Abstract.

This thesis is on the topic of Nevanlinna theory, a powerful tool from complex analysis. In this thesis, we begin by studying how Nevanlinna Theory is derived, and continue by showing how its results and methods can be used to solve some interesting problems like unicity problem of entire functions, and differential equations. We end by visiting the $p-$adic universe. Such a visit offers a glimpse of a part of mathematics which is both important and fun, and which also is something of a meeting point between algebra and complex analysis.

Key words : Complex analysis, Nevanlinna theory, order, exponent of convergence, oscillation, differential equation, iterated order, $[p, q]-$order, unicity of entire function, *Brück Conjecture,* $q-$difference, $q-$wronskian, $p-$adic.

Résumé.

Cette thèse est sur le sujet de la théorie de Nevanlinna, un outil puissant de l'analyse complexe. Dans cette thèse, nous commençerons par donner les bases de la théorie de Nevanlinna, et on continuera de montrer comment ses résultats et ses méthodes peuvent être employés pour résoudre certains problèmes intéressants comme le problème d'unicité des fonctions entières, et les équations différentielles complexes. Nous finirons par visiter l'univers $p-$adic. Une telle visite offre un aperçu d'une partie en mathématiques qui est importante et amusante, et qui est également en quelque sorte, un point liant l'algèbre et l'analyse complexe.

Mots clés : Analyse complexe, théorie de Nevanlinna, ordre, l'exposant de convergence, oscillation, équation différentielle, $[p, q]-$ordre, unicité des fonctions entières, conjecture de *Brück,* $q-$différence, $q-$wronskien, $p-$adique.

Liste des papiers soumis et publiés

1. R. Bouabdelli and B. Belaïdi, *Results on shared values of entire functions,* International Journal of Difference Equations, Volume 8, Number 1, pp. 3–14 (2013).
   http ://campus.mst.edu/ijde/index_files/ijde81.htm

2. R. Bouabdelli and B. Belaïdi, *Unicity Theorems of Entire Functions and Differential Polynomials.*

3. R. Bouabdelli and B. Belaïdi, *On The Brück Conjecture and Differential polynomials.*

4. R. Bouabdelli and B. Belaïdi, *On the Iterated Exponent of Convergence of Solutions of Linear Differential Equations with Entire and Meromorphic Coefficients,* Journal of mathematics, volume 9, p.p. 1-9.
   http ://www.hindawi.com/journals/jmath/2013/429083/

5. R. Bouabdelli and B. Belaïdi, *Properties of the Growth and Complex Oscillation of Solutions of Higher Order Linear Differential Equations.*

6. R. Bouabdelli, A. Boutabaa and B. Belaïdi, $p-$*adic* $q-$*difference equations and* $q-$*Wronskian,* Soumis.

7. R. Bouabdelli and B. Belaïdi, Growth and Complex Oscillation of Linear Differential Equations with Meromorphic Coefficients of $[p, q]-$Order, Soumis.

Communications

1. **Participation à la deuxième journée scientifique (Exposé Oral)**

   "Unicity of entire functions sharing small functions with their differential polynomials"
   Université Abdelhamid Ibn Badis Mostaganem.

2. **Participation au congrès des mathématiciens Algériens (Exposé Mural)**

   "On the iterated order of linear differential equations with meromorphic coefficients"
   Université Badji Mokhtar Annaba.

3. **Participation à la Conférence Internationale sur les Mathématiques Pures et Appliquées (Exposé Oral)**

   "On the conjecture of Brück and uniqueness theory of entire functions"
   Université 8 Mai 1945 Guelma.

4. **Participation au colloque national sur les mathématiques et applications (Exposé Oral)**

   "Sharing Problem of Entire Functions and Differential polynomials"
   Université de Khenchela

Table des matières

1 Outils principaux **2**

1.1 Un aperçu sur Théorie de Nevanlinna 2

1.1.1 Définitions basiques 2

1.1.2 Formule de Poisson-Jensen 4

1.1.3 Reformulation de la formule de Jensen : La naissance de la théorie de Nevanlinna 6

1.1.4 Propriétés de la fonction caractéristique de Nevanlinna et son Premier Théorème 9

1.1.5 Ordre de croissance, exposant de convergence d'une fonction méromorphe 14

1.1.6 Indice de défaut de Nevanlinna 19

1.1.7 Mesure et densité 21

1.2 Théorie de Wiman-Valiron 22

1.2.1 Définitions 22

1.2.2 L'ordre de croissance selon Wiman-Valiron 25

1.2.3 Le théorème principal de Wiman-Valiron 25

1.3 L'univers $p-$adique 25

1.3.1 Les valeurs absolues de $\mathbb{Q}$ 26

1.3.2 Le corps des nombres $p-$adiques 27

1.3.3 Le corps $\mathbb{C}_p$ 31

1.3.4 Les fonctions analytiques p-adiques 33

1.3.5 Zéros des séries entières 40

2 Sur l'unicité des fonctions entières 46

2.1 Historique du problème 46

2.1.1 Les fameux théorèmes de Rolf Nevanlinna 46

2.1.2 Les améliorations de Gundersen 48

2.1.3 Unicité des fonctions entières et leurs dérivées 49

2.2 Nos Résultats 52

2.2.1 Conjecture de Rainer Brück 52

2.2.2 Article 1 : Résultats sur les valeurs partagées des fonctions entières et leurs polynômes différentiels homogènes 53

2.2.3 Article 2 : Théorèmes d'unicité des fonctions entières et polynômes différentiels 62

2.2.4 Article 3 : Sur la conjecture de Brück et les polynômes différentiels . . 69

3 Sur les équations différentielles complexes 79

3.1 Article 1 : Propriétés de croissance et oscillation des solutions des équations différentielles d'ordre supérieures 80

3.2 Article 2 : Sur l'exposant de convergence itératif des solutions d'une équation différentielle linéaire à coefficients fonctions entières et méromorphes 97

4 Croissance et oscillation des équations différentielles linéaires à coefficients méromorphes d'ordre $[p, q] - \varphi$ 115

5 Sur les équations $p-$adiques 135

5.1 Historique 135

5.2 Résultats 137

5.2.1 Opérateurs aux $q-$différences et $q-$Wronskiens 138

5.2.2 Le cas $s = 2$ 144

5.2.3 Cas général (s≥ 1) 151

Bibliographie 168

INTRODUCTION GENERALE

D'après le Théorème fondamental de l'algèbre, on sait que tout polynôme sur $\mathbb{C}$ est complètement déterminé par ses zéros jusqu'à un multiple constant. Mais que pouvons nous dire sur les fonctions entières ou méromorphes en général ?

Comme son nom l'indique, la théorie de la distribution des valeurs tente de répondre à la question : Combien de fois une fonction peut prendre différentes valeurs complexes ? Et quelle est la distribution et la densité de ces points ?

C'est Rolf Nevanlinna en 1920, qui a fondé une théorie qui répond à toutes ces questions. Cette théorie peut être vue comme l'outil le plus important du siècle précédent, ayant pour but "comprendre les propriétés des fonctions méromorphes". La théorie de Nevanlinna se compose de deux théorèmes principaux : Le premier Théorème et le Deuxième Théorème qui généralisent et prolongent le théorème de Picard. Depuis ce temps, cette théorie a eu de nombreuses applications dans beaucoup de domaine mathématiques, par exemple, la théorie de l'unicité des fonctions, équations différentielles complexes, et équations aux différences.

Cette thèse se place dans le domaine de la distibution de valeurs des fonctions méromorphes. On se propose d'étudier trois problèmes : problème d'unicité des fonctions entières, propriétés des solutions des équations différentielles complexes, et les équations aux $q-$différences dans un espace ultramétrique. Tout au long des démonstrations on adoptera la théorie de Nevanlinna sur $\mathbb{C}$, et la théorie $p-$adique.

L'étude s'articule autour de cinq chapitres.

Le **premier chapitre** décrit les éléments de la théorie de Nevanlinna ainsi les définitions basiques des éléments de la théorie de Wiman-Valiron. Cette théorie se fixe comme buts de classifer les fonctions entières selon leurs croissance, de préciser le lien entre les coefficients

de Taylor de la fonction et la croissance, le lien entre les zéros éventuels et le comportement de la fonction, et les relations entre la fonction et ses dérivées sur ces questions. Ensuite on donnera aussi des notions sur la théorie p-adique.
En général, nous avons omis un certain nombre de démonstrations qui ont été citées dans les références.

Le **second chapitre** attaque l'étude d'unicité des fonctions entières. En particulier on s'intéresse à la Conjecture de Brück : Tout d'abord, nous énonçons les fameux théorème de Nevanlinna connus comme le Théorème des cinq valeurs et le Théorème des quatre valeurs de Nevanlinna, qui sont l'origine du problème, ensuite on donne des améliorations qui ont été apportées par Gundersen, Mues, ect, et on passe directement à la Conjecture de Brück, qui affirme que si une fonction entière partage une valeur a CM avec sa dérivée sous certaine restriction sur l'ordre alors $f^{'} - a = c(f - a)$ pour une constante c. Nous allons étudier et améliorer cette conjecture dans plusieurs cas. En *Article 1*, nous travaillons le cas où une fonction entière partage une valeur avec son polynôme différentiel à une puissance entière ainsi pour les fonctions à petite croissance, en étudiant l'hyper-ordre régulier d'une équation différentielle non linéaire. En *Article 2*, on étudie le cas où une fonction entière partage un polynôme avec son polynôme différentiel, en améliorant les résultats de Chen, Zhang et Lü. Le cas où une fonction entière partage un polynôme avec une équation différentielle à coefficients polynômials a été traité dans l'*Article 3*.

Le **troisième chapitre** aborde les équations différentielles complexes homogènes d'ordre supérieur dont les coefficients sont des fonctions entières et méromorphes. On étend quelques théorèmes de J. Long et J. Zhu, C. Y. Zhang et J. Tu dans l'*Article 1,* en étudiant l'hyper-ordre des solutions des équations différentielles de type :

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + ... + A_1(z) f^{'} + A_0(z) f = 0. \tag{1}$$

Dans l'*Article 2,* on améliore les travaux de H. Y. Xu, J. Tu et X. M. Zheng, en traitant la relation entre les fonctions à petite croissance et les dérivées des solutions de l'équation différentielle (1), en précisant le lien entre l'exposant de convergence $p-$itératif et l'ordre

$p-$itératif de ces solutions dont on achèvera par une application sur les points fixes.

Le **quatrième chapitre** traite la croissance et l'oscillation des équations différentielles homogènes et non homogènes tout en adoptant un nouveau concept : l'ordre $[p, q] - \varphi$, qui a été introduit par Shen, Tu et Xu et qui relie la définition de l'ordre φ donné par Chyzykov, Heittokangas et Rattya, et l'ordre $[p, q]$ donné par Juneja, Kappoor et Bajpai.

Le **dernier chapitre** présente une autre approche sur la théorie des équations différentielles complexes : La théorie $p-$adique. On commence tout d'abord par rappeler les propriétés classiques des espaces ultramétriques, par introduire les valeurs absolues ultramétriques, les fonctions analytiques $p-$adiques, ect. Ensuite un petit historique est déstiné pour énoncer des résultats récents sur les équations différentielles $p-$adiques. En dernier, on étudie la relation entre le $q-$Wronskien et les solutions des équations aux $q-$différences, on termine par appliquer nos résultats sur la théorie des nombres.

Chapitre 1

Outils principaux

1.1 Un aperçu sur Théorie de Nevanlinna

La formule de Poisson-Jensen joue un rôle important dans la théorie de Nevanlinna. Dans cette section, on rappelle quelques résultats classiques sur la théorie de Nevanlinna pour les fonctions méromorphes.

1.1.1 Définitions basiques

Définition 1.1.1 (Fonctions Méromorphes) *Une fonction méromorphe est une fonction holomorphe dans tout le plan complexe, sauf éventuellement sur un ensemble de points isolés dont chacun est un pôle pour la fonction.*

En pratique, on peut considèrer une fonction méromorphe comme le quotient de deux fonctions analytiques ou encore une fonction ayant un nombre fini de pôles dans un domaine fermé.

Example 1 *Les fonctions* $\frac{e^z}{z}$ *et* $\frac{1}{\cos \pi z}$ *sont des fonctions méromorphes.*

Définition 1.1.2 (La multiplicité) *On se donne une fonction analytique* $f \neq 0$, *et un point* $z_0 \in \mathbb{C}$ *tel que* $f(z_0) = 0$. *On définit l'ordre de multiplicité des zéros en ce point comme*

étant le plus petit n *pour lequel dans la série de Taylor de* f *en* z_0, *le coefficient* $(z - z_0)^n$ *est non nul.*
Pareil, on définit la multiplicité d'un pôle d'une fonction g *en un point* $z \in \mathbb{C}$, *en tant que la multiplicité du zéro en ce point de* $\frac{1}{g}$. *Un pôle de multiplicité* 1 *est appelé un pôle simple.*

Notons que, si on a deux fonctions f et g avec des zéros (ou pôles) en un point, de multiplicité j et k respectivement, alors fg a un zéro (ou pôle) de multiplicité $j + k$. Si f a un pôle de multiplicité j et g a un zéro de multiplicité k en le même point, alors fg a un zéro de multiplcité $\max\{0, k - j\}$ en ce point, ou un pôle de multiplicité $\max\{0, j - k\}$. Si $j = k$, alors fg prennent la même valeur non nulle en ce point.

Example 2 $\sin^2 z$ *a un zéro de multiplicité* 2 *en* $z = 0$, *alors que* $\tan z$ *a un pôle simple en* $z = \frac{\pi}{2}$.

Il est clair de la série de Taylor que si, en un point f a un zéro de multiplicité n, alors f' a un zéro de multiplicité $n - 1$ en ce point, et pareil si f a un pôle de multiplicité n, alors f' a un pôle de multiplicité $n + 1$.

On aura aussi besoin des définitions suivantes.

Définition 1.1.3 (*[76]*) *Pour* $x \geq 0$, *on définit*

$$\log^+ x = \max\{\log x, 0\} = \begin{cases} \log x, & si\ x \geq 1; \\ 0, & si\ 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Remarque 1.1.1 *Il est simple à démontrer que*

$$\log x = \log^+ x - \log^+ \frac{1}{x}.$$

Propriétés. ([52])

1. $\log x \leq \log^+ x$.

2. $\log^+ x \leq \log^+ y$, si $0 < x \leq y$.
3. $|\log x| = \log^+ x + \log^+ \frac{1}{x}$.
4. $\log^+ \left(\prod_{i=1}^{n} x_i \right) \leq \sum_{i=1}^{n} \log^+ x_i$.
5. $\log^+ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) \leq \sum_{i=1}^{n} \log^+ x_i + \log n$.

On définit maintenant les symbôles O et o.

Définition 1.1.4 *([52]) Soient $f(r)$ et $g(r)$ des fonctions définies sur $[a, \infty)$, avec $f(r)$ une fonction complexe et $g(r)$ une fonction réelle et positive. On dit que $f(r) = O(g(r))$ quand $r \to \infty$, s'il existe des constantes c, r_0 telles que $|f(r)| \leq cg(r)$, $\forall r \geq r_0$.*
On dit que $f(r) = o(g(r))$, si $\frac{f(r)}{g(r)} \to 0$ quand $r \to \infty$.

Example 3 $\sin r = o(r)$, *et* $\tanh r = O(1)$, $r \to \infty$. *En particulier, si $f(z) = O(1)$, alors f est bornée.*

1.1.2 Formule de Poisson-Jensen

Théorème 1.1.1 *([76]) Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans $|z| \leq R\,(0 < R < \infty)$, et soient $a_j\,(j = 1, 2, ..., m)$ et $b_k\,(k = 1, 2, ..., n)$ les zéros et les pôles de $f(z)$ dans $|z| \leq R$ respectivement, chacun étant compté avec son ordre de multiplicité. Si $z = re^{i\theta}$ est un point dans $|z| < R$ différent de a_j et b_k, alors*

$$\begin{aligned} \log|f(z)| &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log\left|f\left(\mathrm{Re}^{i\phi}\right)\right| \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \phi) + r^2} d\phi \\ &\quad + \sum_{j=1}^{m} \log\left|\frac{R(z - a_j)}{R^2 - \bar{a}_j z}\right| - \sum_{k=1}^{n} \log\left|\frac{R(z - b_k)}{R^2 - \bar{b}_k z}\right|. \end{aligned}$$

Preuve. Posons

$$F(\xi) = f(\xi) \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} \log \left| \frac{R(\xi - b_k)}{R^2 - \bar{b}_k \xi} \right|}{\prod\limits_{j=1}^{m} \log \left| \frac{R(\xi - a_j)}{R^2 - \bar{a}_j \xi} \right|}. \tag{1.1.1}$$

Alors $F(\xi)$ n'a ni zéro ni pôle dans $|\xi| \leq R$ et donc elle y est analytique. Choisissons une branche analytique de $\log F(\xi)$ dans $|\xi| \leq R$, et en utilisant la formule de Poisson, on a

$$\log F(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} \log F\left(\mathrm{Re}^{i\phi}\right) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \phi) + r^2} d\phi.$$

Prenant la partie réelle et en utilisant l'identité $\mathrm{Re}(\log F(\xi)) = \log |F(\xi)|$, on obtient

$$\log |F(\xi)| = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} \log \left|F\left(\mathrm{Re}^{i\phi}\right)\right| \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \phi) + r^2} d\phi. \tag{1.1.2}$$

Des équations $(1.1.1)$ et $(1.1.2)$, on trouve

$$\log |f(\xi)| = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} \log \left|f\left(\mathrm{Re}^{i\phi}\right)\right| \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \phi) + r^2} d\phi$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \log \left| \frac{R(\xi - a_j)}{R^2 - \bar{a}_j \xi} \right| - \sum_{k=1}^{n} \log \left| \frac{R(\xi - b_k)}{R^2 - \bar{b}_k \xi} \right|. \tag{1.1.3}$$

Ainsi, pour $\xi = \mathrm{Re}^{i\phi}$ et $|a| < R$, on a

$$\left| \frac{R(\xi - a)}{R^2 - \bar{a}\xi} \right| = 1,$$

ce qui implique

$$\log \left| \frac{R(\xi - a)}{R^2 - \bar{a}\xi} \right| = 0,$$

pour $|\xi| = R$ et donc de la forumule $(1.1.2)$ on obtient : $\log |F(\xi)| = \log |f(\xi)|$. De cela et de la relation $(1.1.3)$, on obtient

$$\begin{aligned} \log |f(z)| &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} \log \left|f\left(\mathrm{Re}^{i\phi}\right)\right| \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \phi) + r^2} d\phi \\ &\quad + \sum_{j=1}^{m} \log \left| \frac{R(z - a_j)}{R^2 - \bar{a}_j z} \right| - \sum_{k=1}^{n} \log \left| \frac{R(z - b_k)}{R^2 - \bar{b}_k z} \right|. \end{aligned}$$

Corollaire 1.1.1 *([76]) Supposons que $f(\xi)$ n'a ni pôles ni zéros dans $|\xi| \leq R$. Si $z = re^{i\theta}(0 < r < R)$, alors on a*

$$\log|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f\left(\mathrm{Re}^{i\phi}\right)\right| \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \phi) + r^2} d\phi.$$

Cette formule est appelée "Formule de Poisson".

Corollaire 1.1.2 *([76]) Sous les conditions du Théorème 1.1.1 et supposons que $f(0) \neq 0, \infty$, on a*

$$\log|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f\left(\mathrm{Re}^{i\phi}\right)\right| d\phi - \sum_{j=1}^{m} \log\frac{R}{|a_j|} - \sum_{k=1}^{n} \log\frac{R}{|b_k|}. \tag{1.1.4}$$

Cette formule est appelée "Formule de Jensen (1899)".

Remarque 1.1.2 *Si $f(0) = 0$, ou ∞, alors*

$$f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} c_k z^k, c_m \neq 0;\ m \in \mathbb{Z}.$$

En effet, $m > 0$ si l'origine est un zéro de multiplicité m, $m < 0$ si l'origine est un pôle de multiplicité m. Alors $g(0) \neq 0, \infty$ et a les mêmes zéros et les mêmes pôles que $f(z)$ dans $0 < |z| < R$. Maintenant, appliquons la formule de Jensen à $g(z)$, on obtient

$$\log|c_m| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f\left(\mathrm{Re}^{i\phi}\right)\right| d\phi - \sum_{j=1}^{m} \log\frac{|a_j|}{R} - \sum_{k=1}^{n} \log\frac{|b_k|}{R} - m\log R.$$

1.1.3 Reformulation de la formule de Jensen : La naissance de la théorie de Nevanlinna

Il est temps que Nevanlinna révolutionne l'étude des fonctions méromorphes. Il l'a fait tout au long d'une série de publications en 1922-1925 à l'age de 26 ans. Son idée principale était d'utiliser la formule de Jensen avec des modifications légères.

On a deja défini la fonction $\log^+ x = \max\{\log x, 0\}$. Nevanlinna a utilisé alors cette fonction pour construire des fonctions à valeurs réelles pour mesurer la croissance de f.
En vue de l'équation (1.1.4), il a défini

$$m(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^r \log^+ \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta,$$

qu'il a appelée "*la fonction de proximité*", et qui exprime la dérivation en moyenne de la fonction f. En outre, on note $n(t,f)$ le nombre de pôles de f dans $|z| \leq t$ en comptant la multiplicité, supposons que $f(0) \neq 0, \infty$, on définit

$$N(r,f) = \int_0^r \frac{n(t,f)}{t} dt,$$

qu'on appelle "*la fonction de comptage de Nevanlinna*". Il est clair que cette fonction compte le nombre de pôles de f dans le disque $|z| < r$.

On réecrit maintenant la formule de Jensen en $\log^+$. D'après la propriété de $\log^+$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f\left(\mathrm{Re}^{i\phi}\right)\right| d\phi &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+\left|f\left(\mathrm{Re}^{i\phi}\right)\right| d\phi - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{\left|f\left(\mathrm{Re}^{i\phi}\right)\right|} d\phi \quad (1.1.5) \\ &= m(R,f) - m\left(R, \frac{1}{f}\right). \end{aligned}$$

En utilisant (1.1.5) et l'intégrale de Riemann-Stietjes pour passer de la somme en intégrale, dans la formule de Jensen, on trouve

$$\log|f(0)| = m(R,f) - m\left(R,\frac{1}{f}\right) - N\left(R,\frac{1}{f}\right) + N(R,f). \quad (1.1.6)$$

Le plus important, c'est quand $m(R,f)$ mesure la taille moyenne de f sur le cercle, $m\left(R,\frac{1}{f}\right)$ garde le même aspect mais en mesurant comment f est proche de 0 sur le même cercle. De même pour $N(R,f)$ et $N\left(R,\frac{1}{f}\right)$. La chose la plus importante à noter ici est le membre gauche de l'identité (1.1.6) est constant quand $R \to \infty$. Nevanlinna s'est rendu compte que cela lui permettait effectivement de mesurer la croissance de f. Il a défini la fonction caractéristique :

$$T(r,f) = m(r,f) + N(r,f),$$

qu'on peut utiliser pour réecrire l'équation (1.1.6) de la forme

$$\begin{aligned} T\left(r, \frac{1}{f}\right) &= T(r, f) - \log|f(0)| \\ &= T(r, f) - \log|c_m| \\ &= T(r, f) + O(1), \end{aligned}$$

avec $O(1)$ est une fonction bornée. Donc la formule de Jensen affirme que $T(r, f)$ et $T\left(r, \frac{1}{f}\right)$ diffère seulement en un terme borné.

En physique, la signification de la fonction de proximité et du comptage est que $T(r, f)$ est l'affinité totale de f pour la valeur ∞ dans $|z| \leq R$ alors que $T\left(r, \frac{1}{f}\right)$ l'est pour la valeur 0. Donc la formule de Jensen affirme que l'affinité de f en ∞ et 0 est de même ordre. Pas seulement ça, Nevanlinna a démontré que cela est vrai pour toute valeur $a \in \mathbb{C}$, connu comme le premier Théorème de Nevanlinna.

Définition 1.1.5 ([52]) *En général, pour tout nombre complexe a, on désigne par $n(t, a, f)$ le nombre de racines de l'équation $f(z) = a$ situées dans le disque $|z| \leqslant t$. Chaque racine étant comptée avec son ordre de multiplicité, et par $n(t, \infty, f)$ le nombre de pôles de la fonction f dans le disque $|z| \leqslant t$.*

Posons

$$N(r, a, f) = \int_0^r \frac{n(t, a, f) - n(0, a, f)}{t} dt + n(0, a, f)\log r, \ \ a \neq \infty$$

et

$$N(r, \infty, f) = N(r, f) = \int_0^r \frac{n(t, \infty, f) - n(0, \infty, f)}{t} dt + n(0, \infty, f)\log r,$$

$N(r, f)$ est appelée fonction $a-$points de la fonction f dans le disque $|z| \leqslant r$.

$$m(r, a, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^r \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta}) - a|} d\theta, \ \ a \neq \infty$$

et

$$m(r, \infty, f) = m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^r \log^+ \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta.$$

$m(r, a, f)$ est appelée fonction de proximité de la fonction f au point a.

On définit (voir [76]) la fonction caractéristique de R. Nevanlinna de la fonction f par

$$T(r,a,f) = T\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = m(r,a,f) + N(r,a,f).$$

Example 4 *Posons*

$$f(z) = \frac{(z-3)^2 (z-5)^4}{(z-2)^7}.$$

Pour $r \geq 5$, on a

$$n(r,f) = 7,\ \bar{n}(r,f) = 1,\ n\left(r, \frac{1}{f}\right) = 6,\ \bar{n}\left(r, \frac{1}{f}\right) = 2.$$

Example 5 *Pour la fonction $f(z) = e^z$, on a*

$$m(r,f) = \frac{r}{\pi}, \qquad N(r,f) = 0.$$

D'où

$$T(r,f) = \frac{r}{\pi}.$$

1.1.4 Propriétés de la fonction caractéristique de Nevanlinna et son Premier Théorème

Propriétés. ([52]) Soient $f_1, ..., f_n$ des fonctions méromorphes. Alors

1. $T\left(r, \prod_{i=1}^{n} f_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} T(r, f_i),\ n \geq 1.$
2. $T\left(r, \sum_{i=1}^{n} f_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} T(r, f_i) + \log n.$
3. $T(r, f^n) = nT(r,f),\ n \in \mathbb{N}.$

Preuve.

1. On a $T\left(r, \prod_{i=1}^{n} f_i\right) = m\left(r, \prod_{i=1}^{n} f_i\right) + N\left(r, \prod_{i=1}^{n} f_i\right).$

   Or $m\left(r, \prod_{i=1}^{n} f_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} m(r, f_i)$ (d'après les propriétés de $\log^+$) et $N\left(r, \prod_{i=1}^{n} f_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} N(r, f_i).$

   D'où $T\left(r, \prod_{i=1}^{n} f_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} [m(r, f_i) + N(r, f_i)] = \sum_{i=1}^{n} T(r, f_i).$

2. On a
$$T\left(r,\sum_{i=1}^{n}f_i\right)=m\left(r,\sum_{i=1}^{n}f_i\right)+N\left(r,\sum_{i=1}^{n}f_i\right).$$
Or $m\left(r,\sum\limits_{i=1}^{n}f_i\right)\leq\sum\limits_{i=1}^{n}m\left(r,f_i\right)+\log n$ (d'après les propriétés de $\log^+$) et $N\left(r,\sum\limits_{i=1}^{n}f_i\right)\leq\sum\limits_{i=1}^{n}N\left(r,f_i\right).$

Donc $T\left(r,\sum\limits_{i=1}^{n}f_i\right)\leq\sum\limits_{i=1}^{n}T\left(r,f_i\right)+\log n.$
3. On remarque que
$$|f^n|=|f|^n\leq 1\Leftrightarrow |f|\leq 1.$$
Si $|f|\leq 1$, alors
$$m\left(r,f^n\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|d\theta=0 \text{ et } N\left(r,f^n\right)=nN\left(r,f\right).$$
Donc $T\left(r,f^n\right)=nT\left(r,f\right).$

Si $|f|\geq 1$, alors
$$m\left(r,f^n\right)=nm\left(r,f\right)\ \text{ et } N\left(r,f^n\right)=nN\left(r,f\right),$$
d'où $T\left(r,f^n\right)=nT\left(r,f\right).$

Théorème 1.1.2 ***(Premier Théorème fondamental de Nevanlinna)*** *(voir [76], [52])*
Soit f une fonction méromorphe non constante avec le développement de Laurent
$$f\left(z\right)-a=\sum_{j=m}^{\infty}c_iz^i,\ c_m\neq 0,\ m\in\mathbb{Z},\ a\in\mathbb{C}.$$
Alors pour tout nombre complexe $a\neq\infty$, on a
$$T\left(r,\frac{1}{f-a}\right)=T\left(r,f\right)-\log|c_m|+\varepsilon\left(r,a\right),$$
où $|\varepsilon\left(r,a\right)|\leq\log^+|a|+\log 2$.

Remarque 1.1.3 *Le premier Théorème de Nevanlinna peut être reformulé comme suit*

$$T\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = T\left(r, f\right) + O\left(1\right), \text{ pour tout } a \in \mathbb{C}.$$

Corollaire 1.1.3 ([76]) *On a*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} m\left(r, e^{i\theta}, f\right) d\theta \leq \log 2.$$

Preuve. D'après le Théorème 1.1.2, on a

$$T\left(r, f\right) = m\left(r, e^{i\theta}, f\right) + N\left(r, e^{i\theta}, f\right) + \log^+ \left|f\left(0\right) - a\right| + \varepsilon\left(r, e^{i\theta}\right),$$

où $\left|\varepsilon\left(r, e^{i\theta}\right)\right| \leq \log 2$.

En intégrant les deux membres de l'identité ci-dessus en θ, de 0 à 2π, et en utilisant l'identité de Cartan, on trouve

$$T\left(r, f\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} m\left(r, e^{i\theta}, f\right) d\theta + T\left(r, f\right) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varepsilon\left(r, e^{i\theta}\right) d\theta,$$

ce qui implique

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} m\left(r, e^{i\theta}, f\right) d\theta = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varepsilon\left(r, e^{i\theta}\right) d\theta \leq \log 2.$$

Corollaire 1.1.4 ([76]) $T\left(r, f\right)$ *est une fonction croissante de* r *et une fonction convexe de* $\log r$.

Exemples.

1. **Fonction caractéristique d'une fonction rationnelle :**

   Soit
   $$f\left(z\right) = c\frac{z^p + ... + a_p}{z^q + ... + a_q}.$$

   On distingue deux cas :

   Si $p > q$, alors $f\left(z\right) \to \infty$, quand $z \to \infty$, donc
   $$m\left(r, a, f\right) = O\left(1\right) \text{ pour } r > r_0,\ a \neq \infty.$$

L'équation $f(z) = a$ possède p racines, donc $n(t, a, f) = p$, pour $t > t_0$ et

$$\begin{aligned} N(r, a, f) &= \int_0^r \frac{n(t, a, f) - n(0, a, f)}{t} dt + n(0, a, f) \log r \\ &= \int_{t_0}^r p \frac{dt}{t} = p \log r + O(1). \end{aligned}$$

Ainsi, quand $r \to \infty$, on obtient : $N(r, a, f) = p \log r + O(1)$, $m(r, a, f) = O(1)$, donc

$$T(r, a, f) = p \log r + O(1).$$

Si $p < q$, alors on obtient quand $r \to +\infty$: $N(r, a, f) = q \log r + O(1)$, $m(r, a, f) = O(1)$, donc

$$T(r, a, f) = q \log r + O(1), \ \ a \neq 0.$$

Si $p = q$, alors on obtient quand $r \to +\infty$: $N(r, a, f) = q \log r + O(1)$, $m(r, a, f) = O(1)$, donc

$$T(r, a, f) = q \log r + O(1), \ \ a \neq 0.$$

On a donc dans tous les cas : quand $r \to +\infty$: $N(r, a, f) = d \log r + O(1)$, $m(r, a, f) = O(1)$, donc

$$T(r, a, f) = d \log r + O(1),$$

où $d = \max\{p, q\}$, $a \neq f(\infty)$.

D'où on en tire la conclusion suivante :

Pour toute fonction rationnelle f, on a $T(r, f) = O(\log r)$. L'inverse est aussi vrai, c'est à dire : si $T(r, f) = O(\log r)$ donc f est rationnelle.

2. **La fonction exponentielle :**

Soit $f(z) = e^z$. Alors si $a = \infty$, on a

$$\begin{aligned} m(r, f) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \left| e^{re^{i\theta}} \right| d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \left| e^{r\cos\theta} \right| d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r \cos\theta d\theta = \frac{r}{\pi}. \end{aligned}$$

Comme e^z est entière, alors $N(r,f)=0$, et donc

$$T(r,f)=\frac{r}{\pi}.$$

Ainsi, si $a=0$, on a $m(r,0,f)=\frac{r}{\pi}$, $N(r,0,f)=0$, et alors

$$T(r,0,f)=\frac{r}{\pi}.$$

Si $a\neq 0,\infty$ et si z_0 est racine de l'équation $f(z)=a$, alors de la périodicité de la fonction f, les autres racines de cette équation sont de la forme $z_0+2k\pi i$, $k\in\mathbb{Z}$ et donc le nombre de racines de $f(z)=a$ dans $|z|\leq t$ est $n(r,a,f)=\frac{t}{\pi}+O(1)$, et par suite

$$N(r,a,f)=\frac{r}{\pi}+O(\log r).$$

Ainsi, après avoir faire des calculs simples, on obtient $m(r,a,f)=O(1)$. On peut remarquer facilement que : après avoir trouver $T(r,f)$, on fait appel au Premier Théorème de Nevanlinna, et on obtient

$$T\left(r,\frac{1}{f-a}\right)=T(r,f)+O(1),\ \text{ et } N(r,a,f)=\frac{r}{\pi}+O(\log r).$$

3. **La fonction homographique :**

Soit f une fonction méromorphe non constante, considèrons la fonction

$$g=\frac{af+b}{cf+d},$$

avec a, b, c et d sont des constantes telles que $ad-bc\neq 0$.

Pour $c=0$, Propriété 2. implique que

$$T(r,g)=T(r,f)+O(1).$$

Alors, supposons que $c\neq 0$. On définit les fonctions suivantes

$$\begin{aligned} g_1 &= f+\frac{d}{c}, \\ g_2 &= cg_1, \\ g_3 &= \frac{1}{g_2}, \\ g_4 &= \frac{(bc-ad)}{c}g_3. \end{aligned}$$

Alors

$$g = g_4 + \frac{a}{c}.$$

En utilisant les propriétés de la fonction caractéristique et le Premier Théorème de Nevanlinna, on obtient

$$\begin{aligned} T(r,g) &= T(r,g_4) + O(1) \\ &= T(r,g_3) + O(1) \\ &= T(r,g_2) + O(1) \\ &= T(r,g_1) + O(1) \\ &= T(r,f) + O(1). \end{aligned}$$

1.1.5 Ordre de croissance, exposant de convergence d'une fonction méromorphe

Ordre de croissance

Maintenant, on va définir l'ordre de croissance d'une fonction méromorphe.

Définition 1.1.6 *(voir [43], [76]) Soit f une fonction méromorphe. Alors l'ordre et l'ordre inférieur de f sont définis respectivement par*

$$\sigma(f) = \limsup_{r \to +\infty} \frac{\log^+ T(r,f)}{\log r},$$

$$\mu(f) = \liminf_{r \to +\infty} \frac{\log^+ T(r,f)}{\log r}.$$

Remarque 1.1.4 *Si f est une fonction entière, alors l'ordre de f est défini par*

$$\sigma(f) = \limsup_{r \to +\infty} \frac{\log^+ T(r,f)}{\log r} = \limsup_{r \to +\infty} \frac{\log \log M(r,f)}{\log r},$$

où $M(r,f) = \max_{|z|=r} |f(z)|.$

On a les propriétés suivantes.

Propriétés ([43])

1) $\sigma(f+g) \leq \max\{\sigma(f), \sigma(g)\}$;

2) $\sigma(fg) \leq \max\{\sigma(f), \sigma(g)\}$;

3) Si $g(z) = f(az+b)$, $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, alors $\sigma(g) = \sigma(f)$;

4) Si $g(z) = f\left(z^k\right)$, k un entier positif, alors $\sigma(g) = \sigma(f)$;

5) Si f est polynômiale, alors $\sigma(f) = 0$;

6) Si P est un polynôme de degré n, alors $\sigma\left(e^{P(z)}\right) = n$;

7) Si f est une fonction entière transcendante, alors $\sigma\left(e^{f(z)}\right) = \infty$.

Remarque 1.1.5 *Dans* 1) *et* 2) *si* $\sigma(f) < \sigma(g)$, *alors* $\sigma(fg) = \sigma(f+g) = \sigma(g)$.

Example 6 *1.* $\sigma(\sin z^2) = \sigma(\cos z^2) = 2$.

2. $\sigma\left(e^{z^k}\right) = k$.

3. $\sigma\left(e^{\sin z}\right) = \sigma\left(e^{e^z}\right) = \infty$.

Remarque 1.1.6 *Dans* 1) *et* 2) *si* $\sigma(f) < \sigma(g)$, *alors* $\sigma(fg) = \sigma(f+g) = \sigma(g)$.

Pour exprimer le taux de croissance d'une fonction méromorphe d'ordre infini, on rappelle la définition suivante.

Définition 1.1.7 *([76]) L'hyper-ordre d'une fonction méromorphe f noté $\sigma_2(f)$ et l'hyper-ordre inférieur $\mu_2(f)$ sont définis par*

$$\sigma_2(f) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log\log T(r,f)}{\log r}.$$

$$\mu_2(f) = \liminf_{r\to+\infty} \frac{\log\log T(r,f)}{\log r}.$$

Remarque 1.1.7 *Si f est une fonction entière, alors l'ordre de f est défini par*

$$\sigma_2(f) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log\log T(r,f)}{\log r} = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log\log\log M(r,f)}{\log r},$$

où $M(r,f) = \max_{|z|=r} |f(z)|$.

Exemples.

1. La fonction $f(z) = e^{e^z}$ est d'ordre infini et d'hyper-ordre $\sigma_2(f) = 1$.
2. L'hyper-ordre de $f(z) = \frac{e^{e^z}}{\sin z}$ est $\sigma_2(f) = 2$.

Remarque 1.1.8 *Si f est d'ordre fini alors l'hyper-ordre de cette fonction est nul.*

Si l'hyper-ordre d'une fonction entière ou méromorphe est infini, alors on peut définir l'ordre $p-$itératif.

Pour tout $r \in \mathbb{R}$, on définit $\exp_1 r := e^r$ et $\exp_{p+1} r := \exp\left(\exp_p r\right)$, $p \in \mathbb{N}$. On définit aussi pour tout r suffisamment grand $\log_1 r := \log r$ et $\log_{p+1} r := \log\left(\log_p r\right)$, $p \in \mathbb{N}$. On note $\exp_0 r := r$, $\log_0 r := r$, $\log_{-1} r := \exp_1 r$ et $\exp_{-1} r := \log_1 r$.

L'ordre $p-$itératif est une notion d'ordre pour les fonctions à croissance rapide qui a été introduit par Schönhage [64] et Sato [63] en 1960 et 1963. Et en 1998, L. Kinnunen a donné la définition suivante de l'ordre $p-$itératif.

Définition 1.1.8 *([50]) Soit f une fonction méromorphe dans le plan complexe. On définit l'ordre $p-$itératif de la croissance de f par*

$$\sigma_p(f) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log_p T(r,f)}{\log r},$$

et si f est entière, alors

$$\sigma_p(f) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log_{p+1} M(r,f)}{\log r}$$

Example 7 *Soit $f(z) = \exp_q(z)$. Alors* $\sigma_p(f) = \begin{cases} +\infty \text{ si } p < q; \\ 1 \text{ si } p = q; \\ 0 \text{ si } p > q. \end{cases}$

Exposant de convergence

Définition 1.1.9 *([50]) Soit f une fonction méromorphe. Alors l'exposant de convergence des zéros de la fonction f noté $\lambda(f)$ est défini par*

$$\lambda(f) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r}.$$

L'exposant de convergence des zéros de la fonction $\frac{1}{f}$ est aussi dit exposant de convergence des pôles de la fonction f.
Ainsi, on définit l'exposant de convergence des zéros distincts de la fonction f par

$$\bar{\lambda}(f) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log \bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r}.$$

Exemples.

1. $\lambda(e^z) = \lambda(P) = 0$, avec P est un polynôme.
2. $\lambda(e^z + 1) = \lambda(\sin z) = \lambda(\cos z) = 1$.
3. Pour la fonction $f(z) = e^z - 12$, ses zéros sont

$$z_k = \log 12 + 2k\pi i \ \text{(avec } k \text{ un nombre entier)}.$$

Pour $t > 0$,on a $2k+1$ zéros de la fonction f dans le disque $|z| \leq t$

$$t^2 = (2\pi k)^2 + \log^2 12,$$

d'où

$$k^2 = \frac{t^2 - \log^2 12}{4\pi^2}.$$

Donc pour t suffisamment grand, on a

$$n\left(t, \frac{1}{f}\right) = 2k+1 \sim 2\sqrt{\frac{t^2 - \log^2 12}{4\pi^2}} + 1 \sim \frac{t}{\pi}.$$

D'où

$$N\left(t, \frac{1}{f}\right) = \int_0^r \frac{n\left(t, \frac{1}{f}\right) - n\left(0, \frac{1}{f}\right)}{t} dt + n\left(0, \frac{1}{f}\right) \log r = \int_0^r \frac{1}{\pi} dt = \frac{1}{\pi} r.$$

Par conséquent $\lambda(f) = 1 = \bar{\lambda}(f)$.

Proposition 1.1.1 (Relation entre l'exposant de convergence et l'ordre) ([52]) *Pour toute fonction méromorphe $f \neq 0$, on a*

$$\lambda(f) \leq \sigma(f).$$

En 1998, Lisa Kinunnen a défini l'exposant de convergence $p-$itératif.

Définition 1.1.10 ([50]) *L'exposant de convergence $p-$itératif des zéros d'une fonction méromorphe $f(z)$ est défini par*

$$\lambda_p(f) = \limsup_{r \to +\infty} \frac{\log_p N(r, \frac{1}{f})}{\log r} \quad (p \geqslant 1 \textit{ est un entier}),$$

Pareil, l'exposant de convergence $p-$itératif des zéros distincts d'une fonction méromorphe $f(z)$ est défini par

$$\overline{\lambda}_p(f) = \limsup_{r \to +\infty} \frac{\log_p \overline{N}(r, \frac{1}{f})}{\log r} \quad (p \geqslant 1 \textit{ est un entier}).$$

Example 8 *Soit* $f(z) = e^{e^z} + 2,$ *donc* $\bar{\lambda}(f) = +\infty,$ $\bar{\lambda}_2(f) = 1.$

Définition 1.1.11 (Indice de croissance de σ_p) ([50]) *L'indice de croissance de l'ordre* $p-$*itératif d'une fonction méromorphe* f *est défini par*

$$i(f) = \begin{cases} 0, \ \textit{Si } f \textit{ est rationnelle}; \\ \min\left\{j \in \mathbb{N} : \rho_j(f) < +\infty\right\}, \ \textit{Si } f \textit{ est trancendante avec } \rho_j(f) < +\infty \textit{ existe}; \\ +\infty, \ \textit{Si } \rho_j(f) = +\infty \textit{ pour tout } j \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Définition 1.1.12 (Indice de croissance de λ_p) ([50]) *L'indice de croissance de l'exposant de convergence* $p-$*itératif des zéros d'une fonction méromorphe* f *est défini par*

$$i_\lambda(f) = \begin{cases} 0, & \textit{Si } n(r, \frac{1}{f}) = O(\log r), \\ \min\{j \in \mathbb{N} : \lambda_j(f) < \infty\}, & \textit{Si } \lambda_j(f) < \infty \textit{ pour } j \in \mathbb{N}, \\ \infty, & \textit{si } \lambda_j(f) = \infty \textit{ pour } j \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Remarque 1.1.9 *D'une façon similaire, on définit l'indice de croissance* $i_{\overline{\lambda}}(f)$ *de* $\overline{\lambda}_p(f)$.

Example 9 *L'indice de croissance de l'ordre* $p-$*itératif de la fonction* $f(z) = \exp_{p-1}(\sin(z))$ *est égal à* p.

1.1.6 Indice de défaut de Nevanlinna

En 1929, Nevanlinna a généralisé le Théorème de Picard et il a introduit une quantité noté $\delta(a, f)$ pour mesurer le degré d'une fonction méromorphe pour lequel cette fonction rate une valeur a.

Définition 1.1.13 ([76]) *L'indice de défaut de Nevanlinna* $\delta(a) = \delta(a, f)$ *de la valeur* a *est défini par*

$$\delta(a, f) = \liminf_{r\to\infty} \frac{m\left(r, \frac{1}{f-a}\right)}{T(r, f)} = 1 - \limsup_{r\to\infty} \frac{N\left(r, \frac{1}{f-a}\right)}{T(r, f)}.$$

Si $\delta(a, f) > 0$ *alors* a *est appelée la valeur de défaut de* f. *Elle est aussi appelée valeur exceptionnelle au sens de Nevanlinna.*

Remarque 1.1.10 *On a toujours* $0 \leq \delta(a, f) \leq 1$.

Example 10 *Soit* f *la fonction rationnelle*

$$f(z) = \frac{a_p z^p + ... + a_0}{b_q z^q + ... + b_0}.$$

Alors en utilisant le même démonstration comme dans l'exemple du début de ce chapitre, on trouve que

$$\begin{aligned} N(r, f) &= q \log r, \\ N\left(r, \frac{1}{f}\right) &= p \log r, \end{aligned}$$

et

$$T(r, f) = \max\{p, q\} . \log r + O(1).$$

Soit a *un nombre complexe. Comme*

$$f(z) - a = \frac{(a_p z^p + ... + a_0) - a(b_q z^q + ... + b_0)}{b_q z^q + ... + b_0},$$

on a

$$\begin{aligned} N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) &= \max\{p, q\} . \log r, \ \textit{pour } p \neq q, \\ N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) &= p \log r, \ \textit{pour } p = q, \ \textit{et } a_p \neq a b_q, \end{aligned}$$

et

$$N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) \leq (p-1) \log r, \ \textit{pour } p = q, \ \textit{et } a_p = a b_q.$$

Alors, pour les fonctions rationnelles, on obtient les propriétés suivantes

1) Si $p > q$: ∞ est l'unique valeur de défaut de f.

2) Si $p < q$: 0 est l'unique valeur de défaut de f.

3) Si $p = q$: $\frac{a_p}{b_q}$ est l'unique valeur de défaut de f.

De cet exemple, on obtient le résultat suivant.

Théorème 1.1.3 ([76]) *Supposons que f est une fonction rationnelle non constante. Alors f a uniquement une seule valeur de défaut.*

1.1.7 Mesure et densité

Définition 1.1.14 ([52]) *On définit la mesure linéaire d'un ensemble $E \subset [0, +\infty)$ par*

$$m(E) = \int_{0}^{+\infty} \chi_E(t)\, dt,$$

où χ_E est la fonction caractéristique de l'ensemble E.
Les densités supérieures et inférieures de l'ensemble E sont respectivement définies par

$$\overline{dens}E = \limsup_{r\to+\infty} \frac{m(E\cap[0,r])}{r} \ \text{ et } \underline{dens}E = \liminf_{r\to+\infty} \frac{m(E\cap[0,r])}{r}.$$

Définition 1.1.15 ([52]) *La mesure logarithmique d'un ensemble $H \subset [1, +\infty)$ est définie par*

$$lm(H) = \int_{1}^{+\infty} \frac{\chi_H(t)}{t} dt,$$

où χ_H est la fonction caractéristique de l'ensemble H.
Les densités logarithmiques supérieures et inférieures de l'ensemble H sont respectivement définies par

$$\overline{\log dens}H = \limsup_{r\to+\infty} \frac{m(H\cap[1,r])}{\log r} \ \text{ et } \underline{\log dens}H = \liminf_{r\to+\infty} \frac{m(H\cap[1,r])}{\log r}.$$

Example 11 *1. La mesure linéaire d'un ensemble $E = [1, e] \subset [1, \infty)$ est*

$$m(E) = \int_{1}^{\infty} \chi_E(t)\, dt = \int_{1}^{e} dt = e - 1.$$

2. La mesure logarithmique de l'ensemble $E = [1, e^3] \subset [1, \infty)$ est

$$lm(E) = \int_{1}^{\infty} \chi_E(t)\, \frac{dt}{t} = \int_{1}^{e^3} \frac{dt}{t} = 3.$$

3. La mesure linéaire d'un ensemble fini E est nulle $m(E) = 0$.

1.2 Théorie de Wiman-Valiron

La théorie de Wiman-Valiron est principalement utilisée pour étudier le comportement local d'une fonction entière à partir de sa série. Elle sera utilisée pour estimer la croissance des solutions dans nos résultats.

1.2.1 Définitions

Définition 1.2.1 (Le module maximal) *([52]) Soient f une fonction entière et $r > 0$. Le module maximal $M(r, f)$ est défini par*

$$M(r, f) = \max\{|f(z)| : |z| \leq r\},$$

qui est une fonction croissante.

En premier temps, on prend

$$P(z) = a_n z^n + ... + a_0, \ a_n \neq 0,$$

un polynôme de degré n, et supposons que z et z_0 sont grands.
Alors, on a

$$P(z) \sim \left(\frac{z}{z_0}\right)^n P(z_0) \text{ et } \frac{P'(z)}{P(z)} \sim \frac{n}{z}.$$

Cependant, si P est une fonction entière non polynômiale, alors du Théorème de Picard, on remarque qu'une telle relation asymptotique ne peut pas avoir lieu pour z et z_0 très grands. D'où vient le but de la théorie de Wiman-Valiron pour trouver une relation similaire quand z est proche de z_0 et $|f(z_0)|$ est proche de $M(|z_0|, f)$.
Maintenant, posons

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

On aura besoin des définitions suivantes pour donner les théorèmes principaux de cette théorie. Les preuves peuvent être trouvées en [43].

Définition 1.2.2 (Le terme maximal) *([44]) Pour tout $r \geq 0$, on définit le terme maximal par*

$$\mu(r) = \mu(r, f) = \max_{n \geq 0} |a_n| r^n.$$

Proposition 1.2.1 *([44]) Pour toute fonction entière f transcendante, on a*

1. $\lim\limits_{r \to \infty} \mu(r, f) = \infty$.
2. *Pour* $r > 0$, *on a* $\mu(r, f) \leq M(r, f) \leq 2\mu(2r, f)$.
3. $\mu(r, f)$ *est continue et croissante sur* $[0, \infty)$, *et il existe* $R > 0$ *tel que* $\mu(r, f)$ *est strictement croissante sur* $[R, \infty)$.

Définition 1.2.3 (L'indice central) *([44]) Pour $r > 0$, on définit alors l'indice central*

$$\nu(r) = \nu(r, f) = \max\{m : |a_m| r^m = \mu(r, f)\}.$$

Example 12 *Soit le polynôme $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_0$. Alors, pour r assez grand, on a*

$$\mu(r) = \mu(r, P) = |a_n| r^n, \tag{1.2.1}$$

et par suite

$$v(r) = v(r, P) = n.$$

Example 13 *Soit $f(z) = e^z$. Donc le développement de f est $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n$. Posons $a_n = \frac{1}{n!}$. On a*

$$\mu(r, f) = \max_{n \geq 0} |a_n| r^n = \max_{n \geq 0} \frac{1}{n!} r^n.$$

Posons $u_n = |a_n| r^n = \frac{1}{n!} r^n$. Étudions la monotonie de la suite u_n. On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{r}{n+1}.$$

Donc u_n *est décroissante si* $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, *c'est à dire* $n > [r] - 1$, *où le crochet* $[\ ]$ *désigne la partie entière. La suite* u_n *est croissante si* $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, *c'est à dire* $n < [r] - 1$. *D'où*

$$\mu(r, f) = \frac{1}{[r]!} r^{[r]},$$

et par suite

$$v(r, f) = [r].$$

Example 14 *Soit* $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$. *On sait que la série converge si et seulement si* $|z| < 1$, *et donc*

$$\mu(r, f) = \max_{n \geq 0} |a_n| r^n = \max_{n \geq 0} r^n = 1 = \left|a_{v(r,f)}\right| r^{v(r,f)}.$$

Et par suite $v(r, f) = 0$.

Example 15 *Soit* $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n!)^\alpha} z^n$, $\alpha > 0$. *On a*

$$\mu(r, f) = \max_{n \geq 0} |a_n| r^n = \max_{n \geq 0} \frac{r^n}{(n!)^\alpha}.$$

Posons $u_n = \frac{r^n}{(n!)^\alpha}$ *et étudiant la monotonie de la suite* u_n. *On a*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{r}{(n+1)^\alpha},$$

donc u_n *est décroissante si* $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, *c'est à dire* $n > \left[r^{\frac{1}{\alpha}}\right] - 1$ *et est croissante si* $n < \left[r^{\frac{1}{\alpha}}\right] - 1$. *D'où*

$$\mu(r, f) = \frac{r^{\left[r^{\frac{1}{\alpha}}\right]}}{\left(\left[r^{\frac{1}{\alpha}}\right]!\right)^\alpha} = \left|a_{v(r,f)}\right| r^{v(r,f)}.$$

Donc

$$v(r, f) = \left[r^{\frac{1}{\alpha}}\right].$$

Remarque 1.2.1 $\nu(r, f)$ *est croissante et continue à droite et tend vers* $+\infty$ *quand* $r \to +\infty$.

1.2.2 L'ordre de croissance selon Wiman-Valiron

En utilisant ces définitions, on peut définir autrement l'ordre de croissance d'une fonction entière.

Théorème 1.2.1 (L'ordre) *([46], p.p.* $36-37$*, [52], p.p.* 51*) Soit f une fonction entière. L'ordre de croissance de la fonction f est défini par*

$$\sigma(f)=\limsup_{r\to+\infty}\frac{\log^{+}\nu(r,f)}{\log r}=\limsup_{r\to+\infty}\frac{\log^{+}\log^{+}M(r,f)}{\log r},$$

Proposition 1.2.2 *([52]) Soit f une fonction entière transcendante d'ordre $\sigma(f)=0$. Alors, pour tout $k\in\mathbb{N}$, $l\in\mathbb{N}$, on a*

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{\nu^{k}(r,f)}{r^{l}}=0.$$

Théorème 1.2.2 (L'hyper-ordre) *([28]) Soit f une fonction entière d'ordre infini, et d'hyper-ordre $\sigma_2(f)=\sigma$, et soit $\nu(r,f)$ l'indice central de f. Alors*

$$\sigma=\limsup_{r\to+\infty}\frac{\log\log\nu(r,f)}{\log r}.$$

1.2.3 Le théorème principal de Wiman-Valiron

Théorème 1.2.3 *([44]) Soit f une fonction entière transcendante. Alors il existe un ensemble $E\subset(1,+\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour tout z vérifiant $|z|=r\notin E$ et $|f(z)|=M(r,f)$, on a*

$$\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}=\left(\frac{\nu(r,f)}{z}\right)^{j}(1+o(1)),\ j\in\mathbb{N}^{*}.$$

1.3 L'univers $p-$adique

Dans les cours des étudiants préparant une licence, la plupart d'entre eux voient peu au delà "des mathématiques standards" : Analyse réel ou complexe, l'algèbre abstraite, la géométrie différentielle, ect. Il y a d'autres aventures dans d'autres territoires, et autres

opportunités pour visiter quelques coins exotiques en mathématiques. Le but de cette partie est de donner une telle occasion par visiter l'univers $p-$adique. Une telle visite nous offre un aperçu sur une théorie à la fois intéressante et amusante qui relie l'algèbre et l'analyse.
Il y a beaucoup de manières de commencer notre tâche, des options disponibles, nous avons choisi d'aller à la théorie des valeurs absolues sur un corps, ensuite de définir le corps des nombres $p-$adique et son package, ainsi les fonctions $p-$adiques.

