en utilisant l'approche de Caputo.

Chapitre 1

NOTIONS DE CALCUL FRACTIONNAIRE

Dans ce chapitre, nous rappelons les définitions et les propriétés essentielles correspondantes à la notion de la dérivation et del'intégration fractionnaire. L'idée principale de ces notions est la généralisation des dérivées et intégrales entières. Pour plus de détails, nous citons [1, 2, 3, 4].

1.1 Intégrales Fractionnaires

Définition 1.1 *Soit une fonction* $f(x), x > 0$. *On dit que* f *est dans l'espace* $C_\mu, \mu \in \mathbb{R}$, *s'il existe un nombre réel* $p > \mu$ *tel que* $f(x) = x^p f_1(x)$, *où* $f_1(x) \in C(]0, \infty))$.

Définition 1.2 *Soit une fonction* $f(x), x > 0$. *On dit que* f *est dans l'espace* C_μ^n, $n \in \mathbb{N}$, *si* $f^{(n)} \in C_\mu$.

1.1.1 L'Approche de Riemann-Liouville :

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Une primitive de f est donnée par :

$$F_1(t) = \int_a^t f(\tau)\, d\tau. \tag{1.1}$$

Pour une primitive d'ordre 2, on a :

$$\begin{aligned} F_2(t) = \int_a^t F_1(x)\, dx &= \int_a^t \left(\int_a^x f(\tau)\, d\tau \right) dx \\ &= \int_a^t (t - x) f(x)\, dx. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Puis par récurrence, on obtient la relation classique suivante :

$$F_n(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t (t-x)^{n-1} f(x)\, dx, \tag{1.3}$$

où $\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{n-1} du = (n-1)!\ \ n \geq 1.$

Si on note $J^n(f(t)) = F_n(t)$, on va avoir :

$$J^n(f(t)) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau)\, d\tau. \tag{1.4}$$

Selon l'approche de Riemann-Liouville, la notion d'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha \geq 0$ est une conséquence "naturelle "de la formule (1.4).

Définition 1.1 *L'opérateur intégral fractionnaire de Rieman-Liouville d'ordre* $\alpha \geq 0$, *pour une fonction* $f \in C_\mu([a,b])$, $(\mu \geq -1)$ *est défini par :*

$$\begin{cases} (J_a^\alpha) f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)\, d\tau & ; \alpha > 0, \\ \\ (J_a^0) f(t) = f(t), \end{cases} \tag{1.5}$$

où $\quad \Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{\alpha-1} du, \alpha > 0.$

Exemple 1.1 Calculons l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann Liouville de la fonction f telle que :

$$f(x) = x^\beta \quad , \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad x > 0. \tag{1.6}$$

On a :

$$(J_0^\alpha)\left(x^\beta\right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-\tau)^{\alpha-1} \tau^\beta d\tau. \tag{1.7}$$

On effectue le changement de variable : $\tau = xy$, on va avoir :

$$\begin{aligned} (J_0^\alpha) x^\beta &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x-xy)^{\alpha-1} (xy)^\beta x dy \\ &= \frac{x^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-y)^{\alpha-1} (y)^\beta dy \\ &= \frac{x^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha, \beta+1), \end{aligned} \tag{1.8}$$

où $B(\alpha,\beta)$ est la fonction Beta d'Euler définie par : $B(\alpha,\beta) = \int_0^1 (1-x)^{\alpha-1} (x)^{\beta-1} dx.$

Comme $B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$, alors on trouve

$$\left(J_0^\alpha\right)\left(x^\beta\right)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}x^{\alpha+\beta}=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}x^{\alpha+\beta}. \tag{1.9}$$

Par exemple, pour $\alpha=\frac{1}{2}$ et $\beta=1$, on applique la formule (1.9), on obtient :

$$\left(J_0^\alpha\right)(x)=\frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+1+1\right)}x^{\frac{1}{2}+1}=\frac{\Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}x^{\frac{3}{2}}=\frac{4}{3\sqrt{\pi}}x\sqrt{x}. \tag{1.10}$$

Et pour $\alpha=1$, on obtient

$$\left(J_0^1\right)\left(x^\beta\right)=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+2)}x^{1+\beta}=\frac{\Gamma(\beta+1)}{(\beta+1)\Gamma(\beta+1)}x^{1+\beta}=\frac{1}{\beta+1}x^{\beta+1}.$$

Exemple 1.2 Calculons l'intégrale fractionnaire de Riemann Liouville d'ordre $\alpha=\frac{1}{2}$ de la fonction : $x\longmapsto \ln x, x>0$
On a :

$$\begin{aligned}\left(J_0^{\frac{1}{2}}\right)(\ln x)&=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^x (x-\tau)^{-\frac{1}{2}}\ln\tau d\tau\\ &=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^x\frac{\ln\tau}{\sqrt{x-\tau}}d\tau.\end{aligned} \tag{1.10}$$

Posons : $\sqrt{x-\tau}=t\Rightarrow d\tau=-2tdt$, alors :

$$\begin{aligned}\left(J_0^{\frac{1}{2}}\right)(\ln x)&=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\sqrt{x}}^0\frac{-2t\ln\left(x-t^2\right)}{t}dt\\ &=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\sqrt{x}}^0-2\ln\left(x-t^2\right)dt=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{x}}\left(\ln\left(\sqrt{x}+t\right)+\ln\left(\sqrt{x}-t\right)\right)dt.\end{aligned} \tag{1.11}$$

On sait que :

$$\begin{aligned}&\int\ln(a+t)\,dt=(a+t)\ln(a+t)-t+Cte\\ &\int\ln(a-t)\,dt=(-a+t)\ln(a-t)-t+Cte,\end{aligned} \tag{1.12}$$

d'où :

$$\begin{aligned}\left(J_0^{\frac{1}{2}}\right)(\ln x)&=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\left(\sqrt{x}+t\right)\ln\left(\sqrt{x}+t\right)-t\right]_0^{\sqrt{x}}+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\left(-\sqrt{x}+t\right)\ln\left(\sqrt{x}-t\right)-t\right]_0^{\sqrt{x}}\\ &=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[2\sqrt{x}\ln\left(2\sqrt{x}\right)-\sqrt{x}-\sqrt{x}\ln\sqrt{x}\right]+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[-\sqrt{x}+\sqrt{x}\ln\sqrt{x}\right]\\ &=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\sqrt{x}\ln\left(2\sqrt{x}\right)-\sqrt{x}\right)=\frac{-4+4\ln 2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{x}+\frac{4}{\sqrt{\pi}}\sqrt{x}\ln\sqrt{x}.\end{aligned} \tag{1.13}$$

Proposition 1.1
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. Alors, on a*

$$\left(J_a^{\alpha}\right)\left[J_a^{\beta}\left(f\left(x\right)\right)\right] = J_a^{\alpha+\beta}\left(f\left(x\right)\right), \tag{1.14}$$

et

$$\left(J_a^{\alpha}\right)\left[J_a^{\beta}\left(f\left(x\right)\right)\right] = \left(J_a^{\beta}\right)\left[J_a^{\alpha}\left(f\left(x\right)\right)\right],$$

pour tout $\alpha > 0, \beta > 0$.

Démonstration
En effet,

$$\begin{aligned}\left(J_a^{\alpha}\right)\left[J_a^{\beta}\left(f\left(x\right)\right)\right] &= \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^x \left(x-\tau\right)^{\alpha-1} J_a^{\beta}\left(f\left(\tau\right)\right)d\tau \\ &= \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int\limits_a^x \left[\left(x-\tau\right)^{\alpha-1}\int\limits_a^{\tau}\left(\tau-t\right)^{\beta-1} f\left(t\right)dt\right]d\tau \\ &= \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int\limits_a^x\int\limits_a^{\tau}\left(\left(x-\tau\right)^{\alpha-1}\left(\tau-t\right)^{\beta-1} f\left(t\right)\right)dtd\tau \\ &= \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int\limits_a^x\left(f\left(t\right)\int\limits_t^x\left(x-\tau\right)^{\alpha-1}\left(\tau-t\right)^{\beta-1}d\tau\right)dt.\end{aligned} \tag{1.15}$$

On effectue le changement de variable : $\tau = t + \left(x-t\right)y$, on récupère donc

$$\begin{aligned}\int\limits_t^x\left(x-\tau\right)^{\alpha-1}\left(\tau-t\right)^{\beta-1}d\tau &= \int\limits_0^1\left(x-t-\left(x-t\right)y\right)^{\alpha-1}\left(t+\left(x-t\right)y-t\right)^{\beta-1}\left(x-t\right)dy \\ &= \left(x-t\right)^{\alpha+\beta-1}\int\limits_0^1\left(1-y\right)^{\alpha-1}\left(y\right)^{\beta-1}dy \\ &= B\left(\alpha,\beta\right)\left(x-t\right)^{\alpha+\beta-1}.\end{aligned} \tag{1.16}$$

Alors

$$\begin{aligned}\left(J_a^{\alpha}\right)\left[J_a^{\beta}\left(f\left(x\right)\right)\right] &= \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int\limits_a^x\left(f\left(t\right)\int\limits_t^x\left(x-\tau\right)^{\alpha-1}\left(\tau-t\right)^{\beta-1}d\tau\right)dt \\ &= \tfrac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int\limits_a^x\left(f\left(t\right)\left(x-t\right)^{\alpha+\beta-1}\right)dt \\ &= \tfrac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int\limits_a^x\left(\left(x-t\right)^{\alpha+\beta-1} f\left(t\right)\right)dt = J^{\alpha+\beta} f\left(x\right).\end{aligned} \tag{1.17}$$

Exemple 1.3
Si on prend : $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ et $f(x) = x$ avec $x > 0$, on trouve :

$$(J_0^{\alpha})\left[\left(J_0^{\beta}\right)(f(x))\right] = (J_0^{\alpha})\left[\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\beta+2)}x^{\beta+1}\right] = \frac{1}{2}x^2. \tag{1.19}$$

D'autre part, on a :

$$\left(J_0^{\alpha+\beta}\right)(f(x)) = (J_0^1)(f(x)) = \int_0^x tdt = \tfrac{1}{2}x^2. \tag{1.20}$$

1.1.2 Intégrale Fractionnaire de Quelques Fonctions

Intégrale Fractionnaire de : $x \longmapsto (x-a)^{\gamma}$

Considérons la fonction $f(x) = (x-a)^{\gamma}$ avec $x - a > 0$. Alors

$$(J_a^{\alpha})(f(x)) = \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-\tau)^{\alpha-1}(\tau-a)^{\gamma}\, d\tau \ = \tfrac{B(\alpha,\gamma+1)}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\gamma+\alpha}. \tag{1.21}$$

Cela implique :

$$(J_a^{\alpha})((x-a)^{\gamma}) = \tfrac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+\alpha+1)}(x-a)^{\gamma+\alpha}. \tag{1.22}$$

Dans la relation (1.22), si on prend $a = 0$ et $\gamma = \beta$, on obtiendra (1.9).

Intégrale Fractionnaire de : $x \longmapsto e^{\gamma x}$

Considérons la fonction $f(x) = e^{\gamma x}$. Alors, on a

$$\begin{aligned}(J_a^{\alpha})(f(x)) &= \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-\tau)^{\alpha-1}e^{\gamma\tau}d\tau \\ &= \tfrac{e^{\gamma a}}{\Gamma(\alpha+1)}(x-a)^{\alpha} + \tfrac{\gamma e^{\gamma a}}{\Gamma(\alpha+2)}(x-a)^{\alpha+1} + \tfrac{\gamma^2 e^{\gamma a}}{\Gamma(\alpha+3)}(x-a)^{\alpha+2} + ...\end{aligned} \tag{1.23}$$

1.2 Dérivées Fractionnaires

Dans ce paragraphe, on va exposer brièvement quelques approches des dérivées fractionnaires, on cite par exemple : l'aproche de Riemann-Liouville, l'approche de Caputo et celle de Grünwald-Letnikov.

1.2.1 Dérivée Fractionnaire au Sens de Riemann-Liouville

Définition 1.2 *On définit la dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ au sens de Riemann-Liouville d'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ par :*

$$\left({}^{RL}D_a^{\alpha}\right)(f(x)) = \begin{cases} \frac{d^m}{dx^m}\left[\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int\limits_a^x \frac{f(\tau)}{(x-\tau)^{\alpha+1-m}}d\tau\right] \quad , & m-1<\alpha<m, m\in\mathbb{N}^* \\ \\ \frac{d^m}{dx^m}f(x), \quad , & \alpha = m. \end{cases} \tag{1.24}$$

On peut écrire la relation (1.24) sous la forme équivalente suivante :

$$\left({}^{RL}D_a^{\alpha}\right)(f(x)) = \begin{cases} \frac{d^m}{dx^m}\left[\left(J_a^{m-\alpha}\right)(f(x))\right] \quad , & m-1<\alpha<m, m\in\mathbb{N}^* \\ \\ \frac{d^m}{dx^m}f(x), \quad , & \alpha = m. \end{cases} \tag{1.25}$$

Exemple 1.4 Calculons la dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha = \frac{1}{2}$ au sens de Riemann Liouville de la fonction $f : x \longmapsto x - a$ avec $x - a > 0$,

On a

$$\begin{aligned} \left({}^{RL}D_a^{\frac{1}{2}}\right)(f(x)) &= \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right)}\int\limits_a^x (x-\tau)^{-\frac{1}{2}}\,\tau d\tau\right] \\ &= \frac{d}{dx}\left[\left(J_a^{\frac{1}{2}}\right)((x-a))\right] \\ &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}(x-a)^{\frac{3}{2}}\right) \\ &= \frac{3}{2}\frac{\Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}(x-a)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{1.26}$$

Exemple 1.5 Calculons la dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha = \frac{1}{2}$ au sens de Riemann Liouville de la fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{1+x}, x > 0$.

On a donc :

$$\left({}^{RL}D_0^{\frac{1}{2}}\right)(f(x)) = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right)}\int\limits_0^x \frac{f(\tau)}{(x-\tau)^{\frac{1}{2}+1-1}}d\tau\right]$$

$$= \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int\limits_0^x \frac{1}{(1+\tau)\sqrt{x-\tau}}d\tau\right]$$

En effectuant le changement de variable $\sqrt{x-\tau} = y$, on obtient

$$
\begin{aligned}
\left({}^{RL}D_0^{\frac{3}{2}}\right)(f(x)) &= \tfrac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\tfrac{d}{dx}\left[\int\limits_0^{\sqrt{x}}\tfrac{2}{(1+x-y^2)}dy\right] \\
&= \tfrac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\tfrac{d}{dx}\left[\tfrac{1}{\sqrt{x+1}}\int\limits_0^{\sqrt{x}}\left(\tfrac{1}{\sqrt{x+1}-y}+\tfrac{1}{\sqrt{x+1}+y}\right)dy\right] \\
&= \tfrac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\tfrac{d}{dx}\left[\tfrac{1}{\sqrt{x+1}}\left[\ln\tfrac{y+\sqrt{x+1}}{-y+\sqrt{x+1}}\right]_0^{\sqrt{x}}\right] \\
&= \tfrac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\tfrac{d}{dx}\left[\tfrac{1}{\sqrt{x+1}}\ln\tfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{-\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\right] \\
&= \tfrac{1}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left[\tfrac{1}{(x+1)^{\frac{3}{2}}}\ln\tfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{-\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}-\tfrac{1}{(x+1)\sqrt{x}}\tfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\right].
\end{aligned}
\tag{1.27}
$$

Remarque 1.1 *La dérivée de Riemann-Liouville d'une constante n'est pas nulle. Cette "anomalie troublante" est donnée par*

$$\left({}^{RL}D_a^{\alpha}\right)(1) = \tfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha} \tag{1.28}$$

En effet,

$$
\begin{aligned}
\left({}^{RL}D_a^{\alpha}\right)(c) &= \tfrac{d^m}{dx^m}\left[\tfrac{c}{\Gamma(m-\alpha)}\int\limits_a^x (x-\tau)^{m-\alpha-1}d\tau\right] \\
&= \tfrac{c}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha}.
\end{aligned}
\tag{1.29}
$$

Proposition 1.2

1. Pour tout $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ *et pour deux fonctions quelconques* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *et* $g : [a,b] \to \mathbb{R}$*,on a*

$$\left({}^{RL}D_a^{\alpha}\right)(\mu f(x) + \lambda g(x)) = \mu\left({}^{RL}D_a^{\alpha}\right)(f(x)) + \lambda\left({}^{RL}D_a^{\alpha}\right)(g(x)), \tag{1.30}$$

2. En général, la propriété de semi groupe n'est pas vérifiée, on n'a pas toujours :

$$\left({}^{RL}D_a^{\alpha_1}\right)\left({}^{RL}D_a^{\beta_1}\right)f(t) = \left(D_a^{\alpha_1+\beta_1}\right)f(t) \tag{1.31}$$

3. Il en est de même de la propriété de commutativité : $\exists\ \alpha_2 > 0,\ \beta_2 > 0,\ g$ continue sur $[a,b] \subset \mathbb{R}$*, tels que :*

$$\left({}^{RL}D_a^{\alpha_2}\right)\left({}^{RL}D_a^{\beta_2}\right)g(t) \neq \left({}^{RL}D_a^{\beta_2}\right)\left({}^{RL}D_a^{\alpha_2}\right)g(t) \tag{1.32}$$

Démonstration

1.

$$\begin{aligned}\left({}^{RL}D_a^{\alpha}\right)\left(\mu f\left(x\right)+\lambda g\left(x\right)\right) &= \tfrac{d^m}{dx^m}\left(\left(J_a^{m-\alpha}\right)\left(\mu f\left(x\right)+\lambda g\left(x\right)\right)\right)\\ &= \tfrac{d^m}{dx^m}\left(\mu\left(J_a^{m-\alpha}\right)\left(f\left(x\right)\right)+\lambda\left(J_a^{m-\alpha}\right)\left(g\left(x\right)\right)\right)\\ &= \mu\tfrac{d^m}{dx^m}\left(\left(J_a^{m-\alpha}\right)\left(f\left(x\right)\right)\right)+\lambda\tfrac{d^m}{dx^m}\left(\left(J_a^{m-\alpha}\right)\left(g\left(x\right)\right)\right)\\ &= \mu\left({}^{RL}D_a^{\alpha}\right)\left(f\left(x\right)\right)+\lambda\left({}^{RL}D_a^{\alpha}\right)\left(g\left(x\right)\right)\end{aligned} \tag{1.33}$$

Dans (2), on prend $f\left(t\right)=t^{-\frac{1}{2}}$ et $\alpha_1=\beta_1=\frac{1}{2}$. On a alors :

$$\left({}^{RL}D_0^{\frac{1}{2}}\right)f\left(t\right)=0 \quad , \quad \left({}^{RL}D_0^{\frac{1}{2}}\right)\left({}^{RL}D_0^{\frac{1}{2}}\right)f\left(t\right)=0. \tag{1.34}$$

On remarque aussi que :

$$\left({}^{RL}D_0^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}\right)f\left(t\right)=-\tfrac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}} \tag{1.35}$$

Dans (3), on pose $g\left(t\right)=t^{\frac{1}{2}}$ et $\alpha_2=\frac{1}{2,}$, $\beta_2=\frac{3}{2}$. Donc

$$\left({}^{RL}D_0^{\frac{1}{2}}\right)g\left(t\right)=\tfrac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \left({}^{RL}D_0^{\frac{3}{2}}\right)g\left(t\right)=\left({}^{RL}D_0^{\frac{3}{2}}\right)\left(t^{\frac{1}{2}}\right)=0. \tag{1.36}$$

Tandis que

$$\left({}^{RL}D_0^{\frac{1}{2}}\right)\left({}^{RL}D_0^{\frac{3}{2}}\right)g\left(t\right)=0, \quad \left({}^{RL}D_0^{\frac{3}{2}}\right)\left({}^{RL}D_0^{\frac{1}{2}}\right)g\left(t\right)=-\tfrac{1}{4}t^{\frac{3}{2}}. \tag{1.37}$$

Lemme 1.1 *Soit f une fonction définie sur $[a,b]$ vérifiant $\left({}^{RL}D_a^{\alpha}\right)f(x)=0$, avec $\alpha\in\left]m-1,m\right[, m\in\mathbb{N}^*$. Alors*

$$f(x)=\sum_{i=0}^{m-1}b_i\tfrac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(\alpha-m+i+1)}\left(x-a\right)^{\alpha-m+i}, \tag{1.38}$$

où les b_i sont des constantes arbitraires.

