République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE ABDELHAMID BEN BADIS MOSTAGANEM

Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique
Département de Mathématiques-Informatique

THÈSE DE DOCTORAT LMD

ÉTUDE ANALYTIQUE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES FRACTIONNAIRES ET APPLICATIONS

Option : Optimisation, Ondelettes et Calcul Fractionnaire

Présentée par : Amele TAÏEB

Soutenue, le 27 Juin, devant le Jury composé de :

Président	:	OULD ALI Mohand	M.C.A. Université de Mostaganem
Examinateur	:	BENDOUKHA Berrabah	Prof. Université de Naama
Examinatrice	:	BELARBI HAMANI Samira	M.C.A. Université de Mostaganem
Co-Directeur	:	BELHAMITI Omar	M.C.A. Université de Mostaganem
Directeur	:	DAHMANI Zoubir	Prof. Université de Mostaganem

Année Universitaire : 2015 – 2016

Liste des Travaux de Recherche et des Publications

A. Taïeb, Z. Dahmani : *A Coupled System of Nonlinear Differential Equations Involving m Nonlinear Terms,* Georjian Math. Journal. 2016 ; aop, DOI : 10.1515/gmj-2016-0014.

Z. Dahmani, A. Taïeb : *Solvability of A Coupled System of Fractional Differential Equations With Periodic and Antiperiodic Boundary Conditions,* PALM Letters, (2015), pp. 29-36.

Z. Dahmani, A. Taïeb : *A Coupled System of Fractional Differential Equations Involing Two Fractional Orders,* ROMAI Journal, Vol. 11, No.2 (2015), pp. 141-177.

Z. Dahmani, A. Taïeb : *Solvability For High Dimensional Fractional Differential Systems With High Arbitrary Orders,* Journal of Advanced Scientific Research in Dynamical and Control Systems, Vol. 7, 4, (2015), pp. 51-64.

Z. Dahmani, A. Taïeb : *New Existence and Uniqueness Results For High Dimensional Fractional Differential Systems,* Facta Nis Ser. Math. Inform., Vol. 30, No. 3, (2015), pp. 281-293.

Z. Dahmani, A. Taïeb and N. Bedjaoui : *Solvability and Stability For Nonlinear Fractional Integro-Differential Systems of Hight Fractional Orders,* Facta Nis Ser. Math. Inform., Accepted 2016.

Z. Dahmani, A. Taïeb : *The Hight Order Lane-Emden Fractional Differential System : Existence, Uniqueness and Ulam Stabilities,* Kragujevac Journal of Mathematics, To appear in 2016.

A. Taïeb, Z. Dahmani : *A New Problem of Singular Fractional Differential Equations,* Journal of Dynamical Systems and Geometric Theory, Accepted 2016.

A. Taïeb, Z. Dahmani : *On Singular Fractional Differential Systems and Ulam-Hyers Stabilities,* International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, Accepted 2016.

Dedicaces

À la mémoire de mon père.

À mes chèrs parents Mohammed TAÏEB et Aïcha MAHMOUD.

Remerciements

*Au nom d'**ALLAH** Clément et Miséricordieux !*

*Louange à **ALLAH** le Tout Puissant de m'avoir donné la force, le courage et la volonté pour pouvoir achever ce travail.*

J'exprime tout d'abord ma reconnaissance et mes remerciements les plus sincères à mon directeur de thèse Monsieur Zoubir DAHMANI, Professeur à l'Université de Mostaganem, pour son aide et ses conseils, ainsi que la confiance qu'il m'a fait en acceptant de m'encadrer.

J'adresse mes remerciements à Monsieur Mohand OULD ALI, Maître de Conférences à l'Université de Mostaganem pour l'honneur qu'il me fait de présider le jury.

Mes remerciements vont également à tous les membres du Jury, pour l'honneur qu'ils me font d'être dans le Jury, en l'occurrence :

Monsieur Berrabah BENDOUKHA, Professeur à l'Université de Naama.

Madame Samira BELARBI HAMANI, Maître de Conférences à l'Université de Mostaganem.

Monsieur Omar BELHAMITI, mon co directeur de thèse, Maître de Conférences à l'Université de Mostaganem.

Enfin, j'exprime mes remerciements aux membres de ma famille et mes amies qui m'ont soutenu durant ce travail.

Étude Analytique des Équations Differtentielles Fractionnaires et Applications

Résumé

La théorie des équations différentielles fractionnaires joue un rôle important dans la modélisation de nombreux processus physiques, technologiques et biologiques. Depuis quelques années, une attention particulière a été focalisée à l'étude de l'existence et l'unicité de solutions des équations différentielles fractionnaires. De plus, une attention considérable a été accordée récemment à l'étude de la stabilité au sens de Ulam-Hyers pour telles équations différentielles fractionnaires.

L'objectif principal de cette thèse est de compléter le contenu des autres travaux du calcul fractionnaire en ces deux axes de recherches. Les résultats obtenus sont basés sur les techniques du point fixe.

Tout d'abord, on a présenté des résultats qui consistent à étudier l'existence et l'unicité de solutions pour un système non linéaire aux dérivées d'ordres fractionnaires. D'autres résultats assurant l'existence d'une solution au moins du problème fractionnaire traité sont construits. On a présenté aussi quelques exemples qui sont construits pour illustrer les résultats.

Pour les systèmes fractionnaires multiples de dimension n, on a introduit une nouvelle classe selon l'approche de Caputo. Après avoir établit des conditions assurant l'existence et l'unicité de solutions pour tels problèmes fractionnaires, on a démontré des résultats d'existence et d'unicité. On a présenté aussi d'autres résultats assurant l'existence d'une solution au moins du problème fractionnaire considéré. Pour illustrer les résultats obtenus, on a donné quelques exemples démonstratifs.

De plus, les résultats proposés pour les problèmes fractionnaires ont été étendus au cas où ces problèmes fractionnaires sont singuliers. On a présenté aussi une étude originale sur la stabilité au sens de Ulam-Hyers pour telle classe de problème fractionnaire.

Mots-clés : Dérivé au sens de Caputo, point fixe, équations différentielles fractionnaires, existence, unicité, stabilité au sens d'Ulam-Hyers, stabilité au sens d'Ulam-Hyers généralisé.

MSC (2010) : 34A34, 34B10, 30C45, 39B72, 39B82.

Analytical Study of Fractional Differential Equations and Applications

Abstract

The theory of fractional differential equations plays an important role in the modeling of many processes physical, technological and biological. In recent years, a great attention has been focused on the study of the existence and uniqueness of solutions for the fractional differential equations. In addition, considerable attention has recently been given for the study of the Ulam type stabilities for such fractional differential equations.

The main objective of this thesis is to complete the content of other fractional calculus works in these two areas of research, we obtain several results on the existence, uniqueness and Ulam-Hyers stability and the generalized Ulam-Hyers stability for the fractional nonlinear equations. The results obtained are based on the techniques of fixed point.

First, we presented a new existence and uniqueness results of solutions for a nonlinear fractional system. Thus, other results ensuring the existence of a solution at least for the dealt fractional problem are constructed. Some examples are built to illustrate the results.

For the multiple fractional systems of dimension n, we introduced a new class using the approach of Caputo. After establishing the conditions for the existence and uniqueness of solutions for such fractional problems, some new results of the existence and uniqueness have proven. Also, other results ensuring the existence of a solution at least for the considered fractional problem are presented. To illustrate the main results, some illustrative examples were given.

In addition, the proposed results for fractional problems have been extended in the case where the fractional problems are singular. Some original studies on the Ulam-Hyers stability for such fractional problem class are also presented.

Keywords : Caputo derivative, fixed point, fractional differential equation, existence, uniqueness, Ulam-Hyers stability, generalized Ulam-Hyers stability.

Mathematics Subject Classification (2010) : 34A34, 34B10, 30C45, 39B72, 39B82.

Table des matières

Introduction Générale

La théorie du calcul fractionnaire remonte à plusieurs siècles, elle est peut être considérée aussi bien ancienne que nouvelle. Partant de quelques spéculations de G.W. Leibniz [59] et L'Hôpital où à la fin de l'année 1695 a été débitées. De nombreux mathématiciens ont contribué au développement du calcul fractionnaire, dont on peut citer [34] : Euler (1730), P.S. Laplace (1812). Ensuite en 1819, [56] la première mention d'une dérivée d'ordre arbitraire apparaît dans un texte où le mathématicien français S.F. Lacroix a publié un texte sur le calcul différentiel dans lequel il a consacré quelques pages au calcul fractionnaire, et J.B.J. Fourier (1822). Entre 1832 et 1837, une grande étude du calcul fractionnaire a été faite par J. Liouville. Ensuite, B. Riemann (1847) propose une approche pour la dérivation fractionnaire. Plus tard d'autres approches ont fait leurs apparitions comme celles d'A.K. Grünwald (1867-1872), d'A.V. Letnikov (1868-1872), de H. Laurent (1884), de Weyl (1917). et celle de M. Caputo [16] en 1967. (Pour plus de détails, voir [28]).

Toutefois, seulement depuis les années soixante-dix, le calcul fractionnaire a fait l'objet de conférences. Pour la première conférence de là, le mérite est due à B. Ross qui peu de temps après son doctorat sur le calcul fractionnaire, a organisé la première conférence sur le calcul fractionnaire et ses applications à l'Université de New Haven en Juin 1974 et édité ses travaux. Pour la première monographie, le mérite est attribué à K.B. Oldham et J. Spanier qui après une collaboration commencée en 1968, ont publié un livre consacré au calcul fractionnaire en 1974 [83].

En 1987, le livre de S. Samko, A. Kilbas et O. Marichev, considéré maintenant comme " encyclopédie " du calcul fractionnaire, apparu d'abord en russe, et plus tard avec une édition anglaise en 1993 [79]. Aujourd'hui, la série de livres, de revues et de textes consacrés au calcul fractionnaire et ses applications comprennent plusieurs dizaines de titres et cette liste devrait grandir encore plus dans les années prochaines.

Le calcul fractionnaire, en permettant à des intégrales et des dérivées de tout ordre, il représente un outil puissant en mathématiques appliquées pour étudier une myriade de problèmes de différents domaines de la science et de l'ingénierie avec de nombreux résultats trouvés en physique mathématique, finance, hydrologie, biophysique, thermodynamique, théorie du contrôle, statistique, astrophysique, cosmologie et en bio-ingénierie (voir, [39, 76, 89]).

D'autre part, la stabilité des équations fonctionnelles a été soulevée par Ulam en 1940 dans un discours prononcé à l'Université du Wisconsin, (pour plus de détails, voir [90]). La première réponse au problème posé par Ulam a été donnée par Hyers en 1941 dans [43]. Par la suite, ce type de stabilité est appelée la stabilité au sens d'Ulam-Hyers. En 1978, Rassias [77] a fourni une généralisation remarquable de la stabilité au sens d'Ulam-Hyers. Une attention considérable a été accordée à l'étude de la stabilité au sens d'Ulam-Hyers et au sens d'Ulam-Hyers-Rassias d'équations différentielles, on peut voir les monographies de [44, 51].

En outre, il existe peu de travaux sur la stabilité au sens d'Ulam d'équations différentielles fractionnaires. D'abord la stabilité au sens d'Ulam pour les équations différentielles fractionnaires avec dérivée de Caputo est proposée par J. Wang et al. [91, 94], tandis que avec la dérivée de Riemann-Liouville par R. Ibrahim [45]. Plus de détails des développements récents de telles stabilités sont rapportés dans [30, 47, 48, 63].

Organisation de la Thèse

Dans cette thèse, on traite deux axes de recherches principaux développés de 2000 à notre jour autour de la théorie des équations différentielles fractionnaires. On s'intéresse à la question d'existence et d'unicité de solutions de quelques systèmes fractionnaires pour exposer ensuite la stabilité au sens d'Ulam d'une nouvelle classe des équations différentielles fractionnaires singulières. L'objectif principal de cette thèse est de compléter le contenu des autres travaux du calcul fractionnaire.

Cette thèse est structurée comme suit :

Chapitre 1 : Préliminaires

Ce premier chapitre fournit une base théorique du calcul fractionnaire nécessaire pour la bonne compréhension et le développement des chapitres qui suivent. Les concepts de base et les principales propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire y sont répertoriés. De plus, on cite quelques exemples des applications des systèmes fractionnaires dans certains domaines.

Chapitre 2 : Étude des Systèmes Non Linéaires d'Ordre Fractionnaire

Ce chapitre est consacré à l'étude des systèmes non linéaires aux dérivées d'ordres fractionnaires. L'accent est mis sur la spécificité de ces systèmes qui permet de prendre en compte une grande classe de non linéarités. On présente donc nos résultats obtenus dans [86] qui consistent à étudier l'existence et l'unicité de solution pour un système non linéaire aux dérivées d'ordres fractionnaires. Dans ce même chapitre, on présente d'autres résultats assurant l'existence d'une solution au moins du problème fractionnaire traité. La démonstration des nouveaux résultats est basée sur le Théorème du point fixe de Banach et le Théorème du point fixe de Schaefer. Quelques exemples sont aussi construits pour illustrer nos résultats.

Chapitre 3 : Problèmes d'Ordres Fractionnaires Multiples

Ce chapitre est l'objet des principaux résultats de notre contribution [25] qui porte sur l'étude d'une nouvelle classe de systèmes fractionnaires multiples de dimension n. On établit des conditions suffisantes assurant l'existence et l'unicité de solution du problème fractionnaire. On présente aussi d'autres résultats sur l'existence d'une solution au moins du problème considéré. Ainsi, on donne quelques exemples démonstratifs pour illustrer les résultats obtenus.

Chapitre 4 : Stabilité des Équations Différentielles Fractionnaires

Ce chapitre est dédié aux nos résultats obtenus dans [87] où on s'intéressera aux problèmes non linéaires singuliers fractionnaires selon l'approche de Caputo. Après avoir présenté et démontré la représentation intégrale du problème singulier, on utilise les techniques du point fixe pour démontrer l'existence et l'unicité de solution du problème fractionnaire. On présente aussi d'autres résultats sur l'existence d'une solution au moins du problème considéré. De plus, la stabilité au sens d'Ulam sera abordée, en partant de ses définitions aux quelques sens permettant sa caractérisation à telle classe de problèmes fractionnaires.

Conclusion et Perspectives

Cette partie est dédiée aux rappels de différentes contributions apportées dans cette thèse ainsi que les perspectives considérées.

À la fin de cette thèse, pour la commodité des lecteurs intéressés par une autre investigation sur ces et d'autres sujets étroitement liés, on inclut une grande Bibliographie.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, on présente quelques concepts et connaissances sur la théorie du calcul fractionnaire. Ensuite, on cite quelques applications de la théorie du calcul fractionnaire dans certains domaines. On conclut le chapitre par une section réservée aux différents théorèmes des points fixes.

1.1 Outils Mathématiques de Base

Dans cette section, on présente la fonction Gamma et la fonction Beta qui sont les plus importants outils dans la théorie du calcul fractionnaire. Pour plus de détails voir [67, 79, 83].

1.1.1 Fonction Gamma

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma Euler $\Gamma(.)$ qui prolonge le factoriel aux valeurs non entières. En effet, la fonction Gamma est la généralisation aux nombres réels de la fonction factorielle définie pour les nombres entiers positifs.

Elle est donnée par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \ x > 0, \tag{1.1}$$

avec $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(0_+) = +\infty$, pour $0 < x \leq 1$, $x \mapsto \Gamma(x)$ est une fonction monotone et strictement décroissante. La fonction Gamma Γ possède une propriété importante donnée par la relation de récurrence suivante :

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x). \tag{1.2}$$

On peut démontrer (1.2) par une intégration par parties

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^x dt = \left[-e^{-t} t^x\right]_0^{+\infty} + x \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = x\Gamma(x). \tag{1.3}$$

La fonction Gamma d'Euler généralise la fonction factorielle car

$$\Gamma(n+1) = n!,\ \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{1.4}$$

La relation de réccurence (1.2) permet de définir $x \mapsto \Gamma(x)$ pour les valeurs négatives de x, tel que pour : $-1 < x < 0$, on aura : $0 < x+1 < 1$. Alors, $\Gamma(x+1)$ est bien définie par la formule (1.1) , mais pas $\Gamma(x)$. On peut définir $\Gamma(x)$ par la relation :

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}. \tag{1.5}$$

Ainsi pour : $-(n+1) < x < -n$, $n \in \mathbb{N}^*$, on aura :

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n+1)}{x(x+1)\dots(x+n)}. \tag{1.6}$$

1.1.2 Fonction Beta

La fonction Beta est définie par l'intégrale suivante :

$$B(x,y) = \int_0^1 (1-t)^{x-1} t^{y-1} dt,\ x,y \in \mathbb{R}_+^*. \tag{1.7}$$

La relation entre les fonctions Gamma et Beta est donnée par l'expression :

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = B(y,x). \tag{1.8}$$

1.2 Intégration Fractionnaire

L'intégration d'ordre fractionnaire est une généralisation de la notion de l'intégration d'ordre entière. La définition de l'intégration fractionnaire au sens de Riemann-Liouville se base sur la formule de cauchy qui calcule n fois l'intégrale répétée d'une fonction causale $t \longmapsto f(t)$,

$$I^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-s)^{n-1} f(s)\,ds,\ n \in \mathbb{N}^*. \tag{1.9}$$

1.2.1 Intégrale Fractionnaire de Riemann-Liouville

La généralisation de la formule de cauchy (1.9) à un ordre α réel positif, implique le remplacement de la fonction factorielle par la fonction Gamma comme suit :

Définition 1.1. *[67, 79, 83] L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$, pour une fonction f continue sur $[a, b)$ est donnée par :*

$$I_a^\alpha f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)\,ds, & \alpha > 0, \\ f(t), & \alpha = 0, \end{cases} \tag{1.10}$$

où $t \geq 0$, et $\Gamma(\alpha) := \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx$.

Proposition 1.2. *Soit $f \in C([a, b))$. Pour $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, on a :*

(a) : $I_a^\alpha I_a^\beta f = I_a^{\alpha+\beta} f$.

(b) : $I_a^\alpha I_a^\beta f(t) = I_a^\beta I_a^\alpha f(t)$.

Démonstration. Soient $\alpha > 0$, $\beta > 0$, et $f \in C([a, b))$.

Pour (a), la démonstration s'obtient par calcul direct en utilisant la fonction Beta. En effet,

$$\begin{aligned}
I_a^{\alpha}\left(I_a^{\beta}f\right)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left(I_a^{\beta}f\right)(s)\,ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left(\int_0^s (s-\tau)^{\beta-1} f(\tau)\,d\tau\right)ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^t f(\tau)\left(\int_\tau^t (t-s)^{\alpha-1}(s-\tau)^{\beta-1}\,ds\right)d\tau.
\end{aligned} \tag{1.11}$$

En posant :

$$x = \frac{s-\tau}{t-\tau}, \tag{1.12}$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_\tau^t (t-s)^{\alpha-1}(s-\tau)^{\beta-1}\,ds &= (t-\tau)^{\alpha+\beta-1}\int_0^1 (1-x)^{\alpha-1} x^{\beta-1}dx \\
&= (t-\tau)^{\alpha+\beta-1} B(\alpha,\beta) \\
&= (t-\tau)^{\alpha+\beta-1}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.
\end{aligned} \tag{1.13}$$

En remplaçant (1.13) dans (1.11), on aura :

$$I_a^{\alpha}\left(I_a^{\beta}f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha+\beta-1} f(\tau)\,d\tau = I_a^{\alpha+\beta}f(t), \tag{1.14}$$

d'où le résultat.

Maintenant pour démonterer (b), en utilisant la propriété précédente (a). Alors,

$$I_a^{\alpha}I_a^{\beta}f(t) = I_a^{\alpha+\beta}f(t) = I_a^{\beta+\alpha}f(t) = I_a^{\beta}I_a^{\alpha}f(t). \tag{1.15}$$

Lemme 1.3. *Soient $f \in C([a,b])$ et $\alpha > 0$. Alors,*

$$\lim_{t \overset{>}{\to} a} I_a^{\alpha} f(t) = 0. \tag{1.16}$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned} \left|I_a^\alpha\ f(t)\right| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} \left| f(s)\right| ds \\ &\leq \frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} ds \\ &\leq \frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} (t-a)^\alpha . \end{aligned} \tag{1.17}$$

Il est clair que le second membre de l'inégalité précédente tend vers 0 lorsque t tend vers a. On peut donc déduire que $\lim_{t \overset{>}{\to} a} I_a^\alpha\ f(t) = 0$.

1.2.2 Exemples

On considère les fonctions suivantes :

$$f_1(t) = t^\beta,\ \beta \in \mathbb{R},\ f_2(t) = e^t. \tag{1.18}$$

Alors, l'intégrale fractionnaire de Riemann Liouville $I_0^\alpha f_1$ s'écrit :

$$I_0^\alpha t^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \tau^\beta d\tau. \tag{1.19}$$

Pour évaluer cette intégrale, on effectue le changement de variable :

$$\tau = tx. \tag{1.20}$$

Donc,

$$\begin{aligned} I_0^\alpha t^\beta &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (t-tx)^{\alpha-1} (tx)^\beta t dx \\ &= \frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-x)^{\alpha-1} x^\beta dx \\ &= \frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha, \beta+1). \end{aligned} \tag{1.21}$$

En utilisant l'expression donnée par (1.8) , on obtient :

$$\begin{aligned} I_0^\alpha t^\beta &= \frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\right) \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}t^{\alpha+\beta}. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Pour $\alpha = 1$ et $\beta = \frac{1}{2}$, la relation (1.22) devient :

$$\begin{aligned} I_0^1\sqrt{t} &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{2}+1\right)}t^{1+\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}t^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}t^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}. \end{aligned} \tag{1.23}$$

On considère $f_2 : t \longmapsto e^t$, et par application de I_0^α, on obtient :

$$I_0^\alpha e^t = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} e^\tau d\tau \tag{1.24}$$

En posant $x = t - \tau$, on peut écrire :

$$I_0^\alpha e^t = \frac{e^t}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t x^{\alpha-1}e^{-x}dx. \tag{1.25}$$

Maintenant, en utilisant l'intégrale par partie plusieurs fois, on peut avoir :

$$I_0^\alpha e^t = \sum_{k\geq 0}\frac{t^{\alpha+k}}{\Gamma(\alpha+k+1)}. \tag{1.26}$$

1.3 Dérivation Fractionnaire

La différentiation d'ordre fractionnaire est une généralisation des concepts de la différentiation d'ordre entière. Il existe plusieurs définitions mathématiques pour la dérivation d'ordre fractionnaire. On va présenter trois approches : de Laurent, de Riemann-Liouville et celle de Caputo.

1.3.1 Approche de Laurent

Définition 1.4. *[28, 67, 79] Pour $m \in \mathbb{N}^*$: $m = \nu + \rho$, $0 < \rho \leq 1$, la dérivée d'ordre ν au sens de Laurent d'une fonction $f \in C\left([a, +\infty), \mathbb{R}\right)$, est donnée par :*

$$ {}^{L}D_a^{\nu} f(t) = \frac{d^m}{dt^m}\left(\frac{1}{\Gamma(\rho)}\int_a^t (t-\tau)^{\rho-1} f(\tau)\, d\tau\right). \tag{1.27}$$

Exemple 1.5. On reprend la fonction $f_1 : t \longmapsto t^{\beta}$, $t > 0$. Alors,

$$ {}^{L}D_0^{\nu} f(t) = \left({}^{L}D_0^{\nu}\right) t^{\beta} = \frac{d^m}{dt^m}\left(\frac{1}{\Gamma(\rho)}\int_0^t (t-\tau)^{\rho-1} \tau^{\beta} d\tau\right). \tag{1.28}$$

On pose : $\tau = tx$, on aura :

$$\begin{aligned}
\left({}^{L}D_0^{\nu}\right) t^{\beta} &= \frac{1}{\Gamma(\rho)}\frac{d^m}{dt^m}\left(\int_0^1 (t-tx)^{\rho-1} (tx)^{\beta}\, t dx\right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\rho)}\frac{d^m}{dt^m}\left(t^{\rho+\beta}\int_0^1 (1-x)^{\rho-1} x^{\beta} dx\right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\rho)}\frac{d^m}{dt^m}\left(t^{\rho+\beta} B(\rho, \beta+1)\right) \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\rho+\beta+1)}\frac{d^m}{dt^m}\left(t^{\rho+\beta}\right).
\end{aligned} \tag{1.29}$$

En utilisant la relation de dérivation classique :

$$\begin{aligned}
\frac{d^m}{dt^m}(t-a)^{\delta} &= \delta(\delta-1)\ldots(\delta-m+1)(t-a)^{\delta-m} \\
&= \frac{\Gamma(\delta+1)}{\Gamma(\delta-m+1)}(t-a)^{\delta-m},
\end{aligned} \tag{1.30}$$

on obtient :

$$\begin{aligned}\left({}^{L}D_{a}^{\nu}\right)t^{\beta} &= \frac{\Gamma\left(\beta+1\right)}{\Gamma\left(\rho+\beta+1\right)}\left(\frac{d^{m}}{dt^{m}}t^{\rho+\beta}\right)\\ &= \frac{\Gamma\left(\beta+1\right)}{\Gamma\left(\rho+\beta+1\right)}\frac{\Gamma(\rho+\beta+1)}{\Gamma(\rho+\beta+1-m)}t^{\rho+\beta-m}\\ &= \frac{\Gamma\left(\beta+1\right)}{\Gamma(\rho+\beta+1-m)}t^{\rho+\beta-m}.\end{aligned} \tag{1.31}$$

Si on prend : $\beta=3$, $\nu=\frac{3}{2}$, on aurait : $m=2$ et $\rho=\frac{1}{2}$. Et donc :

$$\begin{aligned}\left({}^{L}D_{0}^{\frac{3}{2}}\right)t^{3} &= \frac{\Gamma\left(3+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+3+1-2\right)}t^{\frac{1}{2}+3-2}\\ &= \frac{3!}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)}t^{\frac{3}{2}}\\ &= \frac{3!}{\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}t^{\frac{3}{2}}\\ &= \frac{8}{\sqrt{\pi}}t^{\frac{3}{2}}.\end{aligned} \tag{1.32}$$

1.3.2 Approche de Riemann-Liouville

Définition 1.6. *[67, 79, 83] Pour $m\in\mathbb{N}^{*}$, et $a\in\mathbb{R}$, la dérivée d'ordre α au sens de Riemann-Liouville d'une fonction $f\in C\left([a,+\infty),\mathbb{R}\right)$, est donnée par :*

$${}^{RL}D_{a}^{\alpha}f(t) = \begin{cases} D^{m}I_{a}^{m-\alpha}f\left(t\right)=\frac{d^{m}}{dt^{m}}\left(\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int\limits_{a}^{t}\left(t-\tau\right)^{m-\alpha-1}f\left(\tau\right)d\tau\right), & m-1<\alpha<m,\\ \frac{d^{m}}{dt^{m}}f(t), & \alpha=m.\end{cases} \tag{1.33}$$

Exemple 1.7. On considère la fonction suivante :

$$f \;:\; t\longmapsto\left(t-a\right)^{\beta},\; t>a. \tag{1.34}$$

Alors,

$$
\begin{aligned}
{}^{RL}D_a^{\alpha}(t-a)^{\beta} &= D^m I_a^{m-\alpha}(t-a)^{\beta} \\
&= D^m\left(\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)}(t-a)^{\beta+m-\alpha}\right).
\end{aligned}
\tag{1.35}
$$

En utilisant l'expression de la dérivation classique donnée par (1.30), on aura :

$$
{}^{RL}D_a^{\alpha}(t-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)}\left(\frac{\Gamma(\beta+m-\alpha+1)}{\Gamma(\beta+m-\alpha+1-m)}(t-a)^{\beta+m-\alpha-m}\right).
\tag{1.36}
$$

Ce qui permet d'avoir

$$
{}^{RL}D_a^{\alpha}(t-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}(t-a)^{\beta-\alpha}.
\tag{1.37}
$$

On pose $\alpha=\frac{1}{2}$ et $\beta=\frac{3}{2}$. Alors,

$$
\begin{aligned}
{}^{RL}D_a^{\frac{1}{2}}(t-a)^{\frac{3}{2}} &= \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+1-\frac{1}{2}\right)}(t-a)^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)}{\Gamma(2)}(t-a) \\
&= \frac{3\sqrt{\pi}}{4}(t-a).
\end{aligned}
\tag{1.38}
$$

Et pour $\alpha>0$ et $\beta=0$, on aura le résultat suivant :

$$
{}^{RL}D_a^{\alpha}(t-a)^{0} = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha} = \frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)},
\tag{1.39}
$$

c'est-à-dire que la dérivée de Riemann-Liouville d'une constante n'est plus nulle.