Cette section est essentiellement destiné à rappeler des propriétés deja connues des fonctions analytiques ultramétriques (dans un disque, dans une couronne, dans le corps tout entier) et leurs applications aux fonctions méromorphes ultramétriques.

1.3.1 Les valeurs absolues de $\mathbb{Q}$

Définition 1.3.1 *([9]) Associée à une valeur absolue, on a une distance en posant* $d(x,y) = |x-y|$, *qui fait donc de* $\mathbb{k}$ *un espace métrique.*

Remarque 1.3.1 *Il y a toujours sur un corps* $\mathbb{k}$ *au moins une valuer absolue, à savoir l'application qui à* x *non nul associe* 1, *et à zéro associe zéro. Sur* $\mathbb{Q}$, *on a plus de la valeur absolue ordinaire* $|x|_\infty = \max(x,-x)$.

Nous allons nous interesser ici à d'autres valeurs absolues de $\mathbb{Q}$, associées à un nombre premier p.

Notation. Soit a non nul de $\mathbb{Z}$. On peut écrire $a = p^m c$, avec m dans $\mathbb{N}$ et c dans $\mathbb{Z}$, premier avec p. Nous oterons alors $\upsilon_p(a) = m$; ce nombre s'appelle la valuation p-adique de a.

Une propriété immédiate est que si $a, b \in \mathbb{Z}^*$, on a $\upsilon_p(ab) = \upsilon_p(a) + \upsilon_p(b)$.

Soit x dans $\mathbb{Q}$, non nul. On peut donc écrire $x = \frac{a}{b}$ avec b dans $\mathbb{N}$ non nul, a dans $\mathbb{Z}$; nous posons alors $\upsilon_p(x) = \upsilon_p(a) - \upsilon_p(b)$, et on vérifie imméditement que cette quantité est indépendante de la représentation de x sous la forme $\frac{a}{b}$ choisie. On a ainsi étendue la fonction v_p à $\mathbb{Q}$ privé de zéro. Par convention, on pose $v_p(0) = \infty$.

Proposition 1.3.1 *([9]) On définit une fonction $|.|_p$ de $\mathbb{Q}$ dans $[0, \infty[$ par $|x|_p = p^{-v_p(x)}$ si $x \neq 0$, et $|0|_p = 0$ (ce qui correspond à $v_p(0) = +\infty$). Cette application est une valeur absolue de $\mathbb{Q}$, appelée valeur absolue p-adique. Elle vérifie en plus la propriété $|x+y|_p \leq \max\left\{|x|_p, |y|_p\right\}, \forall x, y$ dans $\mathbb{Q}$ (inégalité ultramétrique ; une valeur absolue possédant cette propriété est dite ultramétrique, ou non archimédienne).*

L'application qui à x associe $v_p(x)$ est la valuation $p-$adique.

Remarque 1.3.2 *On remarque immédiatement que l'on a en fait $|x+y|_p = \max\left\{|x|_p, |y|_p\right\}$ si $|x|_p \neq |y|_p$.*

On a le résultat suivant, qui lie les valeurs absolues $p-$adique d'un même élément non nul x de $\mathbb{Q}$.

Proposition 1.3.2 *([9]) Pour tout x non nul de $\mathbb{Q}$, $|x|_p$ est égal à une sauf pour un nombre fini de valeurs de p, et on a $|x|_\infty \prod |x|_p = 1$. (Cette formule est "la formule du produit").*

1.3.2 Le corps des nombres $p-$adiques

L'espace métrique associé à la valeur absolue $p-$adique n'est pas complet, tout comme $\mathbb{Q}$ n'est pas complet pour la valeur absolue ordinaire. A propos de la suite de Cauchy, il faut noter la propriété remarquable suivante (qui n'est pas vraies pour la valeur absolue ordianaire).

Proposition 1.3.3 *([9]) Une suite u_n est de Cauchy si et seulement si $u_{n+1} - u_n$ tend vers zéro.*

On va donner un exemple de suite de Cauchy non convergente pour $p = 5$. On définit deux suites d'entiers a_n et x_n par $x_0 = a_0 = 2$, et si $x_{n-1} = a_0 + ... + a_{n-1}5^{n-1}$ est défini, on détermine $a_n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, et $x_n = x_{n-1} + a_n 5^n$ par la congruance $x_n^2 + 1 \equiv 0\ [5^n]$. Il est très facile de voir que cette suite x_n est bien définie, et qu'elle est de Cauchy ; cependant, elle ne peut converger vers $x \in \mathbb{Q}$, puisque dans ce cas, on aurait $x^2 + 1 = 0$.

Puisque $\mathbb{Q}$ n'est pas complet, on le complete et on obtient un espace complet que l'on note $\mathbb{Q}_p$.

On a le résultat suivant.

Proposition 1.3.4 ([9]) *L'ensemble $\mathbb{Q}_p$ est un corps commutatif, et l'application qui à x associe $|x|_p$ est une valeur absolue ultramétrique sur $\mathbb{Q}_p$. Pour tout x dans $\mathbb{Q}_p$, non nul, on peut écrire $|x|_p = p^{-v_p(x)}$ où $v_p(x)$ est un élément de $\mathbb{Z}$, ce nombre est la valuation $p-$adique de x. Par convention, on pose $|0|_p = 0$, et $v_p(0) = \infty$.*

Définition 1.3.2 ([1]) *Le corps $\mathbb{Q}_p$ s'appelle le corps des nombres $p-$adiques. Une partie intéressante de ce corps est l'ensemble des éléments de la valeur absolue $p-$adique inférieure ou égale à 1, que l'on note par $\mathbb{Z}_p$. par définition, le groupe des valeurs de $\mathbb{Q}_p$ est l'ensemble des valeurs prises par la valeur absolue sur les éléments non nuls du corps, c'est donc l'ensemble des puissances dans $\mathbb{Z}$ de p.*

Proposition 1.3.5 ([9]) *La partie $\mathbb{Z}_p$ est un sous-anneau de $\mathbb{Q}_p$, que l'on appelle anneau des entiers p-adiques, et qui possède un seul idéal maximal, à savoir l'idéal engendré par p.*

Les seuls idéaux non triviaux sont ceux engendrés par les puissances de p.

Proposition 1.3.6 *([9]) L'ensemble $\mathbb{N}$ est dense dans $\mathbb{Z}_p$.*

Proposition 1.3.7 *([9]) Tout élément de $\mathbb{Z}_p$ admet un développement unique sous la forme*

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n p^n,$$

avec $a_n \in \{0, ..., p-1\}$ pour tout n. Ce développement s'appelle le développement de Hensel de x.

Désormais, on peut se présenter les éléments de $\mathbb{Q}_p$ sous la forme $x = p^{\alpha} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n p^n \right)$, où $\alpha \in \mathbb{Z}$, et les b_k sont dans $\{0, ..., p-1\}$. Si de plus $b_0 \neq 0$, alors α est la valuation $p-$adique de x.
On peut ausi écrire x sous la forme $x = \sum_{k=-N}^{+\infty} a_k p^k$, avec $a_k \in \{0, ..., p-1\}$ et N un entier. Si $N > 0$, il y a donc une partie "irrégulière" dans le développement.

Nous revenons maintenant sur la structure algébrique de $\mathbb{Z}_p$. On a le résultat suivant.

Proposition 1.3.8 *([9]) Le corps quotient de $\mathbb{Z}_p$ par son unique idéal maximal $p\mathbb{Z}_p$ est isomorphe au corps $F_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. C'est le corps résiduel, ou corps des restes de $\mathbb{Q}_p$.*

Proposition 1.3.9 *([9]) Soit $x \in \mathbb{Z}_p$, $|x|_p = 1$. Alors la suite $u_n = x^{p^n}$ converge vers $\mathbb{Z}_p$ vers une racine $(p-1)$-ième de l'unité, que l'on note $\omega(x)$, et qui s'appelle le représentant de Teichmuller de x. On a $\omega(x) - x \in p\mathbb{Z}_p$. De plus toutes les racines $(p-1)$-ième de l'unité sont dans $\mathbb{Z}_p$. Le groupe des éléments inversibles de $\mathbb{Z}_p$ est le produit direct du groupe μ_{p-1} des racines $(p-1)$-ième de l'unité, et du groupe multiplicatif $1 + p\mathbb{Z}_p$.*

Remarque 1.3.3 *On va chercher les racines de l'unité de $\mathbb{Q}_p$.*

1. On regarde d'abord pour $p \neq 2$. Soit tout d'abord $\beta \in 1 + p\mathbb{Z}_p$, et $d \geq 2$. On suppose que $\beta^d = 1$. On écrit $d = p^m d_1$, avec p ne dévisant pas d_1. Alors si $\beta_1 = \beta^{p^m}$, on a $\beta_1^{d_1} = 1$, et $\beta_1 \in 1 + p\mathbb{Z}_p$, on peut donc écrire $\beta_1 = 1 + pu$ avec $u \in \mathbb{Z}_p$; on a alors
$$1 = (1+pu)^{d_1} = 1 + pud_1 + \sum_{k\geq 2} C_{d_1}^k p^k u^k.$$
On en tire que
$$pu\left(d_1 + \sum_{k\geq 2} C_{d_1}^k p^{k-1} u^{k-1}\right) = 0,$$
ce qui est impossible si $u \neq 0$, car $|d_1|_p = 1$, mais $\left|C_{d_1}^k p^{k-1} u^{k-1}\right|_p < 1$ pour $k \geq 2$. Donc $\beta_1 = \beta^{p^m} = 1$.

   Montrons maintenant que si $x \in 1 + p\mathbb{Z}_p$ vérifie $x^p = 1$, alors $x = 1$. Nous aurons ici l'hypothèse $p \neq 2$. On suppose que $x \neq 1$, on écrit $x = 1 + p^j u$, avec $|u|_p = 1$ et $j \geq 1$. On développe encore
$$1 = \left(1 + p^j u\right)^p = 1 + p^{j+1} u + \sum_{k\geq 2} C_p^k p^{jk} u^k,$$
et on a
$$p^{j+1} u + \sum_{k\geq 2} C_p^k p^{jk} u^k = 0,$$
si $k < p$,le coefficient C_p^k est divisible par p. Donc le terme $C_p^k p^{jk} u^k$ est de valuation $p-$adique au moins $jk + 1 > mj + 1$ car $k \geq 2$. Si $k = p$, le terme a pour valuation $p-$adique $pj > j+1$, (si $p = 2$ et $j = 1$, on n'a plus cette inégalité). Il en résulte que la somme $-\sum_{k\geq 2} C_p^k p^{jk} u^k = -p^{j+1} u$ a une valuation $p-$adique strictement supérieure à $j+1$ d'un coté, et est exactement de valuation $j+1$ de l'autre, contradiction. Donc $x^p = 1$, avec $x \in 1 + p\mathbb{Z}_p$ implique $x = 1$; comme $\beta^{p^k} = 1$, on en déduit facilement que $\beta = 1$.

   Autrement dit, si $p \geq 3$, la seule racine de l'unité dans le groupe $1 + p\mathbb{Z}_p$ est 1. Si x est une racine de l'unité, on écrit $x = \alpha\beta$, avec α racine $(p-1)$-ième de 1, et $\beta \in 1 + p\mathbb{Z}_p$; alors β est aussi une racine de l'nunité, donc $\beta = 1$ et $x = \alpha$ est une racine $(p-1)$-ième de 1.

   Si $p \neq 2$, le groupe des racines de l'unité dans $\mathbb{Q}_p$ est donc μ_{p-1}.

2. On regarde maintenant pour $p = 2$. Dans ce cas, μ_{p-1} est réduit à $\{1\}$, et les racines de l'unité de $\mathbb{Q}_2$ sont les racines de l'unité qui sont dans $1 + 2\mathbb{Z}_2$. On constate qu'il y a 1, mais aussi $-1 = 1 - 2$.

   On va laisser le lecteur terminer le raisonnement de la manière suivante : Considérer tout d'abord une racine de l'unité qui est de la forme $1 + 4u$, avec $u \in \mathbb{Z}_2$ et montrer au suivant les lignes de la démonstration précédente que $u = 0$, donc $x = 1$.

   Ensuite, si x est une racine de l'unité, $x = 1 + 2v$ avec $v \in \mathbb{Z}_2$, alors $x^2 = 1 + 4v + 4v^2 \in 1 + 4\mathbb{Z}_2$ en est une également, donc $x^2 = 1$, et finalement les seules racines dans $\mathbb{Q}_2$ sont ± 1.

On peut imaginer d'utiliser, pour le développement de Hensel, d'autres chiffres que les éléments de $\{0, ..., p-1\}$. Par exemple, comme $\mathbb{Z}_p$ contient les racines $(p-1)$-ièmes de l'unité, en rajoutant le nombre zéro à ces racines, on obtient un autre système de chiffres.

L'anneau $\mathbb{Z}_p$ a des propriétés topologiques intéressantes.

Proposition 1.3.10 *([9]) L'anneau $\mathbb{Z}_p$ muni de la topologie associée à la distance $p-$adique est un ensemble compact, totalement discontinu.*

Il en résulte aussi que $\mathbb{Q}_p$ est un corps localement compact, autrement dit, addition et multiplication sont continues, et il existe une base de voisinages de zéro qui sont des ensembles compacts (on peut prendre les idéaux $p^n\mathbb{Z}_p$ de $\mathbb{Z}_p$).

1.3.3 Le corps $\mathbb{C}_p$

Le corps $\mathbb{C}_p$ n'est pas algébriquement clos (considérer par exemple l'équation $x^2 - p = 0$).

Pour faire convenablement de l'analyse, il est donc logique de considérer une cloture algébrique de $\mathbb{Q}_p$ que l'on note en général Ω_p. On montre que l'on peut prolonger la valeur absolue à ce corps, qui possède donc aussi une valeur absolue ultramétrique, que l'on note toujours $|.|_p$.

Nous allons développer un peu ceci.

Proposition 1.3.11 *([9]) Soit $\mathbb{k}$ une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, dont on note $n = [\mathbb{k} : \mathbb{Q}_p]$ le degré, et $N = N_{\mathbb{k}/\mathbb{Q}_p}$ la norme.*

L'application $x \in \mathbb{k} \to |x| = |N(x)|_p^{\frac{1}{n}}$ est alors une valeur absolue ultramétrique sur $\mathbb{k}$, qui prolonge la valeur absolue p-adique $|.|_p$ de $\mathbb{Q}_p$.

Proposition 1.3.12 *([9]) Soit $\mathbb{k}$ une extension finie de degré n de $\mathbb{Q}_p$. Il existe une unique valeur absolue ultramétrique $|.|$ sur $\mathbb{k}$ qui étend la valeur absolue $|.|_p$ de $\mathbb{Q}_p$.*

Ce résultat permet de prolonger la valeur absolue $p-$adique à une cloture algébrique Ω_p de $\mathbb{Q}_p$, en définissant pour $x \in \Omega_p$, la valeur absolue p-adique de x comme étant $\left|N_{\mathbb{k}/\mathbb{Q}_p}(x)\right|^{\frac{1}{n}}$, où $\mathbb{k}$ est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ contenant x et n son degré.
Malheuresement, cette cloture algébrique n'est pas complète. On est donc amené à compléter de nouveau. On obtient ainsi un corps, qui cette fois-ci à la fois complet et algébriquement clos, que l'on note $\mathbb{C}_p$. Ce corps qui est unique à isomorphisme près, est muni d'une valeur absolue ultramétrique qui prolonge celle définie sur $\mathbb{Q}_p$, que nous notrons $|x|_p$ ou simplement $|x|$ s'il n'y pas de risques de confusion.

Notation. On note $O(\mathbb{C}_p)$ l'ensemble des éléments de $\mathbb{C}_p$ de valeur absolue inférieure ou égale à un. C'est un anneau commutatif unitaire, qui contient $\mathbb{Z}_p$, que l'on appelle l'anneau d'entiers de $\mathbb{C}_p$.
L'ensemble de ses éléments inversibles est l'ensemble des éléments de $\mathbb{C}_p$ de module 1, l'anneau $O(\mathbb{C}_p)$ possède donc un unique idéal maximal, qui est l'ensemble des éléments $x \in \mathbb{C}_p$, $|x|_p <$

1, noté M_p; le quotient de $O(\mathbb{C}_p)$ par M_p est un corps, le corps résiduel de $\mathbb{C}_p$, isomorphe à la cloture algébrique $\bar{F}_p$ de F_p.
Le groupe des valeurs de ce corps (c'est dire l'ensembl des $|x|_p, x \in \mathbb{C}_p, x \neq 0)$ est l'ensemble des puissances rationnelle de p.

Le corps $\mathbb{C}_p$ n'est pas localement compact. Pour faire de l'analyse le corps $\mathbb{C}_p$ en est le bon endroit.

Nous aurons besoin d'avoir un peu de renseignements sur les sous-corps de $\mathbb{C}_p$ qui sont localements compacts.

Proposition 1.3.13 *([9]) Soit $\mathbb{k}$ une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, qui est contenue dans $\mathbb{C}_p$, et que l'on suppose complète. Alors (a) et (b) sont équivalentes.*

(a) $\mathbb{k}$ est localement compact.

(b) Le groupe de valuation de $\mathbb{k}$ $\Gamma = |\mathbb{k}^*| = \{|x|, x \in \mathbb{k}^*\}$ et discret, et le groupe résiduel de $\mathbb{k}$ est fini.

Remarque 1.3.4 *Une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ est localement compact.*

1.3.4 Les fonctions analytiques p-adiques

Nous allons tout d'abord introduire des notations, et faire une étude des propriétés des disques de $\mathbb{C}_p$.

Nous notons $B^+(a, r)$ le disque fermé ou circonférencié de centre a et de rayon r, c'est à dire l'ensemble des x dans $\mathbb{C}_p$ tels que $|x - a| \leq r$, et $B^-(a, r)$ le disque ouvert ou non circonférencié de centre a et de rayon r, c'est à dire l'ensemble des x dans $\mathbb{C}_p$ tels que $|x - a| < r$.

La notation $B(a,r)$ désignera l'un ou l'autre de ces deux ensembles.

Proposition 1.3.14 *([9])*

1. Un disque $B(a,r)$, avec $a \in \mathbb{C}_p, r \in (0,+\infty)$, est un ensemble ouvert et fermé.
2. Si $b \in B(a,r)$, alors on a $B(b,r) = B(a,r)$ (tout point d'un disque est le centre de ce disque).
3. Soient $B(a,r)$ et $B(b,\rho)$ deux disques de $\mathbb{C}_p$, alors ils sont ou disjoints, ou l'un est inclus dans l'autre.

Noter aussi que le cerle $\{x \in \mathbb{C}_p; |x| = r\}$ est vide si $r \in (0,+\infty)$ n'appartient pas au groupe des valeurs de $\mathbb{C}_p$, c'est à dire n'est pas une puissance rationnelle de p. Dans ce cas, la distinction entre disque circonférencié et non circonférencié est fictive : il s'agit du même ensemble.

On dira parfois que si r appartient au groupe des valeurs de $\mathbb{C}_p$, donc est une puissance rationnelle de p, le disque est un disque rationnel, et si $r \notin \left|\mathbb{C}_p^*\right|$, que le disque est un disque rationnel.
Nous poursuivons par une étude brève des séries numériques. On a tout d'abord le résultat suivant.

Proposition 1.3.15 *([9]) Soit a_n une suite d'éléments de $\mathbb{C}_p$. Alors la série de terme général a_n converge, si et seulement si la suite a_n tend vers zéro.*

Ceci est bien sur une nouveauté par rapport à ce qui se passe dans $\mathbb{C}$.

Remarque 1.3.5 *Une remarque qui nous sera utile est aussi le fait que si la série de terme général a_n est convergente alors on a*

$$|S| = \left|\sum_{n\geq 0} a_n\right| \leq \max\{|a_n|, n \in \mathbb{N}\}.$$

Il suffit pour cela d'appliquer l'inégalité ultramétrique à la suite $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, qui converge vers la somme de la série.

Example 16 *Considérons la suite $a_n = n!$. On peut facilement montrer que $\upsilon_p(n!) = \frac{n-S_p(n)}{p-1} = \sum_{h\geq 1}\left[\frac{n}{p^h}\right]$, où $S_p(n)$ désigne la somme des chiffres de l'écriture de n en base p, et $[x]$ est la partie entière du réel x. Il en résulte que $\upsilon_p(n!)$ tend vers l'infini, et donc la série de terme général $n!$ converge, i.e. la somme $\sum_{n\geq 0} n!$ existe dans $\mathbb{C}_p$ (en fait dans $\mathbb{Q}_p$).*

Considérons maintenant une série entière, de terme général $a_n x^n$, avec $a_n \in \mathbb{C}_p$. Cette série sera donc convergente si et seulement si $a_n x^n$ tend vers zéro dans $\mathbb{C}_p$. Cette propriété est trivialement vraie si $x = 0$.

Définition 1.3.3 *L'ensemble $A = \{r \in [0, \infty),\ \ |a_n| r^n \to 0\}$ est un ensemble non vide par ce qui précède, on appelle rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ la borne supérieure de A si A est majoré, et sinon on pose $R = +\infty$.*
Par définition, le nombre R éventuellement infini ainsi défini s'appelle le rayon de convergence de cette série entière.

Remarque 1.3.6 *Les résultats valide dans $\mathbb{C}$ se prolonge sans problèmes.*

Proposition 1.3.16 *([9]) Soit $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière à coefficients dans $\mathbb{C}_p$. Alors*

1. *Si a_n est non nul à partir d'un certain rang et si la limite de $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ si $n \to \infty$ existe et vaut L, on a $R = \frac{1}{L}$ (Formule d'Alembert) ;*
2. *Si la limite $\sqrt[n]{|a_n|}$ si $n \to \infty$ existe et vaut L, on a $R = \frac{1}{L}$ (Formule de Cauchy) ;*
3. *Dans tous les cas, on a $R^{-1} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ (Formule d'Hadamard).*

Comme dans $\mathbb{C}$, les cas limites $L = 0$ et $L = +\infty$ conduisent aussi au bon résultat sur le rayon de convergence.

Les propriétés de R sont aussi les mêmes : Si R est non nul, la série converge pour x dans $\mathbb{C}_p$, tel que $|x| < R$, pour $|x| > R$ elle diverge, et en général on ne peut rien dire en ce qui concerne la convergence sur le cercle $|x| = R$.

Proposition 1.3.17 ([9]) *On appelle série dérivée de la série $f(x) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$, la série $g(x) = \sum\limits_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$.*

1. *La série dérivée de la série f a exactement le même rayon de convergence que la série f.*
2. *Si le rayon de convergence R de la série f est non nul, alors la foction f est dérivable sur son disque de convergence, et la fonction dérivée est égale à la somme de la série dérivée g*

$$f^{'}(x) = \sum_{n\geq 0} n a_n x^{n-1}$$

3. *Plus généralement, si $R > 0$, la série f est une fonction indéfiniment dérivable sur le disque de convergence de f, et on a*

$$f^{(k)}(x) = k! \sum_{n\geq 0} \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right] a_n x^{n-k}.$$

Définition 1.3.4 *On dira qu'une fonction $f(x)$ est analytique sur le disque $B(a,r)$ si cette fonction est sur disque la somme d'une série entière en les puissances de $(x-a)$, donc de*

rayon de convergence au moins r. Autrement dit, $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n (x-a)^n$ *, la série entière* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n y^n$ *ayant un rayon de convergence au moins* r*, et convergente sur le disque considéré.*
Comme tout point d'un disque en est un centre, alors si $f(x)$ *est analytique relativement à un point, elle l'est relativement à tout point du disque, pour que la définition soit cohérente.*

Proposition 1.3.18 *([9]) Une fonction analytique non nulle sur un disque vérifie le principe de zéros isolés, c'est à dire que si* b *est un zéro de* f*, il existe un disque de centre* b*, de rayon assez petit, où la fonction* f *n'admet comme zéro que* b*.*

Proposition 1.3.19 *([9]) Les fonctions analytiques sur un disque fixé de* $\mathbb{C}_p$ *forment un anneau commutatif, intègre, stable par dérivation (y compris dans le cas où le disque est fermé, ce qui n'est pas le cas dans* $\mathbb{C}$*).*

Proposition 1.3.20 *([9]) Soit* $a \in \mathbb{C}_p$*, et* $r > 0$*. On considère l'ensemble* $A(a,r)$ *des séries de la forme* $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n (x-a)^n$ *telles que* $|a_n| r^n$ *ait pour limite* 0*, qui sont des fonctions définies sur* $B^+(a,r)$*. Cet ensemble est une algèbre sur* $\mathbb{C}_p$*, et la quantité* $\|f\| = \sup\{|f(x)|, x \in B^+(a,r)\}$ *est une norme ultramétrique (elle vérifie l'inégalité ultramétrique) sur cet espace vectoriel.*

Remarque 1.3.7 *Dans le cas où* r *appartient au groupe des valeurs de* $\mathbb{C}_p$*, l'ensemble* $A(a,r)$ *est égal à l'espace ds fonctions analytiques sur le disque circonférencié* $B^+(a,r)$*, mais ce n'est plus le cas si* r *n'appartient pas au groupe des valeurs de* $\mathbb{C}_p$*.*

Proposition 1.3.21 *([9]) Soit* $a \in \mathbb{C}_p$*,* $r > 0$*, et* $B = B^+(a,r)$*. La norme précédente, définie pour les fonctions de* $A(a,r)$*, qui sont des fonctions analytiques sur* B*, est telle que*

1. *Si* $f(x) = \sum\limits_{n \geq 0} a_n (x-a)^n$, *on a la formule :* $\|f\| = \sup\{|a_n| r^n\}$.
2. *La norme est multiplicative, c'est à dire* $\|fg\| = \|f\| . \|g\|$ *pour tout couple* (f, g) *de fonctions de* $A(a, r)$.
3. *Si le rayon* r *du disque est dans le groupe des valeurs de* $\mathbb{C}_p$*, alors un "principe du maximum" est vrai : il existe* x_0 *tel que* $|x_0 - a| = r$ *et* $|f(x_0)| = \|f\|$.

D'autre part, on a les inégalités de Cauchy : soit b un point du disque, k un entier naturel et $\rho \leq r$. On a alors $\left|f^{(k)}(b)\right| \rho^k \leq |k!| \|f\|$.
Il en résulte, tout comme dans le cas de $\mathbb{C}$, le théorème de Liouville : une fonction analytique sur tout $\mathbb{C}_p$ qui est bornée est constante.

On a aussi la propriété suivante.

Proposition 1.3.22 *([9]) L'espace* $A(a, r)$ *(qui consititué de fonctions analytiques sur le disque* $B^+(a, r)$*), que l'on munit de la norme décrite plus haut, est un espace complet, autrement dit, il s'agit d'un espace de Banach* $p-$*adique.*

Remarque 1.3.8 *Il résulte de la propriété ci-dessus que si* $u_n(x)$ *est une suite d'éléments de* $A(a, r)$, *telle que* $\|u_n\|$ *tend vers* 0, *la série de terme général* $u_n(x)$ *converge et a pour somme un élément de* $A(a, r)$.

Example 17 *Soit* b *non nul dans* $\mathbb{C}_p$. *La série* $\sum\limits_{n \geq 0} b^n x^n$ *a pour disque de convergence* $B^-\left(0, |b|^{-1}\right)$, *et sa somme est* $\frac{1}{1-bx}$.

Example 18 *La série exponentielle* $\exp(x) = \sum\limits_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ *a pour disque de convergence le disque* $B^-\left(0, p^{-\frac{1}{p-1}}\right)$. *En effet, le fait que* $v_p(n!) = \frac{n - S_p(n)}{p-1}$ *permet de montrer que le rayon de convergence est* $p^{-\frac{1}{p-1}}$, *et la même formule que la série ne converge pas sur le cercle de centre* 0, *rayon* $p^{-\frac{1}{p-1}}$. *En particulier, ce n'est pas une fonction entière.*

Notons que si $x,\ y \in B^{-}\left(0, p^{-\frac{1}{p-1}}\right)$ alors $x+y$ lui appartient aussi. Sur ce disque, on a la relation fonctionnelle habituelle $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.

Example 19 *La série* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ *a pour disque de convergence* $B^{-}(0,1)$. *Elle y définit une fonction analytique que l'on note* $\log(1+x)$. *Montrons que l'on a la relation fonctionnelle* $\log((1+x)(1+y))$ *pour tout* x *et* y *dans ce disque.*

Pour cela, soit b *fixé dans* $B^{-}(0,1)$, *posons* $g(x) = \log(1+x)$. *Par la série entière, il est immédiat que* $g^{'}(x) = \frac{1}{1+x}$, *et donc que* $g^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$ *pour* $n \geq 1$.

Considérons $g(b+u)$, *pour* $u \in B^{-}(0,1)$. *On a le développement :*

$$g(b+u) = g(b) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!(1+b)^n} u^n.$$

Remplaçant u *par* $(1+b)x$, *il vient que :*

$$g(b+(1+b)x) = g(b) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(1+b)^n}(1+b)^n \frac{x^n}{n} = g(b) + g(x).$$

On a donc en revenant aux notations intiales :

$$\begin{aligned} g(b+(1+b)x) &= \log(1+b+(1+b)x) = \log(1+b)(1+x) \\ &= g(b) + g(x) = \log(1+x) + \log(1+b), \end{aligned}$$

ce qui démontre l'assertion.

Nous allons voir les rapports entre la fonction exponentielle et la fonction logarithme.

Proposition 1.3.23 *([9]) On a les propriétés suivantes :*

1. *Pour tout* $x \in B^{-}\left(0, p^{-\frac{1}{p-1}}\right)$, *on a* $\log(\exp(x)) = x$;
2. *Pour tout* $x \in B^{-}\left(0, p^{-\frac{1}{p-1}}\right)$, *on a* $\log(\exp(1+x)) = 1+x$.

On n'a pas $\log(\exp(1+x)) = 1+x$. En général : cette relation n'est vraie que pour $|x| < p^{-\frac{1}{p-1}}$.

Montrons que l'on n'a pas en général $\log(\exp(1+x)) = 1+x$. Ceci provient deja du fait qu'il faut que $|\log(1+x)| < p^{-\frac{1}{p-1}}$ pour que l'exponentielle soit définie, mais même cette condition ne suffit pas. Regardons pour cela le cas des racines p-ième de l'unité, qui existent dans $\mathbb{C}_p$ (qui est algébriquement clos). Il est facile de voir qu'une racine p-ième de l'unité différente de 1 s'écrit $1+y$, avec $|y| = p^{-\frac{1}{p-1}}$ (poser pour cela $x = 1+y$).
Alors

$$p\log(1+y) = \log(1+y)^p = \log x^p = \log 1 = 0,$$

de sorte que $\log(1+y) = 0$. Et donc $\exp(\log(1+y)^p) = 1 \neq 1+y$.

Notons que nous avons trouvé des zéros non triviaux de la fonction $\log$.

Example 20 *Soit a dans $\mathbb{C}_p$. On suppose que $|a-1| < 1$. Alors $\log(a) = \log(1+a-1)$ est bien défini. On pose alors $a^x = \exp(x\log a)$, cette fonction est analytique pour $|x| < R$, avec $R = \frac{p^{-\frac{1}{p-1}}}{|\log a|}$ (si $\log a = 0, R = +\infty$). Mais elle n'est pas très agréable, si par exemple a est une racine p-ième de l'unité, la fonction ainsi définie est la fonction constante égale à 1. Si on a la condition plus forte $|a-1| < p^{-\frac{1}{p-1}}$, ce rayon de convergence est égal à $\frac{p^{-\frac{1}{p-1}}}{|\log a|}$, qui est supérieure à un. Le disque de convergence contient alors $\mathbb{Z}$,et la fonction ainsi construite prolonge la fonction $n \in \mathbb{Z} \to a^n$ (on a $a^n = \exp(\log a^n) = \exp(n\log a)$) pour $n \in \mathbb{N}$, car $|a^n - 1| < p^{-\frac{1}{p-1}}$.*

1.3.5 Zéros des séries entières

Dans cette partie, nous allons étudier les zéros des séries entières, convergentes sur un disque fermé $B^+(a,r)$. Soit $\Bbbk$ un sous-corps de $\mathbb{C}_p$ que nous supposons complet. Nous prendrons pour a un point de $\Bbbk$; nous supposerons en fait que $a = 0$, car cela ne restreint pas la généralité.

Soit $r \in (0, \infty)$, que nous fixons dans tout ce qui suit. Pour une fonction analytique $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sur le disque $B^+(0,r)$, appartenant à $A(0,r)$, on pose $\|f\| = \max\{|a_n| r^n\}$.

Nous montrons maintenant le Théorème de factorisation.

Théorème 1.3.1 ([9]) *Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une série entière non nulle à coefficients dans $\Bbbk$, convergente dans le disque $B^+(0,r)$, appartenant à $A(0,r)$, et s un indice tel que l'on ait $|a_s| r^s = \|f\|$, et $|a_j| r^j < |a_s| r^s$ pour $j > s$. Il existe alors un couple (Q, H), Q étant un polynôme de $\Bbbk[x]$, $Q(x) = b_0 + ... + b_s x^s$, avec $|b_s| r^s = \|Q\| = \|f\|$ et $H(x)$ une série entière appartenant à $A(0,r)$, telle que $\|H - 1\| < 1$, vérifiant $f(x) = Q(x) H(x)$.*

Nous allons déduire de ce résultat un certain nombre de propriétés qui nous serviront constamment. La première est une conséquence immédiate du Théorème.

Corollaire 1.3.1 ([9]) *Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une série entière non nulle à coefficients dans $\Bbbk$, convergente dans le disque $B^+(0,r)$, appartenant à $A(0,r)$, et s un indice tel que l'on ait $|a_s| r^s = \|f\|$, et $|a_j| r^j < |a_s| r^s$ pour $j > s$. Alors*

1. *Si $s \geq 1$, alors la fonction f a excatement s zéros dans le disque $B^+(0,r)$, compte tenu des multiplicités.*
2. *La fonction f n'a aucun zéro dans le disque $B^+(0,r)$ et si et seulement si $s = 0$, et sa valeur absolue y est alors constante dans ce disque.*

Corollaire 1.3.2 ([9]) *Soit $f(x)$ une série entière vérifiant les hypothèses de la proposition précédente; on suppose de plus que l'entier s est égal à 1. Alors la série $f(x)$ a un unique zéro dans le disque $B^+(0,r)$ de $\mathbb{C}_p$, et ce zéro est dans $\Bbbk$.*

Corollaire 1.3.3 *([9]) Soit $\Bbbk$ un sous-corps complet de $\mathbb{C}_p$, et P un polynôme non constant à coefficients dans l'anneau d'entiers $O(\Bbbk)$ de $\Bbbk$. On suppose qu'il existe $a \in O(\Bbbk)$ tel que $|P(a)| < 1$, et $\left|P'(a)\right| < 1$. Alors il existe un zéro b de P dans $O(\Bbbk)$, qui vérifie $|b-a| < 1$.*

Le résultat qui suit est une version un peu plus élaborée du résultat précédent.

Proposition 1.3.24 *([9]) Soit P un polynôme de degré au mois deux, à coefficients dans l'anneau d'entiers $O(\Bbbk)$ d'un sous-corps complet $\Bbbk$ de $\mathbb{C}_p$, et que la réduction de P modulo l'idéal maximal de O est de la forme $c(x-\alpha_1)^{e_1} ... (x-\alpha_m)^{e_m}$, où les α_k sont des éléments distincts du corps résiduel k de $\Bbbk$, et les e_k des entiers ≥ 1, c étant un élément non nul de k. Alors il existe des polynomes Q_k, unitaires et à coefficients dans l'anneau d'entiers de $\Bbbk$, dont la réduction modulo l'idéal maximal de $O(\Bbbk)$ est $(x-\alpha_k)^{e_k}$, et un polynôme H à coefficents dans l'anneau d'entiers de $\Bbbk$, et dont la réduction est la constante c, tels que*

$$Q(x) = Q_1(x) ... Q_m(x) H(x).$$

Soit f une fonction analytique sur un disque $B(0,r)$, donc une série entière $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, que l'on suppose non nulle. Pour $\rho < r$ (et pour $\rho \leq r$ si la fonction est dans $A(0,r)$), on peut regarder la fonction qui à ρ associe $|f|(\rho) = \sup\{|a_n| \rho^n\}$. On a comme propriété.

Proposition 1.3.25 *([9]) On suppose que la fonction f n'est pas nulle. Alors*

1. *La fonction $|f|(\rho)$ est croissante ;*
2. *Si la fonction f a un zéro b dans le disque en question, la fonction $|f|(\rho)$ est strictement croissante si $\rho > |b|$;*
3. *La fonction $|f|(\rho)$ est continue.*

4. *On a toujours :* $\left|f'\right|(\rho) \leq \frac{|f|(\rho)}{\rho}$.

Nous allons maintenant regarder l'image d'un disque par une fonction analytique.

Proposition 1.3.26 *([9]) Soit D un disque de $\mathbb{C}_p$, et f une fonction analytique non constante sur D. L'image de D par f est un disque de $\mathbb{C}_p$, de même nature que D (circonférencié ou non).*

On poursuit en se débarassant de l'hypothèse que le disque sur lequel on travaille est circonférencié, mais il nous faut donc alors faire un hypothèse sur la fonction f, on va supposer qu'elle est bornée sur le disque considéré.

Proposition 1.3.27 *([9]) Soit $r \in (0, \infty)$, et $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une série entière converegente dans le disque $B^{-}(0, r)$, on suppose de plus que $\|f\| = \max\{|a_n| r^n\}$ est fini, et qu'il existe un entier s tel que*

$$|a_j| r^j < |a_s| r^s,$$

pour $j > s$. On peut alors écrire $f(x) = H(x) Q(x)$, où $H(x)$ est une fonction analytique sur le disque, à coefficients dans $\mathbb{k}, Q(x)$ un polynôme de degré s à coefficients dans $\mathbb{k}$, vérifiant les conclusions de la proposition précédente.

Supposons maintenant que la série entière $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ soit donnée, non constante, de rayon de convergence R non nul (éventuellement infini), et regardons ce que le résultat précédent nous donne sur la fonction $r \rightarrow |f|(r)$, pour $r \in (0, \infty)$. pour simplifier, supposons que $a_0 \neq 0$ (en général, on aura donc à multiplier par une puissance de r).
Comme $a_0 \neq 0$, pour $|x|$ assez petit, on aura $|f(x)| = |a_0|$,de sorte que $|f|(r) = |a_0|$ =constante pour r assez petit. Cela cesse à partir du moment om il va exister un indice $k > 0$ tel que $|a_k| r^k = |a_0|$. Soit r_1 la première valeur de r telle que ce phénomène se réalise, et s_1 la plus

grande valeur de k telle que $|a_k| r_1^k = |a_0|$. Alors f a exactement s_1 zéros sur le cercle $|x| = r_1$, et aucun dans le disque ouvert de centre 0, de rayon r_1. On va avoir $|f|(r) = |a_{s_1}| r^{s_1}$ pour $r \geq r_1$, et assez proche de r_1. Ce phénomène (en général) se termine quand il existe une valeur $k > s_1$ et un $r > r_1$ tels que $|a_k| r^k = |a_{s_1}| r^{s_1}$; soit r_2 la première valeur de r telle qu'il en soit ainsi, et s_2 le plus grand des entiers $k > s_1$ tels que $|a_k| r_2^k = |a_{s_1}| r_2^{s_1}$. Alors, sur le cercle $|x| = r_2$, f a $s_2 - s_1$ zéros, et aucun dans la couronne ouverte de centre 0 et de rayon r_1, r_2. On a $|f|(r) = |a_{s_1}| r^{s_1}$ pour $r \in [r_1, r_2]$. On poursuit si on peut le procédé, et on trouve donc ainsi les cercles où se trouvent les zéros de f, de rayon r_k (suite fine ou infinie), le nombre des zéros sur ces cercles (les $s_k - s_{k-1}$), et en plus, on a le fait que la fonction $|f|(r)$ est continue et monomiale par moceaux, c'est à dire que sur $[r_k, r_{k+1}]$, il existe une constante c_k et un entier s_k tels que $|f|(r) = c_k r^{s_k}$.
Les rayons r_k s'appellent les rayons exceptionnels pour la série entière f.

Une propriété importante est la suivante :
Si $x \in \mathbb{C}_p$ est différent d'un rayon exceptionnel, et si $|x| = r$, on a $|f(x)| = |f|(r)$.

On fabrique maintenant une fonction Φ sur $(-\infty, \log R)$ par $\Phi(\log r) = \log |f|(r)$; cette fonction est la fonction de valuation de f, c'est une fonction continue, affine par morceaux, elle est convexe, et sa dérivée à gauche en un point u est le nombre de zéros de f dans le disque ouvert de centre 0 et de rayon $\exp(u)$, sa dérivée à droite est le nombre de zéros de f dans le disque fermé de centre zéro, rayon $\exp(u)$.

Donnons une application de ce qui précède aux fonctions entières $p-$adiques, il s'agit de montrer que toute fonction entière s'écrit sous la forme d'un produit de Weierstrass.

Proposition 1.3.28 *([9]) Soit $f(x)$ une fonction entière (donc une série entière de rayon de convergence infini), que l'on suppose non polynômiale. Alors l'ensemble des zéros non nuls de f forme une suite infinie, que l'on range par ordre de module croissant et que l'on note*

a_n. La suite $|a_n|$ tend vers l'infini, et on peut écrire f sous la forme d'un produit infini

$$f(x) = cx^k \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{a_n}\right),$$

où c est une constante, et $k \in \mathbb{N}$ l'ordre de $x = 0$ comme zéro de f.

Chapitre 2

Sur l'unicité des fonctions entières

2.1 Historique du problème

D'après le Théorème fondamental de l'algèbre, on sait que tout polynôme de $\mathbb{C}$ est complètement déterminé par ses zéros sauf s'il est constant. Mais que peut on dire sur les fontions entières ou méromorphes ? Combien de fois peut deux fonctions méromorphes avoir les mêmes valeurs sur le même ensemble ? Comment la théorie de Nevanlinna s'insère t-elle dans ces histoire ?

2.1.1 Les fameux théorèmes de Rolf Nevanlinna

En premier lieu, on donne quelques définitions.

Définition 2.1.1 ([76]) *Soient f et g deux fonctions méromorphes d'une variable complexe, et $a \in \mathbb{C}$.*
On dit que

1. *f et g partagent la valeur a CM (en comptant la multiplicité) si $f(z) - a$ et $g(z) - a$ admettent les mêmes zéros avec les mêmes multiplicités.*
2. *f et g partagent la valeur a IM (en ignorant la multiplicité) si $f(z) - a$ et $g(z) - a$ admettent les mêmes zéros sans tenir compte de leurs multiplicités.*
3. *f et g partagent la valeur a DM (multiplicités différentes) si f et g partagent la valeur a IM et les zéros de $f(z) - a$ et $g(z) - a$ ont des multiplicités différentes en tout point.*

Example 21 *Les fonctions* e^z *et* e^{-z} *partagent* $0, 1, -1, \infty$ *CM; et* $p(z) = z^2(z-1)$ *et* $q(z) = z^3(z-1)^2$ *partagent* 0 *DM.*

Remarque 2.1.1 *De cette définition, il s'ensuit qu'une valeur partagée CM est une valeur partagée IM, mais la réciproque n'est pas toujours vraie.*

Naturellement on se pose la question suivante : Combien de valeurs déterminent une fonction méromorphe ?

Une des applications de la théorie de Nevanlinna est la théorie d'unicité des fonctions. En 1929, Rolf Nevanlinna[60], [76] a démontré les résultats remarquables suivants.

Théorème 2.1.1 (Théorème des cinq valeurs de Nevanlinna) *Si deux fonctions méromorphes* f *et* g *partagent cinq valeurs CM, alors elles sont identiques.*

Remarque 2.1.2 *On ne peut pas réduire le nombre cinq de valeurs partagées CM, comme le montre l'exemple suivant.*

Example 22 *Reprenons l'exemple précédent. Soit* $f(z) = e^z$ *et* $g(z) = e^{-z}$*. On voit bien que* f *et* g *partagent les quatres valeurs* $0, 1, -1, \infty$ *CM, et elles sont différentes.*

Théorème 2.1.2 (Théorème des quatre valeurs de Nevanlinna) *Si deux fonctions méromorphes* f *et* g *partagent quatre valeurs CM, alors* f *est une transformation de Moebius de* g*.*

Remarque 2.1.3 *La transformation de Moebius d'une fonction est définie comme la composée d'un nombre fini d'inversions par rapport à des plans ou des sphères.*
En particulier, si on identifie $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$, alors on peut prouver que les transformations de Moebius conservant l'orientation sont de la forme

$$M : z \to \frac{az+b}{cz+d}$$

avec a, b, c et d quatre nombres complexes tels que $ad - bc \neq 0$.
On étend alors cette fonction à $\mathbb{C}$ en posant

$$M\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty,\ M(\infty) = \frac{a}{c}$$

2.1.2 Les améliorations de Gundersen

En 1976, L.A. Rubel s'est posé la question suivante : Si on remplace CM par IM dans le théorème précédent obtient-on la même conclusion ?

En 1979, G.G. Gundersen[36] a donné une réponse négative à cette question par l'exemple suivant.
Posons

$$f = \frac{e^h+1}{\left(e^h-1\right)^2},\ g = \frac{\left(e^h+1\right)^2}{8\left(e^h-1\right)},$$

avec h une fonction entière non constante. Il est simple de vérifier que f et g partagent quatre valeurs 0, 1, ∞, $\frac{-1}{8}$ IM, et on remarque bien que f n'est pas une transformation de Moebius de g.
D'autre exemples ont été donné par N. Steinmetz[66] et M. Reinders[61].

En 1979 et 1983, Gary G. Gundersen a amélioré ces théorèmes.

Théorème 2.1.3 ([34]) *Si f et g sont deux fonctions méromorphes et partagent trois valeurs CM et partagent une valeur IM, alors elles partagent 4 CM et le Théorème 2.1.2 reste vrai.*

Théorème 2.1.4 *([35]) Si f et g sont deux fonctions méromorphes et partagent deux valeurs CM et partagent deux valeurs IM, alors f et g partagent quatre valeurs CM et le Théorème 2.1.2 reste vrai.*

Remarque 2.1.4 *On dit simplement 2CM+2IM implique 4CM et 3CM+1IM implique 4CM. Mais le cas 1CM+3IM reste encore un problème ouvert.*

2.1.3 Unicité des fonctions entières et leurs dérivées

Le problème d'unicité des fonctions entières qui partagent des valeurs avec leurs dérivées est récemment étudié.
En 1977, L.A. Rubel et C. C. Yang ont démontré le résultat suivant.

Théorème 2.1.5 *([62]) Si f une fonction entière et si f et f' partagent deux valeurs distincts a, b CM, alors $f \equiv f'$. Autrement dit, une dérivée est déterminée par deux valeurs.*

Remarque 2.1.5 *Après deux ans, E. Mues et N. Steinmetz ont démontré que ce résultat reste vrai si f et f' partagent deux valeurs finies IM.*

Remarque 2.1.6 *Le nombre deux dans les Théorème 2.1.5 ne peut pas être réduit. Soit*

$$f(z) = e^{e^z} \int_0^z e^{e^{-t}} \left(1 - e^t\right) dt,$$

alors f satisfait

$$\frac{f' - 1}{f - 1} = e^z,$$

et donc f et $f^{'}$ partagent 1 *comme valeur CM et on n'a pas $f \equiv f^{'}$. D'autre part, la fonction méromorphe*

$$f(z) = \left[\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} i \tan\left(\frac{\sqrt{5}}{4} iz\right)\right]^2,$$

partage $0,\ 1$ *DM avec $f^{'}$, alors que la fonction méromorphe*

$$f(z) = \frac{2A}{1 - Be^{-2z}}, A \neq 0, B \neq 0,$$

partage $0,\ A$ *DM avec $f^{'}$ et $f \neq f^{'}$ dans les deux cas.*

On mentionne ici que si f et f' partagent trois valeurs IM alors $f \equiv f^{'}$ (un résultat démontré par N. Steinmetz).

Remarque 2.1.7 *G.G. Gundersen a généralisé ces résultats dans le cas où f est une fonction méromorphe[34], l'idée de la preuve était de combiner la théorie de Nevanlinna, la somme des dérivées logarithmiques et les propriétés de la distribution des valeurs.*

En 1986, G. Jank, E. Mues et L. Volkmann ont montré le théorème suivant.

Théorème 2.1.6 ([47]) *Soit f une fonction entière non constante. Si f et $f^{'}$ partagent $a\,(\neq 0)$ IM et $f^{''}(z) = a$ et $f(z) = a$, alors $f \equiv f^{'}$.*

Peut-on remplacer $f^{'}$ par $f^{(k)}$ dans le théorème ?
En 1990, Lian-Zhong Yang a répondu à cette question.

Théorème 2.1.7 ([75]) *Soit f une fonction entière non constante. Si* 0 *est une valeur exceptionnelle de Picard (ou bien au sens de Picard) de f et de $f^{(k)}$, et f partage une valeur finie $a\,(\neq 0)$ IM avec $f^{(k)}\,(k \geq 2)$, alors $f = e^{Az+B}$, A et B des constantes, avec $A^k = 1$.*

Théorème 2.1.8 *([75]) Si f une fonction entière non constante et $f^{(k)}$partagent deux valeurs finies CM, alors $f \equiv f^{(k)}$.*

Remarque 2.1.8 *Le nombre deux dans le Théorème 2.1.8 ne peut pas être réduit, et on ne peut pas remplacer IM par CM comme le montre les exemples suivants.*

Example 23 *La fonction $f(z) = \sin z$ partage 0 CM avec $f^{''}$ alors que $f \neq f^{''}$.*

Example 24 *Soit a_1 un nombre quelconque, $a_2 = a_1 + \sqrt{2}i$. Soit w une solution non constante de l'équation de Riccati suivante*

$$w^{'} = (w - a_1)(w - a_2), \tag{2.1.1}$$

Soit

$$f = (w - a_1)(w - a_2) - \frac{1}{3}.$$

On obtient

$$f^{'} = w^{'}(2w - a_1 - a_2),$$

et

$$f^{''} = 6w^{'} f, \tag{2.1.2}$$

$$f^{''} + \frac{1}{6} = 6\left(f + \frac{1}{6}\right)^2, \tag{2.1.3}$$

L'équation (2.1.1) implique que 0 est la valeur exceptionnelle de Picard, et de la relation (2.1.2) on sait que 0 est une valeur CM partagée par f et f''. La relation (2.1.3) implique que $-\frac{1}{6}$ est IM partagée par f et $f^{''}$ et on a bien $f \neq f^{''}$.

2.2 Nos Résultats

2.2.1 Conjecture de Rainer Brück

Qu'elle est la relation entre f et $f^{'}$ si une fonction entière partage une seule valeur finie avec sa dérivée. ?
En 1996, Rainer Brück a conjecturé ce problème[20].

Conjecture de Brück
Soit f une fonction entière non constante. Supposons que $\sigma_2(f)$ n'est pas un entier positif ou infini, si f et $f^{'}$ partagent a CM, alors

$$\frac{f^{'}-a}{f-a}=c,$$

avec c une constante non nulle.
La conjecture a été démontré dans les quatres cas suivants :

1. $a=0$, par R. Brück[20].
2. $N\left(r,\frac{1}{f'}\right)=S(r,f)$, par R. Brück[20].
3. f est d'ordre fini par G.G. Gundersen et C.C. Yang[38] en 1998.
4. $\sigma_2(f)<\frac{1}{2}$, par Z.X. Chen et K.H. Shon[25] en 2004.

Remarque 2.2.1 *R. Brück dans son papier[20] a démontré que la condition sur l'ordre est nécessaire et a donné des contre exemples pour IM.*

Remarque 2.2.2 *G.G. Gundersen et C.C. Yang[38] ont démontré que la conjecture ne reste pas vraie si f est méromorphe sauf dans le cas où $N\left(r,\frac{1}{f'}\right)=S(r,f)$.*

En 1999, L.Z. Yang a généralisé le résultat de G.G. Gundersen et C.C. Yang pour la dérivée $n^{ième}$.

Théorème 2.2.1 (*[76]*) *Soient f une fonction entière non constante d'ordre fini, a un nombre fini non nul et n un entier positif.*
Si f et $f^{(n)}$ partagent a CM, alors

$$\frac{f^{(n)}-a}{f-a}=c, \text{ où } c \text{ est une constante non nulle.}$$

Des résultats en relation avec la conjecture de Brück sont dans l'ouvrage [76].

2.2.2 Article 1 : Résultats sur les valeurs partagées des fonctions entières et leurs polynômes différentiels homogènes

Les résultats Récents

Récemment, Xiao-Min Li et Hong-Xun Yi ont posé la question suivante.

Question. Que peut-on dire si une fonction entière non constante f partage une valeur a avec son polynôme différentiel ?
Et ils ont démontré le résultat suivant.

Posons

$$L\left[f\right]=f^{(k)}+a_{k-1}f^{(k-1)}+...+a_1f^{'}+a_0f, \tag{2.2.1}$$

avec k un entier positif, $a_{k-1},...,$ a_1, et a_0 des nombres complexes finis.

Théorème A. ([56]) *Soient $Q\left(z\right)$ un polynôme, et $a\left(\neq 0\right)$ un nombre complexe fini. Si f est une solution non constante de l'équation différentielle*

$$L\left[f\right]-a=\left(f-a\right).e^{Q(z)},$$

avec $L\left[f\right]$ est défini par (2.2.1), alors on obtient un des cas suivants

(i) *Si $\mu\left(f\right)>1$, alors $\mu\left(f\right)=\infty$ et $\mu_2\left(f\right)=\sigma_2\left(f\right)=\gamma_Q$, avec γ_Q est le degrée de $Q\left(z\right)$.*

(ii) *Si $\mu\left(f\right)\leq 1$, alors $\mu\left(f\right)=1$ and $Q\left(z\right)=p_1z+p_0$, avec $p_1\left(\neq 0\right)$ et p_0 deux nombres complexes finis, $a_0,a_1,...,a_{k-1}$ ne sont pas toutes des constantes nulles.*

Par la suite on aura besoin de la définition suivante.

Définition 2.2.1 ([76]) *Soient $f(z)$ et $a(z)$ des fonctions méromorphes dans le plan complexe. Si $T(r,a) = S(r,f)$, alors $a(z)$ est appelée une fonction à petite croissance par rapport à $f(z)$.*

Question. Que peut-on dire si une fonction entière f partage une fonction entière à petite croissance a avec sa dérivée $f^{(k)}$?

En regardant cette question, Yong-Huo Xiao et Xiao-Min Li ont démontré le résultat suivant.