Démonstration

D'après la formule (1.25), on a :

$$\left({}^{RL}D_a^{\alpha}\right)f(x)=\tfrac{d^m}{dx^m}\left(J_a^{m-\alpha}f\left(x\right)\right)=0.$$

Donc

$$J_a^{m-\alpha} f(x) = \sum_{i=0}^{m-1} b_i (x-a)^i .$$

Par application de J_a^{α} , on va avoir :

$$J_a^m f(x) = \sum_{i=0}^{m-1} b_i J_a^{\alpha} (x-a)^i = \sum_{i=0}^{m-1} b_i \frac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(\alpha+i+1)} (x-a)^{\alpha+i} .$$

Cela voudra dire que

$$f(x) = \sum_{i=0}^{m-1} b_i \frac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(\alpha+i+1)} \frac{d^m}{dx^m} (x-a)^{\alpha+i} .$$

Mais comme,

$$\frac{d^m}{dx^m} (x-a)^{\alpha+i} = (\alpha+i)(\alpha+i-1)\ldots(\alpha+i-m+1)(x-a)^{\alpha+i-m}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+i+1)}{\Gamma(\alpha+i-m+1)} (x-a)^{\alpha+i-m} ,$$

alors, le lemme 1.1 en découlle.

1.2.2 Dérivée Fractionnaire au Sens de Caputo :

Définition 1.3 *Soit $f \in C^m [a,b], m \in \mathbb{N}^*$. On définit la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre $\alpha \geq 0$ de f par :*

$$\left({}^C D_a^{\alpha}\right) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(m)}(\tau)}{(x-\tau)^{\alpha+1-m}} d\tau & ; m-1 < \alpha < m, \\ \frac{d^m}{dt^m} f(x) & ; \alpha = m. \end{cases} \tag{1.39}$$

Remarque 1.2 *On peut écrire l'expression de ${}^C D_a^{\alpha}$ sous la forme*

$$\left({}^C D_a^{\alpha}\right)(f(x)) = \begin{cases} \left(J_a^{m-\alpha}\right)\left(f^{(m)}(x)\right) \quad , & m-1 < \alpha < m, m \in \mathbb{N}^* \\ \frac{d^m}{dx^m} f(x), \quad , & \alpha = m. \end{cases} \tag{1.40}$$

Exemple 1.6 Soit $f(x) = x - a$. Alors, pour $\alpha = \frac{1}{2}$, on trouve :

$$\left({}^{C}D_a^{\alpha}\right)(f(x)) = \left(J_a^{m-\alpha}\right)\left(\frac{d^m}{dx^m}f(x)\right) = \left(J_a^{\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{d}{dx}x\right) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}(x-a)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.41}$$

Remarque 1.3

La dérivée de Caputo d'une fonction constante est nulle, (l'anomalie est ainsi rattrapée)

$$\begin{aligned}\left({}^{C}D_a^{\alpha}\right)(f(x)) &= \tfrac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_a^x (x-\tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau)d\tau \\ &= \tfrac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_a^x \left((x-\tau)^{m-\alpha-1}\times 0\right)d\tau = 0.\end{aligned} \tag{1.42}$$

Proposition 1.3

1. $\forall\alpha > 0, \mu, \lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\left({}^{C}D_a^{\alpha}\right)(\mu f(x) + \lambda g(x)) = \mu\left({}^{C}D_a^{\alpha}\right)(f(x)) + \lambda\left({}^{C}D_a^{\alpha}\right)(g(x)). \tag{1.43}$$

2. $\forall\alpha > 0$, $\forall f : [a,b] \to \mathbb{R}$, on a :

$$\left({}^{C}D_a^{\alpha}\right)(J_a^{\alpha}f) = f\ . \tag{1.44}$$

3. En général, on n'a pas

$$J_a^{\alpha}\left({}^{C}D_a^{\alpha}f\right) = f. \tag{1.45}$$

1.2.3 Riemann-Liouville et Caputo

La relation entre la dérivée de Riemann-Liouville et celle de Caputo est donnée par :

Proposition 1.4
$\forall\alpha \in \left]m-1, m\right[, m \in \mathbb{N}^*$, *on a :*

$$\left({}^{RL}D_a^{\alpha}\right)f(t) = \left({}^{C}D_a^{\alpha}\right)f(t) + \sum_{k=0}^{m-1}\frac{(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}f^{(k)}(a). \tag{1.46}$$

Démonstration
On a :

$$\left({}^{RL}D_a^{\alpha}\right)f(t) = \tfrac{d^m}{dt^m}\left(\tfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{m-\alpha-1}f(\tau)\,d\tau\right). \tag{1.47}$$

Par conséquent,

$$\left({}^{RL}D_a^{\alpha}\right) f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m}\Big(\frac{(t-a)^{m-\alpha}}{m-\alpha} f\ (a) + \frac{(t-a)^{m-\alpha+1}}{(m-\alpha)(m-\alpha+1)} f^{(1)}(a) + \frac{(t-a)^{m-\alpha+2}}{(m-\alpha)(m-\alpha+1)(m-\alpha+2)} f^{(2)}(a)$$

$$+ \frac{(t-a)^{m-\alpha+3}}{(m-\alpha)(m-\alpha+1)(m-\alpha+2)(m-\alpha+3)} f^{(3)}(a) + ... + \int_a^t \frac{(t-\tau)^{m-\alpha+n-1}}{(m-\alpha)(m-\alpha+1)...(m-\alpha+n-1)} f^{(m)}(\tau)\, d\tau\Big). \tag{1.48}$$

D'où

$$\left({}^{RL}D_a^{\alpha}\right) f(t) = \sum_{k=1}^{m-1} f^{(k)}(a) \frac{(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} + \frac{d^m}{\Gamma(m-\alpha)dt^m} \left(\int_a^t \frac{(t-\tau)^{m-\alpha+n-1}}{(m-\alpha)(m-\alpha+1)...(m-\alpha+n-1)} f^{(m)}(\tau)\, d\tau \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(a) \frac{(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \left(\int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau)\, d\tau \right). \tag{1.49}$$

Cela implique que :

$$\left({}^{RL}D_a^{\alpha}\right) f(t) = \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(a) \frac{(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} + \left({}^{C}D_a^{\alpha}\right) f(t), \tag{1.50}$$

on encore,

$$\left({}^{RL}D_a^{\alpha}\right) \left[f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right] = \left({}^{C}D_a^{\alpha}\right) f(t). \tag{1.51}$$

1.2.4 Dérivée Fractionnaire au Sens de Grünwald-Letnikov

Définition 1.4 *On définit la dérivée d'ordre $\alpha > 0$ au sens de Grünwald-Letnikov pour une fonction f* définie sur $[a, b]$ *par :*

$$\left({}^{GL}D_a^{\alpha}\right)(f(t)) = \lim_{h\to 0} \left(h^{-\alpha} \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-\alpha)} f(t-kh) \right), \tag{1.52}$$

où $0 \leq n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}^*, nh = t-a.$

On remarque au passage que si on remplace α par $-\alpha$ dans (1.52), on retrouve la formule suivante :

$$\left({}^{GL}D_a^{-\alpha}\right)(f(t)) = \lim_{h\to 0}\left(h^{\alpha}\sum_{k=0}^{n}\tfrac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha)}f(t-kh)\right)$$
$$= \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)\,d\tau. \tag{1.53}$$

Si f est de classe $C^n[a,b]$, $n \in N^*$, on a alors :

$$\left({}^{GL}D_a^{-\alpha}\right)(f(t)) = \sum_{k=0}^{n-1}\tfrac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k+\alpha}}{\Gamma(k+\alpha+1)} + \tfrac{1}{\Gamma(n+\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{n+\alpha-1} f^{(n)}(\tau)\,d\tau. \tag{1.54}$$

D'où

$$\left({}^{GL}D_a^{\alpha}\right)(f(t)) = \sum_{k=0}^{n-1}\tfrac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} + \tfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau)\,d\tau. \tag{1.55}$$

Remarque 1.4
Soit $f(t) = c$, $c \in \mathbb{R}$

On a :

$$\left({}^{GL}D_a^{\alpha}\right)(f(t)) = \sum_{k=0}^{n-1}\tfrac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} + \tfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau)\,d\tau$$

$$= \tfrac{c(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \sum_{k=1}^{n-1}\tfrac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} + \tfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau)\,d\tau \tag{1.56}$$

$$= \tfrac{c(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

Donc, la dérivée d'une fonction constante n'est pas nulle au sens de Grünwald-Letnikov.

1.2.5 Dérivées Fractionnaires de : $x \longmapsto (x-a)^{\beta}$

Calculons les dérivées fractionnaires $D^{\alpha}f(x)$ telles que :

$$f(x) = (x-a)^{\beta}, \beta \in \mathbb{R}. \tag{1.57}$$

Dérivée Fractionnaire de la Fonction $x \longmapsto (x-a)^{\beta}$ au Sens de Caputo

On applique la définition de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo, on peut écrire :

$$
\begin{aligned}
\left({}^{C}D_a^{\alpha}\right)(f(x)) &= \left(J_a^{m-\alpha}\right)\left(\tfrac{d^m}{dx^m}f(x)\right) \\
&= \left(J_a^{m-\alpha}\right)\left(\tfrac{\Gamma(\beta+m-\alpha+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}\right) \\
&= \tfrac{\Gamma(\beta+m-\alpha+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}\left(J_a^{m-\alpha}\right)(x-a)^{\beta-\alpha} \\
&= \tfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}.
\end{aligned}
\tag{1.58}
$$

Remarque 1.5 *Pour $a = 0$, on trouve :*

$$\left({}^{C}D_a^{\alpha}\right)\left(x^{\beta}\right) = \tfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}x^{\beta-\alpha}. \tag{1.59}$$

Dérivée Fractionnaire de la Fonction $x \longmapsto (x-a)^{\beta}$ au Sens de Riemann Liouville

On a :

$$
\begin{aligned}
\left({}^{RL}D_a^{\alpha}\right)(f(x)) &= \tfrac{d^m}{dx^m}\left[\tfrac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_0^x (x-\tau)^{m-\alpha-1} f(\tau)\, d\tau\right] \\
&= \tfrac{d^m}{dx^m}\left[\left(J_a^{m-\alpha}\right)\left((x-a)^{\beta}\right)\right] \\
&= \tfrac{d^m}{dx^m}\left(\tfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+m-\alpha+1)}(x-a)^{m-\alpha+\beta}\right) \\
&= \tfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+m-\alpha+1)}\tfrac{d^m}{dx^m}\left((x-a)^{m-\alpha+\beta}\right) \\
&= \tfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+m-\alpha+1)}\tfrac{\Gamma(\beta+m-\alpha+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha} \\
&= \tfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}.
\end{aligned}
\tag{1.60}
$$

Remarque 1.6 *Pour $a = 0$, on trouve :*

$$\left({}^{RL}D_a^{\alpha}\right)\left(x^{\beta}\right) = \tfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}x^{\beta-\alpha}. \tag{1.61}$$

Dérivée Fractionnaire de la Fonction $x \longmapsto (x-a)^{\beta}$ au Sens de Grünwald-Letnikov

On a :

$$\left({}^{GL}D_a^{\alpha}\right)(f(t)) = \sum_{k=0}^{n-1}\tfrac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}f(t-kh) + \tfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau)\, d\tau. \tag{1.62}$$

Mais

$$f^{(k)}(a) = 0 \quad \text{pour} \quad k = 0, 1, 2, ..., n-1,$$

et

$$f^{(n)}(a) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)} (t-a)^{\beta-n},$$

alors,

$$\left({}^{GL}D_a^\alpha\right)(f(t)) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} (\tau-a)^{\beta-n} d\tau. \tag{1.63}$$

En posant $\tau = a + s(t-a)$, on obtient donc

$$\begin{aligned}\left({}^{GL}D_a^\alpha\right)(f(t)) &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} \int_0^1 (t-a-s(t-a))^{n-\alpha-1} (s(t-a))^{\beta-n} (t-a)\, ds \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha}.\end{aligned} \tag{1.64}$$

Remarque 1.7 *Pour $a = 0$, on obtient la formule suivante*

$$\left({}^{GL}D_a^\alpha\right)\left(x^\beta\right) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} x^{\beta-\alpha}. \tag{1.65}$$

1.2.6 Dérivées Fractionnaires de : $x \longmapsto x^\gamma u(x)$

Calculons les différentes dérivées fractionnaires $D^\alpha f$ telles que :

$$f(x) = x^\gamma u(x), \tag{1.66}$$

où γ est un nombre réel.

Au Sens de Caputo :

On a :

$$\begin{aligned}\left({}^{C}D_0^\alpha\right) f(x) &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(m)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-m}} d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{\frac{d^m(\tau^\gamma u(\tau))}{d\tau^m}}{(t-\tau)^{\alpha+1-m}} d\tau.\end{aligned} \tag{1.67}$$

On sait que :

$$\frac{d^m(\tau^\gamma u(\tau))}{d\tau^m} = \sum_{k=0}^{m} \left(\begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} \frac{d^k(u(\tau))}{d\tau^k} . \frac{d^{m-k}(\tau^\gamma)}{d\tau^{m-k}} \right), \tag{1.68}$$

alors

$$\left({}^C D_0^\alpha\right)(x^\gamma u(x)) = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+1-\alpha)} x^{\gamma-\alpha} u(x) \tag{1.69}$$

Au Sens de Riemann-Liouville :

On a :

$$\begin{aligned} \left({}^{RL} D_0^\alpha\right) f(x) &= \frac{d^m}{dx^m}\left[\left(J_0^{m-\alpha}\right)(x^\gamma u(x))\right] \\ &= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+1-\alpha)} x^{\gamma-\alpha} A(x, u(x), \alpha, \gamma, m), \end{aligned} \tag{1.70}$$

où $A(x, u(x), \alpha, \gamma, m) = 1$ si $u(x) = 1$.

Au Sens de Grünwald-Letnikov :

On a :

$$\begin{aligned} \left({}^{GL} D_a^\alpha\right)(f(t)) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f(t-kh) + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau)\, d\tau \\ &= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+1-\alpha)} x^{\gamma-\alpha} B(x, u(x), \alpha, \gamma, m), \end{aligned} \tag{1.71}$$

où $B(x, u(x), \alpha, \gamma, m) = 1$ si $u(x) = 1$.

Chapitre 2

INEGALITES INTEGRALES FRACTIONNAIRES

Dans ce chapitre, nous présentons quelques résultats sur les inégalités intégrales fractionnaires. Pour plus de détail, on cite [40, 44, 45].

2.1 Inégalités Intégrales Fractionnaires de Type Qi

2.1.1 Résultats Préliminaires

Dans [8], Ngo. et al. ont démontré que

$$\int_0^1 f^{\delta+1}(\tau)\, d\tau \geq \int_0^1 \tau^{\delta} f(\tau)\, d\tau \tag{2.1}$$

et

$$\int_0^1 f^{\delta+1}(\tau)\, d\tau \geq \int_0^1 \tau f^{\delta}(\tau)\, d\tau \ , \tag{2.2}$$

tels que $\delta > 0$ et f soit une fonction continue et positive sur l'intervalle $[0, 1]$, vérifiant :

$$\int_x^1 f(\tau)\, d\tau \geq \int_x^1 \tau d\tau \quad , \quad x \in [0, 1] . \tag{2.3}$$

Dans [9] W. J. Liu et al. ont généralisé le résultat de Ngo (avec ses co auteurs) en démontrant que

$$\int_a^b f^{\delta+\beta}(\tau)\, d\tau \geq \int_a^b (\tau - a)^{\delta} f^{\beta}(\tau)\, d\tau \ , \tag{2.4}$$

où $\alpha > 0, \beta > 0$ et f est une fonction continue et positive sur l'intervalle $[a, b]$, telle que :

$$\int_x^b f^{\gamma}(\tau)\, d\tau \geq \int_x^b (\tau - a)^{\gamma}\, d\tau \quad , \quad \gamma = \min(1, \beta)\, , \ x \in [a, b] . \tag{2.5}$$

Dans [10] L. Yin et F. Qi ont montré le résultat suivant :

Théorème 2.1 *Soit* $a, b \in T$. *Si* $f \in C_{rd}(T, \mathbb{R})$ *est positive et*

$$\int_a^b f(x)\,\Delta x \geq (b-a)^{p-1} \ . \tag{2.6}$$

Alors

$$\int_a^b (f(x))^p \,\Delta x \geq \left(\int_a^b f(x)\,\Delta x\right)^{p-1} , \tag{2.7}$$

où $p > 1$ ou $p < 0$.

Si la fonction f *vérifie*

$$0 < m \leq (f(x))^p \leq M < \infty \quad , \quad x \in [a, b] , \tag{2.8}$$

alors, L. Yin et F. Qi ont prouvé que

$$\left[\int_a^b (f(x))^p \,\Delta x\right]^{\frac{1}{p}} \leq (b-a)^{-\frac{p+1}{q}} \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{p+1}{pq}} \left[\int_a^b (f(x))^{\frac{1}{p}} \,\Delta x\right]^p , \tag{2.9}$$

où $p > 1$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

D'autre part, W. T. Sulaiman [11] a prouvé le résultat suivant :

Théorème 2.2 *Soient* f *et* g *deux fonctions positives sur* $[a, b]$, *telles que* g *soit croissante. Si*

$$\int_x^b f(t)\,dt \geq \int_x^b g(t)\,dt \quad , \quad x \in [a, b] . \tag{2.10}$$

Alors

$$\int_a^b (f(x))^{\gamma-\delta}\,dx \leq \int_a^b (f(x))^{\gamma} (g(x))^{-\delta}\,dx, \quad \gamma, \delta > 0, \gamma - \delta > 1. \tag{2.11}$$

Le résultat suivant est démontré dans [11] :

Théorème 2.3 *Soient* f *et* g *deux fonctions positives sur* $[a, b]$ *telles que* f *soit croissante et* g *soit décroissante. Alors*

$$\int_a^b (f(x))^{\gamma} (g(x))^{\delta}\,dx \leq \frac{1}{b-a} \left(\int_a^b (f(x))^{\gamma}\,dx\right) \left(\int_a^b (g(x))^{\delta}\,dx\right) , \gamma, \delta > 0. \tag{2.12}$$

2.1.2 Résultats Principaux

On commence nos résultat par les lemmes suivants :

Lemme 2.1 [40] *Soient f et g deux fonctions positives et continues sur $[0,\infty[$. Alors pour tout $\alpha > 0$, on a :*

$$J^{\alpha}\left[\frac{(f(t))^{p}}{(g(t))^{\frac{p}{q}}}\right] \geq \frac{(J^{\alpha}f(t))^{p}}{(J^{\alpha}g(t))^{\frac{p}{q}}} \ , \tag{2.13}$$

où $t > 0, p > 1$ et $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Démonstration

Soient Φ et Ψ deux fonctions définies sur $[0,+\infty[$. D'après l'inégalité fractionnaire de Hôlder [51], on va avoir :

$$J^{\alpha}\left|\Phi\left(t\right)\Psi\left(t\right)\right| \leq \left(J^{\alpha}\left|\Phi\left(t\right)\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(J^{\alpha}\left|\Psi\left(t\right)\right|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}, \quad t>0, \tag{2.14}$$

où $p > 1$ et $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Posons : $\Phi\left(t\right) = \frac{f(t)}{(g(t))^{\frac{1}{q}}}$ et $\Psi\left(t\right) = \left(g\left(t\right)\right)^{\frac{1}{q}}$ dans (2.14), on obtient

$$J^{\alpha}\left(f\left(t\right)\right) = J^{\alpha}\left|\frac{f(t)}{(g(t))^{\frac{1}{q}}}\left(g\left(t\right)\right)^{\frac{1}{q}}\right| \leq \left(J^{\alpha}\left(\frac{(f(t))^{p}}{(g(t))^{\frac{p}{q}}}\right)\right)^{\frac{1}{p}}\left(J^{\alpha}\left(g\left(t\right)\right)\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{2.15}$$

D'où le lemme 2.1.