Proposition 1.8. *Soient $f\in C([a,b))$, et $m-1<\alpha<m$, $m\in\mathbb{N}^*$. Alors, l'opérateur de dérivation de Riemann-Liouville ${}^{RL}D_a^{\alpha}$ possède les propriétés suivantes :*

(a) : ${}^{RL}D_a^{\alpha}$ *est un opérateur linéaire.*

(b) : $\left({}^{RL}D_a^{\alpha}\right)\left(I_a^{\alpha}f\right)(t) = f(t)$.

(c) : *Si* $\left({}^{RL}D_a^{\alpha}f\right)(t) = 0$, *alors* $f(t) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+\alpha+1-m)}(t-a)^{j+\alpha-m}$, $(c_j)_{j=0,\ldots,m-1} \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Soient $f \in C([a,b))$ et $m-1 < \alpha < m$, $m \in \mathbb{N}^*$. Pour la linéarité, c'est une simple vérification.

(b) : En se basant sur la propriété classique :

$$D^m\left(I_a^m f\right)(t) = f(t), \tag{1.40}$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
\left({}^{RL}D_a^{\alpha}\right)\left(I_a^{\alpha}f\right)(t) &= D^m\left(I_a^{m-\alpha}\right)\left(I_a^{\alpha}f\right)(t) \\
&= D^m\left(I_a^{m-\alpha+\alpha}f\right)(t) \\
&= D^m\left(I_a^m f\right)(t), \\
&= f(t).
\end{aligned} \tag{1.41}$$

D'où le résultat annoncé.

(c) : Comme f appartient au noyau de $\left({}^{RL}D_a^{\alpha}\right)$, alors par définition, on a :

$$\left({}^{RL}D_a^{\alpha}\right)f(t) = D^m\left(I_a^{m-\alpha}f\right)(t) = 0. \tag{1.42}$$

C'est-à-dire que la dérivée d'ordre m de $\left(I_a^{m-\alpha}f\right)$ est nulle. Donc, on peut écrire :

$$\left(I_a^{m-\alpha}f\right)(t) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j (t-a)^j, \quad (c_j)_{j=0,\ldots,m-1} \in \mathbb{R}. \tag{1.43}$$

L'application de I_a^α aux deux membres de l'identité obtenue (1.43), donne :

$$\begin{aligned} \left(I_a^{m-\alpha+\alpha} f\right)(t) &= \left(I_a^m f\right)(t) \\ &= I_a^\alpha \left(\sum_{j=0}^{m-1} c_j \left(t-a\right)^j\right) \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} c_j \left(\frac{\Gamma\left(j+1\right)}{\Gamma\left(j+1+\alpha\right)}\right) \left(t-a\right)^{j+\alpha}. \end{aligned} \tag{1.44}$$

Ensuite, on applique D^m à (1.44), on obtient :

$$\begin{aligned} D^m \left(I_a^m f\right)(t) &= \sum_{j=0}^{m-1} c_j \left(\frac{\Gamma\left(j+1\right)}{\Gamma\left(j+1+\alpha\right)}\right) D^m \left(t-a\right)^{j+\alpha} \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} c_j \left(\frac{\Gamma\left(j+1\right)}{\Gamma\left(j+1+\alpha\right)}\right) \left(\frac{\Gamma\left(j+\alpha+1\right)}{\Gamma\left(j+\alpha+1-m\right)} \left(t-a\right)^{j+\alpha-m}\right) \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} c_j \frac{\Gamma\left(j+1\right)}{\Gamma\left(j+\alpha+1-m\right)} \left(t-a\right)^{j+\alpha-m}. \end{aligned} \tag{1.45}$$

Donc,

$$f\left(t\right) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j \frac{\Gamma\left(j+1\right)}{\Gamma\left(j+\alpha+1-m\right)} \left(t-a\right)^{j+\alpha-m}. \tag{1.46}$$

1.3.3 Approche de Caputo

La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \in \left]m-1, m\right]$ s'obtient par une application de $I_a^{m-\alpha}$ suivie d'une dérivation classique d'ordre m. Tandis que la dérivée de Caputo est le résultat de la permutation de ces deux opérations.

Définition 1.9. *[67, 79, 83] Pour $m-1 < \alpha \leq m$, $m \in \mathbb{N}^*$, et $f \in C^m\left(\left[a, +\infty\right)\right)$, la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre α* de f *est définie par :*

$$ {}^C D_a^\alpha f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t \left(t-s\right)^{m-\alpha-1} \frac{d^m}{ds^m} f\left(s\right) ds = I_a^{m-\alpha} D^m f(t), & m-1 < \alpha < m, \\ \frac{d^m}{dt^m} f(t), & \alpha = m. \end{cases} \tag{1.47}$$

Exemple 1.10. On reprend la fonction $f : t \mapsto (t-a)^{\beta}$ avec $\beta = \frac{5}{2}$, et on calcule ${}^{C}D_a^{\frac{3}{2}} f(t)$. Alors,

$$\begin{aligned} {}^{C}D_a^{\frac{3}{2}} (t-a)^{\frac{5}{2}} &= \left(I_a^{2-\frac{3}{2}}\right) \left(\frac{d^2}{dt^2} (t-a)^{\frac{5}{2}}\right) \\ &= \left(I_a^{\frac{1}{2}}\right) \left(\frac{d^2}{dt^2} (t-a)^{\frac{5}{2}}\right). \end{aligned} \tag{1.48}$$

En tenant compte de la relation (1.30), on aura :

$$\begin{aligned} {}^{C}D_a^{\frac{3}{2}} (t-a)^{\frac{5}{2}} &= \left(I_a^{\frac{1}{2}}\right) \left(\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}+1-2\right)} (t-a)^{\frac{5}{2}-2}\right) \\ &= \left(I_a^{\frac{1}{2}}\right) \left(\frac{\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} (t-a)^{\frac{1}{2}}\right) \\ &= \frac{15}{4} \left(I_a^{\frac{1}{2}}\right) (t-a)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{15}{4} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}\right)} (t-a)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}\right) \\ &= \frac{15\sqrt{\pi}}{8} (t-a). \end{aligned} \tag{1.49}$$

Dans l'exemple précédent, on remarque que pour $\beta = 0$, on aura :

$$\begin{aligned} {}^{C}D_a^{\frac{3}{2}} (t-a)^{0} &= \left(I_a^{2-\frac{3}{2}}\right) \left(\frac{d^2}{dt^2}(1)\right) \\ &= \left(I_a^{\frac{1}{2}}\right) (0) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{1.50}$$

C'est-à-dire que la dérivée de Caputo d'une fonction constante est nulle.

1.3.4 Lien Entre Riemann-Liouville et Caputo

Pour $m-1<\alpha<m$, $m\in\mathbb{N}^*$, $a\in\mathbb{R}$, et $f\in C^m([a,+\infty))$, la relation reliant la dérivée au sens de Riemann-Liouville à celle de Caputo est donnée par :

$$\left({}^{RL}D_a^{\alpha}\right)f(t) = \left({}^{C}D_a^{\alpha}\right)f(t)+\sum_{j=0}^{m-1}\frac{(t-a)^{j-\alpha}}{\Gamma(j-\alpha+1)}f^{(j)}(a). \tag{1.51}$$

Cette dernière relation peut aussi s'écrire :

$$\left({}^{C}D_a^{\alpha}\right)f(t) = \left({}^{RL}D_a^{\alpha}\right)\left(f(t)-\sum_{j=0}^{m-1}\frac{(t-a)^{j}}{j!}f^{(j)}(a)\right). \tag{1.52}$$

A partir de (1.51) et (1.52), on déduit que la dérivée fractionnaire d'ordre α de f au sens de Riemann-Liouville coïncide avec celle de Caputo si a est un point zéro d'ordre m de f. Plus précisément, on a :

$$\left(f^{(j)}(a)=0, j=0,1,...,m-1\right) \implies \left(\left({}^{RL}D_a^{\alpha}\right)f(t)=\left({}^{C}D_a^{\alpha}\right)f(t)\right). \tag{1.53}$$

Démonstration. On part de l'hypothèse que f est de classe C^m, alors on peut écrire :

$$f(t) = \sum_{j=0}^{m-1}\frac{(t-a)^{j}}{j!}f^{(j)}(a)+I_a^mD^mf(t). \tag{1.54}$$

Et donc, par application de $I_a^{m-\alpha}$ à cette identité, on obtient :

$$I_a^{m-\alpha}f(t) = \sum_{j=0}^{m-1}\frac{(t-a)^{m-\alpha+j}}{\Gamma(m-\alpha+j+1)}f^{(j)}(a)+I_a^{2m-\alpha}D^mf(t). \tag{1.55}$$

Ensuite on applique D^m à la formule obtenue, on aura :

$$\begin{aligned}
D^mI_a^{m-\alpha}f(t) &= \sum_{j=0}^{m-1}\frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(m-\alpha+j+1)}D^m(t-a)^{m-\alpha+j}+D^mI_a^{2m-\alpha}D^mf(t)\\
&= \sum_{j=0}^{m-1}\frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(m-\alpha+j+1)}\left(\frac{\Gamma(m-\alpha+j+1)(t-a)^{m-\alpha+j-m}}{\Gamma(m-\alpha+j+1-m)}\right)+D^mI^mI_a^{m-\alpha}D^mf(t)\\
&= \sum_{j=0}^{m-1}\frac{(t-a)^{j-\alpha}}{\Gamma(j-\alpha+1)}f^{(j)}(a)+I_a^{m-\alpha}D^mf(t).
\end{aligned} \tag{1.56}$$

En utilisant le fait que :

$$\left({}^{RL}D_a^{\alpha}\right) = D^m I_a^{m-\alpha}, \ \left({}^{C}D_a^{\alpha}\right) = I_a^{m-\alpha} D^m,$$

on obtient :

$$\left({}^{RL}D_a^{\alpha}\right) f(t) \ = \ \left({}^{C}D_a^{\alpha}\right) f(t) + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(t-a)^{j-\alpha}}{\Gamma(j-\alpha+1)} f^{(j)}(a). \tag{1.57}$$

Proposition 1.11. *Pour* $m-1<\alpha<m$, $m\in\mathbb{N}^*$, *et* $f\in C^m([a,b))$, *l'opérateur de dérivation de Caputo* $\left({}^{C}D_a^{\alpha}\right)$ *a les propriétés suivantes :*

(a) : $\left({}^{C}D_a^{\alpha}\right)$ *est un opérateur linéaire.*

(b) : $\left({}^{C}D_a^{\alpha}\right)\left(I_a^{\alpha} f\right)(t) = f(t)$.

(c) : *Si* $\left({}^{C}D_a^{\alpha} f\right)(t) = 0$, *alors* $f(t) = \sum\limits_{j=0}^{m-1} c_j (t-a)^j$, $(c_j)_{j=0,\ldots,m-1} \in \mathbb{R}$.

(d) : $I_a^{\alpha}\left({}^{C}D_a^{\alpha} f\right)(t) = f(t) + \sum\limits_{j=0}^{m-1} c_j (t-a)^j$, $(c_j)_{j=0,\ldots,m-1} \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Soient $m-1<\alpha<m$, $m\in\mathbb{N}^*$, *et* $f\in C^m([a,b))$. Pour l'item (a), on peut aisément obtenir la linéarité.

(b) : La relation (1.52) permet d'obtenir le résultat suivant :

$$\begin{aligned}
\left({}^{C}D_a^{\alpha}\right)\left(I_a^{\alpha} f\right)(t) &= \left({}^{RL}D_a^{\alpha}\right)\left(I_a^{\alpha} f(t) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(t-a)^j}{j!}\left(\left(\frac{d^j}{dt^j}\left(I_a^{\alpha} f\right)\right)(a)\right)\right) \\
&= f(t) - \left(\frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1-\alpha)} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(t-a)^{j-\alpha}}{j!}\right)\left(\left(\frac{d^j}{dt^j}\left(I_a^{\alpha} f\right)\right)(a)\right) \\
&= f(t) - \left(\sum_{j=0}^{m-1} \frac{(t-a)^{j-\alpha}}{\Gamma(j+1-\alpha)}\right)\left(\left(\frac{d^j}{dt^j}\left(I_a^{\alpha} f\right)\right)(a)\right).
\end{aligned} \tag{1.58}$$

Et comme $j\le m-1<\alpha$, pour $j=0,...,m-1$, alors, les dérivées $\left(\frac{d^j}{dt^j}\left(I_a^{\alpha} f\right)\right)(a) = 0$. Ce qui donne :

$$\left({}^{C}D_a^{\alpha}\right)\left(I_a^{\alpha} f\right)(t) \ = \ f(t). \tag{1.59}$$

(c) : Soit $\left({}^{C}D_a^{\alpha} f\right)(t) = 0$. Alors, on a :

$$I_a^{m-\alpha} f^{(m)}(t) = 0. \tag{1.60}$$

On applique $\left({}^{C}D_a^{m-\alpha}\right)$ à cette formule, on aura :

$$\left({}^{C}D_a^{m-\alpha}\right) I_a^{m-\alpha} f^{(m)}(t) = 0. \tag{1.61}$$

D'après la propriété précédente (b), il en résulte que :

$$\left({}^{C}D_a^{m-\alpha}\right)\left(I_a^{m-\alpha}\right) f^{(m)}(t) = f^{(m)}(t) = 0, \tag{1.62}$$

Alors, f peut s'écrire sous la forme :

$$f(t) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j (t-a)^j. \tag{1.63}$$

où $c_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, 1, ..., m-1$.

1.4 Quelques Exemples d'Applications

Les opérateurs de dérivation et d'intégration fractionnaires sont utilisés pour la description des propriétés de plusieurs matériaux comme les polymères. La dérivation fractionnaire sert à décrire des comportements intermédiaires entre les dérivées classiques. Plus d'intérêts a été récemment prêté à la dérivation fractionnaire dans les différents champs de recherche. En effet, on rencontre des applications du calcul fractionnaire en acoustique [37], en biomédecine [31], en économie [35], en géophysique [17], en rhéologie [9, 55] et en traitement d'image [66]. En outre, plusieurs applications utilisent le calcul fractionnaire comme un outil de modélisation.

1.4.1 Éconophysique :

Éconophysique est un nouveau domaine interdisciplinaire dans lequel les concepts et les techniques d'analyse sont couramment utilisés pour la description des systèmes physiques qui sont appliqués pour vérifier des problèmes financiers et économiques. La dynamique des marchés global exige à plein temps modélisation complète et très précise. Bien que de nombreuses études sur les marchés financiers ont été publiées [8, 36]. Certaines investigations dans la finance en utilisant les équations différentielles fractionnaires ont été faites par E. Scalas et al [80]. S.A. David [27] a proposé un modèle très simple concernant le carré de l'afflux des capitaux investis, désigné comme $\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2$, qui peut être proportionnelle à la perception du risque, dénotée par : $(y - y_0)$.

Mathématiquement, peut s'écrit comme :

$$\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 = -c\,(y - y_0). \tag{1.64}$$

Une augmentation de la perception des risques stimule une réduction en injection de capital. C'est le sens du signal moins ci-dessus.

Donc,

$$\frac{d\lambda}{dt} = c^{\frac{1}{2}}\,(y_0 - y)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.65}$$

Et

$$\frac{d\lambda}{(y_0 - y)^{\frac{1}{2}}} = c^{\frac{1}{2}}dt. \tag{1.66}$$

L'intégration des deux côtés de cette équation donne :

$$\sqrt{c}\int_0^T dt = \int_0^{y_0} (y_0 - y)^{-\frac{1}{2}}\,d\lambda. \tag{1.67}$$

Donc,

$$K = \int_0^{y_0} (y_0 - y)^{-\frac{1}{2}}\,d\lambda, \tag{1.68}$$

où $K = \sqrt{c}T$.

Ici $\lambda = F(y)$, où λ est la quantité de retour sur le capital et y représente la perception du risque. En gardant à l'esprit cette réalité, on peut noter que : $d\lambda = F'(y)\,dy$.

Si on pose :

$$y_0 = x, \ y = t, \ F^{'} = f, \tag{1.69}$$

on aurait :

$$K = \int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}} f(t)\, dt. \tag{1.70}$$

Ce problème consiste à déterminer la fonction f. Ceci peut être fait en multipliant la dernière équation par $\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}$ afin d'obtenir :

$$\frac{K}{\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}} f(t)\, dt = I_0^{\frac{1}{2}} f(x). \tag{1.71}$$

Ensuite, par application de $\left({}^{L}D_0^{\frac{1}{2}}\right)$ à cette formule obtenue, on aura :

$$\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \left({}^{L}D_0^{\frac{1}{2}}\right) K = \left({}^{L}D_0^{\frac{1}{2}}\right) \left(I_0^{\frac{1}{2}} f(x)\right) = f(x). \tag{1.72}$$

Par conséquent,

$${}^{L}D_0^{\frac{1}{2}} K = \sqrt{\pi} f(x). \tag{1.73}$$

D'autre part, on a :

$$
\begin{aligned}
{}^{L}D_0^{\frac{1}{2}}K &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int\limits_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}}\,K dt\right) \\
&= K\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}\right) \\
&= K\frac{1}{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}\left(\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+1)}{\Gamma(\frac{1}{2}+1-1)}x^{\frac{1}{2}-1}\right) \\
&= \frac{K}{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}\left(\frac{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})}x^{\frac{-1}{2}}\right) \\
&= \frac{Kx^{\frac{-1}{2}}}{\sqrt{\pi}},
\end{aligned}
\tag{1.74}
$$

où ${}^{L}D_0^{\frac{1}{2}}$ est la dérivée d'ordre $\frac{1}{2}$ au sens de Laurent avec : $\left(\upsilon = \rho = \frac{1}{2},\ m = 1\right)$.

En combinant les formules (1.73) et (1.74), on obtient :

$$
f(x) = \frac{K}{\pi\sqrt{x}}. \tag{1.75}
$$

Ce modèle concernant le risque et le rendement du capital est basé sur les concepts de la dérivée d'ordre fractionnaire est simple à mettre en œuvre et offre un moyen alternative intéressant pour l'investigation et éventuellement pour les prédictions dans les financiers marchés.

1.4.2 Automatique

En automatique, la dérivation fractionnaire peut apparaître dans les lois de commande voir, [15, 75]. A. Oustaloup [73] a introduit l'approche CRONE, (Commande Robuste d'Ordre Non Entier), qui peut être appliquée à de nombreux systèmes industriels : Suspension de voitures, robot-cueilleur, charrue éléctro-hydrolique, batterie pour voitures, etc.

1.5 Autour des Points Fixes

Les théorèmes de points fixes sont des outils très utiles dans la résolution des équations différentielles. En effet, ces théorèmes fournissent des conditions suffisantes pour lesquelles une fonction donnée admet un point fixe, aussi nous assurent l'existence de la solution d'un problème donné en le transformant en un problème du point fixe, et on détermine éventuellement ces points fixes qui sont les solutions du problème posé.

1.5.1 Concepts Essentiels

Le principe de contraction de Banach [53, 81] est le résultat le plus élémentaire qui assure l'unicité d'un point fixe. Ce théorème est essentiellement basé sur les définitions suivantes :

Définition 1.12. *Soient S un espace vectoriel normé, de norme $\|.\|_S$ et $(u_n)_n$, $n \in \mathbb{N}$, une suite de S. On dit que $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy si*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \geq 0, \forall n \geq N, \ \forall p \geq N, \ \|u_{N+p} - u_n\|_S \leq \varepsilon. \tag{1.76}$$

Définition 1.13. *On dit que l'espace vectoriel normé S est complet pour la norme $\|.\|_S$ si toute suite de Cauchy (pour cette norme) est convergente (pour cette norme). Un tel espace est aussi appelé espace de Banach.*

Définition 1.14. *Soient B un espace de Banach muni de la norme $\|.\|_B$ et T une application de B dans B. On appelle point fixe de T tout point u* tel que :

$$Tu = u. \tag{1.77}$$

Définition 1.15. *Soit S un espace vectoriel normé, de norme $\|.\|_S$. Une application f de S dans S est dite Lipschitzienne de constante $L \geq 0$ si elle vérifie :*

$$\forall u, v \in S, \|f(u) - f(v)\|_S \leq L \|u - v\|_S. \tag{1.78}$$

Définition 1.16. *L'application Lipschitzienne f est dite une contraction si $L \in \left]0, 1\right[$.*

1.5.2 Principe de Contraction de Banach

Théorème 1.17. *[53, 81] Soit (E, d) un espace métrique complet et soit $f : E \to E$ une contraction. Alors, f admet un point fixe unique.*

Définition 1.18. *Soient B_1 et B_2 deux espaces de Banach. L'opérateur continu $T : B_1 \to B_2$ est complètement continu s'il transforme tout borné de B_1 en une partie relativement compacte dans B_2.*

1.5.3 Théorème du Point Fixe de Schaefer

Notre deuxième résultat du point fixe est le Théorème du point fixe de Schaefer.

Théorème 1.19. *[53, 81] Soient B un espace de Banach et $T : B \to B$ un opérateur complètement continu. Si l'ensemble :*

$$\Omega := \{u \in B : u = \mu T u, \ \mu \in \left]0, 1\right[\}, \tag{1.79}$$

est borné, alors T possède au moins un point fixe.

1.5.4 Théorème du point fixe de Schauder

Notre troixième résultat du point fixe est le Théorème du point fixe de Schauder :

Théorème 1.20. *[81, 53] Soient B un espace de Banach, U un fermé, borné, convexe et non vide de B et $T : U \to U$ une application telle que l'ensemble $\{Tu : u \in U\}$ est relativement compact dans B. Alors, T possède au moins un point fixe dans U.*

1.5.5 Théorème de Arzela-Ascoli

Théorème 1.21 [18] Soit $F \subseteq C([a,b])$, supposons que l'ensemble F est équipé de norme $\|.\|_\infty$. Alors, F est relativement compact dans $C([a,b])$ si F est equicontinu (c'est-à-dire pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $f \in F$ et pour tous $x_1, x_2 \in [a,b]$ avec $|x_1 - x_2| < \delta$ on a : $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$) et uniformément borné (c'est-à-dire il existe une constante $C > 0$ telle que $\|f\|_\infty \leq C$, pour tout $f \in F$).

Chapitre 2

Étude des Systèmes Non Linéaires d'Ordre Fractionnaire

2.1 Introduction

Les lois physiques de la dynamique ne sont pas toujours décrites par des équations différentielles d'ordre ordinaires. Dans certains cas, leur comportement est régi par des équations différentielles d'ordre fractionnaires, voir [54, 67, 78, 83]. Les dérivées fractionnaires ont joué un rôle central dans la science de l'ingénierie et mathématiques appliquées [39, 65, 69, 74, 78, 82]. En effet, une attention particulière a été focalisée récemment sur l'étude des équations différentielles fractionnaires, ces résultats peuvent être consultés dans les références [1, 2, 7, 13, 21, 22, 23, 24, 41, 45, 61, 70, 95].

En 2010, R.P. Agarwal, D. O'Regan et S. Staněk [4] ont considéré le problème fractionnaire de la forme suivante :

$$\begin{cases} D^{\alpha}u(t) + f(t, u(t), D^{\mu}u(t)) = 0, \ 0 < t < 1, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Ce problème a été étudié pour la question de l'existence des solutions pour $1 < \alpha < 2$, $0 < \mu < \alpha - 1$. Où D^{α} désigne la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville, f est une fonction de Carathéodory sur $[0,1] \times]0, +\infty[\times \mathbb{R}$.

En 2011, S. Staněk [85] a étudié l'existence des solutions pour le problème fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} D^{\alpha}u(t) + f\left(t, u(t), u'(t), D^{\mu}u(t)\right) = 0, \\ u(0) = 0, \ u'(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Ici $2 < \alpha < 3$, $0 < \mu < 1$, D^{α} dénote la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre α, $f : [0,1] \times D \to \mathbb{R}_+$; $(D \subset \mathbb{R}^3)$, et $f(t,x,y,z)$ est singulière à la valeur 0 de ses arguments x, y, z.

En 2013, dans [40], M. Houas et Z. Dahmani ont établit l'existence et l'unicité des solutions pour le problème suivant :

$$\begin{cases} D^{\alpha}x\left(t\right)=f\left(t,x\left(t\right),D^{\beta}x\left(t\right)\right),\ t\in J, \\ x\left(0\right)=x\left(1\right)=0, \\ \lambda_1 x^{''}\left(\eta\right)-\lambda_2 x^{'''}\left(\eta\right)=0,\ \lambda_3 x^{''}\left(\xi\right)+\lambda_4 x^{'''}\left(\xi\right)=0, \end{cases}$$

avec $\alpha\in\left]3,4\right],\ \beta\leq\alpha-1,\ \eta,\xi\in\left]0,1\right[,\ D^{\alpha},\ D^{\beta}$ sont les dérivées fractionnaires au sens de Caputo, $J=\left[0,1\right],\ \lambda_i,\ i=1,2,3,4,$ sont des constantes réelles avec $\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_4+\lambda_1\lambda_3\left(\xi-\eta\right)\neq 0$ et f est une fonction continue sur $\left[0,1\right]\times\mathbb{R}^2$.

Dans ce chapitre, on étudie un système d'équations différentielles fractionnaires avec multi termes non linéaires [86]. On établit de nouveaux résultats d'existence et d'unicité en utilisant le principe de la contraction de Banach. Ensuite, d'autres résultas de l'existence d'une solution au moins sont prouvés en utilisant le Théorème du point fixe de Schaefer. On traite aussi quelques exemples illustratifs.

2.2 Système Fractionnaire de Type Caputo

On note que les papiers cités ci-dessus ont traité des problèmes avec un seul terme non linéaire en fonction de quelques fonctions inconnues. Les autres cas, où on a plus d'une non-linéarité en fonction de certaines fonctions inconnues, sont plus complexes et ne sont pas discutés dans les travaux cité ci-dessus. Dans ce contexte, on apporte notre contribution [86] au développement de l'étude des systèmes d'équations différentielles fractionnaires non linéaires en abordant la question d'existence et d'unicité de solutions d'un système de la forme suivante :

$$\begin{cases} D_0^{\alpha}u(t)+\sum\limits_{i=1}^{m}f_i\left(t,u(t),v(t),D_0^{\gamma}u(t),D_0^{\rho}v(t)\right)=0,\ t\in J,\ m\in\mathbb{N}^*, \\ D_0^{\beta}v(t)+\sum\limits_{i=1}^{m}g_i\left(t,u(t),v(t),D_0^{\gamma}u(t),D_0^{\rho}v(t)\right)=0,\ t\in J,\ m\in\mathbb{N}^*, \\ u\left(0\right)=u_0^*,\ v\left(0\right)=v_0^*, \\ u^{'}(0)=u^{''}(0)=v^{'}(0)=v^{''}(0)=0, \\ u^{'''}(0)=I_0^{r}u(\tau),\ v^{'''}(0)=I_0^{\varphi}v(\varsigma),\ r>0,\ \varphi>0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Pour ce problème, on prend $\alpha, \beta \in \left]3,4\right[$, $\gamma, \rho \in]0,3[$, $\tau, \varsigma \in]0,1[$. Les dérivées D_0^{α}, D_0^{ρ}, D_0^{β}, D_0^{γ} sont prises au sens de Caputo et I_0^{r}, I_0^{φ} sont les intégrales fractionnaires au sens de Riemann-Liouville. On prend également $J := [0,1]$, $u_0^*, v_0^* \in \mathbb{R}$. Pour tout $i = 1, ..., m$, les fonctions f_i et $g_i : J \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ seront précisées plus tard.

2.2.1 Lemmes Auxiliaires

Lemme 2.1. *[53, 57, 76] Pour $\alpha > 0$, la solution générale de l'équation différentielle fractionnaire $D_0^{\alpha} u(t) = 0$, est donnée par :*

$$u(t) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j t^j,$$

où $c_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, 1, ..., n-1$, $n = [\alpha] + 1$, avec $[\alpha]$ désigne la partie entière de α.