Théorème B. ([73]) *Soient $Q(z)$ un polynôme, et $a(z)$ une fonction entière à petite croissance de f, telle que $\sigma(a) < \gamma_Q$. Si f est une solution transcendante non constante de l'équation différentielle*

$$f^{(k)} - a = (f - a) . e^{Q(z)},$$

alors $\sigma_2(f) = \gamma_Q$, et f est d'ordre infini.

Nos contributions

Le but de cette thèse est de généraliser les résultats cités ci-dessus.

Théorème 2.2.2 ([10]) *Soient $Q(z)$ un polynôme non constant et a un nombre complexe fini non nul. Si f est une solution non constante de l'équation différentielle*

$$L^l[f] - a = \left(f^l - a\right) . e^{Q(z)}, \tag{2.2.2}$$

avec $L[f]$ est défini par (2.2.1), alors on obtient un des cas suivants

(i) Si $\mu(f) > 1$, alors $\mu(f) = \infty$ et $\mu_2(f) = \sigma_2(f) = \gamma_Q$, avec γ_Q est le degrée de $Q(z)$.

(ii) Si $\mu(f) \leq 1$, alors $\mu(f) = 1$ et $Q(z) = p_1 z + p_0$, avec $p_1 (\neq 0)$ et p_0 deux nombres complexes finis, $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ ne sont pas toutes des constantes nulles.

De ce théorème, on obtient les corollaires suivants.

Corollaire 2.2.1 *([10]) Soient $Q(z)$ un polynôme, et a un nombre complexe fini non nul. Si f est une solution entière non constante de l'équation différentielle (2.2.2) telle que $\mu_2(f)$ n'est pas un entier positif, alors f et $L[f]$ vérifient une des relations suivantes*

(i) $L^l[f] - a = c\left(f^l - a\right)$, *avec $c\,(\neq 0)$ un nombre complexe fini.*

(ii) $L^l[f] - a = \left(f^l - a\right)e^{b_1 z + b_0}$, *avec $\mu(f) = 1$ et $b_1\,(\neq 0)$ et b_0 deux nombres complexes finis, $a_0, a_1, ..., a_{k-1}$ ne sont pas toutes des constantes nulles.*

Corollaire 2.2.2 *([10]) Soit f une fonction entière non constante telle que $\mu(f) < \infty$, et soit a une constante complexe finie. Si $f^l - a$ et $L^l[f] - a$ partagent 0 CM, alors f et $L[f]$ vérifient une des relations (i) et (ii) du Corollaire 2.2.1.*

On s'est demandé aussi : Si f et $L[f]$ partagent une fonction à petite croissance, aura-t-on les mêmes résultats ?

Théorème 2.2.3 *([10]) Soient $Q(z)$ un polynôme non constant, et $b_i(z)\,(i = 1, 2)$ des fonctions entières à petite croissance de f, telles que $\sigma(b_i) < 1$. Si f une solution entière non constante de l'équation différentielle*

$$L^l[f] - b_1 = \left(f^l - b_2\right).e^{Q(z)}, \tag{2.2.3}$$

avec $L[f]$ est défini par (2.2.1), alors on obtient un des cas suivants.

(i) Si $\mu(f) > 1$, alors $\mu(f) = \infty$ et $\mu_2(f) = \sigma_2(f) = \gamma_Q$, avec γ_Q est le degrée de $Q(z)$.

(ii) Si $\mu(f) \leq 1$, alors $\mu(f) = 1$ and $Q(z) = p_1 z + p_0$, avec $p_1\,(\neq 0)$ et p_0 deux nombres complexes finis, a_0, $a_1, ..., a_{k-1}$ ne sont pas toutes des constantes nulles.

De ce théorème on obtient le corollaire suivant.

Lemmes préliminaires

Pour démontrer les théorèmes on aura besoin des lemmes suivants.

Lemme 2.2.1 ([56]) *Soit $f(z)$ une fonction entière d'ordre infini, et avec d'ordre inférieur $\mu(f)$ et d'hyper-ordre inférieur $\mu_2(f)$. Alors*

(i) $\mu(f) = \liminf\limits_{r\to\infty} \frac{\log v(r,f)}{\log r}$.

(ii) $\mu_2(f) = \liminf\limits_{r\to\infty} \frac{\log\log v(r,f)}{\log r}$.

Lemme 2.2.2 ([52], p.5) *Soient $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $h:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ des fonctions croissantes monotones telles que $g(r)\le h(r), r\notin E$, où E un ensemble de mesure logarithmique finie. Alors, pour tout $\alpha>1$, il existe $r_0>0$ tel que $g(r)\le h(r^\alpha)$ pour tout $r>r_0$.*

Lemme 2.2.3 ([52], p.36) *Soient f une fonction méromorphe transcendante et $k\ge 1$ un entier. Alors*

$$m\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right) = O\left(\log\left(rT\left(r,f\right)\right)\right),$$

quand $r\notin E$, avec E un ensemble de mesure linéaire finie, et si f est d'ordre fini, alors

$$m\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right) = O\left(\log r\right).$$

Lemme 2.2.4 ([2]) *Soient $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $h:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ des fonctions croissantes monotones telles que $g(r)\le h(r)$, $r\notin E$, où E un ensemble de mesure linéaire finie. Alors, pour tout $\alpha>1$, il existe $r_0>0$ tel que $g(r)\le h(\alpha r)$ pour tout $r>r_0$.*

Preuves des Théorèmes

Preuve du Théorème 2.2.2

Supposons que f est un polynôme, alors des équations (2.2.1) et (2.2.2) (on obtient qu'il existe une constante non nulle telle que $e^{Q(z)} \equiv c$. D'où la contradiction avec les hypothèses. Donc f est une fonction entière transcendante. On distingue deux cas.

Cas 1. Suppososons que

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{\log v(r,f)}{\log r} > 1. \tag{2.2.4}$$

De l'équation (2.2.4)et (i) du Lemme 2.2.1 on obtient

$$\mu(f) = \liminf_{r\to\infty} \frac{\log v(r,f)}{\log r} > 1. \tag{2.2.5}$$

Comme $Q(z)$ est un polynôme non constant, on a

$$Q(z) = b_n z^n + ... + b_1 z + b_0, \tag{2.2.6}$$

avec $b_n (\neq 0), ..., b_1$, et b_0 des nombres complexes. Il s'ensuit de l'équation (2.2.6) que

$$\lim_{|z|\to+\infty} \frac{|Q(z)|}{|b_n z^n|} = 1.$$

De cette relation, on déduit qu'il existe un nombre positif r_0 suffisamment grand tel que

$$\frac{|Q(z)|}{|b_n z^n|} > \frac{1}{e}, \quad |z| > r_0.$$

De cette inégalité et (2.2.4), on déduit

$$\log|b_n| + n\log|z| - 1 < \log|Q(z)| = \log\left|\log e^{Q(z)}\right|$$

$$\leq \left|\log\log e^{Q(z)}\right| = \left|\log\log \frac{L^l[f]-a}{f^l-a}\right| \quad (|z| > r_0). \tag{2.2.7}$$

De la condition que f est une fonction entière non constante, on obtient

$$M(r,f) \to \infty, \text{ quand } r \to \infty. \tag{2.2.8}$$

Soit

$$M(r,f) = |f(z_r)|, \tag{2.2.9}$$

avec $z_r = re^{i\theta(r)}$, et $\theta(r) \in [0, 2\pi)$. De la relation (2.2.9) et du Théorème 1.2.3, on sait qu'il existe un ensemble $F_j \subset (1, \infty)$ $(1 \leq j \leq k)$ de mesure logarithmique finie, i.e., $\int\limits_{F_j} \frac{dt}{t} < \infty$, tel que pour un point $z_r = re^{i\theta(r)}$ $(\theta(r) \in [0, 2\pi))$ tel que $|z_r| = r \notin F_j$ et $M(r, f) = |f(z_r)|$, on a

$$\frac{f^{(j)}(z_r)}{f(z_r)} = \left(\frac{\nu(r, f)}{z_r}\right)^j (1 + o(1)) \quad (1 \leq j \leq k,\ r \notin F_j,\ r \to \infty). \tag{2.2.10}$$

Alors

$$\frac{L^l[f] - a}{f^l - a} = \frac{\frac{L^l[f]}{f^l} - \frac{a}{f^l}}{1 - \frac{a}{f^l}}, \tag{2.2.11}$$

comme f est une fonction entière transcendante et a une constante non nulle, de (2.2.8)et (2.2.9) on déduit

$$\lim_{r\to\infty} \frac{|a|}{|f^l(z_\tau)|} = \lim_{r\to\infty} \frac{|a|}{M^l(r, f)} = 0,\ i = 1, 2. \tag{2.2.12}$$

De cela et en utilisant (2.2.1), (2.2.8)-(2.2.11), on obtient

$$\left|\frac{L^l[f(z_r)] - a}{f^l(z_r) - a}\right| = \left(\frac{\nu(r, f)}{r}\right)^{lk} |1 + o(1)|^l,\ \left(r \notin \cup_{j=1}^k F_j,\ r \to \infty\right), \tag{2.2.13}$$

de l'équation (2.2.13), on obtient

$$\log\left|\frac{L^l[f(z_r)] - a}{f^l(z_r) - a}\right| = k(\log \nu(r, f) - \log r) + O(1) \quad \left(r \notin \cup_{j=1}^k F_j\right). \tag{2.2.14}$$

De l'équation (2.2.7), on déduit que

$$\begin{aligned} \log|b_n| + n \log|z_r| - 1 &\leq \left|\log\log \frac{L^l[f(z_r)] - a}{f^l(z_r) - a}\right| \\ &= \left|\log\left|\log \frac{L^l[f(z_r)] - a}{f^l(z_r) - a}\right| + i \arg\left(\log \frac{L^l[f(z_r)] - a}{f^l(z_r) - a}\right)\right| \\ &\leq \left|\log\left|\log \frac{L^l[f(z_r)] - a}{f^l(z_r) - a}\right|\right| + 2\pi. \end{aligned} \tag{2.2.15}$$

Des équations (2.2.15), (2.2.15), Lemme 2.2.2, et $|z_r| = r$, on obtient que pout tout $\beta > 1$, il existe un nombre positif suffisamment grand r_0, tel que

$$\log|b_n| + n \log r - 1 \leq \log\log \nu\left(r^\beta, f\right) + \log\log r^\beta + O(1),\ r > r_0.$$

De cette inégalité et Théorème 1.2.2, on déduit que

$$\frac{n}{\beta} \leq \limsup_{r^\beta\to\infty} \frac{\log\log \nu\left(r^\beta, f\right)}{\log r^\beta} = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log\log \nu(r, f)}{\log r} = \sigma_2(f).$$

En faisant $\beta \to 1^+$, on obtient

$$n \leq \sigma_2(f). \tag{2.2.16}$$

En procédant de la même façon qu'avant et en utilisant (ii) du Lemme 2.2.1, on obtient

$$n \leq \mu_2(f). \tag{2.2.17}$$

Il est bien connu que

$$\sigma\left(e^Q\right) = \gamma_Q = n. \tag{2.2.18}$$

De (2.2.16) et (2.2.18), on trouve

$$\sigma\left(e^Q\right) \leq \sigma_2(f). \tag{2.2.19}$$

D'autre part, des équations (2.2.2), (2.2.10) et (2.2.11), on obtient

$$\left(\frac{\nu(r,f)}{z_r}\right)^{kl}(1+o(1))^l = e^{Q(z_r)},\ r \notin \cup_{j=1}^k F_j,\ r \to \infty.$$

De cette équation, on déduit que

$$\nu^{kl}(r,f) \leq Cr^{kl}M\left(r, e^Q\right),\ r \notin \cup_{j=1}^k F_j,\ r \to \infty, \tag{2.2.20}$$

avec $C > 0$ est une constante. De l'équation $(2.2.20)$, et Lemme 2.2.2, on sait que pour tout $\beta > 1$, il existe un nombre positif suffisamment grand r_0, tel que

$$\nu^{lk}(r,f) \leq Cr^{lk\beta}M\left(r^\beta, e^Q\right),\ r > r_0. \tag{2.2.21}$$

De l'équation $(2.2.21)$, et Théorème 1.2.2, on obtient

$$\begin{aligned}
\sigma_2(f) &= \limsup_{r\to\infty}\frac{\log\log\nu(r,f)}{\log r} = \limsup_{r\to\infty}\frac{\log\log\nu^{kl}(r,f)}{\log r} \\
&\leq \beta\limsup_{r\to\infty}\frac{\log\log\left(Cr^{lk\beta}M\left(r^\beta, e^Q\right)\right)}{\log r^\beta} \\
&= \beta\limsup_{r\to\infty}\frac{\log\log M\left(r, e^Q\right)}{\log r} = \beta\sigma\left(e^Q\right),
\end{aligned}$$

donc

$$\sigma_2(f) \leq \beta\sigma\left(e^Q\right). \tag{2.2.22}$$

En faisant $\beta \to 1^+$ dans (2.2.22), on obtient

$$\sigma_2(f) \leq \sigma\left(e^Q\right). \tag{2.2.23}$$

Des équations (2.2.18), (2.2.19) et (2.2.23), on déduit

$$\sigma_2(f) = \sigma\left(e^Q\right) = n. \tag{2.2.24}$$

Notons que $\mu_2(f) \leq \sigma_2(f)$, de (2.2.4), (2.2.17), (2.2.18)et $(2.2.24)$, on obtient

$$\sigma_2(f) = \mu_2(f) = n = \gamma_Q. \tag{2.2.25}$$

Si $\mu(f) < \infty$, alors il s'ensuit de (2.2.25)que $\mu_2(f) = \gamma_Q = 0$. Donc Q est constant. Contradiction avec l'hypothèse. Ainsi $\mu(f) = \infty$.

Cas 2. Supposons que

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{\log v(r,f)}{\log r} \leq 1. \tag{2.2.26}$$

De l'équation (2.2.26) et (i) du Lemme 2.2.1, on obtient

$$\mu(f) = \liminf_{r\to\infty} \frac{\log v(r,f)}{\log r} \leq 1 \tag{2.2.27}$$

Des équations (2.2.1), (2.2.2) et Lemma 2.2.3, on en déduit

$$T\left(r, e^Q\right) \leq O\left(T(r,f)\right) + O\left(\log rT(r,f)\right), \ r \notin E.$$

De cette relation et du Lemme 2.2.4, on sait qu'il existe un nombre positif suffisamment grand r tel que

$$T\left(r, e^Q\right) \leq O\left(T(2r,f)\right) + O\left(\log 2r + \log T(2r,f)\right), \ r > r_0.$$

De cette relation et (2.2.2), on obtient

$$1 \leq n = \gamma_Q = \sigma\left(e^Q\right) = \mu\left(e^Q\right) \leq \mu(f).$$

De cette relation et (2.2.27), on trouve que $n = \gamma_Q = \mu(f) = 1$ et $Q(z) = p_1 z + p_0$.
Si $a_j = 0$ $(0 \leq j \leq k-1)$, alors (2.2.2) peut être écrite comme $\left(f^{(k)}\right)^l - a = \left(f^l - a\right) e^{p_1 z + p_0}$. De cette relation et en procédant comme dans le Cas 1 on obtient $(2.2.17)$, et donc $\mu_2(f) \geq 1$, ce qui contredit $\mu(f) = 1$. Ainsi a_0, a_1, ..., a_{k-1} ne sont pas toutes des constantes nulles.
D'où la démonstration complète du Théorème 2.2.2.

Preuve du Théorème 2.2.3

Notons que b_1 et b_2 sont des fonctions entières à petite croissance de f, de (2.2.3)et Lemme 2.2.3 on déduit que

$$T\left(r, e^Q\right) \leq O\left(T\left(r, f\right)\right) + O\left(\log rT\left(r, f\right)\right), \ r \notin E. \tag{2.2.28}$$

De l'équation (2.2.28) et Lemme 2.2.4, on sait qu'il existe un nombre positif suffisamment grand r_0, tel que

$$T\left(r, e^Q\right) \leq O\left(T\left(2r, f\right)\right) + O\left(\log 2r + \log T\left(2r, f\right)\right), \ r > r_0. \tag{2.2.29}$$

De l'équation (2.2.29), on déduit que $\mu\left(e^Q\right) \leq \mu\left(f\right)$. En combinant $\mu\left(e^Q\right) = \sigma\left(e^Q\right) = \gamma_Q \geq 1$ et $\sigma\left(b_i\right) < 1$, $i = 1, 2$, on obtient

$$\mu\left(f\right) > \sigma\left(b_i\right), \ i = 1, 2. \tag{2.2.30}$$

En combinant (2.2.30) et le fait que f est une fonction entière transcendante, on obtient

$$\frac{b_i\left(z_r\right)}{f\left(z_r\right)} \to 0, \ i = 1, 2,$$

quand $|z_r| \to \infty$, et avec $z_r = re^{i\theta(r)}$, tel que $\theta\left(r\right) \in [0, 2\pi)$.

En procédant comme dans la preuve du Théorème 2.2.2, on obtient la preuve complète du Théorème 2.2.3.

Preuve du Corollaire 2.2.1

Si $Q\left(z\right)$ est constant, alors la conclusion (i) du Corollaire 2.2.1 est valide. Maintenant on suppose que $Q\left(z\right)$ n'est pas constant, alors il s'ensuit de (2.2.2) que f est une fonction entière transcendante, et alors les conclusions (i) et (ii) du Théorème 2.2.2 restent vraies. Si (ii) du Théorème 2.2.2 est vraie, on obtient (ii) du Corollaire 2.2.1. Si (i) du Théorème 2.2.2 est vérifiée, alors $\mu\left(f\right) = \infty$ et $\mu_2\left(f\right) = \sigma_2\left(f\right) = \gamma_Q$. En combinant (2.2.2)et la condition que $\mu_2\left(f\right)$ n'est pas un entier positif, on obtient $\gamma_Q = 0$, et donc il existe un nombre complexe fini non nul c tel que $L^l\left[f\right] - a = c\left(f^l - a\right)$. De cette équation (2.2.13), on a

$$\left(\frac{\upsilon\left(r, f\right)}{r}\right)^{kl} \left|1 + o\left(1\right)\right|^l = |c|, \ r \notin \cup_{j=1}^{k} F_j, \ r \to \infty,$$

et donc

$$\frac{\upsilon(r,f)}{r} = O(1), \quad \left(r \notin \cup_{j=1}^{k} F_j, \ r \to \infty\right). \tag{2.2.31}$$

De l'équation (2.2.31) et Lemme 2.2.1, on déduit que $\mu(f) = 1$, ce qui est impossible. D'où la preuve complète du Corollaire 2.2.1.

Preuve du Corollaire 2.2.2

De la condition que $f^l - a$ et $L^l[f] - a$ partagent 0 CM, on obtient $(2.2.2)$. Des équations (2.2.1), (2.2.2)et du Lemme 2.2.3, on trouve

$$T\left(r, e^Q\right) \leq O(T(r,f)) + O(\log rT(r,f)), \ r \notin E.$$

De cette équation et du Lemme 2.2.4 et la condition $\mu(f) < \infty$, on déduit

$$\sigma\left(e^Q\right) = \mu\left(e^Q\right) \leq \mu(f) < \infty.$$

De cette relation, on sait que $Q(z)$ est un polynôme. Si $Q(z)$ est constant, alors la conclusion (i) du Corollaire 2.2.1 est valide. On suppose maintenant que $Q(z)$ n'est pas constant, alors il s'ensuit de (2.2.2)que f est une fonction entière transcendante, et les conclusions (i) et (ii) du Théorème 2.2.2 restent vraies. Si (i) du Théorème 2.2.2 reste vraie, alors on obtient $\mu(f) = \infty$. Cela contredit la supposition $\mu(f) < \infty$.

Remarque 2.2.3 *Dans le Corollaire 2.2.2, le résultat reste vrai si on prend* $\mu_2(f) < \frac{1}{2}$ *avec* $\mu(f) = \infty$. *En effet, de la condition* (i) *du Théorème 2.2.2, on a* $\mu_2(f) = \gamma_Q$, *comme* $\mu_2(f) < \frac{1}{2}$ *et le fait que* γ_Q *est un entier positif, on obtient que* $\gamma_Q = 0$, *et donc* Q *est constant.*

2.2.3 Article 2 : Théorèmes d'unicité des fonctions entières et polynômes différentiels

Résultats Récents

Plusieurs auteurs ont été interessé par le problème d'unicité des fonctions entières, tels que Chen, Zhang et Lü. En 2009, ils ont démontré le résultat suivant.

Théorème A. ([27]) *Soient* Q_j *deux polynômes avec* $\deg Q_j \geq 1\,(j = 1, 2)$, P *une fonction entière, et soit* k *un entier positif. Si* f *est une solution non constante de l'équation différentielle*

$$\frac{f^{(k)} - Q_1}{f - Q_2} = e^P,$$

alors $\sigma_2(f) = \sigma\left(e^P\right)$.

Dans [70], J. Wang et X. M. Li ont démontré le résultat suivant.

Théorème B. ([70]) *Si* f *est une solution non constante de l'équation différentielle*

$$f^{(k)} - b_1 = (f - b_2)\, e^Q,$$

avec b_1 *et* b_2 *sont des fonctions entières telles que* $\sigma(b_j) < 1\ (j = 1, 2)$, $k \geq 1$ *est un entier, et* Q *est un polynôme, alors* $\mu_2(f) = \sigma_2(f) = \gamma_Q$.

Nos contributions

Théorème 2.2.4 *([11]) Soient* Q_i *deux polynômes avec* $\deg Q_i \geq 1\,(i = 1, 2)$, P *est une fonction entière, et soit* k *un entier positif. Si* f *est une solution non constante de l'équation différentielle*

$$\frac{L^l[f] - Q_1}{f^l - Q_2} = e^P, \tag{2.2.32}$$

avec $l \geq 1$ *est un entier. Alors* $\sigma_2(f) = \sigma\left(e^P\right)$.

Corollaire 2.2.3 *([11]) Soient* P *et* Q *deux polynômes avec* $\deg Q \geq 1$. *Si* f *est une solution non constante de l'équation différentielle (2.2.32) telle que* $\sigma_2(f)$ *n'est pas un entier positif, avec* $L[f]$ *est un polynôme différentiel défini par (2.2.1), alors* f *et* $L[f]$ *vérifient* $L^l[f] - Q = c\left(f^l - Q\right)$, *avec* $c\,(\neq 0)$ *une constante complexe finie.*

Corollaire 2.2.4 *([11]) Soit f une fonction entière telle que $\sigma(f) < \infty$, et soit Q un polynôme avec* $\deg Q \geq 1$. *Si $f^l - Q$ et $L^l[f] - Q$ partagent* 0 *CM, alors f et $L[f]$ vérifient $L^l[f] - Q = c\left(f^l - Q\right)$, avec $c(\neq 0)$ est une constante complexe finie.*

Théorème 2.2.5 *([11]) Soit P un polynôme non constant, et soient $b_i(z)\,(i = 1, 2)$ des fonctions entières, vérifiant $\sigma(b_i) < 1$. Si f est une solution non constante de l'équation différentielle*

$$L^l[f] - b_1 = \left(f^l - b_2\right) e^P, \tag{2.2.33}$$

avec $l \geq 1$ est un entier. Alors $\sigma_2(f) = \gamma_P$.

Preuves des Théorèmes

Preuve du Théorème 2.2.4

Cas 1. Supposons que P est un polynôme. Supposons que la solution f de l'equation (2.2.32) est polynômiale, alors de l'équation $(2.2.32)$, on a $e^P \equiv c$ est une constante. Alors $\sigma_2(f) = \sigma\left(e^P\right) = 0$, et on remarque facilement que la conclusion du Théorème 2.2.4 reste valide. Maintenant, on suppose que f est une fonction entière transcendante et considèrons deux cas en se référant à $\sigma(f)$.

Cas 1.1. Supposons que

$$\sigma(f) = +\infty. \tag{2.2.34}$$

Soit

$$P(z) = p_n z^n + \cdots + p_1 z + p_0, \tag{2.2.35}$$

avec $p_n(\neq 0), \cdots, p_1$, et p_0 sont des nombres complexes. Des équations (2.2.32) et (2.2.34), on remarque que P est un polynôme non constant. Il s'ensuit de (2.2.35) que $\lim\limits_{|z|\to+\infty} \frac{|P(z)|}{|p_n z^n|} = 1$, donc il existe un nombre positif suffisamment grand r_0, tel que

$$\frac{|P(z)|}{|p_n z^n|} > \frac{1}{e}, \quad |z| > r_0. \tag{2.2.36}$$

Des équations (2.2.32) et $(2.2.36)$, on déduit que

$$\log|p_n| + n\log|z| - 1 < \log|P(z)| = \log\left|\log e^{P(z)}\right|$$

$$\leq \left|\log\log e^{P(z)}\right| = \left|\log\log \frac{L^l[f]-Q_1}{f^l-Q_2}\right| \quad (|z|>r_0)\,. \tag{2.2.37}$$

Sachant que f est une fonction entière transcendante, on a

$$M(r,f)\to\infty, \text{ as } r\to+\infty. \tag{2.2.38}$$

Soit

$$M(r,f) = |f(z_r)|\,, \tag{2.2.39}$$

avec $z_r = re^{i\theta(r)}$, et $\theta(r)\in[0,2\pi)$. De l'équation (2.2.39) et du Théorème 1.2.3, on remarque qu'il existe un sous ensemble $F_j\subset(1,\infty)\,(1\leq j\leq k)$ avec une mesure logarithmique finie, i.e., $\int_{F_j}\frac{dt}{t}<\infty$, tel que pour un point $z_r = re^{i\theta(r)}$ $(\theta(r)\in[0,2\pi))$ satisfaisant $|z_r| = r\notin F_j$ et $M(r,f) = |f(z_r)|$, on a

$$\frac{f^{(j)}(z_r)}{f(z_r)} = \left(\frac{\nu(r,f)}{z_r}\right)^j(1+o(1)) \quad (1\leq j\leq k,\ r\notin F_j,\ r\to+\infty)\,. \tag{2.2.40}$$

Comme f est une fonction entière transcendante, et $Q_i\,(i=1,2)$ sont des polynômes, alors on remarque que

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{|Q_i(z_r)|}{|f^l(z_r)|} = \lim_{r\to+\infty}\frac{|Q_i(z_r)|}{M^l(r,f)} = 0,\ i=1,2. \tag{2.2.41}$$

On peut écrire

$$\frac{L^l[f]-Q_1}{f^l-Q_2} = \frac{\frac{L^l[f]}{f^l}-\frac{Q_1}{f^l}}{1-\frac{Q_2}{f^l}}. \tag{2.2.42}$$

En utilisant (2.2.32) et (2.2.38) $-$ (2.2.42), on trouve

$$\frac{L^l[f(z_r)]-Q_1}{f^l(z_r)-Q_2} = \left[\left(\frac{\nu(r,f)}{z_r}\right)^k(1+o(1))\right]^l, \left(r\notin\bigcup_{j=1}^k F_j,\ r\to+\infty\right), \tag{2.2.43}$$

De l'équation (2.2.43), on a

$$\left|\log\left(\frac{L^l[f(z_r)]-Q_1}{f^l(z_r)-Q_2}\right)\right| = \left|\log\left|\left(\frac{L^l[f(z_r)]-Q_1}{f^l(z_r)-Q_2}\right)\right| + i\arg\left(\frac{L^l[f(z_r)]-Q_1}{f^l(z_r)-Q_2}\right)\right|$$
$$\leq |kl(\log\nu(r,f)-\log r)+O(1)+2\pi|$$

$$\leq kl(\log\nu(r,f)+\log r)+O(1) \quad \left(r\notin\bigcup_{j=1}^k F_j\right). \tag{2.2.44}$$

En utilisant (2.2.37) et (2.2.44) , on déduit

$$\log|p_n| + n\log|z_r| - 1 \leq \left|\log\log\frac{L^l[f(z_r)] - Q_1}{f^l(z_r) - Q_2}\right|$$

$$= \left|\log\left|\log\frac{L^l[f(z_r)] - Q_1}{f^l(z_r) - Q_2}\right| + i\arg\left(\log\frac{L^l[f(z_r)] - Q_1}{f^l(z_r) - Q_2}\right)\right|$$

$$\leq \left|\log\left|\log\frac{L^l[f(z_r)] - Q_1}{f^l(z_r) - Q_2}\right|\right| + 2\pi$$

$$\leq \log\log\nu(r,f) + \log\log r + O(1),\ \left(r \notin \bigcup_{j=1}^{k} F_j\right) \tag{2.2.45}$$

De l'équation (2.2.45) et Lemme 2.2.2 et $|z_r| = r$, on remarque que pour tout $\alpha > 1$, il existe un nombre positif suffisamment grand r_1, tel que

$$\log|p_n| + n\log r - 1 \leq \log\log\nu(r^\alpha, f) + \log\log r^\alpha + O(1),\ r > r_1. \tag{2.2.46}$$

De l'équation (2.2.46) et Théorème 1.2.2, on déduit

$$\frac{n}{\alpha} \leq \limsup_{r^\alpha\to+\infty}\frac{\log\log\nu(r^\alpha, f)}{\log r^\alpha} = \limsup_{r\to+\infty}\frac{\log\log\nu(r,f)}{\log r} = \sigma_2(f). \tag{2.2.47}$$

En faisant $\alpha \to 1^+$, on obtient

$$n \leq \sigma_2(f). \tag{2.2.48}$$

De l'équation (2.2.35) , on trouve

$$\sigma\left(e^P\right) = \gamma_P = n. \tag{2.2.49}$$

Des équations (2.2.48) et (2.2.49) , on trouve

$$\sigma\left(e^P\right) \leq \sigma_2(f). \tag{2.2.50}$$

D'autre part, des relations (2.2.32) et (2.2.43) , on a

$$\left[\left(\frac{\nu(r,f)}{z_r}\right)^k(1 + o(1))\right]^l = e^{P(z_r)},\ r \notin \bigcup_{j=1}^{k} F_j,\ r \to +\infty. \tag{2.2.51}$$

De l'équation (2.2.51) on déduit

$$\nu^{kl}(r,f) \leq Ar^{kl}M\left(r, e^P\right),\ r \notin \bigcup_{j=1}^{k} F_j,\ r \to +\infty, \tag{2.2.52}$$

avec $A > 0$ est une constante. De l'équation (2.2.52) et Lemme 2.2.2, on remarque que $\alpha > 1$, il existe un nombre positif suffisamment grand r_1, tel que

$$\nu^{kl}(r, f) \leq Ar^{kl\alpha} M\left(r^{\alpha}, e^{P}\right), \ r > r_1. \tag{2.2.53}$$

De l'équation (2.2.53) et Théorème 1.2.2, on obtient

$$\begin{aligned}\sigma_2(f) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log\log \nu(r, f)}{\log r} &= \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log\log \nu^{kl}(r, f)}{\log r} \\ &\leq \alpha \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log\log\left(Ar^{kl\alpha} M\left(r^{\alpha}, e^{P}\right)\right)}{\log r^{\alpha}} \\ &= \alpha \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log\log M\left(r, e^{P}\right)}{\log r} = \alpha\sigma\left(e^{P}\right),\end{aligned}$$

donc

$$\sigma_2(f) \leq \alpha\sigma\left(e^{P}\right). \tag{2.2.54}$$

En faisant $\alpha \to 1^{+}$ sur les deux membres de l'inégalité (2.2.54), on obtient

$$\sigma_2(f) \leq \sigma\left(e^{P}\right). \tag{2.2.55}$$

Des équations (2.2.49), (2.2.50) et (2.2.55), on déduit

$$\sigma_2(f) = \sigma\left(e^{P}\right) = n.$$

Cas 1.2. Supposons que

$$\sigma(f) < \infty.$$

De la définition de l'hyper-order, on obtient $\sigma_2(f) = 0$. D'autre part, de (2.2.51) et Théorème 1.2.1, on déduit

$$\begin{aligned}|P| = \left|\log e^{P}\right| &= \left|\log\left[\left(\frac{\nu(r, f)}{z_r}\right)^{k}(1 + o(1))\right]^{l}\right| \\ &\leq O(\log r), \ r \notin \bigcup_{j=1}^{k} F_j, \ r \to +\infty. \end{aligned} \tag{2.2.56}$$

Comme P est un polynôme, alors de (2.2.56) on obtient que P est constant. Donc, on obtient $\sigma_2(f) = \sigma\left(e^{P}\right) = 0$.

Cas 2. Supposons que P est une fonction entière transcendante, alors

$$\sigma\left(e^{P}\right)=\infty,$$

et f est aussi une fonction entière transcendante, alors (2.2.55) reste vraie. D'autre part, soit $\left|e^{P(z_r)}\right| = M\left(r, e^{P(z_r)}\right)$, de la discussion ci-dessus, dans le cercle $|z| = r \notin \bigcup_{j=1}^{k} F_j$, on obtient

$$e^{P(z_r)} = \left[\left(\frac{\nu(r,f)}{z_r}\right)^{k}(1+o(1))\right]^{l},\ r \to +\infty$$

et

$$\limsup_{r\to+\infty}\frac{\log\log M\left(r,e^{P}\right)}{\log r} \leq \limsup_{r\to+\infty}\frac{\log\log \nu(r,f)}{\log r}$$

c'est à dire $\sigma\left(e^{P}\right) \leq \sigma_2(f)$, de ceci et (2.2.55), on trouve la conclusion du Théorème 2.2.4. Donc, Théorème 2.2.4 est complètement démontré.

Preuve du Théorème 2.2.5

Notons que b_1 et b_2 sont des fonctions entières, de l'équation (2.2.33) et Lemme 2.2.3, on déduit

$$T\left(r,e^{P}\right) \leq O(T(r,f)) + O(\log rT(r,f))$$

$$+O\left(r^{\max\{\sigma(b_1),\sigma(b_2)\}+\varepsilon}\right) + O(1),\ r \notin E_1, \tag{2.2.57}$$

avec ε est un nombre positif arbiraire, et E_1 est un ensemble de mesure linéaire finie. De l'équation (2.2.57) et Lemme 2.2.4, on remarque qu'il existe un nombre suffisamment grand r_2, tel que

$$T\left(r,e^{P}\right) \leq O(T(2r,f)) + O(\log 2r + \log T(2r,f))$$

$$+O\left((2r)^{\max\{\sigma(b_1),\sigma(b_2)\}+\varepsilon}\right) + O(1). \tag{2.2.58}$$

De l'équation (2.2.58) et alors la condition $\max\{\sigma(b_1),\ \sigma(b_2)\} < 1$, on déduit $\mu\left(e^{P}\right) \leq \mu(f)$. Combinons $\sigma\left(e^{P}\right) = \mu\left(e^{P}\right) = \gamma_P \geq 1$ et $\sigma(b_i) < 1$ $(i = 1, 2)$ on trouve

$$\mu(f) > \sigma(b_i),\ i = 1, 2. \tag{2.2.59}$$

Combinons $(2.2.38)$, $(2.2.39)$, $(2.2.59)$ et le fait que f est une fonction entière transcendante

$$\lim_{|z_r|\to+\infty} \frac{|b_i(z_r)|}{|f^l(z_r)|} = 0,\ \ i = 1, 2$$

et avec $z_r = re^{i\theta(r)}$, tel que $\theta(r) \in [0, 2\pi)$. En procédant comme dans la preuve du Théorème 2.2.4, on obtient la preuve du Théorème 2.2.5.

Preuve du Corollaire 2.2.4

On suppose que $P(z)$ est un polynôme, alors il s'ensuit de l'équation (2.2.32) que f est une fonction entière non constante, et alors la conclusion du Théorème 2.2.4 est vraie. Alors $\sigma_2(f) = \gamma_P$. Combinons (2.2.32) et la condition que $\sigma_2(f)$ n'est pas un entier positif on obtient $\gamma_P = 0$, et donc il existe un nombre complexe fini non nul c tel que $L^l[f] - Q = c(f - Q)$.

Preuve du Corollaire 2.2.5

De la condition que $f^l - Q$ et $L^l[f] - Q$ partagent 0 CM, on a $(2.2.32)$. De l'équation (2.2.32), et Lemme 2.2.3, on déduit

$$T\left(r, e^P\right) \leq O\left(T(r, f)\right) + O\left(\log rT(r, f)\right) + O(1),\ \ r \notin E_1.$$

De cela et la condition $\sigma(f) < \infty$, on déduit

$$\sigma\left(e^P\right) \leq \sigma(f) < \infty.$$

De cela on remarque que $P(z)$ est un polynôme. Du Théorème 2.2.4 et similaire au Cas 1.2, on trouve $\sigma_2(f) = \sigma\left(e^P\right) = \gamma_P = 0$, et donc P est constant.

2.2.4 Article 3 : Sur la conjecture de Brück et les polynômes différentiels

Résultats Récents

En 2008, X. M. Li et C. C. Gao ont amélioré la Conjecture de Brück pour les polynômes et ont démontré le résultat suivant.

Théorème B. ([54]) *Soient Q_1 et Q_2 deux polynômes non nuls, et soit P un polynôme. Si f est une solution non constante de l'équation*

$$f^{(k)} - Q_1 = (f - Q_2)\, e^P,$$

alors $\sigma_2(f) = \deg P$, avec $\deg P$ est le degré du polynôme P.

En [59], Zhiqiang Mao a démontré le Théorème suivant.

Théorème C. *Soit $P(z)$ un polynôme, $A_k(z)(\neq 0), ..., A_0(z)$ des polynômes, et f une fonction entière d'ordre $\sigma(f) > 1 + \max\limits_{0\leq j\leq k-1}\left\{\frac{\deg A_j - \deg A_k}{k-j}, 0\right\}$ et $\sigma_2(f) < \frac{1}{2}$. Si f et $L_1(f) = A_k f^{(k)} + ... + A_1 f' + A_0 f$ partagent P CM, alors*

$$\frac{L_1(f) - P(z)}{f(z) - P(z)} = c,$$

pour une constante $c \neq 0$, k un entier positif.

Nos Contributions

Considerons le polynôme différentiel de f

$$L[f] = a_k(z)\, f^{(k)} + a_{k-1}(z)\, f^{(k-1)} + ... + a_1(z)\, f' + a_0(z)\, f, \tag{2.2.60}$$

$a_k(z)(\neq 0), a_{k-1}(z), ..., a_1(z)$ et $a_0(z)$ sont des polynômes.

Théorème 2.2.6 (*[12]*) *Soient Q_1 et Q_2 deux polynômes non nuls. Si f est une solution entière non constante de l'équation*

$$L[f] - Q_1 = (f - Q_2)\, e^P, \tag{2.2.61}$$

vérifiant

$$\begin{cases} \sigma(f) > 1 + \max\limits_{0\leq j\leq k-1}\left\{\frac{\deg a_j - \deg a_k}{k-j}, 0\right\}, & \text{si } P \text{ est une fonction entière transcendante,} \\ \sigma(f) > \deg P + \max\limits_{0\leq j\leq k-1}\left\{\frac{\deg a_j - \deg a_k}{k-j}, 0\right\}, & \text{si } P \text{ est un polynôme.} \end{cases}$$

Avec $L[f]$ est défini par la relation (2.2.60). Alors $\sigma_2(f) = \mu_2(f) = \sigma\left(e^P\right)$.

Corollaire 2.2.5 *([12]) Soit P un polynôme, et soit Q un polynôme non nul. Si f est une solution entière non constante de l'équation*

$$L[f] - Q = (f - Q)\, e^{P}, \tag{2.2.62}$$

telle que $\sigma(f) > \deg P + \max\limits_{0 \leq j \leq k-1} \left\{ \frac{\deg a_j - \deg a_k}{k-j}, 0 \right\}$ et $\sigma_2(f)$ n'est pas un entier positif, avec $L[f]$ est défini par (2.2.60), alors P doit être constant.

Corollaire 2.2.6 *([12]) Soit f une fonction entière non constante telle que $\sigma(f) > \deg P + \max\limits_{0 \leq j \leq k-1} \left\{ \frac{\deg a_j - \deg a_k}{k-j}, 0 \right\}$ et $\sigma_2(f) < 1$, et soit Q un polynôme non nul. Si f est une solution entière non constante de l'équation différetielle (2.2.62), alors P doit être constant.*

Corollaire 2.2.7 *([12]) Soit P un polynôme, et soit $\alpha(\neq 0)$ un nombre complexe fini. Si f est une solution entière d'une équation différentielle*

$$L[f] - \alpha = (f - \alpha)\, e^{P},$$

telle que $\sigma(f) > \deg P + \max\limits_{0 \leq j \leq k-1} \left\{ \frac{\deg a_j - \deg a_k}{k-j}, 0 \right\}$ et $\sigma_2(f) < \frac{1}{2}$, alors P doit être constant.

Considerons le polynôme différentiel de f

$$\tilde{L}[f] = a_k(z)\, f^{(k)} + a_{k-1}(z)\, f^{(k-1)} + ... + a_1(z)\, f^{'} + a_0(z)\, f + \beta, \tag{2.2.63}$$

avec k est un nombre positif, $a_k(z), a_{k-1}(z), ..., a_1(z)$, et $a_0(z)$ sont des polynômes, β est une fonction entière vérifiant $\sigma(\beta) < \mu(f)$.

Théorème 2.2.7 *([12]) Soit P un polynôme non constant, et soient $\alpha_i(z)\,(i=1,2)$ des fonctions entières, telles que $\sigma(\alpha_i)<\mu(f)$. Si f est une solution entière non constante de l'équation différentielle*

$$\tilde{L}[f]-\alpha_1=(f-\alpha_2)\,e^{P(z)}, \tag{2.2.64}$$

vérifiant $\sigma(f)>\deg P+\max\limits_{0\leq j\leq k-1}\left\{\frac{\deg a_j-\deg a_k}{k-j},0\right\}$; avec $\tilde{L}[f]$ est défini par (2.2.63). Alors $\mu_2(f)=\sigma_2(f)=\deg P$.

Corollaire 2.2.8 *([12]) Soit P un polynôme, et soient $\alpha_i(z)\,(i=1,2)$ sont des fonctions entières, telles que $\sigma(\alpha_i)<\mu(f)$. Si f est une solution entière non constante de l'équation différentielle (2.2.64) vérifiant $\sigma(f)>\deg P+\max\limits_{0\leq j\leq k-1}\left\{\frac{\deg a_j-\deg a_k}{k-j},0\right\}$ et tel que $\sigma_2(f)$ n'est pas un entier positif ou bien $\sigma_2(f)<\frac{1}{2}$, alors P doit être constant.*

Lemmes préliminaires

Lemme 2.2.5 *([59])Soit f une fonction entière transcendante et soit $E\subset[1,\infty)$ un ensemble de mesure logarithmique finie. Alors il existe $\left\{z_n=r_ne^{i\theta_n}\right\}$ tel que $|f(z_n)|=M(r_n,f)$, $\theta_n\in[0,2\pi)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\theta_n=\theta_0\in[0,2\pi), r_n\notin E$ et*

(i) Si $0<\sigma(f)<\infty$, alors pour tout $\varepsilon>0$ donné et une suite suffisamment large r_n, $r_n^{\sigma(f)-\varepsilon}<\nu(r_n,f)<r_n^{\sigma(f)+\varepsilon}$;

(ii) Si $\sigma(f)=\infty$, alors pour toute constante large $M>0$ et une suite suffisamment large r_n, $\nu(r_n,f)>r_n^M$.

Lemme 2.2.6 *([52]) Soit $P(z)=b_nz^n+b_{n-1}z^{n-1}+...+b_0$ avec $b_n\neq0$ un polynôme. Alors, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $r_0>0$ tel que pour tout $r=|z|>r_0$ on a les inégalités*

$$(1-\varepsilon)|p_n|\,r^n\leq|P(z)|\leq(1+\varepsilon)|p_n|\,r^n.$$

Lemme 2.2.7 *([69]) Soit f une fonction entière avec $\sigma(f)<+\infty$. Alors pour $\varepsilon>0$ donné, il existe un ensemble E_2 avec $\overline{\log dens E_2}>0$, tel que pour tout $r\in E_2$, on a*

$$M(r,f)\geq\exp\left\{r^{\sigma(f)-\varepsilon}\right\}.$$

Preuves des Théorèmes

Preuve du Théorème 2.2.6

Supposons que f est un polynôme non constant, cela contredit l'hypothèse. Alors f est une fonction entière transcendante. On discute les deux cas suivants.

Cas 1. Supposons que P est un polynôme.

Cas 1.1. Supposons que

$$\sigma(f) < +\infty, \tag{2.2.65}$$

alors $\sigma_2(f) = 0$. L'équation (2.2.61) peut être écrite comme suit

$$a_k \frac{f^{(k)}}{f} + ... + a_1 \frac{f'}{f} + a_0 - \frac{B}{f} = e^P; \text{ avec } B = Q_1 - Q_2 e^P. \tag{2.2.66}$$

Du Théorème 1.2.3, on voit qu'il existe un sous ensemble $E_1 \subset (1, \infty)$ de mesure logarithmique finie, tel que pour un point $z = re^{i\theta(r)}$ $(\theta(r) \in [0, 2\pi))$ et $M(r, f) = |f(z)|$, on a

$$\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)} = \left(\frac{\nu(r, f)}{z}\right)^j (1 + o(1)), \ 1 \leq j \leq k. \tag{2.2.67}$$

De l'équation (2.2.66) et (2.2.67), on a

$$a_k \left(\frac{\nu(r, f)}{z}\right)^k (1 + \circ(1)) + ... + a_1 \left(\frac{\nu(r, f)}{z}\right)(1 + o(1)) + a_0 - \frac{B}{f} = e^P,$$

ce qui est équivalent à

$$\frac{a_k}{z^k}(1 + o(1)) \left[(\nu(r, f))^k + \sum_{i=1}^{k} \frac{a_{k-i}}{a_k} z^i (\nu(r, f))^{k-i} (1 + o(1))\right] - \frac{B}{f} = e^P. \tag{2.2.68}$$

Du Lemme 2.2.6, il existe $z_n = r_n e^{i\theta_n}$ avec $|f(z_n)| = M(r_n, f)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \theta_n = \theta_0$, $r_n \notin [0, 1] \cup E_1$, tels que pour tout $\varepsilon \left(0 < \varepsilon < \min\limits_{1 \leq i \leq k} \frac{i\left(\sigma(f) - \deg P - \frac{d_{k-i}}{i}\right)}{3k-i}\right)$ donné, avec $d_{k-i} = \deg a_{k-i} - \deg a_k$, on a

$$r_n^{\sigma(f)-\varepsilon} < \nu(r_n, f) < r_n^{\sigma(f)+\varepsilon}. \tag{2.2.69}$$

Sachant que f est une fonction entière transcendante, on a $M(r_n, f) = |f(z_n)|$, et de l'hypothèse et du Lemme 2.2.8, on a pour tout $0 < \varepsilon < \frac{\deg P - \sigma(f)}{2}$, et $r_n \in E = E_2 - ([0, 1] \cup E_1)$

with $\overline{\log dens E} > 0$, on trouve

$$\left|\frac{B(z_n)}{f(z_n)}\right| = \frac{|B(z_n)|}{M(r_n, f)} \leq \frac{\exp\left\{r_n^{\deg P+\varepsilon}\right\}}{\exp\left\{r_n^{\deg P-\varepsilon}\right\}} = \exp\left\{r_n^{\deg P-\sigma(f)+2\varepsilon}\right\} \to 0,\ r_n \to \infty. \tag{2.2.70}$$

Soit $a_i(z) = \sum_{j=0}^{l_i} c_{ij} z^j$, avec $l_i = \deg a_i,\ i = 0, ..., k$. Alors, du Lemme 2.2.7 et $(2.2.69)$, on trouve pour tout $1 \leq i \leq k$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_{k-i}}{a_k} z_n^i (\nu(r_n, f))^{k-i} (1 + o(1))\right| &\leq M.\frac{\left|c_{k-i,l_{k-i}}\right| r_n^{l_{k-i}}}{\left|c_{k,l_k}\right| r_n^{l_k}}.r_n^i.r_n^{(\sigma(f)+\varepsilon)(k-i)} \\
&= M.\frac{\left|c_{k-i,l_{k-i}}\right|}{\left|c_{k,l_k}\right|} r^{d_{k-i}+i+(k-i)(\sigma(f)+\varepsilon)},\ \text{avec } d_{k-i} = l_{k-i} - l_k \\
&\leq M.\frac{\left|c_{k-i,l_{k-i}}\right|}{\left|c_{k,l_k}\right|} r^{k\sigma(f)+i\left(\frac{d_{k-i}}{i}+\deg P-\sigma(f)\right)+(k-i)\varepsilon},
\end{aligned}$$

avec $M > 0$ est une constante. Comme $i\left(\frac{d_{k-i}}{i} + \deg P - \sigma(f)\right) + (k-i)\varepsilon < -2k\varepsilon < 0$, on obtient

$$\frac{a_{k-i}}{a_k} z_n^i (\nu(r_n, f))^{k-i} (1 + o(1)) < M\frac{\left|c_{k-i,l_{k-i}}\right|}{\left|c_{k,l_k}\right|} r^{k(\sigma(f)-2\varepsilon)}. \tag{2.2.71}$$

Des relations $(2.2.68)$, $(2.2.70)$ et $(2.2.71)$, on trouve

$$a_k \left(\frac{\nu(r_n, f)}{r_n}\right)^k (1 + o(1)) = e^{P(z_n)}.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
|P(z_n)| &= \left|\log e^{P(z_n)}\right| = \left|\log a_k \left(\frac{\nu(r_n, f)}{r_n}\right)^k (1 + o(1))\right| \\
&= \left|\log\left|a_k \left(\frac{\nu(r_n, f)}{r_n}\right)^k (1 + o(1))\right| + i\arg\left(a_k \left(\frac{\nu(r_n, f)}{r_n}\right)^k (1 + o(1))\right)\right| \\
&\leq |\log|a_k|| + k\log\nu(r_n, f) + k\log r_n + O(1) \\
&\leq O(\log r_n).
\end{aligned}$$

Alors P doit être constant, donc $\sigma_2(f) = \sigma\left(e^P\right) = 0$.

Cas 1.2. Supposons que

$$\sigma(f) = +\infty. \tag{2.2.72}$$

Posons $F(z) = f(z) - Q_2$. Alors de l'équation $(2.2.72)$ et les hypothèses, on a

$$\sigma(F) = +\infty,\ \sigma_2(F) = \sigma_2(f) \text{ and } \sigma(F) > \deg P + \max\left\{\frac{\deg a_j - \deg a_k}{k-j}, 0\right\}. \quad (2.2.73)$$

De cela et l'équation $(2.2.61)$, on obtient

$$a_k \frac{F^{(k)}}{F} + ... + a_1 \frac{F'}{F} + a_0 + \frac{\alpha(z)}{f} = e^P,\ \text{avec } \alpha(z) = a_k Q_2 + ... + a_0 Q_2 - Q_1. \quad (2.2.74)$$

Du Théorème 1.2.3, on remarque qu'il existe un ensemble $E_1 \subset [1, \infty)$ tel que

$$\frac{F^{(j)}}{F} = \left(\frac{\nu(r,F)}{z}\right)^j (1 + o(1)),\ j = 1, ..., k. \quad (2.2.75)$$

Comme $\sigma(F) = +\infty$ alors du Lemme 2.2.6 il existe $z_n = r_n e^{i\theta_n}$ avec $|f(z_n)| = M(r_n, f)$, $\lim_{n\to\infty} \theta_n = \theta_0$, $r_n \notin [0,1] \cup E_1$, tel que pour toute constante M_1 et pour un r_n suffisamment grand, on obtient

$$\nu(r, f) \geq r_n^{M_1}. \quad (2.2.76)$$

Sachant que F est une fonction entière transcendante, on a $M(r_n, F) = |F(z_n)|$, alors

$$\left|\frac{\alpha(z_n)}{F(z_n)}\right| \to 0,\ r_n \to \infty. \quad (2.2.77)$$

De l'équation $(2.2.74)$ et $(2.2.75)$, on obtient

$$a_k \left(\frac{\nu(r,F)}{z}\right)^k (1 + o(1)) + ... + a_1 \left(\frac{\nu(r,F)}{z}\right)(1 + o(1)) + a_0 + \frac{\alpha(z)}{F} = e^{P(z)}.$$

De l'équation $(2.2.77)$, on a

$$a_k \left(\frac{\nu(r_n,F)}{z_n}\right)^k (1 + o(1)) = e^{P(z_n)}. \quad (2.2.78)$$

Soit

$$P(z) = p_l z^l + ... + p_1 z + p_0, \quad (2.2.79)$$

avec $p_l (\neq 0), ..., p_1$, et p_0 sont des nombres complexes. Il s'ensuit de l'équation (2.2.78) que $\lim_{|z|\to+\infty} \frac{|P(z)|}{|p_l z^l|} = 1$. De cela, on remarque qu'il existe un nombre suffisamment grand r_0, tel que

$$\frac{|P(z)|}{|p_l z^l|} > \frac{1}{e},\ \ |z| > r_0.$$

De cela on déduit que

$$\log|p_l| + l\log|z_n| - 1 < \log|P(z_n)| = \log\left|\log e^{P(z_n)}\right|$$
$$\leq \left|\log\log e^{P(z)}\right|.$$

En utilisant cela et (2.2.78) , on trouve

$$\begin{aligned} \log|p_l| + l\log|z_n| - 1 &\leq \log|\log|a_k|| + \log\log\nu(r_n, F) + \log\log r_n + O(1) \quad (2.2.80) \\ &= \log\log\nu(r_n, F) + O(\log\log r_n) + O(1). \end{aligned}$$

De cette équation on obtient

$$l \leq \sigma_2(F) = \sigma_2(f). \quad (2.2.81)$$

Il est bien connu que

$$\sigma\left(e^P\right) = \deg P = l. \quad (2.2.82)$$

Des équations (2.2.81) et (2.2.82) on obtient

$$\sigma\left(e^P\right) \leq \sigma_2(f). \quad (2.2.83)$$

D'autre part, de l'équation (2.2.78) et Lemme 2.2.7 on obtient

$$M\left(r_n, e^{P(z_n)}\right) \geq M_2 r_n^{d_k}\left(\frac{\nu(r_n, F)}{r_n}\right)^k,$$

avec $M_2 > 0$ est une constante. De cela on trouve

$$\nu^k(r_n, F) \leq M_2 r_n^{k-d_k} M\left(r_n, e^{P(z_n)}\right).$$

De cette équation, on a

$$\sigma_2(F) = \limsup_{r_n\to\infty}\frac{\log\log\nu(r_n, F)}{\log r_n} = \limsup_{r_n\to\infty}\frac{\log\log\nu^k(r_n, F)}{\log r_n}$$
$$\leq \limsup_{r_n\to\infty}\frac{\log\log\left(M_2 r_n^{k-d_k} M\left(r_n, e^{P(z_n)}\right)\right)}{\log r_n} = \sigma\left(e^P\right),$$

donc

$$\sigma_2(f) \leq \sigma\left(e^P\right). \quad (2.2.84)$$

Des équations (2.2.83) et (2.2.84) , on déduit

$$\sigma_2(f) = \sigma\left(e^P\right).$$

Des équations (2.2.78) , (2.2.80) et en procédant comme ci-dessus, on trouve

$$\log|p_l| + l\log r_n - 1 \leq \log\log\nu(r_n, F) + O(\log\log r_n) + O(1).$$

De cela et Lemme 2.2.1 (ii) , on obtient

$$l \leq \mu_2(F) = \mu_2(f). \tag{2.2.85}$$

D'autre part, notons que $\mu_2(f) \leq \sigma_2(f)$, des relations (2.2.82) , (2.2.84) et (2.2.85) , on trouve

$$\mu_2(f) = \sigma_2(f) = \sigma\left(e^P\right).$$

Cas 2. Supposons que P est une fonction entière transcendante, alors

$$\sigma\left(e^P\right) = \infty,$$

et f est aussi une foncion entière transcendante, donc (2.2.78) et (2.2.84) restent valides. D'autre part, soit $\left|e^{P(z_n)}\right| = M\left(r, e^{P(z_n)}\right)$, de la discussion ci-dessus, dans le cercle $|z_n| = r_n \notin E$ on a

$$e^{P(z_n)} = a_k\left(\frac{\nu(r_n, f)}{z_n}\right)^k (1 + o(1)),\ r_n \to +\infty$$

et

$$\limsup_{r_n\to+\infty}\frac{\log\log M\left(r_n, e^P\right)}{\log r_n} \leq \limsup_{r_n\to+\infty}\frac{\log\log\nu(r_n, f)}{\log r_n}$$

c'est à dire $\sigma\left(e^P\right) \leq \sigma_2(f)$, de cela et (2.2.84) on trouve la conslusion du Théorème 2.2.6. Donc, Théorème 2.2.6 est complètement démontré.