Un autre lemme utilisé dans nos résultat est le suivant :

Lemme 2.2 [40] *Soient $\alpha > 0, p > 1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ et soient f et g deux fonctions positives et continues sur $[0,\infty[$, telles que $J^{\alpha}\left(f^{p}\left(t\right)\right) < \infty, J^{\alpha}\left(g^{q}\left(t\right)\right) < \infty, t > 0$. Si*

$$0 < m \leq \frac{f(\tau)}{g(\tau)} \leq M < \infty; \quad \tau \in [0,t] \ , \tag{2.16}$$

alors on a l'inégalité suivante :

$$\left[J^{\alpha}\left(f\left(t\right)\right)\right]^{\frac{1}{p}}\left[J^{\alpha}\left(g\left(t\right)\right)\right]^{\frac{1}{q}} \leq \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{pq}} J^{\alpha}\left[\left(f\left(t\right)\right)^{\frac{1}{p}}\left(g\left(t\right)\right)^{\frac{1}{q}}\right] \ . \tag{2.17}$$

Démonstration
Pour $\tau \in [0,t], t > 0$, on a

$$\frac{f(\tau)}{g(\tau)} \leq M.$$

Ce qui donne

$$(g(\tau))^{\frac{1}{q}} \geq M^{-\frac{1}{q}} (f(\tau))^{\frac{1}{q}}. \tag{2.18}$$

Donc

$$(g(\tau))^{\frac{1}{q}} (f(\tau))^{\frac{1}{p}} \geq M^{-\frac{1}{q}} (f(\tau))^{\frac{1}{q}} (f(\tau))^{\frac{1}{p}} = M^{-\frac{1}{q}} f(\tau). \tag{2.19}$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} (g(\tau))^{\frac{1}{q}} (f(\tau))^{\frac{1}{p}} d\tau \geq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} M^{-\frac{1}{q}} f(\tau) d\tau. \tag{2.20}$$

Alors, on peut écrire :

$$J^\alpha \left[(g(t))^{\frac{1}{q}} (f(t))^{\frac{1}{p}} \right] \geq M^{-\frac{1}{q}} J^\alpha f(t). \tag{2.21}$$

D'où

$$\left(J^\alpha \left[(g(t))^{\frac{1}{q}} (f(t))^{\frac{1}{p}} \right] \right)^{\frac{1}{p}} \geq M^{-\frac{1}{pq}} (J^\alpha f(t))^{\frac{1}{p}}. \tag{2.22}$$

D'autre part, pour $\tau \in [0, t], t > 0$, on a

$$mg(\tau) \leq f(\tau).$$

Par suite

$$(f(\tau))^{\frac{1}{p}} \geq m^{\frac{1}{p}} (g(\tau))^{\frac{1}{p}}. \tag{2.23}$$

Alors,

$$(f(\tau))^{\frac{1}{p}} (g(\tau))^{\frac{1}{q}} \geq m^{\frac{1}{p}} (g(\tau))^{\frac{1}{p}} (g(\tau))^{\frac{1}{q}} = m^{\frac{1}{p}} g(\tau). \tag{2.24}$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} (f(\tau))^{\frac{1}{p}} (g(\tau))^{\frac{1}{q}} d\tau \geq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} m^{\frac{1}{p}} g(\tau) d\tau. \tag{2.25}$$

D'où

$$J^\alpha \left[(f(t))^{\frac{1}{p}} (g(t))^{\frac{1}{q}} \right] \geq m^{\frac{1}{p}} J^\alpha g(t). \tag{2.26}$$

Donc, on obtient

$$\left(J^{\alpha}\left[(f(t))^{\frac{1}{p}}(g(t))^{\frac{1}{q}}\right]\right)^{\frac{1}{q}} \geq m^{\frac{1}{pq}}\left(J^{\alpha}g(t)\right)^{\frac{1}{q}}\ . \tag{2.27}$$

D'après les formules (2.22) et (2.27), on trouve l'inégalité (2.17) . D'où le lemme 2.2.

Remarque 2.1 *Si on prend $\alpha = 1$, alors le lemme 2.2 devient le théorème 2.1 dans [12] sur l'intervalle $[0, t]\,, t > 0$.*

Un autre lemme est donné par :

Lemme 2.3 [40] *Soient $\alpha > 0$, f et g deux fonctions positives et continues sur l'intervalle $[0, \infty[$, telles que $J^{\alpha}(f^{p}(t)) < \infty, J^{\alpha}(g^{q}(t)) < \infty, t > 0$. Si*

$$0 < m \leq \tfrac{(f(\tau))^{p}}{(g(\tau))^{q}} \leq M < \infty; \quad \tau \in [0, t]\ , \tag{2.28}$$

alors, on a :

$$\left[J^{\alpha}(f^{p}(t))\right]^{\frac{1}{p}}\left[J^{\alpha}(g^{q}(t))\right]^{\frac{1}{q}} \leq \left(\tfrac{M}{m}\right)^{\frac{1}{pq}} J^{\alpha}\left[f(t)\,g(t)\right]\ , \tag{2.29}$$

où $p > 1$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Démonstration

En remplaçant $f(\tau)$ et $g(\tau)$ respectivement par $f((\tau))^{p}$ et $(g(\tau))^{q}\,, \tau \in [0, t]\,, t > 0$ dans le lemme 2.2, on trouve (2.29) .

Le premier résultat principal est donné par :

Théorème 2.4 [40] *Soient $\alpha > 0, p > 1$ et f une fonction positive et continue sur l'intervalle $[0, \infty[$, telles que pour tout $t > 0$,*

$$J^{\alpha}(f(t)) \geq \left(\tfrac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)^{p-1}. \tag{2.30}$$

Alors, on a :

$$J^{\alpha}(f^{p}(t)) \geq \left(J^{\alpha}(f(t))\right)^{p-1}\ . \tag{2.31}$$

Démonstration

En utilisant le lemme 2.1 et la condition (2.30), on obtient

$$J^{\alpha}(f^{p}(t)) = J^{\alpha}\left(\tfrac{f^{p}(t)}{1^{p-1}}\right) \geq \tfrac{(J^{\alpha}f(t))^{p}}{(J^{\alpha}1)^{p-1}} = \left(\tfrac{\Gamma(\alpha+1)}{t^{\alpha}}\right)^{p-1}(J^{\alpha}f(t))^{p} \geq (J^{\alpha}f(t))^{p-1}\,. \tag{2.32}$$

D'où le Théorème 2.4.

Remarque 2.2 *Si on prend $\alpha = 1$, alors le Théorème 2.4 devient le Théorème A dans [13].*

Notre deuxième résultat principal est donné par le théorème suivant :

Théorème 2.5 [40] *Soient $\alpha > 0, p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et f une fonction positive et continue sur l'intervalle $[0, \infty[$, telles que pour tout $t > 0, J^{\alpha}(f^{p}(t)) < \infty$. Si*

$$0 < m \leq f^{p}(t) \leq M < \infty,\ \tau \in [0,t]\ , \tag{2.33}$$

alors, on a :

$$\left[J^{\alpha}\left(f^{p}(t)\right)\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left(\tfrac{M}{m}\right)^{\frac{p+1}{pq}} \left(\tfrac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)^{-\frac{p+1}{q}} \left(J^{\alpha}\left(f^{\frac{1}{p}}(t)\right)\right)^{p}. \tag{2.34}$$

Démonstration
Posons $g \equiv 1$ dans le lemme 2.3, on obtient

$$\left[J^{\alpha}\left(f^{p}(t)\right)\right]^{\frac{1}{p}} \left[J^{\alpha}\left(1^{q}\right)\right]^{\frac{1}{q}} \leq \left(\tfrac{M}{m}\right)^{\frac{1}{pq}} J^{\alpha}\left[f(t).1\right]. \tag{2.35}$$

Ce qui donne

$$\left[J^{\alpha}\left(f^{p}(t)\right)\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left(\tfrac{M}{m}\right)^{\frac{1}{pq}} \left(\tfrac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)^{-\frac{1}{q}} J^{\alpha}\left[f(t)\right]. \tag{2.36}$$

Posons $g \equiv 1$ dans le lemme 2.2, on récupère l'inégalité suivante :

$$\left[J^{\alpha}\left(f(t)\right)\right]^{\frac{1}{p}} \left[J\left(1^{q}\right)\right]^{\frac{1}{q}} \leq \left(\tfrac{M}{m}\right)^{\frac{1}{pq}} J^{\alpha}\left[f^{\frac{1}{p}}(t).1^{\frac{1}{q}}\right]. \tag{2.37}$$

Donc, on a

$$\left[J^{\alpha}\left(f(t)\right)\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left(\tfrac{M}{m}\right)^{\frac{1}{pq}} \left(\tfrac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)^{-\frac{1}{q}} J^{\alpha}\left[f^{\frac{1}{p}}(t)\right]. \tag{2.38}$$

Alors, on peut écrire

$$J^{\alpha}\left(f(t)\right) \leq \left(\tfrac{M}{m}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\tfrac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)^{-\frac{p}{q}} \left(J^{\alpha}\left[f^{\frac{1}{p}}(t)\right]\right)^{p}. \tag{2.39}$$

D'après (2.36) et (2.39), on trouve (2.34).

Remarque 2.3 *Si on prend $\alpha = 1$ dans le Théorème 2.5, on trouve l'inégalité* (2.9).

On donne aussi le théorème suivant :

Théorème 2.6 [40] *Soient f et g deux fonctions positives et continues sur l'intervalle* $[0,\infty[$, *telles que la fonction g soit croissante. Si*

$$J^{\alpha}f\left(t\right)\geq J^{\alpha}g\left(t\right), \quad t>0\ , \tag{2.40}$$

alors, pour tout $\gamma,\delta>0,\alpha>0,\gamma-\delta\geq1$, on a :

$$J^{\alpha}f^{\gamma-\delta}\left(t\right)\leq J^{\alpha}f^{\gamma}\left(t\right)g^{-\delta}\left(t\right). \tag{2.41}$$

Démonstration
En utilisant l'inégalité arithmétique-géométrique pour $\gamma>0,\delta>0$, on a :

$$\tfrac{\gamma}{\gamma-\delta}f^{\gamma-\delta}\left(x\right)-\tfrac{\delta}{\gamma-\delta}g^{\gamma-\delta}\left(x\right)\leq f^{\gamma}\left(x\right)g^{-\delta}\left(x\right), \quad x\in\left[0,t\right],t>0. \tag{2.42}$$

On multiplie les deux membres de (2.42) par $\frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$, $x\in\left[0,t\right]$, on obtient

$$\tfrac{\gamma}{\gamma-\delta}\tfrac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f^{\gamma-\delta}\left(x\right)-\tfrac{\delta}{\gamma-\delta}\tfrac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}g^{\gamma-\delta}\left(x\right)\leq\tfrac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f^{\gamma}\left(x\right)g^{-\delta}\left(x\right). \tag{2.43}$$

Par une intégration par rapport à x sur $[0,t]$, on aura :

$$\left(\tfrac{1}{(\gamma-\delta)\Gamma(\alpha)}\right)\int_{0}^{t}\gamma\left(t-x\right)^{\alpha-1}f^{\gamma-\delta}\left(x\right)-\delta\left(t-x\right)^{\alpha-1}g^{\gamma-\delta}\left(x\right)dx\leq\tfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{t}\left(t-x\right)^{\alpha-1}f^{\gamma}\left(x\right)g^{-\delta}\left(x\right)dx. \tag{2.44}$$

Par conséquent,

$$\tfrac{\gamma}{(\gamma-\delta)}J^{\alpha}f^{\gamma-\delta}\left(t\right)-\tfrac{\delta}{(\gamma-\delta)}J^{\alpha}g^{\gamma-\delta}\left(t\right)\leq J^{\alpha}\left(f^{\gamma}\left(t\right)g^{-\delta}\left(t\right)\right). \tag{2.45}$$

Cela voudra dire que

$$\begin{aligned}\tfrac{\gamma}{(\gamma-\delta)}J^{\alpha}f^{\gamma-\delta}\left(t\right)&\leq J^{\alpha}\left(f^{\gamma}\left(t\right)g^{-\delta}\left(t\right)\right)+\tfrac{\delta}{(\gamma-\delta)}J^{\alpha}g^{\gamma-\delta}\left(t\right)\\&\leq J^{\alpha}\left(f^{\gamma}\left(t\right)g^{-\delta}\left(t\right)\right)+\tfrac{\delta}{(\gamma-\delta)}J^{\alpha}f^{\gamma-\delta}\left(t\right).\end{aligned} \tag{2.46}$$

Donc, on obtient l'inégalité (2.41).

Remarque 2.4 *Si on prend $\alpha=1$ dans le Théorème 2.6, on trouve le Théorème 2.2 sur l'intervalle* $\left[0,t\right],t>0$.

Théorème 2.7 [40] *Soient* $\alpha > 0, f$ *et* g *deux fonctions positives et continues sur l'intervalle* $[0, \infty[$*, telles que la fonction* f *soit croissante et* g *soit décroissante. Alors, pour tout* $\gamma > 0, \delta > 0, t > 0$*, on a :*

$$J^{\alpha}\left(f^{\gamma}(t)\, g^{\delta}(t)\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{t^{\alpha}} J^{\alpha}\left(f^{\gamma}(t)\right) J^{\alpha}\left(g^{\delta}(t)\right). \tag{2.47}$$

Démonstration
Soient $x, y \in [0, t], t > 0$. Pour tout $\gamma > 0, \delta > 0$, on a

$$\left(f^{\gamma}(x) - f^{\gamma}(y)\right)\left(g^{\delta}(y) - g^{\delta}(x)\right) \geq 0. \tag{2.48}$$

Alors, on peut écrire

$$f^{\gamma}(x)\, g^{\delta}(y) + f^{\gamma}(y)\, g^{\delta}(x) \geq f^{\gamma}(y)\, g^{\delta}(y) + f^{\gamma}(x)\, g^{\delta}(x). \tag{2.49}$$

Par conséquent,

$$J^{\alpha}\left(f^{\gamma}(t)\, g^{\delta}(t)\right) + \frac{t^{\alpha}}{\alpha\Gamma(\alpha)} f^{\gamma}(y)\, g^{\delta}(y) \leq g^{\delta}(y)\, J^{\alpha}\left(f^{\gamma}(t)\right) + f^{\gamma}(y)\, J^{\alpha}\left(g^{\delta}(t)\right). \tag{2.50}$$

On multiplie les deux membres de (2.50) par $\frac{(t-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$, $y \in [0, t]$, on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{(t-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} J^{\alpha}\left(f^{\gamma}(t)\, g^{\delta}(t)\right) + \frac{(t-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{t^{\alpha}}{\alpha\Gamma(\alpha)} f^{\gamma}(y)\, g^{\delta}(y) \\ &\leq \frac{(t-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g^{\delta}(y)\, J^{\alpha}\left(f^{\gamma}(t)\right) + \frac{(t-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f^{\gamma}(y)\, J^{\alpha}\left(g^{\delta}(t)\right). \end{aligned} \tag{2.51}$$

Par une intégration par rapport à y sur $[0, t]$, on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Gamma(\alpha)} J^{\alpha}\left(f^{\gamma}(t)\, g^{\delta}(t)\right) \int_0^t (t-y)^{\alpha-1}\, dy + \frac{t^{\alpha}}{\alpha\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-y)^{\alpha-1} f^{\gamma}(y)\, g^{\delta}(y)\, dy \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} J^{\alpha}\left(f^{\gamma}(t)\right) \int_0^t (t-y)^{\alpha-1} g^{\delta}(y)\, dy + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} J^{\alpha}\left(g^{\delta}(t)\right) \int_0^t (t-y)^{\alpha-1} f^{\gamma}(y)\, dy. \end{aligned} \tag{2.52}$$

D'où

$$\frac{t^{\alpha}}{\alpha\Gamma(\alpha)} J^{\alpha}\left(f^{\gamma}(t)\, g^{\delta}(t)\right) + \frac{t^{\alpha}}{\alpha\Gamma(\alpha)} J^{\alpha}\left(f^{\gamma}(t)\, g^{\delta}(t)\right) \leq J^{\alpha}\left(f^{\gamma}(t)\right) J^{\alpha}\left(g^{\delta}(t)\right) + J^{\alpha}\left(f^{\gamma}(t)\right) J^{\alpha}\left(g^{\delta}(t)\right). \ \blacksquare \tag{2.53}$$

Alors,

$$\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} J^{\alpha} \left(f^{\gamma}(t) g^{\delta}(t) \right) \leq J^{\alpha} \left(f^{\gamma}(t) \right) J^{\alpha} \left(g^{\delta}(t) \right). \tag{2.54}$$

Le Théorème 2.7 est démontré.

Remarque 2.5 *Si on prend* $\alpha = 1$ *dans le Théorème 2.7, on trouve le Théorème 2.3 sur l'intervalle* $[0, t], t > 0$.

Théorème 2.8 [40] *Soient* f *et* g *deux fonctions positives et continues sur* $[0, \infty[$, *telles que la fonction* f *soit croissante et* g *décroissante. Alors, pour tout* $\alpha > 0, \beta > 0, t > 0$, *on a :*

$$\frac{t^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} J^{\alpha} \left(f^{\gamma}(t) g^{\delta}(t) \right) + \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} J^{\beta} \left(f^{\gamma}(t) g^{\delta}(t) \right) \leq J^{\alpha} \left(f^{\gamma}(t) \right) J^{\beta} \left(g^{\delta}(t) \right) + J^{\beta} \left(f^{\gamma}(t) \right) J^{\alpha} \left(g^{\delta}(t) \right). \tag{2.55}$$

Démonstration
En utilisant (2.50), on trouve

$$\begin{aligned} &J^{\alpha} \left(f^{\gamma}(t) g^{\delta}(t) \right) \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-y)^{\beta-1} dy + \frac{t^{\beta}}{\alpha \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \int_0^t (t-y)^{\beta-1} f^{\gamma}(y) g^{\delta}(y) dy \\ &\leq \frac{J^{\alpha}(f^{\gamma}(t))}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-y)^{\beta-1} g^{\delta}(y) dy + \frac{J^{\alpha}\left(g^{\delta}(t)\right)}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-y)^{\beta-1} f^{\gamma}(y) dy. \end{aligned} \tag{2.56}$$

Ce qui implique l'inégalité (2.55).

D'où le Théorème 2.8.

Remarque 2.6 *Si on prend* $\alpha = \beta$ *dans le Théorème 2.8, on obtient le Théorème 2.7.*

2.2 Différence de Cauchy-Schwarz et Inégalité de Cassel

Dans ce qui suit, nous présentons de nouveaux résultats sur les inégalités intégrales fractionnaires en utilisant la différence de Cauchy-Schwarz ainsi que l'inégalité de Cassel.

2.2.1 Rappel

On considère la quantité

$$R_{a,b}(p,q,f,g)=\left(\int_a^b pf^2(x)\,dx\right)\left(\int_a^b qg^2(x)\,dx\right)+\left(\int_a^b qf^2(x)\,dx\right)\left(\int_a^b pg^2(x)\,dx\right)$$

$$-2\left(\int_a^b p\,|fg|(x)\,dx\right)\left(\int_a^b q\,|fg|(x)\,dx\right), \tag{2.57}$$

telle que f et g soient deux fonctions continues sur l'intervalle $[a,b]$, p et q soient des fonctions positives et continues sur $[a,b]$.

Dans le cas où $p=q$, S.S. Dragomir a montré l'inégalité suivante :

$$0<R_{1,\Omega}(p,f,g)=R_{1,\Omega}(p,p,f,g)\leq\frac{(M-m)^2}{2mM}\int_\Omega (p\,|fg|(x))\,d\mu(x), \tag{2.58}$$

où f et g sont Lebesgue $\mu-$mésurable et pf^2, pg^2 sont Lebesgue $\mu-$intégrable sur Ω et $0<m\leq\left|\frac{f(\tau)}{g(\tau)}\right|\leq M<\infty$.

Notre but est de présenter de nouveaux résultats généralisant les travaux de S.S. Dragomer et d'autres résultats liés à l'inégalité de Cassel [46, 47, 48, 49, 50].

2.2.2 Résultats Principaux

Théorème 2.9 [45] *Supposons que f et g sont deux fonctions continues sur l'intervalle $[0,+\infty[$ et P,Q deux fonctions positives continues sur $[0,+\infty[$ telles que $P\left|\frac{f}{g}\right|$, $P\left|\frac{g}{f}\right|$, $Q\left|\frac{f}{g}\right|$, $Q\left|\frac{g}{f}\right|$, Pf^2, Qf^2 et Qg^2 sont intégrables sur $[0,+\infty[$. S'il existe deux réels $m,M>0$ tels que*

$$0<m\leq|f(\tau)\,g(\tau)|\leq M\quad,\ \tau\in[0,t]\,,t>0, \tag{2.59}$$

alors, on a :

$$m^2\left(J^\alpha\left(Q\left|\tfrac{f}{g}\right|(t)\right)J^\alpha\left(P\left|\tfrac{g}{f}\right|(t)\right)+J^\alpha\left(P\left|\tfrac{f}{g}\right|(t)\right)J^\alpha\left(Q\left|\tfrac{g}{f}\right|(t)\right)-2J^\alpha(Q(t))\,J^\alpha(P(t))\right)$$

$$\leq J^\alpha(Pf^2(t))\,J^\alpha(Qg^2(t))+J^\alpha(Qf^2(t))\,J^\alpha(Pg^2(t))-2J^\alpha(P\,|fg|(t))\,J^\alpha(Q\,|fg|(t))$$

$$\leq M^2\left(J^\alpha\left(Q\left|\tfrac{f}{g}\right|(t)\right)J^\alpha\left(P\left|\tfrac{g}{f}\right|(t)\right)+J^\alpha\left(P\left|\tfrac{f}{g}\right|(t)\right)J^\alpha\left(Q\left|\tfrac{g}{f}\right|(t)\right)-2J^\alpha(Q(t))\,J^\alpha(P(t))\right), \tag{2.60}$$

pour tout $\alpha > 0, t > 0$.