Lemme 2.2. *[53, 57, 76] Soit $\alpha > 0$. Alors,*

$$I_0^{\alpha} D_0^{\alpha} u(t) = u(t) + \sum_{j=0}^{n-1} c_j t^j,$$

où $c_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, 1, ..., n-1$, $n = [\alpha] + 1$, avec $[\alpha]$ désigne la partie entière de α.

Lemme 2.3. *[53, 57, 76] Soient p, $q > 0$, et $f \in L^1([a,b])$. Alors, $I_a^p I_a^q f(t) = I_a^{p+q} f(t)$, $D_a^p I_a^p f(t) = f(t)$, $t \in [a,b]$.*

Lemme 2.4. *[53, 57, 76] Soient $q > p > 0$, et $f \in L^1([a,b])$. Alors, $D_a^p I_a^q f(t) = I_a^{q-p} f(t)$, $t \in [a,b]$.*

2.2.2 Solution Intégrale

On prouve le lemme auxiliaire suivant qui est important pour donner la solution intégrale de (2.1) :

Lemme 2.5. *[86] On suppose que $(F_i)_{i=1,\ldots,m} \subset C([0,1], \mathbb{R})$, et on considère le problème :*

$$D_0^{\alpha} u(t) + \sum_{i=1}^{m} F_i(t) = 0, \ t \in J, \ 3 < \alpha < 4, \ m \in \mathbb{N}^*, \tag{2.2}$$

avec les conditions initiales :

$$u(0) = u_0^* \in \mathbb{R}, \ u'(0) = u''(0) = 0, \ u'''(0) = I_0^r u(\tau), \ r > 0, \ \tau \in]0,1[. \tag{2.3}$$

Alors, la solution de $(2.2)\,\&\,(2.3)$ *est donnée par :*

$$\begin{aligned} u(t) &= -\sum_{i=1}^{m}\int\limits_{0}^{t}\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}F_i(s)+u_0^* \\ &\quad +\frac{\Gamma(r+4)\,t^3}{6\left(\tau^{r+3}-\Gamma(r+4)\right)}\left(\sum_{i=1}^{m}\int\limits_{0}^{\tau}\frac{(\tau-s)^{\alpha+r-1}}{\Gamma(\alpha+r)}F_i(s)\,ds-\frac{u_0^*\tau^r}{\Gamma(r+1)}\right), \end{aligned} \tag{2.4}$$

où $\tau^{r+3}\neq\Gamma(r+4)$.

Démonstration. Pour démontrer le Lemme 2.5, on considère le problème (2.2). En appliquant le Lemme 2.2, on obtient l'équation intégrale suivante :

$$u(t) = -\sum_{i=1}^{m}\int\limits_{0}^{t}\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}F_i(s)\,ds-c_0-c_1t-c_2t^2-c_3t^3, \tag{2.5}$$

où $c_j\in\mathbb{R}$, $j=0,1,2,3$.

D'autre part, par l'application du Lemme 2.3, on aura :

$$\begin{aligned} I_0^r u(\tau) &= -\sum_{i=1}^{m}I_0^{\alpha+r}F_i(\tau)-I_0^r c_0-c_1I_0^r\tau-c_2I_0^r\tau^2-c_3I_0^r\tau^3 \\ &= -\sum_{i=1}^{m}\int\limits_{0}^{\tau}\frac{(\tau-s)^{\alpha+r-1}}{\Gamma(\alpha+r)}F_i(s)\,ds-\frac{c_0\tau^r}{\Gamma(1+r)}-\frac{c_1\tau^{r+1}}{\Gamma(2+r)}-\frac{2c_2\tau^{r+2}}{\Gamma(3+r)}-\frac{6c_3\tau^{r+3}}{\Gamma(4+r)}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

L'application du Lemme 2.4 à l'équation (2.5) donne :

$$u(0) = -c_0,\ u'(0)=-c_1,\ u''(0)=-2c_2,\ u'''(0)=-6c_3. \tag{2.7}$$

Maintenant, en combinant (2.3) et (2.7), aboutit à

$$c_0 = -u_0^*, \ c_1 = c_2 = 0. \tag{2.8}$$

En remplaçant (2.8) dans (2.6) , on déduit que

$$I_0^r u(\tau) = -\sum_{i=1}^{m} \int_0^{\tau} \frac{(\tau - s)^{\alpha+r-1}}{\Gamma(\alpha+r)} F_i(s)\, ds + \frac{u_0^* \tau^r}{\Gamma(1+r)} - \frac{6c_3 \tau^{r+3}}{\Gamma(4+r)}. \tag{2.9}$$

La condition aux limites $u'''(0) = I_0^r u(\tau)$ implique que

$$c_3 = \frac{\Gamma(r+4)}{6\left(\tau^{r+3} - \Gamma(r+4)\right)} \left(\frac{u_0^* \tau^r}{\Gamma(r+1)} - \sum_{i=1}^{m} \int_0^{\tau} \frac{(\tau - s)^{\alpha+r-1}}{\Gamma(\alpha+r)} F_i(s)\, ds \right). \tag{2.10}$$

Finalement, on remplace c_0, c_1, c_2, et c_3 dans (2.5), on trouve (2.4) .

D'où le Lemme 2.5 est ainsi prouvé.

On introduit l'espace de Banach suivant :

$B := \{(u,v) : u, v \in C([0,1], \mathbb{R}),\ D_0^{\gamma} u \in C([0,1], \mathbb{R}),\ D_0^{\rho} v \in C([0,1], \mathbb{R})\ \}$, muni de la norme :

$$\|(u,v)\|_B = \max\left(\|u\|_\infty, \|v\|_\infty, \|D_0^{\gamma} u\|_\infty, \|D_0^{\rho} v\|_\infty\right), \tag{2.11}$$

où

$$\|u\|_\infty = \sup_{t \in J} |u(t)|, \|v\|_\infty = \sup_{t \in J} |v(t)|, \|D_0^{\gamma} u\|_\infty = \sup_{t \in J} |D_0^{\gamma} u(t)|, \|D_0^{\rho} v\|_\infty = \sup_{t \in J} |D_0^{\rho} v(t)|.$$

2.3 Quelques Résultats Principaux

Dans le but d'établir des résultats d'existence pour le système (2.1) , on impose les hypothèses suivantes :

(H_1) : Pour tout $i = 1, 2, ..., m$, les fonctions f_i et $g_i : [0,1] \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ sont continues.

(H_2) : Il existe des fonctions non négatives $\omega_j^i, \eta_j^i \in C([0,1])$, $j = 1, 2, 3, 4$, $i = 1, ..., m$, telles que pour tout $t \in [0,1]$ et toutes (u_1, u_2, u_3, u_4), $(v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathbb{R}^4$, on a :

$$|f_i(t, u_1, u_2, u_3, u_4) - f_i(t, v_1, v_2, v_3, v_4)| \leq \sum_{j=1}^{4} \omega_j^i(t) |u_j - v_j| \tag{2.12}$$

et

$$|g_i(t, u_1, u_2, u_3, u_4) - g_i(t, v_1, v_2, v_3, v_4)| \leq \sum_{j=1}^{4} \eta_j^i(t) |u_j - v_j|, \tag{2.13}$$

avec

$$\theta_j^i = \sup_{t \in J} \omega_j^i(t), \; i = 1, ..., m, \; j = 1, 2, 3, 4, \tag{2.14}$$

et

$$\lambda_j^i = \sup_{t \in J} \eta_j^i(t), \; i = 1, ..., m, \; j = 1, 2, 3, 4. \tag{2.15}$$

(H_3) : Il existe des fonctions continues non négatives $(l_i(t))_{i=1,...,m}$ et $(k_i(t))_{i=1,...,m}$, telles que :

$$|f_i(t, u_1, u_2, u_3, u_4)| \leq l_i(t), \; |g_i(t, u_1, u_2, u_3, u_4)| \leq k_i(t), \tag{2.16}$$

pour tout $t \in J$ et toute $(u_1, u_2, u_3, u_4) \in \mathbb{R}^4$,

avec :

$$L_i = \sup_{t\in J} l_i(t), \ K_i = \sup_{t\in J} k_i(t), i = 1, 2, ..., m. \tag{2.17}$$

On introduit aussi les quantités suivantes :

$$A_1 := \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\Gamma(r+4)\,\tau^{\alpha+r}}{6\left|\tau^{r+3} - \Gamma(r+4)\right|\Gamma(\alpha+r+1)}, \tag{2.18}$$

$$A_2 := \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} + \frac{\Gamma(\varphi+4)\,\varsigma^{\beta+\varphi}}{6\left|\varsigma^{\varphi+3} - \Gamma(\varphi+4)\right|\Gamma(\beta+\varphi+1)}, \tag{2.19}$$

$$A_3 := \frac{1}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)} + \frac{\Gamma(r+4)\,\tau^{\alpha+r}}{\left|\tau^{r+3} - \Gamma(r+4)\right|\Gamma(4-\gamma)\,\Gamma(\alpha+r+1)}, \tag{2.20}$$

$$A_4 := \frac{1}{\Gamma(\beta-\rho+1)} + \frac{\Gamma(\varphi+4)\,\varsigma^{\beta+\varphi}}{\left|\varsigma^{\varphi+3} - \Gamma(\varphi+4)\right|\Gamma(4-\rho)\,\Gamma(\beta+\varphi+1)}, \tag{2.21}$$

$$S_1 := \sum_{i=1}^{m}\left(\theta_1^i + \theta_2^i + \theta_3^i + \theta_4^i\right), \ S_2 := \sum_{i=1}^{m}\left(\lambda_1^i + \lambda_2^i + \lambda_3^i + \lambda_4^i\right), \tag{2.22}$$

$$W_1 := |u_0^*| + \frac{\Gamma(r+4)\,|u_0^*|\,\tau^r}{6\left|\tau^{r+3} - \Gamma(r+4)\right|\Gamma(r+1)},$$

$$W_2 := |v_0^*| + \frac{\Gamma(\varphi+4)\,|v_0^*|\,\varsigma^\varphi}{6\left|\varsigma^{\varphi+3} - \Gamma(\varphi+4)\right|\Gamma(\varphi+1)}, \tag{2.23}$$

$$W_3 := \frac{\Gamma(r+4)\,|u_0^*|\,\tau^r}{\left|\tau^{r+3} - \Gamma(r+4)\right|\Gamma(4-\gamma)\,\Gamma(r+1)},$$

$$W_4 := \frac{\Gamma(\varphi+4)\,|v_0^*|\,\varsigma^\varphi}{\left|\varsigma^{\varphi+3} - \Gamma(\varphi+4)\right|\Gamma(4-\rho)\,\Gamma(\varphi+1)}. \tag{2.24}$$

2.3.1 Premier Résultat : Existence et Unicité

Notre premier résultat principal est basé sur le principe de contraction de Banach. On a :

Théorème 2.6. *[86] Pour* $\tau^{\alpha+r} \neq \Gamma(r+4)$, $\varsigma^{\beta+\varphi} \neq \Gamma(\varphi+4)$, *on suppose que l'hypothèse* (H_2) *est vérifiée. Si l'inégalité*

$$\max\left(A_1S_1, A_2S_2, A_3S_1, A_4S_2\right) < 1 \tag{2.25}$$

est valide, alors le problème (2.1) *a une solution unique* $(u,v)(t)$, $t \in [0,1]$.

Démonstration. On définit l'opérateur $\Psi : B \to B$ par :

$$\Psi(u,v)(t) := \left(\Psi_1(u,v)(t), \Psi_2(u,v)(t)\right), \ t \in J,$$

avec

$$\begin{aligned}
\Psi_1(u,v)(t) &= -\sum_{i=1}^{m}\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f_i\left(s,u(s),v(s),D_0^{\gamma}u(s),D_0^{\rho}v(s)\right)ds \\
&+u_0^* + \frac{\Gamma(r+4)\,t^3}{6\left(\tau^{r+3}-\Gamma(r+4)\right)} \\
&\times\left(\sum_{i=1}^{m}\int_0^{\tau}\frac{(\tau-s)^{\alpha+r-1}}{\Gamma(\alpha+r)}f_i\left(s,u(s),v(s),D_0^{\gamma}u(s),D_0^{\rho}v(s)\right)ds - \frac{u_0^*\tau^r}{\Gamma(r+1)}\right),
\end{aligned} \tag{2.26}$$

et

$$\begin{aligned}
\Psi_2(u,v)(t) &= -\sum_{i=1}^{m}\int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} g_i\left(s,u(s),v(s),D_0^{\gamma}u(s),D_0^{\rho}v(s)\right)ds \\
&+v_0^* + \frac{\Gamma(\varphi+4)\,t^3}{6\left(\varsigma^{\varphi+3}-\Gamma(\varphi+4)\right)} \\
&\times\left(\sum_{i=1}^{m}\int_0^{\varsigma}\frac{(\varsigma-s)^{\beta+\varphi-1}}{\Gamma(\beta+\varphi)}g_i\left(s,u(s),v(s),D_0^{\gamma}u(s),D_0^{\rho}v(s)\right)ds - \frac{v_0^*\varsigma^{\varphi}}{\Gamma(\varphi+1)}\right).
\end{aligned} \tag{2.27}$$

On va maintenant montrer que Ψ possède un point fixe unique. Pour cela, on va prouver que Ψ est un opérateur contractif :

Soient $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in B$. Alors, pour tout $t \in J$, on a :

$$|\Psi_1(u_1, v_1)(t) - \Psi_1(u_2, v_2)(t)|$$

$$= \left| \begin{array}{c} -\left(\begin{array}{c} \sum_{i=1}^{m} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f_i\left(s, u_1(s), v_1(s), D_0^{\gamma}u(s), D_0^{\rho}v(s)\right) ds \\ -\sum_{i=1}^{m} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f_i\left(s, u_2(s), v_2(s), D_0^{\gamma}u(s), D_0^{\rho}v(s)\right) ds \end{array} \right) \\ +\frac{\Gamma(r+4)t^3}{6(\tau^{r+3}-\Gamma(r+4))} \\ \times \left(\begin{array}{c} \sum_{i=1}^{m} \int_0^{\tau} \frac{(\tau-s)^{\alpha+r-1}}{\Gamma(\alpha+r)} f_i\left(s, u_1(s), v_1(s), D_0^{\gamma}u(s), D_0^{\rho}v(s)\right) ds \\ -\sum_{i=1}^{m} \int_0^{\tau} \frac{(\tau-s)^{\alpha+r-1}}{\Gamma(\alpha+r)} f_i\left(s, u_2(s), v_2(s), D_0^{\gamma}u(s), D_0^{\rho}v(s)\right) ds \end{array} \right) \end{array} \right|.$$

On a donc

$$|\Psi_1(u_1, v_1) - \Psi_1(u_2, v_2)|$$

$$\leq \left(\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds \right) \sup_{s \in J} \sum_{i=1}^{m} \left| \begin{array}{c} f_i\left(s, u_1(s), v_1(s), D_0^{\gamma}u(s), D_0^{\rho}v(s)\right) \\ -f_i\left(s, u_2(s), v_2(s), D_0^{\gamma}u(s), D_0^{\rho}v(s)\right) \end{array} \right|$$

$$+\frac{\Gamma(r+4)t^3}{6|\tau^{r+3} - \Gamma(r+4)|}$$

$$\times \left(\int_0^{\tau} \frac{(\tau-s)^{\alpha+r-1}}{\Gamma(\alpha+r)} ds \right) \sup_{s \in J} \sum_{i=1}^{m} \left| \begin{array}{c} f_i\left(s, u_1(s), v_1(s), D_0^{\gamma}u(s), D_0^{\rho}v(s)\right) \\ -f_i\left(s, u_2(s), v_2(s), D_0^{\gamma}u(s), D_0^{\rho}v(s)\right) \end{array} \right|.$$

En calculant les intégrales du second membre, on obtient l'inégalité suivante :

$$|\Psi_1(u_1,v_1)-\Psi_1(u_2,v_2)|$$

$$\leq \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\sup_{s\in J}\sum_{i=1}^{m}\left|\begin{array}{c} f_i\left(s,u_1(s),v_1(s),D_0^{\gamma}u(s),D_0^{\rho}v(s)\right)\\ -f_i\left(s,u_2(s),v_2(s),D_0^{\gamma}u(s),D_0^{\rho}v(s)\right)\end{array}\right|$$

$$+\frac{\Gamma(r+4)\,t^3\tau^{\alpha+r}}{6\left|\tau^{r+3}-\Gamma(r+4)\right|\Gamma(\alpha+r+1)}$$

$$\times\sup_{s\in J}\sum_{i=1}^{m}\left|\begin{array}{c} f_i\left(s,u_1(s),v_1(s),D_0^{\gamma}u(s),D_0^{\rho}v(s)\right)\\ -f_i\left(s,u_2(s),v_2(s),D_0^{\gamma}u(s),D_0^{\rho}v(s)\right)\end{array}\right|, \tag{2.28}$$

qui peut être réécrite en utilisant (H_2) comme suit :

$$\left\|\Psi_1(u_1,v_1)-\Psi_1(u_2,v_2)\right\|_{\infty}$$

$$\leq \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{\Gamma(r+4)\,\tau^{\alpha+r}}{6\left|\tau^{r+3}-\Gamma(r+4)\right|\Gamma(\alpha+r+1)}\right)$$

$$\times\sup_{s\in J}\left(\begin{array}{c}\sum_{i=1}^{m}\omega_1^i(s)\left|u_1(s)-u_2(s)\right|+\sum_{i=1}^{m}\omega_2^i(s)\left|v_1(s)-v_2(s)\right|\\ \sum_{i=1}^{m}\omega_3^i(s)\left|D_0^{\gamma}u_1(s)-D_0^{\gamma}u_2(s)\right|+\sum_{i=1}^{m}\omega_4^i(s)\left|D_0^{\rho}v_1(s)-D_0^{\rho}v_2(s)\right|\end{array}\right)$$

$$\leq \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{\Gamma(r+4)\,\tau^{\alpha+r}}{6\left|\tau^{r+3}-\Gamma(r+4)\right|\Gamma(\alpha+r+1)}\right)\sum_{i=1}^{m}\left(\theta_1^i+\theta_2^i+\theta_3^i+\theta_4^i\right)$$

$$\times\max\left(\left\|u_1-u_2\right\|_{\infty},\left\|v_1-v_2\right\|_{\infty},\left\|D_0^{\gamma}u_1-D_0^{\gamma}u_2\right\|_{\infty},\left\|D_0^{\rho}v_1-D_0^{\rho}v_2\right\|_{\infty}\right).$$

Par conséquent,

$$\left\|\Psi_1(u_1,v_1)-\Psi_1(u_2,v_2)\right\|_{\infty} \leq A_1S_1\left\|(u_1-u_2,v_1-v_2)\right\|_{B}. \tag{2.29}$$

D'une manière similaire, on peut montrer que :

$$\left\|\Psi_2\left(u_1,v_1\right)-\Psi_2\left(u_2,v_2\right)\right\|_\infty \;\leq\; A_2S_2\left\|\left(u_1-u_2,v_1-v_2\right)\right\|_B . \tag{2.30}$$

D'autre part, on a :

$$\left|D_0^\gamma\Psi_1\left(u_1,v_1\right)(t)-D_0^\gamma\Psi_1\left(u_2,v_2\right)(t)\right|$$

$$= \left| \begin{array}{c} -\left(\begin{array}{c} \sum\limits_{i=1}^{m}\int\limits_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-\gamma-1}}{\Gamma(\alpha-\gamma)} f_i\left(s,u_1(s),v_1(s),D_0^\gamma u_1(s),D_0^\rho v_1(s)\right)ds \\ -\sum\limits_{i=1}^{m}\int\limits_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-\gamma-1}}{\Gamma(\alpha-\gamma)} f_i\left(s,u_2(s),v_2(s),D_0^\gamma u_1(s),D_0^\rho v_1(s)\right)ds \end{array} \right) \\ +\frac{\Gamma(r+4)t^{3-\gamma}}{(\tau^{r+3}-\Gamma(r+4))\Gamma(4-\gamma)} \\ \times\left(\begin{array}{c} \sum\limits_{i=1}^{m}\int\limits_0^\tau \frac{(\tau-s)^{\alpha+r-1}}{\Gamma(\alpha+r)} f_i\left(s,u_1(s),v_1(s),D_0^\gamma u_1(s),D_0^\rho v_1(s)\right)ds \\ -\sum\limits_{i=1}^{m}\int\limits_0^\tau \frac{(\tau-s)^{\alpha+r-1}}{\Gamma(\alpha+r)} f_i\left(s,u_2(s),v_2(s),D_0^\gamma u_1(s),D_0^\rho v_1(s)\right)ds \end{array} \right) \end{array} \right| .$$

En calculant les intégrales du second membre, on obtient :

$$\left|D_0^\gamma\Psi_1\left(u_1,v_1\right)(t)-D_0^\gamma\Psi_1\left(u_2,v_2\right)(t)\right|$$

$$\leq \frac{t^{\alpha-\gamma}}{\Gamma\left(\alpha-\gamma+1\right)}\sup_{s\in J}\sum_{i=1}^{m}\left| \begin{array}{c} f_i\left(s,u_1(s),v_1(s),D_0^\gamma u_1(s),D_0^\rho v_1(s)\right) \\ -f_i\left(s,u_2(s),v_2(s),D_0^\gamma u_1(s),D_0^\rho v_1(s)\right) \end{array} \right|$$

$$+\frac{\Gamma\left(r+4\right)t^{3-\gamma}\tau^{\alpha+r}}{\left|\tau^{r+3}-\Gamma\left(r+4\right)\right|\Gamma\left(4-\gamma\right)\Gamma\left(\alpha+r+1\right)}$$

$$\times\sup_{s\in J}\sum_{i=1}^{m}\left| \begin{array}{c} f_i\left(s,u_1(s),v_1(s),D_0^\gamma u_1(s),D_0^\rho v_1(s)\right) \\ -f_i\left(s,u_2(s),v_2(s),D_0^\gamma u_1(s),D_0^\rho v_1(s)\right) \end{array} \right| .$$

En utilisant l'hypothèse (H_2), on obtient :

$$\left\| D_0^{\gamma}\Psi_1(u_1,v_1) - D_0^{\gamma}\Psi_1(u_2,v_2)\right\|_{\infty}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)} + \frac{\Gamma(r+4)\,\tau^{\alpha+r}}{\left|\tau^{r+3}-\Gamma(r+4)\right|\Gamma(4-\gamma)\Gamma(\alpha+r+1)}\right) \\
&\quad \times \sup_{s\in J}\sum_{i=1}^{m}\left(\begin{array}{c} \omega_1^i(s)\left|u_1(s)-u_2(s)\right| + \omega_2^i(s)\left|v_1(s)-v_2(s)\right| \\ \omega_3^i(s)\left|D_0^{\gamma}u_1(s)-D_0^{\gamma}u_2(s)\right| + \omega_4^i(s)\left|D_0^{\rho}v_1(s)-D_0^{\rho}v_2(s)\right| \end{array}\right) \\
&\leq \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)} + \frac{\Gamma(r+4)\,\tau^{\alpha+r}}{\left|\tau^{r+3}-\Gamma(r+4)\right|\Gamma(4-\gamma)\Gamma(\alpha+r+1)}\right) \\
&\quad \times \sum_{i=1}^{m}\left(\theta_1^i+\theta_2^i+\theta_3^i+\theta_4^i\right) \\
&\quad \times \max\left(\left\|u_1-u_2\right\|_{\infty}, \left\|v_1-v_2\right\|_{\infty}, \left\|D_0^{\gamma}u_1-D_0^{\gamma}u_2\right\|_{\infty}, \left\|D_0^{\rho}v_1-D_0^{\rho}v_2\right\|_{\infty}\right).
\end{aligned}$$

Il en résulte que :

$$\left\| D_0^{\gamma}\Psi_1(u_1,v_1) - D_0^{\gamma}\Psi_1(u_2,v_2)\right\|_{\infty} \leq A_3 S_1 \left\|(u_1-u_2, v_1-v_2)\right\|_B . \tag{2.31}$$

Raisonnant de la même manière, on obtient :

$$\left\| D_0^{\rho}\Psi_2(u_1,v_1) - D_0^{\rho}\Psi_2(u_2,v_2)\right\|_{\infty} \leq A_4 S_2 \left\|(u_1-u_2, v_1-v_2)\right\|_B . \tag{2.32}$$

En utilisant (2.29), (2.30), (2.31) et (2.32) et le fait que :

$$\|\Psi(u_1,v_1)-\Psi(u_2,v_2)\|_B = \max\begin{pmatrix} \|\Psi_1(u_1,v_1)-\Psi_1(u_2,v_2)\|_\infty, \\ \|D_0^\gamma\Psi_1(u_1,v_1)-D_0^\gamma\Psi_1(u_2,v_2)\|_\infty, \\ \|\Psi_2(u_1,v_1)-\Psi_2(u_2,v_2)\|_\infty, \\ \|D_0^\rho\Psi_2(u_1,v_1)-D_0^\rho\Psi_2(u_2,v_2)\|_\infty \end{pmatrix},$$

on conclut que :

$$\begin{aligned} &\|\Psi(u_1,v_1)-\Psi(u_2,v_2)\|_B \\ \leq\ & \max(A_1S_1, A_2S_2, A_3S_1, A_4S_2)\,\|(u_1-u_2, v_1-v_2)\|_B. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Il s'ensuit de la condition (2.25) que l'opérateur $\Psi : B \to B$ est contractif. Donc Ψ possède un point fixe unique qui est une solution unique du problème (2.1). Ceci complète ainsi la preuve du Théorème 2.6.

2.3.2 Deuxième Résultat : Existence d'une Solution au Moins

Le théorème suivant établit l'existence d'une solution au moins du problème (2.1). Ce résultat est basé sur le Théorème du point fixe de Schaefer.

Théorème 2.7. *[86] On supposons que $\tau^{\alpha+r} \neq \Gamma(r+4)$ et $\varsigma^{\beta+\varphi} \neq \Gamma(\varphi+4)$. Si les hypothèses (H_1) et (H_3) sont satisfaites, alors le problème (2.1) admet au moins une solution $(u,v)(t)$, $t \in [0,1]$.*

Démonstration. Afin d'établir l'existence des solutions, on va montrer que Ψ admet un point fixe. Pour ce faire, on utilise le théorème du point fixe de Schaefer.

D'abord, on montre que l'opérateur Ψ est complètement continu. En effet, on montre que l'opérateur Ψ envoie tout ensemble borné de B en un ensemble relativement compact dans B.

D'après l'hypothèse (H_1), l'opérateur Ψ est continu.