Preuve du Théorème 2.2.7

Des relations (2.2.63) et (2.2.64) , on a

$$\frac{\tilde{L}[f] - \alpha_1}{f - \alpha_2} = \frac{\frac{L[f]}{f} + \frac{\beta}{f} - \frac{\alpha_1}{f}}{1 - \frac{\alpha_2}{f}} \tag{2.2.86}$$

Notons que α_1, α_2, et β sont des fonctions entières vérifiant $\sigma(\alpha_i) < \mu(f)$ $(i = 1, 2)$ et $\sigma(\beta) < \mu(f)$, alors on remarque qu'il existe une suite infinie de points z_n telle que

$$\lim_{r_n \to \infty} \frac{|\alpha_i(z_n)|}{|f(z_n)|} = \lim_{r_n \to \infty} \frac{|\beta(z_n)|}{|f(z_n)|} = 0, \; i = 1, 2. \tag{2.2.87}$$

Des équations (2.2.86), (2.2.87) et en procédant comme dans la preuve du Théorème 2.2.6, on trouve le résultat.

Preuve du Corollaire 2.2.6

En utilisant le Théorème 2.2.6 et les hypothèses du Corollaire 2.2.6, on trouve $\sigma_2(f) = \deg P$. Comme $\sigma_2(f)$ n'est pas un entier positif alors on trouve $\deg P = 0$. D'où P est constant.

Preuve du Corollaire 2.2.7

En utilisant le Théorème 2.2.6 et les hypothèses du Corollaire 2.2.7, on trouve $\sigma_2(f) = \deg P$. Comme $\sigma_2(f) < 1$ alors on obtient $\deg P = 0$. Alors P est constant.

Chapitre 3

Sur les équations différentielles complexes

La théorie de Nevanlinna joue un rôle très important dans l'étude de la croissance et l'oscillation des solutions des équations différentielles linéaires à coefficients fonctions complexes. Des résultats considérables concernant cette théorie ont été obtenus.

Il est connu que toute solution de l'équation différentielle du second ordre

$$f'' + A(z) f' + B(z) f = 0, \text{ où } A(z) \text{ et } B(z) \not\equiv 0, \text{ sont des fonctions entières} \tag{3.0.1}$$

est une fonction entière et si la fonction entière $A(z)$ est transcendante, alors chacune des deux solutions linéairement indépendantes de l'équation (3.0.1) est d'ordre infini [31], [44], p.p167-168. D'autre part, il existe des équations différentielles de la forme (3.0.1) possédant au moins une solution d'ordre fini. Par exemple, la fonction $f(z) = e^{-z}$ vérifie l'équation différentielle $f'' + e^{z} f' + (e^{z} - 1) f = 0$.

Plusieurs mathématiciens ont étudié les solutions de l'équation (3.0.1). Dans [36] G. Gundersen a introduit certaines conditions dans un secteur sur les coefficients $A(z)$ et $B(z)$ de telle façon que chaque solution de l'équation (3.0.1) soit d'ordre infini. Il s'est aussi intéressé dans le même article à l'étude des propriétés des solutions d'ordre fini de l'équation (3.0.1). Plus tard, K.-H. Kwon [51] a démontré un résultat concernant les solutions d'ordre fini de l'équation (3.0.1) en imposant des conditions sur l'ordre des fonctions entières $A(z)$ et $B(z)$. Récemment, certains de ces résultats précédemment cités ont été généralisés pour les équations différentielles linéaires d'ordre supérieur à coefficients fonctions entières. En complétant quelques résultats dus à G. Gundersen [36], S. Hellerstein, J. Miles et J. Rossi [43] pour les équations différentielles de la forme (3.0.1), les auteurs dans [53] ont pu démontrer d'autres résultats concernant le cas où chaque solution de l'équation (3.0.1) est d'ordre infini.

Ces dernières années, les concepts de l'hyper-ordre et l'ordre itératif ont été introduits [50], [51], [76] afin de permettre une étude plus approfonde sur la croissance des fonctions d'ordre infini. Différents résultats concernant l'estimation de l'hyper-ordre ont été réalisés. Par exemple, K.-H. Kwon [51] a donné des estimations sur les bornes inférieures de l'hyper-ordre des solutions de l'équation (3.0.1). D'autre part, Z.-X. Chen [24] dans son étude de l'équation (3.0.1) dans le cas où $A(z)$ et $B(z)$ sont des fonctions méromorphes a pu trouver quelques estimations précises sur l'hyper-ordre des solutions méromorphes de l'équation (3.0.1). Par ailleurs, d'autres chercheurs se sont aussi intéressés à l'ordre des solutions de l'équation (3.0.1) mais dans le cas où les fonctions $A(z)$ et $B(z)$ sont uniquement analytiques dans un certain angle. S. J. Wu [71] a considéré ce cas et a démontré de nombreaux résultats qui lui ont permis par la suite de déduire d'autres résultats concernant les solutions de l'équation (3.0.1), où $A(z)$ et $B(z) \not\equiv 0$ sont des fonctions entières.

Cette partie consiste à étudier la croissance des solutions des équations différentielles linéaires homogènes d'ordre supérieur à coefficients fonctions complexes.

3.1 Article 1 : Propriétés de croissance et oscillation des solutions des équations différentielles d'ordre supérieures

Résultats Récents

Dans cet article, on s'intéresse à l'étude de la croissance et l'oscillation des solutions entières et méromorphes des équations différentielles linéaires homogènes d'ordre supérieure.

On donnera quelques estimations précises sur l'hyper-ordre de ces solutions.

Récemment, P. C. Wu et J. Zhu, J. Long et P.C. Wu ont travaillé sur l'ordre des solutions d'une équation différentielle d'ordre deux et ils ont obtenu les résultats suivant.

Théorème A. ([57], [72]) *Soit $A(z)$ une fonction entière d'ordre fini ayant une valeur de défaut finie, et soit $B(z)$ une fonction entière transcendante avec $\mu(B) < \frac{1}{2}$. Alors toute solution $f \not\equiv 0$ de l'équation* (3.0.1) *est d'ordre infini et vérifie $\sigma_2(f) \geq \mu(B)$.*

Théorème B. ([57], [72]) *Soit $A(z)$ une fonction entière d'ordre fini et ayant une valeur de défaut finie, et soit $B(z) \not\equiv 0$ une fonction entière. Supposons qu'il existe deux constantes $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et, pour tout $\varepsilon > 0$, deux ensembles finis de nombres réels $\{\phi_k\}$ et $\{\theta_k\}$ qui satifsaient $\phi_1 < \theta_1 < \phi_2 < \theta_2 < \cdots < \phi_m < \theta_m < \phi_{m+1} \left(\phi_{m+1} = \phi_1 + 2\pi\right)$ et*

$$\sum_{k=1}^{m} \left(\phi_{k+1} - \theta_k\right) < \varepsilon,$$

tel que

$$|B(z)| \geqslant \exp\left\{(1 + o(1))\, \alpha\, |z|^{\beta}\right\},$$

quand $z \to \infty$ dans $\phi_k \leqslant \arg z \leqslant \theta_k\, (k = 1, 2, \cdots, m)$. Alors toute solution $f \not\equiv 0$ de l'équation (3.0.1) *est d'ordre fini et vérifie $\sigma_2(f) \geq \beta$.*

Dans [72], P. C. Wu et J. Zhu ont démondré le théorème suivant.

Théorème C. *Soit $A(z)$ une fonction méromorphe d'ordre fini ayant une valeur de défaut finie. Supposons que $B(z)$ est une fonction méromorphe vérifiant une des conditions suivantes*

(i) $\lambda\left(\frac{1}{B}\right) < \sigma(B) < \frac{1}{2}$;

(ii) $\lambda\left(\frac{1}{B}\right) < \mu(B) < \frac{1}{2}$;

(iii) $B(z)$ *est transcendante avec $\sigma(B) = 0$ ayant un nombre fini de pôles.*

Alors toute solution $f \not\equiv 0$ de l'équation (3.0.1) *est d'ordre infini.*

Aussi C. Y. Zhang et J. Tu ont amélioré l'hyper-order d'une équation différentielle à coefficients fonctions entières et ont obtenu le théorème suivant.

Théorème D. ([77]) *Soient* $A_j\,(j=0,\cdots,k-1)$ *des fonctions entières. Supposons qu'il existe un* $s\in\{1,\cdots,k-1\}$ *tel que* $\max\{\sigma(A_j): j\neq 0,s\}<\mu(A_0)<\frac{1}{2}$ *et que* $A_s(z)$ *a une valeur de défaut finie, alors toute solution* $f\not\equiv 0$ *de l'équation*

$$f^{(k)}+A_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+A_sf^{(s)}+\cdots+A_1f'+A_0f=0, \tag{3.1.1}$$

vérifie $\mu(A_0)\leqslant\sigma_2(f)\leqslant\max\{\sigma(A_0),\sigma(A_s)\}$.

Nos contributions

Récemment, T. B. Cao et H. X. Yi[21] et d'autres auteurs ont amélioré la croissance des solutions d'une équation différentielle d'ordre deux et d'ordre supérieure. Le but principal de ce papier est d'étendre et d'améliorer les résultats cités ci-dessus pour une équation différentielle d'ordre supérieur.

Théorème 3.1.1 *([14]) Soient* $A_1,\cdots,A_{k-1}$ *des fonctions entières d'ordre fini ayant des valeurs de défaut finies, et soit* A_0 *une fonction entière transcendante telle que* $\mu(A_0)<\frac{1}{2}$. *Alors pour toute solution* $f\not\equiv 0$ *de (3.1.1) est d'ordre infini et on a*

$$\sigma_2(f)\geq\mu(A_0).$$

Corollaire 3.1.1 *([14]) Supposons que* $A_1,\cdots,A_{k-1}$ *sont des fonctions entières d'ordre fini ayant des valeurs de défaut finies et* A_0 *est une fonction entière transcendante avec* $\sigma(A_0)<\frac{1}{2}$, *alors toute solution* $f\not\equiv 0$ *de (3.1.1) est d'ordre infini et on a*

$$\sigma_2(f)=\sigma(A_0).$$

Théorème 3.1.2 *([14]) Soient* $A_1,\cdots,A_{k-1}$ *des fonctions entières vérifiant les hypothèses du Théorème 3.1.1 et* $F\not\equiv 0$ *une fonction entière d'ordre fini. Alors toute solution* $f\not\equiv 0$ *de l'équation*

$$f^{(k)}+A_{k-1}f^{(k-1)}+...+A_0f=F$$

est d'ordre infini et on a

$$\sigma_2(f) \geq \mu(A_0).$$

Théorème 3.1.3 *([14]) Soient $A_1, A_2, \cdots, A_{k-1}$ des fonctions entières d'ordre fini ayant des valeurs de défaut finies, et soit $A_0(z) \not\equiv 0$ une fonction entière. Supposons qu'il existe une constante $\alpha > 0$ et, pour tout $\varepsilon > 0$, deux ensembles finis de nombres réels $\{\phi_k\}$ et $\{\theta_k\}$ qui satisfaient $\phi_1 < \theta_1 < \phi_2 < \theta_2 < \cdots < \phi_m < \theta_m < \phi_{m+1}$ $(\phi_{m+1} = \phi_1 + 2\pi)$ et*

$$\sum_{k=1}^{m} (\phi_{k+1} - \theta_k) < \varepsilon, \tag{3.1.2}$$

tels que

$$|A_0(z)| \geqslant \exp\left\{(1 + o(1))\,\alpha\,|z|^{\sigma(A_0)-\varepsilon}\right\}, \tag{3.1.3}$$

quand $z \to \infty$ dans $\phi_k \leqslant \arg z \leqslant \theta_k\,(k = 1, 2, \cdots, m)$. Alors toute solution $f \not\equiv 0$ de l'équation (3.1.1) est d'ordre infini et on a

$$\sigma_2(f) \geqslant \sigma(A_0).$$

Théorème 3.1.4 *([14]) Soient $A_1, \cdots, A_{k-1}$ des fonctions entières vérifiant les hypothèses du Théorème 3.1.2 et $F \not\equiv 0$ une fonction entière d'ordre fini. Alors toute solution $f \not\equiv 0$ de l'équation*

$$f^{(k)} + A_{k-1} f^{(k-1)} + ... + A_0 f = F$$

est d'ordre infini et on a

$$\sigma_2(f) \geq \sigma(A_0).$$

Théorème 3.1.5 *([14]) Soient $A_1, \cdots, A_{k-1}$ des fonctions méromorphes d'ordre fini ayant des valeurs de défaut finies, et soit A_0 une fonction méromorphe vérifiant*
$\max\left\{\lambda\left(\frac{1}{A_0}\right),\ \sigma(A_j):\ j = 1, 2, ..., k-1\right\} < \sigma(A_0) < \frac{1}{2}$. *Alors toute solution $f \not\equiv 0$ ayant des pôles uniformément bornés de l'équation (3.1.1) est d'ordre infini et pour toute fonction entière $\varphi(z) \neq 0$ vérifiant $\sigma_2(\varphi) < \sigma(A_0)$, on a*

$$\lambda_2\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \bar{\lambda}_2\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \sigma_2(f) = \sigma(A_0), i \in \mathbb{N}.$$

Théorème 3.1.6 *([14]) Soient $A_1, \cdots, A_{k-1}$ des fonctions méromorphes d'ordre fini ayant des valeurs de défaut finies, et soit A_0 une fonction méromorphe vérifiant $\max\left\{\lambda\left(\frac{1}{A_0}\right),\ \sigma(A_j):\ j=1,2,...,k-1\right\} < \mu(A_0) < \frac{1}{2}$. Alors toute solution $f \not\equiv 0$ ayant des pôles uniformément bornés de l'équation (3.1.1) est d'ordre infini et pour toute fonction entière $\varphi(z) \neq 0$ vérifiant $\sigma_2(\varphi) < \sigma(A_0)$, on a*

$$\mu(A_0) \leq \lambda_2\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \bar{\lambda}_2\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \sigma_2(f) \leq \sigma(A_0), i \in \mathbb{N}.$$

Lemmes préliminaires

Lemme 3.1.1 *([37]) Soit $f(z)$ une fonction méromorphe transcendante, et soit $\alpha > 1$ une constante donnée. Alors il existe un ensemble $E_1 \subset (1,\infty)$ de mesure logarithmique et une constante $B > 0$ qui dépend seulement de α et i, j $(0 \leqslant i < j \leqslant k)$, tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin [0,1] \cup E_1$, on a*

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f^{(i)}(z)}\right| \leqslant B\left\{\frac{T(\alpha r, f)}{r}(\log^\alpha r)\log T(\alpha r, f)\right\}^{j-i}.$$

Lemme 3.1.2 *([2]) Soit $g(z)$ une fonction entière $0 \leq \mu(g) < 1$. Alors pour tout $\alpha \in (\mu(g), 1)$, il existe un ensemble $E_2 \subset [0,\infty)$ tel que $\overline{\log dens} E_2 \geqslant 1 - \frac{\mu(g)}{\alpha}$*
$E_2 = \{\ r \in [0,\infty):\ m(r) > M(r)\cos\pi\alpha\}$, $m(r) = \inf\limits_{|z|=r} \log|g(z)|$, $M(r) = \sup\limits_{|z|=r} \log|g(z)|$.

Remarque 3.1.1 *Dans Lemme 3.1.2, ici l'ordre de $g(z)$ est inférieur à $\frac{1}{2}$, alors pour tout $\alpha \in \left(\sigma(g), \frac{1}{2}\right)$, il existe un ensemble $E_3 \subset [0,\infty)$ tel que $\overline{\log dens} E_3 \geqslant 1 - \frac{\sigma(g)}{\alpha}$, avec $E_3 = \{\ r \in [0,\infty):\ m(r) > M(r)\cos\pi\alpha\}$.*

Lemme 3.1.3 *([72]) Soit $g(z)$ une fonction entière avec $0 < \mu(g) < \frac{1}{2}$, et soit $A(z)$ une fonction méromorphe avec $\sigma(A) < +\infty$. Si $A(z)$ a une valeur de défaut finie a d'indice $\delta = \delta(a, A)$, alors pour toute constante donnée $\varepsilon > 0$, il existe une suite $\{R_n\}$ avec $R_n \to +\infty$ $(n \to +\infty)$, tels que les inégalités*

$$\left|g\left(R_n e^{i\varphi}\right)\right| > \exp\left\{R_n^{\mu(g)-\varepsilon}\right\},\ \varphi \in [0, 2\pi)$$

et

$$m\left(F_n\right) =: m\left\{\theta \in [0, 2\pi) : \log\left|A\left(R_n e^{i\theta}\right) - a\right| \leqslant -\frac{\delta}{4} T\left(R_n, A\right)\right\} \geqslant d > 0,$$

sont vraies pour tout n suffisamment grand, avec d est une constante qui dépend seulement de $\sigma(A)$, $\mu(g)$ et δ.

Lemme 3.1.4 *([28]) Soient f une solution méromorphe de l'équation (3.1.1), supposons que tous les A_j ne sont pas constants. Donnons une constante réelle $\gamma > 1$, et notons $T(r) = \sum_{j=0}^{k-1} T(r, A_j)$, on a*

$$\begin{aligned} \log m(r, f) &< T(r)\left\{(\log r)\log T(r)\right\}^{\gamma}, \text{ si } p = 0, \\ \log m(r, f) &< r^{2p+\gamma-1} T(r)\left(\log T(r)\right)^{\gamma}, \text{ si } p > 0, \end{aligned}$$

en dehors d'un ensemble exceptionnel E_p avec $\int_{E_p} t^{p-1} dt < +\infty$.

Remarque 3.1.2 *On note que dans le lemme ci-dessus, $p = 1$ correspond à la mesure euclédienne et $p = 0$ à la mesure logarithmique.*

Lemme 3.1.5 *([37]) Soient f une fonction méromorphe transcendante avec $\sigma(f) = \sigma < +\infty$, $H = \{(k_1, j_1), (k_2, j_2), \cdots, (k_q, j_q)\}$ un ensemble fini des entiers distincts vérifiant $k_i > j_i \geqslant 0$ $(i = 1, \cdots, q)$ et soit $\varepsilon > 0$ une constante donnée. Alors,il existe un ensemble $E_4 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie, tel que pour tout z vérifiant $|z| \notin E_4 \cup [0, 1]$ et pour tout $(k, j) \in H$, on a*

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right| \leqslant |z|^{(k-j)(\sigma-1+\varepsilon)}.$$

Lemme 3.1.6 *([74]) Soit f une fonction méromorphe avec $\sigma(f) = \sigma \geq 0$. Alors il existe un ensemble $E_5 \subset [1, +\infty)$ de mesure logarithmique infinie tel que pour tout $r \in E_5$, on a*

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r} = \sigma, \ r \in E_5.$$

Lemme 3.1.7 *([63]) Soient $H_j \, (j = 0, 1, ..., k-1)$ des fonctions méromorphes d'ordre fini. Si*

$$\limsup_{r \to +\infty} \frac{\max\limits_{1 \leq j \leq k-1} \{\log m(r, H_j)\}}{\log r} = \beta_1,$$

et il existe un ensemble E_6 de mesure logarithmique infinie tel que

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{\log m(r, H_0)}{\log r} = \beta_2 > \beta_1$$

pour tout $r \in E_6$. Alors toute solution méromorphe de l'équation

$$f^{(k)} + H_{k-1} f^{(k-1)} + ... + H_1 f' + H_0 f = 0,$$

satisfait

$$\sigma_2(f) \geq \beta_2.$$

Lemme 3.1.8 *([67]) Soient $A_0, A_1, ..., A_{k-1}, F \not\equiv 0$ des fonctions méromorphes, si f est une solution méromorphe de l'équation*

$$f^{(k)} + A_{k-1} f^{(k-1)} + ... + A_0 f = F,$$

alors on obtient un des cas suivants.

(i) Si $\max\{\sigma(F), \ \sigma(A_j), \ j = 0, 1, 2, ..., k-1\} < \sigma(f) = \sigma \leq \infty$, alors $\sigma(f) = \lambda(f) = \bar{\lambda}(f)$.

(ii) Si $\max\{\sigma(F), \ \sigma(A_j), \ j = 0, 1, 2, ..., k-1\} < \sigma_2(f) = \sigma$, alors $\sigma_2(f) = \lambda_2(f) = \bar{\lambda}_2(f)$.

Preuves des Théorèmes

Preuve du Théorème 3.1.1

Etape 1. On démontrera que toutes les solutions de l'équation (3.1.1) sont d'ordre infini. Supposons que $f(z)$ est n'importe qu'elle solution non triviale de l'équation (3.1.1) d'ordre fini $\sigma(f) = \sigma < \infty$. Soient a_j une valeur de défaut finie de A_j, d'indice $\delta_j = \delta(a_j, A_j)$, $j = 1, 2, \cdots, k-1$. De l'équation (3.1.1), on a

$$|A_0(z)| \leqslant \left| \frac{f^{(k)}}{f} \right| + \sum_{j=1}^{k-1} [|A_j - a_j| + |a_j|] \left| \frac{f^{(j)}}{f} \right|. \tag{3.1.4}$$

D'après Lemme 3.1.4, il existe un ensemble $E_4 \subset (1, \infty)$ avec $m_l(E_4) < \infty$, tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin E_4 \cup [0, 1]$, on a l'inégalité suivante

$$\left| \frac{f^{(i)}(z)}{f(z)} \right| \leqslant |z|^{k\sigma}, \tag{3.1.5}$$

pour $i = 1, 2, \cdots, k$.

Maintenant, considèrons deux cas :

Cas 1. Supposons que $0 < \mu(A_0) < \frac{1}{2}$. En utilisant le Lemme 3.1.3 aux A_j, $j = 1, 2, \cdots, k-1$, on conclut qu'il existe une suite $\{r_n\}$ avec $r_n < r_{n+1}$ et $r_n \to +\infty$, telle que pour tout n, on a

$$m(F_n) =: m\left\{\theta \in [0, 2\pi) : \log\left|A_j\left(r_n e^{i\theta}\right) - a_j\right| \leqslant -\frac{\delta_j}{4} T(r_n, A_j)\right\} \geqslant d > 0, \tag{3.1.6}$$

$$\left|A_0\left(r_n e^{i\varphi}\right)\right| > \exp\left\{r_n^{\frac{1}{2}\mu(A_0)}\right\},\ \varphi \in [0, 2\pi), \tag{3.1.7}$$

valide pour tout n suffisamment grand, avec d une constante qui dépend seulement de $\sigma(A_j)$, $\mu(A_0)$ et δ_j, $j = 1, 2, \cdots, k-1$. Pour tout $n \geqslant n_0$, il existe $\theta_n \in F_n$, tel que pour tout z vérifiant $\arg z = \theta_n$ et $|z| = r_n \notin E_4 \cup [0, R_1]$, (3.1.6) et (3.1.7) restent vraies. Donc en calculant en les points $z_n = r_n e^{i\theta_n}$ avec $r_n \notin E_4 \cup [0, R_1]$, on trouve des équations $(3.1.4)$, $(3.1.5)$, et $(3.1.6)$ que

$$\left|A_0\left(r_n e^{i\theta_n}\right)\right| \leqslant r_n^{k\sigma}\left[1 + \sum_{j=1}^{k-1} \exp\left(-\frac{\delta_j}{4} T(r_n, A_j)\right) + |a_j|\right]. \tag{3.1.8}$$

Donc

$$\exp\left\{r_n^{\frac{1}{2}\mu(A_0)}\right\} < r_n^{k\sigma}\left[1 + \sum_{j=1}^{k-1} \exp\left(-\frac{\delta_j}{4} T(r_n, A_j)\right) + |a_j|\right].$$

Quand n est suffisamment grand, on obtient une contradiction.

Cas 2. Supposons que $\mu(A_0) = 0$. D'après le Lemme 3.1.2, il existe un ensemble $E_2 \subset [1, \infty)$ avec $\overline{\log dens} E_2 = 1$ tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \in E_2$, on a

$$\log|A_0(z)| > \frac{\sqrt{2}}{2} \log M(r, A_0), \tag{3.1.9}$$

avec $M(r, A_0) = \max_{|z|=r} |A_0(z)|$. Il s'ensuit de la Remarque 3.1.1, qu'il existe une suite r_n telle que (3.1.6) et (3.1.9) sont vraies. Des équations (3.1.4), (3.1.5) et (3.1.6), on peut obtenir (3.1.8). Donc, des relations (3.1.8) et (3.1.9), on trouve

$$(M(r, A_0))^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \leqslant r_n^{k\sigma} \left[1 + \sum_{j=1}^{k-1} \exp\left(-\frac{\delta_j}{4} T(r_n, A_j) \right) + |a_j| \right], \ n \geq n_0. \tag{3.1.10}$$

Du fait que $A_0(z)$ est une fonction entière transcendante, on a

$$\liminf_{r_n \to +\infty} \frac{\log M(r_n, A_0)}{\log r_n} = +\infty. \tag{3.1.11}$$

Des équations (3.1.10) et (3.1.11), on obtient une contradiction. Donc f est une fonction d'ordre infini.

Etape 2. On démontrera que $\sigma_2(f) \geq \mu(A_0)$. Supposons que $f(z)$ est une solution non triviale de l'équation (3.1.1). Soit a_j une valeur de défaut finie de A_j, d'indice $\delta_j = \delta(a_j, A_j)$, $j = 1, 2, \cdots, k-1$. De l'équation (3.1.1), on obtient l'inégalité (3.1.4). D'après le Lemme 3.1.1, il existe un ensemble $E_1 \subset (1, \infty)$ avec $m_l(E_1) < \infty$ et une constante $B > 0$, tels que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin E_1 \cup [0, 1]$, on a l'inégalité suivante

$$\left| \frac{f^{(j)}(z)}{f(z)} \right| \leqslant B [T(2r, f)]^{2k}, \tag{3.1.12}$$

pour $j = 1, 2, \cdots, k$.

Maintenant on considère deux cas.

Cas 1. $0 < \mu(A_0) < \frac{1}{2}$. En utilisant le Lemme 3.1.3 aux A_j, $j = 1, 2, \cdots, k-1$, il existe une suite $\{r_n\}$ avec $r_n < r_{n+1}$ et $r_n \to +\infty$, telle que pour tout n, on a les deux inégalités (3.1.6) et (3.1.7), sont vraies pour tout n suffisamment grand, avec d est une constante qui dépend seulement de $\sigma(A_j)$, $\mu(A_0)$ et δ_j, $j = 1, 2, \cdots, k-1$. Pour tout $n \geqslant n_0$, il existe une constante $R_1 > 0$ et $\theta_n \in F_n$, tel que pour tout z vérifiant $\arg z = \theta_n$ et $|z| = r_n \notin E_1 \cup [0, R_1]$, (3.1.6) et (3.1.7) sont vraies. Donc en calculant en les points $z_n = r_n e^{i\theta_n}$ avec $r_n \notin E_1 \cup [0, R_1]$, on obtient d'après (3.1.4), (3.1.6), (3.1.7) et (3.1.12) que

$$\exp\left\{ r_n^{\frac{1}{2}\mu(A_0)} \right\} \leqslant B [T(2r_n, f)]^{2k} \left[1 + \sum_{j=1}^{k-1} \exp\left(-\frac{\delta_j}{4} T(r_n, A_j) \right) + |a_j| \right]. \tag{3.1.13}$$

Donc

$$\limsup_{r_n \to +\infty} \frac{\log\log T(r_n, f)}{\log r_n} \geqslant \mu(A_0).$$

Ce qui donne

$$\sigma_2(f) \geqslant \mu(A_0).$$

Cas 2. $\mu(A_0) = 0$. Donc $\sigma_2(f) \geqslant 0$ est trivial.

Alors pour $0 \leqslant \mu(A_0) < \frac{1}{2}$, on obtient que $\sigma_2(f) \geqslant \mu(A_0)$. Donc, la preuve du Théorème 3.1.1 est complète.

Preuve du Théorème 3.1.3

Supposons que $f \not\equiv 0$ est une solution de l'équation (3.1.1) avec $\sigma(f) < +\infty$. Soit a_j une valeur de défaut finie de A_j, d'indice $\delta_j = \delta(a_j, A_j)$, $j = 1, 2, \cdots, k-1$. D'après le Lemme 3.1.5, il existe un ensemble $E_4 \subset (1, \infty)$ avec $m_l(E_4) < \infty$ tel que (3.1.5) est vraie pour tout z vérifiant $|z| = r \notin E_4 \cup [0, r_1]$ $(r_1 > 1)$. D'après la preuve du Lemme 3.1.3, il existe une suite $\{r_n\}$ satisfaisant (3.1.6). Soit $0 < \varepsilon < \frac{d}{2}$. Alors pour tout entier n, on choisit $\varphi_n \in F_n \cap \bigcup_{k=1}^{m}([\phi_k, \theta_k])$. Alors il existe un entier $k \in \{1, 2, ..., m\}$ tel que tout entier n vérifie $\varphi_n \in F_n \cap \bigcup_{k=1}^{m}([\phi_k, \theta_k])$ (sinon on utilise une sous suite φ_{n_j} au lieu de φ_n). Donc, d'après les hypothèses, on a

$$\left|A_0\left(r_n e^{i\varphi}\right)\right| > \exp\left\{(1 + o(1))\, \alpha r_n^{\sigma(A_0) - \varepsilon}\right\} \tag{3.1.14}$$

quand $n \longrightarrow +\infty$. Des équations (3.1.4), (3.1.5) et (3.1.6), on trouve

$$\left|A_0\left(r_n e^{i\varphi}\right)\right| \leqslant r_n^{k\sigma}\left[1 + \sum_{j=1}^{k-1} \exp\left(-\frac{\delta_j}{4} T(r_n, A_j)\right) + |a_j|\right]. \tag{3.1.15}$$

Evidemment, des équations (3.1.14) et (3.1.15), on peut conclure la contradiction. Donc $\sigma(f) = +\infty$. D'après le Lemme 3.1.1, il existe un ensemble $E_1 \subset (1, \infty)$ avec $m_l(E_1) < \infty$ et une constante $B > 0$, tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin E_1 \cup [0, 1]$, on a l'inégalité (3.1.12) pour $j = 1, 2, \cdots, k-1$. De (3.1.4), (3.1.6), (3.1.12) et (3.1.3) on obtient

$$\exp\left\{(1 + o(1))\, \alpha r_n^{\sigma(A_0) - \varepsilon}\right\}$$
$$\leqslant B\left[T(2r_n, f)\right]^{2k}\left[1 + \sum_{j=1}^{k-1} \exp\left(-\frac{\delta_j}{4} T(r_n, A_j)\right) + |a_j|\right].$$

Donc, comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on obtient

$$\sigma_2(f) \geqslant \sigma(A_0).$$

Preuve du Théorème 3.1.5

Supposons que $\max\left\{\lambda\left(\frac{1}{A_0}\right), \sigma(A_j) : j = 1, 2, ..., k-1\right\} < \sigma(A_0) < \frac{1}{2}$.

Etape 1. On démontre que $\sigma_2(f) = \sigma(A_0)$ .On assume que $f(z)$ est une solution non triviale de l'équation (3.1.1). Soit a_j une valeur de défaut finie de de A_j, d'indice $\delta_j = \delta(a_j, A_j)$, $j = 1, 2, \cdots, k-1$. En utilisant les conditions du Théorème 3.1.3, soit $A_0(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$, avec $g(z)$ est une fonction entière et $h(z)$ est le produit canonique des pôles de $A_0(z)$ avec $\lambda(h) = \sigma(h)$. Alors il est clair que $\lambda\left(\frac{1}{A_0}\right) = \sigma(h)$. Comme $T(r, A_0) \leqslant T(r, g) + T(r, h) + O(1)$ et $\sigma(h) < \sigma(A_0)$, pour tout $\varepsilon\,(0 < 2\varepsilon < \sigma(A_0) - \sigma(h))$, il existe une suite $\{r_n\}$, $r_n \to \infty$ telle que $T(r_n, A_0) > r_n^{\sigma(A_0)-\varepsilon}$ et $T(r_n, h) < r_n^{\sigma(h)+\varepsilon}$ est vraie pour n suffisamment grand. Donc, on trouve $\sigma(A_0) \leqslant \sigma(g)$. D'autre part, comme $T(r, g) \leqslant T(r, A_0) + T(r, h) + O(1)$ et $\sigma(h) < \sigma(A_0)$, on déduit que $\sigma(g) \leqslant \sigma(A_0)$. Donc $\sigma(A_0) = \sigma(g)$. Pour tout $\varepsilon < \frac{1}{4}\left(\sigma(A_0) - \lambda\left(\frac{1}{A_0}\right)\right)$ donné, il s'ensuit de la Remarque 3.1.1 qu'il existe un ensemble $E_3 = E_3(\varepsilon, \sigma(A_0)) \subset [0, +\infty)$ avec $\overline{\log dens} E_3 \geqslant 1 - \frac{\sigma(g)}{\alpha_0}$ et $\alpha_0 = \frac{\sigma(g)+\frac{1}{2}}{2}$, tels que pour tout $r > R_3$, on a

$$|h(z)| \leqslant \exp\left\{r^{\sigma(h)+\varepsilon}\right\}.$$

Donc pour tout $r \in E = E_3 \setminus [0, R_3]$, on trouve

$$|A_0(z)| \geqslant \frac{\exp\left\{r^{\sigma(A_0)-\frac{1}{2}\varepsilon}\right\}}{\exp\left\{r^{\sigma(h)+\varepsilon}\right\}} > \exp\left\{r^{\sigma(A_0)-\varepsilon}\right\}. \tag{3.1.16}$$

En utilisant le Lemme 3.1.3 et la même méthode comme dans la preuve du Théorème 3.1.1, on déduit que toute solution $f \not\equiv 0$ de l'équation (3.1.1) est d'ordre infini. D'après le Lemme 3.1.1, il existe un ensemble $E_1 \subset (1, \infty)$ avec $m_l(E_1) < \infty$ et une constante $B > 0$, tels que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin E_1 \cup [0, 1]$, on a

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right| \leqslant B\left[T(2r, f)\right]^{2k}, \ j = 1, 2, \cdots, k. \tag{3.1.17}$$

En utilisant le Lemme 3.1.3 aux $A_j\,(j = 1, 2, \cdots, k-1)$, on trouve qu'il existe une suite $\{r_n\}$ avec $r_n < r_{n+1}$ et $r_n \to +\infty$, telle que pour tout n, (3.1.6) est valide. Pour tout $n \geqslant n_0$, il existe une constante $R_4 > 0$ et $\theta_n \in F_n$, telles que pour tout z vérifiant $\arg z = \theta_n$ et $|z| = r_n \in E - (E_1 \cup [0, R_4])$, (3.1.6), (3.1.14) et (3.1.15) sont vraies. Donc, en faisant des calculs en les points $z_n = r_n e^{i\theta_n}$ avec $r_n \in (E - (E_1 \cup [0, R_4]))$, on trouve des équations (3.1.4), (3.1.6), (3.1.16) et (3.1.17) que

$$\exp\left(r_n^{\sigma(A_0)-\varepsilon}\right) \leqslant B\left[T\left(2r_n, f\right)\right]^{2k}\left[1+\sum_{j=1}^{k-1}\exp\left(-\frac{\delta_j}{4}T\left(r_n, A_j\right)\right)+|a_j|\right].$$

Donc, comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on obtient

$$\limsup_{r_n\to+\infty}\frac{\log\log T\left(r_n, f\right)}{\log r_n} \geqslant \sigma\left(A_0\right). \tag{3.1.18}$$

Alors, d'après (3.1.18), on trouve

$$\sigma_2\left(f\right) \geqslant \sigma\left(A_0\right). \tag{3.1.19}$$

D'autre part, d'après (3.1.1) les pôles de $f(z)$ peuvent se produire à partir des pôles de $A_0, A_1, ..., A_{k-1}$. Notons que les multiplicités des pôles de f sont uniformément bornés, et donc on a

$$\begin{aligned} N\left(r, f\right) &\leq M_1\bar{N}\left(r, f\right) \leq M_1\sum_{j=0}^{k-1}N\left(r, A_j\right) \\ &\leq M\max\left\{N\left(r, A_j\right) : j = 0, 1, ..., k-1\right\}, \end{aligned}$$

avec M_1 et M sont des constantes positives. Cela donne

$$T\left(r, f\right) = m\left(r, f\right) + O\left\{\max\left\{N\left(r, A_j\right) : j = 0, 1, ..., k-1\right\}\right\}.$$

De cela et Lemme 3.1.4, on obtient

$$\sigma_2\left(f\right) \leq \sigma\left(A_0\right). \tag{3.1.20}$$

Des équations (3.1.19) et (3.1.20), on obtient $\sigma_2(f) = \sigma(A_0)$.

Etape 2. On démontre que $\bar{\lambda}_2\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \sigma_2(f)$, $(i \in \mathbb{N})$.

(i) Premièrement, on montre que $\overline{\lambda}_2(f - \varphi) = \rho_2(f)$. Posons $g = f - \varphi$. Comme $\varphi \neq 0$ est une fonction entière vérifiant $\rho_2(\varphi) < \rho(A_0)$, alors $\rho_2(g) = \rho_2(f) = \rho(A_0)$ et $\overline{\lambda}_2(g) = \overline{\lambda}_2(f - \varphi)$. En substituant $f = g + \varphi$ dans l'équation (3.1.1), on obtient

$$g^{(k)} + A_{k-1}g^{(k-1)} + \cdots + A_0 g = -\left[\varphi^{(k)} + A_{k-1}\varphi^{(k-1)} + \cdots + A_0\varphi\right]. \tag{3.1.21}$$

Comme $\lambda\left(\frac{1}{A_0}\right) < \sigma(A_0)$, on a $N(r, A_0) = o(T(r, A_0)), r \to \infty, r \notin E$. D'après cela et Lemme 3.1.6, on obtient

$$\begin{aligned}\sigma(A_0) &= \limsup_{r\to+\infty}\frac{\log T(r,A_0)}{\log r} = \lim_{\substack{r\to+\infty\\ r\in E_5}}\frac{\log T(r,A_0)}{\log r} \\ &= \lim_{\substack{r\to+\infty\\ r\in E_5}}\frac{\log m(r,A_0)}{\log r},\end{aligned} \tag{3.1.22}$$

avec E_5 est un ensemble de mesure logrithmique infinie. En utilisant les hypothèses du Théorème 3.1.5 et (3.1.22), on trouve

$$\limsup_{r\to+\infty}\frac{\log m(r,A_j)}{\log r} < \lim_{\substack{r\to+\infty\\ r\in E_5}}\frac{\log m(r,A_0)}{\log r} = \sigma(A_0),\ \ j = 1, 2, ..., k-1, \tag{3.1.23}$$

Posons $F = \varphi^{(k)} + A_{k-1}\varphi^{(k-1)} + \cdots + A_0\varphi$. Si $F \equiv 0$, d'après le Lemme 3.1.7, on a $\rho_2(\varphi) \geq \rho_p(A_0)$, ce qui est contradictoire. Donc $F \not\equiv 0$, et d'après le Lemme 3.1.8 (ii), on obtient $\overline{\lambda}_2(f-\varphi) = \lambda_2(f-\varphi) = \rho_2(f)$.

(ii) On démontre que $\overline{\lambda}_2(f'-\varphi) = \rho_2(f)$. Posons $g_1 = f' - \varphi$, alors $\rho_2(g_1) = \rho_2(f)$ et

$$f' = g_1 + \varphi, ..., f^{(k+1)} = g_1^{(k)} + \varphi^{(k)}. \tag{3.1.24}$$

D'après (3.1.1), on a

$$f = -\frac{1}{A_0}\left(f^{(k)} + ... + A_1 f'\right). \tag{3.1.25}$$

En dérivant (3.1.1), on obtient

$$f^{(k+1)} + A_{k-1}f^{(k)} + \left(A'_{k-1} + A_{k-2}\right)f^{(k-2)} + ... + \left(A'_1 + A_0\right)f' + A'_0 f = 0. \tag{3.1.26}$$

En substituant (3.1.24) et (3.1.25) dans (3.1.26) ,on trouve

$$\begin{aligned}& g_1^{(k)} + \left(A_{k-1} - \frac{A'_0}{A_0}\right)g_1^{(k-1)} + \left(A'_{k-1} + A_{k-2} - \frac{A'_0}{A_0}A_{k-1}\right)g_1^{(k-2)} \\ & +... + \left(A'_1 + A_0 - \frac{A'_0}{A_0}A_1\right)g_1 \\ = & -\left[\varphi^{(k)} + \left(A_{k-1} - \frac{A'_0}{A_0}\right)\varphi^{(k-1)} + ... + \left(A'_1 + A_0 - \frac{A'_0}{A_0}A_1\right)\varphi\right].\end{aligned}$$

Posons

$$B_{k-1} = A_{k-1} - \frac{A'_0}{A_0}, B_{k-2} = A'_{k-1} + A_{k-2} - \frac{A'_0}{A_0}A_{k-1}, ..., B_0 = A'_1 + A_0 - \frac{A'_0}{A_0}A_1. \tag{3.1.27}$$

On a

$$g_1^{(k)} + B_{k-1}g_1^{(k-1)} + ... + B_0g_1 = -\left[\varphi^{(k)} + B_{k-1}\varphi^{(k-1)} + ... + B_0\varphi\right]. \tag{3.1.28}$$

En utilisant (3.1.23) et (3.1.27) , on trouve

$$\limsup_{r\to+\infty}\frac{\log m(r,B_j)}{\log r} < \lim_{\substack{r\to+\infty\\ r\in E_5}}\frac{\log m(r,A_0)}{\log r} = \sigma(A_0)\,,\ \ j=1,2,...,k-1, \tag{3.1.29}$$

et

$$\sigma(A_0) = \lim_{\substack{r\to+\infty\\ r\in E_5}}\frac{\log m(r,A_0)}{\log r} = \limsup_{r\to+\infty}\frac{\log m(r,B_0)}{\log r}. \tag{3.1.30}$$

Posons $F_1 = \varphi^{(k)} + B_{k-1}\varphi^{(k-1)} + \cdots + B_0\varphi$. Si $F_1 \equiv 0$, alors d'après (3.1.29), (3.1.30) et le Lemme 3.1.7, on obtient $\rho_2(\varphi) \geqslant \rho(A_0)$, contradiction. Donc $F_1 \not\equiv 0$. D'après le Lemme 3.1.8 (ii) et (3.1.22), on a

$$\overline{\lambda}_2(f' - \varphi) = \lambda_2(f' - \varphi) = \rho_2(f)\,.$$

(iii) On montre que $\overline{\lambda}_2(f'' - \varphi) = \rho_2(f)$. Posons $g_2 = f'' - \varphi$, then $\rho_2(g_2) = \rho_2(f)$, et

$$f^{''} = g_2 + \varphi, ..., f^{(k+2)} = g_1^{(k)} + \varphi^{(k)}. \tag{3.1.31}$$

En substituant (3.1.25) et (3.1.26) , on trouve

$$f^{(k+1)} + \left(A_{k-1} - \frac{A_0^{'}}{A_0}\right)f^{(k)} + \tag{3.1.32}$$

$$\left(A_{k-1}' + A_{k-2} - \frac{A_0^{'}}{A_0}A_{k-1}\right)\ f^{(k-1)} \tag{3.1.33}$$

$$+ ... + \left(A_1' + A_0 - \frac{A_0^{'}}{A_0}A_1\right)f^{'} = 0.$$

En dérivant (3.1.32), on obtient

$$f^{(k+2)} + \left(A_{k-1} - \frac{A_0^{'}}{A_0}\right)f^{(k+1)} + \tag{3.1.34}$$

$$\left[\left(A_{k-1} - \frac{A_0^{'}}{A_0}\right) + \left(A_{k-1}' + A_{k-2} - \frac{A_0^{'}}{A_0}A_{k-1}\right)\right]f^{(k)} \tag{3.1.35}$$

$$+ ... + \left(A_1' + A_0 - \frac{A_0^{'}}{A_0}A_1\right)f^{'} = 0.$$

D'après (3.1.32) , on a

$$f^{'}=-[\frac{1}{A_1'+A_0-\frac{A_0'}{A_0}A_1}f^{(k+1)}+\frac{A_{k-1}-\frac{A_0'}{A_0}}{A_1'+A_0-\frac{A_0'}{A_0}A_1}f^{(k)}+...+\frac{A_2'+A_1-\frac{A_0'}{A_0}A_2}{A_1'+A_0-\frac{A_0'}{A_0}A_1}f^{''}].$$

De cela et (3.1.34) , on obtient

$$f^{(k+2)}+\left[\left(A_{k-1}-\frac{A_0^{'}}{A_0}\right)+\frac{\left(A_1'+A_0-\frac{A_0'}{A_0}A_1\right)^{'}}{\left(A_1'+A_0-\frac{A_0'}{A_0}A_1\right)}\right]f^{(k+1)}+$$

$$+...+$$

$$\left[\left(A_1'+A_0-\frac{A_0^{'}}{A_0}A_1\right)+\left(A_2'+A_1-\frac{A_0^{'}}{A_0}A_2\right)^{'}-\frac{\left(A_2'+A_1-\frac{A_0'}{A_0}A_2\right)\left(A_1'+A_0-\frac{A_0'}{A_0}A_1\right)^{'}}{\left(A_1'+A_0-\frac{A_0'}{A_0}A_1\right)}\right]f^{''}\ =\ 0.$$

Posons

$$C_{k-1}=B_{k-1}-\frac{B_0^{'}}{B_0},C_{k-2}=B_{k-1}'+B_{k-2}-\frac{B_0^{'}}{B_0}B_{k-1},...,C_0=B_1'+B_0-\frac{B_0^{'}}{B_0}B_1. \quad (3.1.36)$$

On a

$$f^{(k+2)}+C_{k-1}f^{(k+1)}+...+C_0f^{''}=0. \quad (3.1.37)$$

En substituant (3.1.31) dans (3.1.37) , on trouve

$$g_2^{(k)}+C_{k-1}g_2^{(k-1)}+...+C_0g_2=-\left[\varphi^{(k)}+C_{k-1}\varphi^{(k-1)}+...+C_0\varphi\right]. \quad (3.1.38)$$

En utilisant (3.1.19) , (3.1.23) , (3.1.24) et (3.1.36)on trouve

$$\limsup_{r\to+\infty}\frac{\log m\left(r,C_j\right)}{\log r}<\lim_{\substack{r\to+\infty\\ r\in E_5}}\frac{\log m\left(r,A_0\right)}{\log r}=\sigma\left(A_0\right),\ j=1,2,...,k-1, \quad (3.1.39)$$

et

$$\sigma\left(A_0\right)=\lim_{\substack{r\to+\infty\\ r\in E_5}}\frac{\log m\left(r,A_0\right)}{\log r}=\limsup_{r\to+\infty}\frac{\log m\left(r,C_0\right)}{\log r}. \quad (3.1.40)$$

Posons $F_2=\varphi^{(k)}+C_{k-1}\varphi^{(k-1)}+\cdots+C_0\varphi$. Si $F_2\equiv 0$, alors d'après (3.1.39), (3.1.40) et Lemme 3.1.7, on obtient $\rho_2\left(\varphi\right)\geqslant\rho\left(A_0\right)$, contradiction. Donc $F_2\not\equiv 0$. D'après le Lemme 3.1.8 (ii), on a

$$\overline{\lambda}_2\left(f^{''}-\varphi\right)=\lambda_2\left(f^{''}-\varphi\right)=\rho_2\left(f\right).$$

(iv) On montre que On montre que $\overline{\lambda}_2\left(f''' - \varphi\right) = \rho_2\left(f\right)$. Posons $g_3 = f''' - \varphi$, then $\rho_2\left(g_3\right) = \rho_2\left(f\right)$, et

$$f^{'''} = g_2 + \varphi, ..., f^{(k+3)} = g_3^{(k)} + \varphi^{(k)}. \tag{3.1.41}$$

En dérivant (3.1.34), on obtient

$$\begin{aligned} &f^{(k+3)} + C_{k-1}f^{(k+2)} + \left(C_{k-1}^{'} + C_{k-2}\right)f^{(k+1)} \\ &+ ... + \left(C_1^{'} + C_0\right)f^{'''} + C_0^{'}f^{''} = 0. \end{aligned} \tag{3.1.42}$$

D'après (3.1.37), on a

$$f^{''} = -\left[\frac{1}{C_0}f^{(k+2)} + \frac{C_{k-1}}{C_0}f^{(k+1)} + ... + \frac{C_1}{C_0}f^{'''}\right]. \tag{3.1.43}$$

Substituant (3.1.41) dans (3.1.42), on obtient

$$f^{(k+3)} + \left(C_{k-1} - \frac{C_0^{'}}{C_0}\right)f^{(k+2)} + \left(C_{k-2} + C_{k-1}^{'} - \frac{C_0^{'}}{C_0}C_{k-1}\right)f^{(k+1)} + ... + \left(C_0 + C_1^{'} - \frac{C_0^{'}}{C_0}C_1\right)f^{'''} = 0. \tag{3.1.44}$$

Posons

$$D_{k-1} = C_{k-1} - \frac{C_0^{'}}{C_0}, D_{k-2} = C_{k-1}^{'} + C_{k-2} - \frac{C_0^{'}}{C_0}C_{k-1}, ..., D_0 = C_1^{'} + C_0 - \frac{C_0^{'}}{C_0}C_1. \tag{3.1.45}$$

On a

$$f^{(k+3)} + D_{k-1}f^{(k+2)} + ... + D_0f^{'''} = 0. \tag{3.1.46}$$

En substituant (3.1.41) dans (3.1.46), on trouve

$$g_3^{(k)} + D_{k-1}g_3^{(k-1)} + ... + D_0g_3 = -\left[\varphi^{(k)} + D_{k-1}\varphi^{(k-1)} + ... + D_0\varphi\right]. \tag{3.1.47}$$

En utilisant (3.1.39), (3.1.40) et (3.1.45) on trouve

$$\limsup_{r\to+\infty}\frac{\log m\left(r, D_j\right)}{\log r} < \lim_{\substack{r\to+\infty \\ r\in E_5}}\frac{\log m\left(r, A_0\right)}{\log r} = \sigma\left(A_0\right),\ j = 1, 2, ..., k-1, \tag{3.1.48}$$

et

$$\sigma\left(A_0\right) = \lim_{\substack{r\to+\infty \\ r\in E_5}}\frac{\log m\left(r, A_0\right)}{\log r} = \limsup_{r\to+\infty}\frac{\log m\left(r, D_0\right)}{\log r}. \tag{3.1.49}$$

Posons $F_3 = \varphi^{(k)} + D_{k-1}\varphi^{(k-1)} + \cdots + D_0\varphi$. Si $F_3 \equiv 0$, alors d'après (3.1.53), (3.1.54) et le Lemme 3.1.7, on obtient $\rho_2\left(\varphi\right) \geqslant \rho\left(A_0\right)$, contradiction. Donc $F_3 \not\equiv 0$. D'après le Lemme 3.1.8 (ii), on a

$$\overline{\lambda}_2\left(f^{'''} - \varphi\right) = \lambda_2\left(f^{'''} - \varphi\right) = \rho_2\left(f\right).$$

(v) On montre que $\overline{\lambda}_2\left(f^{(i)}-\varphi\right)=\rho_2(f)\,(i>3)$. Posons $g_i=f^{(i)}-\varphi$, then $\rho_2(g_i)=\rho_2(f)$, et

$$f^{(i)}=g_i'+\varphi,...,f^{(k)}=g_i^{(k-i)}+\varphi^{(k-i)},i>3. \tag{3.1.50}$$

En dérivant (3.1.46) successivement, on obtient aussi une équation similaire à (3.1.44). En combinant (3.1.50), on trouve

$$g_i^{(k)}+\left(H_{k-1}-\frac{H_0'}{H_0}\right)g_i^{(k-1)}+...+\left(H_0+H_1'-\frac{H_0'}{H_0}H_1\right)g_i \tag{3.1.51}$$

$$=\ -\left[\varphi^{(k)}+\left(H_{k-1}-\frac{H_0'}{H_0}\right)\varphi^{(k-1)}+...+\left(H_0+H_1'-\frac{H_0'}{H_0}H_1\right)\varphi\right]. \tag{3.1.52}$$

Avec $H_j\,(j=0,1,...,k-1)$ sont des fonctions entières qui ont la même forme que les D_j. Posons

$$G_{k-1}=H_{k-1}-\frac{H_0'}{H_0},G_{k-2}=H_{k-1}'+H_{k-2}-\frac{H_0'}{H_0}H_{k-1},...,G_0=H_1'+H_0-\frac{H_0'}{H_0}H_1.$$

On obtient

$$\limsup_{r\to+\infty}\frac{\log m(r,G_j)}{\log r}<\lim_{\substack{r\to+\infty\\ r\in E_5}}\frac{\log m(r,A_0)}{\log r}=\sigma(A_0),\ \ j=1,2,...,k-1, \tag{3.1.53}$$

et

$$\sigma(A_0)=\lim_{\substack{r\to+\infty\\ r\in E_5}}\frac{\log m(r,A_0)}{\log r}=\limsup_{r\to+\infty}\frac{\log m(r,G_0)}{\log r}. \tag{3.1.54}$$

D'après le Lemme 3.1.8 (ii) et le Lemme 3.1.7, on a

$$\overline{\lambda}_2\left(f^{(i)}-\varphi\right)=\lambda_2\left(f^{(i)}-\varphi\right)=\rho_2(f)\,(i>3).$$

Preuve du Théorème 3.1.6

Supposons que $\max\left\{\lambda\left(\frac{1}{A_0}\right),\sigma(A_j):j=1,2,...,k-1\right\}<\mu(A_0)<\frac{1}{2}$. On assume que f est une solution non triviale de l'équation (3.1.1). Soit a_j une valeur de défaut de A_j, d'indice $\delta_j=\delta(a_j,A_j)$, $j=1,2,\cdots,k-1$. En utilisant les conditions du Théorème 3.1.6, on pose $A_0(z)=\frac{g(z)}{h(z)}$, avec $g(z)$ est une fonction entière et $h(z)$ est le produit canonique des pôles de $A_0(z)$ avec $\lambda(h)=\sigma(h)$, alors $\lambda\left(\frac{1}{A_0}\right)=\lambda(h)$ et similaire à la preuve du Théorème

3.1.5, on peut déduire que $\mu(A_0) = \mu(g)$. Soit $\varepsilon < \frac{1}{4}\left(\mu(A_0) - \lambda\left(\frac{1}{A_0}\right)\right)$, en utilisant le Lemme 3.1.2 à $g(z)$, on obtient qu'il existe un ensemble $E_2 = E_2(\varepsilon, \mu(g)) \subset [0, \infty)$ avec $\overline{\log dens} E_2 \geqslant 1 - \frac{\mu(g)}{\alpha_1}$, et $\alpha_1 = \frac{\mu(g)+\frac{1}{2}}{2}$. Donc, en utilisant la même méthode du Théorème 3.1.5, pour tout $r \in E_2$, on trouve

$$|A_0(z)| \geqslant \exp\left\{r^{\mu(A_0)-\varepsilon}\right\}.$$

Utilisons la même méthode du Théorème 3.1.5, on obtient $\sigma(f) = +\infty$, $\sigma_2(f) \geqslant \mu(A_0)$.
D'autre part, d'après (3.1.1) les pôles de $f(z)$ peuvent se produire à partir des pôles de A_0, $A_1, ..., A_{k-1}$. Notons que les multiplicités des pôles de f sont uniformément bornés, et donc on a

$$\begin{aligned} N(r, f) &\leq M_1 \bar{N}(r, f) \leq M_1 \sum_{j=0}^{k-1} N(r, A_j) \\ &\leq M \max\{N(r, A_j) : j = 0, 1, ..., k-1\}, \end{aligned}$$

avec M_1 et M sont des constantes positives. Cela donne

$$T(r, f) = m(r, f) + O\{\max\{N(r, A_j) : j = 0, 1, ..., k-1\}\}.$$

De cela et le Lemme 3.1.4, on obtient

$$\sigma_2(f) \leq \sigma(A_0).$$

Donc $\mu(A_0) \leq \sigma_2(f) \leq \sigma(A_0)$.
En raisonant comme dans l'étape 2. dans le Théorème 3.1.5, on obtient $\bar{\lambda}_2\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \lambda_2\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \sigma_2(f)$. Donc le Théorème 3.1.6 est complètement démontré.