Démonstration
Dans l'identité

$$\frac{1}{2}\left(u^2+v^2\right)-uv=\frac{uv}{2}\left(\sqrt{\frac{u}{v}}-\sqrt{\frac{v}{u}}\right)^2, \tag{2.61}$$

on prend $u = |f(\tau)g(\rho)|$ et $v = |f(\rho)g(\tau)|$, $\tau, \rho \in [0,t], t > 0$. On peut alors écrire

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left(f^2(\tau)g^2(\rho)+f^2(\rho)g^2(\tau)\right)-|f(\tau)g(\rho)||f(\rho)g(\tau)|\\&=\frac{1}{2}|f(\tau)g(\rho)||f(\rho)g(\tau)|\left(\sqrt{\left|\frac{f}{g}(\tau)\right|\left|\frac{g}{f}(\rho)\right|}-\sqrt{\left|\frac{f}{g}(\rho)\right|\left|\frac{g}{f}(\tau)\right|}\right)^2.\end{aligned} \tag{2.62}$$

D'autre part, on a :

$$\left(\sqrt{\left|\frac{f}{g}(\tau)\right|\left|\frac{g}{f}(\rho)\right|}-\sqrt{\left|\frac{f}{g}(\rho)\right|\left|\frac{g}{f}(\tau)\right|}\right)^2=\left|\frac{f}{g}(\tau)\right|\left|\frac{g}{f}(\rho)\right|+\left|\frac{f}{g}(\rho)\right|\left|\frac{g}{f}(\tau)\right|-2. \tag{2.63}$$

En utilisant (2.63) et la condition (2.59) , on peut écrire

$$\begin{aligned}&\frac{m^2}{2}\left(\left|\frac{f}{g}\right|(\tau)\left|\frac{g}{f}\right|(\rho)+\left|\frac{f}{g}\right|(\rho)\left|\frac{g}{f}\right|(\tau)-2\right)\\&\leq\frac{1}{2}\left(f^2(\tau)g^2(\rho)+f^2(\rho)g^2(\tau)\right)-|fg(\tau)||fg(\rho)|\\&\leq\frac{M^2}{2}\left(\left|\frac{f}{g}\right|(\tau)\left|\frac{g}{f}\right|(\rho)+\left|\frac{f}{g}\right|(\rho)\left|\frac{g}{f}\right|(\tau)-2\right).\end{aligned} \tag{2.64}$$

On multiplie les deux membres de (2.64) par $\frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}P(\tau)$ et par intégration par rapport à τ sur $[0,t]$, on obtient

$$\begin{aligned}&\frac{m^2}{2}\left(J^\alpha\left(P\left|\frac{f}{g}\right|(t)\right)\left|\frac{g}{f}\right|(\rho)+\left|\frac{f}{g}\right|(\rho)J^\alpha\left(P\left|\frac{g}{f}\right|(t)\right)-2J^\alpha(P(t))\right)\\&\leq\frac{1}{2}\left(g^2(\rho)J^\alpha\left(Pf^2(t)\right)+f^2(\rho)J^\alpha\left(Pg^2(t)\right)\right)-|fg(\rho)|J^\alpha(P|fg(\tau)|)\\&\leq\frac{M^2}{2}\left(J^\alpha\left(P\left|\frac{f}{g}\right|(t)\right)\left|\frac{g}{f}\right|(\rho)+\left|\frac{f}{g}\right|(\rho)J^\alpha\left(P\left|\frac{g}{f}\right|(t)\right)-2J^\alpha(P(t))\right).\end{aligned} \tag{2.65}$$

On multiplie les membres de (2.65) par $\frac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}Q(\rho)$ et par intégration par rapport à ρ sur $[0,t]$, on récupère :

$$\frac{m^2}{2}\left(J^\alpha\left(P\left|\frac{f}{g}\right|(t)\right)J^\alpha\left(Q\left|\frac{g}{f}\right|(t)\right)+J^\alpha\left(Q\left|\frac{f}{g}\right|(t)\right)J^\alpha\left(P\left|\frac{g}{f}\right|(t)\right)-2J^\alpha(P(t))J^\alpha(Q(t))\right)$$

$$\leq\frac{1}{2}\left(J^\alpha\left(Qg^2(t)\right)J^\alpha\left(Pf^2(t)\right)+J^\alpha\left(Qf^2(t)\right)J^\alpha\left(Pg^2(t)\right)\right)-J^\alpha\left(Q\left|fg(t)\right|\right)J^\alpha\left(P\left|fg(t)\right|\right)$$

$$\leq\frac{M^2}{2}\left(J^\alpha\left(P\left|\frac{f}{g}\right|(t)\right)J^\alpha\left(Q\left|\frac{g}{f}\right|(t)\right)+J^\alpha\left(Q\left|\frac{f}{g}\right|(t)\right)J^\alpha\left(P\left|\frac{g}{f}\right|(t)\right)-2J^\alpha(P(t))J^\alpha(Q(t))\right). \tag{2.66}$$

D'où le Théorème 2.9.

Remarque 2.7 En *appliquant le Théorème 2.9 pour* $P=Q,\alpha=1$ *et* $d\mu(\tau)=d\tau$, *on trouve le Théorème1 de [46] sur* $[0,t],t>0$.

Théorème 2.10 [45] *Supposons que* f *et* g *sont deux fonctions continues sur l'intervalle* $[0,+\infty[$ *et* P,Q *sont deux fonctions positives continues sur* $[0,+\infty[$ *telles que* $P\left|\frac{f}{g}\right|,P\left|\frac{g}{f}\right|,Q\left|\frac{f}{g}\right|,Q\left|\frac{g}{f}\right|,$ ... Qg^2 *soientt intégrables sur* $[0,+\infty[$. *S'il existent* $m,M>0$ *tels que*

$$0<m\leq|f(\tau)g(\tau)|\leq M\quad,\ \tau\in[0,t],t>0, \tag{2.67}$$

alors, on a :

$$m^2\left(J^\beta\left(Q\left|\frac{f}{g}\right|(t)\right)J^\alpha\left(P\left|\frac{g}{f}\right|(t)\right)+J^\alpha\left(P\left|\frac{f}{g}\right|(t)\right)J^\beta\left(Q\left|\frac{g}{f}\right|(t)\right)-2J^\beta(Q(t))J^\alpha(P(t))\right)$$

$$\leq J^\alpha\left(Pf^2(t)\right)J^\beta\left(Qg^2(t)\right)+J^\beta\left(Qf^2(t)\right)J^\alpha\left(Pg^2(t)\right)-2J^\alpha\left(P\left|fg\right|(t)\right)J^\beta\left(Q\left|fg\right|(t)\right)$$

$$\leq M^2\left(J^\beta\left(Q\left|\frac{f}{g}\right|(t)\right)J^\alpha\left(P\left|\frac{g}{f}\right|(t)\right)+J^\alpha\left(P\left|\frac{f}{g}\right|(t)\right)J^\beta\left(Q\left|\frac{g}{f}\right|(t)\right)-2J^\beta(Q(t))J^\alpha(P(t))\right), \tag{2.68}$$

pour tout $\alpha,\beta>0,t>0$.

Démonstration
On multiplie les membres de (2.65) par $\frac{(t-\rho)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)}Q(\rho)$ et par intégration par rapport à ρ sur $[0,t]$, on obtient :

$$\frac{m^2}{2}\left(J^{\alpha}\left(P\left|\frac{f}{g}\right|(t)\right)J^{\beta}\left(Q\left|\frac{g}{f}\right|(t)\right)+J^{\beta}\left(Q\left|\frac{f}{g}\right|(t)\right)J^{\alpha}\left(P\left|\frac{g}{f}\right|(t)\right)-2J^{\alpha}(P(t))J^{\beta}(Q(t))\right)$$

$$\leq\frac{1}{2}\left(J^{\beta}\left(Qg^2(t)\right)J^{\alpha}\left(Pf^2(t)\right)+J^{\beta}\left(Qf^2(t)\right)J^{\alpha}\left(Pg^2(t)\right)\right)-J^{\beta}(Q\left|fg(t)\right|)J^{\alpha}(P\left|fg(t)\right|)$$

$$\leq\frac{M^2}{2}\left(J^{\alpha}\left(P\left|\frac{f}{g}\right|(t)\right)J^{\beta}\left(Q\left|\frac{g}{f}\right|(t)\right)+J^{\beta}\left(Q\left|\frac{f}{g}\right|(t)\right)J^{\alpha}\left(P\left|\frac{g}{f}\right|(t)\right)-2J^{\alpha}(P(t))J^{\beta}(Q(t))\right). \tag{2.69}$$

D'où la démonstration du Théorème 2.10.

Remarque 2.8 *Le Théorème 2.9 est un cas particulier du Thèorème 2.10.*

Théorème 2.11 [45] *Soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[0,+\infty[$ et P,Q deux fonctions positives continues sur $[0,+\infty[$ telles que Pf^2, Pg^2, Qf^2 et Qg^2 soient intégrables sur $[0,+\infty[$. S'il existe deux réels $m,M>0$ tels que*

$$0<m\leq\left|\frac{f(\tau)}{g(\tau)}\right|\leq M \quad , \ \tau\in[0,t]\,,t>0, \tag{2.70}$$

alors, on a :

$$J^{\alpha}\left(Pf^2(t)\right)J^{\alpha}\left(Qg^2(t)\right)-J^{\alpha}(P\left|fg\right|(t))J^{\alpha}(Q\left|fg\right|(t))$$
$$\leq\frac{(M-m)^2}{4Mm}J^{\alpha}(P\left|fg\right|(t))J^{\alpha}(Q\left|fg\right|(t)), \tag{2.71}$$

pour tout $\alpha>0,t>0$.

Démonstration
D'après la condition $\left|\frac{f(\tau)}{g(\tau)}\right|\leq M \quad , \tau\in[0,t]\,,t>0$, on a

$$f^2(\tau)\leq M\left|f(\tau)\right|\left|g(\tau)\right| \ ,\tau\in[0,t]\,,t>0. \tag{2.72}$$

Alors

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}P(\tau)f^2(\tau)\,d\tau\leq M\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}P(\tau)\left|f(\tau)\right|\left|g(\tau)\right|d\tau. \tag{2.73}$$

Par conséquent

$$J^{\alpha}\left(Pf^2(t)\right)\leq MJ^{\alpha}(P\left|fg\right|(t)). \tag{2.74}$$

Et d'après la condition $m\leq\left|\frac{f(\tau)}{g(\tau)}\right|$, $\tau\in[0,t]\,,t>0$, on peut écrire

$$mg^2(\tau)\leq\left|f(\tau)\,g(\tau)\right| \ ,\tau\in[0,t]\,,t>0. \tag{2.75}$$

Cela implique que

$$\frac{m}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} Q(\tau) g^2(\tau) d\tau \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} Q(\tau) |f(\tau) g(\tau)| d\tau. \tag{2.76}$$

D'où

$$mJ^\alpha (Qg^2(t)) \leq J^\alpha (Q|fg|(t)). \tag{2.77}$$

Par multiplication de (2.74) et (2.77), on trouve

$$J^\alpha (Pf^2(t)) J^\alpha (Qg^2(t)) \leq \frac{M}{m} J^\alpha (P|fg|(t)) J^\alpha (Q|fg|(t)). \tag{2.78}$$

En utilisant le lemme 3 de [52] et le théorème 1 de [53], on obtient :

$$\begin{aligned} &J^\alpha (Pf^2(t)) J^\alpha (Qg^2(t)) \\ &\leq \frac{(M+m)^2}{4Mm} J^\alpha (P|fg|(t)) J^\alpha (Q|fg|(t)), \end{aligned} \tag{2.79}$$

D'où la démonstration du Théorème 2.11.

Remarque 2.9 *Si on prend $\alpha = 1$ et $Q = P$, on obtient l'inégalité de Cassel [47, 48] sur* $[0,t], t > 0$.

Théorème 2.12 [45] *Soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[0,+\infty[$ et P, Q deux fonctions positives continues sur $[0,+\infty[$ telles que Pf^2, Pg^2, Qf^2 et Qg^2 soient intégrables sur $[0,+\infty[$. S'il existe deux réels $m, M > 0$ tels que*

$$0 < m \leq \left|\frac{f(\tau)}{g(\tau)}\right| \leq M \quad, \ \tau \in [0,t], t > 0, \tag{2.80}$$

alors, on a :

$$\begin{aligned} &J^\alpha (Pf^2(t)) J^\beta (Qg^2(t)) - J^\alpha (P|fg|(t)) J^\beta (Q|fg|(t)) \\ &\leq \frac{(M-m)^2}{4Mm} J^\alpha (P|fg|(t)) J^\beta (Q|fg|(t)), \end{aligned} \tag{2.90}$$

pour tout $\alpha, \beta > 0, t > 0$

.

Démonstration
On a

$$mg^2(\tau) \leq |f(\tau) g(\tau)| \ , \tau \in [0,t], t > 0. \tag{2.91}$$

Et donc

$$\frac{m}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} Q(\tau) g^2(\tau) d\tau \leq \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} Q(\tau) |f(\tau) g(\tau)| d\tau. \tag{2.92}$$

Par conséquent

$$mJ^\beta (Qg^2(t)) \leq J^\beta (Q|fg|(t)). \tag{2.93}$$

Par multiplication de (2.74) et (2.84), on trouve

$$J^{\alpha}\left(Pf^{2}\left(t\right)\right)J^{\beta}\left(Qg^{2}\left(t\right)\right)\leq\tfrac{M}{m}J^{\alpha}\left(P\left|fg\right|\left(t\right)\right)J^{\beta}\left(Q\left|fg\right|\left(t\right)\right),\tag{2.94}$$

En utilisant le lemme 6 de [52] et le théorème 3 de [53] on obtient :
on obtient

$$\begin{gathered}J^{\alpha}\left(Pf^{2}\left(t\right)\right)J^{\beta}\left(Qg^{2}\left(t\right)\right)\\ \leq\tfrac{(M+m)^{2}}{4Mm}J^{\alpha}\left(P\left|fg\right|\left(t\right)\right)J^{\beta}\left(Q\left|fg\right|\left(t\right)\right),\end{gathered}\tag{2.95}$$

D'où la démonstration du Théorème 2.12.

Corollaire 2.1 [45] *Supposons que F et G sont des fonctions continues sur l'intervalle $[0,+\infty[$ et P,Q deux fonctions positives continues sur $[0,+\infty[$ telles que $P\left|\frac{F}{G}\right|,P\left|\frac{G}{F}\right|,Q\left|\frac{F}{G}\right|,Q\left|\frac{G}{F}\right|,PF$ et QG^{2} soient intégrables sur $[0,+\infty[$. S'il existe des réels $n,N,M>0$ tels que*

$$\left|F\left(\tau\right)G\left(\tau\right)\right|\leq M,\tag{2.96}$$

et

$$0<n\leq\left|\tfrac{F(\tau)}{G(\tau)}\right|\leq N\quad,\ \tau\in\left[0,t\right],t>0,\tag{2.97}$$

alors, on a :

$$\begin{gathered}J^{\alpha}\left(PF^{2}\left(t\right)\right)J^{\alpha}\left(QG^{2}\left(t\right)\right)+J^{\alpha}\left(QF^{2}\left(t\right)\right)J^{\alpha}\left(PG^{2}\left(t\right)\right)-2J^{\alpha}\left(P\left|FG\right|\left(t\right)\right)J^{\alpha}\left(Q\left|FG\right|\left(t\right)\right)\\ \leq\tfrac{M^{2}(N-n)^{2}}{2Nn}J^{\alpha}\left(P\left(t\right)\right)J^{\alpha}\left(Q\left(t\right)\right),\end{gathered}\tag{2.98}$$

pour tout $\alpha>0,t>0$.

Démonstration
Dans le Théorème 2.11, on prend $f=\sqrt{\left|\frac{F}{G}\right|}$ et $g=\sqrt{\left|\frac{G}{F}\right|}$. On trouve

$$\begin{gathered}J^{\alpha}\left(P\left|\tfrac{F}{G}\right|\left(t\right)\right)J^{\alpha}\left(Q\left|\tfrac{G}{F}\right|\left(t\right)\right)-J^{\alpha}\left(P\left(t\right)\right)J^{\alpha}\left(Q\left(t\right)\right)\\ \leq\tfrac{(N-n)^{2}}{4Nn}J^{\alpha}\left(P\left(t\right)\right)J^{\alpha}\left(Q\left(t\right)\right).\end{gathered}\tag{2.99}$$

Et si on prend $g=\sqrt{\left|\frac{F}{G}\right|}$ et $f=\sqrt{\left|\frac{G}{F}\right|}$ dans le Théorème 2.11, on trouve

$$\begin{gathered}J^{\alpha}\left(P\left|\tfrac{G}{F}\right|\left(t\right)\right)J^{\alpha}\left(Q\left|\tfrac{F}{G}\right|\left(t\right)\right)-J^{\alpha}\left(P\left(t\right)\right)J^{\alpha}\left(Q\left(t\right)\right)\\ \leq\tfrac{(N-n)^{2}}{4Nn}J^{\alpha}\left(P\left(t\right)\right)J^{\alpha}\left(Q\left(t\right)\right).\end{gathered}\tag{2.100}$$

Par la somme de (2.99) et (2.90) , on trouve

$$J^{\alpha}\left(P\left|\tfrac{F}{G}\right|(t)\right)J^{\alpha}\left(Q\left|\tfrac{G}{F}\right|(t)\right)+J^{\alpha}\left(P\left|\tfrac{G}{F}\right|(t)\right)J^{\alpha}\left(Q\left|\tfrac{F}{G}\right|(t)\right)-2J^{\alpha}\left(P\left(t\right)\right)J^{\alpha}\left(Q\left(t\right)\right)$$

$$\leq \tfrac{(N-n)^2}{2Nn}J^{\alpha}\left(P\left(t\right)\right)J^{\alpha}\left(Q\left(t\right)\right). \tag{2.101}$$

D'après le théorème 2.9, on a

$$J^{\alpha}\left(PF^{2}\left(t\right)\right)J^{\alpha}\left(QG^{2}\left(t\right)\right)+J^{\alpha}\left(QF^{2}\left(t\right)\right)J^{\alpha}\left(PG^{2}\left(t\right)\right)-2J^{\alpha}\left(P\left|FG\right|(t)\right)J^{\alpha}\left(Q\left|FG\right|(t)\right)$$

$$\leq M^{2}\left(J^{\alpha}\left(Q\left|\tfrac{F}{G}\right|(t)\right)J^{\alpha}\left(P\left|\tfrac{G}{F}\right|(t)\right)+J^{\alpha}\left(P\left|\tfrac{F}{G}\right|(t)\right)J^{\alpha}\left(Q\left|\tfrac{G}{F}\right|(t)\right)-2J^{\alpha}\left(Q\left(t\right)\right)J^{\alpha}\left(P\left(t\right)\right)\right). \tag{2.102}$$

En utilisant (2.101) et (2.102), on trouve l'inégalité (2.98) .

Corollaire 2.2 [45] *Supposons que F et G sont deux fonctions continues sur $[0,+\infty[$ et P,Q deux fonctions positives continues sur $[0,+\infty[$ telles que $P\left|\frac{F}{G}\right|, P\left|\frac{G}{F}\right|, Q\left|\frac{F}{G}\right|, Q\left|\frac{G}{F}\right|, PF^2, PG^2, QF^2$ et QG^2 soient intégrables sur $[0,+\infty[$. S'il existe trois réels $n,N,M>0$ tels que*

$$\left|F\left(\tau\right)G\left(\tau\right)\right|\leq M,$$

et

$$0<n\leq\left|\tfrac{F(\tau)}{G(\tau)}\right|\leq N \quad , \ \tau\in\left[0,t\right], t>0,$$

alors, on a :

$$J^{\alpha}\left(PF^{2}\left(t\right)\right)J^{\beta}\left(QG^{2}\left(t\right)\right)+J^{\beta}\left(QF^{2}\left(t\right)\right)J^{\alpha}\left(PG^{2}\left(t\right)\right)-2J^{\alpha}\left(P\left|FG\right|(t)\right)J^{\beta}\left(Q\left|FG\right|(t)\right)$$

$$\leq \tfrac{M^2(N-n)^2}{2Nn}J^{\alpha}\left(P\left(t\right)\right)J^{\beta}\left(Q\left(t\right)\right), \tag{2.103}$$

pour tout $\alpha>0,\beta>0,t>0$.

Démonstration On applique les Théorème 2.10 et 2.12.

Remarque 2.10 *Si on prend $\alpha=\beta$, on obtiendra le Corollaire 2.1.*

Chapitre 3

APPLICATIONS DES INEGALITES FRACTIONNAIRES AUX EDFs

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à quelques applications des inégalités fractionnaires sur les équations différentielles d'ordre non entier. Nous allons établir des conditions assurant l'existence et l'unicité des solutions pour un problème aux limites fractionnaire avec conditions intégrales sur l'inconnue du problème. D'autre résultats assurant l'existence d'une solution (au moins) seront aussi traités dans ce chapitre. Pour nos résultats principaux, et surtout dans les estimations à priori posées dans les hypothèses prélimiaires, les démonstrations sont basées sur les inégalitées fractionnaires, un outil qu'on trouve très puissant pour surmonter beuacoup de difficultés dans les démonstrations des résultats de ce chapitre.