(A) : Maintenant, on prend $\delta > 0$, $(u,v) \in \Lambda_\delta := \{(u,v) \in B;\ \|(u,v)\|_B \leq \delta\}$ et $\Upsilon := \{\Psi(u,v);\ (u,v) \in \Lambda_\delta\}$. Alors, pour toute $(u,v) \in \Lambda_\delta$ et pour tout $t \in J$, on a :

$$|\Psi_1(u,v)(t)| = \left| \begin{array}{l} -\sum\limits_{i=1}^{m}\int\limits_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f_i\left(s,u(s),v(s),D_0^{\gamma}u(s),D_0^{\rho}v(s)\right)ds + u_0^* + \frac{\Gamma(r+4)t^3}{6(\tau^{r+3}-\Gamma(r+4))} \\ \\ \times\left(\sum\limits_{i=1}^{m}\int\limits_0^{\tau} \frac{(\tau-s)^{\alpha+r-1}}{\Gamma(\alpha+r)} f_i\left(s,u(s),v(s),D_0^{\gamma}u(s),D_0^{\rho}v(s)\right)ds - \frac{u_0^*\tau^r}{\Gamma(r+1)}\right) \end{array} \right|$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\sup_{s\in J}\sum_{i=1}^{m}\left|f_i\left(s,u(s),v(s),D_0^{\gamma}u(s),D_0^{\rho}v(s)\right)\right| + |u_0^*| \\ &\quad+\frac{\Gamma(r+4)\,t^3\tau^{\alpha+r}}{6\,|\tau^{r+3}-\Gamma(r+4)|\,\Gamma(\alpha+r+1)} \\ &\quad\times\sup_{s\in J}\sum_{i=1}^{m}\left|f_i\left(s,u(s),v(s),D_0^{\gamma}u(s),D_0^{\rho}v(s)\right)\right| + \frac{\Gamma(r+4)\,t^3\,|u_0^*|\,\tau^r}{6\,|\tau^{r+3}-\Gamma(r+4)|\,\Gamma(r+1)}. \end{aligned}$$

En tenant compte de (H_3), on peut écrire

$$\begin{aligned} \|\Psi_1(u,v)\|_{\infty} &\leq \sum_{i=1}^{m} L_i\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\Gamma(r+4)\,\tau^{\alpha+r}}{6\,|\tau^{r+3}-\Gamma(r+4)|\,\Gamma(\alpha+r+1)}\right) \\ &\quad+|u_0^*| + \frac{\Gamma(r+4)\,|u_0^*|\,\tau^r}{6\,|\tau^{r+3}-\Gamma(r+4)|\,\Gamma(r+1)}. \end{aligned}$$

Ce qui est équivalent à

$$\|\Psi_1(u,v)\|_{\infty} \leq A_1\sum_{i=1}^{m} L_i + W_1. \tag{2.34}$$

D'une manière analogue, on a :

$$\|\Psi_2(u,v)\|_{\infty} \leq A_2\sum_{i=1}^{m} K_i + W_2. \tag{2.35}$$

D'autre part, on a :

$$
\left| D_0^\gamma \Psi_1(u,v)(t) \right| = \left| \begin{array}{c} -\sum\limits_{i=1}^{m} \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-\gamma-1}}{\Gamma(\alpha-\gamma)} f_i\left(s,u(s),v(s),D_0^\gamma u(s),D_0^\rho v(s)\right) ds \\ + \frac{\Gamma(r+4)t^{3-\gamma}}{(\tau^{r+3}-\Gamma(r+4))\Gamma(4-\gamma)} \\ \times \left(\sum\limits_{i=1}^{m} \int\limits_0^\tau \frac{(\tau-s)^{\alpha+r-1}}{\Gamma(\alpha+r)} f_i\left(s,u(s),v(s),D_0^\gamma u(s),D_0^\rho v(s)\right) ds - \frac{u_0^* \tau^r}{\Gamma(r+1)} \right) \end{array} \right|
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left(\frac{t^{\alpha-\gamma}}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)} + \frac{\Gamma(r+4)\,t^{3-\gamma}\tau^{\alpha+r}}{\left|\tau^{r+3}-\Gamma(r+4)\right|\Gamma(4-\gamma)\Gamma(\alpha+r+1)} \right) \\
&\quad \times \sup_{s\in J} \sum_{i=1}^{m} \left| f_i\left(s,u(s),v(s),D_0^\gamma u(s),D_0^\rho v(s)\right) \right| \\
&\quad + \frac{\Gamma(r+4)\,t^{3-\gamma}\left|u_0^*\right|\tau^r}{\left|\tau^{r+3}-\Gamma(r+4)\right|\Gamma(4-\gamma)\Gamma(r+1)}.
\end{aligned}
$$

Ainsi, à partir de l'hypothèse (H_3) , on a :

$$
\begin{aligned}
&\left\| D_0^\gamma \Psi_1(u,v) \right\|_\infty \leq \\
&\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)} + \frac{\Gamma(r+4)\,\tau^{\alpha+r}}{\left|\tau^{r+3}-\Gamma(r+4)\right|\Gamma(4-\gamma)\Gamma(\alpha+r+1)} \right) \sum_{i=1}^{m} L_i \\
&+ \frac{\Gamma(r+4)\left|u_0^*\right|\tau^r}{\left|\tau^{r+3}-\Gamma(r+4)\right|\Gamma(4-\gamma)\Gamma(r+1)}.
\end{aligned}
$$

Et donc,

$$
\left\| D_0^\gamma \Psi_1(u,v) \right\|_\infty \leq A_3 \sum_{i=1}^{m} L_i + W_3. \tag{2.36}
$$

Avec les mêmes arguments que précédemment, on obtient :

$$
\left\| D_0^\rho \Psi_2(u,v) \right\|_\infty \leq A_4 \sum_{i=1}^{m} K_i + W_4. \tag{2.37}
$$

Des inégalités (2.34) , (2.35) , (2.36) et (2.37) , il en résulte que

$$\|\Psi(u,v)\|_B \leq$$

$$\max\left(A_1\sum_{i=1}^{m}L_i+W_1,\ A_2\sum_{i=1}^{m}K_i+W_2,\ A_3\sum_{i=1}^{m}L_i+W_3,\ A_4\sum_{i=1}^{m}K_i+W_4\right).$$

Alors,

$$\|\Psi(u,v)\|_B < \infty. \tag{2.38}$$

D'où Υ est uniformément borné.

(B) : On va établir l'équicontinuité de Υ :

Soit $(u,v)\in\Lambda_\delta$. Alors pour $0\leq t_1<t_2\leq 1$, on a :

$$|\Psi_1(u,v)(t_2)-\Psi_1(u,v)(t_1)|$$

$$= \left| \begin{array}{c} -\left(\begin{array}{c} \sum\limits_{i=1}^{m}\int\limits_{0}^{t_2}\frac{(t_2-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f_i\left(s,u(s),v(s),D_0^{\gamma}u(s),D_0^{\rho}v(s)\right)ds \\ -\sum\limits_{i=1}^{m}\int\limits_{0}^{t_1}\frac{(t_1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f_i\left(s,u(s),v(s),D_0^{\gamma}u(s),D_0^{\rho}v(s)\right)ds \end{array}\right) \\ +\frac{\Gamma(r+4)}{6(\tau^{r+3}-\Gamma(r+4))}\left(t_2^3-t_1^3\right) \\ \times\left(\sum\limits_{i=1}^{m}\int\limits_{0}^{\tau}\frac{(\tau-s)^{\alpha+r-1}}{\Gamma(\alpha+r)}f_i\left(s,u(s),v(s),D_0^{\gamma}u(s),D_0^{\rho}v(s)\right)ds-\frac{u_0^*\tau^r}{\Gamma(r+1)}\right) \end{array} \right|,$$

et comme $t_1<t_2$, on peut aussi écrire les intégrales de second membre sous la forme :

$$\left|\Psi_1(u,v)(t_2)-\Psi_1(u,v)(t_1)\right|$$

$$= \left| \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} \sum\limits_{i=1}^{m}\int\limits_{0}^{t_1}\frac{(t_2-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f_i\left(s,u(s),v(s),D_0^{\gamma}u(s),D_0^{\rho}v(s)\right)ds \\ +\sum\limits_{i=1}^{m}\int\limits_{t_1}^{t_2}\frac{(t_2-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f_i\left(s,u(s),v(s),D_0^{\gamma}u(s),D_0^{\rho}v(s)\right)ds \end{array} \right) \\ -\sum\limits_{i=1}^{m}\int\limits_{0}^{t_1}\frac{(t_1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f_i\left(s,u(s),v(s),D_0^{\gamma}u(s),D_0^{\rho}v(s)\right)ds \\ +\frac{\Gamma(r+4)}{6(\tau^{r+3}-\Gamma(r+4))}\left(t_2^3-t_1^3\right) \\ \times\left(\sum\limits_{i=1}^{m}\int\limits_{0}^{\tau}\frac{(\tau-s)^{\alpha+r-1}}{\Gamma(\alpha+r)}f_i\left(s,u(s),v(s),D_0^{\gamma}u(s),D_0^{\rho}v(s)\right)ds-\frac{u_0^*\tau^r}{\Gamma(r+1)}\right) \end{array} \right|.$$

Ce qui permet d'obtenir l'inégalité suivante :

$$\left|\Psi_1(u,v)(t_2)-\Psi_1(u,v)(t_1)\right|$$

$$\leq \left| \begin{array}{c} \sum\limits_{i=1}^{m}\int\limits_{0}^{t_1}\frac{(t_2-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f_i\left(s,u(s),v(s),D_0^{\gamma}u(s),D_0^{\rho}v(s)\right)ds \\ -\sum\limits_{i=1}^{m}\int\limits_{0}^{t_1}\frac{(t_1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f_i\left(s,u(s),v(s),D_0^{\gamma}u(s),D_0^{\rho}v(s)\right)ds \end{array} \right|$$

$$+\left|\sum_{i=1}^{m}\int_{t_1}^{t_2}\frac{(t_2-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f_i\left(s,u(s),v(s),D_0^{\gamma}u(s),D_0^{\rho}v(s)\right)ds\right|$$

$$+\left| \begin{array}{c} \frac{\Gamma(r+4)}{6(\tau^{r+3}-\Gamma(r+4))}\left(t_2^3-t_1^3\right) \\ \times\left(\sum\limits_{i=1}^{m}\int\limits_{0}^{\tau}\frac{(\tau-s)^{\alpha+r-1}}{\Gamma(\alpha+r)}f_i\left(s,u(s),v(s),D_0^{\gamma}u(s),D_0^{\rho}v(s)\right)ds-\frac{u_0^*\tau^r}{\Gamma(r+1)}\right) \end{array} \right|.$$

En calculant les intégrales du second membre, on obtient :

$$\left|\Psi_1(u,v)(t_2)-\Psi_1(u,v)(t_1)\right|$$

$$\leq \frac{(t_2^\alpha - t_1^\alpha)+(t_2-t_1)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\sup_{s\in J}\sum_{i=1}^{m}\left|f_i\left(s,u(s),v(s),D_0^\gamma u(s),D_0^\rho v(s)\right)\right|$$

$$+\frac{(t_2-t_1)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\sup_{s\in J}\sum_{i=1}^{m}\left|f_i\left(s,u(s),v(s),D_0^\gamma u(s),D_0^\rho v(s)\right)\right|$$

$$+\frac{\Gamma(r+4)\,\tau^{\alpha+r}\,(t_2^3-t_1^3)}{6\left|(\tau^{r+3}-\Gamma(r+4))\right|\Gamma(\alpha+r+1)}$$

$$\times\sup_{s\in J}\sum_{i=1}^{m}\left|f_i\left(s,u(s),v(s),D_0^\gamma u(s),D_0^\rho v(s)\right)\right|+\frac{\Gamma(r+4)\,\tau^{r}\,|u_0^*|\,(t_2^3-t_1^3)}{6\left|\tau^{r+3}-\Gamma(r+4)\right|\Gamma(r+1)}.$$

Compte tenu de l'hypothèse (H_3), on aura :

$$\left\|\Psi_1(u,v)(t_2)-\Psi_1(u,v)(t_1)\right\|_\infty$$

$$\leq \frac{(t_2^\alpha - t_1^\alpha)+(t_2-t_1)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\sup_{t\in J}\sum_{i=1}^{m}l_i(t)+\frac{(t_2-t_1)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\sup_{t\in J}\sum_{i=1}^{m}l_i(t)$$

$$+\frac{\Gamma(r+4)\,\tau^{\alpha+r}\,(t_2^3-t_1^3)}{6\left|\tau^{r+3}-\Gamma(r+4)\right|\Gamma(\alpha+r+1)}\sup_{t\in J}\sum_{i=1}^{m}l_i(t)$$

$$+\frac{\Gamma(r+4)\,\tau^{r}\,|u_0^*|\,(t_2^3-t_1^3)}{6\left|\tau^{r+3}-\Gamma(r+4)\right|\Gamma(r+1)}.$$

Par conséquent,

$$\left\|\Psi_1(u,v)(t_2)-\Psi_1(u,v)(t_1)\right\|_\infty$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m} L_i\left(\frac{\left(t_2^\alpha-t_1^\alpha\right)+2\left(t_2-t_1\right)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{\Gamma(r+4)\,\tau^{\alpha+r}\left(t_2^3-t_1^3\right)}{6\left|\tau^{r+3}-\Gamma(r+4)\right|\Gamma(\alpha+r+1)}\right)$$

$$+\frac{\Gamma(r+4)\,\tau^r\left|u_0^*\right|}{6\left|\tau^{r+3}-\Gamma(r+4)\right|\Gamma(r+1)}\left(t_2^3-t_1^3\right). \tag{2.39}$$

De la même manière, on montre que :

$$\left\|\Psi_2(u,v)(t_2)-\Psi_2(u,v)(t_1)\right\|_\infty$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m} K_i\left(\frac{\left(t_2^\beta-t_1^\beta\right)+2\left(t_2-t_1\right)^\beta}{\Gamma(\beta+1)}+\frac{\Gamma(\varphi+4)\,\varsigma^{\beta+\varphi}\left(t_2^3-t_1^3\right)}{6\left|\varsigma^{\varphi+3}-\Gamma(\varphi+4)\right|\Gamma(\beta+\varphi+1)}\right)$$

$$+\frac{\Gamma(\varphi+4)\,\varsigma^\varphi\left|v_0^*\right|}{6\left|\varsigma^{\varphi+3}-\Gamma(\varphi+4)\right|\Gamma(\varphi+1)}\left(t_2^3-t_1^3\right). \tag{2.40}$$

D'autre part, on a :

$$\left|D_0^\gamma\Psi_1(u,v)(t_2)-D_0^\gamma\Psi_1(u,v)(t_1)\right|$$

$$\leq \left|\begin{array}{l}\sum\limits_{i=1}^{m}\int\limits_0^{t_1}\frac{(t_2-s)^{\alpha-\gamma-1}}{\Gamma(\alpha-\gamma)}f_i\left(s,u(s),v(s),D_0^\gamma u(s),D_0^\rho v(s)\right)ds\\ -\sum\limits_{i=1}^{m}\int\limits_0^{t_1}\frac{(t_1-s)^{\alpha-\gamma-1}}{\Gamma(\alpha-\gamma)}f_i\left(s,u(s),v(s),D_0^\gamma u(s),D_0^\rho v(s)\right)ds\end{array}\right|$$

$$+\left|\sum_{i=1}^{m}\int_{t_1}^{t_2}\frac{\left(t_2-s\right)^{\alpha-\gamma-1}}{\Gamma(\alpha-\gamma)}f_i\left(s,u(s),v(s),D_0^\gamma u(s),D_0^\rho v(s)\right)ds\right|$$

$$+\left|\begin{array}{c}\frac{\Gamma(r+4)}{\left(\tau^{r+3}-\Gamma(r+4)\right)\Gamma(4-\gamma)}\left(t_2^{3-\gamma}-t_1^{3-\gamma}\right)\\ \times\left(\sum\limits_{i=1}^{m}\int\limits_0^{\tau}\frac{(\tau-s)^{\alpha+r-1}}{\Gamma(\alpha+r)}f_i\left(s,u(s),v(s),D_0^\gamma u(s),D_0^\rho v(s)\right)ds-\frac{u_0^*\tau^r}{\Gamma(r+1)}\right)\end{array}\right|.$$

Le calcul des intégrales du second membre donne

$$\left|D_0^{\gamma}\Psi_1(u,v)(t_2)-D_0^{\gamma}\Psi_1(u,v)(t_1)\right|$$

$$\leq \frac{\left(t_2^{\alpha-\gamma}-t_1^{\alpha-\gamma}\right)+(t_2-t_1)^{\alpha-\gamma}}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)}\sup_{s\in J}\sum_{i=1}^{m}\left|f_i\left(s,u(s),v(s),D_0^{\gamma}u(s),D_0^{\rho}v(s)\right)\right|$$

$$+\frac{(t_2-t_1)^{\alpha-\gamma}}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)}\sup_{s\in J}\sum_{i=1}^{m}\left|f_i\left(s,u(s),v(s),D_0^{\gamma}u(s),D_0^{\rho}v(s)\right)\right|$$

$$+\frac{\Gamma(r+4)\,\tau^{\alpha+r}\left(t_2^{3-\gamma}-t_1^{3-\gamma}\right)}{\left|\tau^{r+3}-\Gamma(r+4)\right|\Gamma(4-\gamma)\Gamma(\alpha+r+1)}\sup_{s\in J}\sum_{i=1}^{m}\left|f_i\left(s,u(s),v(s),D_0^{\gamma}u(s),D_0^{\rho}v(s)\right)\right|$$

$$+\frac{\Gamma(r+4)\,\tau^{r}\left|u_0^*\right|\left(t_2^{3-\gamma}-t_1^{3-\gamma}\right)}{\left|\tau^{r+3}-\Gamma(r+4)\right|\Gamma(4-\gamma)\Gamma(r+1)}.$$

Il suffit donc d'appliquer l'hypothèse (H_3), pour avoir l'expression suivante :

$$\left\|D_0^{\gamma}\Psi_1(u,v)(t_2)-D_0^{\gamma}\Psi_1(u,v)(t_1)\right\|_{\infty} \leq$$

$$\left(\frac{\left(t_2^{\alpha-\gamma}-t_1^{\alpha-\gamma}\right)+2(t_2-t_1)^{\alpha-\gamma}}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)}+\frac{\Gamma(r+4)\,\tau^{\alpha+r}\left(t_2^{3-\gamma}-t_1^{3-\gamma}\right)}{\left|\tau^{r+3}-\Gamma(r+4)\right|\Gamma(4-\gamma)\Gamma(\alpha+r+1)}\right)\sum_{i=1}^{m}L_i$$

$$+\frac{\Gamma(r+4)\,\tau^{r}\left|u_0^*\right|\left(t_2^{3-\gamma}-t_1^{3-\gamma}\right)}{\left|\tau^{r+3}-\Gamma(r+4)\right|\Gamma(4-\gamma)\Gamma(r+1)}. \tag{2.41}$$

Finalement, d'une manière analogue on peut obtenir :

$$\left\|D_0^{\rho}\Psi_2(u,v)(t_2)-D_0^{\rho}\Psi_2(u,v)(t_1)\right\|_{\infty} \leq$$

$$\left(\frac{\left(t_2^{\beta-\rho}-t_1^{\beta-\rho}\right)+2(t_2-t_1)^{\beta-\rho}}{\Gamma(\beta-\rho+1)}+\frac{\Gamma(\varphi+4)\,\varsigma^{\beta+\varphi}\left(t_2^{3-\rho}-t_1^{3-\rho}\right)}{\left|\varsigma^{r+3}-\Gamma(\varphi+4)\right|\Gamma(4-\rho)\Gamma(\beta+\varphi+1)}\right)\sum_{i=1}^{m}K_i$$

$$+\frac{\Gamma(\varphi+4)\,\varsigma^{\varphi}\left|v_0^*\right|\left(t_2^{3-\rho}-t_1^{3-\rho}\right)}{\left|\varsigma^{\varphi}-\Gamma(\varphi+4)\right|\Gamma(4-\rho)\Gamma(\varphi+1)}. \tag{2.42}$$

On note que les termes des seconds membres des inégalités (2.39), (2.40), (2.41) et (2.42) sont indépendants des variables u, v, et $\|\Psi(u,v)(t_2) - \Psi(u,v)(t_1)\|_B$ tend vers zéro quand t_1 tend vers t_2. Ce qui implique que l'ensemble Υ est équicontinu.

En combinant (A) et (B), et en vertu du Théorème de Arzela-Ascoli, on conclut que Υ est un ensemble relativement compact de B. Il en résulte que Ψ est un opérateur complètement continu.

(C) : On prouve que pour un certain $0 < \mu < 1$, l'ensemble

$$\Omega := \{(u,v) \in B,\ \ (u,v) = \mu\Psi(u,v)\ \}$$

est borné.

En effet, soit $(u,v) \in \Omega$, alors $(u,v) = \mu\Psi(u,v)$, pour $0 < \mu < 1$. Donc, pour tout $t \in J$, on a :

$$u(t) = \mu\Psi_1(u,v)(t),\ \ v(t) = \mu\Psi_2(u,v)(t).$$

Ensuite, on aura :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu}|u(t)| \ \leq\ & \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \times \sup_{s\in J}\sum_{i=1}^{m}\left|f_i\left(s,u(s),v(s),D_0^{\gamma}u(s),D_0^{\rho}v(s)\right)\right| + |u_0^*| \\
& + \frac{\Gamma(r+4)\,t^3\tau^{\alpha+r}}{6\left|\tau^{r+3}-\Gamma(r+4)\right|\Gamma(\alpha+r+1)} \times \sup_{s\in J}\sum_{i=1}^{m}\left|f_i\left(s,u(s),v(s),D_0^{\gamma}u(s),D_0^{\rho}v(s)\right)\right| \\
& + \frac{\Gamma(r+4)\,t^3\,|u_0^*|\,\tau^r}{6\left|\tau^{r+3}-\Gamma(r+4)\right|\Gamma(r+1)}.
\end{aligned}$$

En se servant de l'hypothèse (H_3), on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu}|u(t)| \ \leq\ & \sum_{i=1}^{m} L_i\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\Gamma(r+4)\,\tau^{\alpha+r}}{6\left|\tau^{r+3}-\Gamma(r+4)\right|\Gamma(\alpha+r+1)}\right) \\
& + |u_0^*| + \frac{\Gamma(r+4)\,|u_0^*|\,\tau^r}{6\left|\tau^{r+3}-\Gamma(r+4)\right|\Gamma(r+1)}.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\|u\|_{\infty} \leq \mu\left(A_1\sum_{i=1}^{m}L_i+W_1\right). \tag{2.43}$$

De même, on a :

$$\|v\|_{\infty} \leq \mu\left(A_2\sum_{i=1}^{m}K_i+W_2\right). \tag{2.44}$$

D'autre part, on a :

$$\frac{1}{\mu}\left|D_0^{\gamma}u\left(t\right)\right|$$

$$\leq \frac{t^{\alpha-\gamma}}{\Gamma\left(\alpha-\gamma+1\right)}\sup_{s\in J}\sum_{i=1}^{m}\left|f_i\left(s,u(s),v(s),D_0^{\gamma}u(s),D_0^{\rho}v(s)\right)\right|$$

$$+\frac{\Gamma\left(r+4\right)t^{3-\gamma}\tau^{\alpha+r}}{\left|\tau^{r+3}-\Gamma\left(r+4\right)\right|\Gamma\left(4-\gamma\right)\Gamma\left(\alpha+r+1\right)}\sup_{s\in J}\sum_{i=1}^{m}\left|f_i\left(s,u(s),v(s),D_0^{\gamma}u(s),D_0^{\rho}v(s)\right)\right|$$

$$+\frac{\Gamma\left(r+4\right)t^{3-\gamma}\left|u_0^*\right|\tau^{r}}{\left|\tau^{r+3}-\Gamma\left(r+4\right)\right|\Gamma\left(4-\gamma\right)\Gamma\left(r+1\right)}.$$

En utilisant l'hypothèse (H_3) , on obtient :

$$\left\|D_0^{\gamma}u\right\|_{\infty} \leq \mu\left(A_3\sum_{i=1}^{m}L_i+W_3\right). \tag{2.45}$$

De manière analogue, on peut montrer que :

$$\left\|D_0^{\rho}v\right\|_{\infty} \leq \mu\left(A_4\sum_{i=1}^{m}K_i+W_4\right). \tag{2.46}$$

Il résulte de (2.43) , (2.44) , (2.45) et (2.46) que :

$$\|(u,v)\|_B \leq$$

$$\mu \max\left(A_1\sum_{i=1}^{m} L_i + W_1,\ A_2\sum_{i=1}^{m} K_i + W_2,\ A_3\sum_{i=1}^{m} K_i + W_3,\ A_4\sum_{i=1}^{m} K_i + W_4\right). \tag{2.47}$$

Donc,

$$\|(u,v)\|_B \ < \ \infty.$$

Ce qui prouve que Ω est borné.

On conclut par le Théorème du point fixe de Schaefer que l'opérateur Ψ admet au moins un point fixe qui est la solution du problème (2.1) . Ce qui achève la démonstration.

Corollaire 2.8. *[86] Soient* $\tau^{\alpha+r} \neq \Gamma(r+4)$, *et* $\varsigma^{\beta+\varphi} \neq \Gamma(\varphi+4)$. *On suppose que l'hypothèse* (H_1) *est satisfaite. Si les fonctions* f_i, g_i *sont bornées sur* $J \times \mathbb{R}^4$, $i = 1, 2, ..., m$, *alors le problème* (2.1) *admet au moins une solution* $(u,v)(t)$, $t \in J$.

2.4 Applications

On présente deux exemples pour illustrer les résultats principaux.

2.4.1 Exemple 1

On considère le problème fractionnaire suivant [86] :

$$\begin{cases} D_0^{\frac{10}{3}} u(t) + \frac{|u(t)|+|v(t)|+\left|D_0^{\frac{5}{2}} u(t)\right|+\left|D_0^{\frac{3}{2}} v(t)\right|}{(4t^2+25)\left(e^{-2t}+|u(t)|+|v(t)|+\left|D_0^{\frac{5}{2}} u(t)\right|+\left|D_0^{\frac{3}{2}} v(t)\right|\right)} \\ +\frac{1}{5\pi^2+t}\left(\sin u(t) + \sin D_0^{\frac{5}{2}} u(t) + \cos v(t) + \cos D_0^{\frac{3}{2}} v(t) + \ln(1+t)\right) = 0, \\ t \in [0,1], \\ D_0^{\frac{15}{4}} v(t) + \frac{1}{32(t^2+1)}\left(\frac{|u(t)|}{1+|u(t)|} + \frac{|v(t)|}{1+|v(t)|} + \frac{t^2\left|D_0^{\frac{5}{2}} u(t)\right|}{\pi^2\left(1+\left|D_0^{\frac{5}{2}} u(t)\right|\right)} + \frac{t\left|D_0^{\frac{3}{2}} v(t)\right|}{\pi\left(1+\left|D_0^{\frac{3}{2}} v(t)\right|\right)}\right) \\ +\frac{1}{16e^{-t^2}}\left(\sin u(t) + \sin v(t) + \frac{t^2}{8\pi^2}\sin\left(2\pi D_0^{\frac{5}{2}} u(t)\right) + \frac{t}{\pi}\sin\left(2\pi D_0^{\frac{3}{2}} v(t)\right)\right) = 0, \\ t \in [0,1], \\ u(0) = \sqrt{7},\ v(0) = \sqrt{2}, \\ u^{'}(0) = u^{''}(0) = v^{'}(0) = v^{''}(0) = 0, \\ u^{'''}(0) = I_0^{\frac{4}{3}}\left(\frac{1}{2}\right),\ v^{'''}(0) = I_0^{\frac{1}{4}}\left(\frac{5}{7}\right). \end{cases} \tag{2.48}$$

Pour cet exemple, on a : $\alpha = \frac{10}{3}$, $\beta = \frac{15}{4}$, $\gamma = \frac{5}{2}$, $\rho = \frac{3}{2}$, $r = \frac{4}{3}$, $\varphi = \frac{1}{4}$, $\tau = \frac{1}{2}$, $\varsigma = \frac{5}{7}$, $J = [0,1]$. Ainsi, il est facile de voir que $\tau^{\alpha+r} \neq \Gamma(r+4)$, $\varsigma^{\beta+\varphi} \neq \Gamma(\varphi+4)$.