3.2 Article 2 : Sur l'exposant de convergence itératif des solutions d'une équation différentielle linéaire à coefficients fonctions entières et méromorphes

Résultats Récents

On aura besoin de la définition suivante.

Définition 3.2.1 *([3]) Soit f une fonction entière. Alors le type $p-$itératif de f, avec d'ordre $p-$itératif $0 < \rho_p(f) < \infty$ est défini par*

$$\tau_p(f) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log_{p-1} T(r,\ f)}{r^{\rho_p(f)}} \quad (p \geqslant 1 \quad \textit{is an integer}),$$

Récemment, H. Y. Xu, J. Tu, et X. M. Zheng ont traité la relation entre les fontions à petite croissance et les dérivées des solutions des équations différentielles d'ordre supérieur

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + \cdots + A_1(z) f' + A_0(z) f = 0,$$

avec $A_0(z), \cdots, A_{k-1}(z)$ sont des fonctions entières ou méromorphes et ont obtenu le résultat suivant.

Théorème A. ([74]) *Soient $A_j(z)$ $(j = 0, 1, \cdots, k-1)$ des fonctions entières d'ordre fini qui satisfaient une des conditions suivantes*

(i) $\max\{\rho(A_j) : j = 1, 2, \cdots, k-1\} < \rho(A_0) < \infty.$

(ii) $0 < \rho(A_{k-1}) = \cdots = \rho(A_1) = \rho(A_0) < \infty$ *et* $\max\{\tau(A_j) : j = 1, 2, \cdots, k-1\} = \tau_1 < \tau(A_0) = \tau.$

Alors, toute solution $f \not\equiv 0$ de l'équation (3.1.1) *et pour toute fonction entière $\varphi(z) \not\equiv 0$ vérifiant $\rho_2(\varphi) < \rho(A_0)$, on a*

$$\overline{\lambda}_2\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \rho_2(f) = \rho(A_0), \quad (i = 0, 1, \cdots).$$

Théorème B. ([74]) *Soient $A_j(z)$ $(j = 1, \cdots, k-1)$ des polynômes, $A_0(z)$ une fonction entière transcendante. Alors pour toute solution $f \not\equiv 0$ de l'équation* (3.1.1) *et pour toute fonction entière $\varphi(z)$ d'ordre fini, on a*

(i) $\overline{\lambda}(f - \varphi) = \lambda(f - \varphi) = \rho(f) = \infty.$

(ii) $\overline{\lambda}\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \lambda\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \rho\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \infty, (i \geqslant 1,\ i \in \mathbb{N}).$

Quand les coefficients sont méromorphes, ils ont démontré le résultat suivant.

Théorème C. ([74]) *Soient* $A_j(z)$ $(j = 0, 1, \cdots, k-1)$ *des fonctions méromorphes vérifiant* $\max\{\rho(A_j) : j = 1, 2, \cdots, k-1\} < \rho(A_0)$ *et* $\delta(\infty, A_0) > 0$. *Alors toute solution méromorphe* $f \not\equiv 0$ *de l'équation* (3.1.1) *et pour toute fonction méromorphe* $\varphi(z) \not\equiv 0$ *vérifiant* $\rho_2(\varphi) < \rho(A_0)$, *on a*

$$\overline{\lambda}_2\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \lambda_2\left(f^{(i)} - \varphi\right) \geqslant \rho(A_0) \quad (i = 0, 1, \cdots), \text{ where } f^{(0)} = f.$$

Nos contributions

Dans cet article, on améliorera et on étendra les résultats cités ci-dessus en considèrant l'ordre itératif et on obtient les théorèmes suivants. Pour des applications des résultats, voir les papiers de V. Gupta et T. Kim ; V. Gupta, H. Sharma, T. Kim et S. H. Lee, [39], [40].

Théorème 3.2.1 (*[13]*) *Soient* $A_j(z)$ $(j = 0, 1, \cdots, k-1)$ *des fonctions entières d'ordre* $p-$*itératif fini avec* $i(A_0) = p\,(0 < p < \infty)$ *et vérifiant une des conditions suivantes :*

(*i*) $\max\left\{\rho_p(A_j) : j = 1, 2, \cdots, k-1\right\} < \rho_p(A_0)$.

(*ii*) $\max\{\rho_p(A_j) : j = 1, 2, \cdots, k-1\} \leqslant \rho_p(A_0) = \rho(0 < \rho < \infty)$ *et* $\max\{\tau_p(A_j) : \rho_p(A_j) = \rho_p(A_0)\} < \tau_p(A_0) = \tau\ (0 < \tau < \infty)$.

Alors toute solution $f \not\equiv 0$ *de l'équation* (*3.1.1*) *et pour toute fonction entière* $\varphi(z) \not\equiv 0$ *vérifiant* $\rho_{p+1}(\varphi) < \rho_p(A_0)$, *on obtient*

$$\overline{\lambda}_{p+1}\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \lambda_{p+1}\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \rho_{p+1}(f) = \rho_p(A_0), \quad (i = 0, 1, \cdots).$$

Théorème 3.2.2 (*[13]*) *Soient* $A_j(z)$ $(j = 1, 2, \cdots, k-1)$ *des polynômes,* $A_0(z)$ *une fonction entière transcendante avec* $0 < \rho_p(A_0) < \infty$. *Alors toute solution* $f \not\equiv 0$ *de l'équation* (*3.1.1*) *et pour toute fonction entière* $\varphi(z)$ *d'ordre* $p-$*itératif fini* $\rho_p(\varphi) < \infty$, *on a*

(*i*) $\overline{\lambda}_p(f - \varphi) = \lambda_p(f - \varphi) = \rho_p(f) = \infty$.

(*ii*) $\overline{\lambda}_p\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \lambda_p\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \rho_p\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \infty, i \geqslant 1,\ i \in \mathbb{N}$.

Théorème 3.2.3 *([13]) Soient $A_j(z)$ $(j = 0, 1, \cdots, k-1)$ des fonctions méromorphes d'ordre $p-$itératif fini $i(A_0) = p(0 < p < \infty)$ vérifiant $\max\{\rho_p(A_j) : j = 1, 2, \cdots, k-1\} < \rho_p(A_0)$ et $\delta(\infty, A_0) > 0$. Alors pour toute solution méromorphe $f \not\equiv 0$ de l'équation $(3.1.1)$ dont ses pôles sont de multiplicité uniformément bornée et pour toute fonction méromorphe $\varphi(z) \not\equiv 0$ vérifiant $\rho_{p+1}(\varphi) < \rho_p(A_0)$, on a*

$$\overline{\lambda}_{p+1}\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \lambda_{p+1}\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \rho_p(A_0), \quad (i = 0, 1, \cdots).$$

Corollaire 3.2.1 *([13]) Sous les hypothèses du Théorème 3.2.1, si $\varphi(z) = z$, alors pour toute solution $f \not\equiv 0$ de $(3.1.1)$, on a*

$$\overline{\lambda}_{p+1}\left(f^{(i)} - z\right) = \lambda_{p+1}\left(f^{(i)} - z\right) = \rho_{p+1}(f) = \rho_p(A_0), \quad (i = 0, 1, \cdots).$$

Corollaire 3.2.2 *([13]) Sous les hypothèses du Théorème 3.2.2, si $\varphi(z) = z$, alors pour toute solution $f \not\equiv 0$ de $(3.1.1)$, on a*

(i) $\overline{\lambda}_p(f - z) = \lambda_p(f - z) = \rho_p(f) = \infty.$

(ii) $\overline{\lambda}_p\left(f^{(i)} - z\right) = \lambda_p\left(f^{(i)} - z\right) = \rho_p\left(f^{(i)} - z\right) = \infty,\ i \geqslant 1,\ i \in \mathbb{N}.$

Corollaire 3.2.3 *([13]) Sous les hypothèses du Théorème 3.2.3, si $\varphi(z) = z$, alors pour toute solution $f \not\equiv 0$ de $(3.1.1)$ dont ses pôles sont de multiplicité uniformément bornée, on a*

$$\overline{\lambda}_{p+1}\left(f^{(i)} - z\right) = \lambda_{p+1}\left(f^{(i)} - z\right) = \rho_p(A_0) \quad (i = 0, 1, \cdots).$$

Lemmes préliminaires

Lemme 3.2.1 *([76]) Supposons que $f \not\equiv 0$ est une solution de l'équation $(3.1.1)$, Soit $g_i = f^{(i)} - \varphi$, alors g_i vérifient l'équation*

$$g_i^{(k)} + U_{k-1}^i g_i^{(k-1)} + \cdots + U_0^i g_i = -\left[\varphi^{(k)} + U_{k-1}^i \varphi^{(k-1)} + \cdots + U_0^i \varphi\right], \tag{3.2.1}$$

avec

$$U_j^i = U_{j+1}^{i-1\prime} + U_j^{i-1} - \frac{U_0^{i-1\prime}}{U_0^{i-1}} U_{j+1}^{i-1},\ \text{and } U_j^0 = A_j,\ j = 0, 1, 2, \cdots, k-1,$$
$$U_k^{i-1} \equiv 1\ \ (i \geqslant 1,\ i \in \mathbb{N}).$$

Lemme 3.2.2 *([28]) Soit f une fonction méromorphe pour laquelle $i(f) = p \geqslant 1$ et $\rho_p(f) = \rho$, et soit $k \geqslant 1$ un entier. Alors pour tout $\varepsilon > 0$,*

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = O\left(\exp_{p-2} r^{\rho+\varepsilon}\right).$$

Lemme 3.2.3 *([28]) Soit f une solution méromorphe de (3.1.1), supposons que tous les coefficients A_j sont constants. Donnons une constante réelle $\gamma > 1$, et notons $T(r) = \sum_{j=0}^{k-1} T(r, A_j)$, on a*

$$\log m(r, f) < T(r)\{(\log r)\log T(r)\}^{\gamma}, \ \text{if } p = 0,$$

$$\log m(r, f) < r^{2p+\gamma-1} T(r)\{\log T(r)\}^{\gamma}, \ \text{if } p > 0$$

en dehors d'un ensemble exceptionnel E_p avec $\int_{E_p} t^{p-1}dt < +\infty$.

Remarque 3.2.1 *On note que dans le Lemme 3.2.3, $p = 1$ correspond à la mesure Euclidienne et $p = 0$ à la mesure logarithmique.*

Lemme 3.2.4 *([67]) Soit $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre $p-$itératif fini vérifiant $i(f) = p$. Alors il existe un ensemble $E_4 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique infinie tel que pour tout $r \in E_4$, on a*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log_p T(r, f)}{\log r} = \rho.$$

Lemme 3.2.5 *([13]) Soient $A_0(z), A_1(z), \cdots, A_{k-1}(z)$ des fonctions entières d'ordre $p-$itératif fini avec $i(A_0) = p\,(0 < p < \infty)$ et vérifiant $\max\{\rho_p(A_j) : j = 1, 2, \cdots, k-1\} = \rho_1 < \rho_p(A_0)$ et soit*

$$U_j^1 = A'_{j+1} + A_j - \frac{A'_0}{A_0} A_{j+1}$$

et

$$U_j^i = U_{j+1}^{i-1\,'} + U_j^{i-1} - \frac{U_0^{i-1\,'}}{U_0^{i-1}} U_{j+1}^{i-1},$$

avec $j = 0, 1, \cdots, k-1$; $A_k \equiv 1$, $U_k^{i-1} \equiv 1$ *et* $i \geqslant 1$, $i \in \mathbb{N}$. *Alors il existe un ensemble* E_5 *de mesure logarithmique infinie tel que pour tout* $r \in E_5$

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log_p m\left(r, U_0^i\right)}{\log r} = \rho_p\left(A_0\right) > \limsup_{r\to\infty} \frac{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant k-1} \left\{\log_p m\left(r, U_j^i\right)\right\}}{\log r} = \rho_1. \tag{3.2.2}$$

Preuve. On démontre ce lemme en utilisant la récurrence. Premièrement, quand $i = 1$, on a $U_j^1 = A_{j+1}' + A_j - \frac{A_0'}{A_0} A_{j+1}$, $j = 0, 1, \cdots, k-1$ et $A_k \equiv 1$.
Quand $j = 0$, alors $U_0^1 = A_1' + A_0 - \frac{A_0'}{A_0} A_1$. Donc on obtient

$$m\left(r, U_0^1\right) \leqslant m\left(r, A_1\right) + m\left(r, A_0\right) + m\left(r, \frac{A_1'}{A_1}\right) + m\left(r, \frac{A_0'}{A_0}\right) + O\left(1\right). \tag{3.2.3}$$

De l'identité $-A_0 = A_1' - U_0^1 - \frac{A_0'}{A_0} A_1$, on a

$$m\left(r, A_0\right) \leqslant m\left(r, A_1\right) + m\left(r, U_0^1\right) + m\left(r, \frac{A_1'}{A_1}\right) + m\left(r, \frac{A_0'}{A_0}\right) + O\left(1\right). \tag{3.2.4}$$

Quand $j \neq 0$, d'après les définitions de U_j^1, on trouve

$$m\left(r, U_j^1\right) \leqslant m\left(r, A_{j+1}\right) + m\left(r, A_j\right) + m\left(r, \frac{A_{j+1}'}{A_{j+1}}\right) + m\left(r, \frac{A_0'}{A_0}\right) + O\left(1\right), \tag{3.2.5}$$

$j = 1, 2, .., k-1$. Comme $A_j\left(z\right)$ sont des fonctions entières avec $\max\{\rho_p\left(A_j\right) : j = 1, 2, \cdots, k-1\} < \rho_p\left(A_0\right) < \infty$, alors d'après de Lemme 3.2.4, il existe un ensemble $E_4 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique infinie tel que pour tout $r \in E_4$

$$m\left(r, A_{j+1}\right) = o\left(m\left(r, A_0\right)\right) \quad \left(j = 1, 2, .., k-1\right)$$

De cela, (3.2.5) et Lemme 3.2.2, on trouve que pour tout $r \in E_4$

$$\max_{1\leqslant j\leqslant k-1} \left\{m\left(r, U_j^1\right)\right\} \leqslant \max_{1\leqslant j\leqslant k-1} \left\{m\left(r, A_j\right) + o\left(m\left(r, A_0\right)\right) + O\left(\exp_{p-2} r^\beta\right) + O\left(1\right)\right\}, \tag{3.2.6}$$

pour une constante $\beta < \infty$ en dehors d'un ensemble exceptionnel E_1 de mesure linéaire finie. Des équations $(3.2.3)$, $(3.2.4)$ et $(3.2.6)$, on obtient pour tout $r \in E_4 \backslash E_1$

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log_p m\left(r, U_0^1\right)}{\log r} = \rho_p\left(A_0\right) > \rho_1 = \limsup_{r\to\infty} \frac{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant k-1} \left\{\log_p m\left(r, A_j\right)\right\}}{\log r}$$

$$\geqslant \limsup_{r\to\infty} \frac{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant k-1} \left\{\log_p m\left(r, U_j^1\right)\right\}}{\log r}. \tag{3.2.7}$$

Maintenant, supposons que (3.2.2) est valide, pour $i \leqslant n, n \in \mathbb{N}$, donc, il existe un ensemble E_5 de mesure logarithmique infinie tel que pour tout $r \in E_5$

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log_p m\left(r, U_0^n\right)}{\log r} = \rho_p\left(A_0\right) > \limsup_{r\to\infty} \frac{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant k-1}\left\{\log_p m\left(r, U_j^n\right)\right\}}{\log r} = \rho_1. \tag{3.2.8}$$

On démontre que (3.2.2) est vraie pour $i = n+1$. Comme $i = n+1$, alors on a

$$U_j^{n+1} = U_{j+1}^{n'} + U_j^n - \frac{U_0^{n'}}{U_0^n} U_{j+1}^n,$$

avec $j = 0, 1, \cdots, k-1$; $U_k^n \equiv 1$. Quand $j = 0$, on a $U_0^{n+1} = U_1^{n'} + U_0^n - \frac{U_0^{n'}}{U_0^n} U_1^n$. Alors on obtient

$$m\left(r, U_0^{n+1}\right) \leqslant m\left(r, U_0^n\right) + m\left(r, U_1^n\right) + m\left(r, \frac{U_0^{n'}}{U_0^n}\right) + m\left(r, \frac{U_1^{n'}}{U_1^n}\right) + O\left(1\right). \tag{3.2.9}$$

Comme $-U_0^n = U_1^{n'} - U_0^{n+1} - \frac{U_0^{n'}}{U_0^n} U_1^n$, alors on a

$$m\left(r, U_0^n\right) \leqslant m\left(r, U_0^{n+1}\right) + m\left(r, U_1^n\right) + m\left(r, \frac{U_0^{n'}}{U_0^n}\right) + m\left(r, \frac{U_1^{n'}}{U_1^n}\right) + O\left(1\right). \tag{3.2.10}$$

Quand $j \neq 0$, de la définition de U_j^{n+1}, $j = 1, 2, \cdots, k-1$ et $U_k^n \equiv 1$, on a

$$m\left(r, U_j^{n+1}\right) \leqslant m\left(r, U_{j+1}^n\right) + m\left(r, U_j^n\right) + m\left(r, \frac{U_{j+1}^{n'}}{U_{j+1}^n}\right) + m\left(r, \frac{U_0^{n'}}{U_0^n}\right) + O\left(1\right). \tag{3.2.11}$$

Des équations $(3.2.8) - (3.2.11)$, il existe un ensemble E_5 de mesure logarithmique infinie tel que pour tout $r \in E_5$

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log_p m\left(r, U_0^{n+1}\right)}{\log r} = \lim_{r\to\infty} \frac{\log_p m\left(r, U_0^n\right)}{\log r} = \rho_p\left(A_0\right)$$

$$> \rho_1 = \limsup_{r\to\infty} \frac{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant k-1}\left\{\log_p m\left(r, U_j^n\right)\right\}}{\log r} = \limsup_{r\to\infty} \frac{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant k-1}\left\{\log_p m\left(r, U_j^{n+1}\right)\right\}}{\log r}. \tag{3.2.12}$$

D'où, la preuve du Lemme 3.2.5 est complète.

Lemme 3.2.6 *([13]) Soient $A_0,\, A_1, \cdots, A_{k-1}$ des fonctions méromorphes d'ordre $p-$itératif fini. Si*

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant k-1}\left\{\log_p m\left(r, A_j\right)\right\}}{\log r} = \beta_1$$

et il existe un ensemble E_6 de mesure logarithmique infinie tel qu'on ait

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log_p m\left(r, A_0\right)}{\log r} = \beta_2 > \beta_1$$

pour tout $r \in E_6$, alors toute solution méromorphe $f \not\equiv 0$ de (3.1.1) vérifie $\rho_p\left(f\right) = \infty$ et $\rho_{p+1}\left(f\right) \geqslant \beta_2$.

Preuve. Supposons $f \not\equiv 0$ est une solution méromorphe de l'équation $(3.1.1)$. Si $\rho_p\left(f\right) = \rho < \infty$, alors de l'équation $(3.1.1)$, on a

$$m\left(r, A_0\right) \leqslant \sum_{j=1}^{k} m\left(r, \frac{f^{(j)}}{f}\right) + \sum_{j=1}^{k-1} m\left(r, A_j\right) + O\left(1\right).$$

D'après le Lemme 3.2.2, on a

$$m\left(r, A_0\right) \leqslant O\left(\exp_{p-2} r^{\rho+\varepsilon}\right) + \sum_{j=1}^{k-1} m\left(r, A_j\right) + O\left(1\right),$$

en dehors d'un ensemble exceptionnel E_1 de mesure linéaire finie. D'après les hypothèses du Lemme 3.2.6, il existe un ensemble E_6 de mesure logarithmique infinie tel que pour tout $|z| = r \in E_6 \backslash E_1$, on a pour tout ε $(0 < 2\varepsilon < \beta_2 - \beta_1)$

$$\exp_{p-1}\left\{r^{\beta_2-\varepsilon}\right\} \leqslant O\left(\exp_{p-2} r^{\rho+\varepsilon}\right) + (k-1)\exp_{p-1}\left\{r^{\beta_1+\varepsilon}\right\},$$

et alors d'après le Lemme 2.2.4, on obtient

$$\beta_2 \leqslant \beta_1.$$

De cela on obtient une contradiction. Donc $\rho_p\left(f\right) = \infty$.

Maintenant, on assume que $f \not\equiv 0$ une solution méromorphe de (3.1.1) avec $\rho_p\left(f\right) = \infty$. De l'équation (3.1.1) on a

$$m\left(r, A_0\right) \leqslant \sum_{j=1}^{k} m\left(r, \frac{f^{(j)}}{f}\right) + \sum_{j=1}^{k-1} m\left(r, A_j\right) + O\left(1\right). \tag{3.2.13}$$

D'après le Lemme 2.2.3 and (3.2.13), on trouve

$$m(r, A_0) \leqslant O\{\log rT(r,f)\} + \sum_{j=1}^{k-1} m(r, A_j), \ r \notin E_2, \tag{3.2.14}$$

avec $E_2 \subset [1, +\infty)$ est un ensemble de mesure linéaire finie. D'après les hypothèses du Lemme 3.2.6, il existe un ensemble E_6 de mesure logarithmique infinie tel que pour tout $|z| = r \in E_6 \backslash E_2$, on obtient en utilisant (3.2.14)

$$\exp_{p-1}\left\{r^{\beta_2-\varepsilon}\right\} \leqslant O\{\log rT(r,f)\} + (k-1)\exp_{p-1}\left\{r^{\beta_1+\varepsilon}\right\}, \tag{3.2.15}$$

avec $0 < 2\varepsilon < \beta_2 - \beta_1$. De la relation (3.2.15) et du Lemme 3.2.4, on trouve

$$\rho_{p+1}(f) \geqslant \beta_2.$$

Lemme 3.2.7 *([37], Theorem 3) Soit $f(z)$ une fonction méromorphe transcendante, et soit $\alpha > 1$ une constante donnée. Alors il existe un ensemble $E_7 \subset (1, \infty)$ de mesure logrithmique finie et une constante $B > 0$ qui dépend uniquement de α et i, j $(0 \leqslant i < j \leqslant k)$, tels que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin [0,1] \cup E_7$, on a*

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f^{(i)}(z)}\right| \leqslant B\left\{\frac{T(\alpha r, f)}{r}(\log^{\alpha} r)\log T(\alpha r, f)\right\}^{j-i}.$$

De ce lemme, on obtient le résultat suivant.

Lemme 3.2.8 *([13])Soit f une fonction méromorphe transcendante d'ordre $p-$itératif fini $\rho_p(f) = \rho < +\infty$, $H = \{(k_1, j_1), (k_2, j_2), \cdots, (k_q, j_q)\}$ un ensemble fini des entiers vérifiant $k_i > j_i \geqslant 0$ $(i = 1, \cdots, q)$ et soit $\varepsilon > 0$ une constante donnée. Alors, il existe un ensemble $E_8 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie, tel que pour tout z vérifiant $|z| \notin E_8 \cup [0,1]$ et pour tout $(k,j) \in H$, on a*

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right| \leqslant \left\{\exp_{p-1}\left\{r^{\rho-1+\varepsilon}\right\}\right\}^{k-j}.$$

Preuve. La définition

$$\rho_p(f) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log_p T(r, f)}{\log r},$$

implique pour pour tout $\varepsilon_1 > 0$, il existe $R > 1$ tel que pour tout $r > R$, on a

$$T(r,\ f) < \exp_{p-1}\left\{r^{\rho+\varepsilon_1}\right\}. \tag{3.2.16}$$

Combinons (3.2.16) avec Lemme 3.2.7, pour $\alpha > 0$, il existe un ensemble $E_8 = [1, R] \cup E_7$ ayant une mesure logarithmique finie et une constante $B > 0$, tels que si $|z| \notin E_8 \cup [0,1]$, on obtient

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right| \leqslant B\left\{\frac{\exp_{p-1}\left\{(\alpha r)^{\rho+\varepsilon_1}\right\}}{r}\left(\log^{\alpha} r\right)\exp_{p-2}\left\{(\alpha r)^{\rho+\varepsilon_1}\right\}\right\}^{k-j}.$$

Donc, il existe une constante $\varepsilon > 1 + \varepsilon_1$, telle que si $|z| \notin E_8 \cup [0,1]$, on a

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right| \leqslant \left\{\exp_{p-1}\left\{r^{\rho-1+\varepsilon}\right\}\right\}^{k-j}.$$

Lemme 3.2.9 *([3]) Soit $f(z)$ une fonction entière d'ordre $p-$itératif $0 < \rho_p(f) < +\infty$ et de type $p-$itératif $0 < \tau_p(f) < \infty$. Alors pour tout $\beta < \tau_p(f)$ donné, il existe un ensemble $E_9 \subset [1, +\infty)$ de mesure logarithmique infinie, tel que pour tout $r \in E_9$, on a*

$$\log_p M(r, f) > \beta r^{\rho_p(f)}.$$

Lemme 3.2.10 *([13]) Soient $A_0(z), A_1(z), \cdots, A_{k-1}(z)$ des fonctions entières d'ordre $p-$itératif fini et vérifiant $\max\{\rho_p(A_j) : j = 1, 2, \cdots, k-1\} \leqslant \rho_p(A_0) = \rho_2$ $(0 < \rho_2 < \infty)$ and $\max\{\tau_p(A_j) : \rho_p(A_j) = \rho_p(A_0)\} = \tau_1 < \tau_p(A_0) = \tau$ $(0 < \tau < \infty)$ et soient U_j^1, U_j^i cités dans le Lemme 3.2.5. Alors pour tout $\varepsilon\,(0 < 2\varepsilon < \tau - \tau_1)$ donné, il existe un ensemble E_{10} de mesure logarithmique infinie tel que*

$$\left|U_j^i\right| \leqslant \exp_p\left\{(\tau_1 + \varepsilon)\, r^{\rho_2}\right\},\quad \left|U_0^i\right| \geqslant \exp_p\left\{(\tau - \varepsilon)\, r^{\rho_2}\right\}, \tag{3.2.17}$$

avec $i \geqslant 1$, $i \in \mathbb{N}$ et $j = 1, 2, \cdots, k-1$.

Preuve. On démontre le lemme en utilisant la démonstration par réccurence.

(1) En premier on démontre que $U_j^i\,(j = 0, 1, \cdots, k-1)$ vérifie (3.2.17) quand $i = 1$. D'après la définition de $U_j^1 = A'_{j+1} + A_j - \frac{A'_0}{A_0} A_{j+1}\,(j \neq 0)$ et $U_0^1 = A'_1 + A_0 - \frac{A'_0}{A_0} A_1$, on a

$$\left|U_0^1\right| \geqslant |A_0| - |A_1|\left(\left|\frac{A'_1}{A_1}\right| + \left|\frac{A'_0}{A_0}\right|\right) \tag{3.2.18}$$

et

$$\left|U_j^1\right| \leqslant |A_j| + |A_{j+1}| \left(\left| \frac{A'_{j+1}}{A_{j+1}} \right| + \left| \frac{A'_0}{A_0} \right| \right), \ j = 1, 2, \cdots, k-1, \ A_k \equiv 1. \tag{3.2.19}$$

D'après le Lemme 3.2.8, Lemme 3.2.9 et (3.2.18) , (3.2.19) , pour tout $\varepsilon\,(0 < 4\varepsilon < \tau - \tau_1)$, il existe un ensemble E_{10} de mesure logarithmique infinie tel que

$$\left|U_0^1\right| \geqslant \exp_p\left\{\left(\tau - \frac{\varepsilon}{4}\right) r^{\rho_2}\right\} - 2\exp_p\left\{\left(\tau_1 + \frac{\varepsilon}{4}\right) r^{\rho_2}\right\} \exp_{p-1}\left\{r^M\right\}$$

$$\geqslant \exp_p\left\{\left(\tau - \frac{\varepsilon}{2}\right) r^{\rho_2}\right\} \tag{3.2.20}$$

et

$$\left|U_j^1\right| \leqslant \exp_p\left\{\left(\tau_1 + \frac{\varepsilon}{4}\right) r^{\rho_2}\right\} + 2\exp_p\left\{\left(\tau_1 + \frac{\varepsilon}{4}\right) r^{\rho_2}\right\} \exp_{p-1}\left\{r^M\right\}$$

$$\leqslant \exp_p\left\{\left(\tau_1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) r^{\rho_2}\right\}, \ j \neq 0, \tag{3.2.21}$$

avec $M > 0$ est une constante, pas nécessairement la même à chaque fois.

(2) Maintenant, on montre que U_j^i $(j = 0, 1, \cdots, k-1)$ vérifie (3.2.17) quand $i = 2$. D'après

$$U_0^2 = U_1^{1'} + U_0^1 - \frac{U_0^{1'}}{U_0^1} U_1^1$$

et

$$U_j^2 = U_{j+1}^{1'} + U_j^1 - \frac{U_0^{1'}}{U_0^1} U_{j+1}^1, \ j = 1, 2, \cdots, k-1, \ U_k^1 \equiv 1,$$

on obtient

$$\left|U_0^2\right| \geqslant \left|U_0^1\right| - \left|U_1^1\right| \left(\left| \frac{U_1^{1'}}{U_1^1} \right| + \left| \frac{U_0^{1'}}{U_0^1} \right| \right) \tag{3.2.22}$$

et

$$\left|U_j^2\right| \leqslant \left|U_j^1\right| + \left|U_{j+1}^1\right| \left(\left| \frac{U_{j+1}^{1'}}{U_{j+1}^1} \right| + \left| \frac{U_0^{1'}}{U_0^1} \right| \right), \ j = 1, 2, \cdots, k-1. \tag{3.2.23}$$

D'après les conclusions de (1) et le Lemme 3.2.8, (3.2.20) – (3.2.23), on obtient pour tout $|z| = r \in E_{10}$

$$\left|U_0^2\right| \geqslant \exp_p\left\{\left(\tau - \frac{\varepsilon}{2}\right) r^{\rho_2}\right\} - 2\exp_p\left\{\left(\tau_1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) r^{\rho_2}\right\} \exp_{p-1}\left\{r^M\right\}$$

$$\geqslant \exp_p\left\{(\tau - \varepsilon)\, r^{\rho_2}\right\} \tag{3.2.24}$$

et

$$\left|U_j^2\right| \leqslant \exp_p\left\{\left(\tau_1+\frac{\varepsilon}{2}\right)r^{\rho_2}\right\}+2\exp_p\left\{\left(\tau_1+\frac{\varepsilon}{2}\right)r^{\rho_2}\right\}\exp_{p-1}\left\{r^M\right\}$$

$$\leqslant \exp_p\left\{\left(\tau_1+\varepsilon\right)r^{\rho_2}\right\},\ j\neq 0. \tag{3.2.25}$$

(3) Supposons que (3.2.17) est vraie pour $i\leqslant n$, $n\in\mathbb{N}$, c'est à dire, pour tout $\varepsilon\,(0<4\varepsilon<\tau-\tau_1)$ donné, il existe un ensemble E_{10} de mesure logarithmique tel que

$$\left|U_j^i\right| \leqslant \exp_p\left\{\left(\tau_1+\varepsilon\right)r^{\rho_2}\right\},\ \ \left|U_0^i\right| \geqslant \exp_p\left\{\left(\tau-\varepsilon\right)r^{\rho_2}\right\},\ i\leqslant n,\ j=1,2,\cdots,k-1. \tag{3.2.26}$$

De $U_0^{n+1}=U_1^{n'}+U_0^n-\frac{U_0^{n'}}{U_0^n}U_1^n$ et $U_j^{n+1}=U_{j+1}^{n'}+U_j^n-\frac{U_0^{n'}}{U_0^n}U_{j+1}^n$ $(j=1,\cdots,k-1)$, $U_k^n\equiv 1$, on a

$$\left|U_0^{n+1}\right| \geqslant \left|U_0^n\right|-\left|U_1^n\right|\left(\left|\frac{U_1^{n'}}{U_1^n}\right|+\left|\frac{U_0^{n'}}{U_0^n}\right|\right) \tag{3.2.27}$$

et

$$\left|U_j^{n+1}\right| \leqslant \left|U_j^n\right|+\left|U_{j+1}^n\right|\left(\left|\frac{U_{j+1}^{n'}}{U_{j+1}^n}\right|+\left|\frac{U_0^{n'}}{U_0^n}\right|\right),\ j=1,2,\cdots,k-1. \tag{3.2.28}$$

Alors, d'après le Lemme 3.2.8 et (3.2.26) – (3.2.28), pour tout $|z|=r\in E_{10}$,

$$\left|U_j^{n+1}\right| \leqslant \exp_p\left\{\left(\tau_1+\varepsilon\right)r^{\rho_2}\right\}+2\exp_p\left\{\left(\tau_1+\varepsilon\right)r^{\rho_2}\right\}\exp_{p-1}\left\{r^M\right\}$$

$$\leqslant \exp_p\left\{\left(\tau_1+2\varepsilon\right)r^{\rho_2}\right\} \tag{3.2.29}$$

pour $j\neq 0$, et

$$\left|U_0^{n+1}\right| \geqslant \exp_p\left\{\left(\tau-\varepsilon\right)r^{\rho_2}\right\}-2\exp_p\left\{\left(\tau_1+\varepsilon\right)r^{\rho_2}\right\}\exp_{p-1}\left\{r^M\right\}$$

$$\geqslant \exp_p\left\{\left(\tau-2\varepsilon\right)r^{\rho_2}\right\}. \tag{3.2.30}$$

D'où la preuve du Lemme 3.2.10.

Lemme 3.2.11 *([13]) Soient $A_0,A_1,\cdots,A_{k-1}$ des fonctions méromorphes d'ordre $p-$itératif fini avec $i(A_0)=p$ $(0<p<\infty)$ telles que* $\max\{\rho_p(A_j):j=1,2,\cdots,k-1\}=\rho_4<\rho_p(A_0)=\rho_3$ *et $\delta=\delta(\infty,A_0)=\liminf\limits_{r\to\infty}\frac{m(r,A_0)}{T(r,f)}>0$. Alors toute solution méromorphe $f\not\equiv 0$ de l'équation (3.1.1) vérifie $\rho_{p+1}(f)\geqslant\rho_p(A_0)=\rho_3$.*

Preuve. On assume que $f(z) \not\equiv 0$ est une solution méromorphe de l'équation $(3.1.1)$. D'après $(3.1.1)$ on a

$$m(r, A_0) \leqslant \sum_{j=1}^{k} m\left(r, \frac{f^{(j)}}{f}\right) + \sum_{j=1}^{k-1} m(r, A_j) + O(1).$$

D'après le Lemme 2.2.3, on obtient

$$m(r, A_0) \leqslant O\{\log rT(r, f)\} + \sum_{j=1}^{k-1} m(r, A_j), \ r \notin E_2, \tag{3.2.31}$$

avec $E_2 \subset [1, +\infty)$ est un ensemble de mesure linéaire finie. D'après le Lemme 3.2.4, il existe un ensemble E_4 de mesure logarithmique infinie tel que pour tout $|z| = r \in E_4$, on a

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log_p T(r, A_0)}{\log r} = \rho_3. \tag{3.2.32}$$

Comme $\delta(\infty, A_0) > 0$, alors pour tout ε $(0 < 2\varepsilon < \min\{\delta, \rho_3 - \rho_4\})$ donné et pour tout $r \in E_4$, d'après $(3.2.32)$, on obtient

$$m(r, A_0) \geqslant (\delta - \varepsilon) T(r, f) \geqslant (\delta - \varepsilon) \exp_{p-1}\left\{r^{\rho_3 - \varepsilon}\right\}. \tag{3.2.33}$$

D'après les équations $(3.2.31)$ et $(3.2.33)$, on a pour tout ε $(0 < 2\varepsilon < \min\{\delta, \rho_3 - \rho_4\})$ donné et pour tout $|z| = r \in E_4 \backslash E_2$

$$(\delta - \varepsilon) \exp_{p-1}\left\{r^{\rho_3 - \varepsilon}\right\} \leqslant O\{\log rT(r, f)\} + (k-1) \exp_{p-1}\left\{r^{\rho_4 + \varepsilon}\right\}. \tag{3.2.34}$$

D'après (3.2.34) et le Lemme 2.2.4, on trouve

$$\rho_{p+1}(f) \geqslant \rho_3. \tag{3.2.35}$$

Lemme 3.2.12 *([13]) Soient $A_0, A_1, \cdots, A_{k-1}$ des fonctions méromorphes d'ordre $p-$itératif fini. S'il existe des constantes positives ρ_5, α, β $(0 < \alpha < \beta)$ et un ensemble E_{11} de mesure logarithmique infinie tels que*

$$|A_0(z)| \geqslant \exp_p\{\beta r^{\rho_5}\} \tag{3.2.36}$$

et

$$\max\{|A_j(z)| : \ j = 1, 2, \cdots, k-1\} \leqslant \exp_p\{\alpha r^{\rho_5}\} \tag{3.2.37}$$

est vrai pour tout $|z| = r \in E_{11}$. Alors toute solution méromorphe $f \not\equiv 0$ de l'équation (3.1.1) vérifie $\rho_{p+1}(f) \geqslant \rho_5$.

Preuve. On assume que $f \not\equiv 0$ est une solution méromorphe de l'équation (3.1.1). D'après (3.1.1) , on obtient

$$|A_0| \leqslant \left|\frac{f^{(k)}}{f}\right| + \sum_{j=1}^{k-1} |A_j| \left|\frac{f^{(j)}}{f}\right|. \tag{3.2.38}$$

D'après le Lemme 3.2.7, il existe un ensemble E_7 de mesure logarithmique finie tel que pour tout $|z| = r \notin E_7$, on a

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right| \leqslant B\left[T(2r, f)\right]^{k+1}, \ j = 1, 2, \cdots, k, \tag{3.2.39}$$

avec $B > 0$ est une constante. Substituons (3.2.36) , (3.2.37) et (3.2.39) dans (3.2.38), on obtient pour tout $|z| = r \in E_{11} - E_7$

$$\exp_p\{\beta r^{\rho_5}\} \leqslant Bk\left[T(2r, f)\right]^{k+1} \exp_p\{\alpha r^{\rho_5}\}. \tag{3.2.40}$$

Comme $0 < \alpha < \beta$, alors d'après (3.2.40) , et Lemme 2.2.4, on peut déduire que $i(f) \geqslant p+1$ et

$$\rho_{p+1}(f) \geqslant \rho_5.$$

Lemme 3.2.13 *([22]) Soit $p \geqslant 1$ un entier et soit $f(z)$ une solution méromorphe de l'équation différentielle*

$$f^{(k)} + A_{k-1} f^{(k-1)} + \cdots + A_0 f = F,$$

avec $A_0, A_1, \cdots, A_{k-1}$ et $F \not\equiv 0$ sont des fonctions méromorphes

(i) Si $\max\left\{\rho_p(F), \rho_p(A_j) \ \ (j = 0, 1, 2, \cdots, k-1)\right\} < \rho_p(f) = \rho \leqslant \infty$, alors $\overline{\lambda}_p(f) = \lambda_p(f) = \rho_p(f)$.

(ii) Si $\max\left\{\rho_{p+1}(F), \rho_{p+1}(A_j) \ \ (j = 0, 1, 2, \cdots, k-1)\right\} < \rho_{p+1}(f) = \rho < \infty$, alors $\overline{\lambda}_{p+1}(f) = \lambda_{p+1}(f) = \rho_{p+1}(f)$.

Lemme 3.2.14 *([50]) Soient $A_0(z), \cdots, A_{k-1}(z)$ des fonctions entières telles que $i(A_0) = p$ $(0 < p < \infty)$. Si ou bien $\max\{i(A_j) : j = 1, 2, \cdots, k-1\} < p$ ou $\max\{\rho_p(A_j) : j = 1, 2, \cdots, k-1\} < \rho_p(A_0)$, alors toute solution $f \not\equiv 0$ de (1.1) vérifie $i(f) = p+1$ et $\rho_{p+1}(f) = \rho_p(A_0)$.*

Lemme 3.2.15 *([3]) Soient $A_0, A_1, \cdots, A_{k-1}$ des fonctions entières d'ordre $p-$itératif fini, et soit $i(A_0) = p\,(0 < p < \infty)$. Supposons que* $\max\{\rho_p(A_j) : j = 1, 2, \cdots, k-1\} \leqslant \rho_p(A_0) = \rho(0 < \rho < \infty)$ *et* $\max\{\tau_p(A_j) : \rho_p(A_j) = \rho_p(A_0)\} < \tau_p(A_0) = \tau\ (0 < \tau < \infty)$*. Alors toute solution $f \not\equiv 0$ de l'équation (3.1.1) vérifie $i(f) = p+1$ et $\rho_{p+1}(f) = \rho_p(A_0) = \rho$.*

Preuve des Théorèmes

Preuve du Théorème 3.2.1

On considere deux cas.

Cas 1. Supposons que $\max\left\{\rho_p(A_j) : j = 1, 2, \cdots, k-1\right\} < \rho_p(A_0) < \infty$.

(i) Premièrement, on montre que $\overline{\lambda}_{p+1}(f-\varphi) = \lambda_{p+1}(f-\varphi) = \rho_{p+1}(f) = \rho_p(A_0)$. On assume que $f \not\equiv 0$ est une solution de (3.1.1). D'après le Lemme 3.2.14, on a $\rho_{p+1}(f) = \rho_p(A_0)$. Posons $g = f - \varphi$. Comme $\rho_{p+1}(\varphi) < \rho_p(A_0)$, alors $\rho_{p+1}(g) = \rho_{p+1}(f) = \rho_p(A_0)$ et $\overline{\lambda}_{p+1}(g) = \overline{\lambda}_{p+1}(f-\varphi)$, $\lambda_{p+1}(g) = \lambda_{p+1}(f-\varphi)$. En substituant $f = g + \varphi$ dans l'équation (3.1.1), on trouve que g vérifie l'équation

$$g^{(k)} + A_{k-1}g^{(k-1)} + \cdots + A_0 g = -\left[\varphi^{(k)} + A_{k-1}\varphi^{(k-1)} + \cdots + A_0\varphi\right]. \qquad (3.2.41)$$

Posons $F = \varphi^{(k)} + A_{k-1}\varphi^{(k-1)} + \cdots + A_0\varphi$. Si $F \equiv 0$, alors d'après le Lemme 3.2.14, on a $\rho_{p+1}(\varphi) = \rho_p(A_0)$, qui est une contradiction. Donc $F \not\equiv 0$. D'après les hypothèses du Théorème 3.1.2, on trouve

$$\max\left\{\rho_{p+1}(F),\ \rho_{p+1}(A_j)\ \ (j = 0, 1, 2, \cdots, k-1)\right\} < \rho_{p+1}(g) = \rho_p(A_0).$$

D'après le Lemme 3.2.13 (ii), on a $\overline{\lambda}_{p+1}(f-\varphi) = \lambda_{p+1}(f-\varphi) = \rho_{p+1}(f) = \rho_p(A_0)$.

(ii) Deuxièment, on montre que $\overline{\lambda}_{p+1}(f'-\varphi) = \lambda_{p+1}(f'-\varphi) = \rho_{p+1}(f) = \rho_p(A_0)$. Posons $g_1 = f' - \varphi$, alors $\rho_{p+1}(g_1) = \rho_{p+1}(f) = \rho_p(A_0)$. D'après le Lemme 3.2.1, on trouve que g_1 vérifie l'équation $(3.2.1)$. Posons $F_1 = \varphi^{(k)} + U^1_{k-1}\varphi^{(k-1)} + \cdots + U^1_0\varphi$, avec $U^1_j(j = 0, 1, \cdots, k-1)$ cités dans le Lemme 3.2.1. Si $F_1 \equiv 0$, alors d'après le Lemme 3.2.5 et le Lemme 3.2.6, on obtient $\rho_{p+1}(\varphi) \geqslant \rho_p(A_0)$, contradiction avec $\rho_{p+1}(\varphi) < \rho_p(A_0)$. Donc $F_1 \not\equiv 0$. D'après le Lemme 3.2.13 (ii), on a

$$\overline{\lambda}_{p+1}(f' - \varphi) = \lambda_{p+1}(f' - \varphi) = \rho_{p+1}(f) = \rho_p(A_0).$$

(iii) Maintenant, on montre que $\overline{\lambda}_{p+1}(f'' - \varphi) = \lambda_{p+1}(f'' - \varphi) = \rho_{p+1}(f) = \rho_p(A_0)$. Posons $g_2 = f'' - \varphi$, alors $\rho_{p+1}(g_2) = \rho_{p+1}(f) = \rho_p(A_0)$. D'après le Lemme 3.2.1, on trouve que g_2 vérifie l'équation (3.2.1). Posons $F_2 = \varphi^{(k)} + U_{k-1}^2 \varphi^{(k-1)} + \cdots + U_0^2 \varphi$, avec $U_j^2 (j = 0, 1, \cdots, k-1)$ cités dans le Lemme 3.2.1. Si $F_2 \equiv 0$, alors d'après le Lemme 3.2.5 et le Lemme 3.2.6, on a $\rho_{p+1}(\varphi) \geqslant \rho_p(A_0)$, contradiction avec $\rho_{p+1}(\varphi) < \rho_p(A_0)$. Donc $F_2 \not\equiv 0$. D'après le Lemme 3.2.13 (ii), on a

$$\overline{\lambda}_{p+1}(f'' - \varphi) = \lambda_{p+1}(f'' - \varphi) = \rho_{p+1}(f) = \rho_p(A_0).$$

(iv) On pose $g_3 = f''' - \varphi$, alors $\rho_{p+1}(g_3) = \rho_{p+1}(f) = \rho_p(A_0)$. D'après les Lemmes 3.2.1, 3.2.5, 3.2.6 et le Lemme 3.2.13 (ii), utilisons les mêmes arguments comme dans le Cas 1 (iii), on peut trouver $\overline{\lambda}_{p+1}(f''' - \varphi) = \lambda_{p+1}(f''' - \varphi) = \rho_{p+1}(f) = \rho_p(A_0)$.

(v) On montre que $\overline{\lambda}_{p+1}\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \lambda_{p+1}\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \rho_{p+1}(f) = \rho_p(A_0)$, $i > 3$, $i \in \mathbb{N}$. Posons $g_i = f^{(i)} - \varphi$, alors $\rho_{p+1}(g_i) = \rho_{p+1}(f) = \rho_p(A_0)$. D'après le Lemme 3.2.1, on trouve que g_i vérifie l'équation (3.2.1). Posons $F_i = \varphi^{(k)} + U_{k-1}^i \varphi^{(k-1)} + \cdots + U_0^i \varphi$, avec U_j^i $(j = 0, 1, \cdots, k-1,\ i > 3, i \in \mathbb{N})$ sont cités dans le Lemme 3.2.1. Si $F_i \equiv 0$, alors d'après le Lemme 3.2.5 et le Lemme 3.2.6, on a $\rho_{p+1}(\varphi) \geqslant \rho_p(A_0)$, contradiction avec $\rho_{p+1}(\varphi) < \rho_p(A_0)$. Donc $F_i \not\equiv 0$. D'après le Lemme 3.2.13 (ii), on obtient $\overline{\lambda}_{p+1}\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \lambda_{p+1}\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \rho_{p+1}(f) = \rho_p(A_0)$ $(i > 3,\ i \in \mathbb{N})$.

Cas 2. Supposons que $\max\{\rho_p(A_j) : j = 1, 2, \cdots, k-1\} \leqslant \rho_p(A_0) = \rho$ $(0 < \rho < \infty)$ et $\max\{\tau_p(A_j) : \rho_p(A_j) = \rho_p(A_0)\} < \tau_p(A_0) = \tau$ $(0 < \tau < \infty)$.

(i) Premièrement, on montre que $\overline{\lambda}_{p+1}(f - \varphi) = \lambda_{p+1}(f - \varphi) = \rho_{p+1}(f) = \rho_p(A_0)$. On assume que $f \not\equiv 0$ est une solution de l'équation (3.1.1). D'après le Lemme 3.2.15, on a $\rho_{p+1}(f) = \rho_p(A_0)$. On pose $g = f - \varphi$. Comme $\varphi \not\equiv 0$ est une fonction entière vérifiant $\rho_{p+1}(\varphi) < \rho_p(A_0)$, alors $\rho_{p+1}(g) = \rho_{p+1}(f - \varphi) = \rho_p(A_0)$ et $\overline{\lambda}_{p+1}(g) = \overline{\lambda}_{p+1}(f - \varphi)$,

$\lambda_{p+1}(g) = \lambda_{p+1}(f-\varphi)$. Substituons $f = g+\varphi$ dans l'équation (3.1.1), on trouve que g vérifie (3.2.41). Posons $F = \varphi^{(k)} + A_{k-1}\varphi^{(k-1)} + \cdots + A_0\varphi$. Si $F \equiv 0$, alors d'après le Lemma 3.2.15, on a $\rho_{p+1}(\varphi) = \rho_p(A_0)$, ce qui est une contradiction. Donc $F \not\equiv 0$. D'après les hypothèses du Théorème 3.2.1, on obtient

$$\max\left\{\rho_{p+1}(F),\ \rho_{p+1}(A_j)\ \ (j=0,1,2,\cdots,k-1)\right\} < \rho_{p+1}(g) = \rho_p(A_0).$$

D'après le Lemme 3.2.13 (ii), on obtient $\overline{\lambda}_{p+1}(f-\varphi) = \lambda_{p+1}(f-\varphi) = \rho_{p+1}(f) = \rho_p(A_0)$.

(ii) Maintenant, on montre que $\overline{\lambda}_{p+1}(f'-\varphi) = \lambda_{p+1}(f'-\varphi) = \rho_{p+1}(f) = \rho_p(A_0)$. Posons $g_1 = f'-\varphi$. Comme $\varphi \not\equiv 0$ est une fonction entière vérifiant $\rho_{p+1}(\varphi) < \rho_p(A_0)$, alors $\rho_{p+1}(g_1) = \rho_{p+1}(f) = \rho_p(A_0)$. D'après le Lemme 3.2.1, on trouve que g_1 vérifie l'équation $(3.2.1)$. Si $F_1 \equiv 0$, alors d'après le Lemme 3.2.10 et Lemme 3.2.12, on a $\rho_{p+1}(\varphi) \geqslant \rho_p(A_0)$, contradiction avec $\rho_{p+1}(\varphi) < \rho_p(A_0)$. Donc $F_1 \not\equiv 0$. D'après le Lemme 3.2.13 (ii), on a $\overline{\lambda}_{p+1}(f'-\varphi) = \lambda_{p+1}(f'-\varphi) = \rho_{p+1}(f) = \rho_p(A_0)$. Similaire aux arguments comme dans Cas 1 (iii)$-$(v) et en utilisant les Lemmes 3.2.1, 3.2.10 et 3.2.12, on peut trouver $\overline{\lambda}_{p+1}\left(f^{(i)}-\varphi\right) = \lambda_{p+1}\left(f^{(i)}-\varphi\right) = \rho_{p+1}(f) = \rho_p(A_0)$, $i > 1, i \in \mathbb{N}$. D'où la preuve du Théorème 3.2.1 est complète.

Preuve du Théorème 3.2.2

Comme $A_j(z)$ $(j = 1,\ 2,\ \cdots,\ k-1\ )$ sont des polynômes et A_0 est une fonction entière transcendante avec $0 < \rho_p(A_0) < \infty$, c'est à dire $A_j(z)$ $(j=0,1,2,\cdots,k-1)$ vérifient les conditions du Théorème 3.2.1 (i). En utilisant les mêmes arguments comme dans le Théorème 3.2.1 et le Lemme 3.213 (i), on peut obtenir les conclusions du Théorème 3.2.2 facilement.

Preuve du Théorème 3.2.3

On assume que $f \not\equiv 0$ est une solution méromorphe de l'équation (3.1.1). D'après (3.1.1) on trouve que les pôles de $f(z)$ peuvent seulement se produire sur les pôles de $A_0, A_1, \cdots, A_{k-1}$.

Notons que la multiplicités des pôles de f est uniformément bornée et donc on a

$$N(r,f) \leqslant M_1 \overline{N}(r,f) \leqslant M_1 \sum_{j=0}^{k-1} \overline{N}(r,A_j)$$

$$\leqslant M \max\{N(r,A_j) : j = 0,1,\cdots,k-1\},$$

avec M_1 et M sont des constantes positives. Ce qui donne

$$T(r,f) = m(r,f) + O(\max\{N(r,A_j) : j = 0,1,\cdots,k-1\}). \tag{3.2.42}$$

Appliquons maintenant (3.2.42) avec le Lemme 3.2.3, on obtient

$$\rho_{p+1}(f) \leqslant \rho_p(A_0). \tag{3.2.43}$$

D'après les conditions du Théorème 3.2.3, on peut facilement obtenir les conclusions du Théorème 3.2.3 en utilisant les mêmes arguments comme dans le Théorème 3.2.1, l'estimation (3.2.43), le Lemme 3.2.11 et le Lemme 3.2.13 (ii).

Chapitre 4

Croissance et oscillation des équations différentielles linéaires à coefficients méromorphes d'ordre $[p,q]-\varphi$

Résultats Récents

Pour $n \geq 2$, on considère les équations différentielles linéaires

$$f^{(n)} + A_{n-1}f^{(n-1)} + ... + A_0 f = 0, \tag{4.0.1}$$

$$f^{(n)} + A_{n-1}f^{(n-1)} + ... + A_0 f = F, \tag{4.0.2}$$

avec A_0, $A_1, ...,$ A_{n-1}, F sont des fonctions méromorphes. Dans [48], [49] , Juneja, Kapoor, et Bajpai ont étudié l'ordre $[p,q]$ des fonctions entières et ont obtenu des résultats sur leurs croissance. Conformément aux définitions générales des fonctions entières d'ordre $p-$itérative, dans [58] Liu-Tu-Shi a donné une petite modification de la définition initiale de l'ordre $[p,q]$ donné dans [50] et [52]. Avec ce nouveau concept, l'ordre $[p,q]$ des solutions des équations différentielles linéaires complexes (4.0.1)et (4.0.2) a été amélioré dans le disque unité et dans le plan complexe (voir [3], [4], [6], [55], [58]). Dans [29], I. Chyzhykov, J. Heittokangas et J. Rattya ont introduit la définition de l'ordre φ des fonctions méromorphes dans le disque unité comme suit.