On considère alors le problème suivant :

$$\begin{cases} D^{\alpha}x(t) + f(t, x(t)) = \theta, \quad 0 \leq t \leq 1, 1 < \alpha \leq 2 \\ \\ x(0) = \int_0^1 g(\tau)\, x(\tau)\, d\tau, \quad x(1) = \theta, \end{cases} \tag{3.1}$$

où D^{α} désigne la dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Caputo, θ est un élément de E et $f : [0,1] \times E \rightarrow E$ une fonction continue telle que $(E, \|.\|)$ est un espace de Banach et $C([0,1], E)$ est l'espace de Banach de toutes les fonctions continues de $[0,1]$ dans E.
On va étudier l'existence et l'unicité puis uniquement l'existence du problème (3.1) en utilisant le théorèmes de point fixe de Banach et de Krasnoselskii[14].

3.2 Rappel

Dans ce qui suit, nous présentons quelques définitions et résultats fondamentaux qui seront utilisés dans ce chapitre.
Définition 3.1 : *Soit E un espace vectoriel normé, de norme $\|.\|_E$. Une application f de E dans E est dite contractante s'il existe un nombre positif $K \in]0,1[$, tel que pour tout*

$x, y \in E$, on a :

$$\|f(x) - f(y)\|_E \leq K \|x - y\|_E$$

Définition 3.2 : Soient E un espace vectoriel normé, de norme $\|.\|_E$ et (u_n) *une suite de E. On dit que (u_n) est une suite de Cauchy si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \geq 0, \forall n \geq N, \ \forall p \geq N \ , \quad (p \in \mathbb{N}^*) \, , \ \|u_{n+p} - u_n\|_E \ \leq \varepsilon.$$

Définition 3.3 : *On dit que E est complet pour la norme $\|.\|_E$ si toute suite de Cauchy (pour cette norme) est convergente (pour cette norme). Un tel espace est aussi appelé espace de Banach.*

Définition 3.4 : *Soit E un espace de Banach muni de la norme $\|.\|_E$ et T une application de E dans E . Un élément x de E est dit point fixe de T si*

$$Tx = x.$$

Théorème du Point Fixe de Banach

Théorème A : *Soiten E un espace de Banach muni de la norme $\|.\|_E$, X un sous-ensemble fermé de E et $T : X \to X$ une application contractante sur X. Alors :*
Il existe un point unique $z \in X$ tel que $Tz = z$. De plus si $x_0 \in X$ et $x_n = Tx_{n-1}$ pour $n = 1, 2, ...,$alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (x_n) = z, .$
et on a

$$\|x_n - z\|_E \leq k^n (1 - k)^{-1} \|x_1 - x_0\|_E \, ,$$

pour $n = 1, 2, ...$

Théorème du Point Fixe de Krasnoselskii

Théorème B : *Soit X un sous-ensemble fermé, borné et convexe de E. On suppose que les opérateurs R et S vérifient :*

i) $Rx + Sy \in X$ pour tout $x, y \in X$.

ii) S est continu et $\overline{S(X)}$ est compact.

iii) Il existe un nombre $0 \leq k < 1$ tel que $\|Rx - Ry\|_E \leq k \|x - y\|_E$ pour tout $x, y \in X$.

Alors il existe au moins un élément $z \in X$ tel que $Rz + Sz = z$.

3.3 Résultats Préliminaires

Lemme 3.1 [5, 6, 7] *Soient $\alpha > 0$ et f une fonction définie sur $[0, b]$. Alors la solution générale de l'équation différentielle fractionnaire*

$$\left({}^C D_a^{\alpha}\right) (f(x)) = 0, \tag{3.2}$$

est donnée par

$$f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_{n-1} x^{n-1}, \tag{3.4}$$

où $a_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, ..., n-1, n = [\alpha] + 1,$ *avec* $[\alpha]$ *désigne la partie entière de* α.

Lemme 3.2 [5, 6, 7] *Soient* $\alpha > 0$ *et* f *une fonction définie sur l'intervalle* $[0, b]$. *Alors*

$$\left(J_a^\alpha\right)\left({}^C D_a^\alpha\right)(f(x)) = f(x) + a_0 + a_1 x + ... + a_{n-1} x^{n-1} \ , \tag{3.5}$$

où $a_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, ...n-1,\ n = [\alpha] + 1.$

Lemme 3.3 [44] *La solution du problème* (3.1) *est donnée par :*

$$\begin{gathered} x(t) = (1-t)\int_0^1 g(\tau)\, x(\tau)\, d\tau + \theta\left(t - \tfrac{t}{\Gamma(\alpha+1)} + \tfrac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right) \\ + \tfrac{t}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, x(\tau))\, d\tau - J^\alpha f(t, x(t)). \end{gathered} \tag{3.6}$$

Démonstration du Lemme 3.3
On a

$$D^\alpha x(t) = \theta - f(t, x(t)), \quad 0 \le t \le 1. \tag{3.7}$$

En appliquant l'opérateur J^α aux deux membres de (3.7), on trouve

$$J^\alpha D^\alpha x(t) = \theta J^\alpha(1) - J^\alpha f(t, x(t)) = \tfrac{\theta t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - J^\alpha f(t, x(t)). \tag{3.8}$$

Et comme

$$J^\alpha D^\alpha x(t) = x(t) + c_0 + c_1 t, \tag{3.9}$$

alors

$$x(t) = \tfrac{\theta t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - J^\alpha f(t, x(t)) - c_0 - c_1 t. \tag{3.10}$$

Pour $t = 0$, on a

$$c_0 = -\int_0^1 g(\tau)\, x(\tau)\, d\tau. \tag{3.11}$$

Et pour $t = 1$, on obtient

$$c_1 = -\theta + \tfrac{\theta}{\Gamma(\alpha+1)} + \int_0^1 g(\tau)\, x(\tau)\, d\tau - \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, x(\tau))\, d\tau \ . \tag{3.12}$$

On remplace c_0 et c_1 dans (3.10), on trouve (3.6).

Maintenant, on définit l'opérateur $T : C([0,1], E) \to C([0,1], E)$ par l'expression intégrale :

$$\begin{gathered} T(x(t)) = (1-t)\int_0^1 g(\tau)\, x(\tau)\, d\tau + \theta\left(t - \tfrac{t}{\Gamma(\alpha+1)} + \tfrac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right) \\ + \tfrac{t}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, x(\tau))\, d\tau - \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, x(\tau))\, d\tau, \end{gathered} \tag{3.13}$$

où $0 \leq t \leq 1, 1 < \alpha \leq 2$.

3.4 Résultats Principaux

Nous montrons l'existence et l'unicité de solution du problème (3.1) par le théorème de point fixe de Banach.

Les hypothèses suivantes sont importantes pour énoncer notre premier résultat :

$$(H_1) : \|f(t,x) - f(t,y)\| \leq k \|x - y\|, \ k > 0, x, y \in E, t \in [0,1] \ , \tag{3.14}$$

$$(H_2) : M + \tfrac{2k}{\Gamma(\alpha+1)} \leq d, \qquad \|\theta\| \left(1 + \tfrac{2}{\Gamma(\alpha+1)}\right) + \tfrac{2N}{\Gamma(\alpha+1)} \leq (1-d)\, r \ , \tag{3.15}$$

où $r, d \in \mathbb{R}^+, 0 < d < 1, N = \underset{t\in[0,1]}{sup} |f(t,0)|$ et $M = \underset{t\in[0,1]}{sup} |g(t)|$.

3.4.1 Existence et Unicité

Théorème 3.1 [44]*Supposons que les conditions* (H_1) *et* (H_2) *sont vérifiées. Alors le problème* (3.1) *a une unique solution dans* $C([0,1], E)$.

Démonstration Pour démontrer le théorème 3.1, il suffit de montrer que l'opérateur T admet un point fixe sur $B_r := \{x(t) \in E, \|x\| \leq r, r > 0\}$.

Soit alors $x \in B_r$. On a pour $t \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} \|T(x(t))\| = {} & ||(1-t)\int_0^1 g(\tau)\, x(\tau)\, d\tau + \theta\left(t - \tfrac{t}{\Gamma(\alpha+1)} + \tfrac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right) \\ & + \tfrac{t}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, x(\tau))\, d\tau - \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, x(\tau))\, d\tau||. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \|T(x)\| \leq {} & M\|x\| + \|\theta\|\left(1 + \tfrac{2}{\Gamma(\alpha+1)}\right) + \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \|f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, 0)\|\, d\tau \\ & + \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \|f(\tau, 0)\|\, d\tau + \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \|f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, 0)\|\, d\tau \\ & + \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \|f(\tau, 0)\|\, d\tau. \end{aligned} \tag{3.17}$$

En utilisant la condition (H_1) avec $y = 0$, on peut écrire

$$\|T(x)\| \leq M\|x\| + \|\theta\|\left(1 + \tfrac{2}{\Gamma(\alpha+1)}\right) + \tfrac{2k}{\Gamma(\alpha+1)}\|x\| + \tfrac{2N}{\Gamma(\alpha+1)}. \tag{3.18}$$

D'où,

$$\|T(x)\| \leq \left(M + \tfrac{2k}{\Gamma(\alpha+1)}\right) r + \|\theta\| \left(1 + \tfrac{2}{\Gamma(\alpha+1)}\right) + \tfrac{2N}{\Gamma(\alpha+1)}. \tag{3.19}$$

En utilisant la première condition de (H_2) , on récupère

$$\|T(x)\| \leq dr + (1-d)\, r. \tag{3.20}$$

Cela implique $TB_r \subset B_r$, donc T est stable.

Maintenant, on montre que T est contractante :

Soient $x, y \in B_r$, donc pour tout $t \in [0,1]$, on peut écrire

$$\begin{aligned}\|T(x(t)) - T(y(t))\| &\leq (1-t) \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \|g(\tau)(x(\tau) - y(\tau))\| \, d\tau \\ &+ \tfrac{t}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \|f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, y(\tau))\| \, d\tau \\ &+ \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \|f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, y(\tau))\| \, d\tau.\end{aligned} \tag{3.21}$$

En utilisant (H_1) et le fait que $|g(\tau)| \leq M, \tau \in [0,t], 0 \leq t \leq 1$, on obtient alors

$$\|T(x) - T(y)\| \leq M\|x-y\| + \tfrac{2k}{\Gamma(\alpha+1)} \|x-y\|. \tag{3.22}$$

Maintenant, en utilisant la première condition de (H_2), on trouve

$$\|T(x) - T(y)\| \leq d\|x-y\|. \tag{3.23}$$

Alors, l'opérateur T est une contraction. Donc T possède un point fixe unique qui est un solution du problème (3.1).

D'où la démonstration du Théorème 3.1.
Le deuxième résultat est basé sur le Théorème de Krasnoselskii[14].

3.4.2 Existence

On considère les hypothèses suivantes

$$(H_3) : \|f(t,x)\| \leq \nu(t), (t,x) \in [0,1] \times E, \nu \in L^1([0,1], \mathbb{R}^+) . \tag{3.24}$$

$$\begin{array}{c}(H_4) : \text{Soit } f : [0,1] \times E \to E \text{ une fonction continue telle que l'image} \\ \text{de toute partie bornée de } [0,1] \times E \text{ est une partie relativement compacte.}\end{array} \tag{3.25}$$

On a donc :

Théorème 3.2 [44] *Supposons que les hypothèses* (H_3) *et* (H_4) *sont vérifiées. Si* $M < 1$, *alors le problème* (3.1) *admet au moins une solution dans* $C([0,1], E)$.

Démonstration
Soit ρ tel que :
$$\rho \geq (1-M)^{-1} \left(\|\theta\| \left(1 + \tfrac{2}{\Gamma(\alpha+1)} \right) + \tfrac{2\|\upsilon\|}{\Gamma(\alpha+1)} \right), \tag{3.26}$$
où $\|\upsilon\| = \underset{t\in[0,1]}{Sup} |\upsilon(t)|$.

On définit les opérateurs R et S sur $B_\rho := \{x \in E, \|x\| \leq \rho\}$ par :
$$R(x) = (1-t) \int_0^1 g(\tau) x(\tau) d\tau + \theta \left(t - \tfrac{t}{\Gamma(\alpha+1)} + \tfrac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right) \tag{3.27}$$
et
$$S(x) = \tfrac{t}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, x(\tau)) d\tau - J^\alpha f(t, x(t)). \tag{3.28}$$

Alors, pour $x, y \in B_\rho$ et $t \in [0,1]$, on a :
$$\begin{aligned} \|R(x(t)) + S(y(t))\| \leq & \left\| (1-t) \int_0^1 g(\tau) x(\tau) d\tau + \theta \left(t - \tfrac{t}{\Gamma(\alpha+1)} + \tfrac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right) \right\| \\ & + \left\| \tfrac{t}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, y(\tau)) d\tau - J^\alpha f(t, y(t)) \right\|. \end{aligned} \tag{3.29}$$
Donc,
$$\begin{aligned} \|R(x) + S(y)\| \leq & M\|x\| + \|\theta\| \left(1 + \tfrac{2}{\Gamma(\alpha+1)} \right) + \left\| \tfrac{t}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, y(\tau)) d\tau \right\| \\ & + \left\| \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, y(\tau)) d\tau \right\|. \end{aligned} \tag{3.30}$$

En utilisant l'hypothèse (H_3) et la condition (3.26), on obtient
$$\begin{aligned} \|R(x) + S(y)\| &\leq M\|x\| + \|\theta\| \left(1 + \tfrac{2}{\Gamma(\alpha+1)} \right) + \tfrac{2\|\upsilon\|}{\Gamma(\alpha+1)} \\ &\leq M\rho + (1-M)\rho. \end{aligned} \tag{3.31}$$
Donc $R(x) + S(y) \in B_\rho$.

D'autre part, on a
$$\|R(x) - R(y)\| \leq M\|x - y\|. \tag{3.32}$$

Comme $M < 1$, alors R est contractante.

De plus, d'après (H_4) l'opérateur S est continu, et

$$\|S(x)\| \leq \frac{t}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \|f(\tau, y(\tau))\| \, d\tau + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \|f(\tau, y(\tau))\| \, d\tau. \tag{3.33}$$

Puisque $t \in [0,1]$, on peut alors écrire :

$$\|S(x)\| \leq \frac{2\|\upsilon\|}{\Gamma(\alpha+1)}. \tag{3.34}$$

Par conséquent, S est uniformément borné sur B_ρ.

Maintenant, on prend $t_1, t_2 \in [0,1]$ et $y \in B_\rho$. Alors

$$\begin{aligned} \|Sy(t_1) - Sy(t_2)\| \leq & \left\| \frac{t_1 - t_2}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, x(\tau)) \, d\tau \right\| \\ & + \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} (t_1-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, x(\tau)) \, d\tau - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_2} (t_2-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, x(\tau)) \, d\tau \right\|. \end{aligned} \tag{3.35}$$

D'après (H_3), on récupère l'inégalité :

$$\|Sy(t_1) - Sy(t_2)\| \leq \frac{\|\upsilon\|}{\Gamma(\alpha+1)} \left(|t_1 - t_2| + |t_1^\alpha - t_2^\alpha| \right). \tag{3.36}$$

Le second membre de l'inégalité (3.36) est indépendant de y ; donc S est equicontinue, et pour t_1 tend vers t_2, l'inégalité (3.36) tend vers 0, donc $S(B_\rho)$ est relativement compacte. D'après le théorème d'Ascolli-Arzella, S est compact.

Finalement, d'après le théorème de Krasnoselskii, le problème (3.1) admet au moins une solution sur $[0,1]$.

Chapitre 4

METHODE ADM ET METHODE VIM

Dans ce qui suit, nous exposons les principes de la métode de décomposition d'Adomian (ADM) et de la méthode d'iteration variationnelle (VIM). Pour plus de détails, on envoie le lecteur intéressé à [15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24].

4.1 Méthode de Décomposition d'Adomian (ADM)

La méthode de décomposition d'Adomain (ADM) a été introduite par Adomian [15, 16] au début des années 1980. Elle a été utilisée pour résoudre les équations différentielles ordinaires et celles aux dérivées partielles ayant des applications dans la physique, voir par exemple [15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24].

Soit alors le problème :

$$Fu = g, \tag{4.1}$$

où F représente un opérateur différentiel non linéaire.

La méthode ADM consiste à décomposer la partie linéaire de F en $L + R$, où L est un opérateur facilement inversible et R est la partie restante.

Si on désigne par N, le terme non linéaire, alors l'équation (4.1), dans sa forme canonique, s'écrit :

$$Lu + Ru + Nu = g. \tag{4.2}$$

Si on note par L^{-1}, l'inverse de L, on obtient l'équation équivalente suivante :

$$L^{-1}Lu = L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu. \tag{4.3}$$

On pose $L^{-1}Lu = u + a$, où a est le terme de l'intégration. On obtient :

$$u = L^{-1}g - a - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu. \tag{4.4}$$

On cherche maintenant la solution u sous la forme d'une série du type :

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} u_i, \tag{4.5}$$

avec $u_0 = g - a$.

Ensuite, on décompose l'opérateur N comme suit :

$$Nu = \sum_{i=0}^{\infty} A_i \left(u_0, u_1, ..., u_i\right), \tag{4.6}$$

où les A_i sont les polynômes d'Adomian [15, 16] (ils dépendent de $u_0, u_1, ..., u_i$).

En remplaçant (4.2) et (4.3) dans (4.1), on obtient :

$$\sum_{i=0}^{\infty} u_i = L^{-1}g - a - L^{-1}R\sum_{i=0}^{\infty} u_i - L^{-1}\sum_{i=0}^{\infty} A_i. \tag{4.7}$$

En identifiant les deux membres de (4.4), on obtient :

$$\begin{cases} u_0 = L^{-1}g - a \\ u_1 = -L^{-1}Ru_0 - L^{-1}A_0, \\ u_2 = -L^{-1}Ru_1 - L^{-1}A_1, \\ . \\ . \\ u_n = -L^{-1}Ru_{n-1} - L^{-1}A_{n-1}, \\ . \\ . \end{cases} \tag{4.8}$$

Pour calculer les polynômes d'Adomian, on donne le lemme :

Lemme 4.1 [15] *Les polynômes d'Adomian, pour $N = Nu$, se déterminent par la formule suivante :*

$$A_i = \frac{1}{i!}\left[\frac{d^i}{d\lambda^i} N\left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k u_k\right)\right]_{\lambda=0}, i = 0, 1, ... \tag{4.9}$$

Exemple 4.1

Soit N l'opérateur non linéaire défini par :

$$N(u) = u^2 \left(\frac{du}{dx}\right); \quad u = u(x,t). \tag{4.10}$$

Donc les polynômes d'Adomian, pour N, se déterminent par la formule :

$$A_i = \frac{1}{i!}\left[\frac{d^i}{d\lambda^i}\left(\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k u_k\right)^2 \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k u_k\right)\right)\right]_{\lambda=0}, i = 0, 1, ... \tag{4.11}$$

Donnons les trois premiers termes de A_i

$$A_0 = (u_0)^2 \left(\frac{du_0}{dx}\right) \tag{4.12}$$

Pour $i = 1$, on a :

$$\begin{aligned} A_1 &= \left[\frac{d}{d\lambda}\left(\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k u_k\right)^2 \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k u_k\right)\right)\right]_{\lambda=0} \\ &= 2\left(\sum_{k=1}^{\infty}k\lambda^{k-1}u_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k u_k\right)\frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k u_k\right) + \left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k u_k\right)^2 \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=1}^{\infty}k\lambda^{k-1}u_k\right) \\ &= 2\left(u_1 + \sum_{k=2}^{\infty}k\lambda^{k-1}u_k\right)\left(u_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\lambda^k u_k\right)\frac{d}{dx}\left(u_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\lambda^k u_k\right) \\ &\quad + \left(u_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\lambda^k u_k\right)^2 \frac{d}{dx}\left(u_1 + \sum_{k=2}^{\infty}k\lambda^{k-1}u_k\right), \end{aligned} \tag{4.13}$$

donc, pour $\lambda = 0$, on obtient :

$$A_1 = 2u_1u_0\left(\frac{du_0}{dx}\right) + (u_0)^2\left(\frac{du_1}{dx}\right) \tag{4.14}$$

Pour $i = 2$, on trouve

$$A_2 = 2u_0u_2\left(\frac{du_0}{dx}\right) + 2u_0u_1\left(\frac{du_1}{dx}\right) + (u_0)^2\left(\frac{du_2}{dx}\right) + (u_1)^2\left(\frac{du_0}{dx}\right). \tag{4.15}$$

Exemple 4.2

On considère l'équation différentielle fractionnaire suivante :

$$D^\alpha u = xu^2 - xu, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad u = u(x), \tag{4.16}$$

avec la condition initiale

$$u(0) = \tfrac{1}{2}. \tag{4.17}$$

Pour $\alpha = 1$, l'équation (4.16) devient une équation de Bernoulli.

$$u'(x) = xu^2 - xu. \tag{4.18}$$

La solution exacte de (4.18) pour $\alpha = 1$ est :

$$u(x) = \tfrac{1}{1+e^{\frac{1}{2}x^2}}. \tag{4.19}$$

Intégrons les membres de (4.16) , on obtient

$$u(x) = J^{\alpha}\left(xu^2 - xu\right) = J^{\alpha}\left(xP(u)\right) + J^{\alpha}(xu), \tag{4.20}$$

où $P(u) = (u(x))^2$.