D'autre part,

$$f_1(t, u_1, u_2, u_3, u_4) = \frac{|u_1| + |u_2| + |u_3| + |u_4|}{(4t^2+25)(e^{-2t} + |u_1| + |u_2| + |u_3| + |u_4|)},$$

$$f_2(t, u_1, u_2, u_3, u_4) = \frac{1}{5\pi^2 + t}(\sin u_1 + \sin u_2 + \cos u_3 + \cos u_4 + \ln(1+t)).$$

Donc, pour tout $t \in [0,1]$ et toutes (u_1, u_2, u_3, u_4), $(v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathbb{R}^4$, on a :

$$|f_1(t, u_1, u_2, u_3, u_4) - f_1(t, v_1, v_2, v_3, v_4)| \leq$$

$$\frac{1}{4t^2+25}|u_1 - v_1| + \frac{1}{4t^2+25}|u_2 - v_2| + \frac{1}{4t^2+25}|u_3 - v_3| + \frac{1}{4t^2+25}|u_4 - v_4|,$$

et

$$|f_2(t,u_1,u_2,u_3,u_4)-f_2(t,v_1,v_2,v_3,v_4)| \leq$$

$$\frac{1}{5\pi^2+t}|u_1-v_1|+\frac{1}{5\pi^2+t}|u_2-v_2|+\frac{1}{5\pi^2+t}|u_3-v_3|+\frac{1}{5\pi^2+t}|u_4-v_4|.$$

On peut prendre :

$$\omega_1^1(t)=\omega_2^1(t)=\omega_3^1(t)=\omega_4^1(t)=\frac{1}{4t^2+25},$$

$$\omega_1^2(t)=\omega_2^2(t)=\omega_3^2(t)=\omega_4^2(t)=\frac{1}{5\pi^2+t},$$

$$\theta_1^1=\theta_2^1=\theta_3^1=\theta_4^1=\frac{1}{25},$$

$$\theta_1^2=\theta_2^2=\theta_3^2=\theta_4^2=\frac{1}{5\pi^2}.$$

On a aussi :

$$g_1(t,u_1,u_2,u_3,u_4)$$
$$=\frac{1}{32(t^2+1)}\left(\frac{|u_1|}{1+|u_1|}+\frac{|u_2|}{1+|u_2|}+\frac{t^2|u_3|}{\pi^2(1+|u_3|)}+\frac{t|u_4|}{\pi(1+|u_4|)}\right),$$

et

$$g_2(t,u_1,u_2,u_3,u_4)$$
$$=\frac{1}{16e^{-t^2}}\left(\sin u_1+\sin u_2+\frac{t^2}{8\pi^2}\sin(2\pi u_3)+\frac{t}{\pi}\sin(2\pi u_4)\right).$$

Pour $t\in[0,1]$, et (u_1,u_2,u_3,u_4), $(v_1,v_2,v_3,v_4)\in\mathbb{R}^4$, on peut écrire

$$|g_1(t,u_1,u_2,u_3,u_4)-g_1(t,v_1,v_2,v_3,v_4)|\leq$$
$$\frac{1}{32(t^2+1)}|u_1-v_1|+\frac{1}{32(t^2+1)}|u_2-v_2|+\frac{t^2}{32\pi^2(t^2+1)}|u_3-v_3|+\frac{t}{32\pi(t^2+1)}|u_4-v_4|,$$

$$|g_2(t,u_1,u_2,u_3,u_4)-g_2(t,v_1,v_2,v_3,v_4)|\leq$$
$$\frac{1}{16e^{-t^2}}|u_1-v_1|+\frac{1}{16e^{-t^2}}|u_2-v_2|+\frac{t^2}{128\pi^2e^{-t^2}}|u_3-v_3|+\frac{t}{16\pi e^{-t^2}}|u_4-v_4|.$$

Alors, on peut avoir

$$\eta_1^1(t) = \eta_2^1(t) = \frac{1}{32(t^2+1)},\ \eta_3^1(t) = \frac{t^2}{32\pi^2(t^2+1)},\ \eta_4^1(t) = \frac{t}{32\pi(t^2+1)},$$
$$\eta_1^2(t) = \eta_2^2(t) = \frac{1}{16e^{-t^2}},\ \eta_3^2(t) = \frac{t^2}{128\pi^2 e^{-t^2}},\ \eta_4^2(t) = \frac{t}{16\pi e^{-t^2}},$$

et donc,

$$\lambda_1^1 = \lambda_2^1 = \frac{1}{32},\ \lambda_3^1 = \frac{1}{32\pi^2},\ \lambda_4^1 = \frac{1}{32\pi},$$
$$\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = \frac{e}{16},\ \lambda_3^2 = \frac{e}{128\pi^2},\ \lambda_4^2 = \frac{e}{16\pi}.$$

D'autre part, en calculant A_1, A_2, A_3 et A_4, on aura

$$\max(A_1S_1, A_2S_2, A_3S_1, A_4S_2) < 1.$$

En conclusion, toutes les hypothèses du Théorème 2.6 sont vérifiées, donc le problème (2.48) admet une solution unique $(u,v)(t)$, $t \in [0,1]$.

2.4.2 Exemple 2

On considère le système fractionnaire suivant [86] :

$$\begin{cases} D_0^{\frac{7}{2}} u(t) + \dfrac{e^t}{16+\sin(u(t)+v(t))+\cos\left(D_0^{\frac{7}{4}}u(t)+D_0^{\frac{3}{4}}v(t)\right)} + \dfrac{e^{-2t}\sin(u(t)+v(t))}{16+\cos\left(D_0^{\frac{7}{4}}u(t)+D_0^{\frac{3}{4}}v(t)\right)} = 0, \\ t \in [0,1], \\ D_0^{\frac{7}{2}} v(t) + \dfrac{\sin\left(u(t)+v(t)+D_0^{\frac{7}{4}}u(t)+D_0^{\frac{3}{4}}v(t)\right)}{18+t+t^2} + \dfrac{\cos\left(u(t)+v(t)+D_0^{\frac{7}{4}}u(t)+D_0^{\frac{3}{4}}v(t)\right)}{16+t+t^2} = 0, \\ t \in [0,1], \\ u(0) = 3\sqrt{2},\ v(0) = \sqrt{5}, \\ u'(0) = u''(0) = v'(0) = v''(0) = 0, \\ u'''(0) = I_0^{\frac{2}{5}}\left(\frac{1}{3}\right),\ v'''(0) = I_0^{\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{7}\right). \end{cases} \tag{2.49}$$

Ici on a : $\alpha = \beta = \frac{7}{2}$, $\gamma = \frac{7}{4}$, $\rho = \frac{3}{4}$, $r = \frac{2}{5}$, $\varphi = \frac{3}{2}$, $\tau = \frac{1}{3}$, $\varsigma = \frac{2}{7}$, $J = [0,1]$, et $\tau^{\alpha+r} \neq \Gamma(r+4)$, $\varsigma^{\beta+\varphi} \neq \Gamma(\varphi+4)$.

On a aussi :

$$f_1(t,u_1,u_2,u_3,u_4) = \frac{e^t}{16+\sin(u_1+u_2)+\cos(u_3+u_4)},$$

$$f_2(t,u_1,u_2,u_3,u_4) = \frac{e^{-2t}\sin(u_1+u_2)}{16+\cos(u_3+u_4)},$$

$$g_1(t,u_1,u_2,u_3,u_4) = \frac{\sin(u_1+u_2+u_3+u_4)}{18+t+t^2},$$

$$g_2(t,u_1,u_2,u_3,u_4) = \frac{\cos(u_1+u_2+u_3+u_4)}{16+t+t^2}.$$

Pour tout $t \in J$ et toute $(u_1,u_2,u_3,u_4) \in \mathbb{R}^4$, on a :

$$\begin{aligned}
|f_1(t,u_1,u_2,u_3,u_4)| &\leq \frac{e^t}{14}, \\
|f_2(t,u_1,u_2,u_3,u_4)| &\leq \frac{e^{-2t}}{15}, \\
|g_1(t,u_1,u_2,u_3,u_4)| &\leq \frac{1}{18+t+t^2}, \\
|g_2(t,u_1,u_2,u_3,u_4)| &\leq \frac{1}{16+t+t^2}.
\end{aligned}$$

Donc, les hypothèses (H_1) et (H_3) sont satisfaites, d'où le système (2.49) admet au moins une solution $(u,v)(t)$, $t \in [0,1]$.

Chapitre 3

Problèmes d'Ordres Fractionnaires Multiples

3.1 Introduction

La théorie des équations différentielles fractionnaire joue un rôle important dans la modélisation de nombreux processus physiques, technologiques et biologiques. Pour plus de détails, on renvoie le lecteur aux monographies de Hilfer [39], Kilbas et al. [53], Lakshmikantham [58], Miller [67] et les papiers cités dans [5, 10, 14, 33, 52, 54, 72, 78, 84]. Au cours des dernières décennies, de nombreux articles traitant l'existence et l'unicité des solutions ont été publiés, le lecteur intéressé peut se référer aux [6, 11, 12, 13, 19, 20, 22, 32, 42, 49, 64, 71] pour plus de détails.

L'objectif de ce chapitre est l'étude d'une nouvelle classe de problèmes fractionnaires d'ordres multiples. On établit des conditions suffisantes pour prouver nouveaux résultats d'existence et d'unicité et d'autres résultats assurant l'existence d'une solution au moins. En outre, quelques exemples sont discutés pour illustrer les principaux résultats.

On introduit maintenant des résultats ayant inspiré notre travail. On commence par [61], où M. Li et Y. Liu ont étudié l'existence et l'unicité de solutions pour le système suivant :

$$\begin{cases} {}^cD_{0^+}^{\alpha} u(t) = f_1\left(t, u(t), v(t), {}^c D_{0^+}^{p} u(t), {}^c D_{0^+}^{q} v(t)\right), \\ \qquad\qquad t \in J = [0, T], \\ {}^cD_{0^+}^{\beta} v(t) = f_2\left(t, u(t), v(t), {}^c D_{0^+}^{p} u(t), {}^c D_{0^+}^{q} v(t)\right), \\ \qquad\qquad t \in J = [0, T], \\ u(0) + \lambda_1 u'(0) = 0,\ u(1) + \lambda_2^c D_{0^+}^{p} u(1) = 0, \\ v(0) + \lambda_1 v'(0) = 0,\ v(1) + \lambda_2^c D_{0^+}^{q} v(1) = 0, \end{cases}$$

ici ${}^cD_{0^+}^{\gamma}$ dénote la dérivée fractionnaire de Caputo pour $\gamma > 0$, $1 < \alpha, \beta \leq 2$, $0 < p, q \leq 1$, et $f_1, f_2 \in C\left([0,T] \times \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R}_+\right)$.

Récemment dans [92], G.T. Wang, B. Ahmad et L. Zhang ont considéré $m-$points conditions aux limites pour un système d'équations différentielles fractionnaires non linéaires de la forme suivante :

$$\begin{cases} D^p u(t) + f(t, v(t)) = 0, \ t \in J, \\ D^q v(t) + g(t, u(t)) = 0, \ t \in J, \\ u(0) = u'(0) = 0, \ D^{p-1} u(+\infty) = \sum\limits_{i=1}^{m-2} \beta_i u(\xi_i), \\ v(0) = v'(0) = 0, \ D^{q-1} v(+\infty) = \sum\limits_{i=1}^{m-2} \gamma_i v(\xi_i), \\ 2 < p, q < 3, \end{cases}$$

avec $t \in J = [0, +\infty)$, $f, g \in C(J \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, $0 < \xi_1 < \xi_2 < ... < \xi_{m-2} < +\infty$, D^σ dénote la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\sigma > 0$.

Très récemment dans [97], C. X. Zhu, X. Zhang et Z.Q. Wu ont discuté un problème avec des conditions intégrales :

$$\begin{cases} {}^c D_{0+}^{\alpha} u(t) = f\left(t, v(t), {}^c D_{0+}^{p} v(t)\right), \ 0 < t < 1, \\ {}^c D_{0+}^{\beta} v(t) = g\left(t, u(t), {}^c D_{0+}^{q} u(t)\right), \ 0 < t < 1, \\ a u'(0) + u(\eta_1) = \int_0^1 \phi(s, v(s))\, ds, \\ u(\eta_2) + b u'(1) = \int_0^1 \psi(s, v(s))\, ds, \\ c v'(0) + v(\xi_1) = \int_0^1 \varphi(s, u(s))\, ds, \\ v(\xi_2) + d v'(1) = \int_0^1 \rho(s, u(s))\, ds. \end{cases}$$

Ici $1 < \alpha, \beta < 2$, $0 < p, q < 1$, $\alpha - p - 1 \geq 0$, $\beta - q - 1 \geq 0$, $0 \leq \eta_1 < \eta_2 \leq 1$, $\phi, \psi, \varphi, \rho \in L^1[0,1]$, $f, g \in C((0,1) \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et ${}^c D_{0+}^{\gamma}$ dénote la dérivée fractionnaire au sense de Caputo d'ordre $\gamma > 0$.

3.2 Problèmes Fractionnaires Multidimensionnels

On est essentiellement intéressé par l'étude de l'existence et l'unicité de solutions et l'existence d'une solution au moins correspondant au problème d'ordres fractionnaires multiples suivant [25] :

$$\left\{\begin{array}{c} D_0^{\alpha_1} u_1(t) = \sum\limits_{i=1}^{m} f_i^1(t, u_1(t), u_2(t), ..., u_n(t)), \ t \in J, \\ D_0^{\alpha_2} u_2(t) = \sum\limits_{i=1}^{m} f_i^2(t, u_1(t), u_2(t), ..., u_n(t)), \ t \in J, \\ \vdots \\ D_0^{\alpha_n} u_n(t) = \sum\limits_{i=1}^{m} f_i^n(t, u_1(t), u_2(t), ..., u_n(t)), \ t \in J, \\ k = 1, \ u_k^{(k-1)}(0) = 0, \\ k = 2, \ u_k^{(k-2)}(0) = \ u_k^{(k-1)}(1) = 0, \\ k = 3, \ u_k^{(k-3)}(0) = \ u_k^{(k-2)}(0) = \ u_k^{(k-1)}(1) = 0, \\ \vdots \\ k = n, \ u_k^{(k-n)}(0) = u_k^{(k-(n-1))}(0) = ... = \ u_k^{(k-2)}(0) = \ u_k^{(k-1)}(1) = 0, \end{array}\right. \tag{3.1}$$

où $k-1 < \alpha_k < k$, $k = 1, 2, ..., n$, $n \in \mathbb{N}^*$, $J := [0, 1]$, $D_0^{\alpha_k}$ sont les dérivées fractionnaires au sens de Caputo.

Les fonctions $f_i^k : J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, pour $k = 1, 2, ..., n$, et $i = 1, ..., m$, n, $m \in \mathbb{N}^*$, seront précisées plus tard.

3.2.1 Solution Intégrale

On prouve maintenant le résultat auxiliaire qui suit :

Lemme 3.1. *[25] On suppose que $k-1 < \alpha_k < k$, $k = 1, 2, ..., n$, et on considère $\left(G_i^k\right)_{i,k} \subset C(J, \mathbb{R})$, avec $i = 1, ..., m$, $k = 1, ..., n$, $m, n \in \mathbb{N}^*$. Alors, le problème*

$$\begin{cases} D_0^{\alpha_1} u_1(t) = \sum\limits_{i=1}^{m} G_i^1(t),\ t \in J, \\ \\ D_0^{\alpha_2} u_2(t) = \sum\limits_{i=1}^{m} G_i^2(t),\ t \in J, \\ \\ \qquad\qquad \vdots \\ D_0^{\alpha_n} u_n(t) = \sum\limits_{i=1}^{m} G_i^n(t),\ t \in J, \end{cases} \tag{3.2}$$

associé aux conditions initiales :

$$\begin{cases} k = 1,\ u_k^{(k-1)}(0) = 0, \\ \\ k = 2,\ u_k^{(k-2)}(0) = u_k^{(k-1)}(1) = 0, \\ \\ k = 3,\ u_k^{(k-3)}(0) = u_k^{(k-2)}(0) = u_k^{(k-1)}(1) = 0, \\ \qquad\qquad \vdots \\ k = n,\ u_k^{(k-n)}(0) = u_k^{(k-(n-1))}(0) = \dots = u_k^{(k-2)}(0) = u_k^{(k-1)}(1) = 0, \end{cases} \tag{3.3}$$

possède une solution $(u_1, u_2, ..., u_n)(t)$, *telle que pour tout* $t \in J$, *on a :*

$$u_k(t) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_1 - 1}}{\Gamma(\alpha_1)} G_i^1(s)\, ds,\ k = 1, \\ \\ \sum\limits_{i=1}^{m} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_k - 1}}{\Gamma(\alpha_k)} G_i^k(s)\, ds \\ \\ -\frac{t^{k-1}}{(k-1)!\Gamma(\alpha_k - (k-1))} \sum\limits_{i=1}^{m} \int_0^1 (1-s)^{\alpha_k - k} G_i^k(s)\, ds,\ k = 2, 3, ..., n. \end{cases} \tag{3.4}$$

Démonstration. Afin de démontrer le Lemme 3.1, on va appliquer le Lemme 2.2 pour réduire le problème (3.2) aux équations intégrales suivantes :

$$\begin{cases} u_1(t) = \sum\limits_{i=1}^{m} \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_1 - 1}}{\Gamma(\alpha 1)} G_i^1(s)\, ds - c_0^1, \\ u_2(t) = \sum\limits_{i=1}^{m} \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_2 - 1}}{\Gamma(\alpha_2)} G_i^2(s)\, ds - c_0^2 - c_1^2 t, \\ u_3(t) = \sum\limits_{i=1}^{m} \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_3 - 1}}{\Gamma(\alpha_3)} G_i^3(s)\, ds - c_0^3 - c_1^3 t - c_2^3 t^2, \\ \vdots \\ u_n(t) = \sum\limits_{i=1}^{m} \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_n - 1}}{\Gamma(\alpha_n)} G_i^n(s)\, ds - c_0^n - c_1^n t - c_2^n t^2 - ... c_{n-2}^n t^{n-2} - c_{n-1}^n t^{n-1}, \end{cases} \tag{3.5}$$

où

$$\begin{pmatrix} c_0^1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ c_0^2 & c_1^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_0^3 & c_1^3 t & c_2^3 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ c_0^{n-1} & c_1^{n-1} & c_2^{n-1} & \dots & c_{n-2}^{n-1} & 0 \\ c_0^n & c_1^n & c_2^n & \dots & c_{n-2}^n & c_{n-1}^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}. \tag{3.6}$$

On vérifie maintenant les conditions aux limite (3.3), on observe que :

$$\begin{cases} c_0^1 = 0, \\ c_0^2 = 0,\ c_1^2 = \sum\limits_{i=1}^{m} \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha_2 - 2}}{\Gamma(\alpha_2 - 1)} G_i^2(s)\, ds, \\ c_0^3 = c_1^3 = 0,\ c_2^3 = \sum\limits_{i=1}^{m} \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha_3 - 3}}{2\Gamma(\alpha_3 - 2)} G_i^3(s)\, ds, \\ \vdots \\ c_0^{n-1} = c_1^{n-1} = ... = c_{n-3}^{n-1} = 0,\ c_{n-2}^{n-1} = \sum\limits_{i=1}^{m} \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha_{n-1} - n - 1}}{(n-2)!\Gamma(\alpha_{n-1} - (n-2))} G_i^{n-1}(s)\, ds, \\ c_0^n = c_1^n = ... = c_{n-2}^n = 0,\ c_{n-1}^n = \sum\limits_{i=1}^{m} \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha_n - n}}{(n-1)!\Gamma(\alpha_n - (n-1))} G_i^n(s)\, ds. \end{cases} \tag{3.7}$$

En substituant (3.7) dans (3.5) , on constate que :

$$u_k(t)=\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{m}\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_1-1}}{\Gamma(\alpha_1)}G_i^1(s)\,ds,\ k=1,\\ \sum\limits_{i=1}^{m}\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_k-1}}{\Gamma(\alpha_k)}G_i^k(s)\,ds\\ -\frac{t^{k-1}}{(k-1)!\Gamma(\alpha_k-(k-1))}\sum\limits_{i=1}^{m}\int_0^1(1-s)^{\alpha_k-k}G_i^k(s)\,ds,\ k=2,3,...,n.\end{cases}$$

La preuve du Lemme 3.1 est ainsi atteinte.

On introduit l'espace de Banach $B:=\{(u_1,u_2,...,u_n):u_k\in C(J,\mathbb{R}),k=1,2,...,n\}$, muni de la norme :

$$\|(u_1,u_2,...,u_n)\|_B=\max_{1\leq k\leq n}\|u_k\|_\infty,\ \ \|u_k\|_\infty=\sup_{t\in J}|u_k(t)|,\ k=1,2,...,n.$$

3.3 Quelques Résultats Principaux

On considère les hypothèses suivantes :

(H_1) : Il existe des constantes non négatives $\left((\mu_i^k)_j\right)_{i=1,..m}^{j,k=1,..n}$, telles que pour tout $t\in J$ et toutes $(u_1,u_2,...,u_n),(v_1,v_2,...,v_n)\in\mathbb{R}^n$, on a :

$$\left|f_i^k(t,u_1,u_2,...,u_n)-f_i^k(t,v_1,v_2,...,v_n)\right|\leq\sum_{j=1}^{n}\left(\mu_i^k\right)_j|u_j-v_j|.$$

(H_2) : Les fonctions $f_i^k:J\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ sont continues pour tout $i=1,2,...,m$, et tout $k=1,2,...,n$, $m,n\in\mathbb{N}^*$.

(H_3) : Il existe des constantes non négatives K_i^k, telles que :

$$\left|f_i^k(t,u_1,u_2,...,u_n)\right|\leq K_i^k,\ i=1,...,m,\ k=1,2,...,n,$$

pour tout $t\in J$ et toute $(u_1,u_2,...,u_n)\in\mathbb{R}^n$, où $K:=\max\{K_i^k,i=1,...,m,\ k=1,2,...,n\}$.

Pour plus de simplicité, on introduit les notations suivantes :

$$\Sigma_k \;:\; = \sum_{i=1}^{m} \left(\left(\mu_i^k\right)_1 + \left(\mu_i^k\right)_2 + ... + \left(\mu_i^k\right)_n \right),$$

$$\digamma_k := \frac{1}{\Gamma(\alpha_k + 1)} + \frac{1}{(k-1)!\Gamma(\alpha_k + 2 - k)}, \; k = 1, 2, ..., n,$$

$$M_1 \;:\; = \frac{1}{2}\Sigma_1 \digamma_1, \; M_k := \Sigma_k \; \digamma_k, \; k = 2, 3, ..., n.$$

3.3.1 Conditions Suffisantes pour l'Existence et l'Unicité

Maintenant, on est prêt à présenter le premier résultat principal. On a :

Théorème 3.2. *[25] On suppose que l'hypothèse* (H_1) *et la l'inégalité*

$$\max(M_1, M_2, ..., M_n) \; < \; 1 \tag{3.8}$$

sont satisfaites.

Alors le système (3.1) *admet une solution unique* $(u_1, u_2, ..., u_n)(t)$, $t \in [0.1]$.

Démonstration. On définit l'opérateur $\Upsilon : B \to B$ par

$$\Upsilon(u_1, u_2, ..., u_n)(t) :=$$
$$(\Upsilon_1(u_1, u_2, ..., u_n)(t), \Upsilon_2(u_1, u_2, ..., u_n)(t), ..., \Upsilon_n(u_1, u_2, ..., u_n)(t)), \; t \in J,$$

tel que :

$$\Upsilon_1(u_1, u_2, ..., u_n)(t) \; = \; \sum_{i=1}^{m} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_1 - 1}}{\Gamma(\alpha_1)} f_i^1(s, u_1(s), u_2(s), ..., u_n(s))\, ds, \tag{3.9}$$

et pour tout $k = 2, ...n$,

$$\begin{aligned}\Upsilon_k(u_1,u_2,...,u_n)(t) &= \sum_{i=1}^{m}\int\limits_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_k-1}}{\Gamma(\alpha_k)} f_i^k(s,u_1(s),u_2(s),...,u_n(s))\,ds \\ &\quad -\frac{t^{k-1}}{(k-1)!\Gamma(\alpha_k-(k-1))} \\ &\quad \times \sum_{i=1}^{m}\int_0^1 (1-s)^{\alpha_k-k} f_i^k(s,u_1(s),u_2(s),...,u_n(s))\,ds.\end{aligned} \tag{3.10}$$

On va montrer que Υ est un opérateur contractif

Soient $(u_1,u_2,...,u_n),(v_1,v_2,...,v_n)\in B$. Alors, pour $k=1$, et $t\in J$, on a :

$$|\Upsilon_1(u_1,u_2,...,u_n)(t)-\Upsilon_1(v_1,v_2,...,v_n)(t)|$$

$$= \left| \begin{array}{l} \sum\limits_{i=1}^{m}\int\limits_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_1-1}}{\Gamma(\alpha_1)} f_i^1(s,u_1(s),u_2(s),...,u_n(s))\,ds \\ \\ -\sum\limits_{i=1}^{m}\int\limits_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_1-1}}{\Gamma(\alpha_1)} f_i^1(s,v_1(s),v_2(s),...,v_n(s))\,ds \end{array}\right|$$

En calculant l'intégrale du second membre, on obtient :

$$\|\Upsilon_1(u_1,u_2,...,u_n)-\Upsilon_1(v_1,v_2,...,v_n)\|_\infty$$

$$\leq \frac{t^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1+1)}\sup_{s\in J}\sum_{i=1}^{m}\left| \begin{array}{l} f_i^k(s,u_1(s),u_2(s),...,u_n(s)) \\ -f_i^k(s,v_1(s),v_2(s),...,v_n(s)) \end{array}\right|.$$

D'autre part, l'hypothèse (H_1) donne :

$$\|\Upsilon_1(u_1,u_2,...,u_n)-\Upsilon_1(v_1,v_2,...,v_n)\|_\infty$$

$$\begin{aligned}&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha_1+1)}\sum_{i=1}^{m}\left(\left(\mu_i^1\right)_1\sup_{s\in J}|u_1-v_1|+\left(\mu_i^1\right)_2\sup_{s\in J}|u_2-v_2|+...+\left(\mu_i^1\right)_n\sup_{s\in J}|u_n-v_n|\right) \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha_1+1)}\sum_{i=1}^{m}\left(\left(\mu_i^1\right)_1+\left(\mu_i^1\right)_2+...+\left(\mu_i^1\right)_n\right)\max\left(\|u_1-v_1\|_\infty,\|u_2-v_2\|_\infty,...,\|u_n-v_n\|_\infty\right).\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\left\|\Upsilon_1\left(u_1,u_2,...,u_n\right)-\Upsilon_1\left(v_1,v_2,...,v_n\right)\right\|_\infty \leq M_1\left\|\left(u_1-v_1,u_2-v_2,...,u_n-v_n\right)\right\|_B. \tag{3.11}$$

Maintenant pour $k=2,...,n$ et $t\in J$, on a :

$$\left|\Upsilon_k\left(u_1,u_2,...,u_n\right)(t)-\Upsilon_k\left(v_1,v_2,...,v_n\right)(t)\right|$$

$$=\left|\begin{array}{c}\left(\begin{array}{c}\sum\limits_{i=1}^m\int\limits_0^t\frac{(t-s)^{\alpha_k-1}}{\Gamma(\alpha_k)}f_i^k\left(s,u_1\left(s\right),u_2\left(s\right),...,u_n\left(s\right)\right)ds\\ \\ -\frac{t^{k-1}}{(k-1)!\Gamma(\alpha_k-(k-1))}\sum\limits_{i=1}^m\int_0^1\left(1-s\right)^{\alpha_k-k}f_i^k\left(s,u_1\left(s\right),u_2\left(s\right),...,u_n\left(s\right)\right)ds\end{array}\right)\\ \\ -\left(\begin{array}{c}\sum\limits_{i=1}^m\int\limits_0^t\frac{(t-s)^{\alpha_k-1}}{\Gamma(\alpha_k)}f_i^k\left(s,v_1\left(s\right),v_2\left(s\right),...,v_n\left(s\right)\right)ds\\ \\ -\frac{t^{k-1}}{(k-1)!\Gamma(\alpha_k-(k-1))}\sum\limits_{i=1}^m\int_0^1\left(1-s\right)^{\alpha_k-k}f_i^k\left(s,v_1\left(s\right),v_2\left(s\right),...,v_n\left(s\right)\right)ds\end{array}\right)\end{array}\right|.$$

Ce qui implique

$$\left\|\Upsilon_k\left(u_1,u_2,...,u_n\right)-\Upsilon_k\left(v_1,v_2,...,v_n\right)\right\|_\infty$$

$$\begin{aligned}\leq\ &\sup_{s\in J}\sum_{i=1}^m\left|\begin{array}{c}f_i^k\left(s,u_1\left(s\right),u_2\left(s\right),...,u_n\left(s\right)\right)\\ -f_i^k\left(s,v_1\left(s\right),v_2\left(s\right),...,v_n\left(s\right)\right)\end{array}\right|\int\limits_0^t\frac{\left(t-s\right)^{\alpha_k-1}}{\Gamma\left(\alpha_k\right)}ds\\ &+\sup_{t\in J}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!\Gamma\left(\alpha_k-(k-1)\right)}\\ &\times\sup_{s\in J}\sum_{i=1}^m\left|\begin{array}{c}f_i^k\left(s,u_1\left(s\right),u_2\left(s\right),...,u_n\left(s\right)\right)\\ -f_i^k\left(s,v_1\left(s\right),v_2\left(s\right),...,v_n\left(s\right)\right)\end{array}\right|\int_0^1\left(1-s\right)^{\alpha_k-k}ds.\end{aligned}$$

En calculant les intégrales du second membre, on obtient :

$$\left\|\Upsilon_k\left(u_1,u_2,...,u_n\right)-\Upsilon_k\left(v_1,v_2,...,v_n\right)\right\|_\infty$$

$$\leq \left(\frac{t^{\alpha_k}}{\Gamma(\alpha_k+1)} + \frac{1}{(k-1)!\Gamma(\alpha_k-(k-1)+1)}\right)$$
$$\times \sup_{s\in J} \sum_{i=1}^{m} \left| f_i^k (s, u_1(s), u_2(s), ..., u_n(s)) - f_i^k (s, v_1(s), v_2(s), ..., v_n(s)) \right|.$$

En utilisant l'hypothèse (H_1), on aboutit à

$$\|\Upsilon_k (u_1, u_2, ..., u_n) - \Upsilon_k (v_1, v_2, ..., v_n)\|_\infty$$

$$\leq \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_k+1)} + \frac{1}{(k-1)!\Gamma(\alpha_k+2-k)}\right) \sum_{i=1}^{m} \left(\left(\mu_i^k\right)_1 + \left(\mu_i^k\right)_2 + ... + \left(\mu_i^k\right)_n\right)$$
$$\times \max \left(\|u_1 - v_1\|_\infty, \|u_2 - v_2\|_\infty, ..., \|u_n - v_n\|_\infty\right). \tag{3.12}$$

Donc, pour tout $k = 2, ..., n$, on a

$$\|\Upsilon_k (u_1, u_2, ..., u_n) - \Upsilon_k (v_1, v_2, ..., v_n)\|_\infty \leq M_k \|(u_1 - v_1, u_2 - v_2, ..., u_n - v_n)\|_B. \tag{3.13}$$

Ensuite, les inégalités (3.11) et (3.12) donnent :

$$\|\Upsilon (u_1, u_2, ..., u_n) - \Upsilon (v_1, v_2, ..., v_n)\|_B$$
$$\leq \max (M_1, M_2, ..., M_n) \|(u_1 - v_1, u_2 - v_2, ..., u_n - v_n)\|_B. \tag{3.14}$$

La condition (3.8) montre que Υ est un opérateur contractif, et partant le principe de contraction de Banach assure que Υ a un point fixe unique qui est solution unique du système (3.1).