Définition 4.0.2 *([29]) Soit* $\varphi : [0,1) \to (0,+\infty)$ *une fonction croissante non bornée, l'ordre* φ *de* f *dans le disque unité est défini par*

$$\sigma(f,\varphi) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log T(r,f)}{\log \varphi(r)},$$

Récemment, X. Shen, J. Tu et J. Xu ont introduit le concept de l'ordre $[p,q]-\varphi$ des fonctions méromorphes dans le plan complexe pour étudier la croissance et les zéros des équations différentielles de degré deux.

Définition 4.0.3 *([65]) Soit* $\varphi : [0,+\infty) \to (0,+\infty)$ *une fonction croissante non bornée, et* p,q *des entiers positifs vérifiant* $p \geq q \geq 1$. *L'ordre* $[p,q]-\varphi$ *et l'ordre* $[p,q]-\varphi$ *inférieur d'une fonction entière* f *sont définis respectivement par*

$$\begin{aligned}\sigma_{[p,q]}(f,\varphi) &= \limsup_{r\to\infty} \frac{\log_p T(r,f)}{\log_q \varphi(r)};\\ \mu_{[p,q]}(f,\varphi) &= \liminf_{r\to\infty} \frac{\log_p T(r,f)}{\log_q \varphi(r)}.\end{aligned}$$

Définition 4.0.4 *Soit* f *une fonction entière vérifiant* $0 < \sigma_{[p,q]}(f,\varphi) = \sigma < \infty$, *alors le type* $[p,q]-\varphi$ *de* $f(z)$ *est défini par*

$$\tau_{[p,q]}(f,\varphi) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log_p M(r,f)}{\left[\log_{q-1}\varphi(r)\right]^{\sigma}}.$$

Définition 4.0.5 *Soient* p,q *des entiers tels que* $p \geq q \geq 1$. *Soit* f *une fonction entière vérifiant* $0 < \mu_{[p,q]}(f,\varphi) = \mu < \infty$, *le type inférieur* $[p,q]-\varphi$ *de* f *est défini par*

$$\underline{\tau}_{[p,q]}(f,\varphi) = \liminf_{r\to\infty} \frac{\log_p M(r,f)}{\left[\log_{q-1}\varphi(r)\right]^{\mu}},$$

et si f *est méromorphe, alors on a*

$$\tau_{[p,q]}(f,\varphi) = \liminf_{r\to\infty} \frac{\log_p T(r,f)}{\left[\log_{q-1}\varphi(r)\right]^{\mu}}.$$

Définition 4.0.6 *([65]) Soit* f *une fonction entière. L'exposant de convergence* $[p,q]-\varphi$ *des zéros (distincts)* $[p,q]-\varphi$ *de* f *est défini par*

$$\begin{aligned}\lambda_{[p,q]}(f,\varphi) &= \limsup_{r\to\infty} \frac{\log_p n\left(r,\frac{1}{f}\right)}{\log_q \varphi(r)};\\ \bar{\lambda}_{[p,q]}(f,\varphi) &= \limsup_{r\to\infty} \frac{\log_p \bar{n}\left(r,\frac{1}{f}\right)}{\log_q \varphi(r)}.\end{aligned}$$

Et l'exposant des zéros distincts inférieur de f est défini par

$$\underline{\bar{\lambda}}_{[p,q]}(f,\varphi)=\liminf_{r\to\infty}\frac{\log_p \bar{n}\left(r,\frac{1}{f}\right)}{\log_q \varphi(r)}.$$

Remarque 4.0.2 *Si $\varphi(r)=r$ dans les définitions ci-dessus on obtient les définitions de l'ordre $[p,q]$, type et l'exposant de convergence.*

Remarque 4.0.3 *Dans ce chapitre, on assume que $\varphi(r)$ vérifie toujours ces deux conditions (sauf que si ce sera indiqué)*

(i) $\lim\limits_{r\to\infty}\frac{\log_{p+1} r}{\log_q \varphi(r)}=0.$
(ii) $\lim\limits_{r\to\infty}\frac{\log_q \varphi(\alpha r)}{\log_q \varphi(r)}=1$ pour un $\alpha>1$.

De cette remarque on obtient la proposition suivante.

Proposition 4.0.1 *Supposons que $\varphi(r)$ vérifie les deux conditions $(i)-(ii)$:*

1. *Si $f(z)$ est une fonction méromorphe, alors*

$$\begin{aligned}\lambda_{[p,q]}(f,\varphi) &= \limsup_{r\to\infty}\frac{\log_p n\left(r,\frac{1}{f}\right)}{\log_q \varphi(r)}=\limsup_{r\to\infty}\frac{\log_p N\left(r,\frac{1}{f}\right)}{\log_q \varphi(r)};\\ \bar{\lambda}_{[p,q]}(f,\varphi) &= \limsup_{r\to\infty}\frac{\log_p \bar{n}\left(r,\frac{1}{f}\right)}{\log_q \varphi(r)}=\limsup_{r\to\infty}\frac{\log_p \bar{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)}{\log_q \varphi(r)}.\end{aligned}$$

2. *$f(z)$ est une fonction méromorphe, alors*

$$\underline{\bar{\lambda}}_{[p,q]}(f,\varphi)=\liminf_{r\to\infty}\frac{\log_p \bar{n}\left(r,\frac{1}{f}\right)}{\log_q \varphi(r)}=\liminf_{r\to\infty}\frac{\log_p \bar{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)}{\log_q \varphi(r)}$$

Preuve. Pour la démonstration de 1. voir ([29]). On démontre 2.. On a

$$\bar{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)=\int_0^r\frac{\bar{n}\left(t,\frac{1}{f}\right)-\bar{n}\left(0,\frac{1}{f}\right)}{t}dt+\bar{n}\left(0,\frac{1}{f}\right)\log r.$$

Il s'ensuit que pour $r > r_0 > 1$

$$\begin{aligned}
\bar{N}\left(r,\frac{1}{f}\right) - \bar{N}\left(r_0,\frac{1}{f}\right) &= \int_0^r \frac{\bar{n}\left(t,\frac{1}{f}\right) - \bar{n}\left(0,\frac{1}{f}\right)}{t}dt + \bar{n}\left(0,\frac{1}{f}\right)\log r \\
&\quad - \left(\int_0^{r_0} \frac{\bar{n}\left(t,\frac{1}{f}\right) - \bar{n}\left(0,\frac{1}{f}\right)}{t}dt + \bar{n}\left(0,\frac{1}{f}\right)\log r_0\right) \\
&= \int_{r_0}^r \frac{\bar{n}\left(t,\frac{1}{f}\right) - \bar{n}\left(0,\frac{1}{f}\right)}{t}dt + \bar{n}\left(0,\frac{1}{f}\right)(\log r - \log r_0)
\end{aligned}$$

$$= \int_{r_0}^r \frac{\bar{n}\left(t,\frac{1}{f}\right)}{t}dt \le \bar{n}\left(r,\frac{1}{f}\right)\log\frac{r}{r_0}. \tag{4.0.3}$$

Alors d'après (4.0.3) et $\lim\limits_{r\to\infty}\frac{\log_{p+1} r}{\log_q \varphi(r)} = 0$, on obtient

$$\liminf_{r\to\infty}\frac{\log_p \bar{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)}{\log_q \varphi(r)} \tag{4.0.4}$$

$$\le \max\left\{\liminf_{r\to\infty}\frac{\log_p \bar{n}\left(r,\frac{1}{f}\right)}{\log_q \varphi(r)},\ \limsup_{r\to\infty}\frac{\log_{p+1} r}{\log_q \varphi(r)}\right\} = \liminf_{r\to\infty}\frac{\log_p \bar{n}\left(r,\frac{1}{f}\right)}{\log_q \varphi(r)}.$$

D'autre part, comme $\alpha > 1$, on a pour $r > 1$

$$\begin{aligned}
\bar{N}\left(\alpha r,\frac{1}{f}\right) &= \int_0^{\alpha r} \frac{\bar{n}\left(t,\frac{1}{f}\right) - \bar{n}\left(0,\frac{1}{f}\right)}{t}dt + \bar{n}\left(0,\frac{1}{f}\right)\log \alpha r \\
&\ge \int_r^{\alpha r} \frac{\bar{n}\left(t,\frac{1}{f}\right) - \bar{n}\left(0,\frac{1}{f}\right)}{t}dt + \bar{n}\left(0,\frac{1}{f}\right)\log \alpha r \\
&\ge \left(\bar{n}\left(r,\frac{1}{f}\right) - \bar{n}\left(0,\frac{1}{f}\right)\right)\log\alpha + \bar{n}\left(0,\frac{1}{f}\right)\log \alpha r \\
&= \bar{n}\left(r,\frac{1}{f}\right)\log\alpha + \bar{n}\left(0,\frac{1}{f}\right)\log r
\end{aligned}$$

$$= \bar{n}\left(r,\frac{1}{f}\right)\log\alpha + \bar{n}\left(0,\frac{1}{f}\right)\log r \ge \bar{n}\left(r,\frac{1}{f}\right)\log\alpha \tag{4.0.5}$$

D'après (4.0.5) et $\lim\limits_{r\to\infty}\frac{\log_{p+1}\varphi(\alpha r)}{\log_q\varphi(r)}=1$, on trouve

$$\begin{aligned}\liminf_{r\to\infty}\frac{\log_p \bar{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)}{\log_q\varphi(r)} &\geq \liminf_{r\to\infty}\left(\frac{\log_p \bar{n}\left(r,\frac{1}{f}\right)}{\log_q\varphi(r)}.\frac{\log_q\varphi(r)}{\log_q\varphi(\alpha r)}\right) \\ &\geq \liminf_{r\to\infty}\frac{\log_p \bar{n}\left(r,\frac{1}{f}\right)}{\log_q\varphi(r)}.\liminf_{r\to\infty}\frac{\log_q\varphi(r)}{\log_q\varphi(\alpha r)} \\ &= \liminf_{r\to\infty}\frac{\log_p \bar{n}\left(r,\frac{1}{f}\right)}{\log_q\varphi(r)}.\end{aligned} \tag{4.0.6}$$

D'après (4.0.4) et (4.0.6), on obtient le résultat.

Plusieurs auteurs ont étudié les propriétés de l'oscillation de l'équation (4.0.1) et ont obtenu beaucoups de résultats quand les coefficients dans (4.0.1) sont des fonctions entières ou méromorphes sous certaines conditions sur l'ordre $[p,q]$. Récemment Hu et Zheng ont étudié la croissance de l'équation (4.0.1) et ont obtenu le résultat suivant.

Théorème A. ([45]) *Soiet p,q des entiers tels que $p\geq q>1$ ou $p>q=1$, et soient $A_0,...,A_{n-1}$ des fonctions méromorphes. Supposons que $\lambda_{[p,q]}\left(\frac{1}{A_0}\right)<\mu_{[p,q]}(A_0)<\infty$, et que* $\max\left\{\sigma_{[p,q]}(A_j), j=1,...,n-1\right\}\leq\mu_{[p,q]}(A_0)$ *et* $\max\left\{\tau_{[p,q]}(A_j):\sigma_{[p,q]}(A_j)=\mu_{[p,q]}(A_0), j\neq 0\right\}$ $<\underline{\tau}_{[p,q]}(A_0)=\tau$. *Si $f(\neq 0)$ est une solution méromorphe de (4.0.1) vérifiant*

$$\frac{N(r,f)}{\bar{N}(r,f)}<\exp_{p+1}\left\{b\log_q r\right\}\quad\left(\ b\leq\mu_{[p,q]}(A_0)\ \right),$$

alors on a

$$\begin{aligned}\underline{\bar{\lambda}}_{[p+1,q]}(f-\psi) &= \mu_{[p+1,q]}(f)=\mu_{[p,q]}(A_0)\\ &\leq \sigma_{[p,q]}(A_0)=\sigma_{[p+1,q]}(f)=\bar{\lambda}_{[p+1,q]}(f-\psi),\end{aligned}$$

avec $\psi(z)(\neq 0)$ est une fonction méromorphe telle que $\sigma_{[p+1,q]}(\psi)<\mu_{[p,q]}(A_0)$.

Théorème B. ([45]) *Soient p,q des entiers tels que $p\geq q>1$ ou $p>q=1$, et soient $A_0,...,A_{n-1}$ des fonctions méromorphes. supposons que $\lambda_{[p,q]}\left(\frac{1}{A_0}\right)<\mu_{[p,q]}(A_0)<\infty$, et que* $\max\left\{\sigma_{[p,q]}(A_j), j=1,...,n-1\right\}\leq\mu_{[p,q]}(A_0)$ *et* $\limsup\limits_{r\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{n-1}\frac{m(r,A_j)}{m(r,A_0)}<1$. *Si $f(\neq 0)$ est une* *solution méromorphe de l'équation* (4.0.1) *vérifiant*

$$\frac{N(r,f)}{\bar{N}(r,f)} < \exp_{p+1}\left\{b\log_q r\right\} \quad \left(b \leq \mu_{[p,q]}(A_0)\right),$$

alors on a

$$\begin{aligned} \underline{\bar{\lambda}}_{[p+1,q]}(f-\psi) &= \mu_{[p+1,q]}(f) = \mu_{[p,q]}(A_0) \\ &\leq \sigma_{[p,q]}(A_0) = \sigma_{[p+1,q]}(f) = \bar{\lambda}_{[p+1,q]}(f-\psi), \end{aligned}$$

avec $\psi(z)(\neq 0)$ *est une fonction méromorphe telle que* $\sigma_{[p+1,q]}(\psi) < \mu_{[p,q]}(A_0)$.

Pour le cas où le coefficient A_0 est remplacé par un coefficient arbitraire A_s ($s \in \{1,...,n-1\}$), ils ont obtenu le résultat suivant.

Théorème C. ([65]) *Soient* p,q *des entiers tels que* $p \geq q \geq 1$, *et* $A_0,...,A_{n-1}$ *des fonctions méromorphes. Supposons qu'il existe un* $A_s\,(0 \leq s \leq n-1)$ *avec* $\lambda_{[p,q]}\left(\frac{1}{A_s}\right) < \mu_{[p,q]}(A_s) < \infty$ *et que* $\max\left\{\sigma_{[p,q]}(A_j), j \neq s\right\} \leq \mu_{[p,q]}(A_s)$ *et* $\max\left\{\tau_{[p,q]}(A_j) : \sigma_{[p,q]}(A_j) = \mu_{[p,q]}(A_s), j \neq s\right\} < \underline{\tau}_{[p,q]}(A_s) = \tau$. *Alors toute solution méromorphe* $f(\neq 0)$ *de* (4.0.1) *vérifiant*

$$\frac{N(r,f)}{\bar{N}(r,f)} < \exp_{p+1}\left\{b\log_q r\right\} \quad \left(b \leq \mu_{[p,q]}(A_0)\right),$$

satisfait

$$\mu_{[p+1,q]}(f) \leq \mu_{[p,q]}(A_s) \leq \mu_{[p,q]}(f) \;\; et \;\; \sigma_{[p+1,q]}(f) \leq \sigma_{[p,q]}(A_s) \leq \sigma_{[p,q]}(f).$$

Et si f *est une solution méromorphe non transcendante de* (4.0.1) *est polynomiale de degré* $\deg(f) \leq s-1$.

Nos Contributions

Le but de ce papier est utiliser le concept des fonctions méromorphes d'ordre $[p,q]-\varphi$ pour améliorer les résultats cité ci-dessus.

Théorème 4.0.4 *Soient p,q des entiers tels que $p\geq q>1$ ou $p>q=1$, et $A_0,...,A_{n-1}$ des fonctions méromorphes. Supposons que $\lambda_{[p,q]}\left(\frac{1}{A_0},\varphi\right)<\mu_{[p,q]}\left(A_0,\varphi\right)<\infty$, et que*
$\max\left\{\sigma_{[p,q]}\left(A_j,\varphi\right),j=1,...,n-1\right\}\leq\mu_{[p,q]}\left(A_0,\varphi\right)$ *et*
$\max\left\{\tau_{[p,q]}\left(A_j,\varphi\right):\sigma_{[p,q]}\left(A_j,\varphi\right)=\mu_{[p,q]}\left(A_0,\varphi\right),j\neq 0\right\}<\underline{\tau}_{[p,q]}\left(A_0,\varphi\right)=\tau$, *et avec φ satisfait les conditions $(i)-(ii)$. Si $f\,(\neq 0)$ est une solution méromorphe de $(4.0.1)$ vérifiant*

$$\frac{N\left(r,f\right)}{\bar{N}\left(r,f\right)}<\exp_{p+1}\left\{b\log_q\varphi\left(r\right)\right\}\quad\left(b\leq\mu_{[p,q]}\left(A_0,\varphi\right)\right),$$

alors on a

$$\underline{\bar{\lambda}}_{[p+1,q]}\left(f-\psi,\varphi\right)=\mu_{[p+1,q]}\left(f,\varphi\right)=\mu_{[p,q]}\left(A_0,\varphi\right)\leq\sigma_{[p,q]}\left(A_0,\varphi\right)=\sigma_{[p+1,q]}\left(f,\varphi\right)=\bar{\lambda}_{[p+1,q]}\left(f-\psi,\varphi\right),$$

avec $\psi\left(z\right)(\neq 0)$ est une fonction méromorphe telle que $\sigma_{[p+1,q]}\left(\psi,\varphi\right)<\mu_{[p,q]}\left(A_0,\varphi\right)$.

Théorème 4.0.5 *Soient p,q des entiers tels que $p\geq q>1$ or $p>q=1$, et $A_0,...,A_{n-1}$ des fonctions méromorphes. Supposons que $\lambda_{[p,q]}\left(\frac{1}{A_0},\varphi\right)<\mu_{[p,q]}\left(A_s,\varphi\right)<\infty$, et que*
$\max\left\{\sigma_{[p,q]}\left(A_j,\varphi\right),j=1,...,n-1\right\}\leq\mu_{[p,q]}\left(A_0,\varphi\right)$ *et* $\limsup\limits_{r\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{n-1}\frac{m(r,A_j)}{m(r,A_0)}<1$, *et avec φ vérifie les conditions the conditions $(i)-(ii)$. Si $f\,(\neq 0)$ est une solution m&romorphe de $(4.0.1)$ vérifiant*

$$\frac{N\left(r,f\right)}{\bar{N}\left(r,f\right)}<\exp_{p+1}\left\{b\log_q\varphi\left(r\right)\right\}\quad\left(b\leq\mu_{[p,q]}\left(A_0,\varphi\right)\right),$$

alors on a

$$\underline{\bar{\lambda}}_{[p+1,q]}\left(f-\psi,\varphi\right)=\mu_{[p+1,q]}\left(f,\varphi\right)=\mu_{[p,q]}\left(A_0,\varphi\right)\leq\sigma_{[p,q]}\left(A_0,\varphi\right)=\sigma_{[p+1,q]}\left(f,\varphi\right)=\bar{\lambda}_{[p+1,q]}\left(f-\psi,\varphi\right),$$

avec $\psi\left(z\right)(\neq 0)$ est une fonction méromorphe telle que $\sigma_{[p+1,q]}\left(\psi,\varphi\right)<\mu_{[p,q]}\left(A_0,\varphi\right)$.

Théorème 4.0.6 *Soient p,q des entiers tels que $p\geq q\geq 1$, et $A_0,...,A_{n-1}$ des fonctions méromorphes. Supposons qu'il existe un $A_s\,(0\leq s\leq n-1)$ avec $\lambda_{[p,q]}\left(\frac{1}{A_s},\varphi\right)<\mu_{[p,q]}\left(A_s,\varphi\right)<\infty$ et que*
$\max\left\{\sigma_{[p,q]}\left(A_j,\varphi\right),j\neq s\right\}\leq\mu_{[p,q]}\left(A_s,\varphi\right)$ *et*

$\max\left\{\tau_{[p,q]}(A_j,\varphi) : \ \sigma_{[p,q]}(A_j,\varphi)=\mu_{[p,q]}(A_s,\varphi),\ j\neq s\right\} < \underline{\tau}_{[p,q]}(A_s,\varphi)=\tau$, *et avec* φ *vérifie les conditions* $(i)-(ii)$. *Alors toute solution méromorphe transcendante* $f\,(\neq 0)$ *de* $(4.0.1)$ *vérifiant*

$$\frac{N(r,f)}{\bar{N}(r,f)} < \exp_{p+1}\left\{b\log_q\varphi(r)\right\} \quad \left(b\leq\mu_{[p,q]}(A_0,\varphi)\right)$$

satisfait

$$\mu_{[p+1,q]}(f,\varphi)\leq\mu_{[p,q]}(A_s,\varphi)\leq\mu_{[p,q]}(f,\varphi) \ \textit{ and } \sigma_{[p+1,q]}(f,\varphi)\leq\sigma_{[p,q]}(A_s,\varphi)\leq\sigma_{[p,q]}(f,\varphi).$$

Et si $f(z)$ *est une solution méromorphe non transcendante de* $(4.0.1)$ *est polynomiale de degré* $\deg(f)\leq s-1$.

Lemmes préliminaires

Lemme 4.0.16 (*[28]*) *Soit* f *est une solution méromorphe de* $(4.0.1)$, *supposons que tous les coefficients* $A_j(z)$ *sont constants. Donnons une constante réelle* $\gamma>1$, *et notons* $T(r)=\sum\limits_{j=0}^{n-1}T(r,A_j)$, *on a*

$$\log m(r,f) < T(r)\left\{(\log r)\log T(r)\right\}^{\gamma},\ \textit{ if } p=0$$

and

$$\log m(r,f) < r^{2p+\gamma-1}T(r)\left\{\log T(r)\right\}^{\gamma},\ \textit{ if } p>0,$$

en dehors d'un ensemble exceptionnel E_p *avec* $\int\limits_{E_p}t^{p-1}dt<+\infty$.

Remarque 4.0.4 *Spécialement, si* $p=0$, *alors l'ensemble exceptionel* E_0 *a une mesure logarithmique finie* $\int\limits_{E_0}\frac{dt}{t}=m_lE_0$.

Lemme 4.0.17 (*[2], [37]*) *Soit* $g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $h:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ *une fonction monotone croissante. Si* (i) $g(r)\leq h(r)$ *en dehors d'un ensemble exceptionel de mesure linéaire finie, ou* (ii) $g(r)\leq h(r)$, $r\notin E_1\cup(0,1]$, *avec* $E_1\subset[1,\infty)$ *est un ensemble de mesure logarithmique finie, alors pour tout* $\beta>1$, *il existe* $r_0=r_0(\beta)>0$ *tel que* $g(r)\leq h(\beta r)$ *pour tout* $r>r_0$.

Lemme 4.0.18 *([41]) Soient f une fonction méromorphe transcendante et $n \geq 1$ un entier. Alors*

$$m\left(r, \frac{f^{(n)}}{f}\right) = O\left(\log\left(rT\left(r,f\right)\right)\right)$$

en dehors d'un ensemble exceptionel E_3 de mesure linéaire finie, et si f est d'ordre fini, alors

$$m\left(r, \frac{f^{(n)}}{f}\right) = O\left(\log r\right).$$

Lemme 4.0.19 *Soit f une fonction méromorphe vérifiant $\mu_{[p,q]}\left(f,\varphi\right) = \mu < \infty$ avec $\varphi\left(r\right)$ vérifie seulement $\lim\limits_{r\to\infty} \frac{\log_q \varphi(\alpha r)}{\log_q \varphi(r)} = 1$ pour un certain $\alpha > 1$. Alors il existe un ensemble $E_4 \subset (1,\infty)$ de mesure logarithmique infinie tel que pour tout $r \in E_4$, on a*

$$\mu = \lim_{\substack{r\to\infty \\ r\in E_3}} \frac{\log_p T\left(r,f\right)}{\log_q \varphi\left(r\right)}, \quad \left(\sigma = \lim_{\substack{r\to\infty \\ r\in E_3}} \frac{\log_p T\left(r,f\right)}{\log_q \varphi\left(r\right)}\right)$$

et pour tout $\varepsilon > 0$ donné et un $r \in E_3$ suffisamment large

$$T\left(r,f\right) < \exp_p\left\{\left(\mu+\varepsilon\right)\log_q \varphi\left(r\right)\right\} \quad \left(T\left(r,f\right) > \exp_p\left\{\left(\sigma-\varepsilon\right)\log_q \varphi\left(r\right)\right\}\right).$$

Preuve. On démontre tout d'abord la première relation, pour la deuxième on utilise la même preuve. D'après la Définition 4.0.2, il existe une suite croissante $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers ∞ vérifiant $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)r_n < r_{n+1}$ et

$$\mu = \mu_{[p,q]}\left(f,\varphi\right) = \lim_{r_n\to\infty} \frac{\log_p T\left(r_n,f\right)}{\log_q \varphi\left(r_n\right)}.$$

Alors pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe un n_1 tel que pour $n \geq n_1$ et pour tout $r \in \left[r_n, \left(1+\frac{1}{n}\right)r_n\right]$, on a

$$\frac{\log_p T\left(r,f\right)}{\log_q \varphi\left(r\right)} \leq \frac{\log_p T\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)r_n, f\right)}{\log_q \varphi\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)r_n\right)} \frac{\log_q \varphi\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)r_n\right)}{\log_q \varphi\left(r_n\right)}.$$

Quand $q \geq 1$, on a $\frac{\log_q \varphi\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)r_n\right)}{\log_q \varphi(r_n)} \to 1 \ (n\to+\infty)$. Soit $E_3 = \cup_{n=n_1}^{\infty}\left[r_n, \left(1+\frac{1}{n}\right)r_n\right]$, pour tout $\varepsilon > 0$ donné, et pour tout $r \in E_3$, on a

$$\lim_{\substack{r\to\infty \\ r\in E_3}} \frac{\log_p T\left(r,f\right)}{\log_q \varphi\left(r\right)} \leq \lim_{\substack{r\to\infty \\ r\in E_3}} \frac{\log_p T\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)r_n, f\right)}{\log_q \varphi\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)r_n\right)} = \mu_{[p,q]}\left(f,\varphi\right),$$

avec $m_l E_3 = \sum\limits_{n=n_1}^{\infty} \int\limits_{r_n}^{\left(1+\frac{1}{n}\right)r_n} \frac{dt}{t} = \sum\limits_{n=n_1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \infty$. D'autre part, on a

$$\lim_{\substack{r\to\infty \\ r\in E_3}} \frac{\log_p T(r,f)}{\log_q \varphi(r)} \geq \liminf_{r\to\infty} \frac{\log_p T(r,f)}{\log_q \varphi(r)} = \mu_{[p,q]}(f,\varphi).$$

Donc

$$\lim_{\substack{r\to\infty \\ r\in E_3}} \frac{\log_p T(r,f)}{\log_q \varphi(r)} = \mu_{[p,q]}(f,\varphi)$$

et pour tout $\varepsilon > 0$ donné et un $r \in E_3$ suffisamment large

$$T(r,f) < \exp_p\left\{(\mu + \varepsilon)\log_q \varphi(r)\right\}.$$

Lemme 4.0.20 *Soient f_1, f_2 des fonctions méromorphe d'ordre $[p,q]-\varphi$ vérifiant $\sigma_{[p,q]}(f_1,\varphi) > \sigma_{[p,q]}(f_2,\varphi)$. Alors il existe un ensemble $E_4 \subset (1,+\infty)$ de mesure logarithmique infinie tel que pour tout $r \in E_4$, on a*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{T(r,f_2)}{T(r,f_1)} = 0.$$

Preuve. Soit $\sigma_1 = \sigma_{[p,q]}(f_1,\varphi)$, $\sigma_2 = \sigma_{[p,q]}(f_2,\varphi)\,(\sigma_1 > \sigma_2)$.D'après le Lemme 4.0..4, il existe un ensemble $E_4 \subset (1,+\infty)$ ayant une mesure logarithmique infinie tel que pour tout $0 < \varepsilon < \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$ et pour un $r \in E_4$

$$T(r,f_1) > \exp_p\left\{(\sigma_1 - \varepsilon)\log_q \varphi(r)\right\},$$

et pour un r suffisamment large

$$T(r,f_2) < \exp_p\left\{(\sigma_2 + \varepsilon)\log_q \varphi(r)\right\}.$$

De cela on obtient

$$\begin{aligned} \frac{T(r,f_2)}{T(r,f_1)} &< \frac{\exp_p\left\{(\sigma_2+\varepsilon)\log_q \varphi(r)\right\}}{\exp_p\left\{(\sigma_1-\varepsilon)\log_q \varphi(r)\right\}} \\ &= \exp\left\{\exp_{p-1}\left\{(\sigma_2+\varepsilon)\log_q \varphi(r)\right\} - \exp_{p-1}\left\{(\sigma_1-\varepsilon)\log_q \varphi(r)\right\}\right\},\ r \in E_4. \end{aligned}$$

Comme $0 < \varepsilon < \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$, alors

$$\lim_{r\to\infty} \frac{T(r,f_2)}{T(r,f_1)} = 0,\ r \in E_4.$$

Remarque 4.0.5 *Si $\mu_{[p,q]}(f_1,\varphi) > \mu_{[p,q]}(f_2,\varphi)$, alors on obtient le même résultat.*

Lemme 4.0.21 *Soient* p,q *des entiers tels que* $p\geq q\geq 1$, *et soient* $A_0,...,A_{n-1}$, $F\,(\neq 0)$ *des fonctions méromorphes. Si* f *est une solution méromorphe de (4.0.2) vérifiant*

$$\max\left\{\sigma_{[p,q]}\left(F,\varphi\right),\sigma_{[p,q]}\left(A_j,\varphi\right),j=0,...,n-1\right\}<\mu_{[p,q]}\left(f,\varphi\right),$$

alors on a

$$\underline{\bar{\lambda}}_{[p,q]}\left(f,\varphi\right)=\underline{\lambda}_{[p,q]}\left(f,\varphi\right)=\mu_{[p,q]}\left(f,\varphi\right),$$

avec φ *vérifie les conditions* $(i)-(ii)$ *de la Remarque 4.0.2.*

Preuve. D'après (4.0.2) ,on obtient

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{F}\left(\frac{f^{(n)}}{f}+A_{n-1}\frac{f^{(n-1)}}{f}+...+A_0\right),\tag{4.0.7}$$

il est simple à vérifier que si f a un zéro en z_0 d'ordre $\alpha\,(\alpha>k)$, et $A_0,...,A_{n-1}$ sont analytiques en z_0, alors F doit avoir un zéro en z_0 d'ordre $\alpha-k$, donc

$$N\left(r,\frac{1}{f}\right)\leq k\bar{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+N\left(r,\frac{1}{F}\right)+\sum_{j=0}^{n-1}N\left(r,A_j\right).\tag{4.0.8}$$

D'après le Lemme 4.0.4 et (4.0.7), on a

$$m\left(r,\frac{1}{f}\right)\leq m\left(r,\frac{1}{F}\right)+\sum_{j=0}^{n-1}m\left(r,A_j\right)+O\left(\log T\left(r,f\right)+\log r\right)\quad(r\notin E_2)\tag{4.0.9}$$

avec $E_2\subset(1,+\infty)$ est un ensemble de mesure linéaire finie. D'après $(4.0.8)-(4.0.9)$, on a

$$T\left(r,f\right)=T\left(r,\frac{1}{f}\right)+O\left(1\right)\leq k\bar{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+T\left(r,F\right)\tag{4.0.10}$$

$$+\sum_{j=0}^{n-1}T\left(r,A_j\right)+O\left\{\log\left(rT\left(r,f\right)\right)\right\},\ r\notin E_3..$$

Comme $\max\left\{\sigma_{[p,q]}\left(F,\varphi\right),\ \sigma_{[p,q]}\left(A_j,\varphi\right),\ j=0,...,n-1\right\}<\mu_{[p,q]}\left(f,\varphi\right)$, alors

$$\max\left\{\frac{T\left(r,F\right)}{T\left(r,f\right)},\ \frac{T\left(r,A_j\right)}{T\left(r,f\right)}\left(j=0,...,n-1\right)\right\}\to 0,\ r\to+\infty.\tag{4.0.11}$$

Aussi, pour un r suffisamment large, on a

$$\log T\left(r,f\right)=o\left\{T\left(r,f\right)\right\}.\tag{4.0.12}$$

D'après $(4.0.11)-(4.0.12)$, pour tout $|z|=r\notin E_2$, on a

$$(1-o(1))\,T(r,f)\leq O\left\{\bar{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)\right\}. \tag{4.0.13}$$

D'après (4.0.13) et le Lemme 4.0.2, on a

$$\mu_{[p,q]}(f,\varphi)\leq\underline{\bar{\lambda}}_{[p,q]}(f,\varphi). \tag{4.0.14}$$

Comme $\mu_{[p,q]}(f,\varphi)\geq\underline{\lambda}_{[p,q]}(f,\varphi)\geq\underline{\bar{\lambda}}_{[p,q]}(f,\varphi)$, et d'après $(4.0.14)$, on obtient

$$\underline{\bar{\lambda}}_{[p,q]}(f,\varphi)=\underline{\lambda}_{[p,q]}(f,\varphi)=\mu_{[p,q]}(f,\varphi).$$

En utilisant la même méthode, on peut démontrer facilement le lemme suivant.

Lemme 4.0.22 *Soient p,q des entiers tels que $p\geq q\geq 1$, et soient $A_0,...,A_{n-1}$, $F(\neq 0)$ des focntions méromorphes. Si f est une solution méromorphe de l'équation (4.0.2) vérifiant*

$$\max\left\{\sigma_{[p,q]}(F,\varphi),\sigma_{[p,q]}(A_j,\varphi),\ j=0,...,n-1\right\}<\sigma_{[p,q]}(f,\varphi),$$

alors on a

$$\bar{\lambda}_{[p,q]}(f,\varphi)=\lambda_{[p,q]}(f,\varphi)=\sigma_{[p,q]}(f,\varphi),$$

avec φ satisfait les conditions $(i)-(ii)$ de la Remarque 4.0.2.

Lemme 4.0.23 *Soient p,q des entiers tels que $p\geq q\geq 1$ et soient $A_0,...,A_{n-1}$ des fonctions méromorphes telles que $\left\{\sigma_{[p,q]}(A_j,\varphi):j\neq s\right\}\leq\mu_{[p,q]}(A_s,\varphi)<\infty$, avec $\varphi(r)$ vérifie seulement $\lim\limits_{r\to\infty}\frac{\log_q\varphi(\alpha r)}{\log_q\varphi(r)}=1$ pour $\alpha>1$. Si $f(\neq 0)$ est une solution méromrphe de (4.0.1) vérifiant*

$$\frac{N(r,f)}{\bar{N}(r,f)}<\exp_{p+1}\left\{b\log_q\varphi(r)\right\}\left(b\leq\mu_{[p,q]}(A_s,\varphi)\right),$$

alors on a

$$\mu_{[p+1,q]}(f,\varphi)\leq\mu_{[p,q]}(A_s,\varphi).$$

Preuve. D'après (4.0.1), on sait que les pôles de f peuvent se produire sur les pôles de $A_0, ..., A_{n-1}$. D'après $\frac{N(r,f)}{\bar{N}(r,f)} < \exp_{p+1}\left\{b\log_q\varphi(r)\right\}\left(b \le \mu_{[p,q]}(A_s,\varphi)\right)$, on a

$$N(r,f) < \exp_{p+1}\left\{b\log_q\varphi(r)\right\}\bar{N}(r,f) \le \exp_{p+1}\left\{b\log_q\varphi(r)\right\}\sum_{j=0}^{n-1}\bar{N}(r,A_j)$$

$$\le \exp_{p+1}\left\{b\log_q\varphi(r)\right\}\sum_{j=0}^{n-1}T(r,A_j), \tag{4.0.15}$$

alors d'après (4.0.15), on a

$$T(r,f) \le m(r,f) + \exp_{p+1}\left\{b\log_q\varphi(r)\right\}\sum_{j=0}^{n-1}T(r,A_j) \tag{4.0.16}$$

D'après le Lemme 4.0.7, il existe un ensemble E_3 de mesure logarithmique infinie tel que pour tout $\varepsilon > 0$ et un $r \in E_3$ suffisamment large, on a

$$T(r,A_s) \le \exp_p\left\{\left(\mu_{[p,q]}(A_s,\varphi)+\varepsilon\right)\log_q\varphi(r)\right\} \tag{4.0.17}$$

Comme $\max\left\{\sigma_{[p,q]}(A_j,\varphi) : j \ne s\right\} \le \mu_{[p,q]}(A_s,\varphi)$, pour le même $\varepsilon > 0$ et un r suffisamment large, on a

$$T(r,A_j) \le \exp_p\left\{\left(\mu_{[p,q]}(A_s,\varphi)+\varepsilon\right)\log_q\varphi(r)\right\},\ j \ne s \tag{4.0.18}$$

D'après (4.0.17), (4.0.18) et le Lemme 4.0.1, il existe un ensemble E_0 de mesure logarithmique finie tel que pour un $r \in E_3 \setminus E_0$ suffisamment large

$$m(r,f) \le \exp\left\{\sum_{j=0}^{n-1}T(r,A_j)\left[(\log r)\log\left(\sum_{j=0}^{n-1}T(r,A_j)\right)\right]^{\gamma}\right\}$$

$$\le \exp_{p+1}\left\{\left(\mu_{[p,q]}(A_s,\varphi)+2\varepsilon\right)\log_q\varphi(r)\right\} \tag{4.0.19}$$

D'après (4.0.16) et (4.0.19), on obtient

$$\begin{aligned}\liminf_{r\to\infty}\frac{\log_{p+1}T(r,f)}{\log_q\varphi(r)} &\le \lim\inf_{\substack{r\in E_3\setminus E_0\\ r\to\infty}}\frac{\log_{p+1}T(r,f)}{\log_q\varphi(r)}\\ &\le \mu_{[p,q]}(A_s,\varphi)+3\varepsilon.\end{aligned}$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on a $\mu_{[p+1,q]}(f,\varphi) \le \mu_{[p,q]}(A_s,\varphi)$.

Lemme 4.0.24 *Soient p,q des entiers tels que $p \geq q > 1$ ou $p > q = 1$ et soient $A_0, ..., A_{n-1}$ des fonctions méromorphes. Supposons que $\lambda_{[p,q]}\left(\frac{1}{A_0},\varphi\right) < \mu_{[p,q]}(A_0,\varphi)$ et que $\max\left\{\sigma_{[p,q]}(A_j,\varphi) : j = 1,...,n-1\right\} \leq \mu_{[p,q]}(A_0,\varphi) = \mu,\ 0 < \mu < \infty,$ et $\max\left\{\tau_{[p,q]}(A_j,\varphi) : \sigma_{[p,q]}(A_j,\varphi) = \mu_{[p,q]}(A_0,\varphi), j \neq 0\right\} \leq \underline{\tau}_{[p,q]}(A_0,\varphi) = \tau,\ 0 < \tau < \infty,$ avec $\varphi(r)$ vérifie seulement $\lim\limits_{r\to\infty} \frac{\log_q \varphi(\alpha r)}{\log_q \varphi(r)} = 1$ pour un certain $\alpha > 1$. Si $f\,(\not\equiv 0)$ est une solution méromorphe de $(4.0.1)$, alors on a*

$$\mu_{[p+1,q]}(f,\varphi) \geq \mu_{[p,q]}(A_0,\varphi).$$

Preuve. Supposons que $f\,(\not\equiv 0)$ est une solution méromorphe de $(4.0.1)$. D'après $(4.0.1)$, on obtient

$$-A_0 = \frac{f^{(n)}}{f} + A_{n-1}\frac{f^{(n-1)}}{f} + ... + A_1\frac{f'}{f}. \tag{4.0.20}$$

D'après $\lambda_{[p,q]}\left(\frac{1}{A_0},\varphi\right) < \mu_{[p,q]}(A_0,\varphi)$, on a $N(r,A_0) = o(T(r,A_0)), r \to \infty$. Alors d'après $(4.0.20)$, on trouve

$$T(r,A_0) = m(r,A_0) + N(r,A_0) \leq \sum_{j=1}^{n-1} m(r,A_j) + \sum_{j=1}^{n-1} m\left(r,\frac{f^{(j)}}{f}\right) + o(T(r,A_0)). \tag{4.0.21}$$

Donc, on a d'après $(4.0.21)$ et le Lemme 4.0.3

$$T(r,A_0) \leq O\left(\sum_{j=1}^{n-1} m(r,A_j) + \log(rT(r,f))\right), \tag{4.0.22}$$

pour un $r \to \infty, r \notin E_2$, avec E_2 est un ensemble de mesure linéaire finie.

Posons $b = \max\left\{\sigma_{[p,q]}(A_j,\varphi) : \sigma_{[p,q]}(A_j,\varphi) < \mu_{[p,q]}(A_0,\varphi) = \mu,\ j = 1,...,n-1\right\}$.

Si $\sigma_{[p,q]}(A_j,\varphi) < \mu_{[p,q]}(A_0,\varphi) = \mu$, alors pour tout $\varepsilon\,(0 < 2\varepsilon < \mu - b)$ et pour tout $r \to \infty$, on a

$$m(r,A_j) \leq T(r,A_j) \leq \exp_p\left\{(b+\varepsilon)\log_q \varphi(r)\right\}$$

$$< \exp_p\left\{(\mu-\varepsilon)\log_q \varphi(r)\right\} = \exp_{p-1}\left\{\left(\log_{q-1}\varphi(r)\right)^{\mu-\varepsilon}\right\} \tag{4.0.23}$$

Posons $\tau_1 = \max\left\{\tau_{[p,q]}(A_j,\varphi) : \sigma_{[p,q]}(A_j,\varphi) = \mu_{[p,q]}(A_0,\varphi), j \neq 0\right\}$, alors $\tau_1 < \tau$.

Si $\sigma_{[p,q]}(A_j,\varphi) = \mu_{[p,q]}(A_0,\varphi)$, $\tau_{[p,q]}(A_j,\varphi) \leq \tau_1 < \tau$, alors pour $r \to \infty$ et pour tout $\varepsilon\,(0 < 2\varepsilon < \tau - \tau_1)$, on a

$$m(r,A_j) \leq T(r,A_j) < \exp_{p-1}\left\{(\tau_1+\varepsilon)\left(\log_{q-1}\varphi(r)\right)^{\mu}\right\}. \tag{4.0.24}$$

D'après la définition du type $[p,q]-\varphi$ inférieur, pour $r\to\infty$, on a

$$T(r,A_0)>\exp_{p-1}\left\{(\tau-\varepsilon)\left(\log_{q-1}\varphi(r)\right)^{\mu}\right\},\ r\to\infty. \tag{4.0.25}$$

Quand $p\geq q>1$ ou $p>q=1$, on a pour $r\to\infty$

$$\exp_{p-1}\left\{(\tau_1+\varepsilon)\left(\log_{q-1}\varphi(r)\right)^{\mu}\right\}=o\left(\exp_{p-1}\left\{(\tau-\varepsilon)\left(\log_{q-1}\varphi(r)\right)^{\mu}\right\}\right).$$

En substituant $(4.0.23)-(4.0.25)$ dans $(4.0.22)$, on obtient

$$\exp_{p-1}\left\{(\tau-2\varepsilon)\left(\log_{q-1}\varphi(r)\right)^{\mu}\right\}\leq O\left(\log\left(rT(r,f)\right)\right),\ r\notin E_2,\ r\to\infty. \tag{4.0.26}$$

Alors d'après (4.0.26) et le Lemme 4.0.2, on trouve $\mu_{[p+1,q]}(f,\varphi)\geq\mu_{[p,q]}(A_0,\varphi)$.

Lemme 4.0.25 *Soient p,q des entiers tels que $q\geq q\geq 1$ et soit f une fonction méromorphe avec $0<\sigma_{[p,q]}(f,\varphi)<\infty$, avec $\varphi(r)$ vérifie seulement $\lim\limits_{r\to\infty}\frac{\log_q\varphi(\alpha r)}{\log_q\varphi(r)}=1$ pour $\alpha>1$. Alors pour tout $\varepsilon>0$, il existe un ensemble $E_5\subset(1,\infty)$ de mesure logarithmique infinie tel que*

$$\tau=\tau_{[p,q]}(f,\varphi)=\lim_{\substack{r\to\infty\\ r\in E_5}}\frac{\log_{p-1}T(r,f)}{\left(\log_{q-1}\varphi(r)\right)^{\sigma_{[p,q]}(f,\varphi)}}.$$

Preuve. D'après la définition du type $[p,q]-\varphi$, il existe une suite $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ qui tend vers ∞ vérifiant $\left(1+\frac{1}{n}\right)r_n<r_{n+1}$, et

$$\tau=\tau_{[p,q]}(f,\varphi)=\lim_{r_n\to\infty}\frac{\log_{p-1}T(r_n,f)}{\left(\log_{q-1}\varphi(r_n)\right)^{\sigma_{[p,q]}(f,\varphi)}}.$$

Alors pour $\varepsilon>0$ donné, il existe n_1 tel que pour $n\geq n_1$ et pour tout $r\in\left[r_n,\left(1+\frac{1}{n}\right)r_n\right]$, on a

$$\frac{\log_{p-1}T(r_n,f)}{\left(\log_{q-1}\varphi(r_n)\right)^{\sigma_{[p,q]}(f,\varphi)}}\left(\frac{\log_{q-1}\varphi(r_n)}{\log_{q-1}\varphi\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)r_n\right]}\right)^{\sigma_{[p,q]}(f,\varphi)}\leq\frac{\log_{p-1}T(r,f)}{\left(\log_{q-1}\varphi(r)\right)^{\sigma_{[p,q]}(f,\varphi)}}.$$

Quand $q\geq 1$, on a $\frac{\log_{q-1}r_n}{\log_{q-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)r_n}\to 1$, $r_n\to\infty$. Posons

$$E_5=\bigcup_{n=n_1}^{\infty}\left[r_n,\left(1+\frac{1}{n}\right)r_n\right],$$

alors, on a

$$\lim_{\substack{r\to\infty \\ r\in E_5}} \frac{\log_{p-1} T(r,f)}{\left(\log_{q-1}\varphi(r)\right)^{\sigma_{[p,q]}(f,\varphi)}} \geq \lim_{r_n\to\infty} \frac{\log_{p-1} T(r_n,f)}{\left(\log_{q-1}\varphi(r_n)\right)^{\sigma_{[p,q]}(f,\varphi)}} = \tau_{[p,q]}(f,\varphi),$$

et $\int\limits_{E_5} \frac{dr}{r} = \sum\limits_{n=n_1}^{\infty} \int\limits_{r_n}^{\left(1+\frac{1}{n}\right)r_n} \frac{dt}{t} = \sum\limits_{n=n_1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \infty$. Donc, il est évident que

$$\lim_{\substack{r\to\infty \\ r\in E_5}} \frac{\log_{p-1} T(r,f)}{\left(\log_{q-1}\varphi(r)\right)^{\sigma_{[p,q]}(f,\varphi)}} \leq \limsup_{\substack{r\to\infty \\ r\in E_5}} \frac{\log_{p-1} T(r,f)}{\left(\log_{q-1}\varphi(r)\right)^{\sigma_{[p,q]}(f,\varphi)}} = \tau_{[p,q]}(f,\varphi),$$

on obtient

$$\tau_{[p,q]}(f,\varphi) = \lim_{\substack{r\to\infty \\ r\in E_5}} \frac{\log_{p-1} T(r,f)}{\left(\log_{q-1}\varphi(r)\right)^{\sigma_{[p,q]}(f,\varphi)}}.$$

La preuve du Lemme suivant est essentiellement la même que d'habitude. Pour plus de détails, voir le Chapitre 2 du livre de Goldberg-Ostrovski [33].

Lemme 4.0.26 *Soient $p \geq q \geq 1$ des entiers, et soient f et g des fonctions méromorphes d'ordre $[p,q]-\varphi$. Alors, on a*

$$\sigma_{[p,q]}(f+g,\varphi) \leq \max\left\{\sigma_{[p,q]}(f,\varphi), \sigma_{[p,q]}(g,\varphi)\right\}$$

et

$$\sigma_{[p,q]}(fg,\varphi) \leq \max\left\{\sigma_{[p,q]}(f,\varphi), \sigma_{[p,q]}(g,\varphi)\right\}.$$

En outre, si $\sigma_{[p,q]}(f,\varphi) > \sigma_{[p,q]}(g,\varphi)$, alors on obtient

$$\sigma_{[p,q]}(f+g,\varphi) = \sigma_{[p,q]}(f,\varphi) = \sigma_{[p,q]}(fg,\varphi).$$

Preuves des Théorèmes

Preuve du Théorème 4.0.1

D'après le Lemme 4.0.1 et (4.0.16), on a

$$T(r,f) \leq \exp_{p+1}\left\{\left(\sigma_{[p,q]}(A_0,\varphi)+3\varepsilon\right)\log_q\varphi(r)\right\},$$

pour tout $\varepsilon > 0$ et $r \notin E_0$, $r \to \infty$, avec E_0 est un ensemble de mesure logarithmique finie. D'après le Lemme 4.0.2, on trouve $\sigma_{[p+1,q]}(f,\varphi) \leq \sigma_{[p,q]}(A_0,\varphi)$.

Posons $d=\max\left\{\sigma_{[p,q]}(A_j,\varphi):\ \sigma_{[p,q]}(A_j,\varphi)<\sigma_{[p,q]}(A_0,\varphi),\ j=1,...,n-1\right\}$. Si $\sigma_{[p,q]}(A_j,\varphi)<\mu_{[p,q]}(A_0,\varphi)\leq\sigma_{[p,q]}(A_0,\varphi)$ ou $\sigma_{[p,q]}(A_j,\varphi)\leq\mu_{[p,q]}(A_0,\varphi)<\sigma_{[p,q]}(A_0,\varphi)$, alors pour tout $\varepsilon\left(0<2\varepsilon<\sigma_{[p,q]}(A_0,\varphi)-d\right)$ et un r suffisamment large, on a

$$T(r,A_j)\leq\exp_p\left\{(d+\varepsilon)\log_q\varphi(r)\right\}=\exp_{p-1}\left\{\left(\log_{q-1}\varphi(r)\right)^{d+\varepsilon}\right\}. \tag{4.0.27}$$

Posons $\tau_1=\max\left\{\tau_{[p,q]}(A_j,\varphi):\sigma_{[p,q]}(A_j,\varphi)=\mu_{[p,q]}(A_0,\varphi),j\neq 0\right\}$. Si

$$\sigma_{[p,q]}(A_j,\varphi)=\mu_{[p,q]}(A_0,\varphi)=\sigma_{[p,q]}(A_0,\varphi),$$

alors on a $\tau_1<\tau\leq\tau_{[p,q]}(A_0,\varphi)$. Donc

$$T(r,A_j)\leq\exp_{p-1}\left\{(\tau_1+\varepsilon)\left(\log_{q-1}\varphi(r)\right)^{\sigma_{[p,q]}(A_0,\varphi)}\right\}, \tag{4.0.28}$$

pour tout $r\to\infty$ et pour $\varepsilon\left(0<2\varepsilon<\tau_{[p,q]}(A_0,\varphi)-\tau_1\right)$. D'après la définition du type $[p,q]-\varphi$ et le Lemme 4.0.10, et suffisament large $r\in E_5$, avec E_5 est un ensemble de mesure logarithmique infinie, on a

$$T(r,A_0)>\exp_{p-1}\left\{\left(\tau_{[p,q]}(A_0,\varphi)-\varepsilon\right)\left(\log_{q-1}\varphi(r)\right)^{\sigma_{[p,q]}(A_0,\varphi)}\right\}. \tag{4.0.29}$$

Alors d'après $(4.0.22)$ et $(4.0.27)-(4.0.29)$, et pour r suffisamment large, $r\in E_5\diagdown E_2$ et le même ε, on obtient

$$\exp_{p-1}\left\{\left(\tau_{[p,q]}(A_0,\varphi)-2\varepsilon\right)\left(\log_{q-1}\varphi(r)\right)^{\sigma_{[p,q]}(A_0,\varphi)}\right\}\leq O\left(\log T(r,f)\right), \tag{4.0.30}$$

avec E_2 est un ensemble de mesure linéaire finie. Alors, on a

$$\sigma_{[p+1,q]}(f,\varphi)\geq\sigma_{[p,q]}(A_0,\varphi).$$

Donc, on trouve $\sigma_{[p+1,q]}(f,\varphi)=\sigma_{[p,q]}(A_0,\varphi)$. D'après les Lemmes 4.0.8 et 4.0.9, on a $\mu_{[p+1,q]}(f,\varphi)=\mu_{[p,q]}(A_0,\varphi)$. Maintenant, on a besoin de montrer $\underline{\lambda}_{[p+1,q]}(f-\psi,\varphi)=\mu_{[p+1,q]}(f,\varphi)$ et $\bar{\lambda}_{[p+1,q]}(f-\psi,\varphi)=\sigma_{[p+1,q]}(f,\varphi)$. Posons $g=f-\psi$, comme $\sigma_{[p+1,q]}(\psi,\varphi)<\sigma_{[p,q]}(A_0,\varphi)$, alors d'après le Lemme 4.0.11 on a $\sigma_{[p+1,q]}(g,\varphi)=\sigma_{[p+1,q]}(f,\varphi)=\sigma_{[p,q]}(A_0,\varphi)$, et $\mu_{[p+1,q]}(g,\varphi)=\mu_{[p+1,q]}(f,\varphi)=\mu_{[p,q]}(A_0,\varphi)$, $\bar{\lambda}_{[p+1,q]}(g,\varphi)=\bar{\lambda}_{[p+1,q]}(f,\varphi)$ et $\underline{\lambda}_{[p+1,q]}(g,\varphi)=\underline{\lambda}_{[p+1,q]}(f,\varphi)$. En substituant $f=g+\psi,\ f'=g'+\psi',...,\ f^{(n)}=g^{(n)}+\psi^{(n)}$ dans $(4.0.1)$, on obtient

$$g^{(n)}+A_{n-1}g^{(n-1)}+...+A_0g=-\left[\psi^{(n)}+A_{n-1}\psi^{(n-1)}+...+A_0\psi\right]. \tag{4.0.31}$$

Si $F=\psi^{(n)}+A_{n-1}\psi^{(n-1)}+...+A_0\psi\equiv 0$, alors d'après le Lemme 4.0.9, on a $\mu_{[p+1,q]}(\psi,\varphi)\geq \mu_{[p,q]}(A_0,\varphi)$, ce qui est une contradiction. Donc $F(z)\neq 0$.Comme $F(z)\neq 0$ et

$$\begin{aligned}\sigma_{[p+1,q]}(F,\varphi) &\leq \sigma_{[p+1,q]}(\psi,\varphi)<\mu_{[p,q]}(A_0,\varphi)\\ &= \mu_{[p+1,q]}(f,\varphi)=\mu_{[p+1,q]}(g,\varphi)\leq\sigma_{[p+1,q]}(g,\varphi)=\sigma_{[p+1,q]}(f,\varphi),\end{aligned}$$

d'après le Lemme 4.0.7 et (4.0.31), on obtient $\bar{\lambda}_{[p+1,q]}(g,\varphi)=\lambda_{[p+1,q]}(g,\varphi)=\sigma_{[p+1,q]}(g,\varphi)=\sigma_{[p,q]}(A_0,\varphi)$, i.e. $\bar{\lambda}_{[p+1,q]}(f-\psi,\varphi)=\lambda_{[p+1,q]}(f-\psi,\varphi)=\sigma_{[p+1,q]}(f,\varphi)=\sigma_{[p,q]}(A_0,\varphi)$. D'après le Lemme 4.0.6 et (4.0.31), on a $\underline{\bar{\lambda}}_{[p+1,q]}(g,\varphi)=\mu_{[p+1,q]}(g,\varphi)$, i.e.

$$\underline{\bar{\lambda}}_{[p+1,q]}(f-\psi,\varphi)=\mu_{[p+1,q]}(f,\varphi)=\mu_{[p,q]}(A_0,\varphi).$$

Donc

$$\begin{aligned}\underline{\bar{\lambda}}_{[p+1,q]}(f-\psi,\varphi) &= \mu_{[p+1,q]}(f,\varphi)=\mu_{[p,q]}(A_0,\varphi)\\ &\leq \sigma_{[p,q]}(A_0,\varphi)=\sigma_{[p+1,q]}(f,\varphi)=\bar{\lambda}_{[p+1,q]}(f-\psi,\varphi)=\lambda_{[p+1,q]}(f-\psi,\varphi).\end{aligned}$$

D'où la démonstration du théorème.