La solution de (4.16) est donnée par

$$u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x). \tag{4.21}$$

L'opérateur non linéaire P est défini par

$$P(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n, \tag{4.22}$$

où A_n les polynômes d'Adomian.

$$A_n = \tfrac{1}{n!}\left[\tfrac{d^n}{d\lambda^n} P\left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k u_k\right)\right]_{\lambda=0} = \tfrac{1}{n!}\left[\tfrac{d^n}{d\lambda^n}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k u_k\right)^2\right]_{\lambda=0}. \tag{4.23}$$

Donnons les trois premiers termes de A_i

$$\begin{aligned} A_0 &= (u_0)^2 \\ A_1 &= 2u_0u_1 \\ A_2 &= 2u_0u_2 + (u_1)^2 \\ A_3 &= 2u_0u_3 + 2u_1u_2. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Alors,

$$u_{n+1}(x) = J^{\alpha}\left(x\left(u_n(x)\right)^2\right) - J^{\alpha}\left(xu_n(x)\right). \tag{4.25}$$

Ce qui donne :

$$u_0(x) = \frac{1}{2}$$

$$u_1(x) = -J^{\alpha}(xA_0) - J^{\alpha}(xu_0) = J^{\alpha}\left(x(u_0)^2\right) + J^{\alpha}(xu_0)$$
$$= \frac{1}{4}J^{\alpha}(x) - \frac{1}{2}J^{\alpha}(x) = -\frac{1}{4}J^{\alpha}(x)$$
$$= -\frac{1}{4}\frac{1}{\Gamma(\alpha+2)}x^{\alpha+1}$$

$$u_2(x) = J^{\alpha}(xA_1) - J^{\alpha}(xu_1) = -J^{\alpha}(2xu_0u_1) - J^{\alpha}(xu_1) \tag{4.26}$$
$$= 0$$

$$u_3(x) = J^{\alpha}(xA_2) - J^{\alpha}(xu_2) = J^{\alpha}\left(2xu_0u_2 + x(u_1)^2\right) - J^{\alpha}(xu_2)$$
$$= \frac{\Gamma(2\alpha+4)}{16(\Gamma(\alpha+1))^2\Gamma(3\alpha+4)}x^{3\alpha+3}$$

$$u_4(x) = J^{\alpha}(xA_3) - J^{\alpha}(xu_3) = 2J^{\alpha}(xu_0u_3 + xu_1u_2) - J^{\alpha}(xu_3).$$

Donc la solution de l'équation est donnée par :

$$u(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\frac{1}{\Gamma(\alpha+2)}x^{\alpha+1} + \frac{\Gamma(2\alpha+4)}{16(\Gamma(\alpha+1))^2\Gamma(3\alpha+4)}x^{3\alpha+3} + \ldots\ldots.. \tag{4.27}$$

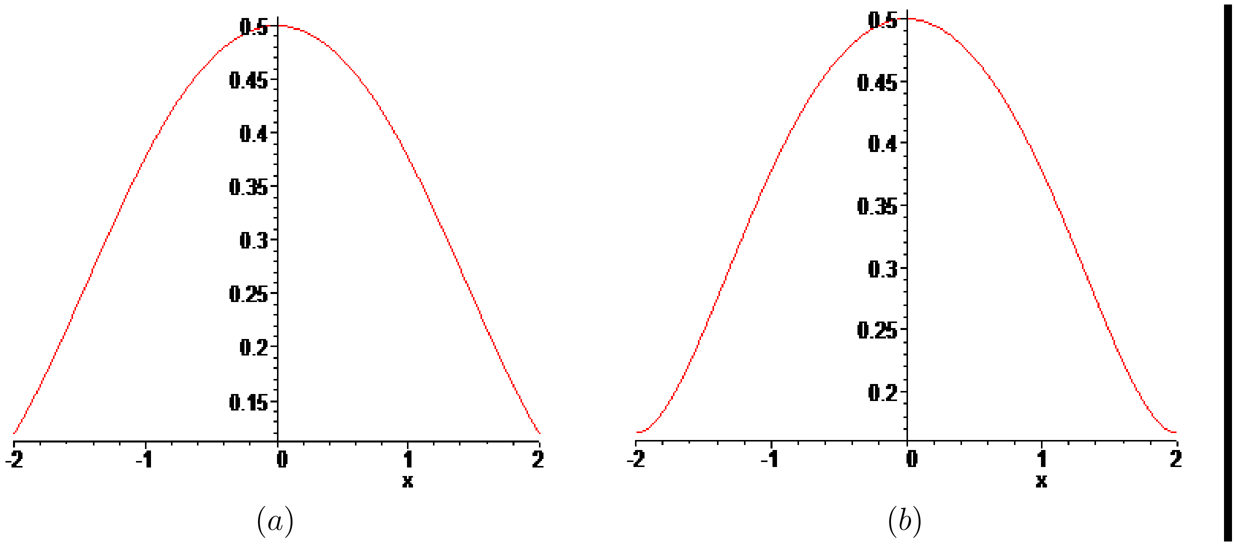


Fig 4.1 : *dans* (*a*) *la solution exacte* (4.19) , *dans* (*b*) *la solution numérique* (4.27)

4.2 Méthode d'Itération Variationnelle (VIM)

On passe maintenant à exposer brièvement la métode VIM. Pour plus de détails, on se réfère à [30, 31, 32, 33, 34, 35, 36].

Soit le problème :

$$Lu + Nu = f, \tag{4.28}$$

où L représente un opérateur différentiel linéaire, N représente un opérateur différentiel non linéaire et f une fonction réelle.

La méthode VIM consiste à poser :

$$u_{n+1} = u_n + \int_0^x \lambda(\varepsilon)\Big(Lu(\varepsilon) + N\widetilde{u}(\varepsilon) - f(\varepsilon)\Big)\,d\varepsilon, \tag{4.29}$$

où λ est le Lagrangien [32, 33] et $\widetilde{u}$ est la restrection telle que $\delta\widetilde{u} = 0$.

On cherche la solution u sous la forme :

$$u(x) = \lim_{n\to+\infty} u_n(x). \tag{4.30}$$

Remarque 4.2 *Généralement, la convergence de la méthode VIM est très rapide. Pour plus de détail, on se réfère à [34].*

Exemple 4.3

On considère l'equation différentielle suivante

$$\tfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \tfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \tfrac{\partial (xu(x,t))}{\partial x}, \quad 0 < x < 1,$$

avec la condition initiale

$$u(x,0) = x^2.$$

Pour trouver la solution de cette équation avec la méthode VIM, on écrit :

$$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) + \int_0^t \lambda(\varepsilon)\left(\tfrac{\partial u_n(x,\tau)}{\partial \tau} - \tfrac{\partial^2 u_n(x,\tau)}{\partial x^2} - \tfrac{\partial\left(x\widetilde{u_n}(x,\tau)\right)}{\partial x}\right)d\tau,$$

où λ est le Lagrangien et $\delta\widetilde{u} = 0$.

Alors,

$$\delta u_{n+1}(x,t) = \delta u_n(x,t) + \int_0^t \delta\lambda(\varepsilon)\left(\tfrac{\partial u_n(x,\tau)}{\partial \tau} - \tfrac{\partial^2 u_n(x,\tau)}{\partial x^2} - \tfrac{\partial\left(x\widetilde{u_n}(x,\tau)\right)}{\partial x}\right)d\tau.$$

D'où

$$\delta u_{n+1}(x,t)=\delta u_n(x,t)+\int_0^t \delta\lambda(\varepsilon)\left(\frac{\partial u_n(x,\tau)}{\partial\tau}-\frac{\partial^2 u_n(x,\tau)}{\partial x^2}\right)d\tau=0.$$

Par une intégration par partie, on obtient :

$$1+\lambda(\tau)|_{\varepsilon=x}=0,$$

$$\lambda'(\tau)\Big|_{\varepsilon=x}=0.$$

Par conséquent, on a

$$\lambda=-1.$$

Donc, on trouve

$$u_{n+1}(x,t)=u_n(x,t)-\int_0^t\left(\frac{\partial u_n(x,\tau)}{\partial\tau}-\frac{\partial^2 u_n(x,\tau)}{\partial x^2}-\frac{\partial\left(x\widetilde{u_n}(x,\tau)\right)}{\partial x}\right)d\tau.$$

Alors, pour $n=0$, on va avoir

$$u_1(x,t)=u_0(x,t)-\int_0^t\left(\frac{\partial u_0(x,\tau)}{\partial\tau}-\frac{\partial^2 u_0(x,\tau)}{\partial x^2}-\frac{\partial\left(x\widetilde{u_0}(x,\tau)\right)}{\partial x}\right)d\tau$$

$$=x^2-\int_0^t\left(-2-3x^2\right)d\tau$$

$$=x^2+\left(2+3x^2\right)t.$$

Pour $n=1$, on a

$$u_2(x,t)=u_1(x,t)-\int_0^t\left(\frac{\partial u_1(x,\tau)}{\partial\tau}-\frac{\partial^2 u_1(x,\tau)}{\partial x^2}-\frac{\partial\left(x\widetilde{u_1}(x,\tau)\right)}{\partial x}\right)d\tau$$

$$=x^2+\left(2+3x^2\right)t+\int_0^t\left(8+9x^2\right)\tau d\tau$$

$$=x^2+\left(2+3x^2\right)t+\left(8+9x^2\right)\tfrac{t^2}{2}.$$

Et pour $n=2$, on trouve

$$u_3(x,t)=u_2(x,t)-\int_0^t\left(\frac{\partial u_2(x,\tau)}{\partial\tau}-\frac{\partial^2 u_2(x,\tau)}{\partial x^2}-\frac{\partial\left(x\widetilde{u_2}(x,\tau)\right)}{\partial x}\right)d\tau$$

$$=\left(x^2+\left(2+3x^2\right)t+\left(8+9x^2\right)\tfrac{t^2}{2}\right)-\int_0^t\left(\left(2+3x^2\right)+\left(8+9x^2\right)\tau\right)d\tau$$

$$+\int_0^t\left(2+6\tau+9\tau^2\right)d\tau+\int_0^t\left(3x^2+\left(2+9x^2\right)\tau+\left(8+27x^2\right)\tfrac{\tau^2}{2}\right)d\tau$$

$$=x^2+\left(2+3x^2\right)t+\left(8+9x^2\right)\tfrac{t^2}{2}+\left(17+27x^2\right)\tfrac{t^3}{3}.$$

Chapitre 5

EQUATIONS DIFFERENTIELLES FRACTIONNAIRES : APPLICATIONS NUMERIQUES

Dans ce chapitre, nous présentons quelques applications sur les équations différentielles fractionaires, voir [41, 42, 43].

5.1 L'équation de Foam-Drainage avec Dérivée Fractionnaire

Dans ce paragraphe, on considère (voir [42]) :

$$D_t^{\alpha} u = \frac{1}{2}\,\mathrm{u}\,\mathrm{u}_{xx} - 2u^2\left(D_x^{\beta} u\right) + \left(D_x^{\beta} u\right)^2, 0 < \alpha, \beta \leq 1, x > 0, \tag{5.1}$$

où D_t^{α} et D_x^{β} désignent les dérivées fractionnaires de Caputo, $\mathrm{u}_x = \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ et $\mathrm{u}_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$.

On prend, comme condition initiale, la fonction :

$$u(x,0) = f(x). \tag{5.2}$$

Pour $\alpha = \beta = 1$, l'équation (5.1) se réduit à l'équation suivante :

$$u_t = \frac{1}{2}\,\mathrm{u}\,\mathrm{u}_{xx} - 2u^2 u_x + (u_x)^2, x > 0. \tag{5.3}$$

Cette dernière équation a été étudiée par plusieurs auteurs [25, 26, 27, 28, 29]. Par contre dans notre cas [42], l'étude de l'équation (5.1) n'a pas encore été abordée.

Pour résoudre le problème (5.1) , avec la méthode VIM, on la met sous la forme :

$$D_t^{\alpha}u - \frac{1}{2}\,\mathrm{u}\,\mathrm{u}_{xx} + 2u^2\left(D_x^{\beta}u\right) - \left(D_x^{\beta}u\right)^2 = 0.$$

On écrit la fonction "correcte" de l'équation (5.1) sous la forme :

$$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) + \int_0^t \lambda(\xi)\,(D_t^{\alpha}u_n(x;\xi) - \frac{1}{2}\,\mathrm{u}_n(x;\xi)\ \mathrm{u}_{nxx}(x;\xi) + 2u_n^2(x;\xi)\left(D_x^{\beta}u_n(x;\xi)\right) - \left(D_x^{\beta}u_n(x;\xi)\right)^2)d\xi, \tag{5.4}$$

où λ est le multiplier de Lagrange.

$$\delta u_{n+1}(x,t) = \delta u_n(x,t) + \int_0^t \delta\lambda(\xi)\,(D_t^{\alpha}u_n(x;\xi) - \frac{1}{2}\,\mathrm{u}_n(x;\xi)\ \mathrm{u}_{nxx}(x;\xi) + 2u_n^2(x;\xi)\left(D_x^{\beta}u_n(x;\xi)\right) - \left(D_x^{\beta}u_n(x;\xi)\right)^2)d\xi. \tag{5.5}$$

Ce qui donne :

$$\delta u_{n+1}(x,t) = \delta u_n(x,t) + \int_0^t \delta\lambda(\xi)\,(D_t^{\alpha}u_n(x;\xi))d\xi. \tag{5.6}$$

Alors,

$$\delta u_{n+1}(x,t) = \delta u_n(x,t) + \lambda(t)\,\delta u_n(x,t) + \int_0^t \delta(D_t^{\alpha}u_n(x;\xi)\,\lambda^{'}(\xi))d\xi. \tag{5.7}$$

Par conséquent, on obtient

$$\begin{aligned} \lambda^{'}(t) &= 0 \\ 1 + \lambda(t) &= 0. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Donc, on trouve $\lambda = -1$, la formule (5.4) devient :

$$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) - \int_0^t (D_t^{\alpha}u_n(x;\xi) - \frac{1}{2}\,\mathrm{u}_n(x;\xi)\ \mathrm{u}_{nxx}(x;\xi) + 2u_n^2(x;\xi)\left(D_x^{\beta}u_n(x;\xi)\right) - \left(D_x^{\beta}u_n(x;\xi)\right)^2)d\xi. \tag{5.9}$$

5.1.1 Résolution Numérique de l'Equation de Foam Drainage Fractionnaire "Temporelle"

Dans ce paragraphe, on va utiliser la méthode VIM pour résoudre l'équation du Foam Drainage avec dérivée fractionnaire temporelle.

On considère alors l'équation (voir [42]) :

$$D_t^{\alpha}u - \frac{1}{2}\,\mathrm{u}\,\mathrm{u}_{xx} + 2u^2u_x - (u_x)^2 = 0, 0 < \alpha \leq 1, \tag{5.10}$$

avec la condition initiale :

$$u_0\,(x,0) = f\,(x) = -\sqrt{c}\tanh\left(\sqrt{c}x\right), \tag{5.11}$$

où c est la vitesse d'onde [25].

La solution exacte de (5.10), pour le cas $\alpha = 1$, s'écrit sous la forme :

$$u\,(x,t) = \begin{cases} -\sqrt{c}\tanh\left(\sqrt{c}\,(x-ct)\right) \quad , \quad x \leq ct \\ 0 \quad , \quad x > ct. \end{cases} \tag{5.12}$$

Pour pouvoir obtenir des solutions numériques de l'équation (5.10), on substitue la condition initiale (5.11), on obtient

$$u_{n+1}\,(x,t) = u_n - \int_0^t \left(D_\tau^\alpha u_n - \frac{1}{2}\,\tilde{\mathrm{u}}_n\,\tilde{\mathrm{u}}_{nxx} + 2\left(\tilde{u}_n\right)^2\tilde{u}_{nx} - \left(\tilde{u}_{nx}\right)^2\right)d\tau. \tag{5.13}$$

Alors, on va avoir

$$u_0\,(x,t) = f\,(x)\,. \tag{5.14}$$

Et pour $n = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} u_1\,(x,t) &= u_0 - \int_0^t \left(D_\tau^\alpha u_0 - \frac{1}{2}\,\tilde{\mathrm{u}}_0\,\tilde{\mathrm{u}}_{0xx} + 2\left(\tilde{u}_0\right)^2\tilde{u}_{0x} - \left(\tilde{u}_{0x}\right)^2\right)d\tau \\ &= f\,(x) + f_1\,(x)\,t, \qquad f_1\,(x) = \frac{1}{2}f\,f_{xx} + 2f^2f_x - (f_x)^2\,. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Pour $n = 1$, on aura :

$$\begin{aligned} u_2\,(x,t) &= u_1 - \int_0^t \left(D_\tau^\alpha u_1 - \frac{1}{2}\,\tilde{\mathrm{u}}_1\,\tilde{\mathrm{u}}_{1xx} + 2\left(\tilde{u}_1\right)^2\tilde{u}_{1x} - \left(\tilde{u}_{1x}\right)^2\right)d\tau \\ &= f\,(x) - f_2t^{2-\alpha} + f_3t + f_4\frac{t^2}{2} + f_5\frac{t^3}{3} - f_6\frac{t^4}{4}, \end{aligned} \tag{5.16}$$

tel que

$$f_2 = \frac{f_1(x)}{(2-\alpha)\Gamma(2-\alpha)},$$

$$f_3 = f_1 + \frac{1}{2}f_xf_{xx} - 2f_xf^2 + f_x^2,$$

$$f_4 = \frac{1}{2}\left(f_xf_{1xx} + f_{xx}f_{1x}\right) - 2\left(f^2f_{1x} + 2ff_1f_x\right) + 2f_xf_{1x},$$

$$f_5 = \frac{1}{2}f_{1x}f_{1xx} - 2\left(2ff_1f_{1x} + f_xf_1^2\right) + f_{1x}^2,$$

où f_x designe la première dérivée de la fonction f et f_{xx} la seconde dérivée de f :

$$f_x = \frac{df}{dx}(x), f_{xx} = \frac{d^2f}{dx^2}(x), f_{1x} = \frac{df_1}{dx}(x), f_{1xx} = \frac{d^2f_1}{dx^2}(x).$$

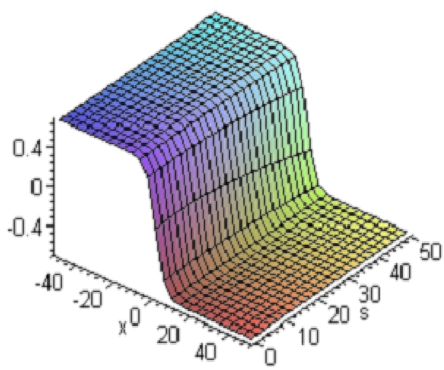
Pour $n = 2$, on obtient l'expression de u_3 comme suit :

$$u_3(x,t) = u_2 - \int_0^t \left(D_\tau^\alpha u_2 - \frac{1}{2}\, \widetilde{\mathrm{u}}_2\, \widetilde{\mathrm{u}}_{2xx} + 2\left(\widetilde{u_2}\right)^2 \widetilde{u_{2x}} - \left(\widetilde{u_{2x}}\right)^2 \right) d\tau. \tag{5.17}$$

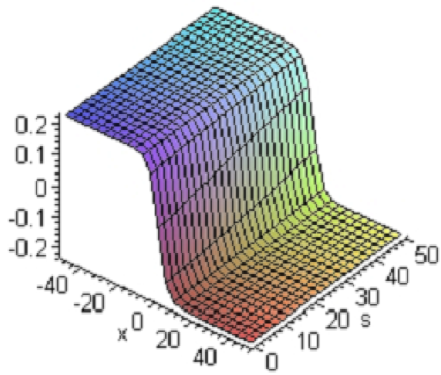
Par conséquent, la solution numérique (4.10) est donnée par:

$$u(x,t) = -\sqrt{c}\tanh(\sqrt{c}x) - f_2 t^{2-\alpha} + f_3 t + f_4\frac{t^2}{2} + f_5\frac{t^3}{3} - f_6\frac{t^4}{4}. \tag{5.18}$$

Nous traçons des solutions numériques pour l'équation (5.10) avec $\alpha = \frac{1}{2}$ ainsi que la solution exacte (5.12) lorsque $\alpha = \beta = 1$. La figure (5.1.a) représente la solution numérique de (5.38) vérifiant la condition initiale (5.11). La figure (5.1.b) représente la solution exacte (5.12).