3.3.2 Conditions Suffisantes Pour l'Existence d'une Solution au Moins

Théorème 3.3. *[25] Si les hypothèses (H_2) et (H_3) sont satisfaites, alors le système* (3.1) *admet au moins une solution* $(u_1, u_2, ..., u_n)(t)$, $t \in [0, 1]$.

Démonstration. On va démontrer l'existence d'une solution au moins en deux étapes :

Étape 1 : On montre que l'opérateur Υ est complètement continu :

La continuité des fonctions f_i^k donnée dans l'hypothèse (H_2) implique que l'opérateur Υ est continu.

Pour $\rho > 0$, on définit l'ensemble $\Omega_\rho := \{(u_1, u_2, ..., u_n) \in B : \ \|(u_1, u_2, ..., u_n)\|_B \leq \rho\}$, et on pose $\Delta := \{\Upsilon(u_1, u_2, ..., u_n) : \ (u_1, u_2, ..., u_n) \in \Omega_\rho\}$. Soient $(u_1, u_2, ..., u_n) \in \Omega_\rho$ et $t \in J$.

Alors, compte tenu de l'hypothèse (H_3), on a :

$$\begin{aligned} & \|\Upsilon_1(u_1, u_2, ..., u_n)\|_\infty \\ = & \sup_{s\in J}\left|\sum_{i=1}^{m}\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_1-1}}{\Gamma(\alpha_1)} f_i^1(s, u_1(s), u_2(s), ..., u_n(s))\,ds\right| \\ \leq & \frac{t^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1+1)} \times \sup_{s\in J}\sum_{i=1}^{m}\left|f_i^1(s, u_1(s), u_2(s), ..., u_n(s))\right| \\ \leq & \frac{1}{\Gamma(\alpha_1+1)}\sum_{i=1}^{m} K_i^1 \\ \leq & \frac{1}{2}\digamma_1 mK. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Et pour $k = 2, 3, ...n$, on a

$$\|\Upsilon_k(u_1, u_2, ..., u_n)\|_\infty$$

$$= \sup_{s\in J}\left|\begin{array}{c} \sum\limits_{i=1}^{m}\int\limits_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_k-1}}{\Gamma(\alpha_k)} f_i^k(s, u_1(s), u_2(s), ..., u_n(s))\,ds \\ -\frac{t^{k-1}}{(k-1)!\Gamma(\alpha_k-(k-1))} \\ \times \sum\limits_{i=1}^{m}\int_0^1 (1-s)^{\alpha_k-k} f_i^k(s, u_1(s), u_2(s), ..., u_n(s))\,ds \end{array}\right|.$$

En calculant les intégrales du second membre, il résulte que :

$$\|\Upsilon_k(u_1, u_2, ..., u_n)\|_\infty$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{t^{\alpha_k}}{\Gamma\left(\alpha_k+1\right)} \times \sup_{s\in J} \sum_{i=1}^{m} \left| f_i^k\left(s, u_1(s), u_2(s), ..., u_n(s)\right)\right| \\
&\quad + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!\Gamma\left(\alpha_k+1-(k-1)\right)} \sup_{s\in J} \sum_{i=1}^{m} \left| f_i^k\left(s, u_1(s), u_2(s), ..., u_n(s)\right)\right|.
\end{aligned}
$$

Compte tenu de l'hypothèse (H_3) , on aura :

$$
\begin{aligned}
&\left\|\Upsilon_k\left(u_1, u_2, ..., u_n\right)\right\|_\infty \\
&\leq \left(\frac{1}{\Gamma\left(\alpha_k+1\right)} + \frac{1}{(k-1)!\Gamma\left(\alpha_k+2-k\right)}\right) \sum_{i=1}^{m} K_i^k \\
&\leq \digamma_k m K.
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

Par conséquent,

$$
\left\|\Upsilon\left(u_1, u_2, ..., u_n\right)\right\|_B \leq mK \max\left(\frac{1}{2}\digamma_1, \digamma_2, ..., \digamma_n\right) < \infty.
\tag{3.17}
$$

De l'inégalité (3.17) , on déduit que Δ est uniformément borné.

Soient $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$, et $(u_1, u_2, ..., u_n) \in \Omega_\rho$. Alors,

$$
\left|\Upsilon_1\left(u_1, u_2, ..., u_n\right)(t_2) - \Upsilon_1\left(u_1, u_2, ..., u_n\right)(t_1)\right|
$$

$$
= \left|\begin{array}{c}
\sum\limits_{i=1}^{m} \int\limits_{0}^{t_2} \frac{(t_2-s)^{\alpha_1-1}}{\Gamma(\alpha_1)} f_i^1\left(s, u_1\left(s\right), u_2\left(s\right), ..., u_n\left(s\right)\right) ds \\
\\
-\sum\limits_{i=1}^{m} \int\limits_{0}^{t_1} \frac{(t_1-s)^{\alpha_1-1}}{\Gamma(\alpha_1)} f_i^1\left(s, u_1\left(s\right), u_2\left(s\right), ..., u_n\left(s\right)\right) ds
\end{array}\right|
$$

$$
= \left|\begin{array}{c}
\left(\begin{array}{c}
\sum\limits_{i=1}^{m} \int\limits_{0}^{t_1} \frac{(t_2-s)^{\alpha_1-1}}{\Gamma(\alpha_1)} f_i^1\left(s, u_1\left(s\right), u_2\left(s\right), ..., u_n\left(s\right)\right) ds \\
\\
+\sum\limits_{i=1}^{m} \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{(t_2-s)^{\alpha_1-1}}{\Gamma(\alpha_1)} f_i^1\left(s, u_1\left(s\right), u_2\left(s\right), ..., u_n\left(s\right)\right) ds
\end{array}\right) \\
\\
-\sum\limits_{i=1}^{m} \int\limits_{0}^{t_1} \frac{(t_1-s)^{\alpha_1-1}}{\Gamma(\alpha_1)} f_i^1\left(s, u_1\left(s\right), u_2\left(s\right), ..., u_n\left(s\right)\right) ds
\end{array}\right|,
$$

ce qui peut s'écrire

$$|\Upsilon_1(u_1,u_2,...,u_n)(t_2)-\Upsilon_1(u_1,u_2,...,u_n)(t_1)|$$

$$\leq \left| \begin{array}{c} \sum\limits_{i=1}^{m}\int\limits_0^{t_1}\frac{(t_2-s)^{\alpha_1-1}}{\Gamma(\alpha_1)}f_i^1(s,u_1(s),u_2(s),...,u_n(s))\,ds \\ -\sum\limits_{i=1}^{m}\int\limits_0^{t_1}\frac{(t_1-s)^{\alpha_1-1}}{\Gamma(\alpha_1)}f_i^1(s,u_1(s),u_2(s),...,u_n(s))\,ds \end{array} \right|$$

$$+\left|\sum_{i=1}^{m}\int_{t_1}^{t_2}\frac{(t_2-s)^{\alpha_1-1}}{\Gamma(\alpha_1)}f_i^1(s,u_1(s),u_2(s),...,u_n(s))\,ds\right|.$$

Le calcul des intégrales du second membre donne :

$$|\Upsilon_1(u_1,u_2,...,u_n)(t_2)-\Upsilon_1(u_1,u_2,...,u_n)(t_1)|$$

$$\leq \frac{(t_2^{\alpha_1}-t_1^{\alpha_1})+(t_2-t_1)^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1+1)}\times\sup_{s\in J}\sum_{i=1}^{m}\left|f_i^1(s,u_1(s),u_2(s),...,u_n(s))\right|$$

$$+\frac{(t_2-t_1)^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1+1)}\times\sup_{s\in J}\sum_{i=1}^{m}\left|f_i^1(s,u_1(s),u_2(s),...,u_n(s))\right|.$$

À partir de l'hypothèse (H_3), on obtient :

$$\begin{aligned}\|\Upsilon_1(u_1,...,u_n)(t_2)-\Upsilon_1(u_1,...,u_n)(t_1)\|_\infty &\leq \frac{(t_2^{\alpha_1}-t_1^{\alpha_1})+2(t_2-t_1)^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1+1)}\sum_{i=1}^{m}K_i^k \\ &\leq \frac{(t_2^{\alpha_1}-t_1^{\alpha_1})+2(t_2-t_1)^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1+1)}mK.\end{aligned} \tag{3.18}$$

D'autre part, on a :

$$|\Upsilon_k(u_1,u_2,...,u_n)(t_2)-\Upsilon_k(u_1,u_2,...,u_n)(t_1)|$$

$$= \left| \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} \sum\limits_{i=1}^{m} \int\limits_{0}^{t_1} \frac{(t_2-s)^{\alpha_k-1}}{\Gamma(\alpha_k)} f_i^k\left(s, u_1\left(s\right), u_2\left(s\right), ..., u_n\left(s\right)\right) ds \\ - \sum\limits_{i=1}^{m} \int\limits_{0}^{t_1} \frac{(t_1-s)^{\alpha_k-1}}{\Gamma(\alpha_k)} f_i^k\left(s, u_1\left(s\right), u_2\left(s\right), ..., u_n\left(s\right)\right) ds \end{array} \right) \\ + \sum\limits_{i=1}^{m} \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{(t_2-s)^{\alpha_k-1}}{\Gamma(\alpha_k)} f_i^k\left(s, u_1\left(s\right), u_2\left(s\right), ..., u_n\left(s\right)\right) ds \\ - \frac{\left(t_2^{k-1} - t_1^{k-1}\right)}{(k-1)!\Gamma(\alpha_k-(k-1))} \sum\limits_{i=1}^{m} \int_0^1 (1-s)^{\alpha_k - k} f_i^k\left(s, u_1\left(s\right), u_2\left(s\right), ..., u_n\left(s\right)\right) ds \end{array} \right|,$$

ce qui implique que

$$\left|\Upsilon_k\left(u_1, u_2, ..., u_n\right)\left(t_2\right) - \Upsilon_k\left(u_1, u_2, ..., u_n\right)\left(t_1\right)\right|$$

$$\leq \left| \begin{array}{c} \sum\limits_{i=1}^{m} \int\limits_{0}^{t_1} \frac{(t_2-s)^{\alpha_k-1}}{\Gamma(\alpha_k)} f_i^k\left(s, u_1\left(s\right), u_2\left(s\right), ..., u_n\left(s\right)\right) ds \\ - \sum\limits_{i=1}^{m} \int\limits_{0}^{t_1} \frac{(t_1-s)^{\alpha_k-1}}{\Gamma(\alpha_k)} f_i^k\left(s, u_1\left(s\right), u_2\left(s\right), ..., u_n\left(s\right)\right) ds \end{array} \right|$$

$$+ \left| \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{\left(t_2 - s\right)^{\alpha_k - 1}}{\Gamma\left(\alpha_k\right)} f_i^k\left(s, u_1\left(s\right), u_2\left(s\right), ..., u_n\left(s\right)\right) ds \right|$$

$$+ \left| \frac{\left(t_2^{k-1} - t_1^{k-1}\right)}{(k-1)!\Gamma\left(\alpha_k - (k-1)\right)} \sum_{i=1}^{m} \int_0^1 (1-s)^{\alpha_k - k} f_i^k\left(s, u_1\left(s\right), u_2\left(s\right), ..., u_n\left(s\right)\right) ds \right|.$$

En calculant la valeur des intégrales du second membre, on obtient :

$$\begin{aligned} &\left|\Upsilon_k\left(u_1, u_2, ..., u_n\right)\left(t_2\right) - \Upsilon_k\left(u_1, u_2, ..., u_n\right)\left(t_1\right)\right| \\ \leq &\left(\frac{\left(t_2^{\alpha_k} - t_1^{\alpha_k}\right) + 2\left(t_2 - t_1\right)^{\alpha_k}}{\Gamma\left(\alpha_k + 1\right)} + \frac{\left(t_2^{k-1} - t_1^{k-1}\right)}{(k-1)!\Gamma\left(\alpha_k + 2 - k\right)} \right) \\ &\times \sup_{s \in J} \sum_{i=1}^{m} \left| f_i^k\left(s, u_1(s), u_2(s), ..., u_n(s)\right) \right|, \end{aligned} \tag{3.19}$$

avec $k = 2, 3, ..., n.$

En se servant de l'hypothèse (H_3), on aura

$$\left\|\Upsilon_k(u_1, u_2, ..., u_n)(t_2) - \Upsilon_k(u_1, u_2, ..., u_n)(t_1)\right\|_\infty$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\frac{\left(t_2^{\alpha_k} - t_1^{\alpha_k}\right) + 2(t_2 - t_1)^{\alpha_k}}{\Gamma(\alpha_k + 1)} + \frac{\left(t_2^{k-1} - t_1^{k-1}\right)}{(k-1)!\Gamma(\alpha_k + 2 - k)}\right) \sum_{i=1}^{m} K_i^k \\
&\leq \left(\frac{\left(t_2^{\alpha_k} - t_1^{\alpha_k}\right) + 2(t_2 - t_1)^{\alpha_k}}{\Gamma(\alpha_k + 1)} + \frac{\left(t_2^{k-1} - t_1^{k-1}\right)}{(k-1)!\Gamma(\alpha_k + 2 - k)}\right) mK.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Les seconds membres des inégalités (3.18) et (3.20) sont indépendants de $(u_1, u_2, ..., u_n)$ et tendent vers zéro quand $t_1 \to t_2$, d'où l'équicontinuité de Δ.

D'après le Théorème de Υ, on conclut que Δ est un ensemble relativement compact de B. Donc, Υ est un opérateur complètement continu.

Étape 2 : On considère l'ensemble suivant :

$$\Lambda := \{(u_1, u_2, ..., u_n) \in B, \ (u_1, u_2, ..., u_n) = \lambda\Upsilon(u_1, u_2, ..., u_n), \ 0 < \lambda < 1 \},$$

et on montre qu'il est borné.

Pour toute $(u_1, u_2, ..., u_n) \in \Lambda$ et tout $t \in J$, on a :

$$(u_1, u_2, ..., u_n)(t) = \lambda\Upsilon(u_1, u_2, ..., u_n)(t).$$

En effet,

$$u_k(t) = \lambda\Upsilon_k(u_1, u_2, ..., u_n)(t), \ k = 1, 2, ..., n. \tag{3.21}$$

Correspondant aux (3.15) et (3.16), on obtient :

$$\|u_1\|_\infty \leq \frac{\lambda}{2}\digamma_1 mK, \tag{3.22}$$

$$\|u_k\|_\infty \leq \lambda \digamma_k m K,\ k = 2, 3, ..., n. \tag{3.23}$$

Les inégalités (3.22) et (3.23) donnent :

$$\begin{aligned} \|(u_1, u_2, ..., u_n)\|_B &\leq \lambda m K \max\left(\frac{1}{2}\digamma_1, \digamma_2, \digamma_3, ..., \digamma_n\right), \\ &< \infty, \end{aligned} \tag{3.24}$$

ce qui implique que Λ est borné.

Donc, par le théorème du point fixe de Schaefer, on déduit que l'opérateur Υ admet au moins un point fixe $(u_1, u_2, ..., u_n)(t)$, $t \in [0, 1]$, qui est la solution du système (3.1). Théorème 3.3 est ainsi prouvé.

3.4 Applications

Dans cette section, on présente deux exemples pour illustrer les résultats obtenus dans la section précédente.

3.4.1 Exemple1

Afin de valider le premier résultat, on considère le problème fractionnaire suivant [25] :

$$\begin{cases} D_0^{\frac{1}{4}} u_1(t) = \frac{|u_1(t)+u_2(t)+u_3(t)|}{8\pi^2(1+|u_1(t)+u_2(t)+u_3(t)|)} \\ +\frac{1}{32\pi^2 e}\left(\frac{\sin(u_1(t))+\sin(u_2(t))}{2e^{t+1}} + \sin(u_3(t))\right),\ t \in [0, 1], \\ D_0^{\frac{5}{4}} u_2(t) = \frac{|u_1(t)+u_2(t)+u_3(t)|}{8\pi^3 e^2(1+|u_1(t)+u_2(t)+u_3(t)|)} \\ +\frac{t^2}{16\pi^2 e^{t^2+1}}\left(\frac{\sin(u_1(t))+\cos(u_2(t))+\cos(u_3(t))}{1+|\sin(u_1(t))+\cos(u_2(t))+\cos(u_3(t))|}\right),\ t \in [0, 1], \\ D_0^{\frac{9}{4}} u_3(t) = \frac{\cos(u_1(t))+\cos(u_2(t))+\cos(u_3(t))}{4\pi e^2} \\ +\frac{1}{16\pi(t^2+4)}\left(\sin(u_1(t)) + \frac{|u_2(t)+u_3(t)|}{3\pi^3(1+|u_2(t)+u_3(t)|)}\right),\ t \in [0, 1], \\ u_1(0) = 0,\ u_2(0) = u_2'(1) = 0,\ u_3(0) = u_3'(0) = u_3''(1) = 0. \end{cases} \tag{3.25}$$

On a : $n=3$, $m=2$, $\alpha_1=\frac{1}{4}$, $\alpha_2=\frac{5}{4}$, $\alpha_3=\frac{9}{4}$ et $J=[0,1]$.

Alors, pour tout $t\in[0,1]$ et toutes (u_1,u_2,u_3), $(v_1,v_2,v_3)\in\mathbb{R}^3$, on obtient :

$$\left|f_1^1(t,u_1,u_2,u_3)-f_1^1(t,v_1,v_2,v_3)\right|\leq$$
$$\frac{1}{8\pi^2}|u_1-v_1|+\frac{1}{8\pi^2}|u_2-v_2|+\frac{1}{8\pi^2}|u_3-v_3|,$$

$$\left|f_2^1(t,u_1,u_2,u_3)-f_2^1(t,v_1,v_2,v_3)\right|\leq$$
$$\frac{1}{64\pi^2e^2}|u_1-v_1|+\frac{1}{64\pi^2e^2}|u_2-v_2|+\frac{1}{32\pi^2e}|u_3-v_3|,$$

$$\left|f_1^2(t,u_1,u_2,u_3)-f_1^2(t,v_1,v_2,v_3)\right|\leq$$
$$\frac{1}{8\pi^3e^2}|u_1-v_1|+\frac{1}{8\pi^3e^2}|u_2-v_2|+\frac{1}{8\pi^3e^2}|u_3-v_3|,$$

$$\left|f_2^2(t,u_1,u_2,u_3)-f_2^2(t,v_1,v_2,v_3)\right|\leq$$
$$\frac{1}{16\pi^2e}|u_1-v_1|+\frac{1}{16\pi^2e}|u_2-v_2|+\frac{1}{16\pi^2e}|u_3-v_3|,$$

$$\left|f_1^3(t,u_1,u_2,u_3)-f_1^3(t,v_1,v_2,v_3)\right|\leq$$
$$\frac{1}{4\pi e^2}|u_1-v_1|+\frac{1}{4\pi e^2}|u_2-v_2|+\frac{1}{4\pi e^2}|u_3-v_3|,$$

$$\left|f_2^3(t,u_1,u_2,u_3)-f_2^3(t,v_1,v_2,v_3)\right|\leq$$
$$\frac{1}{16\pi}|u_1-v_1|+\frac{1}{48\pi^4}|u_2-v_2|+\frac{1}{48\pi^4}|u_3-v_3|.$$

Donc, on peut prendre :

$$\left(\mu_1^1\right)_1=\left(\mu_1^1\right)_2=\left(\mu_1^1\right)_3=\frac{1}{8\pi^2},\ \left(\mu_2^1\right)_1=\left(\mu_2^1\right)_2=\frac{1}{64\pi^2e^2},\ \left(\mu_2^1\right)_3=\frac{1}{32\pi^2e},$$

$$\left(\mu_1^2\right)_1=\left(\mu_1^2\right)_2=\left(\mu_1^2\right)_3=\frac{1}{8\pi^3e^2},\ \left(\mu_2^2\right)_1=\left(\mu_2^2\right)_2=\left(\mu_2^2\right)_3=\frac{1}{16\pi^2e},$$

$$\left(\mu_1^3\right)_1=\left(\mu_1^3\right)_2=\left(\mu_1^3\right)_3=\frac{1}{4\pi e^2},\ \left(\mu_2^3\right)_1=\frac{1}{16\pi},\ \left(\mu_2^3\right)_2=\left(\mu_2^3\right)_3=\frac{1}{48\pi^4}.$$

Par conséquent,

$$\Sigma_1=0.0396,\ \Sigma_2=0.0086,\ \Sigma_3=0.0526.$$

$$\digamma_1 = 2.2065,\ \ \digamma_2 = 1.9859,\ \ \digamma_3 = 0.9439.$$

$$\frac{1}{2}\Sigma_1\digamma_1 = 0.0437,\ \ \Sigma_2\digamma_2 = 0.0171,\ \ \Sigma_3\digamma_3 = 0.0496.$$

Donc, la condition (3.8) peut être donnée par :

$$\max\left(\ M_1,\ \ M_2,\ \ M_3\right) < 1$$

est satisfaite. Alors, le Théorème 3.2 l'on permet d'affirmer que le système (3.25) a une solution unique $(u_1, u_2, ..., u_n)(t)$, $t \in [0, 1]$.

3.4.2 Exemple 2

Pour illustrer le second résultat, on considère le problème de la forme suivante [25] :

$$\begin{cases} D_0^{\frac{1}{2}} u_1(t) = \frac{e^t}{\pi^2(t+1)+\sin(u_1(t))+\sin(u_2(t))+\sin(u_3(t))} + \frac{\cos(u_1(t))}{5e^t+\cos(u_2(t))\cos(u_3(t))}, \\ t \in [0,1], \\ D_0^{\frac{3}{2}} u_2(t) = \frac{(t+1)\sin(u_1(t)+u_2(t)+u_3(t))}{2\pi+\cos(u_1(t)+u_2(t)+u_3(t))} + \frac{3t^2\cos(u_2(t)+u_3(t))}{e^{t^2+1}-\cos(u_1(t))}, \\ t \in [0,1], \\ D_0^{\frac{5}{2}} u_3(t) = \frac{\sin(u_3(t))}{2\pi+e^t\cos(u_1(t)+u_2(t))} + \cos(u_1(t))\cos(u_2(t)+u_3(t)), \\ t \in [0,1], \\ u_1(0) = 0,\ \ u_2(0) = u_2'(1) = 0,\ \ u_3(0) = u_3'(0) = u_3''(1) = 0. \end{cases} \tag{3.26}$$

Pour cet exemple, on a : $n = 3$, $m = 2$, $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, $\alpha_2 = \frac{3}{2}$, $\alpha_3 = \frac{5}{2}$ et $J = [0, 1]$.

Et pour tout $t \in J$, les fonctions $\left(f_i^k\right)_{i=1,2,\ k=1,2,3,}$ sont continues, d'où l'hypothèse (H_2) .

D'autre part, on doit vérifier si l'hypothèse (H_3) est bien satisfaite. Alors, pour tout $t \in J$ et toute $(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$\begin{aligned} \left|f_1^1(t, u_1, u_2, u_3)\right| &= \left|\frac{e^t}{\pi^2(t+1) + \sin u_1 + \sin u_2 + \sin u_3}\right| \\ &\leq \frac{e}{\pi^2 - 3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left| f_2^1(t, u_1, u_2, u_3) \right| &= \left| \frac{\cos u_1}{5e^t + \cos u_2 \cos u_3} \right| \\
&\leq \frac{1}{4},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left| f_1^2(t, u_1, u_2, u_3) \right| &= \left| \frac{(t+1)\sin(u_1 + u_2 + u_3)}{2\pi + \cos(u_1 + u_2 + u_3)} \right| \\
&\leq \frac{2}{2\pi - 1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left| f_2^2(t, u_1, u_2, u_3) \right| &= \left| \frac{3t^2 \cos(u_2 + u_3)}{e^{t^2+1} - \cos u_1} \right| \\
&\leq \frac{3}{e - 1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left| f_1^3(t, u_1, u_2, u_3) \right| &= \left| \frac{\sin u_3}{2\pi + e^t \cos(u_1 + u_2)} \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi - e},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left| f_2^3(t, u_1, u_2, u_3) \right| &= \left| \cos u_1 \cos(u_2 + u_3) \right| \\
&\leq 1.
\end{aligned}$$

Par conséquent, toutes les hypothèses du Théorème 3.3 sont satisfaites. Donc, le problème (3.26) admet au moins une solution $(u_1, u_2, ..., u_n)(t)$, $t \in [0, 1]$.

Chapitre 4

Stabilité des Équations Différentielles Fractionnaires

4.1 Introduction

Au cours des dernières années, les propriétés de stabilité de toutes sortes d'équations ont attiré l'attention de beaucoup de mathématiciens. En particulier, la stabilité au sens d'Ulam-Hyers a été abordée par certain nombre de mathématiciens et l'étude de ce domaine a été développée pour devenir l'un des sujets centraux dans le domaine de l'analyse mathématique. Pour plus d'informations, voir [44, 50]. Certains résultats concernant cette stabilité fractionnaire ont été obtenus dans [21, 26, 88, 29, 46, 47, 48, 91, 93].

En outre, on note qu'il existe des articles importants, traitant les problèmes singuliers d'ordre fractionnaire, pour plus de détails, voir [3, 4, 60, 62, 96].

Dans ce chapitre, on introduit une nouvelle classe d'équations fractionnaires non linéaires singulières [87]. On est intéressé par l'étude de la singularité de telles équations.

4.2 Problèmes Proches du Cas Classique

Dans le cas d'équation d'ordre entier, la stabilité est un domaine de recherche important et bien connu, et elle est généralement étudiée pour des équations différentielles du premier ordre. Dans cette partie, on présente quelques problèmes fractionnaires.

Un résultat récent [91] paru en 2011 sur la stabilité au sens d'Ulam des équations fractionnaires non linéaires a été proposé par J. Wang :

$$\begin{cases} {}^{C}D^{\alpha}u(t) = f(t, u(t)), \ t \in [a, +\infty), \\ \\ u(a) = v(a), \end{cases}$$

où $0 < \alpha < 1$, $f \in C([a, +\infty) \times B, B)$, B est un espace de Banach et ${}^{C}D^{\alpha}$ désigne la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre α.

Récemment en 2013, dans [48] R. Ibrahim a discuté la stabilité au sens d'Ulam aux différents types pour l'équation différentielle fractionnaire suivante :

$$D_z^{\alpha} u(z) = f(z, u(z)), \ z \in U,$$

où $0 < \alpha < 1$, $u : U \to B$ est une fonction analytique pour tout z dans le disque unité $U := \{z : |z| < 1\}$ et $f : U \times B \to B$ est une fonction analytique en $z \in U$. Ici B est l'espace de toutes les fonctions analytiques et bornées sur le disque unité.