Preuve du Théorème 4.0.2

D'après la première partie de la preuve du Théorème 4.0.1, on peut obtenir $\sigma_{[p+1,q]}(f,\varphi)\leq \sigma_{[p,q]}(A_0,\varphi)$. En utilisant

$$\limsup_{r\to\infty}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{m(r,A_j)}{m(r,A_0)}<1, \tag{4.0.32}$$

on a pour $r\to\infty$

$$\sum_{j=1}^{n-1}m(r,A_j)<\delta m(r,A_0), \tag{4.0.33}$$

avec $\delta\in(0,1)$. D'après $\lambda_{[p,q]}\left(\frac{1}{A_0},\varphi\right)<\mu_{[p,q]}(A_0,\varphi)$, on a $N(r,A_0)=o(T(r,A_0))$, $r\to\infty$. D'après (4.0.21) et (4.0.33), pour $r\to\infty$, $r\notin E_2$, on obtient

$$T(r,A_0)=m(r,A_0)+N(r,A_0)\leq\delta T(r,A_0)+O(\log rT(r,f))+o(T(r,A_0)), \tag{4.0.34}$$

avec E_2 est un ensemble de mesure linéaire finie. D'après le Lemme 4.0.2 et (4.0.34), on obtient $\sigma_{[p+1,q]}(f,\varphi)\geq\sigma_{[p,q]}(A_0,\varphi)$. Alors, on a $\sigma_{[p+1,q]}(f,\varphi)=\sigma_{[p,q]}(A_0,\varphi)$. D'après (4.0.34) et le

Lemme 4.0.2, on a $\mu_{[p+1,q]}(f,\varphi) \geq \mu_{[p,q]}(A_0,\varphi)$. D'après le Lemme 4.0.8, on a $\mu_{[p+1,q]}(f,\varphi) \leq \mu_{[p,q]}(A_0,\varphi)$, alors on trouve $\mu_{[p+1,q]}(f,\varphi) = \mu_{[p,q]}(A_0,\varphi)$.
En utilisant la même méthode que la preuve du Théorème 4.0.1, on obtient

$$\begin{aligned}\underline{\bar{\lambda}}_{[p+1,q]}(f-\psi,\varphi) &= \mu_{[p+1,q]}(f,\varphi) = \mu_{[p,q]}(A_0,\varphi) \leq \sigma_{[p,q]}(A_0,\varphi)\\ &= \sigma_{[p+1,q]}(f,\varphi) = \bar{\lambda}_{[p+1,q]}(f-\psi,\varphi) = \lambda_{[p+1,q]}(f-\psi,\varphi).\end{aligned}$$

D'où la preuve complète.

Preuve du Théorème 4.0.3

Supposons que f est une solution rationnelle de (4.0.1). Si f est aussi une fonction rationnelle avec un pôle de multiplicité $n \geq 1$ en z_0 ou polynomiale de degré $\deg(f) \geq s$, alors $f^{(s)}(z) \neq 0$. Si $\max\left\{\sigma_{[p,q]}(A_j,\varphi),\ j \neq s\right\} < \mu_{[p,q]}(A_s,\varphi) = \mu$, alors on a

$$\mu_{[p,q]}(0,\varphi) = \mu_{[p,q]}\left(f^{(n)} + A_{n-1}f^{(n-1)} + ... + A_0 f,\varphi\right) = \mu_{[p,q]}(A_s,\varphi) = \mu > 0,$$

ce qui est une contradiction. Posons

$$\tau_1 = \max\left\{\tau_{[p,q]}(A_j,\varphi) : \sigma_{[p,q]}(A_j,\varphi) = \mu_{[p,q]}(A_s,\varphi),\ j \neq s\right\}.$$

Si $\sigma_{[p,q]}(A_j,\varphi) = \mu_{[p,q]}(A_s,\varphi)$, $\tau_{[p,q]}(A_j,\varphi) \leq \tau_1 < \tau$, alors on peut choisir des constantes δ_1, δ_2 telles que $\tau_1 < \delta_1 < \delta_2 < \tau$. Alors pour r suffisamment large, on a

$$m(r,A_j) \leq T(r,A_j) \leq \exp_{p-1}\left\{\delta_1\left(\log_{q-1}\varphi(r)\right)^{\mu}\right\}. \tag{4.0.35}$$

Si $\sigma_{[p,q]}(A_j,\varphi) < \mu_{[p,q]}(A_s,\varphi)$, alors pour r suffisamment large et ε $\left(0 < 2\varepsilon < \mu_{[p,q]}(A_s,\varphi) - \sigma_{[p,q]}(A_j,\varphi)\right)$, on obtient

$$m(r,A_j) \leq T(r,A_j) \leq \exp_p\left\{\left(\sigma_{[p,q]}(A_j,\varphi)+\varepsilon\right)\log_q\varphi(r)\right\}. \tag{4.0.36}$$

Sous la supposition que $\lambda_{[p,q]}\left(\frac{1}{A_s},\varphi\right) < \mu_{[p,q]}(A_s,\varphi)$, pour r suffisamment large, on trouve

$$N(r,A_s) = o(T(r,A_s)). \tag{4.0.37}$$

D'après la définition du type $[p,q]-\varphi$ inférieur, pour r suffisamment large, on a

$$T(r,A_s) \geq \exp_{p-1}\left\{\delta_2\left(\log_{q-1}\varphi(r)\right)^{\mu}\right\}. \tag{4.0.38}$$

D'après $(4.0.1)$, on obtient

$$T(r,A_s) \leq N(r,A_s) + \sum_{j\neq s} m(r,A_j) + O(\log r), \tag{4.0.39}$$

pour r suffisamment large. Donc, en substituant $(4.0.36)$, $(4.0.37)$ et $(4.0.38)$ dans $(4.0.39)$ on obtient la contradiction. Donc, si f est une solution méromorphe non-transcendante, alors elle doit être polynomiale de degré $\deg(f) \leq s-1$. Maintenant, on assume que f est une solution méromorphe transcendante de $(4.0.1)$. D'après $(4.0.31)$, on obtient

$$-A_s = \frac{f}{f^{(s)}}\left[\frac{f^{(n)}}{f} + \ldots + A_{s+1}\frac{f^{(s+1)}}{f} + A_{s-1}\frac{f^{(s-1)}}{f} + \ldots + A_0\right]. \tag{4.0.40}$$

Notons que

$$m\left(r,\frac{f}{f^{(s)}}\right) \leq T(r,f) + T\left(r,\frac{1}{f^{(s)}}\right) = T(r,f) + T\left(r,f^{(s)}\right) + O(1).$$

$$\leq T(r,f) + (s+1)\,T(r,f) + O(1). \tag{4.0.41}$$

D'après le Lemme 4.0.3, $(4.0.40)$ et $(4.0.41)$, on obtient

$$\begin{aligned} T(r,A_s) &= m(r,A_s) + N(r,A_s) & (4.0.42)\\ &\leq N(r,A_s) + \sum_{j\neq s} m(r,A_j) + (s+3)\,T(r,f), & (4.0.43)\end{aligned}$$

pour $r \notin E_2$ suffisamment large, avec E_2 est un ensemble de mesure linéaire finie. Alors d'après $(4.0.35)-(4.0.38)$, $(4.0.42)$ et le Lemme 4.0.2, on peut obtenir $\mu_{[p,q]}(f,\varphi) \geq \mu_{[p,q]}(A_s,\varphi)$ and $\sigma_{[p,q]}(f,\varphi) \geq \sigma_{[p,q]}(A_s,\varphi)$. D'après le Lemme 4.0.1 et $(4.0.37)$, on a

$$T(r,f) \leq \exp_{p+1}\left\{\left(\sigma_{[p,q]}(A_s,\varphi) + 3\varepsilon\right)\log_q \varphi(r)\right\}, \tag{4.0.44}$$

pour tout $\varepsilon > 0$, et $r \notin E_0$, $r \to \infty$, avec E_0 est un ensemble de mesure logarithmique finie. Alors d'après $(4.0.44)$ et le Lemme 4.0.2, on a $\sigma_{[p+1,q]}(f,\varphi) \leq \sigma_{[p,q]}(A_s,\varphi)$.

D'après le Lemme 4.0.8, on obtient $\mu_{[p+1,q]}(f,\varphi) \leq \mu_{[p,q]}(A_s,\varphi)$. Alors on trouve $\sigma_{[p+1,q]}(f,\varphi) \leq \sigma_{[p,q]}(A_s,\varphi) \leq \sigma_{[p,q]}(f,\varphi)$ et

$$\mu_{[p+1,q]}(f,\varphi) \leq \mu_{[p,q]}(A_s,\varphi) \leq \mu_{[p,q]}(f,\varphi).$$

Chapitre 5

Sur les équations $p-$adiques

Dans ce chapitre, on donnera après un bref historique sur les équations aux différences et on terminera par énoncer et démontrer nos résultats pricipaux concernant les équations aux $q-$différences.

5.1 Historique

Il est connu que si une fonction méromorphe f, dans tout $\mathbb{C}_p$, vérifie une équation différentielle à coefficients polynômes de $\bar{\mathbb{Q}}[x]$, alors f est une fraction rationnelle.

Théorème 5.1.1 *Soit $s \geq 1$, P_k, $k = 0, ..., s$ des polynômes à coefficients dans $\bar{\mathbb{Q}}$, avec P_s non nul. Soit f une solution méromorphe dans $\mathbb{C}_p$ de l'équation différentielle*

$$P_s(x)\, y^{(s)}(x) + ... + P_0(x)\, y(x) = 0.$$

Alors f est une fraction rationnelle.

Par contre si l'on n'impose plus la condition sur les coefficients de l'équation différentielle d'appartenir à $\bar{\mathbb{Q}}[x]$, alors il existe des telles fonctions transcendantes.

Théorème 5.1.2 *Il existe des solutions entières transcendantes d'équations différentielles linéaires $p-$adiques à coefficients polynômes.*

La question est de voir sous quelle condition, toute solution méromorphe de l'équation

$$Q_s(x)y^{(s)}(x) + ... + Q_0(x)y(x) = 0, \text{ avec } Q_i(x) \in K(x) \text{ et } Q_s(x) \neq 0 \tag{E$_s$}$$

est rationnelle. Il est clai de le voir si $s = 1$. Pour $s \geq 2$, le problème est plus difficile. D'ailleurs, dans [10], Boutabaa a démontré le résultat suivant.

Théorème 5.1.3 *Supposons que l'équation (E_s) est telle que $Q_0(x), ..., Q_s(x) \in \bar{\mathbb{Q}}(x)$ et soit $y(x) \in M(\mathbb{C}_p)$ une solution de (E_s). Alors $y(x) \in \mathbb{C}_p(x)$.*

Remarque 5.1.1 *Si les coefficients ne sont pas tous dans $\bar{\mathbb{Q}}(x)$ alors la conclusion du théorème n'est pas vraie comme le montre la proposition suivante qui répond à la question posée par P. C. Hu and C. C. Yang [78].*

Proposition 5.1.1 *([18]) On considère l'équation différentielle linéaire*

$$A(x)y^{'}(x) + B(x)y(x) = 0, \text{ avec } A(x), B(x) \in K(x) \text{ et } A(x) \neq 0. \tag{E$_1$}$$

Soit $y(x) \in M(\Bbbk)$ une solution de (E_1). Alors $y(x) \in \Bbbk(x)$.

Et comme exemple d'application, il a démontré le résultat suivant.

On considère $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f\left(0\right) = 0$ et $f\left(n+1\right) = p^{f(n)+n}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Donc on a $\frac{f(n+1)}{p^{f(n)}} = p^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
Soit $a = -\sum\limits_{j\geq 1} p^{f(2j)}$ et $b = -\sum\limits_{j\geq 1} p^{f(2j+1)}$. On remarque que $a, b \in \mathbb{Z}_p$ et on peut facilement vérifier que a et b sont des nombres de Liouville $p-$adique. Donc a et b sont transcendants. Soit $c \in \mathbb{C}_p$ tel que $\upsilon\left(c\right) \leq \frac{-1}{p-1}$. Considerons la fonction hyper-géometrique

$$\varphi(x) = F(a, b, c; x) = \sum_{n\geq 0} \left(\frac{(a)_n (b)_n}{n!} (c)_n\right) x^n.$$

Théorème 5.1.4 *([18]) Sous les conditions ci-dessus, on a*

1. $\varphi(x) \in A(\mathbb{C}_p)$.
2. $\varphi(x)$ *est une solution de l'équation différentielle*

$$D^2y + \frac{c-(a+b+1)x}{x(1-x)}Dy - \frac{ab}{x(1-x)}y = 0, \text{ avec } D = \frac{d}{dx}.$$

On peut voir les équations aux $q-$différences comme des «équations différentielles discrétisées», ou alternativement on peut voir les équations différentielles comme «équations aux $q-$différences dont la limite de la différence tend vers zéro". Cela montre que les deux sujets sont très étroitement liés.

5.2 Résultats

Soit q un élément de $\mathbb{k}$ (ou bien $\mathbb{C}_p$) diffèrent de la racine de l'unité. Dans ce qui suit, on introduit les opérateurs aux q-différences D_q et σ_q pour des fonctions définies dans $\mathbb{k}$ ou bien $\mathbb{C}_p$. On donne aussi la notion du $q-$Wronskien généralisé pour une famille finie de fonctions. On démontre tout d'abord quelques inégalités liant la croissance de chaque q-Wronskien généralisé d'une famille finie de fonctions avec la croissance du q-Wronskien ordinaire pour la même famille de fonctions.

Il s'en suit que si le $q-$Wronskien d'une famille finie de fonctions entières dans $\mathbb{k}$ est un polynôme, alors tous les éléments de cette famille sont des polynômes.

On continue avec l'étude des équations aux q-différences à coefficients dans $\mathbb{k}[x]$ ou bien dans $\mathbb{C}_p[x]$. On démontre que si une équation d'ordre "s" a "s" méromorphes solutions, linéairement indépendantes, alors cette équation a s solutions rationnelles linéairement indépendantes.

Finalement, pour des équations aux q-différence avec coefficients dans $\mathbb{Q}[x]$, on démontre que : s'il existe une infinité des nombres premiers p tel que'une équation au q-différences d'ordre s admet, pour tout p, s solutions $y_{1,p}, ..., y_{s,p}$ méromoprhes dans un disque $d\left(o, \rho_p\right)$ de $\mathbb{C}_p$ d'un rayon $\rho_p > 1$ et sont linéairment indépendantes dans tout $\mathbb{C}_p$. Alors cette équation au q-différences admet s solutions qui sont des fonctions rationnelles avec coefficients dans $\mathbb{Q}$ et linéairement indépendantes dans tout $\mathbb{Q}$.

Tous ces résultats sont analogues des résultats obtenus récemment par Jean-Paul Bézivin [6] et dans [8].

5.2.1 Opérateurs aux $q-$différences et $q-$Wronskiens

On note par $\mathbb{k}[[x]]$ l'espace des séries formelles $f(x) = \sum a_n x^n$ à coefficients dans $\mathbb{k}$. Soit q un élément non nul de $\mathbb{k}$ (ou $\mathbb{C}_p$) diffèrent de la racine de l'unité.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $[n] = \frac{q^n-1}{q-1}$ et $[n]! = \prod_{i=1}^{n} [i]$. On a toujours $[0]! = 1$.
Pour tout $k, n \in \mathbb{N}$ tel que $k \leq n$, on a $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right] = \frac{[n]!}{([k]!)([n-k]!)}$.

Lemme 5.2.1 *([15]) Pour tout n, $k \in \mathbb{N}^*$ tels que $k \leq n$, on a*

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} + q^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}.$$

Définition 5.2.1 *On définit dans $\mathbb{k}[[x]]$ l'opérateur σ_q par*

$$\sigma_q(f)(x) = f(qx).$$

C'est un automorphisme de la $\mathbb{k}$-algèbre $\mathbb{k}[[x]]$ et on a $\sigma_q^{-1} = \sigma_{\frac{1}{q}}$.
Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note $\sigma_q^k(f)$ l'application k fois de l'opérateur σ_q à la série formelle f. On a toujours $\sigma_q^0 = Id$, avec Id est l'opérateur identité dans $\mathbb{k}[[x]]$.

Définition 5.2.2 *On définit, dans l'espace $\mathbb{k}[[x]]$, l'opérateur aux $q-$différences D_q par*

$$D_q(f)(x) = \frac{f(qx) - f(x)}{(q-1)x} = \frac{(\sigma_q - Id)(f)(x)}{(q-1)x}.$$

pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $D_q^k(f)$ l'application k fois de l'opérateur D_q à la série formelle f. On a toujours $D_q^0 = Id$.

On a le lemme suivant.

Lemme 5.2.2 *([15])*

(i) $\sigma_q = (q-1)\, xD_q + Id$,

(ii) $D_q \circ \sigma_q = q\sigma_q \circ D_q$,

(iii) $D_q^k \circ \sigma_q^l = q^{kl}\sigma_q^l \circ D_q^k$, $\forall k,\, l \in \mathbb{N}$.

(iv) $D_q x - xD_q = \sigma_q$.

(v) $D_q x - qxD_q = Id$.

(vi) $D_q = \frac{1}{q} D_{\frac{1}{q}} \circ \sigma_q$.

Preuve.

(i) La relation (i) est évidente.

(ii) On a :

$$\begin{aligned}
(D_q \circ \sigma_q)(f)(x) &= D_q(\sigma_q(f)(x)) \\
&= D_q((q-1)\, xD_q f(x) + f(x)) \\
&= D_q((q-1)\, xD_q f(x)) + D_q f(x).
\end{aligned}$$

D'où on obtient

$D_q(\sigma_q(f))(x) = D_q((q-1)\, x)\, \sigma_q D_q f(x) + (q-1)\, xD_q^2 f(x) + D_q f(x)$

$= (q-1)\, \sigma_q D_q f(x) + (q-1)\, xD_q^2 f(x) + D_q f(x)$

$= (q-1)\, \sigma_q D_q f(x) + \sigma_q D_q f(x)$

$= q\sigma_q D_q f(x)$.

D'où le résultat. Ainsi par réccurence on obtient (iii).

Lemme 5.2.3 (Les formules de dérivation) *([15])*

1) D_q est un endomorphisme de l'espace vertoriel $\Bbbk[[x]]$,

2) Pour deux éléments f, g de $\Bbbk[[x]]$, on a

$$\begin{aligned} D_q(fg) &= (D_q f)(\sigma_q g) + f(D_q g) \\ &= (q-1)x(D_q f)(D_q g) + f(D_q g) + g(D_q f), \end{aligned}$$

3) Pour deux éléments f, g de $\Bbbk[[x]]$, on a

$$D_q\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g(D_q f) - f(D_q g)}{g(\sigma_q g)},$$

4) Pour tout $f_1, ..., f_s \in \Bbbk[[x]]$, $(s \geq 1)$, on a

$$D_q\left(\prod_{i=1}^{s} f_i\right) = \sum_{k=0}^{s-1} (q-1)^k x^k \sum_{\lambda_1+...+\lambda_s=k+1} \left(\prod_{i=1}^{s} D_q^{\lambda_i} f_i\right),$$

et pour tout $1 \leq i \leq s$, $\lambda_i = 0$ ou 1.

Preuve.

1) Il est facile à démontrer la primère proposition.

2) On a

$$\begin{aligned} D_q(fg)(x) &= \frac{(fg)(qx) - (fg)(x)}{(q-1)x} \\ &= \frac{f(qx)g(qx) - f(x)g(x)}{(q-1)x}. \end{aligned}$$

En ajoutant et retranchant le terme $f(x)g(qx)$ du numérateur, on trouve

$$\begin{aligned} D_q(fg)(x) &= \frac{[f(qx) - f(x)]g(qx) - f(x)[g(qx) - g(x)]}{(q-1)x} \\ &= D_q(f)(x)g(qx) + f(x)D_q(g)(x) \\ &= D_q(f)(x)\sigma_q g(x) + f(x)D_q(g)(x). \end{aligned}$$

Par réccurence on obtient 4).

3) On a

$$D_q\left(\frac{f}{g}\right)(x) = D_q\left(f\frac{1}{g}\right)(x),$$

et d'après la propriété 2), on obtient

$$D_q\left(\frac{f}{g}\right)(x) = D_q(f)(x)\,\sigma_q\left(\frac{1}{g}\right)(x) + f(x)\,D_q\left(\frac{1}{g}\right)(x). \tag{*}$$

Calculons tout d'abord $D_q\left(\frac{1}{g}\right)$. Par définition, on a

$$\begin{aligned} D_q\left(\frac{1}{g}\right)(x) &= \frac{\left(\frac{1}{g}\right)(qx) - \left(\frac{1}{g}\right)(x)}{(q-1)\,x} = \frac{\frac{1}{g(qx)} - \frac{1}{g(x)}}{(q-1)\,x} \\ &= \frac{g(x) - g(qx)}{(q-1)\,x.g(qx)\,g(x)} = \frac{-\frac{g(qx)-g(x)}{(q-1)x}}{g(qx)\,g(x)} \\ D_q\left(\frac{1}{g}\right)(x) &= -\frac{D_q(g)(x)}{\sigma_q(g)(x).g(x)}. \end{aligned}$$

D'après cela et $(*)$, on obtient

$$\begin{aligned} D_q\left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{1}{\sigma_q(g)(x)}D_q(f)(x) - f(x)\,\frac{D_q(g)(x)}{\sigma_q(g)(x).g(x)} \\ &= \frac{g(x)\,D_q(f)(x) - f(x)\,D_q(g)(x)}{g(x)\,\sigma_q(g)(x)}. \end{aligned}$$

Lemme 5.2.4 (La formule de Leibniez) *([15]) Pour tout $f,\ g \in \Bbbk[[x]]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$D_q^n(fg)(x) = \sum_{k=0}^{n} \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right] D_q^k(f)\,\sigma_q^k D_q^{n-k}(g)(x).$$

Preuve.

On démontre le Lemme par réccurence. La relation est triviale pour $n = 0$. Supposons que cette relation est vraie pour $n \geq 0$.

On a

$$D_q^{n+1}(fg)(x) = D_q\left(D_q^n(fg)(x)\right),$$

et donc

$$D_q^{n+1}(fg)(x) = D_q\left(\sum_{k=0}^{n} \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right] D_q^k(f)\,\sigma_q^k D_q^{n-k}(g)(x)\right) = \sum_{k=0}^{n} \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right] D_q(F_k G_k)(x),$$

avec $F_k = D_q^k(f)$ et $G_k = \sigma_q^k D_q^{n-k}(g)$.

En appliquant le Lemme 5.3.3, on obtient

$$\begin{aligned} D_q^{n+1}(fg)(x) &= \sum_{k=0}^{n} \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right] \left(\left(D_q F_k\right)\left(\sigma_q G_k\right) + F_k \left(D_q G_k\right) \right)(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right] D_q^{k+1}(f)\, \sigma_q^{k+1} D_q^{n-k}(g)(x) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n} \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right] D_q^{k}(f)\, D_q\left(\sigma_q^{k} D_q^{n-k}(g)\right)(x) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \left[\begin{smallmatrix} n \\ k-1 \end{smallmatrix}\right] D_q^{k}(f)\, \sigma_q^{k} D_q^{n+1-k}(g)(x) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n} \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right] D_q^{k}(f)\, D_q\left(\sigma_q^{k} D_q^{n-k}(g)\right)(x) \end{aligned}$$

Appliquons maintenant Lemme 5.3.2, on trouve

$$\begin{aligned} D_q^{n+1}(fg)(x) &= \sum_{k=1}^{n+1} \left[\begin{smallmatrix} n \\ k-1 \end{smallmatrix}\right] D_q^{k}(f)\, \sigma_q^{k} D_q^{n+1-k}(g)(x) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n} q^k \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right] D_q^{k}(f)\, \sigma_q^{k}\left(D_q^{n+1-k}(g)\right)(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \left(\left[\begin{smallmatrix} n \\ k-1 \end{smallmatrix}\right] + q^k \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right] \right) D_q^{k}(f)\, \sigma_q^{k} D_q^{n+1-k}(g)(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right] D_q^{k}(f)\, \sigma_q^{k} D_q^{n+1-k}(g)(x). \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Remarque 5.2.1 *On peut réduire notre étude dans le cas où $|q| \leq 1$. En effet, pour $f \in \Bbbk[[x]]$, d'après le Lemme 5.2.2, on a $D_q(f) = D_{\frac{1}{q}}(g)$ avec $g(x) = \frac{1}{q}(\sigma_q(f))(x) = \frac{f(qx)}{q}$. Et en travaillant avec $\frac{1}{q}$ et g, on peut supposer que $|q| \leq 1$. On doit noter que si le rayon de convergence de la série f est égal à R, alors celui de la série g est égal à $\frac{R}{|q|}$. Dans ce chapitre, on considère seulement le cas où $|q| = 1$. Sinon le cas $|q| \neq 1$ est plus difficile et sera traité plus tard.*

Donc dans tout ce qui suit, on assume que q est un élément de $\mathbb{k}$ différent de la racine de l'unité et tel que $|q| = 1$.

Proposition 5.2.1 ([15]) *Soit $R > 0$ et soit f une série formelle à coefficients dans $\mathbb{k}$ convegeante dans le disque $d(0, R^-)$. Pour tout $\rho \in]0, R[$ et pour $s \in \mathbb{N}$, on a*

1) $|\sigma_q^s(f)|(\rho) = |f|(\rho)$,
2) $|D_q^s(f)|(\rho) \leq \frac{|f|(\rho)}{\rho^s}$.
3) La formule 1) et l'inégalité 2) sont simples à généaliser pour des fonctions méromorphes dans le disque $d(0, R^-)$.

Preuve.

Supposons que la série formelle f est définie par $f(x) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$.

1) On a $\sigma_q^s f(x) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n q^{sn} x^n$. En utilisant le fait que $|q| = 1$, on a

$$|\sigma_q^s(f)|(\rho) = \max_{n\geq 0} |a_n q^{sn}| \rho^n = \max_{n\geq 0} |a_n| \rho^n = |f|(\rho).$$

2) $D_q f(x) = \sum\limits_{n\geq 1} [n] a_n x^{n-1}$ et donc $|D_q f|(\rho) = \max\limits_{n\geq 1} |[n]| |a_n| \rho^{n-1}$. Mais comme $|q| = 1$, on a $|[n]| \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$|D_q f|(\rho) \leq \max_{n\geq 1} |a_n| \rho^{n-1} \leq \frac{1}{\rho} \max_{n\geq 0} |a_n| \rho^n.$$

C'est à dire $|D_q(f)|(\rho) \leq \frac{|f|(\rho)}{\rho}$.

En itérant l'inégalité ci-dessus on complète la preuve de 2).

3) La généralisation de 1) est triviale. En effet, si f est une fonction méromorphe dans le disque $d(0, R^-)$, on va l'écrire sous la forme $\frac{g}{h}$, avec g et h sont des fonctions analytiques dans $d(0, R^-)$. Alors, on applique le Lemme 5.3.3 pour trouver $|D_q(f)|(\rho) \leq \frac{|f|(\rho)}{\rho}$ et on termine par itérer cette inégalité pour prouver l'extension de 2) pour les fonctions méromorphes.

Définition 5.2.3 *Soient $s \geq 1, f_1, ..., f_s$ des s séries formelles à coefficients dans $\mathbb{k}$. On appelle $q-$Wronskien (ou bien $q-$Wronskien ordinaire) de $\underline{f}= (f_1, ..., f_s)$ et notant $W_q\left(\underline{f}\right)$ le déterminant de la matrice $\left(D_q^j(f_i)\right)_{1\leq i\leq s, 0\leq j\leq s-1}$:*

$$W_q\left(\underline{f}\right) = \begin{vmatrix} f_1 & ... & D_q^{s-1}(f_1) \\ f_2 & ... & D_q^{s-1}(f_2) \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ f_s & ... & D_q^{s-1}(f_s) \end{vmatrix}.$$

Définition 5.2.4 *Soient $s \geq 1, f_1, ..., f_s$ des s séries formelles à coefficients dans $\mathbb{k}$ et $k_1, ..., k_s$ des éléments de $\mathbb{N}$. On appelle $q-$Wronskien généralisé de $\underline{f}= (f_1, ..., f_s)$ en relation avec $\underline{k}= (k_1, ..., k_s)$et notant $W_q\left(\underline{f}; \underline{k}\right)$ le déterminant de la matrice $\left(D_q^{k_j}(f_i)\right)_{1\leq i\leq s, 1\leq j\leq s-1}$:*

$$W_q\left(\underline{f}; \underline{k}\right) = \begin{vmatrix} D_q^{k_1} f_1 & ... & D_q^{k_s}(f_1) \\ D_q^{k_1} f_2 & ... & D_q^{k_s}(f_2) \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ D_q^{k_1} f_s & ... & D_q^{k_s}(f_s) \end{vmatrix}.$$

1. Le $q-$Wronskien ordinaire de $\underline{f}= (f_1, ..., f_s)$ est égal au $q-$Wronskien généralisé de $\underline{f}= (f_1, ..., f_s)$ en relation avec $\underline{k}= (0, 1, ..., s-1)$.
2. Il pourrait être intéressant de considérer une autre version du $q-$Wronskien, en utilisant l'opérateur σ_q au lieu de l'opérateur D_q. En effet, σ_q est significativement plus simple que D_q. Cependant, on devrait noter que l'opérateur D_q est plus près d'une dérivation que σ_q, parce qu'une fois l'appliqué à un polynôme, il diminue son degré comme une dérivation ordinaire, qui ne fait pas l'opérateur σ_q.

5.2.2 Le cas $s = 2$

Soient f_1, f_2 de $\mathbb{k}[[x]]$, on pose

$$\underline{f} = (f_1, f_2), \underline{k}_2 = (0, 1), \underline{k}_1 = (0, 2) \text{ et } \underline{k}_0 = (1, 2).$$

On a

$$W_q\left(\underline{f}\right) = W_q\left(\underline{f}; \underline{k}_2\right) = f_1 D_q(f_2) - f_2 D_q(f_1).$$

Le lemme suivant nous permet d'exprimer la dérivée du $q-$Wronskien ordinaire de $f_1,\ f_2$ en fonction des $q-$wronksiens généralisés $W_q\left(\underline{f};\underline{k}_0\right)$ et $W_q\left(\underline{f};\underline{k}_1\right)$.

Lemme 5.2.5 *([15]) On a la relation*

$$D_q\left(W_q\left(\underline{f};\underline{k}_2\right)\right)=(q-1)\,xW_q\left(\underline{f};\underline{k}_0\right)+W_q\left(\underline{f};\underline{k}_1\right).$$

Preuve.

Première méthode (Par un calcul direct**)**

On a

$$\begin{aligned}
W_q\left(\underline{f};\underline{k}_2\right) &= \begin{vmatrix} f_1 & D_qf_1 \\ f_2 & D_qf_2 \end{vmatrix} = f_1D_qf_2-f_2D_qf_1. \\
W_q\left(\underline{f};\underline{k}_1\right) &= \begin{vmatrix} f_1 & D_q^2f_1 \\ f_2 & D_q^2f_2 \end{vmatrix} = f_1D_q^2f_2-f_2D_q^2f_1. \\
W_q\left(\underline{f};\underline{k}_0\right) &= \begin{vmatrix} D_qf_1 & D_q^2f_1 \\ D_qf_2 & D_q^2f_2 \end{vmatrix} = D_qf_1D_q^2f_2-D_qf_2D_q^2f_1.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
(q-1)\,xW_q\left(\underline{f};\underline{k}_0\right)+W_q\left(\underline{f};\underline{k}_1\right) &= \left[f_1D_q^2f_2-f_2D_q^2f_1\right]+(q-1)\,x\left[D_qf_1D_q^2f_2-D_qf_2D_q^2f_1\right] \\
&= \sigma_qf_1.D_q^2f_2-\sigma_qf_2.D_q^2f_1.
\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
D_q\left(W_q\left(\underline{f};\underline{k}_2\right)\right) &= D_q\left(f_1D_qf_2-f_2D_qf_1\right) \\
&= D_q\left(f_1D_qf_2\right)-D_q\left(f_2D_qf_1\right),
\end{aligned}$$

d'après Lemme 5.2.3 2), on obtient

$$\begin{aligned}
D_q\left(W_q\left(\underline{f};\underline{k}_2\right)\right) &= D_qf_1.\sigma_qD_qf_2+f_1D_q^2f_2-D_qf_2.\sigma_qD_qf_1-f_2D_q^2f_1 \\
&= D_qf_1.\left[(q-1)\,xD_q^2f_2+D_qf_2\right]+f_1D_q^2f_2 \\
&\quad -D_qf_2.\left[(q-1)\,xD_q^2f_1+D_qf_1\right]-f_2D_q^2f_1 \\
&= \sigma_qf_1.D_q^2f_2-\sigma_qf_2.D_q^2f_1.
\end{aligned}$$

Deuxième méthode

Pour simplifier l'écriture, on pose $\sigma_q = \sigma, D_q = D$ and $W_q = W$.

Les lignes de $W_q\left(\underline{f}; \underline{k}_2\right)$ sont $L_1 = [f_1,\ Df_1]$ et $L_2 = [f_2,\ Df_2]$. Alors les lignes de $\sigma W_q\left(\underline{f}; \underline{k}_2\right)$ sont $\sigma L_1 = [\sigma f_1,\ \sigma Df_1]$ et $\sigma L_2 = [\sigma f_2,\ \sigma Df_2]$.

En utilisant l'identité $\sigma = Id + (q-1)\, xD$, on obtient

$$\sigma L_i = \left[f_i + (q-1)\, xDf_i, Df_i + (q-1)\, xD^2 f_i\right], \text{ pour } i = 1, 2.$$

En tenant compte que le déterminant est une forme bilinéaire et en développant, on obtient

$$\begin{aligned} \sigma L_i &= [f_i,\ Df_i] + \left[f_i,\ (q-1)\, xD^2 f_i\right] + \left[(q-1)\, xDf_i,\ (q-1)\, xD^2 f_i\right] \\ &= [f_i,\ Df_i] + (q-1)\, x\left[f_i,\ D^2 f_i\right] + [(q-1)\, x]^2 \left[Df_i,\ D^2 f_i\right], \text{ pour } i = 1, 2. \end{aligned}$$

D'où

$$\sigma W_q\left(\underline{f}; \underline{k}_2\right) = W_q\left(\underline{f}; \underline{k}_2\right) + (q-1)\, xW_q\left(\underline{f}; \underline{k}_1\right) + [(q-1)\, x]^2\, W_q\left(\underline{f}; \underline{k}_0\right).$$

Alors, on obtient

$$\frac{\sigma W_q\left(\underline{f}; \underline{k}_2\right) - W_q\left(\underline{f}; \underline{k}_2\right)}{(q-1)\, x} = W_q\left(\underline{f}; \underline{k}_1\right) + (q-1)\, xW_q\left(\underline{f}; \underline{k}_0\right).$$

Ce qui complète la preuve du Lemme 5.2.5.

Supposons maintenant que les séries formelles f_1 et f_2 sont linéairement indépendantes dans tout $\mathbb{k}$ et analytiques dans un disque $d\,(0, R)$ avec $R > 0$. Alors obtient les majorations suivantes.

Lemme 5.2.6 *([15]) Pour tout $\rho \in]0, R[$, on a*

$$|W_q\left(\underline{f}; \underline{k}_0\right)|\,(\rho) \leq \frac{|W_q\left(\underline{f}; \underline{k}_2\right)|\,(\rho)}{\rho^2},$$

et

$$|W_q\left(\underline{f}; \underline{k}_1\right)|\,(\rho) \leq \frac{|W_q\left(\underline{f}; \underline{k}_2\right)|\,(\rho)}{\rho}.$$

Preuve.

D'après le Lemme 5.2.5, on a la relation

$$D_q\left(W_q\left(\underline{f};\underline{k}_2\right)\right)=(q-1)\,xW_q\left(\underline{f};\underline{k}_0\right)+W_q\left(\underline{f};\underline{k}_1\right). \tag{5.2.1}$$

Maintenant, on écrit l'équation aux q-différences satisfaite par f_1 et f_2 :

$$\begin{vmatrix} y & D_q(y) & D_q^2(y) \\ f_1 & D_q(f_1) & D_q^2(f_2) \\ f_2 & D_q(f_2) & D_q^2(f_2) \end{vmatrix}=0.$$

c'est à dire

$$W_q\left(\underline{f};\underline{k}_2\right)D_q^2(y)-W_q\left(\underline{f};\underline{k}_1\right)D_q(y)+W_q\left(\underline{f};\underline{k}_0\right)y=0.$$

On peut clairement assumer que $f_1\neq 0$, et on déduit que

$$W_q\left(\underline{f};\underline{k}_0\right)=W_q\left(\underline{f};\underline{k}_1\right)\frac{D_q(f_1)}{f_1}-W_q\left(\underline{f};\underline{k}_2\right)\frac{D_q^2(f_1)}{f_1}, \tag{5.2.2}$$

alors, par $(5.2.1)$ et $(5.2.2)$, on obtient

$$D_q\left(W_q\left(\underline{f};\underline{k}_2\right)\right)=\left[1+(q-1)\,x\frac{D_q(f_1)}{f_1}\right]W_q\left(\underline{f};\underline{k}_1\right)-(q-1)\,xW_q\left(\underline{f};\underline{k}_2\right)\frac{D_q^2(f_1)}{f_1}. \tag{5.2.3}$$

D'après le Lemme 5.2.2, on a $1+(q-1)\,x\frac{D_q(f_1)}{f_1}=\frac{\sigma_q(f_1)}{f_1}$, alors d'après (5.2.3), on en déduit

$$W_q\left(\underline{f};\underline{k}_1\right)\frac{\sigma_q(f_1)}{f_1}=D_q\left(W_q\left(\underline{f};\underline{k}_2\right)\right)+(q-1)\,xW_q\left(\underline{f};\underline{k}_2\right)\frac{D_q^2(f_1)}{f_1}. \tag{5.2.4}$$

Comme $|q|=1$, on remarque que pour tout $\rho\in]0,R[$, on a $|\sigma_q(f_1)|(\rho)=|f_1|(\rho)$. Donc, d'après (5.2.4) on trouve

$$|W_q\left(\underline{f};\underline{k}_1\right)|(\rho)\leq\frac{|W_q\left(\underline{f};\underline{k}_2\right)|(\rho)}{\rho}. \tag{5.2.5}$$

En utilisant $(5.2.2)$ et $(5.2.5)$, on obtient l'inégalité

$$|W_q\left(\underline{f};\underline{k}_0\right)|(\rho)\leq\frac{|W_q\left(\underline{f};\underline{k}_2\right)|(\rho)}{\rho^2}. \tag{5.2.6}$$

Définition 5.2.5 *Soit $y=y(x)$ une série formelle analytique dans le disque $d(0,R)$. On définit deux suites $A_{n,k}=A_{n,k}(y)$ $(k=0$ ou $k=1)$, de fonctions méromorphes dans le disque $d(0,R)$ de la manière suivante :*

$$A_{1,0}=0,\ A_{0,0}=1,\ A_{1,1}=1,\ A_{0,1}=0,$$

$$\text{et } D_q^n y(x) = A_{1,n}(x) D_q y(x) + A_{0,n}(x) y(x).$$

On définit A_0 et A_1 par

$$D_q^2 y(x) = A_1(x) D_q y(x) + A_0(x) y(x).$$

On note que si on suppose que les séries formelles f_1 et f_2 soient linéairement indépendantes dans tout $\Bbbk$ et on écrit l'équation aux $q-$différences satisfaite par f_1 et f_2 dans la forme ci-dessus, alors on obtient

$$A_0 = \frac{W_q\left(\underline{f}; \underline{k}_1\right)}{W_q\left(\underline{f}; \underline{k}_2\right)} \text{ et } A_1 = -\frac{W_q\left(\underline{f}; \underline{k}_0\right)}{W_q\left(\underline{f}; \underline{k}_2\right)}.$$

Lemme 5.2.7 ([15]) *On a les relations de recurrence suivantes pour tout $n \geq 0$:*

(i) $A_{1,n+1} = A_1 \sigma_q A_{1,n} + \sigma_q A_{0,n} + D_q A_{1,n}$;

(ii) $A_{0,n+1} = A_0 \sigma_q A_{1,n} + D_q A_{0,n}$.

Preuve.

On a

$$\begin{aligned} A_1(x) \sigma_q(A_{1,0})(x) + \sigma_q(A_{0,0})(x) + D_q(A_{1,0})(x) &= A_1(x) \sigma_q(0)(x) + \sigma_q(1)(x) + D_q(0)(x) \\ &= 1 = A_{1,1}(x), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} A_0(x) \sigma_q(A_{1,0})(x) + D_q(A_{0,0})(x) &= A_1(x) \sigma_q(0)(x) + D_q(1)(x) \\ &= 0 = A_{0,1}(x). \end{aligned}$$

Donc les formules (i) et (ii) sont vraies pour $n = 0$.

Supposons que les formules sont vraies pour $n \geq 0$. Alors, en prenant la dérivée des deux membres de l'identité

$$D_q^n y(x) = A_{1,n}(x) D_q y(x) + A_{0,n}(x) y(x),$$

on trouve

$$A_{1,n+1}(x) D_q y(x) + A_{0,n+1}(x) y(x) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sigma_q A_{1,n}(x) D_q^2 y(x) + D_q A_{1,n}(x) D_q y(x) \\
&\quad +\sigma_q A_{0,n}(x) D_q y(x) + y(x) D_q A_{0,n}(x) \\
&= \sigma_q A_{1,n}(x) [A_1(x) D_q y(x) + A_0(x) y(x)] \\
&\quad +D_q A_{1,n}(x) D_q y(x) + \sigma_q A_{0,n}(x) D_q y(x) + y(x) D_q A_{0,n}(x) \\
&= [\sigma_q A_{1,n}(x) A_1(x) + \sigma_q A_{0,n} + D_q A_{1,n}(x)] D_q y(x) \\
&\quad + [A_0(x) \sigma_q A_{1,n}(x) + D_q A_{0,n}(x)] y(x).
\end{aligned}$$

En en déduit que les formules sont aussi vraies jusqu'au rang $n+1$, et donc elles sont vraies $\forall n$.

Maintenant, on a l'inégalité qui est notre but.

Proposition 5.2.2 (*[15]*) *Soient f_1 et f_2 deux fonctions analytiques dans le disque $d(0,R)$ de $\mathbb{k}$. Soient $\underline{l}=(0,1)$ et $\underline{k}=(k_1,k_2)$ des entiers positifs. On a alors, pour tout $\rho \in]0,R[$, l'inégalité*

$$|W_q(\underline{f};\underline{k})|(\rho) \leq \frac{|W_q(\underline{f};\underline{l})|(\rho)}{\rho^{k_1+k_2-1}} = \frac{|W_q(\underline{f})|(\rho)}{\rho^{k_1+k_2-1}}.$$

Preuve.

On va tout d'abord majorer les fonctions $A_{1,n}$ et $A_{0,n}, n \geq 0$, par rapport l'équation aux $q-$différences satisfaite par f_1 et f_2, plus précisément, on va démontrer que pour tout $n \geq 0$, et pour tout $\rho \in]0,R[$, on a $|A_{1,n}|(\rho) \leq \frac{1}{\rho^{n-1}}$ et $|A_{0,n}|(\rho) \leq \frac{1}{\rho^n}$. En effet, elles sont vraies pour $n=0$ et $n=1$ car $A_{1,0}=0$, $A_{0,0}=1$, $A_{1,1}=1$, et $A_{0,1}=0$. En utilisant Lemme 5.2.6, on remarque qu'elles sont aussi vraies pour $n=2$ car on a $A_{0,2}=A_0=\frac{W_q(\underline{f};\underline{k}_1)}{W_q(\underline{f};\underline{k}_2)}$ et $A_{1,2}=A_1=\frac{W_q(\underline{f};\underline{k}_0)}{W_q(\underline{f};\underline{k}_2)}$.

Alors les formules du Lemme 5.2.7 et une récurrence immédiate montre que ces inégalités sont vraies, pour tout $n \geq 0$.

Après avoir fait tout cela, on écrit

$$\begin{pmatrix} D_q^{k_1}(f_1) & D_q^{k_2}(f_1) \\ D_q^{k_1}(f_2) & D_q^{k_2}(f_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & D_q(f_1) \\ f_2 & D_q(f_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{0,k_1} & A_{0,k_2} \\ A_{1,k_1} & A_{1,k_2} \end{pmatrix}.$$

Prenons le déterminant des deux membres, on exprime $W_q\left(\underline{f};\underline{k}\right)$ comme une fonction de $A_{m,j}$ et $W_q\left(\underline{f}\right)$, et on en déduit le résultat.

Théorème 5.2.1 *([15]) Soient f_1, f_2 deux fonctions entières dans tout $\Bbbk$. Supposons que le $q-$Wronskien de f_1 et f_2 est un polynôme non nul. Alors f_1 et f_2 sont des polynômes.*

Preuve.

D'après les hypothèses, $W_q\left(\underline{f};\underline{k}_2\right)$ est égal à un polynôme non nul $P(x)$. On considère tout d'abord le cas où $P(x)$ est une constante C. Alors, d'après le Lemme 5.2.6, on a

$$|W_q\left(\underline{f};\underline{k}_1\right)|(\rho) \leq \frac{|C|}{\rho} \text{ et } |W_q\left(\underline{f};\underline{k}_0\right)|(\rho) \leq \frac{|C|}{\rho^2}.$$

Les fonctions f_1 et f_2 sont entières, cela implique que $W_q\left(\underline{f};\underline{k}_0\right) = W_q\left(\underline{f};\underline{k}_1\right) = 0$. L'équation aux $q-$différences satisfaite par f_1 et f_2 est alors réduite à $CD_q^2(y) = 0$, ce qui implique que f_1 et f_2 sont des polynômes.

On procède maintenant par recurrence sur le degré du polynôme non nul $P(x)$.

L'inégalité $|W_q\left(\underline{f};\underline{k}_0\right)|(\rho) \leq \frac{|W_q\left(\underline{f};\underline{k}_2\right)|(\rho)}{\rho^2}$ montre que $W_q\left(\underline{f};\underline{k}_0\right)$ est un polynôme de degré strictement inférieur à celui de $P(x)$.

Si $W_q\left(\underline{f};\underline{k}_0\right)$ est non nul, $W_q\left(\underline{f};\underline{k}_0\right)$ est le $q-$Wronskien de $D_q(f_1)$ et $D_q(f_2)$. Alors l'hypothèse de réccurence implique que f_1 et f_2 sont des polynômes.

Si$W_q\left(\underline{f};\underline{k}_0\right)$ est nul, il s'ensuit que, $D_q(f_2) = \lambda D_q(f_1)$ avec une constante λ et $f_2 = \lambda f_1 + \mu$ avec $\mu \neq 0$ puisque f_1 et f_2 sont linéairement indépendantes. Donc on déduit que $P = -\mu D_q(f_1)$. Alors $D_q(f_1)$ est un polynôme ; et donc aussi f_1 et f_2.

Remarque 5.2.2 *Le fait que $|q|$ est égal à 1 est utilisé quand on mentione $|\sigma_q(f_1)|(\rho) = |f_1|(\rho)$, ce qui n'est pas vrai si $|q| \neq 1$. Mais c'est, peut-être, la preuve qui devrait être changée pour obtenir ce cas.*

5.2.3 Cas général (s$\geq$ 1)

Soit $s \geq 1$ et soient $f_1, ..., f_s$ des séries formelles à coefficients dans $\mathbb{k}$. On note par $\underline{f}= (f_1, ..., f_s)$, et $\underline{k}_j = (0, ..., \hat{\jmath}, ..., s) = (0, ..., j-1, j+1, ..., s)$, pour $0 \leq j \leq s$. On rappelle que $W_q\left(\underline{f}; \underline{k}_j\right)$ est le $q-$Wronskien généralisé de $\underline{f}$ par rapport de $\underline{k}_j$.

Le résultat suivant est la généralisation du Lemme 5.2.5.

Lemme 5.2.8 *([15]) Avec les notations ci-dessus, on a*

$$D_q W_q\left(\underline{f}; \underline{k}_s\right) = \sum_{j=0}^{s-1} \left[(q-1)\, x\right]^{s-1-j} W_q\left(\underline{f}; \underline{k}_j\right).$$

Preuve.

On procède comme dans la démonstration du Lemme 5.2.5. Pour simplifier les formules, on pose $\sigma_q = \sigma, D_q = D$ and $W_q = W$.

Les lignes de $W_q\left(\underline{f}; \underline{k}_s\right)$ sont $L_i = [f_i, ..., D^{s-1} f_i]$ pour $i = 1, ..., s$. Alors les lignes de $\sigma W_q\left(\underline{f}; \underline{k}_s\right)$ sont $\sigma L_i = [\sigma f_i, ..., \sigma D^{s-1} f_i]$ pour $i = 1, ..., s$.

En utilisant l'identité $\sigma = Id + (q-1)\, xD$, on obtient pour $i = 1, ..., s$:

$$\sigma L_i = \left[f_i + (q-1)\, xDf_i, ..., D^{s-1} f_i + (q-1)\, xD^s f_i\right].$$

En tenant compte que le déterminant est une forme multilinéaire, on développe $\sigma W_q\left(\underline{f}; \underline{k}_s\right) = \begin{vmatrix} L_1 \\ . \\ . \\ . \\ L_s \end{vmatrix}$ comme suit

Premier choix. Pour tout $j \in \{0, ..., s-1\}$, on selectione la colonne d'indice j le terme $D^j(f_i)$ et on définit $W_q\left(\underline{f}; \underline{k}_s\right)$.

Deuxième choix. Pour tout $j \in \{0, ..., s-1\}$, on selectione la colonne d'indice j le terme $(q-1)\, xD^{j+1}(f_i)$, et on définit un déterminant dont ces lignes sont

$$[(q-1)\, xDf_i, ..., (q-1)\, xD^s f_i] \text{ pour } i = 1, ..., s.$$

Donc ce déterminant est égal $[(q-1)\,x]^s\, W_q\left(\underline{f};\underline{k}_0\right).$

Troisième choix. Pour tout $j \in \{0,...,s-1\}$, et pour tout $l \in \{0,...,j-1\}$, on selectione dans la colonne d'indice l le terme $D^l\left(f_i\right).$ Alors, dans la colonne d'indice j on choisit $(q-1)\,xD^{j+1}\left(f_i\right).$ Qu'arrive t-il à la colonne d'indice $j+1$? On ne peut pas choisir le terme $D^{j+1}\left(f_i\right),$ ce qui donne un déterminant nul. On est alors amené à prendre le terme $(q-1)\,xD^{j+2}\left(f_i\right),$ et ainsi de suite (dès que nous avons choisi un tel terme, les autres choix sont déterminés). et on définit un déterminant dont ces lignes sont

$$\left[f_i, ...,\ D^{j-1}f_i,\ (q-1)\,xD^{j+1}f_i, ...,\ (q-1)\,xD^s f_i\right] \text{ pour } i=1,...,s.$$

Dans d'autre terme, on trouve un déterminant dont ces lignes sont

$$[(q-1)\,x]^{s-j}\left[f_i, ...,\ D^{j-1}f_i,\ D^{j+1}f_i, ...,\ D^s f_i\right] \text{ pour } i=1,...,s.$$

Donc ce déterminant est égal à $[(q-1)\,x]^{s-j}\, W_q\left(\underline{f};\underline{k}_j\right).$ De cela on obtient

$$\sigma W_q\left(\underline{f};\underline{k}_s\right) = \sum_{j=0}^{s}[(q-1)\,x]^{s-j}\, W_q\left(\underline{f};\underline{k}_j\right).$$

Alors, on obtient

$$\frac{\sigma W_q\left(\underline{f};\underline{k}_s\right) - W_q\left(\underline{f};\underline{k}_s\right)}{(q-1)\,x} = \sum_{j=0}^{s-1}[(q-1)\,x]^{s-j}\, W_q\left(\underline{f};\underline{k}_j\right).$$

Ce qui complète la preuve du lemme.

Le lemme suivant donne une expression de la $q-$dérivation du Wronskien mieux adaptée à la comparaison de la croissance des $q-$wronskien généralisés avec la croissance du $q-$wronskien ordinaire.

Soit $s \geq 2$ et soient $f_1, ..., f_s$ des s séries formelles de $\mathbb{k}\,[[x]]$, linéairement indépendantes dans tout $\mathbb{k}$. Supposons que $\underline{f}= (f_1, ..., f_s)$, et $\underline{k}_j = (0, ..., \hat{\jmath}, ..., s)$ pour $0 \leq j \leq s$. Soient $\underline{g}= (f_1, ..., f_{s-1})$, $\underline{l}_i = (0, ..., \hat{\imath}, ..., s-1)$ pour $0 \leq i \leq s-1$, $\underline{l}_{(i,s-1)} = (0, ..., \hat{\imath}, ..., s-2, s)$ pour $0 \leq i \leq s-2$. On rappelle que $W_q\left(\underline{f};\underline{k}_j\right)$ est le $q-$Wronskien généralisé de $\underline{f}$ par rapport à $\underline{k}_j$ pour $0 \leq j \leq s$. De la même manière, $W_q\left(\underline{g};\underline{l}_i\right)$ est le $q-$Wronskien généralisé de $\underline{g}$ par rapport à $\underline{l}_i$ pour $0 \leq i \leq s-1$. Finalement, $W_q\left(\underline{g}; \underline{l}_{(i,s-1)}\right)$ est le $q-$Wronskien généralisé de $\underline{g}$ par rapport à $\underline{l}_{(i,s-1)}$ pour $0 \leq i \leq s-2$.