(a)



(b)

Fig 5.1 : Dans (a) la solution numérique de $u(x,t)$ pour $\alpha = 1$ avec la méthode VIM
Dans (b) la solution exacte de $u(x,t)$. $c = 0.02$

5.1.2 Résolution Numérique de l'Equation de Foam Drainage Fractionnaire "Spaciale"

On considère l'équation du Foam Drainage avec dérivée fractionnaire en x (voir [42]) :

$$u_t - \frac{1}{2}\,\mathrm{u}\,\mathrm{u}_{xx} + 2u^2\left(D_x^\beta u\right) - \left(D_x^\beta u\right)^2 = 0; 0 < \beta \leq 1. \tag{5.19}$$

Pour simplifier les calculs, on prend comme condition initiale :

$$u(x,0) = f(x) = x^2. \tag{5.20}$$

Pour calculer la solution numérique de l'équation (5.19), on obtient

$$u_{n+1}(x,t)=u_n-\int_0^t\left(u_{n\tau}-\frac{1}{2}\,\widetilde{u}_n\,\widetilde{u}_{nxx}+2\left(\widetilde{u_n}\right)^2\left(D_x^\beta\widetilde{u_n}\right)-\left(D_x^\beta\widetilde{u_n}\right)^2\right)d\tau.$$

On peut se contenter de donner juste les trois premiers termes de la série sous la forme :

$$u_0(x,t)=f(x)\,, \tag{5.21}$$

$$\begin{aligned}u_1(x,t)&=u_0-\int_0^t\left(u_{0\tau}-\frac{1}{2}\,\widetilde{u}_0\,\widetilde{u}_{0xx}+2\left(\widetilde{u_0}\right)^2\left(D_x^\beta\widetilde{u_0}\right)-\left(D_x^\beta\widetilde{u_0}\right)^2\right)d\tau\\&=x^2+\left(x^2-4f_1x^{6-\beta}+4f_1^2x^{4-2\beta}\right)t,\end{aligned} \tag{5.22}$$

où $f_1=\frac{1}{\Gamma(3-\beta)}$.

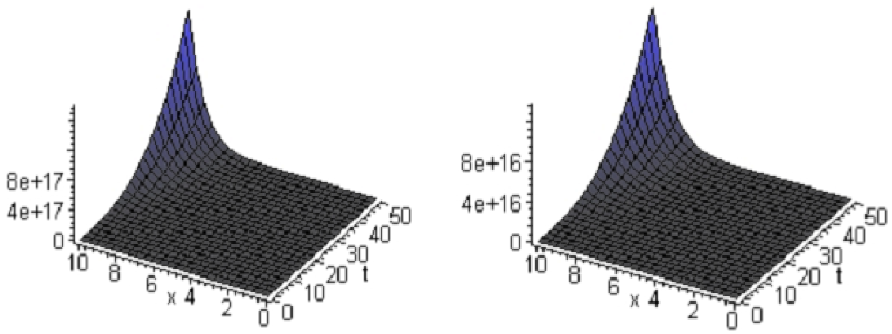
$$\begin{aligned}u_2(x,t)&=u_1-\int_0^t\left(u_{1\tau}-\frac{1}{2}\,\widetilde{u}_1\,\widetilde{u}_{1xx}+2\left(\widetilde{u_1}\right)^2\left(D_x^\beta\widetilde{u_1}\right)-\left(D_x^\beta\widetilde{u_1}\right)^2\right)d\tau\\&=x^2+\left(x^2-4f_1x^{6-\beta}+4f_1^2x^{4-2\beta}\right)t\\&+[4x^2-4f_1\left((6-\beta)(5-\beta)-2\right)x^{6-\beta}+4f_1^2\left((4-2\beta)(3-2\beta)+2\right)x^{4-2\beta}\\&-2x^4\left(2f_1x^{2-\beta}+4f_1f_2x^{6-2\beta}+4f_1^2x^{4-3\beta}\right)\\&-8f_1x^{2-\beta}\left(x^4-4f_1x^{8-\beta}+4f_1^2x^{6-2\beta}\right)\\&+4f_1x^{2-\beta}\left(2f_1x^{2-\beta}+4f_1f_2x^{6-2\beta}+4f_1^2f_3x^{4-3\beta}\right)]\frac{t^2}{4}\\&+[\left(x^2-4f_1x^{6-\beta}+4f_1^2x^{4-2\beta}\right)\left(2-4f_1(6-\beta)(5-\beta)x^{4-\beta}+4f_1^2(4-2\beta)(3-2\beta)x^{2-2\beta}\right)\\&-8f_1x^{2-\beta}\left(x^2-4f_1x^{6-\beta}+4f_1^2x^{4-2\beta}\right)^2-8\left(x^4-4f_1x^{8-\beta}+4f_1^2x^{6-2\beta}\right)\\&\left(2f_1x^{2-\beta}+4f_1f_2x^{6-2\beta}+4f_1^2x^{4-3\beta}\right)+2\left(2f_1x^{2-\beta}+4f_1f_2x^{6-2\beta}+4f_1^2f_3x^{4-3\beta}\right)^2]\frac{t^3}{6}\\&-2\left(x^2-4f_1x^{6-\beta}+4f_1^2x^{4-2\beta}\right)^2\left(2f_1x^{2-\beta}+4f_1f_2x^{6-2\beta}\right)\frac{t^4}{4},\end{aligned} \tag{5.23}$$

où $f_2=\frac{\Gamma(7-\beta)}{\Gamma(7-2\beta)}$, $f_3=\frac{\Gamma(5-2\beta)}{\Gamma(5-3\beta)}$.

Par conséquent, la solution de l'équation (5.19), vérifiant la condition (5.20) est donnée par la formule :

$$u\left(x,t\right)=x^2+\left(x^2-4f_1x^{6-\beta}+4f_1^2x^{4-2\beta}\right)t+[4x^2-4f_1\left(\left(6-\beta\right)\left(5-\beta\right)-2\right)x^{6-\beta}$$
$$+4f_1^2\left(\left(4-2\beta\right)\left(3-2\beta\right)+2\right)x^{4-2\beta}-2x^4\left(2f_1x^{2-\beta}+4f_1f_2x^{6-2\beta}+4f_1^2x^{4-3\beta}\right)$$
$$-8f_1x^{2-\beta}\left(x^4-4f_1x^{8-\beta}+4f_1^2x^{6-2\beta}\right)+4f_1x^{2-\beta}\left(2f_1x^{2-\beta}+4f_1f_2x^{6-2\beta}+4f_1^2f_3x^{4-3\beta}\right)]\tfrac{t^2}{4}$$
$$+[\left(x^2-4f_1x^{6-\beta}+4f_1^2x^{4-2\beta}\right)\left(2-4f_1\left(6-\beta\right)\left(5-\beta\right)x^{4-\beta}+4f_1^2\left(4-2\beta\right)\left(3-2\beta\right)x^{2-2\beta}\right)$$
$$-8f_1x^{2-\beta}\left(x^2-4f_1x^{6-\beta}+4f_1^2x^{4-2\beta}\right)^2-8\left(x^4-4f_1x^{8-\beta}+4f_1^2x^{6-2\beta}\right)$$
$$\left(2f_1x^{2-\beta}+4f_1f_2x^{6-2\beta}+4f_1^2x^{4-3\beta}\right)+2\left(2f_1x^{2-\beta}+4f_1f_2x^{6-2\beta}+4f_1^2f_3x^{4-3\beta}\right)^2]\tfrac{t^3}{6}$$
$$-2\left(x^2-4f_1x^{6-\beta}+4f_1^2x^{4-2\beta}\right)^2\left(2f_1x^{2-\beta}+4f_1f_2x^{6-2\beta}\right)\tfrac{t^4}{4}. \tag{5.24}$$

La figure $(5.2.a)$ représente la solution numérique (5.24) de (5.19) avec $\beta=\frac{1}{2}$ et la figure $(5.2.b)$ représente la solution de l'équation (5.19) avec $\beta=1$. On remarque que le comportement est fortement similaire.



(a) (b)

Fig 5.2 : Dans (a) la solution numérique de $u(x,t)$ pour $\beta=\frac{1}{2}$ avec la méthode VIM
Dans (b) la solution numérique de $u(x,t)$ pour $\beta=1$ avec la méthode VIM.

5.2 Le Systeme WBK Fractionnaire

Dans ce paragraphe, on utilise la méthode ADM pour résoudre l'équation du Whitham-Broer-Kaup avec dérivée fractionnaire spatio-temporelle.

On considère alors (voir [43]) :

$$\begin{cases} D_t^{\alpha}u+u\left(D_x^{\beta}u\right)+D_x^{\beta}v+Au_{xx}=0 \\ D_t^{\alpha}v+u\left(D_x^{\beta}v\right)+v\left(D_x^{\beta}u\right)+Bu_{xxx}+Av_{xx}=0 \end{cases},0<\alpha\leq 1,0<\beta\leq 1. \tag{5.25}$$

où D_t^{α} et D_x^{β} désignent les dérivées fractionnaires.A et B sont des constantes réelles.

On prend, comme condition initiale, les fonctions :

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ \\ v(x,0) = g(x). \end{cases} \tag{5.26}$$

Pour $\alpha = \beta = 1$, le système (5.25) se réduit à :

$$\begin{cases} u_t + uu_x + v_x + Au_{xx} = 0 \\ \\ v_t + (uv)_x + Bu_{xxx} + +Av_{xx} = 0 \end{cases} \tag{5.27}$$

Cet dernier système a été étudié par plusieurs auteurs [37, 38, 39]. Par contre dans le cas [43], l'étude du Système (5.25) n'a pas encore été abordée.(à ma connaissance)

Pour résoudre le problème (5.25) , avec la méthode ADM, on écrit (5.25) sous la forme :

$$\begin{cases} D_t^{\alpha} u = -u\left(D_x^{\beta} u\right) - D_x^{\beta} v - Au_{xx} \\ \\ D_t^{\alpha} v = -u\left(D_x^{\beta} v\right) - v\left(D_x^{\beta} u\right) - Bu_{xxx} + Av_{xx}, \end{cases} \tag{5.28}$$

où $0 < \alpha \leq 1, 0 < \beta \leq 1$.

On applique J^{α} à (5.28) et en tenant compte de (5.26), on obtient :

$$\begin{cases} u(x,t) = f(x) - J^{\alpha}\left(P_1(u(x,t))\right) - J^{\alpha}\left(D_x^{\beta} v\right) - AJ^{\alpha}(u_{xx}) \\ \\ v(x,t) = g(x) - J^{\alpha}\left(P_2(u(x,t), v(x,t))\right) - J^{\alpha}\left(P_3(u(x,t), v(x,t))\right) \\ -BJ^{\alpha}(u_{xxx}) + AJ^{\alpha}(v_{xx}), \end{cases} \tag{5.29}$$

où $P_1(u(x,t)) = u\left(D_x^{\beta} u\right)$, $P_2(u(x,t), v(x,t)) = u\left(D_x^{\beta} v\right)$ et $P_3(u(x,t), v(x,t)) = v\left(D_x^{\beta} u\right)$.

Avec la méthode d'Adomian, la solution s'écrit sous la forme :

$$u(x,t) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i(x,t) \quad , \quad v(x,t) = \sum_{i=0}^{\infty} v_i(x,t) \tag{5.30}$$

On décompose ensuite les opérateurs $P_i(u)$, $i \in \{1,2,3\}$, comme suit :

$$P_1(u) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i$$

$$P_2(u,v) = \sum_{i=0}^{\infty} B_i \tag{5.31}$$

$$P_3(u,v) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i.$$

D'après le lemme précédent, on a :

$$\begin{aligned}
A_i &= \frac{1}{i!}\frac{d^i}{d\lambda^i}\left[P_1\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k u_k\right)\right]_{\lambda=0} = \frac{1}{i!}\frac{d^i}{d\lambda^i}\left[\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k u_k\right)D_x^\beta\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k u_k\right)\right]_{\lambda=0}\\
B_i &= \frac{1}{i!}\frac{d^i}{d\lambda^i}\left[P_2\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k u_k,\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k v_k\right)\right]_{\lambda=0} = \frac{1}{i!}\frac{d^i}{d\lambda^i}\left[\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k u_k\right)D_x^\beta\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k v_k\right)\right]_{\lambda=0}\\
C_i &= \frac{1}{i!}\frac{d^i}{d\lambda^i}\left[P_3\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k u_k,\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k v_k\right)\right]_{\lambda=0} = \frac{1}{i!}\frac{d^i}{d\lambda^i}\left[\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k v_k\right)D_x^\beta\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k u_k\right)\right]_{\lambda=0}.
\end{aligned} \tag{5.32}$$

En effet, on peut facilement calculer ces polynomes. En voici quelques un :

$$\begin{gathered}
A_0 = u_0 D_x^\beta u_0\\
A_1 = u_1 D_x^\beta u_0 + u_0 D_x^\beta u_1\\
A_2 = u_2 D_x^\beta u_0 + u_1 D_x^\beta u_1 + u_0 D_x^\beta u_2\\
A_3 = u_3 D_x^\beta u_0 + u_2 D_x^\beta u_1 + u_1 D_x^\beta u_2 + u_0 D_x^\beta u_3.
\end{gathered} \tag{5.33}$$

Les quatre premiers termes de B_n sont :

$$\begin{gathered}
B_0 = u_0 D_x^\beta v_0\\
B_1 = u_1 D_x^\beta v_0 + u_0 D_x^\beta v_1\\
B_2 = u_2 D_x^\beta v_0 + u_1 D_x^\beta v_1 + u_0 D_x^\beta v_2\\
B_3 = u_3 D_x^\beta v_0 + u_2 D_x^\beta v_1 + u_1 D_x^\beta v_2 + u_0 D_x^\beta v_3.
\end{gathered} \tag{5.34}$$

Et ceux de C_n sont donnés par

$$\begin{gathered}
C_0 = v_0 D_x^\beta u_0\\
C_1 = v_1 D_x^\beta u_0 + v_0 D_x^\beta u_1\\
C_2 = v_2 D_x^\beta u_0 + v_1 D_x^\beta u_1 + v_0 D_x^\beta u_2\\
C_3 = v_3 D_x^\beta u_0 + v_2 D_x^\beta u_1 + v_1 D_x^\beta u_2 + v_0 D_x^\beta u_3.
\end{gathered} \tag{5.35}$$

On substitue (5.33) , (5.34) et (5.35) dans (5.29), on obtient la formule de récurrence suivante :

$$\begin{aligned}
&u_0(x,t) = f(x)\\
&u_{n+1}(x,t) = -J^\alpha(A_n) - J^\alpha\left(D_x^\beta v_n\right) - AJ^\alpha(u_{nxx})\\
&\\
&v_0(x,t) = g(x)\\
&v_{n+1}(x,t) = -J^\alpha(B_n) - J^\alpha(C_n) - bJ^\alpha(u_{nxxx}) + AJ^\alpha(v_{nxx})
\end{aligned} \tag{5.36}$$

5.2.1 Le WBK Fractionnaire Temporel et l'ADM

On reconsidère le système du Whitham-Broer-Kaup avec dérivée fractionnaire en t (voir [43]) :

$$\begin{cases} D_t^\alpha u = -uu_x - v_x - Au_{xx} \\ \\ D_t^\alpha v = -uv_x - vu_x - Bu_{xxx} + Av_{xx}, \end{cases} \tag{5.37}$$

avec la condition initiale :

$$\begin{cases} u_0(x,0) = f(x) = w - 2ck\coth(k\mu) \\ \\ v_0(x,0) = g(x) = -2c(c+A)\,k^2 \csc h^2(k\mu), \end{cases} \tag{5.38}$$

où $c = \sqrt{B + A^2}, \mu = x + x_0, x_0, k$ et w sont des constantes réelles.

La solution exacte de (5.37), pour le cas où $\alpha = 1$, s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} u(x,t) = w - 2ck\coth(k(\mu - wt)) \\ \\ v(x,t) = -2c(c+A)\,k^2 \csc h^2(k(\mu - wt)). \end{cases} \tag{5.39}$$

Pour pouvoir obtenir des solutions numériques de (5.37), on substitue la condition initiale (5.38) et les polynomes d'Adomian (5.33), (5.34) et (5.35) dans l'expression (5.36). On obtient :

$$\begin{aligned} u_0(x,t) &= f(x), \\ v_0(x,t) &= g(x), \end{aligned} \tag{5.40}$$

$$\begin{aligned} u_1(x,t) &= -J^\alpha(A_0) - J^\alpha(v_{0x}) - AJ^\alpha(u_{0xx}) \\ &= f_1 \tfrac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \\ v_1(x,t) &= -J^\alpha(B_0) - J^\alpha(C_0) - bJ^\alpha(u_{0xxx}) + AJ^\alpha(v_{0xx}) \\ &= g_1 \tfrac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \end{aligned} \tag{5.41}$$

$$\begin{aligned}
u_2(x,t) &= -J^{\alpha}(A_1) - J^{\alpha}(v_{1x}) - AJ^{\alpha}(u_{1xx}) \\
&= f_2 \tfrac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \\
v_2(x,t) &= -J^{\alpha}(B_1) - J^{\alpha}(C_1) - bJ^{\alpha}(u_{1xxx}) + AJ^{\alpha}(v_{1xx}) \\
&= g_2 \tfrac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \\
u_3(x,t) &= -J^{\alpha}(A_2) - J^{\alpha}(v_{2x}) - AJ^{\alpha}(u_{2xx}) \\
&= f_3 \tfrac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} \\
v_3(x,t) &= -J^{\alpha}(B_2) - J^{\alpha}(C_2) - bJ^{\alpha}(u_{2xxx}) + AJ^{\alpha}(v_{2xx}) \\
&= g_3 \tfrac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)},
\end{aligned} \tag{5.42}$$

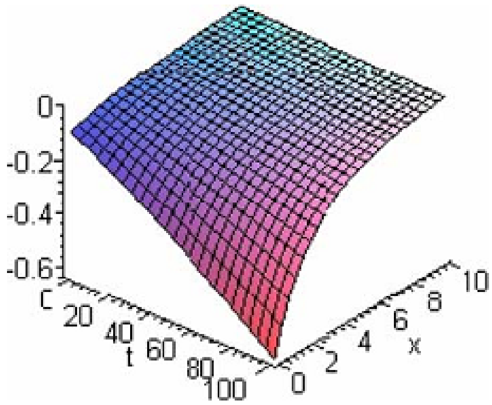
où

$$\begin{aligned}
f_1 &= -ff_x - g_x - Af_{xx} \\
g_1 &= -fg_x - gf_x + Ag_{xx} - Bf_{xxx} \\
f_2 &= -f_1f_x - ff_{1x} - g_{1x} - Af_{1xx} \\
g_2 &= -f_1g_x - g_1f_x - fg_{1x} - gf_{1x} + Ag_{1xx} - Bf_{1xxx} \\
f_3 &= -f_2f_x - f_1f_{1x} - ff_2 - g_{2x} - Af_{2xx} \\
g_3 &= -f_1g_x - f_1g_{1x} - fg_{2x} - g_2f_x - g_1f_{1x} - gf_{2x} + Ag_{2xx} - Bf_{2xxx}.
\end{aligned}$$

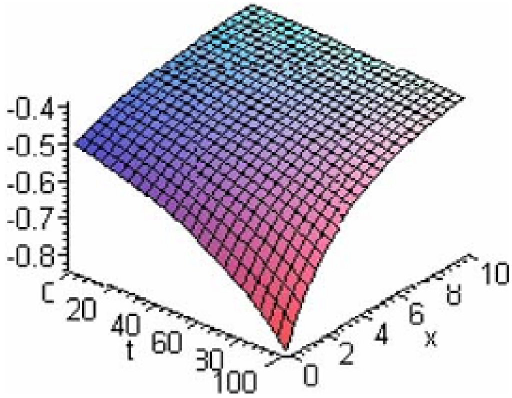
Par conséquent, on a la solution:

$$\begin{cases}
u(x,t) = f(x) + f_1 \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + f_2 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + f_3 \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} + \dots\dots \\
v(x,t) = g(x) + g_1 \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + g_2 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + g_3 \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} + \dots\dots
\end{cases} \tag{5.43}$$

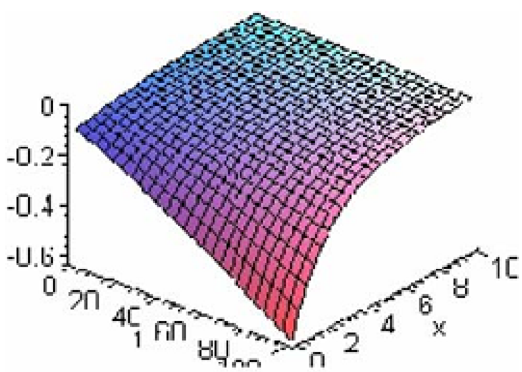
Nous traçons des solutions numériques pour le système (5.37) avec $\alpha = \frac{1}{2}$ ainsi que la solution exacte (5.39) lorsque $\alpha = \beta = 1$. Les figures $(5.3.a)$ et $(5.3.c)$ représentent la solution numérique de (5.37) vérifiant la condition initiale (5.38). Les figures $(5.3.b)$ et $(5.3.d)$ représentent la solution exacte (5.39).