Tandis que dans [47], R. Ibrahim a imposé la stabilité uniquement au sens d'Ulam-Hyers pour l'équation de Lane-Emden suivante :

$$\begin{cases} D^{\beta}\left(D^{\alpha} + \frac{a}{t}\right) u(t) + f(t, u(t)) = g(t), \\ \\ u(0) = \mu, \ u(1) = \nu, \\ \\ 0 < \alpha, \beta \leq 1, \ 0 \leq t \leq 1, \ a \geq 0, \end{cases}$$

où μ et ν sont des constantes, f est une fionction continue à valeurs réelles, $g \in C([0,1])$ et D^{γ} dénote la dérivée fractionnaire au sens de Caputo pour $\gamma > 0$.

Très récemment, en 2015, dans [68], P. Muniyappan et S. Rajanles ont prouvé la stabilité au sens d'Ulam-Hyers et au sens d'Ulam-Hyers-Rassias pour l'équation différentielle fractionnaire suivante :

$$\begin{cases} D^{\alpha} y(t) = F(t, y(t)), \\ \\ ay(0) + by(T) = c, \\ \\ 0 < \alpha < 1, \ t \in [0, T], \end{cases}$$

où $F \in C([0,T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, et D^{α} dénote la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre $\alpha > 0$.

4.3 Extension aux Cas d'Ordre Fractionnaire Supérieur

Dans cette partie, on va s'intéresser à une nouvelle classe d'équations fractionnaires singulières d'ordre supérieur [87].

4.3.1 Nouvelle Classe de Problèmes Fractionnaires

Soit donc l'équation différentielle fractionnaire donnée par :

$$\begin{cases} D_0^{\alpha_n} u(t) + f\left(t, u(t), D_0^{\alpha_1} u(t), D_0^{\alpha_2} u(t), ..., D_0^{\alpha_{n-1}} u(t)\right) = 0, \\ 0 < t \leq 1, \\ k-1 < \alpha_k < k, \ k = 1, 2, ..., n, \\ u^{(j)}(0) = \mu_j, \ j = 0, 1, ..., n-2, \ D_0^{\delta} u(1) = \mu_{n-1}, \ n-2 < \delta < n-1, \end{cases} \tag{4.1}$$

avec $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$. La fonction $f :]0,1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continue, singulière à $t = 0$, $\lim_{t \to 0^+} f(t) = \infty$. $D_0^{\alpha_k}$ désigne la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre α_k.

4.3.2 Lemme Auxiliaire

Lemme 4.1. *[53] Pour $\alpha, \beta > 0$, et $n-1 < \alpha < n$, on a les relations suivantes :*

$$D_0^{\alpha} t^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} t^{\beta-\alpha-1}, \ \beta > n,$$

et

$$D_0^{\alpha} t^k = 0, k = 0, 1, ..., n-1.$$

4.3.3 Représentation Intégrale

Dans le but d'établir la solution intégrante de (4.1), on démontre le lemme suivant :

Lemme 4.2. *[87] Pour $n-1 < \alpha_n < n$, $n \in N^* - \{1\}$ et $Q \in C([0,1], \mathbb{R})$, la solution du problème suivant :*

$$\begin{cases} D_0^{\alpha_n} u(t) + Q(t) = 0, \ 0 < t < 1, \\ u^{(j)}(0) = \mu_j, \ j = 0, 1, ..., n-2, \\ D_0^{\delta} u(1) = \mu_{n-1}, \ n-2 < \delta < n-1, \end{cases} \tag{4.2}$$

est donnée par :

$$u(t) = -\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_n-1}}{\Gamma(\alpha_n)} Q(s)\,ds + \sum_{j=0}^{n-2} \frac{\mu_j}{j!} t^j$$
$$+\frac{\Gamma(n-\delta)}{(n-1)!} \left(\mu_{n-1} + \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha_n-\delta-1}}{\Gamma(\alpha_n-\delta)} Q(s)\,ds \right) t^{n-1}. \tag{4.3}$$

Démonstration. En utilisant le Lemme 2.2, on a :

$$u(t) = -\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_n-1}}{\Gamma(\alpha_n)} Q(s)\,ds - \sum_{j=0}^{n-1} c_j t^j, \; c_j \in \mathbb{R}. \tag{4.4}$$

En appliquant les conditions initiales (4.2), on observe que :

$$\begin{cases} u^{(j)}(0) = -j! c_j = \mu_j, \; j = 0, 1, ..., n-2, \\ D_0^{\delta} u(1) = -\int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha_n-\delta-1}}{\Gamma(\alpha_n-\delta)} Q(s)\,ds - \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-\delta)} c_{n-1} = \mu_{n-1}. \end{cases} \tag{4.5}$$

On obtient donc,

$$\begin{cases} c_j = -\frac{\mu_j}{j!}, \; j = 0, 1, ..., n-2, \\ c_{n-1} = -\frac{\Gamma(n-\delta)}{\Gamma(n)} \left(\mu_{n-1} + \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha_n-\delta-1}}{\Gamma(\alpha_n-\delta)} Q(s)\,ds \right). \end{cases} \tag{4.6}$$

En substituant (4.6) dans (4.4), on obtient (4.3). Ceci termine la preuve du Lemme 4.2.

Maintenant, on introduit l'espace de Banach suivant :

$$B := \left\{ u : u \in C([0,1], \mathbb{R}), \; D_0^{\alpha_k} u \in C([0,1], \mathbb{R}), \; k = 1, 2, ..., n-1 \right\},$$

muni de la norme : $\|u\|_B = \max\limits_{1 \leq k \leq n-1} \left(\|u\|_\infty, \|D_0^{\alpha_k} u\|_\infty \right)$.

4.4 Sensibilité au Singularité

On va étudier la continuité de la solution du problème (4.1) ainsi que la continuité de ses dérivées en tenant compte de la singularité.

On définit l'opérateur $T : B \to B$ comme suit :

$$\begin{aligned} Tu(t) \quad : \quad &= -\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_n - 1}}{\Gamma(\alpha_n)} \varphi(s)\, ds + \sum_{j=0}^{n-2} \frac{\mu_j}{j!} t^j \\ &+ \frac{\Gamma(n-\delta)}{(n-1)!} \left(\mu_{n-1} + \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha_n - \delta - 1}}{\Gamma(\alpha_n - \delta)} \varphi(s)\, ds \right) t^{n-1}, \end{aligned} \tag{4.7}$$

pour tout $t \in [0,1]$, tel que

$$\varphi(s) = f\left(s, u(s), D_0^{\alpha_1} u(s), D_0^{\alpha_2} u(s), ..., D_0^{\alpha_{n-1}} u(s)\right). \tag{4.8}$$

4.4.1 Continuité de la Solution

Lemme 4.3. *[87] Soient $n-1 < \alpha_n < n$, $0 < \rho < 1$. On suppose que $\varphi :]0,1] \to \mathbb{R}$ est continue, et $\lim_{t \to 0^+} \varphi(t) = \infty$. On suppose aussi que $t^\rho \varphi(t)$ est continue sur $[0,1]$. Alors,*

$$\begin{aligned} u(t) \quad &= \quad -\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_n - 1}}{\Gamma(\alpha_n)} \varphi(s)\, ds + \sum_{j=0}^{n-2} \frac{\mu_j}{j!} t^j \\ &+ \frac{\Gamma(n-\delta)}{(n-1)!} \left(\mu_{n-1} + \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha_n - \delta - 1}}{\Gamma(\alpha_n - \delta)} \varphi(s)\, ds \right) t^{n-1}, \end{aligned} \tag{4.9}$$

est continue sur $[0,1]$.

Démonstration. Par la continuité de $t^\rho \varphi(t)$ et le fait que

$$\begin{aligned} u(t) \quad &= \quad -\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_n - 1}}{\Gamma(\alpha_n)} s^{-\rho} s^\rho \varphi(s)\, ds + \sum_{j=0}^{n-2} \frac{\mu_j}{j!} t^j \\ &+ \frac{\Gamma(n-\delta)}{(n-1)!} \left(\mu_{n-1} + \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha_n - \delta - 1}}{\Gamma(\alpha_n - \delta)} s^{-\rho} s^\rho \varphi(s)\, ds \right) t^{n-1}, \end{aligned} \tag{4.10}$$

on a $u(0)=\mu_0$.

Maintenant, on procède la preuve aux trois cas.

Cas 1 : Pour $t_0=0$ et $\forall t\in(0,1]$, par la continuité de $t^{\rho}\varphi(t)$, $\exists L>0$: $|t^{\rho}\varphi(t)|\leq L$, $\forall t\in[0,1]$. Alors,

$$\begin{aligned}
|u(t)-u(0)| &= \left| \begin{array}{c} -\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_n-1}}{\Gamma(\alpha_n)} s^{-\rho}s^{\rho}\varphi(s)\,ds+\sum\limits_{j=0}^{n-2}\frac{\mu_j}{j!}t^j \\ +\frac{\Gamma(n-\delta)}{(n-1)!}\left(\mu_{n-1}+\int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha_n-\delta-1}}{\Gamma(\alpha_n-\delta)}s^{-\rho}s^{\rho}\varphi(s)\,ds\right)t^{n-1}-\mu_0 \end{array}\right| \\
&\leq \frac{L}{\Gamma(\alpha_n)}\int_0^t (t-s)^{\alpha_n-1}s^{-\rho}ds+\sum_{j=1}^{n-2}\frac{|\mu_j|}{j!}t^j+\frac{\Gamma(n-\delta)\,t^{n-1}}{(n-1)!} \\
&\quad\times\left(|\mu_{n-1}|+\frac{L}{\Gamma(\alpha_n-\delta)}\right)\int_0^1(1-s)^{\alpha_n-\delta-1}s^{-\rho}ds.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Afin d'évaluer l'intégrale suivante :

$$\int_0^t (t-s)^{\alpha_n-1}s^{-\rho}ds, \tag{4.12}$$

on effectue le changement de variable :

$$s = tx. \tag{4.13}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\int_0^t (t-s)^{\alpha_n-1}s^{-\rho}ds &= \int_0^1 (t-tx)^{\alpha_n-1}(tx)^{-\rho}\,t\,dx \\
&= t^{\alpha_n-\rho}\int_0^1(1-x)^{\alpha_n-1}x^{-\rho}dx.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Ensuite, en substituant (4.14) dans (4.11) , on obtient :

$$\begin{aligned} |u(t) - u(0)| \leq\ & \frac{Lt^{\alpha_n - \rho}}{\Gamma(\alpha_n)} \int_0^1 (1-x)^{\alpha_n - 1} x^{-\rho} dx + \sum_{j=1}^{n-2} \frac{|\mu_j|}{j!} t^j + \frac{\Gamma(n-\delta)}{(n-1)!} \\ & \times \left(|\mu_{n-1}| + \frac{L}{\Gamma(\alpha_n - \delta)} \right) \int_0^1 (1-s)^{\alpha_n - \delta - 1} s^{-\rho} ds. \end{aligned} \tag{4.15}$$

L'utilisation de la définition de la fonction Beta d'Euler aboutit à

$$\begin{aligned} |u(t) - u(0)| \leq\ & \frac{LB(\alpha_n, 1-\rho) t^{\alpha_n - \rho}}{\Gamma(\alpha_n)} + \sum_{j=1}^{n-2} \frac{|\mu_j|}{j!} t^j \\ & + \frac{\Gamma(n-\delta)}{(n-1)!} \left(|\mu_{n-1}| + \frac{LB(\alpha_n - \delta, 1-\rho)}{\Gamma(\alpha_n - \delta)} \right) t^{n-1} \to 0, \\ \text{quand } t \to\ & 0. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Cas 2 : Pour $t_0 \in (0,1)$ et $\forall t \in (t_0, 1]$, on a :

$$\begin{aligned} |u(t) - u(t_0)| \leq\ & \left| -\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_n - 1}}{\Gamma(\alpha_n)} s^{-\rho} s^{\rho} \varphi(s) ds + \int_0^{t_0} \frac{(t_0 - s)^{\alpha_n - 1}}{\Gamma(\alpha_n)} s^{-\rho} s^{\rho} \varphi(s) ds \right| \\ & + \sum_{j=0}^{n-2} \frac{|\mu_j|}{j!} \left(t^j - t_0^j \right) \\ & + \frac{\Gamma(n-\delta)}{(n-1)!} \left| \mu_{n-1} + \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha_n - \delta - 1}}{\Gamma(\alpha_n - \delta)} s^{-\rho} s^{\rho} \varphi(s) ds \right| \left(t^{n-1} - t_0^{n-1} \right) \\ \leq\ & \frac{L}{\Gamma(\alpha_n)} \left| \int_0^t (t-s)^{\alpha_n - 1} s^{-\rho} ds - \int_0^{t_0} (t_0 - s)^{\alpha_n - 1} s^{-\rho} ds \right| + \sum_{j=0}^{n-2} \frac{|\mu_j|}{j!} \left(t^j - t_0^j \right) \\ & + \frac{\Gamma(n-\delta)}{(n-1)!} \left(|\mu_{n-1}| + \frac{LB(\alpha_n - \delta, 1-\rho)}{\Gamma(\alpha_n - \delta)} \right) \left(t^{n-1} - t_0^{n-1} \right). \end{aligned} \tag{4.17}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
|u(t)-u(t_0)| \quad &\le \quad \frac{LB(\alpha_n,1-\rho)}{\Gamma(\alpha_n)}\left(t^{\alpha_n-\rho}-t_0^{\alpha_n-\rho}\right)+\sum_{j=0}^{n-2}\frac{|\mu_j|}{j!}\left(t^j-t_0^j\right) \\
&+\frac{\Gamma(n-\delta)}{(n-1)!}\left(|\mu_{n-1}|+\frac{LB(\alpha_n-\delta,1-\rho)}{\Gamma(\alpha_n-\delta)}\right)\left(t^{n-1}-t_0^{n-1}\right)\to 0,
\end{aligned}$$

quand $t \quad \to \quad t_0.$

$$(4.18)$$

Cas 3 : Pour t_0 $(0,1]$ et $\forall t\in[0,t_0]$: La preuve est similaire au cas 2. Ce qui établit le résultat.

4.4.2 Continuité des Dérivées

Lemme 4.4. *[87] Soient $n-1<\alpha_n<n$, $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$, $0<\rho<1$. On suppose que $f:\,]0,1]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ est continue et $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t,...)=\infty$. On suppose aussi que $t^\rho f(t,...)$ est continue sur $[0,1]\times\mathbb{R}^n$. Alors,*

$$\begin{aligned}
D_0^{\alpha_k}Tu(t) \quad &= \quad -\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_n-\alpha_k-1}}{\Gamma(\alpha_n-\alpha_k)} f\left(s,u(s),D_0^{\alpha_1}u(s),...,D_0^{\alpha_{n-1}}u(s)\right)ds \\
&+\sum_{j=k}^{n-2}\frac{\mu_j}{\Gamma(j+1-\alpha_k)}t^{j-\alpha_k}+\frac{\Gamma(n-\delta)}{\Gamma(n-\alpha_k)} \\
&\times\left(\mu_{n-1}+\int_0^1\frac{(1-s)^{\alpha_n-\delta-1}}{\Gamma(\alpha_n-\delta)}f\left(s,u(s),D_0^{\alpha_1}u(s),...,D_0^{\alpha_{n-1}}u(s)\right)ds\right)t^{n-\alpha_k-1},
\end{aligned} \tag{4.19}$$

où $k=1,2,...,n-2,$

et

$$\begin{aligned}
D_0^{\alpha_{n-1}}Tu(t) \quad &= \quad -\int_0^t\frac{(t-s)^{\alpha_n-\alpha_{n-1}-1}}{\Gamma(\alpha_n-\alpha_{n-1})}f\left(s,u(s),D_0^{\alpha_1}u(s),...,D_0^{\alpha_{n-1}}u(s)\right)ds+\frac{\Gamma(n-\delta)}{\Gamma(n-\alpha_{n-1})} \\
&\times\left(\mu_{n-1}+\int_0^1\frac{(1-s)^{\alpha_n-\delta-1}}{\Gamma(\alpha_n-\delta)}f\left(s,u(s),D_0^{\alpha_1}u(s),...,D_0^{\alpha_{n-1}}u(s)\right)ds\right)t^{n-\alpha_{n-1}-1},
\end{aligned} \tag{4.20}$$

sont continues sur $[0,1]\times\mathbb{R}^n$.

Démonstration. Soit $u \in B$, alors $u \in C([0,1],\mathbb{R})$, $D_0^{\alpha_k}u \in C([0,1],\mathbb{R})$, $k = 1,2,...,n-1$. Par conséquent, il existe n positives constantes G_k telles que $\forall t \in [0,1]$, $|u(t)| \leq G_0$ et $|D_0^{\alpha_k}u(t)| \leq G_k$, $k = 1,2,...,n-1$. En outre, puisque $t^\rho f(t,...)$ est continue sur $[0,1]\times\mathbb{R}^n$, il existe donc $M > 0$: $M = \|t^\rho f(t,u,D_0^{\alpha_1}u,...,D_0^{\alpha_{n-1}}u)\|_\infty$, pour $-G_0 \leq u \leq G_0$ et $-G_k \leq D_0^{\alpha_k}u \leq G_k$. Alors,

$$|D_0^{\alpha_k}Tu(t)| = \left| \begin{array}{c} -\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_n-\alpha_k-1}}{\Gamma(\alpha_n-\alpha_k)} s^{-\rho}s^\rho f\left(s,u(s),D_0^{\alpha_1}u(s),...,D_0^{\alpha_{n-1}}u(s)\right)ds \\ + \sum_{j=k}^{n-2} \frac{\mu_j}{\Gamma(j+1-\alpha_k)} t^{j-\alpha_k} + \frac{\Gamma(n-\delta)}{\Gamma(n-\alpha_k)} t^{n-\alpha_k-1} \\ \times \left(\mu_{n-1} + \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha_n-\delta-1}}{\Gamma(\alpha_n-\delta)} s^{-\rho}s^\rho f\left(s,u(s),D_0^{\alpha_1}u(s),...,D_0^{\alpha_{n-1}}u(s)\right)ds\right) \end{array} \right|$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha_n-\alpha_k)} \int_0^t (t-s)^{\alpha_n-\alpha_k-1} s^{-\rho}ds + \sum_{j=k}^{n-2} \frac{|\mu_j|}{\Gamma(j+1-\alpha_k)} t^{j-\alpha_k} \\ &\quad + \frac{\Gamma(n-\delta)}{\Gamma(n-\alpha_k)} \left(|\mu_{n-1}| + \frac{M}{\Gamma(\alpha_n-\delta)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha_n-\delta-1} s^{-\rho}ds\right) t^{n-\alpha_k-1}. \end{aligned} \tag{4.21}$$

En utilisant la fonction Beta, on obtient :

$$\begin{aligned} |D^{\alpha_k}Tu(t)| &\leq \frac{MB(\alpha_n-\alpha_k,1-\rho)}{\Gamma(\alpha_n-\alpha_k)} t^{\alpha_n-\alpha_k-\rho} + \sum_{j=k}^{n-2} \frac{|\mu_j|}{\Gamma(j+1-\alpha_k)} t^{j-\alpha_k} \\ &\quad + \frac{\Gamma(n-\delta)}{\Gamma(n-\alpha_k)} \left(|\mu_{n-1}| + \frac{MB(\alpha_n-\delta,1-\rho)}{\Gamma(\alpha_n-\delta)}\right) t^{n-\alpha_k-1}, \end{aligned} \tag{4.22}$$

où $k = 1,2,...,n-2$.

De façon analogue que précédemment pour $k = n-1$, on a :

$$\begin{aligned} |D^{\alpha_{n-1}}Tu(t)| &\leq \frac{MB(\alpha_n-\alpha_{n-1},1-\rho)}{\Gamma(\alpha_n-\alpha_{n-1})} t^{\alpha_n-\alpha_{n-1}-\rho} \\ &\quad + \frac{\Gamma(n-\delta)}{\Gamma(n-\alpha_{n-1})} \left(|\mu_{n-1}| + \frac{MB(\alpha_n-\delta,1-\rho)}{\Gamma(\alpha_n-\delta)}\right) t^{n-\alpha_{n-1}-1}. \end{aligned} \tag{4.23}$$

À partir de (4.22) et (4.23), on peut voir que $t^{\alpha_n-\alpha_k-\rho}$, $t^{j-\alpha_k}$, $t^{n-\alpha_k-1}$, $t^{\alpha_n-\alpha_{n-1}-\rho}$ et $t^{n-\alpha_{n-1}-1}$ sont continues sur $[0,1]$. En utilisant la même méthode que dans le Lemme 4.3, on peut montrer que $D_0^{\alpha_k}Tu$, $k=1,2,...,n-1$, sont continues sur $[0,1]$.

4.5 Quelques Résultats Principaux

4.5.1 Propriétés de l'Opérateur Non Linéaire

Pour établir les résultats d'existence d'une solution au moins du problème (4.1), on prouve le lemme suivant :

Lemme 4.5. *[87] Soient $n-1<\alpha_n<n$, $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$, $0<\rho<1$, $f:]0,1]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ est continue, et $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t,...)=\infty$. On suppose que $t^\rho f(t,...)$ est continue sur $[0,1]\times\mathbb{R}^n$. Alors, l'opérateur $T:B\to B$ est complètement continu.*

Démonstration. On va prouver ce lemme en trois étapes :

D'abord, pour $u\in B$, on a :

$$\begin{aligned} Tu(t) &= -\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_n-1}}{\Gamma(\alpha_n)} f\left(s,u(s),D_0^{\alpha_1}u(s),D_0^{\alpha_2}u(s),...,D_0^{\alpha_{n-1}}u(s)\right)ds \\ &\quad+\sum_{j=0}^{n-2}\frac{\mu_j}{j!}t^j+\frac{\Gamma(n-\delta)}{(n-1)!}t^{n-1} \\ &\quad\times\left(\mu_{n-1}+\int_0^1\frac{(1-s)^{\alpha_n-\delta-1}}{\Gamma(\alpha_n-\delta)}f\left(s,u(s),D_0^{\alpha_1}u(s),D_0^{\alpha_2}u(s),...,D_0^{\alpha_{n-1}}u(s)\right)ds\right). \end{aligned} \tag{4.24}$$

Le Lemme 4.3 et le Lemme 4.4 impliquent que $T:B\to B$.

Étape 1 : On montrera que l'opérateur $T:B\to B$ est continu.

Soit $u_0\in B$ avec $\|u_0\|_B=a_0$, et soit $u\in B:\|u-u_0\|_B<1$, alors, $\|u\|_B<1+a_0=a$. Compte tenu de la continuité de $t^\rho f\left(t,u,D_0^{\alpha_1}u,...,D_0^{\alpha_{n-1}}u\right)$, on a $t^\rho f\left(t,u,D_0^{\alpha_1}u,...,D_0^{\alpha_{n-1}}\right)$ est uniformément continue sur $[0,1]\times[-a,a]^n$. Donc, $\forall t\in[0,1]$, $\forall\epsilon>0,\exists\upsilon>0$ $(\upsilon<1)$:

$$\left|\begin{array}{c} t^\rho f\left(t,u(t),D_0^{\alpha_1}u(s),D_0^{\alpha_2}u(s),...,D_0^{\alpha_{n-1}}u(s)\right) \\ -t^\rho f\left(t,u_0(t),D_0^{\alpha_1}u_0(t),...,D_0^{\alpha_{n-1}}u_0(t)\right)\end{array}\right| < \epsilon, \tag{4.25}$$

avec $u \in B$, et $\|u - u_0\|_B < \upsilon$.

Alors,

$$|Tu(t) - Tu_0(t)|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_n - 1} s^{-\rho}}{\Gamma(\alpha_n)} \left| \begin{array}{c} s^{\rho} f\left(s, u(s), D_0^{\alpha_1} u(s), D_0^{\alpha_2} u(s), ..., D_0^{\alpha_{n-1}} u(s)\right) \\ -s^{\rho} f\left(s, u_0(s), D_0^{\alpha_1} u_0(s), ..., D_0^{\alpha_{n-1}} u_0(s)\right) \end{array} \right| ds \\
&\quad + \frac{\Gamma(n-\delta) t^{n-1}}{(n-1)!} \\
&\quad \times \left(\int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha_n - \delta - 1} s^{-\rho}}{\Gamma(\alpha_n - \delta)} \left| \begin{array}{c} s^{\rho} f\left(s, u(s), D_0^{\alpha_1} u(s), D_0^{\alpha_2} u(s), ..., D_0^{\alpha_{n-1}} u(s)\right) \\ -s^{\rho} f\left(s, u_0(s), D_0^{\alpha_1} u_0(s), ..., D_0^{\alpha_{n-1}} u_0(s)\right) \end{array} \right| ds \right).
\end{aligned} \tag{4.26}$$

En utilisant (4.25), on obtient :

$$\begin{aligned}
|Tu(t) - Tu_0(t)| &\leq \frac{\epsilon}{\Gamma(\alpha_n)} \int_0^t (t-s)^{\alpha_n - 1} s^{-\rho} ds \\
&\quad + \frac{\epsilon \Gamma(n-\delta) t^{n-1}}{(n-1)! \Gamma(\alpha_n - \delta)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha_n - \delta - 1} s^{-\rho} ds \\
&\leq \epsilon \left(\frac{B(\alpha_n, 1-\rho) t^{\alpha_n - \rho}}{\Gamma(\alpha_n)} + \frac{\Gamma(n-\delta) B(\alpha_n - \delta, 1-\rho) t^{n-1}}{(n-1)! \Gamma(\alpha_n - \delta)} \right) \\
&\leq \epsilon \left(\frac{B(\alpha_n, 1-\rho)}{\Gamma(\alpha_n)} + \frac{\Gamma(n-\delta) B(\alpha_n - \delta, 1-\rho)}{(n-1)! \Gamma(\alpha_n - \delta)} \right).
\end{aligned} \tag{4.27}$$

On pose :

$$\digamma_0 := \frac{B(\alpha_n, 1-\rho)}{\Gamma(\alpha_n)} + \frac{\Gamma(n-\delta) B(\alpha_n - \delta, 1-\rho)}{(n-1)! \Gamma(\alpha_n - \delta)}.$$

Par conséquent,

$$\|Tu - Tu_0\|_{\infty} \leq \epsilon \digamma_0. \tag{4.28}$$

D'autre part, pour tout $k = 1, 2, ..., n-1$, on a :

$$|D_0^{\alpha_k} Tu(t) - D_0^{\alpha_k} Tu_0(t)|$$

$$\begin{aligned}
\leq\ & \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_n-\alpha_k-1}\, s^{-\rho}}{\Gamma(\alpha_n-\alpha_k)} \left| \begin{array}{c} s^{\rho} f\left(s, u(s), D_0^{\alpha_1} u(s), ..., D_0^{\alpha_{n-1}} u(s)\right) \\ -s^{\rho} f\left(s, u_0(s), D_0^{\alpha_1} u_0(s), ..., D_0^{\alpha_{n-1}} u_0(s)\right) \end{array} \right| ds \\
& + \frac{\Gamma(n-\delta)}{\Gamma(n-\alpha_k)} t^{n-\alpha_k-1} \\
& \times \left(\int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha_n-\delta-1}\, s^{-\rho}}{\Gamma(\alpha_n-\delta)} \left| \begin{array}{c} s^{\rho} f\left(s, u(s), D_0^{\alpha_1} u(s), ..., D_0^{\alpha_{n-1}} u(s)\right) \\ -s^{\rho} f\left(s, u_0(s), D_0^{\alpha_1} u_0(s), ..., D_0^{\alpha_{n-1}} u_0(s)\right) \end{array} \right| ds \right).
\end{aligned} \tag{4.29}$$

En utilisant (4.25), on obtient :

$$|D^{\alpha_k} Tu(t) - D^{\alpha_k} Tu_0(t)|$$

$$\begin{aligned}
\leq\ & \epsilon \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_n-\alpha_k-1}\, s^{-\rho}}{\Gamma(\alpha_n-\alpha_k)} ds + \frac{\epsilon\Gamma(n-\delta)\, t^{n-\alpha_k-1}}{\Gamma(n-\alpha_k)\,\Gamma(\alpha_n-\delta)} \\
& \times \int_0^1 (1-s)^{\alpha_n-\delta-1}\, s^{-\rho} ds \\
\leq\ & \epsilon \left(\frac{B(\alpha_n-\alpha_k, 1-\rho)\, t^{\alpha_n-\alpha_k-\rho}}{\Gamma(\alpha_n-\alpha_k)} + \frac{\Gamma(n-\delta)\, B(\alpha_n-\delta, 1-\rho)\, t^{n-\alpha_k-1}}{\Gamma(n-\alpha_k)\,\Gamma(\alpha_n-\delta)} \right) \\
\leq\ & \epsilon \left(\frac{B(\alpha_n-\alpha_k, 1-\rho)}{\Gamma(\alpha_n-\alpha_k)} + \frac{\Gamma(n-\delta)\, B(\alpha_n-\delta, 1-\rho)}{\Gamma(n-\alpha_k)\,\Gamma(\alpha_n-\delta)} \right).
\end{aligned} \tag{4.30}$$

On pose aussi

$$\digamma_k := \frac{B(\alpha_n-\alpha_k, 1-\rho)}{\Gamma(\alpha_n-\alpha_k)} + \frac{\Gamma(n-\delta)\, B(\alpha_n-\delta, 1-\rho)}{\Gamma(n-\alpha_k)\,\Gamma(\alpha_n-\delta)},$$

où $k = 1, 2, ..., n-1$.