Lemme 5.2.9 ([15]) *Avec les notations ci-dessus, on pour $s \geq 3$:*

(i) $\frac{W_q\left(\underline{f};\underline{k}_j\right)}{W_q\left(\underline{f};\underline{k}_s\right)} = \frac{W_q\left(\underline{g};\underline{l}_j\right)}{W_q\left(\underline{g};\underline{l}_{(s-1)}\right)} \frac{W_q\left(\underline{f};\underline{k}_{(s-1)}\right)}{W_q\left(\underline{f};\underline{k}_s\right)} - \frac{W_q\left(\underline{g};\underline{l}_{(j,s-1)}\right)}{W_q\left(\underline{g};\underline{l}_{(s-1)}\right)}, \forall 0 \leq j \leq s-2;$

(ii) $\frac{W_q\left(\underline{f};\underline{k}_{(s-1)}\right)}{W_q\left(\underline{f};\underline{k}_s\right)} = \frac{W_q\left(\underline{g};\underline{l}_{(s-1)}\right)}{\sigma_q W_q\left(\underline{g};\underline{l}_{(s-1)}\right)} \frac{D_q W_q\left(\underline{f};\underline{k}_s\right)}{W_q\left(\underline{f};\underline{k}_s\right)} + \left(\sum_{i=0}^{s-2} [(q-1)\,x]^{s-1-i} \frac{W_q\left(\underline{g};\underline{l}_{(i,s-1)}\right)}{\sigma_q W_q\left(\underline{g};\underline{l}_{(s-1)}\right)}\right).$

Preuve.

(i) D'une part, d'après le Lemme 5.2.8, on a

$$D_q\left(W_q\left(\underline{f}; \underline{k}_s\right)\right) = \sum_{i=0}^{s-1} [(q-1)\,x]^{s-1-i}\, W_q\left(\underline{f}; \underline{k}_i\right). \tag{5.2.7}$$

D'autre part, l'équation aux $q-$différences vérifiée par $f_1, ..., f_s$ est

$$\sum_{i=0}^{s} (-1)^i\, W_q\left(\underline{f}; \underline{k}_i\right) D_q^i y = 0. \tag{E}$$

En écrivant les séries formelles $f_1, ..., f_{s-1}$ vérifiant l'équation (E), on obtient

$$E_1 = \sum_{i=0}^{s} (-1)^i\, W_q\left(\underline{f}; \underline{k}_i\right) D_q^i f_1 = 0, ..., \ E_{s-1} = \sum_{i=0}^{s} (-1)^i\, W_q\left(\underline{f}; \underline{k}_i\right) D_q^i f_{s-1} = 0.$$

Alors on obtient, pour tout $j \in \{0, ..., s-2\}$

$$\begin{vmatrix} E_1 & f_1 & ... & \hat{D}_q^j f_1 & ... & D_q^{s-2} f_1 \\ E_2 & f_2 & ... & \hat{D}_q^j f_2 & ... & D_q^{s-2} f_2 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ E_{s-1} & f_{s-1} & ... & \hat{D}_q^j f_{s-1} & ... & D_q^{s-2} f_{s-1} \end{vmatrix} = 0,$$

avec "$\hat{D}$" veut dire que la colonne est supprimée.

Il s'ensuit que, pour tout $j \in \{0, ..., s-2\}$, on a

$$W_q\left(\underline{f}; \underline{k}_j\right) \begin{vmatrix} f_1 & ... & D_q^{s-2} f_1 \\ f_2 & ... & D_q^{s-2} f_2 \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ f_{s-1} & ... & D_q^{s-2} f_{s-1} \end{vmatrix} = W_q\left(\underline{f}; \underline{k}_{(s-1)}\right) \begin{vmatrix} f_1 & ... & \hat{D}_q^j f_1 & ... & D_q^{s-1} f_1 \\ f_2 & ... & \hat{D}_q^j f_2 & ... & D_q^{s-1} f_2 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ f_{s-1} & ... & \hat{D}_q^j f_{s-1} & ... & D_q^{s-1} f_{s-1} \end{vmatrix}$$

$$-W_q\left(\underline{f};\underline{k}_s\right)\begin{vmatrix} f_1 & \ldots & \hat{D}_q^j f_1 & \ldots & D_q^{s-2} f_1 & D_q^s f_1 \\ f_2 & \ldots & \hat{D}_q^j f_2 & \ldots & D_q^{s-2} f_2 & D_q^s f_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{s-1} & \ldots & \hat{D}_q^j f_{s-1} & \ldots & D_q^{s-2} f_{s-1} & D_q^s f_s \end{vmatrix}.$$

On termine la preuve de (i) en remarquant que les déterminant dans l'équation ci-dessus sont égaux à $W_q\left(\underline{g};\underline{l}_{(s-1)}\right), W_q\left(\underline{g};\underline{l}_j\right)$ et $W_q\left(\underline{g};\underline{l}_{(j,s-1)}\right)$ respectivement.

(ii) Subsitituons les valeurs en (i), on a successivement

$D_q\left(W_q\left(\underline{f};\underline{k}_s\right)\right)=\sum_{i=0}^{s-2}\left[(q-1)x\right]^{s-1-i}\left[\frac{W_q\left(\underline{g};\underline{l}_i\right)}{W_q\left(\underline{g};\underline{l}_{(s-1)}\right)}W_q\left(\underline{f};\underline{k}_{(s-1)}\right)-\frac{W_q\left(\underline{g};\underline{l}_{(i,s-1)}\right)}{W_q\left(\underline{g};\underline{l}_{(s-1)}\right)}W_q\left(\underline{f};\underline{k}_s\right)\right]+$ $W_q\left(\underline{f};\underline{k}_{(s-1)}\right),$

donc

$$\begin{aligned} D_q\left(W_q\left(\underline{f};\underline{k}_s\right)\right) &= \frac{W_q\left(\underline{f};\underline{k}_{(s-1)}\right)}{W_q\left(\underline{g};\underline{l}_{(s-1)}\right)}\sum_{i=0}^{s-2}\left[(q-1)x\right]^{s-1-i}W_q\left(\underline{g};\underline{l}_i\right) \\ &\quad -\frac{W_q\left(\underline{f};\underline{k}_s\right)}{W_q\left(\underline{g};\underline{l}_{(s-1)}\right)}\sum_{i=0}^{s-2}\left[(q-1)x\right]^{s-1-i}W_q\left(\underline{g};\underline{l}_{(i,s-1)}\right)+W_q\left(\underline{f};\underline{k}_{(s-1)}\right), \end{aligned}$$

$D_q\left(W_q\left(\underline{f};\underline{k}_s\right)\right)=\frac{W_q\left(\underline{f};\underline{k}_{(s-1)}\right)}{W_q\left(\underline{g};\underline{l}_{(s-1)}\right)}\left\{(q-1)x\sum_{i=0}^{s-2}\left[(q-1)x\right]^{s-2-i}W_q\left(\underline{g};\underline{l}_i\right)+W_q\left(\underline{g};\underline{l}_{(s-1)}\right)\right\}$ $-(q-1)x\frac{W_q\left(\underline{f};\underline{k}_s\right)}{W_q\left(\underline{g};\underline{l}_{(s-1)}\right)}\sum_{i=0}^{s-2}\left[(q-1)x\right]^{s-2-i}W_q\left(\underline{g};\underline{l}_{(i,s-1)}\right),$

$$\begin{aligned} D_q\left(W_q\left(\underline{f};\underline{k}_s\right)\right) &= \frac{W_q\left(\underline{f};\underline{k}_{(s-1)}\right)}{W_q\left(\underline{g};\underline{l}_{(s-1)}\right)}\left\{(q-1)xD_q\left(W_q\left(\underline{g};\underline{l}_{(s-1)}\right)\right)+W_q\left(\underline{g};\underline{l}_{(s-1)}\right)\right\} \\ &\quad -(q-1)x\frac{W_q\left(\underline{f};\underline{k}_s\right)}{W_q\left(\underline{g};\underline{l}_{(s-1)}\right)}\sum_{i=0}^{s-2}\left[(q-1)x\right]^{s-2-i}W_q\left(\underline{g};\underline{l}_{(i,s-1)}\right), \end{aligned}$$

alors on a

$$\begin{aligned} W_q\left(\underline{f};\underline{k}_{(s-1)}\right) &= \frac{W_q\left(\underline{g};\underline{l}_{(s-1)}\right)}{\sigma_q W_q\left(\underline{g};\underline{l}_{(s-1)}\right)}D_q\left(W_q\left(\underline{f};\underline{k}_s\right)\right) \\ &\quad +\left(\sum_{i=0}^{s-2}\left[(q-1)x\right]^{s-1-i}\frac{W_q\left(\underline{g};\underline{l}_{(i,s-1)}\right)}{\sigma_q W_q\left(\underline{g};\underline{l}_{(s-1)}\right)}\right)W_q\left(\underline{f};\underline{k}_s\right). \end{aligned}$$

Ce qui complète la preuve de 2).

Théorème 5.2.2 *([15]) Soient $f_1,\ldots,f_s,(s\geq 1)$ des fonctions analytiques dans le disque $d(0,R)$ de $\mathbb{k}$. Soient $\underline{k}=(k_1,\ldots,k_s)$ des entiers positifs et $\underline{k}_s=(0,\ldots,s-1)$. On a alors, pour tout $\rho\in]0,R[$, les inégalités*

(i) $|W_q(\underline{f};\underline{k})|(\rho) \leq \frac{|W_q(\underline{f};\underline{k}_s)|(\rho)}{\rho^{k_1+k_2+\ldots+k_s-\frac{s(s-1)}{2}}}$.

particulièrement, pour $\underline{k}_j = (0,...,\hat{\jmath},...,s)$, $j = 0,...,s$, on obtient

(ii) $|W_q(\underline{f};\underline{k}_j)|(\rho) \leq \frac{|W_q(\underline{f};\underline{k}_s)|(\rho)}{\rho^{s-j}}$.

Preuve.

Pour démontrer les inégalités (i) et (ii), on procède par réccurence. Ces inégalités sont vraies pour $s = 1$(Proposition 5.2.1) et $s = 2$ (Proposition 5.2.2). Supposons que ces inégalités sont vraies jusqu'au rang $s \geq 2$.

Maintenant, soient $f_1,...,f_s,f_{s+1}$ des $s+1$ séries formelles de $\mathbb{k}[[x]]$, linéairement indépendantes dans tout $\mathbb{k}$ et convergent dans le disque $d(0,R)$ de $\mathbb{k}$. Soient $\underline{f}=(f_1,...,f_s,f_{s+1})$ et $\underline{k}_j = (0,...,\hat{\jmath},...,s+1)$ pour $0 \leq j \leq s+1$. Supposons que $\underline{g}= (f_1,...,f_s)$, $\underline{l}_i = (0,...,\hat{\imath},...,s)$ pour $0 \leq i \leq s$, et $\underline{l}_{(i,s)} = (0,...,\hat{\imath},...,s-1,s+1)$ pour $0 \leq i \leq s-1$. On rappelle que $W_q(\underline{f};\underline{k}_j)$ est le $q-$Wronskien généralisé de $\underline{f}$ par rapport à $\underline{k}_j$ pour $0 \leq j \leq s+1$. De la même manière, $W_q(\underline{g};\underline{l}_i)$ est le $q-$Wronskien généralisé de $\underline{g}$ par rapport à $\underline{l}_i$ pour $0 \leq i \leq s$. Finalement, $W_q(\underline{g};\underline{l}_{(i,s)})$ est le $q-$Wronskien généralisé de $\underline{g}$ par rapport à $\underline{l}_{(i,s)}$ pour $0 \leq i \leq s-1$.

D'après le Lemme 5.2.9, on a

$$\frac{W_q(\underline{f};\underline{k}_j)}{W_q(\underline{f};\underline{k}_{(s+1)})} = \frac{W_q(\underline{g};\underline{l}_j)}{W_q(\underline{g};\underline{l}_s)}\frac{W_q(\underline{f};\underline{k}_s)}{W_q(\underline{f};\underline{k}_{(s+1)})} - \frac{W_q(\underline{g};\underline{l}_{(j,s)})}{W_q(\underline{g};\underline{l}_s)}, \forall 0 \leq j \leq s-1; \tag{5.2.8}$$

$$\frac{W_q(\underline{f};\underline{k}_s)}{W_q(\underline{f};\underline{k}_{(s+1)})} = \frac{W_q(\underline{g};\underline{l}_s)}{\sigma_q W_q(\underline{g};\underline{l}_s)}\frac{D_q W_q(\underline{f};\underline{k}_{(s+1)})}{W_q(\underline{f};\underline{k}_{(s+1)})} + \left(\sum_{i=0}^{s-1}[(q-1)x]^{s-i}\frac{W_q(\underline{g};\underline{l}_{(i,s)})}{\sigma_q W_q(\underline{g};\underline{l}_s)}\right). \tag{5.2.9}$$

Pour tout $\rho \in]0,R[$, on a

$$\frac{|W_q(\underline{g};\underline{l}_s)|(\rho)}{|\sigma_q W_q(\underline{g};\underline{l}_s)|(\rho)} = 1 \text{ car } |q| = 1,$$

et

$$\frac{|D_q W_q(\underline{f};\underline{k}_{(s+1)})|(\rho)}{|W_q(\underline{f};\underline{k}_{(s+1)})|(\rho)} \leq \frac{1}{\rho}, \text{ d'après le Lemme 1.6.}$$

D'après les hypothèses, on a pour tout $0 \leq i \leq s-1$

$$\left|[(q-1)x]^{s-i}\right|(\rho)\frac{|W_q(\underline{g};\underline{l}_{(i,s)})|(\rho)}{|\sigma_q W_q(\underline{g};\underline{l}_s)|(\rho)} \leq \frac{\rho^{s-i}}{\rho^{\frac{s(s+1)}{2}+1-i-\frac{s(s-1)}{2}}} = \frac{1}{\rho}.$$

Donc d'après (5.2.9), on a

$$\frac{|W_q(\underline{f};\underline{k}_s)|(\rho)}{|W_q(\underline{f};\underline{k}_{(s+1)})|(\rho)} \leq \frac{1}{\rho}. \tag{5.2.10}$$

D'après les hypothèses, on a aussi pour tout $0 \leq j \leq s-1$

$$\frac{|W_q(\underline{g};\underline{l}_j)|(\rho)}{|W_q(\underline{g};\underline{l}_s)|(\rho)} \leq \frac{1}{\rho^{s-j}} \text{ et } \frac{|W_q(\underline{g};\underline{l}_{(j,s)})|(\rho)}{|\sigma_q W_q(\underline{g};\underline{l}_s)|(\rho)} \leq \frac{\rho^{s-j}}{\rho^{\frac{s(s+1)}{2}+1-j-\frac{s(s-1)}{2}}} = \frac{1}{\rho^{s+1-j}}.$$

Alors, d'après (5.2.8) et (5.2.10), on a pour tout $0 \leq j \leq s-1$

On remarque d'après (5.2.10) et (**??**), que l'inégalité (ii) est vraie pour le rang $s+1$ et est donc vraie pour $s \geq 1$. Ce qui complète la preuve de l'inégalité (ii).

Maintenant, l'équation aux q-différences vérifiée par les fonctions $f_1, ..., f_{s+1}$ est

$$\sum_{j=0}^{s+1} (-1)^j W_q(\underline{f};\underline{k}_j) D_q^j y = 0.$$

Ecrivons cette équation de la forme

$$D_q^{s+1} y = \sum_{j=0}^{s} A_j D_q^j y, \tag{5.2.11}$$

avec $A_j = (-1)^{s-j} \frac{W_q(\underline{f};\underline{k}_j)}{W_q(\underline{f};\underline{k}_{(s+1)})}$. Généralement, pour tout $n \geq 0$, supposons

$$D_q^n y = \sum_{j=0}^{s} A_{j,n} D_q^j y, \tag{5.2.12}$$

avec les $A_{j,n}$ sont des fonctions méromorphes dans le disque $d(0,R)$ de $\Bbbk$ vérifiant les relations suivantes

$$A_{j,n} = \begin{cases} 0 \text{ si } j \neq n \\ 1 \text{ si } j = n \end{cases}, \text{ pour } 0 \leq n \leq s; \tag{5.2.13}$$

$$A_{j,s+1} = A_j, \text{ pour } 0 \leq j \leq s; \tag{5.2.14}$$

$$\begin{cases} A_{0,n+1} = A_0 \sigma_q A_{s,n} + D_q A_{0,n} \\ A_{j,n+1} = A_j \sigma_q A_{s,n} + \sigma_q A_{j-1,n} + D_q A_{1,n} \end{cases}, \text{ pour } 1 \leq j \leq s+1. \tag{5.2.15}$$

Maintenant, on veut démontrer que pour tout $j \in \{0, ..., s+1\}$ et pour tout $\rho \in]0, R[$, on a

$$|A_{j,n}|(\rho) \leq \frac{1}{\rho^{n-j}}, \forall n \geq 0. \tag{5.2.16}$$

L'inégalité (5.2.16) est triviale pour $0 \leq n \leq s$ d'après la formule (5.2.13).

En utilisant (5.2.14) et (**??**), on remarque que l'inégalité (5.2.16) est vraie pour $n = s+1$.

En utilisant (5.2.15) et la Proposition 5.2.1, on complète la preuve de l'inégalité (5.2.16) par réccurence sur n.

Maintenant, on a la formule

$$\begin{pmatrix} D_q^{k_1} f_1 & \dots & D_q^{k_{s+1}} f_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ D_q^{k_1} f_{s+1} & \dots & D_q^{k_{s+1}} f_{s+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & \dots & D_q^s f_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{s+1} & \dots & D_q^s f_{s+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{0,k_1} & \dots & A_{0,k_{s+1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{s,k_1} & \dots & A_{s,k_{s+1}} \end{pmatrix}.$$

Prenons les déterminants de chaque membre de l'indentité ci-dessus, on obtient $W_q\left(\underline{f};\underline{k}\right) = \Delta W_q\left(\underline{f};\underline{k}_s\right)$, avec Δ est le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} A_{0,k_1} & \dots & A_{0,k_{s+1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{s,k_1} & \dots & A_{s,k_{s+1}} \end{pmatrix}$.

On complète la preuve de (ii) en montrant que $|\Delta|(\rho) \leq \frac{1}{\rho^{k_1+k_2+\ldots+k_{s+1}-\frac{s(s+1)}{2}}}$ comme dans le Théorème 2.1 dans [4].

Corollaire 5.2.1 *([15]) Soient $f_1, \ldots, f_s$, $(s \geq 1)$ des fonctions méromorphes dans le disque $d(0,R)$ de $\Bbbk$. Soient $\underline{f}=(f_1,\ldots,f_s)$, $\underline{k}=(k_1,\ldots,k_s)$ des entiers positifs et $\underline{k}_s = (0,\ldots,s-1)$. On a alors, pour tout $\rho \in]0,R[$*

$$|W_q\left(\underline{f};\underline{k}\right)|(\rho) \leq \frac{|W_q\left(\underline{f};\underline{k}_s\right)|(\rho)}{\rho^{k_1+k_2+\ldots+k_s-\frac{s(s-1)}{2}}}.$$

Preuve.

Soient $\rho \in]0,R[$ et $r \in]\rho,R[$. Alors, il existe un polynôme non nul tel que $g_1 = Pf_1, \ldots, g_s = Pf_s$ sont des fonctions analytiques dans le disque $d(0,R)$.

On peut facilement démontrer que $W_q\left(\underline{f};\underline{k}_s\right) = \frac{1}{\left(\prod_{j=0}^{s-1}\sigma_q^j P\right)} W_q\left(\underline{g};\underline{k}_s\right)$, et alors

$$|W_q\left(\underline{f};\underline{k}_s\right)|(\rho) = \frac{|W_q\left(\underline{g};\underline{k}_s\right)|(\rho)}{\left(|P|(\rho)\right)^s}.$$

En utilisant le Lemme 5.2.4, on obtient pour tout i, $j \in \{1,\ldots,s\}$

$$D_q^{k_j} f_i = \sum_{l_j=0}^{k_j} \begin{bmatrix} k_j \\ l_j \end{bmatrix} D_q^{l_j} g_i \sigma_q^{l_j} D_q^{k_j-l_j}\left(\frac{1}{P}\right).$$

Alors de cette identité, on trouve

$$W_q\left(\underline{f};\underline{k}\right)=\sum_{l_1,\dots,l_s}\left(\prod_{j=1}^{s}\begin{bmatrix}k_j\\l_j\end{bmatrix}\prod_{j=1}^{s}\sigma_q^{l_j}D_q^{k_j-l_j}\left(\frac{1}{P}\right)\right)W_q\left(\underline{g};\underline{l}\right),$$

avec $\underline{l}=(l_1,\dots,l_s)$, $0\leq l_j\leq k_j$.

Comme $|q|=1$, on a $\left|\prod_{j=1}^{s}\begin{bmatrix}k_j\\l_j\end{bmatrix}\right|\leq 1$.

D'après la Proposition 5.2.1, on a

$$\left|\prod_{j=1}^{s}\sigma_q^{l_j}D_q^{k_j-l_j}\left(\frac{1}{P}\right)\right|(\rho)\leq\frac{1}{\left(|P|(\rho)\right)^s}\frac{1}{\rho^{(k_1+k_2+\dots+k_s)-(l_1+l_2+\dots+l_s)}}.$$

Comme les g_i sont analytiques dans $d(0,r)$, on obtient d'après le Theorème 5.2.2

$$\left|W_q\left(\underline{g};\underline{l}\right)\right|(\rho)\leq\frac{|W_q\left(\underline{g};\underline{k}_s\right)|(\rho)}{\rho^{l_1+l_2+\dots+l_s-\frac{s(s-1)}{2}}}.$$

Donc

$$\left|\prod_{j=1}^{s}\begin{bmatrix}k_j\\l_j\end{bmatrix}\prod_{j=1}^{s}\sigma_q^{l_j}D_q^{k_j-l_j}\left(\frac{1}{P}\right)W_q\left(\underline{g};\underline{l}\right)\right|(\rho)\leq\frac{1}{\left(|P|(\rho)\right)^s}\frac{|W_q\left(\underline{g};\underline{k}_s\right)|(\rho)}{\rho^{k_1+k_2+\dots+k_s-\frac{s(s-1)}{2}}}.$$

De cela et la propriété de l'inégalité ultramétrique, on obtient

$$|W_q\left(\underline{f};\underline{k}\right)|(\rho)\leq\frac{|W_q\left(\underline{g};\underline{k}_s\right)|(\rho)}{|P|^s(\rho)}\frac{1}{\rho^{k_1+k_2+\dots+k_s-\frac{s(s-1)}{2}}}=\frac{|W_q\left(\underline{f};\underline{k}_s\right)|(\rho)}{\rho^{k_1+k_2+\dots+k_s-\frac{s(s-1)}{2}}}.$$

Le résultat suivant donne une propriété algébrique du $q-$Wronskien des fonctions polynômiales ou rationnelles. Rappelons que si $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynômes, alors le degré de la fonction rationnelle $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ est $\deg R=\deg P-\deg Q$.

Corollaire 5.2.2 *([15]) Soit L un champ et soit q un élément non nul de L diffèrent de la racine de l'unité. Soient $Q_1,\dots,Q_s, s\geq 1$, des fonctions rationnelles à coefficients dans L et linéairement indépendantes sur tout L. Soient $\underline{Q}=(Q_1,\dots,Q_s)$, $\underline{k}=(k_1,\dots,k_s)$ des entiers positifs et $\underline{k}_s=(0,\dots,s-1)$. Notons par d_1, d_2 les degrés des fonctions rationnelles $W_q\left(\underline{Q};\underline{k}_s\right)$ et $W_q\left(\underline{Q};\underline{k}\right)$ respectivement. Alors on a*

$$d_2\leq d_1+\frac{s(s-1)}{2}-(k_1+k_2+\dots+k_s).$$

Preuve.

On peut supposer que L est un champ algébriquement clos muni de la valeur absolue triviale $|\ |_0$ définie par $|0|_0 = 0$ et $|x|_0 = 1$ si $x \neq 0$.

Alors il est clair que L est un champ ultramétrique complet avec cette valeur absolue. D'ailleurs, les fonctions entières (resp. les fonctions méromorphes) sur L sont simplement des polynômes (resp. des fonctions rationnelles) sur L.

D'une part, pour tout $\rho > 1$, on a

$$\left|W_q\left(\underline{Q}; \underline{k}_s\right)\right|(\rho) = \rho^{d_1} \text{ et } \left|W_q\left(\underline{Q}; \underline{k}\right)\right|(\rho) = \rho^{d_2}. \tag{5.2.17}$$

D'autre part, d'après le Corollaire 5.2.1, on obtient

$$\left|W_q\left(\underline{Q}; \underline{k}\right)\right|(\rho) \leq \frac{\left|W_q\left(\underline{Q}; \underline{k}_s\right)\right|(\rho)}{\rho^{k_1+k_2+...+k_s-\frac{s(s-1)}{2}}}. \tag{5.2.18}$$

Il s'ensuit de (5.2.17) et (5.2.18) que

$$1 \leq \rho^{d_1-d_2+\frac{s(s-1)}{2}-(k_1+k_2+...+k_s)}. \tag{5.2.19}$$

L'inégalité demandée s'ensuit immédiatement.

Théorème 5.2.3 *([15]) Soient $f_1, ..., f_s, (s \geq 1)$ des fonctions entières dans $\mathbb{k}$, $\underline{f}$=$(f_1, ..., f_s)$, $\underline{k}_s = (0, ..., s-1)$. Supposons que le $q-$Wronskien $W_q\left(\underline{f}; \underline{k}_s\right)$ est un polynôme non nul. Alors $f_1, ..., f_s$ sont des polynômes.*

Preuve.

Le résultat est trivial pour $s = 1$ et le cas $s = 2$ a été traité dans le Théorème 5.2.1. Donc, on va supposer que $s \geq 2$ est tel que le résultat soit vrai pour $s-1$. Alors on procède comme dans la preuve du Theorème 5.2.1. D'après les hypothèses, $W_q\left(\underline{f}; \underline{k}_s\right)$ est un polynôme non nul $P(x)$.

Commençons tout d'abord par considérer le cas où $P(x)$ est une constante C. Alors, d'après le Lemme 5.2.2, on a

$$|W_q\left(\underline{f}; \underline{k}_j\right)|(\rho) \leq \frac{|W_q\left(\underline{f}; \underline{k}_s\right)|(\rho)}{\rho^{s-j}} = \frac{|C|}{\rho^{s-j}}, \text{ pour } j = 0, ..., s-1.$$

Les fonctions considérées sont entières, ce qui implique

$$W_q\left(\underline{f};\underline{k}_j\right)=0,\ \text{pour } j=0,...,s-1.$$

L'équation aux $q-$différences vérifiée par $f_1,...,f_s$ est donc réduit à $CD_q^s y=0$, ce qui implique simplement que $f_1,...,f_s$ sont des polynômes.

On procède par réccurence sur le degré du polynôme non nul $P(x)$. Supposons que le résultat est vrai si $P(x)$ est de degré $\leq n$ et considèrons le cas où $P(x)$ est de degré $n+1$. D'après le Lemme 5.2.2, on obtient

$$|W_q\left(\underline{f};\underline{k}_0\right)|(\rho)\leq\frac{|P|(\rho)}{\rho^s}.$$

Donc, d'après le théorème de Liouville ultramétrique, on remarque que $W_q\left(\underline{f};\underline{k}_0\right)$ est un polynôme de degré $\leq n+1-s<n$. Si ce polynôme est non nul, alors $D_qf_1,...,D_qf_s$ sont des polynômes d'après l'hypothèse de recurrence et donc $f_1,...,f_s$ sont polynômes.

Si le polynôme $W_q\left(\underline{f};\underline{k}_0\right)$ est nul, alors le système $D_qf_1,...,D_qf_s$ est de rang $r\leq s-1$. On peut assumer que $D_qf_1,...,$ D_qf_r sont linéairement indépendantes. Alors tout D_qf_j est une combinaison linéaire de $D_qf_1,...,D_qf_r$, et donc tout f_j est une combinaisin linéaire de $f_1,...,f_r$ et la constante 1. Donc le sous-espace $\mathbb{k}-$vectoriel généré par les fonctions $f_1,...,f_s$ (de dimension s) est inclu dans le sous-espace $\mathbb{k}-$vectoriel généré par les fonctions $f_1,...,f_r,1$ (de dimension $\leq r+1$), et donc $s\leq r+1$. Il s'ensuit que, finalement, que $r=s-1$.

Alors on peut supposer que les fonctions $D_qf_1,...,D_qf_{s-1}$ sont linéairement indépendants et que D_qf_s est une combinaison linéaire de $D_qf_1,...,$ D_qf_{s-1} à coefficients dans $\mathbb{k}$:

$$D_qf_s=a_1D_qf_1+...+a_{s-1}D_qf_{s-1}.$$

On en déduit que $f_s=a_1f_1+...+a_{s-1}f_{s-1}+b$ avec b une constante non nulle. On remarque facilement que le $q-$Wronskien de $f_1,...,f_s$ est égal (à un signe près) à b multiplié par le $q-$Wronskien de $D_qf_1,...,$ D_qf_{s-1}. Donc, ce $q-$Wronskien est un polynôme non nul, et l'hypothèse de réccurence sur s montre que $D_qf_1,...,D_qf_{s-1}$ sont des polynômes et donc $f_1,...,f_{s-1}$ le sont aussi. La formule $f_s=a_1f_1+...+a_{s-1}f_{s-1}+b$ alors montre que f_s est aussi un polynômes. D'où le résultat.

Remarque 5.2.3 *Le résultat précédent ne peut pas être appliquer aux fonctions méromorphes dans tout* $\mathbb{k}$*. En effet, soit* g *une fonction entière non polynomiale et soit* h *une fonction entière telles que* $D_q h = g\sigma_q g$*. Soit* $f_1 = \frac{1}{g}$*, et* $f_2 = \frac{h}{g}$*. On remarque que* f_1 *et* f_2 *sont des fonctions méromorphes non rationnelles alors que le* $q-$ *Wronskien de* f_1 *et* f_2 *est égal à* 1*.*

Théorème 5.2.4 *([15]) Soient* $P_0, ..., P_s, s \geq 1,$ *des polynômes à coefficients dans* $\mathbb{k}$ *tels que* P_s *est non nul.*
Supposons que l'équation aux $q-$*différences*

$$P_s D_q^s y + ... + P_1 D_q y + P_0 y = 0, \tag{E}$$

a un système complet de solutions qui sont entières dans $\mathbb{k}$*. Alors toute solution entière de* (E) *est un polynôme.*

Preuve.
Soient $f_1, ..., f_s$ des fonctions entières dans $\mathbb{k}$, formant une base de l'espace $\mathbb{k}-$vectoriel de solutions de l'équation (E). Alors le $q-$Wronskien $W = W_q\left(\underline{f}; \underline{k}_s\right)$ de $f_1, ..., f_s$ est une fonction entière non nulle.
Un calcul immédiat donne

$$P_s D_q W_q\left(\underline{f}; \underline{k}_s\right) + \left(\sum_{i=0}^{s-1} \left[(1-q)\, x\right]^{s-1-i} P_i\right) W_q\left(\underline{f}; \underline{k}_s\right) = 0. \tag{5.2.20}$$

Si $\sum\limits_{i=0}^{s-1} \left[(1-q)\, x\right]^{s-1-i} P_i = 0$, alors $W_q\left(\underline{f}; \underline{k}_s\right)$ est une constante non nulle. D'après le Théorème 5.2.6, on obtient que $f_1, ..., f_s$ sont des polynômes.
On peut donc assumer dans ce qui suit $\sum\limits_{i=0}^{s-1} \left[(1-q)\, x\right]^{s-1-i} P_i \neq 0$. Soit $R > 0$ tel que les zéros des polynômes P et $\sum\limits_{i=0}^{s-1} \left[(1-q)\, x\right]^{s-1-i} P_i$ sont contenus dans le disque $d\,(0, R)$. Supposons que la fonction $W_q\left(\underline{f}; \underline{k}_s\right)$ admet un zéro α tel que $|\alpha| = \rho > R$. Alors, d'après (5.2.20), on a $D_q W_q\left(\underline{f}; \underline{k}_s\right)(\alpha) = 0$. En utilisant la formule $\sigma_q W_q\left(\underline{f}; \underline{k}_s\right) = (q-1)\, x D_q W_q\left(\underline{f}; \underline{k}_s\right) + W_q\left(\underline{f}; \underline{k}_s\right)$, on remarque que $W_q\left(\underline{f}; \underline{k}_s\right)(q\alpha) = \sigma_q W_q\left(\underline{f}; \underline{k}_s\right)(\alpha) = 0$. Comme $|q| = 1$, une recurrence immédiate alors montre que la fonction $W_q\left(\underline{f}; \underline{k}_s\right)$ a un nombre infini de zéros dans le disque

$d(0,\rho)$, contradiction. Alors $W_q(\underline{f};\underline{k}_s)$ a tous ses zéros dans le disque $d(0,R)$. Ce qui veut dire que $W_q(\underline{f};\underline{k}_s)$ a un nombre fini de zéros et est donc un polynôme. Théorème 5.2.6 alors montre que $f_1,...,f_s$ sont des polynômes.

Théorème 5.2.5 *([15]) Soient $P_0,...,P_s, s\geq 1$, des polynômes à coefficients dans $\mathbb{k}$ tels que P_s est non nul.*
Supposons que l'équation aux q-différences

$$P_s D_q^s y + ... + P_1 D_q y + P_0 y = 0, \tag{E}$$

a un système complet de solutions qui sont méromorphes dans $\mathbb{k}$. Alors toute solution de (E) est une fonction rationnelle.

Preuve.
Soient $f_1,...,f_s$ des fonctions méromorphes dans tout $\mathbb{k}$, formant une base de l'espace $\mathbb{k}-$vectoriel de solutions de l'équation (E).
En utilisant la formule $\sigma_q y = (q-1)\,xD_q y + y$ on déduit que l'équation (E) est équivalente à

$$Q_s\sigma_q^s y + ... + Q_1\sigma_q y + P_0 y = 0, \tag{E$'$}$$

avec $Q_0,...,Q_s$ sont des éléments de $\mathbb{k}[x]$ tels que $Q_s = P_s$. On peut assumer, sans perte de généralité que $Q_0 \neq 0$. Soit y une solution méromorphe de (E') dans $\mathbb{k}$, et soit ω un pôle de y, qui n'est pas un zéro de Q_0. Il s'ensuit que il existe l_1 tel que $q^{l_1}\omega$ est un pôle de y. On ne peut pas continuer ce processus indéfiniment. Donc il existe un entier $l_\omega \geq 0$ tel que pour tout $j\geq 1$, $q^{l_\omega+j}\omega$ n'est pas un pôle pour y. D'après l'équation (E'), la fonction $Q_0(q^{l_\omega}x)\,y(q^{l_\omega}x)$ n'a pas ω comme pôle. D'ailleurs, $q^{l_\omega}\omega$ est un zéro de $Q_0(x)$. Soit $R>0$ est tel que tous les zéros du polynôme $Q_0(x)$ sont contenus dans le disque $d(0,R)$. Par conséquent, y a seulement un nombre fini de pôle. Appliquons cela à $f_1,...,f_s$, on remarque qu'il existe une fonction $H(x)$ non polynômiale, telle que $g_1(x) = H(x)\,f_1(x),...,g_s(x) = H(x)\,f_s(x)$ sont des fonctions entières dans $\mathbb{k}$. Il est clair que $g_1,...,g_s$ sont linéairement indépendantes et vérifient l'équation aux $q-$différences d'ordre s avec des coefficients polynomials. On conclut en utilisant le Théorème 5.2.5.

CONCLUSION

La présente thèse "unicité des fonctions entières et équations différentielles", n'est en quelque sorte qu'une capitalisation de mon parcours académique dirigé par Pr. Belaïdi Benharrat.

Au début de la recherche, notre étude allait dans le sens de la théorie d'unicité des fonctions entières. Cette théorie a été initié en 1929 par Nevanlinna en tant que deux théorèmes essentiels, connus comme le Théorème des cinq valeurs et le Théorème des quatre valeurs, autre contributions ont été donné par Gundersen, Mues, et autres auteurs. Le résultat le plus répandu est la Conjecture de Brück, qui affirme qu'une fonction entière f partage une valeur a avec sa dérivée alors on a $f^{-} - a = c\,(f - a)$. On a pu étendre et améliorer cette conjecture pour les polynômes, ainsi les polynômes différentiels, les fonctions à petite croissance, les équations non linéaires, tout en utilisant l'aproche de Nevanlinna et la théorie de Wiman-Valiron.

Ensuite, on a démontré quelques résultats concernant ces solutions et d'autres pour le cas où les équations différentielles sont homogènes. Après, on s'est intéressé à la croissance des solutions méromorphes des équations différentielles linéaires homogènes d'ordre supérieur à coefficients fonctions méromorphes en donnant des estimations précises sur l'hyper-ordre, l'ordre itératif et l'ordre $[p, q] - \varphi$ de ces solutions. On remarque que ces équations sont peu étudiées car toutes leurs solutions ne sont pas toujours des fonctions méromorphes. Ce qui rend leur étude plus difficile.

Mon stage à l'université de Blaise-Pascal, dirigé par Mc. Boutabaa Abdelbaki m'a permis d'enrichir mes connaissances tout en visitant l'univers $p-$adique. En adoptant les définitions du $q-$Wronskien et la $q-$dérivation. On a pu obtenir des résultats remarquables sur les équations aux $q-$différences dont on a achevé par des applications sur la théorie des nombres.

Il est effictivement illusoire de croire que tout est fini là. Voici quelsques questions que nous jugeons intéressantes :

1. Peut-on étendre ces résultats du *Chapitre 5* pour les opérateurs différentiels ?
2. Peut-on démontrer les résultats analogues du *Chapitre 5* dans un corps ultramétrique ?

ANNEXES

Rolf Nevanlinna, décédé le 28 mai 1980 à l'âge de 84 ans, avait été élu correspondant de l'Académie dans la Section de Géométrie en 1967. Né en Finlande en 1895, fils d'un professeur de mathématiques au lycée d'Helsinki, il était devenu célèbre dès 1925 par sa découverte de la « fonction de croissance » attachée à une fonction méromorphe d'une variation complexe. Cette notion nouvelle le conduisit à de remarquables extensions du fameux théorème de Picard.

Devenu membre de l'Académie de Finlande lors de la fondation de celle-cien 1948, il avait acquis une autorité internationale qui fut consacrée par sa désignation comme Président de l'Union Mathématique Internationale de 1959 à 1962,puis comme Président du Congrès International des Mathématiciens à Stockholmen 1962.
C'est aussi en raison de son prestige scientifiqueque la ville d'Helsinki fut choisie pour tenir le Congrès international des mathématiciens en 1978.

La carrière universitaire de Rolf Nevanlinna s'est déroulée à l'Université d'Helsinki : il y avait débuté comme Docent en 1922, à l'âge de 27 ans, puis était devenu professeur quatre ans plus tard. En 1929,il déclina l'offre qui lui était faite de succéder à Hermann Weyl dans sa chaire de l'École Polytechnique Fédérale de Zürich.

Recteur de l'Université d'Helsinki de 1941 à 1945, il fut ensuite nommé professeur à l'Université de Zürich et, jusqu'à sa retraite, partagea son activité entre les Universités de Zürich et d'Helsinki.

Enfin, de 1965 à 1970, il remplit les fonctions de Chancelier de l'Université de Turku.
Nevanlinna maniait la langue française et la langue allemande aussi bien que sa propre langue.

Il avait des attaches avecl'École mathématique française de « théorie des fonctions », comme ondisait alors. Cette branche des mathématiques avait été illustrée par Emile Picard, Jacques Hadamard, Emile Borel ; puis la théorie des fonctions entières ou méromorphes d'une variable complexe avait été affinée par Gaston Julia, Georges Valiron. Les recherches de Nevanlinna qui le rendirent célèbre ont été publiées aux Comptes rendus de notre Académie, entre 1922 et 1925, dans une série de Notes présentées par Emile Borel.

Rolf Nevanlinna fit ensuite deux séjours prolongés à Paris, en 1926 et en 1929. Lorsque la théorie de Nevanlinna eut pris sa forme définitive, il écrivit à la demande d'Emile Borel un exposé d'ensemble pour un volume de la fameuse Collection de monographies sur la théorie des fonctions. Le livre de Nevanlinna parut en 1929sous le titre : « Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes ». Cet ouvrage fait date dans l'histoire de la théorie des fonctions méromorphes ; épuisé, il fut réédité 45 ans plus tard aux États-Unis.

Deux autres monographies, écrites plus tard en langue allemande et contenant d'autres résultats originaux, resteront aussi d'indispensables outils de travail pour ceux qui veulent approfondir les problèmes fondamentaux de la théorie des fonctions en relation avec la théorie du potentiel. Elles ont paru dans la Collection des « Grundlehren » chez Springer : « Eindeutige analytische Funktionen » en 1936,« Uniformisierung » en 1953.
Dans ce dernier ouvrage, Nevanlinna développe notamment la théorie des intégrales abéliennes sur les surfaces de Rieman ouvertes.
Cette Notice sur Rolf Nevanlinna serait incomplète si l'on omettait d'y parler de son frère Frithiof Nevanlinna, son aîné d'un an. Certains des premiers travaux de Rolf ont été signés avec son frère. Frithiof enseigna aussi à l'Université d'Helsinki. Il mourut en 1977.
Il ne serait pas non plus concevable de ne pas nommer ici un élève illustre de Rolf Nevanlinna : le Finlandais Lars Ahlfors se révéla en 1929 pour avoir prouvé, à l'âge de 22 ans, la fameuse conjecture de Denjoy, selon laquelle toute fonction méromorphe d'ordre $\rho \geqslant \frac{1}{2}$ possède au plus 2 « valeurs asymptotiques ». La première des Médailles Fields fut attribuée à Ahlfors en 1936. Plus tard, lorsque Ahlfors quitta sa chaire à l'Université de Zurich en 1946 pour aller enseigner à Harvard, c'est son maître Nevanlinna qui lui succéda !

Toute sa vie, Nevanlinna fit preuve d'une activité considérable. Le catalogue de ses publications compte plus de 200numéros. Tous ceux qui l'ont connu ne pouvaient manquer d'être frappés par sa forte personnalité : c'était un homme de caractère dont l'autoritués'imposait. On l'a bien vu lorsque, présidant le comité international chargé d'établir le programme des conférences au Congrès international de Moscou en 1966, il tint tête à ses collègues soviétiques.

Rolf Nevanlinna était un homme qui inspirait le respect. Notre Académie s'honore de l'avoir compté en son sein.

Bibliographie

[1] Y. Amice, *Les nombres p-adiques*, P.U.F. (1975).

[2] S. Bank, A *General theorem concerning the growth of solutions of first-order algebraic differential equations*, Compositio Math. 25 (1972), p.p 61–70.

[3] B. Belaïdi, *Growth and oscillation of solutions to linear differential equations with entire coefficients having the same order*, Electron. J. Differential Equations (2009), No. 70, p.p 1–10.

[4] B. Belaïdi, *Growth of solutions of linear differential equations in the unit disc*, Bull. Math. Analy. Appl., 3 (2011), no. 1, 14–26.

[5] B. Belaïdi,, *Growth of solutions to linear differential equations with analytic coefficients of* $[p, q]-$*order in the unit disc*, Electron. J. Differential Equations (2011), No. 156, p.p 1–11.

[6] B. Belaïdi, *On the* $[p, q]-$*order of analytic solutions of linear differential equations in the unit disc*, Novi Sad J. Math. 42 (2012), no. 1, 117–129.

[7] J. -P. Bézivin, *Wronskien et équations différentielles* p*-adiques*, Acta Arithmetica, 158 (2013), no 1, pages 61-78.

[8] J. -P. Bézivin, *Casoratien et équations aux differences* p*-adiques*, A paraitre aux Annales de la Facult e des Sciences de Toulouse.

[9] J. P. Bézivin, *Cours de DEA.*

[10] R. Bouabdelli and B. Belaïdi, *Results on shared values of entire functions,* International Journal of Difference Equations, Volume 8 (2013), Number 1, p.p. 3–14.

[11] R. Bouabdelli and B. Belaïdi, *Unicity Theorems of Entire Functions and Differential Polynomials.*

[12] R. Bouabdelli and B. Belaïdi, *On The Brück Conjecture and Differential polynomials.*

[13] R. Bouabdelli and B. Belaïdi, *On the Iterated Exponent of Convergence of Solutions of Linear Differential Equations with Entire and Meromorphic Coefficients,* Journal of mathematics (2013), volume 9, p.p. 1-9.

[14] R. Bouabdelli and B. Belaïdi, *Properties of the Growth and Complex Oscillation of Solutions of Higher Order Linear Differential Equations.*

[15] R. Bouabdelli, A. Boutabaa and B. Belaïdi, *$p-$adic $q-$difference equations and $q-$Wronskian,* Submitted.

[16] N. Boudjeridaa, A. Boutabaa and S. Medjeraba, *On some ultrametric q-difference equations*, Bulletin des sciences mathmatiques 137 (2013) , p.p. 177-188.

[17] A. Boutabaa, *On some p-adic functional equations,* Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics n. 192 (1997), (Marcel Dekker).

[18] A. Boutabaa, *A note on p-adic linear differential equation,*. J of Number theory (2001), 87, p.p. 301-305.

[19] A. Boutabaa, *Théorie de Nevanlinna p-adique*, Manuscripta Math. 67 (1990), p.p. 251 269.

[20] R. Brück, *On entire functions which share one value CM with their first derivative*, Result in Math.(1996), 30, p.p. 21–24.

[21] T. B. Cao and H. X. Yi, *On the complex oscillation of higher order linear differential equations with meromorphic coefficients*, Jrl Syst Sci. & Complexity (2007), 20, p.p. 135-148.

[22] T. B. Cao, Z. X. Chen, X. M. Zheng and J. Tu, *On the iterated order of meromorphic solutions of higher order linear differential equations*, Ann. Differential Equations 21 (2005), no. 2, p.p. 111–122.

[23] Zong-Xuan Chen, *The growth of solutions of $f'' + e^z f' + Q(z)f = 0$ where the order $(Q) = 1$,* Sci. China. Ser. A 45 (2002), no. 3, p.p. 290-300.

[24] Z. -X. Chen , *The growth of solutions of second order linear differential equations with meromorphic coefficients*, Kodai Math. J., 22 (1999), p.p. 208-221.

[25] Z. -X. Chen and K. H. Shon, *On conjecture of R. Brück concerning the entire function sharing one value CM with its derivative*, Taiwanese J. Math.(2004), 8, p.p. 235–244.

[26] Z. X. Chen and C. C. Yang, *Some further results on the zeros and growths of entire solutions of second order linear differential equation*, Kodai Math J. (1999), 22, p.p. 273–285.

[27] Y. Chen, T. Zhang and W. Lü, *Entire functions sharing a polynomial with their derivatives*, Complex Var. Elliptic Equ. 54 (2009), no. 5, p.p. 463–470.

[28] Y. M. Chiang and W. K. Hayman, *Estimates on the growth of meromorphic solutions of linear differential equations*, Comment. Math. Helv. 79 (2004), no. 3, p.p. 451–470.

[29] I. Chyzhykov, J. Heittokangas and J. Rättyä, *Finiteness of φ-order of solutions of linear differential equations in the unit disc*, J. Anal. Math. 109 (2009), p.p. 163–198.

[30] P. C. Fenton, *Wiman-Valiron theory for entire functions of finite lower growth*, Transaction of the American Mathematical society, Vol.252 (1979), p.p. 221-232.

[31] M. Frei, *Sur l'ordre des solutions entières d'une équation différentielle linéaire*, C. R. Acad. Sci. Paris., 236 (1953), p.p. 38-40.

[32] A. Gol'dberg and O. Sokolovskaya, *Some relations for meromorphic functions of lower order less than one,* Izv. Vyssh. Uchebu. Zaved. Math., 31(6), (1987), p.p. 26–31. Translation : Soviet Math. (Izv. Vuz), (1987), 31(6), p.p. 29-35.

[33] A. Goldberg and I. Ostrovskii, *Value Distribution of Meromorphic functions*, Transl. Math. Monogr., Amer. Math. Soc.(2008), Providence RI, vol. 236, .

[34] G. G. Gundersen, *Meromoprhic functions that share three or four values*, J.London Math. Soc. (1979), 20, p.p. 457-466.

[35] G. G. Gundersen, *Meromorphic functions that share two finite values with their derivatives*, Pacific. J. Math. (1983), 105, p.p. 199-309.

[36] G. Gundersen*, Finite order solutions of second order linear differential equations,* Trans. Amer. Math. Soc. (1988), 305., p.p. 415-429.

[37] G. G. Gundersen, *Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function, plus similar estimates*, J. London Math. Soc. (2) 37 (1988), no. 1, p.p. 88–104.

[38] G. G. Gundersen and L. Z. Yang, *Entire functions that share one value with one or two of their derivatives*, J. Math. Anal. Appl. (1998), 223, p.p. 88–95.

[39] V. Gupta and T. Kim, *On the rate of approximation by q modified Beta operators*, J. Math. Anal. Appl. 377 (2011), no. 2, p.p. 471–480.

[40] V. Gupta, H. Sharma, T. Kim and S. H. Lee, *Properties of q-analogue of Beta operator*, Adv. Difference Equ. (2012), p.p. 2012 :86.

[41] W. K. Hayman, *Meromorphic functions*, Clarendon Press, Oxford, 1964.

[42] W. Hayman, *The local growth of power series : A survey of the Wiman–Valiron method*, Canad. Math. Bull. 17 (1974) , p.p. 317–358.

[43] S. Hellerstein, J. Miles and J. Rossi, *On the growth of solutions of* $f'' + gf' + hf = 0$, Trans. Amer. Math. Soc., 324 (1991), p.p. 693-706.

[44] E. Hille, *Ordinary differential equations in the complex domain,* Wiley, New-York, 1976.

[45] H. Hu and X. M. Zheng, *Growth of solutions of linear differential equations with meromorphic coefficients of* $[p, q]-$*order,* Math. Commun. 19 (2014), p.p. 29-42.

[46] G. Jank and L. Volkmann, *Einführung in die Theorie der ganzen und meromorphen Funktionen mit Anwendungen auf Differentialgleichungen*, Birkhäuser, Basel, Boston, 1985.

[47] G. Jank, E. Mues, and L. Volkmann, *Meromorphe Funktionen, diemit ihrer ersten und zweiten Ableitung einen endlichenWert teilen*, Compl. Var. 6 (1986), p.p. 51–71.

[48] O. P. Juneja, G. P. Kapoor and S. K. Bajpai, *On the* $[p, q]-$*order and lower* $[p, q]-$*order of an entire function*, J. Reine Angew. Math. 282 (1979), p.p. 53–67.

[49] O. P. Juneja, G. P. Kapoor and S. K. Bajpai, *On the* $[p, q]-$*type and lower* $[p, q]-$*type of an entire function*, J. Reine Angew. Math. 290 (1977), p.p. 180–190.

[50] L. Kinnunen, *Linear differential equations with solutions of finite iterated order,* Southeast. Asian. Bull *of* Math. (1998), 22 , p.p. 385-405.

[51] K.-H. Kwon*, On the growth of entire functions satisfying second order linear differential equations,* Bull. Korean Math. Soc., 33 (1996), No. 3, p.p. 487-496.

[52] I. Laine, *Nevanlinna theory and complex differential equations*, de Gruyter, Berlin, 1993.

[53] I. Laine and P. Wu, *Growth of solutions of second order linear differential equations*, Proc. Amer. Math. Soc. (2000), 128, p.p. 2693-2703.

[54] X. -M. Li and C. -C. Gao, *Entire functions sharing one polynomial with their derivatives,* Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.), 118 (1) (2008), p.p. 13–26.

[55] L. M. Li, T. B. Cao, *Solutions for linear differential equations with meromorphic coefficients of* $[p, q]-$*order in the plane*, Electron. J. DifferentialEquations (2012), No. 195, p.p. 1–15.

[56] X.M. Li and H.X. Yi, *Some results on the regular solutions of differential equation*, Computers and Mathematics with applications, Vol.56 (2008), p.p. 2210-2221.

[57] J. Long and J. Wu, *On the hyper-order of solutions of second order linear differential equations, to appear..*

[58] J. Liu, J. Tu and L. Z. Shi, *Linear differential equations with entire coefficients of* $[p, q]-$*order in the complex plane,* J. Math. Anal. Appl. 372 (2010), p.p. 55–67.

[59] Z. Mao, *Uniqueness theorems on entire functions and their linear differential polynomials,* Result. Math, 55 (2009), no.3-4, p.p. 447-456.

[60] R. Nevanlinna, *Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes*, Gauthier-Villards, Paris, 1929.

[61] M. Reinders, *A new example of meromorphic functions sharing four values and a uniqueness theorem*, Complex Variables (1992), 18, p.p. 213-221.

[62] L. A. Rubel and C. C. Yang, *Values shared by an entire function and its derivative*, in "Complex Analysis, Kentucky 1976"(Proc. Conf.), Lecture Notes in Mathematics, Vol. 599, p.p.101-103, Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[63] D. Sato, *On the rate of gowth of entire functions of fast growth,* Bull. Amer. Math. Soc. 69 (1963), p.p. 411-414.

[64] A. Schönhage, *Uber das wachstum zusa mmengestzter funcktionen,* Math. Z. 37 (1960), p.p. 22-44.

[65] X. Shen, J. Tu and J. Xu, *The complex oscillation of second order linear differential equation with entire coefficients of* $[p,q]-$*order*. To appear.

[66] N. Steinmetz, *A uniqueness theorem for three meromorphic functions*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 13 (1988), no.1, p.p. 93-110.

[67] J. Tu and T. Long, *Oscillation of complex high order linear differential equations with coefficients of finite iterated order*, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. (2009), No. 66, p.p. 1–13.

[68] G. Valiron, *Lectures on the General Theory of Integral Functions*, Chelsea, New York, 1949.

[69] J. Wang and I. Laine, *Growth of solutions of second order linear differential equations,* J. Math. Anal. Appl., 342 (2008), no. 1, p.p. 39-51.

[70] J. Wang and X. M. Li, *The uniqueness of an entire function sharing a small entire function with its derivatives*, J. Math. Anal. Appl. 354 (2009), no. 2, p.p. 478–489.

[71] S. J. Wu, *On the growth of solutions of second order linear differential equations in an angle,* Complex Variables 24 (1994), p.p. 241-248.

[72] P. C. Wu and J. Zhu, *On the growth of solutions to the complex differential equation* $f''+Af'+Bf=0$, Sci. China Math. 54 (2011), no. 5, p.p. 939–947.

[73] Y.H. Xiao and X.M. Li, *An entire functions sharing one small function with its derivative*, Applied Mathematics, E-Notes (2008), p.p. 238-245.

[74] H. Y. Xu, J. Tu and X. M. Zheng, *On the hyper exponent of convergence of zeros of* $f^{(j)}-\varphi$ *of higher order linear differential equations*, Adv. Difference Equ. (2012), 2012 :114.

[75] L. Z. Yang, *Entire functions that share nite values with their derivatives*, Bull. Austral. Math. Soc., 41 (1990), p.p. 337-342.

[76] C. C. Yang and H. X. Yi, *Uniqueness Theory of Meromorphic Functions*, Kluwer Academic Publishers, 2003.

[77] C. Y. Zhang and J. Tu, *Growth of solutions to linear differential equations with entire coefficients of slow growth*, Electron. J. Differential Equations (2010), no. 43, p.p. 1–12.

[78] P. C. Hu and C. C. Yang, *Meromorphic functions over non Archimedean fields*, Mathematics and Its Applications, 522 Kluwer Academic, Dordrecht (2000).