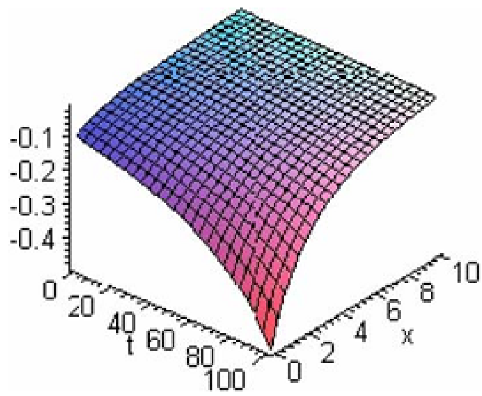
(a)



(b)



(c)



(d)

Fig5.3 : dans (a) la solution numérique de $u(x,t)-(5.43)$, dans (b) la solution exacte de $u(x,t)-(5.39)$, dans (c) la solution numérique de $v(x,t)-(5.43)$, dans (d) la solution exacte de $v(x,t)-(5.39)$
$A = B = \frac{3}{2}, w = 0.005, k = 0.1, x_0 = 10, \alpha = \frac{1}{2}$

5.2.2 Le WBK fractionnaire spacial et l'ADM

On reconsidère le système de Whitham-Broer-Kaup avec dérivée fractionnaire en x (voir [43]) :

$$\begin{cases} u_t = -u\left(D_x^{\beta} u\right) - D_x^{\beta} v - A u_{xx} \\ \\ v_t = -u\left(D_x^{\beta} v\right) - v\left(D_x^{\beta} u\right) - B u_{xxx} + A v_{xx} \end{cases} , 0 < \beta \leq 1. \tag{5.44}$$

On prend :

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f(x) = x^4 \\ \\ v(x,0) &= g(x) = x^3. \end{aligned} \tag{5.45}$$

Pour calculer la solution numérique de (5.44), on substitue $(5.33 - 5.34 - 5.35)$ et la condition initiale (5.45) dans l'expression (5.36) .

Les trois premiers termes de la série sont donnés par :

$$\begin{aligned} u_0(x,t) &= x^4 \\ v_0(x,t) &= x^3. \end{aligned} \tag{5.46}$$

$$\begin{aligned} u_1(x,t) &= -J^\alpha(A_0) - J^\alpha\left(D_x^\beta v_0\right) - AJ^\alpha(u_{0xx}) \\ &= \left(f_1 x^{8-\beta} + f_2 x^2\right) t \\ v_1(x,t) &= -J^\alpha(B_0) - J^\alpha(C_0) - bJ^\alpha(u_{0xxx}) + AJ^\alpha(v_{0xx}) \\ &= \left(g_1 x^{7-\beta} + g_2 x\right) t, \end{aligned} \tag{5.47}$$

$$\begin{aligned} u_2(x,t) &= -J(A_1) - J\left(D_x^\beta v_1\right) - AJ(u_{1xx}) \\ &= \left(f_3 x^{12-2\beta} + f_4 x^{6-\beta} + f_5\right) \tfrac{t^2}{2} \\ v_2(x,t) &= -J(B_1) - J(C_1) - bJ(u_{1xxx}) + AJ(v_{1xx}) \\ &= \left(g_3 x^{11-2\beta} + g_4 x^{5-\beta}\right) \tfrac{t^2}{2}, \end{aligned} \tag{5.48}$$

où

$$f_1 = \tfrac{\Gamma(5)}{\Gamma(5-\beta)},\ f_2 = -3 - 12A$$

$$f_3 = -f_1\left(\tfrac{\Gamma(5)}{\Gamma(5-\beta)} + \tfrac{\Gamma(9)}{\Gamma(9-2\beta)}\right)$$

$$f_4 = -f_2\left(\tfrac{\Gamma(5)}{\Gamma(5-\beta)} + \tfrac{\Gamma(3)}{\Gamma(3-\beta)}\right) - A(8-\beta)(7-\beta)f_1 - (7-\beta)g_1$$

$$f_5 = -g_2 - 2Af_2.$$

$$g_1 = -\tfrac{\Gamma(4)}{\Gamma(4-\beta)} - \tfrac{\Gamma(5)}{\Gamma(5-\beta)},\ g_2 = 6A - 24B$$

$$g_3 = -f_1\left(\tfrac{\Gamma(4)}{\Gamma(4-\beta)} + \tfrac{\Gamma(9)}{\Gamma(9-2\beta)}\right) - g_1\left(\tfrac{\Gamma(5)}{\Gamma(5-\beta)} + \tfrac{\Gamma(8)}{\Gamma(8-2\beta)}\right)$$

$$\begin{aligned} g_4 &= -f_2\left(\tfrac{\Gamma(4)}{\Gamma(4-\beta)} + \tfrac{\Gamma(3)}{\Gamma(3-\beta)}\right) - \tfrac{\Gamma(5)}{\Gamma(5-\beta)}g_2 - B(8-\beta)(7-\beta)(6-\beta)f_1 \\ &+A(7-\beta)(6-\beta)g_1 - \tfrac{\Gamma(2)}{\Gamma(2-\beta)}. \end{aligned}$$

Par conséquent, la solution de l'équation (5.44), vérifiant la condition (5.45) est donnée par la formule :

$$\begin{cases} u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t) + \ldots\ldots.. \\ v(x,t) = v_0(x,t) + v_1(x,t) + v_2(x,t) + \ldots\ldots.. \end{cases} \tag{5.49}$$

Les figures (5.4.a) et (5.4.c) représentent la solution numérique de (5.44) avec $\beta = 1$. Les

Figures (5.4.b) et (5.4.d) représentent la solution de (5.44) avec $\beta = \frac{1}{2}$. On remarque que le comportement est très similaire.

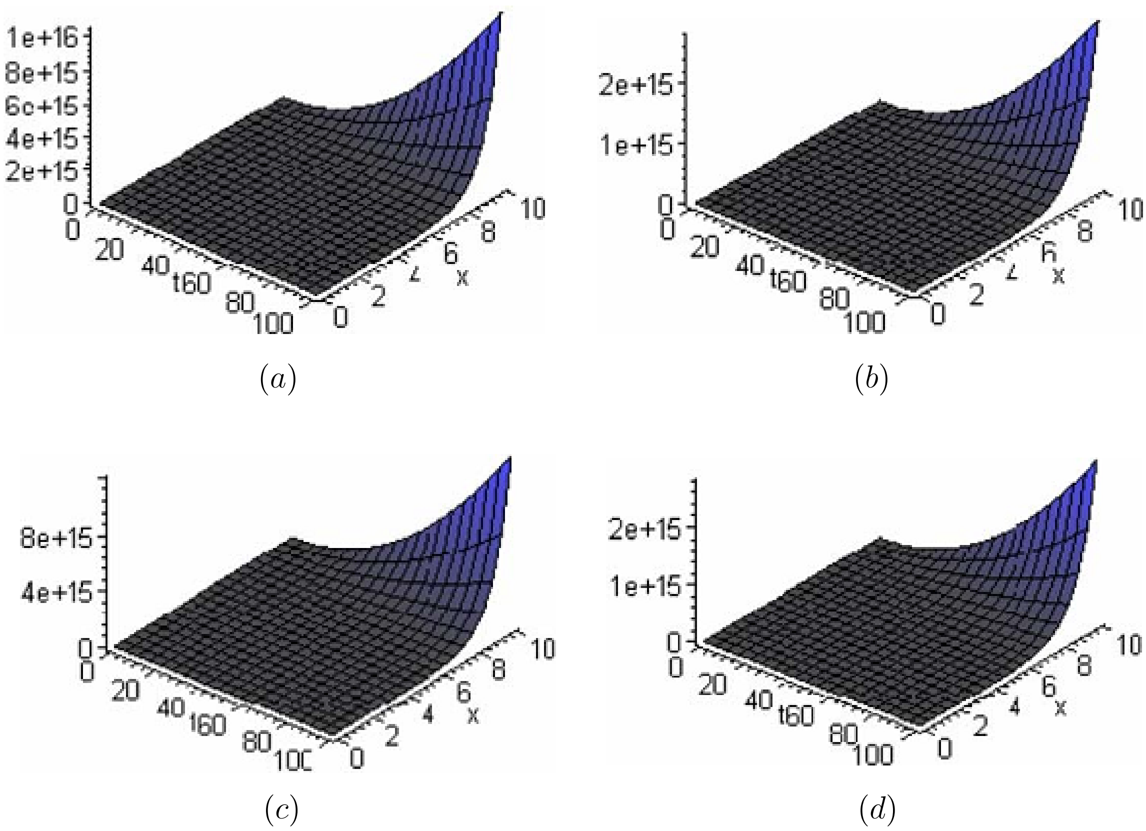


Fig 5.4 : Sur (a) et (c) : la solution numérique de $u(x,t)$ et $v(x,t)$ pour $\beta = 1$ et sur (b) et (d) : la solution numérique de $u(x,t)$ et $v(x,t)$ pour $\beta = \frac{1}{2}$

Chapitre 6

CONCLUSION GENERALE

Dans cette thèse de Doctorat, nous nous sommes intéressés au calcul fractionnaire, en présentant une étude analytique puis nous avons présenté une étude numérique. On a commencé par généraliser des résultats intégraux sur des inégalités classiques de type Feng Qi, de type Ngo et d'autres résultats de Sulaimann et autres. D'autre part, en utilisant la différence intégrale de Cauchy-Schwarz avec poids et d'autres résultats classiques, on a aussi démontré d'autres résultats fractionnaires qui généralisent la fameuse inégalité de Cassel ainsi que d'autres travaux récents de S.S. Dragomir.

Le côté differentiel du calcul fractionnaire, nous l'avons abordé en deux dimensions :

La première dimension concerne l'étude théorique ; elle est basée sur l'application des inégalités fractionnaires pour étudier les problèmes aux limites d'ordre arbitraire et en particulier pour démontrer de l'existence et l'unicité, (ou uniquement l'existence) des solutions d'un problème fractionnaire au sens de Caputo avec des conditions intégrales sur la solution. Dans cette partie, nous avons, en premier lieu, proposé une autre équivalence inégrale du problème posé, puis nous avons établit des conditions assurant l'existence et l'unicité de solutions pour le problème considéré. Puis dans une autre partie essentielle, nous avons développé d'autres nouvelles conditions suffisantes pour assurer l'existence d'une solution au moins. Les résultats trouvés sont basés sur les estimations intégrales d'ordre fractionnaires et aussi sur la théorie des points fixes dans les "Banach(s)" ainsi que d'autres Lemmes due à Kilbas et al.

Dans la deuxième dimension différentielle de notre travail, nous nous sommes intéressés à l'étude numérique de quelques équations et quelques systèmes differentiels couplés en utilisant la méthode d'ADM et celle de VIM.

Pour conclure, nous allons proposer quelques pistes de recherche qui ne sont pas encore abordées dans cette thèse :

1- Pour les équations differentielles fractionnaires, peut-on appliquer la théorie des points fixes de Banach pour les problèms fractionnaires au sens de Grunwald letnikov ?

2- Pour la partie numérique, peut-on espérer avoir une vraie comparaison entre l'ADM et la VIM sur les systèms differentiels fractionnaires couplés ?

Voila à ma conaissance au moins deux chemins à suivre.

Bibliographie

[1] I. Podlubny : *Fractional Differential Equations.* Academic Press, San Diego, 1999.

[2] G. Samko, A.A. Kilbas, O.I. Marichev : *Fractional Integral and Derivative : Theory and Applications.* Gordon and Breach, Yverdon, 1993.

[3] K.S. Miller and B. Ross : *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations.* New York : Wiley, 1993.

[4] K.B. Oldham and J. Spanier : *The Fractional Calculus : Integrations and Differentiations of Arbitrary Order.* New York : Academic Press, 1974.

[5] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo : *Theory and Applications of Fractional Differential Equations.* Elsevier, Amsterdam, 2006.

[6] S. Szufla : *On the Application of Measure of Noncompactness to Existence Theorems.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 75, 1986, 1-14.

[7] S. Zhang : *Positive Solutions for Boundary-Value Problems of Nonlinear Fractional Differential Equations*, Electron. J. Differential Equations, 2006, No. 36, 12 pp

[8] Q.A. Ngo, D.D. Thang, T.T. Dat, D.A. Tuan : *Notes on an Integral Inequality.* JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math. 7(4), 2006, Art. 120.

[9] W.J. Liu, G.S. Cheng, C.C. Li : *Further Development of an Open Problem Concerning an Integral Inequality.* JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math. 9(1), 2008, Art. 14.

[10] L. Yin, F. Qi : *Some Integral Inequalities on Time Scales.* Resolt in Mathematic, Suise, Springer.

[11] W.T. Sulaiman : *Several Ideas on Some Integral Inequalities.* Advances in Pure Mathematics, 1, 2011, 63-66.

[12] S. Saitoh, V.K. Tuan, M. Yamamoto : *Reverse Convolution Inequalities and Applications to Inverse Heat Source Problems*. J. Inequal. Pure. Appl. Math. 3(5), 2002, Art. 80.

[13] W.J. Liu, Q.A. Ngo, V.N. Huy : *Several Interesting Integral Inequalities*. J. Math. Inequal. 3(2), 2009, 201-212.

[14] M.A. Krasnoselskii : *Two Remarks on the Method of Successive Approximations*. Uspekhi Matematicheskikh Nauk, 10, 1955, 123-127.

[15] G. Adomain : *Solving Frontier Problems of Physics, The Decomposition Method*. Kluwer Academic Publishers, Boston, 1994.

[16] G. Adomain : *Nonlinear Stochastic Systems, Theory and Applications to Physics*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1989.

[17] K. Abbaoui, Y. Cherruault : *Convergence of Adomian's Method Applied to Differnetial Equations*. Comput. Math. Appl. 28(5),1994, 103-109.

[18] K. Abbaoui, Y. Cherruault : *New Ideas for Proving Convergence of Decomposition Method*. Comput. Math. Appl. 29, 1995, 103-108.

[19] Y. Cherruault : *Convergence of Adomian's Method*. Kybernetes 18, 1989, 31-38.

[20] E. Baboblian, A. Davari : *Numerical Implementation of Adomian Decomposition Method for Linear Volterra Integral Equation of the Second Kind*. Appl. Math. Comput. 165, 2005, 223-227.

[21] V. Daftardar-Gejji, H. Jafari : *Adomian Decomposition, a Tool for Solving a System of Fractional Differential Equations*. J. Math. Anal. Appl. 301, 2005, 508-518.

[22] D. Kaya, S. M. El Sayad : *A Numerical Implementation of the Decomplosition Method for the Lienard Equation*. Appl. Math. Comput. 171, 2005, 1095-1103.

[23] Q. Wang : *Numerical Solutions for Fractional KdV-Burgers Equation by Adomian Decomposition Method*. Appl. Math. Comput. 182, 2006, 1049-1055.

[24] A. Wazwaz, A. Georguis : *An Analytic Study of Fisher's Equations by Using Adomian Decomposition Method*. Appl. Math. Comput. 154, 2004, 609-620.

[25] M.A. Helal, M.S. Mehanna : *The Tanh Method and Adomian Decomposition Method for Solving the Foam Drainage Equation.* Appl. Math. Comput. 190, 2007, 599-609.

[26] S. Hilgenfeldt, S.A. Koehler, H.A. Stone : *Dynamics of Coarsening Foams : Accelerated and Self-Limiting Drainage.* Phys. Rev. Lett. 20, 2001, 4704-7407.

[27] R.A. Leonard, R. Lemlich : *A Study of Interstial Liquid Flow in Foam.* A.I.Ch.E.J. 11, 1965, 18-25.

[28] G. Verbist, D. Weuire, A.M. Kraynik : *The Foam Drainage Equation.* J. Phys. Condens. Matter 8, 1996, 3715-3731.

[29] Z. Dahmani, M.M. Mesmoudi, R. Bebbouchi : *The Foam-Drainage Equation With Time and Space Fractional Derivative Solved by the ADM Method.* E. J. Qualitative Theory of Diff. Equ., No. 30, 2008, 1-10.

[30] J.H. He : *Some Applications of Nonlinear Fractional Differential Equations and Their Approximations.* Bull. Sci. Techno. 15(2), 1990, 86 - 90.

[31] Qiaoxing Li , Jianmei Yang : *Variational Iteration Decomposition Method for Solving Higher Dimensional Initial Boundary Value Problems Muhammad Aslam Noor*, Syed Tauseef Mohyud-Din . International Journal of Nonlinear Science, 7(1), 2009.

[32] J.H. He : *Approximate Solution of Nonlinear Differnetial Equations With Convolution Product Nonlinearities.* Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg., 167 (1-2), 1998, 69-73.

[33] J.H. He : *Approximate Analytical Solution for see Pageflow with Fractional Derivatives in Porous Media.* Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg., 167, 1998, 57-68.

[34] J.H. He : *Non-Perturbative Methods for Strongly Nonlinear Problems.* Disertation de Verlag in GmBH, Berlin, 2006.

[35] M. Inokuti, H. Sekine and T. Mura : *General Use of the Lagrange Multiplier in Non-linear Mathematical Physics*, in : S. Nemat-Nassed (Ed.),Variational Method in the Mechanics of Solids, Pergamon Press, 1978, pp. 156–162.

[36] A. Wazwaz : *A study on Linear and Nonlinear Schrodinger Equations by the Variational Iteration Method*, Chaos, Solitons and Fractals 37, 2008, 1136–1142.

[37] L.J.F. Broer : *Approximate Equations for Long Water Waves.* Appl. Scient. Res. 31(5), 1975, 377 - 395.

[38] D.J. Kaup. Prog : *A Higher-Order Water Wave Equation and Its Method of Solution.* Theor. Phys. 54, 1975, 396 - 408.

[39] G.B. Whitham : *Variational Methods and Applications to Water Waves.* Proc. Royal Soc. lond. A, 299, 1967, 6 - 25.

[40] A. Anber, Z. Dahmani, B. Bendoukha : *New Integral Inequalities of Feng Qi Type Via Riemann-Liouville Fractional Integration.* Ser. Math. Inform. Vol. 27, No 2, 2012, 157-166.

[41] A. Anber, Z. Dahmani : *The Variational Iteration Method for Solving the Fractional Coupled Lotka-Volterra Equation.* J. Interdis cip. Math. ISSN 0972-0502. 14, No. 4, 2011, 373-388.

[42] Z. Dahmani, A. Anber : *The Variational Iteration Method for Solving the Fractional Foam Drainage Equation.* International Journal of Nonlinear Science. ISSN 1749-3889. Vol.10 No.1, 2010, pp.39-45.

[43] Z. Dahmani, A. Anber, M.M. Mesmoudi : *Solutions of the Coupled Witham-Broer-Kaup Equations with Fractional derivatives.* Appl. Math. Comput. Sci. ISSN 0976-1586. 1 , No. 2, 2010, 125-138.

[44] A. Anber, S. Belarbi, Z. Dahmani : *New Existence and Uniqueness Results for Fractional Differential Equations.* Accepted in Journal of Analete Stiintifice Ale Universitatii Ovidius Constanta, 2013.

[45] A. Anber, Z. Dahmani, B. Bendoukha : *Some New Results Using Integration of Arbitrary Order*, Int. J. Nonlinear Anal. Appl. 4, No. 2, 2013, 45-52.

[46] N.S. Barnett, S.S. Dragomir and I. Gomm : *On Some Integral Inequalities Related to the Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz Inequality*, Appl. Math. Letters, 23, 2010, 1008-1012.

[47] S.S. Dragomir : *Advances in Inequalities of the Schwarz, Gruss and Bessel Type in Inner Product Spaces,* Nova Science Publishers Inc, New York, 2005.

[48] G.S. Watson : *Serial Correlation in Regression Analysis*, I, Biometrika, 42, 1955, 327-341.

[49] P. Cerone and S.S. Dragomir : *New Bounds for the Chebyshev Functional*, ajmaa.org/RGMIA/papers/v6n2/NICF. pdf, 2003.

[50] G. Polya and G. Szego : *Aufgaben and Lahrsotse ans Der Analysis*, Berlin, (1), 1925, 213-214.

[51] Z. Dahmani : *Some Integral Inequalities using Riemann-Liouville.* General Mathematic. 20 , No.4, 2012, 63-69.

[52] A. Anber and Z. Dahmani : *New integral results using Polya-Szego inequality*, Acta Comment Univ Tartu de Math. Volume 17, Number 2, December 2013.

[53] Z. Dahmani : *Some* (p, q) *Weighted fractional inequality*, Submitted paper.