Donc,

$$\|D_0^{\alpha_k} Tu - D_0^{\alpha_k} Tu_0\|_\infty \ \leq\ \epsilon \digamma_k,\ \ k = 1, 2, ..., n-1. \tag{4.31}$$

De (4.28) et (4.31), on déduit que :

$$\|Tu - Tu_0\|_B \leq \epsilon \max_{1 \leq k \leq n-1} (\digamma_0, \digamma_k). \tag{4.32}$$

D'où, $\|Tu - Tu_0\|_B \to 0$ quand $\|u - u_0\|_B \to 0$. Donc, $T : B \to B$ est un opérateur continu.

Étape 2 : On va prouver que T envoie tout ensemble borné de B en un ensemble uniformément borné dans B. Soit $E \subset B$ un ensemble borné, alors $\exists \sigma > 0 : \|u\|_B \leq \sigma$, $\forall u \in E$.

Puisque $t^\rho f\left(t, u(t), D_0^{\alpha_1} u(t), ..., D_0^{\alpha_{n-1}} u(t)\right)$ est continue sur $[0,1] \times [-\sigma, \sigma]^n$, il existe donc une constante positive C :

$$\left|t^\rho f\left(t, u(t), D_0^{\alpha_1} u(t), ..., D_0^{\alpha_{n-1}} u(t)\right)\right| \leq C, \ \forall t \in [0,1], \ \forall u \in E. \tag{4.33}$$

Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned}
|Tu(t)| \leq & \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_n - 1}}{\Gamma(\alpha_n)} s^{-\rho} \left|s^\rho f\left(s, u(s), D_0^{\alpha_1} u(t), ..., D_0^{\alpha_{n-1}} u(t)\right)\right| ds \\
& + \sum_{j=0}^{n-2} \frac{|\mu_j|}{j!} t^j + \frac{\Gamma(n-\delta)}{(n-1)!} t^{n-1} \\
& \times \left(|\mu_{n-1}| + \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha_n - \delta - 1}}{\Gamma(\alpha_n - \delta)} s^{-\rho} \left|s^\rho f\left(s, u(s), D_0^{\alpha_1} u(t), ..., D_0^{\alpha_{n-1}} u(t)\right)\right| ds\right).
\end{aligned}$$

En utilisant (4.33), on aura

$$
\begin{aligned}
\|Tu\|_{\infty} &\leq \frac{C}{\Gamma(\alpha_n)} \sup_{t\in J} \int_0^t (t-s)^{\alpha_n-1} s^{-\rho} ds + \sum_{j=0}^{n-2} \frac{|\mu_j|}{j!} \\
&+ \frac{\Gamma(n-\delta)}{(n-1)!} \left(|\mu_{n-1}| + \frac{C}{\Gamma(\alpha_n-\delta)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha_n-\delta-1} s^{-\rho} ds \right) \\
&\leq C \left(\frac{B(\alpha_n, 1-\rho)\, t^{\alpha_n-\rho}}{\Gamma(\alpha_n)} + \frac{\Gamma(n-\delta)\, B(\alpha_n-\delta, 1-\rho)}{(n-1)!\Gamma(\alpha_n-\delta)} \right) \\
&+ \sum_{j=0}^{n-2} \frac{|\mu_j|}{j!} + \frac{\Gamma(n-\delta)\,|\mu_{n-1}|}{(n-1)!} \\
&\leq C F_0 + \sum_{j=0}^{n-2} \frac{|\mu_j|}{j!} + \frac{\Gamma(n-\delta)\,|\mu_{n-1}|}{(n-1)!}.
\end{aligned}
\tag{4.34}
$$

D'autre part, on a :

$$
\begin{aligned}
|D_0^{\alpha_k} Tu(t)| &\leq \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_n-\alpha_k-1}}{\Gamma(\alpha_n-\alpha_k)} s^{-\rho} \left| s^{\rho} f\left(s, u(s), D_0^{\alpha_1} u(t), ..., D_0^{\alpha_{n-1}} u(t)\right)\right| ds \\
&+ \sum_{j=k}^{n-2} \frac{|\mu_j|}{\Gamma(j+1-\alpha_k)} t^{j-\alpha_k} + \frac{\Gamma(n-\delta)}{\Gamma(n-\alpha_k)} t^{n-\alpha_k-1} \\
&\times \left(|\mu_{n-1}| + \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha_n-\delta-1}}{\Gamma(\alpha_n-\delta)} s^{-\rho} \left| s^{\rho} f\left(s, u(s), D_0^{\alpha_1} u(t), ..., D_0^{\alpha_{n-1}} u(t)\right)\right| ds \right).
\end{aligned}
\tag{4.35}
$$

De (4.33) , on obtient :

$$\begin{aligned}
\left\|D_0^{\alpha_k}Tu\right\|_\infty &\leq \frac{C}{\Gamma(\alpha_n-\alpha_k)}\int_0^t (t-s)^{\alpha_n-\alpha_k-1}s^{-\rho}ds+\sum_{j=k}^{n-2}\frac{\left|\mu_j\right|}{\Gamma(j+1-\alpha_k)} \\
&+\frac{\Gamma(n-\delta)}{\Gamma(n-\alpha_k)}\left(\left|\mu_{n-1}\right|+\frac{C}{\Gamma(\alpha_n-\delta)}\int_0^1(1-s)^{\alpha_n-\delta-1}s^{-\rho}ds\right) \\
&\leq C\left(\frac{B(\alpha_n-\alpha_k,1-\rho)\,t^{\alpha_n-\alpha_k-\rho}}{\Gamma(\alpha_n-\alpha_k)}+\frac{\Gamma(n-\delta)\,B(\alpha_n-\delta,1-\rho)}{\Gamma(n-\alpha_k)\,\Gamma(\alpha_n-\delta)}\right) \\
&+\sum_{j=k}^{n-2}\frac{\left|\mu_j\right|}{\Gamma(j+1-\alpha_k)}+\frac{\Gamma(n-\delta)\left|\mu_{n-1}\right|}{\Gamma(n-\alpha_k)} \\
&\leq C\digamma_k+\sum_{j=k}^{n-2}\frac{\left|\mu_j\right|}{\Gamma(j+1-\alpha_k)}+\frac{\Gamma(n-\delta)\left|\mu_{n-1}\right|}{\Gamma(n-\alpha_k)},
\end{aligned} \tag{4.36}$$

où $k=1,2,...,n-2.$

Raisonnant de la même manière que précedement, on a :

$$\left\|D_0^{\alpha_{n-1}}Tu\right\|_\infty \leq C\digamma_{n-1}+\frac{\Gamma(n-\delta)\left|\mu_{n-1}\right|}{\Gamma(n-\alpha_{n-1})}. \tag{4.37}$$

En combinant (4.34), (4.36) et (4.37), on trouve

$$\|Tu\|_B \leq \max_{1\leq k\leq n-2}\left(\begin{array}{c}
C\digamma_0+\sum_{j=0}^{n-2}\frac{\left|\mu_j\right|}{j!}+\frac{\Gamma(n-\delta)\left|\mu_{n-1}\right|}{(n-1)!}, \\
C\digamma_k+\sum_{j=k}^{n-2}\frac{\left|\mu_j\right|}{\Gamma(j+1-\alpha_k)}+\frac{\Gamma(n-\delta)\left|\mu_{n-1}\right|}{\Gamma(n-\alpha_k)}, \\
C\digamma_{n-1}+\frac{\Gamma(n-\delta)\left|\mu_{n-1}\right|}{\Gamma(n-\alpha_{n-1})}
\end{array}\right). \tag{4.38}$$

Donc, $T(E)$ est uniformément borné.

Étape 3 : On va établir l'équicontinuité de $T(E)$. En effet, pour tout $u\in E$, et $\forall t_1,t_2\in[0,1]:t_1<t_2$, on a :

$$|Tu(t_2) - Tu(t_1)| \leq \left| \begin{array}{l} -\int_0^{t_2} \frac{(t_2-s)^{\alpha_n-1}s^{-\rho}}{\Gamma(\alpha_n)} s^{\rho} f\left(s, u(s), D_0^{\alpha_1}u(s), ..., D_0^{\alpha_{n-1}}u(s)\right) ds \\ \\ +\int_0^{t_1} \frac{(t_1-s)^{\alpha_n-1}s^{-\rho}}{\Gamma(\alpha_n)} s^{\rho} f\left(s, u(s), D_0^{\alpha_1}u(s), ..., D_0^{\alpha_{n-1}}u(s)\right) ds \end{array} \right|$$
$$+\sum_{j=0}^{n-2} \frac{|\mu_j| \left(t_2^j - t_1^j\right)}{j!} + \frac{\Gamma(n-\delta)\left(t_2^{n-1} - t_1^{n-1}\right)}{(n-1)!}$$
$$\times \left(|\mu_{n-1}| + \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha_n-\delta-1} s^{-\rho}}{\Gamma(\alpha_n - \delta)} \left| s^{\rho} f\left(s, u(s), D_0^{\alpha_1}u(s), ..., D_0^{\alpha_{n-1}}u(s)\right)\right| ds \right).$$

Donc,

$$\|Tu(t_2) - Tu(t_1)\|_{\infty} \leq \frac{CB(\alpha_n, 1-\rho)\left(t_2^{\alpha_n-\rho} - t_1^{\alpha_n-\rho}\right)}{\Gamma(\alpha_n)} + \sum_{j=0}^{n-2} \frac{|\mu_j|\left(t_2^j - t_1^j\right)}{j!}$$
$$+\frac{\Gamma(n-\delta)\left(t_2^{n-1} - t_1^{n-1}\right)}{(n-1)!} \left(|\mu_{n-1}| + \frac{CB(\alpha_n - \delta, 1-\rho)}{\Gamma(\alpha_n - \delta)} \right). \tag{4.39}$$

Et pour $k = 1, 2, ..., n-2$, on obtient :

$$|D_0^{\alpha_k}Tu(t_2) - D_0^{\alpha_k}Tu(t_1)|$$

$$\leq \left| \begin{array}{l} -\int_0^{t_2} \frac{(t_2-s)^{\alpha_n-\alpha_k-1}s^{-\rho}}{\Gamma(\alpha_n-\alpha_k)} s^{\rho} f\left(s, u(s), D_0^{\alpha_1}u(s), ..., D_0^{\alpha_{n-1}}u(s)\right) ds \\ \\ +\int_0^{t_1} \frac{(t_1-s)^{\alpha_n-\alpha_k-1}s^{-\rho}}{\Gamma(\alpha_n-\alpha_k)} s^{\rho} f\left(s, u(s), D_0^{\alpha_1}u(s), ..., D_0^{\alpha_{n-1}}u(s)\right) ds \end{array} \right|$$
$$+\sum_{j=k}^{n-2} \frac{|\mu_j|\left(t_2^{j-\alpha_k} - t_1^{j-\alpha_k}\right)}{\Gamma(j+1-\alpha_k)} + \frac{\Gamma(n-\delta)\left(t_2^{n-\alpha_k-1} - t_1^{n-\alpha_k-1}\right)}{\Gamma(n-\alpha_k)}$$
$$\times \left(|\mu_{n-1}| + \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha_n-\delta-1} s^{-\rho}}{\Gamma(\alpha_n - \delta)} \left| s^{\rho} f\left(s, u(s), D_0^{\alpha_1}u(s), ..., D_0^{\alpha_{n-1}}u(s)\right)\right| ds \right). \tag{4.40}$$

En calculant les intégrales du second membre, on aura :

$$\|D_0^{\alpha_k}Tu(t_2) - D_0^{\alpha_k}Tu(t_1)\|_{\infty}$$

$$\leq \frac{CB\left(\alpha_n-\alpha_k,1-\rho\right)\left(t_2^{\alpha_n-\alpha_k-\rho}-t_1^{\alpha_n-\alpha_k-\rho}\right)}{\Gamma\left(\alpha_n-\alpha_k\right)}+\sum_{j=k}^{n-2}\frac{\left|\mu_j\right|\left(t_2^{j-\alpha_k}-t_1^{j-\alpha_k}\right)}{\Gamma\left(j+1-\alpha_k\right)}$$
$$+\frac{\Gamma\left(n-\delta\right)\left(t_2^{n-\alpha_k-1}-t_1^{n-\alpha_k-1}\right)}{\Gamma\left(n-\alpha_k\right)}\left(\left|\mu_{n-1}\right|+\frac{CB\left(\alpha_n-\delta,1-\rho\right)}{\Gamma\left(\alpha_n-\delta\right)}\right), \tag{4.41}$$

Avec le même raisonnement, pour $k=n-1$, on a l'estimation suivante :

$$\begin{aligned}\left\|D_0^{\alpha_{n-1}}Tu\left(t_2\right)-D_0^{\alpha_{n-1}}Tu\left(t_1\right)\right\|_\infty \leq\ & \frac{CB\left(\alpha_n-\alpha_{n-1},1-\rho\right)\left(t_2^{\alpha_n-\alpha_{n-1}-\rho}-t_1^{\alpha_n-\alpha_{n-1}-\rho}\right)}{\Gamma\left(\alpha_n-\alpha_{n-1}\right)}\\ & +\frac{\Gamma\left(n-\delta\right)\left(t_2^{n-\alpha_{n-1}-1}-t_1^{n-\alpha_{n-1}-1}\right)}{\Gamma\left(n-\alpha_{n-1}\right)}\\ & \times\left(\left|\mu_{n-1}\right|+\frac{CB\left(\alpha_n-\delta,1-\rho\right)}{\Gamma\left(\alpha_n-\delta\right)}\right).\end{aligned} \tag{4.42}$$

En appliquant (4.39), (4.41) and (4.42), on conclut que :

$$\left\|Tu\left(t_2\right)-Tu\left(t_1\right)\right\|_B \leq$$

$$\leq \max_{1\leq k\leq n-2}\left(\begin{array}{c}\frac{CB(\alpha_n,1-\rho)\left(t_2^{\alpha_n-\rho}-t_1^{\alpha_n-\rho}\right)}{\Gamma(\alpha_n)}+\sum_{j=0}^{n-2}\frac{\left|\mu_j\right|\left(t_2^j-t_1^j\right)}{j!}\\ +\frac{\Gamma(n-\delta)}{(n-1)!}\left(\left|\mu_{n-1}\right|+\frac{CB(\alpha_n-\delta,1-\rho)}{\Gamma(\alpha_n-\delta)}\right)\left(t_2^{n-1}-t_1^{n-1}\right),\\ \\ \frac{CB(\alpha_n-\alpha_k,1-\rho)\left(t_2^{\alpha_n-\alpha_k-\rho}-t_1^{\alpha_n-\alpha_k-\rho}\right)}{\Gamma(\alpha_n-\alpha_k)}+\sum_{j=k}^{n-2}\frac{\left|\mu_j\right|\left(t_2^{j-\alpha_k}-t_1^{j-\alpha_k}\right)}{\Gamma(j+1-\alpha_k)}\\ +\frac{\Gamma(n-\delta)}{\Gamma(n-\alpha_k)}\left(\left|\mu_{n-1}\right|+\frac{CB(\alpha_n-\delta,1-\rho)}{\Gamma(\alpha_n-\delta)}\right)\left(t_2^{n-\alpha_k-1}-t_1^{n-\alpha_k-1}\right),\\ \\ \frac{CB(\alpha_n-\alpha_{n-1},1-\rho)\left(t_2^{\alpha_n-\alpha_{n-1}-\rho}-t_1^{\alpha_n-\alpha_{n-1}-\rho}\right)}{\Gamma(\alpha_n-\alpha_{n-1})}\\ +\frac{\Gamma(n-\delta)}{\Gamma(n-\alpha_k)}\left(\left|\mu_{n-1}\right|+\frac{CB(\alpha_n-\delta,1-\rho)}{\Gamma(\alpha_n-\delta)}\right)\left(t_2^{n-\alpha_{n-1}-1}-t_1^{n-\alpha_{n-1}-1}\right)\end{array}\right). \tag{4.43}$$

Le second membre de (4.43) est indépendant de u et tend vers zéro quand $t_1\to t_2$, d'où l'équicontinuité de $T\left(E\right)$. En vertu du Théorème d'Arzela-Ascoli, on conclut que $T\left(E\right)$ est un ensemble relativement compact dans B. Donc, l'opérateur T est complètement continu.

4.5.2 À propos du Principe de Contraction

Le premier résultat principal de cette section est donné par le théorème suivant :

Théorème 4.6. *[87] Sous les hypothèses :*

(H_1) : *Il existe des constantes non négatives* $(\omega_i)_{i=1,2,\dots,n}$ *, telles que :*

$$t^{\rho}\left|f(t,u_1,u_2,...,u_n)-f(t,v_1,v_2,...,v_n)\right|\leq\sum_{i=1}^{n}\omega_i\left|u_i-v_i\right|,$$

pour tout $t\in[0,1]$ *et toutes* $(u_1,u_2,...,u_n)\,,\,(v_1,v_2,...,v_n)\in\mathbb{R}^n$.

(H_2) : $\Lambda:=\max\limits_{1\leq k\leq n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\left(F_0,F_k\right)<1,$

le problème (4.1) *a une solution unique* $u(t)\,,\ t\in[0,1]\,.$

Démonstration. On va montrer que l'opérateur T est contractif sur B :

Soient $u,\ v\in B$ et $t\in[0,1]$, on a :

$$\begin{aligned}\|Tu-Tv\|_{\infty} &\leq \sup_{t\in[0,1]}\int_0^t\frac{(t-s)^{\alpha_n-1}s^{-\rho}}{\Gamma(\alpha_n)}s^{\rho}\left|\begin{array}{c}f\left(s,u(s),D_0^{\alpha_1}u(s),...,D_0^{\alpha_{n-1}}u(s)\right)\\-f\left(s,v(s),D_0^{\alpha_1}v(s),...,D_0^{\alpha_{n-1}}v(s)\right)\end{array}\right|ds\\&\quad+\sup_{t\in[0,1]}\frac{\Gamma(n-\delta)}{(n-1)!}t^{n-1}\\&\quad\times\left(\int_0^1\frac{(1-s)^{\alpha_n-\delta-1}s^{-\rho}}{\Gamma(\alpha_n-\delta)}s^{\rho}\left|\begin{array}{c}f\left(s,u(s),D_0^{\alpha_1}u(s),...,D_0^{\alpha_{n-1}}u(s)\right)\\-f\left(s,v(s),D_0^{\alpha_1}v(s),...,D_0^{\alpha_{n-1}}v(s)\right)\end{array}\right|ds\right).\end{aligned}\tag{4.44}$$

En utilisant (H_1) , on obtient l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}\|Tu-Tv\|_{\infty} &\leq \left(\omega_1\|u-v\|_{\infty}+\omega_2\left\|D_0^{\alpha_1}(u-v)\right\|_{\infty}+...+\omega_n\left\|D_0^{\alpha_{n-1}}(u-v)\right\|_{\infty}\right)\\&\quad\times\left(\int_0^t\frac{(t-s)^{\alpha_n-1}s^{-\rho}}{\Gamma(\alpha_n)}ds+\frac{\Gamma(n-\delta)}{(n-1)!}\int_0^1\frac{(1-s)^{\alpha_n-\delta-1}s^{-\rho}}{\Gamma(\alpha_n-\delta)}ds\right)\\&\leq\sum_{i=1}^{n}\omega_i\max\left(\|u-v\|_{\infty},\left\|D_0^{\alpha_1}(u-v)\right\|_{\infty},...,\left\|D_0^{\alpha_{n-1}}(u-v)\right\|_{\infty}\right)\\&\quad\times\left(\frac{B(\alpha_n,1-\rho)\,t^{\alpha_n-\rho}}{\Gamma(\alpha_n)}+\frac{\Gamma(n-\delta)\,B(\alpha_n-\delta,1-\rho)}{(n-1)!\,\Gamma(\alpha_n-\delta)}\right).\end{aligned}\tag{4.45}$$

Ce qui est équivalent à

$$\left\| Tu-Tv\right\|_{\infty } \leq \digamma_{0}\sum_{i=1}^{n}\omega_{i}\left\| u-v\right\|_{B}. \tag{4.46}$$

D'autre part, pour tout $k=1,2,...,n-1$, on a :

$$\begin{aligned}
\left\| D_{0}^{\alpha_{k}}Tu-D_{0}^{\alpha_{k}}Tv\right\|_{\infty } &\leq \sup_{t\in[0,1]}\int_{0}^{t}\frac{\left(t-s\right)^{\alpha_{n}-\alpha_{k}-1}s^{-\rho }}{\Gamma \left(\alpha_{n}-\alpha_{k}\right) }s^{\rho }\left\vert \begin{array}{c} f\left(s,u\left(s\right) ,D_{0}^{\alpha_{1}}u\left(s\right) ,...,D_{0}^{\alpha_{n-1}}u\left(s\right) \right) \\ -f\left(s,v\left(s\right) ,D_{0}^{\alpha_{1}}v\left(s\right) ,...,D_{0}^{\alpha_{n-1}}v\left(s\right) \right) \end{array}\right\vert ds \\
&+\frac{\Gamma \left(n-\delta \right) }{\Gamma \left(n-\alpha_{k}\right) }\sup_{t\in[0,1]}t^{n-\alpha_{k}-1} \\
&\times \left(\int_{0}^{1}\frac{\left(1-s\right)^{\alpha_{n}-\delta -1}s^{-\rho }}{\Gamma \left(\alpha_{n}-\delta \right) }s^{\rho }\left\vert \begin{array}{c} f\left(s,u\left(s\right) ,D_{0}^{\alpha_{1}}u\left(s\right) ,...,D_{0}^{\alpha_{n-1}}u\left(s\right) \right) \\ -f\left(s,v\left(s\right) ,D_{0}^{\alpha_{1}}v\left(s\right) ,...,D_{0}^{\alpha_{n-1}}v\left(s\right) \right) \end{array}\right\vert ds\right) .
\end{aligned} \tag{4.47}$$

En appliquant (H_{1}), l'inégalité (4.47) peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}
\left\| D_{0}^{\alpha_{k}}Tu-D_{0}^{\alpha_{k}}Tv\right\|_{\infty } &\leq \left(\omega_{1}\left\| u-v\right\|_{\infty }+\omega_{2}\left\| D_{0}^{\alpha_{1}}\left(u-v\right) \right\|_{\infty }+...+\omega_{n}\left\| D_{0}^{\alpha_{n-1}}\left(u-v\right) \right\|_{\infty }\right) \\
&\times \left(\int_{0}^{t}\frac{\left(t-s\right)^{\alpha_{n}-\alpha_{k}-1}s^{-\rho }}{\Gamma \left(\alpha_{n}-\alpha_{k}\right) }ds+\frac{\Gamma \left(n-\delta \right) }{\Gamma \left(n-\alpha_{k}\right) }\left(\int_{0}^{1}\frac{\left(1-s\right)^{\alpha_{n}-\delta -1}s^{-\rho }}{\Gamma \left(\alpha_{n}-\delta \right) }ds\right) \right) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}\omega_{i}\max \left(\left\| u-v\right\|_{\infty },\left\| D_{0}^{\alpha_{1}}\left(u-v\right) \right\|_{\infty },...,\left\| D_{0}^{\alpha_{n-1}}\left(u-v\right) \right\|_{\infty }\right) \\
&\times \left(\frac{B\left(\alpha_{n}-\alpha_{k},1-\rho \right) t^{\alpha_{n}-\alpha_{k}-\rho }}{\Gamma \left(\alpha_{n}-\alpha_{k}\right) }+\frac{\Gamma \left(n-\delta \right) B\left(\alpha_{n}-\delta ,1-\rho \right) }{\Gamma \left(n-\alpha_{k}\right) \Gamma \left(\alpha_{n}-\delta \right) }\right) .
\end{aligned} \tag{4.48}$$

L'inégalité (4.48) peut également s'écrire comme suit :

$$\left\| D_{0}^{\alpha_{k}}Tu-D_{0}^{\alpha_{k}}Tv\right\|_{\infty } \leq \sum_{i=1}^{n}\omega_{i}\digamma_{k}\left\| u-v\right\|_{B}, \tag{4.49}$$

où $k = 1, 2, ..., n - 1.$

À partir des inégalités (4.46) et (4.49) , on aura :

$$\|Tu - Tv\|_B \leq \max_{1\leq k\leq n-1} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \left(\digamma_0, \digamma_k\right) \|u - v\|_B .$$

L'hypothèse (H_2) montre bien que l'opérateur T est contractif. Par conséquent, le problème (4.1) a une solution unique $u(t)$, $t \in [0, 1]$. Ceci complète ainsi la preuve de ce théorème.

4.5.3 Exemple 1

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} D_0^{\frac{11}{3}} u(t) + \dfrac{\sin(t)\left|u(t)+D_0^{\frac{3}{4}}u(t)+D_0^{\frac{4}{3}}u(t)+D_0^{\frac{5}{2}}u(t)\right|}{8\pi\sqrt{t}\left(1+\left|u(t)+D_0^{\frac{3}{4}}u(t)+D_0^{\frac{4}{3}}u(t)+D_0^{\frac{5}{2}}u(t)\right|\right)} = 0, \ 0 < t \leq 1, \\ \\ u(0) = -2\sqrt{3}, \ u'(0) = \sqrt{2}, \ v''(0) = \sqrt{5}, \ D_0^{\frac{8}{3}} u(1) = 3\sqrt{2}. \end{cases} \tag{4.50}$$

avec $n = 4$, $\alpha_4 = \frac{11}{3}$, $\alpha_1 = \frac{3}{4}$, $\alpha_2 = \frac{4}{3}$, $\alpha_3 = \frac{5}{2}$, $\delta = \frac{8}{3}$, $\mu_0 = -2\sqrt{3}$, $\mu_1 = \sqrt{2}$, $\mu_2 = \sqrt{5}$, $\mu_3 = 3\sqrt{2}$.

On doit vérifier si les hypothèses (H_1) et (H_2) sont bien satisfaites :

Soient $t \in [0, 1]$ et (u_1, u_2, u_3, u_4) , $(v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathbb{R}^4$, alors,

$$t^{\frac{3}{5}} \left|f(t, u_1, u_2, u_3, u_4) - f(t, v_1, v_2, v_3, v_4)\right|$$
$$\leq \frac{t^{\frac{1}{10}} \sin(t)}{8\pi} |u_1 - v_1| + \frac{t^{\frac{1}{10}} \sin(t)}{8\pi} |u_2 - v_2| + \frac{t^{\frac{1}{10}} \sin(t)}{8\pi} |u_3 - v_3| + \frac{t^{\frac{1}{10}} \sin(t)}{8\pi} |u_4 - v_4| ,$$

où $\rho = \frac{3}{5}$.

Ils existent donc des réels positifs ω_i, $i = 1, 2, 3, 4$, tels que :

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = \frac{1}{8\pi}, \ \sum_{i=1}^{4} \omega_i = \frac{1}{2\pi}.$$

De plus, on a :

$$\digamma_0 = 0.7119, \ \digamma_1 = 2.9455, \ \digamma_2 = 2.5661, \ \digamma_3 = 3.6696.$$

Alors,

$$\sum_{i=1}^{4}\omega_i F_0 = 0.1133,\ \ \sum_{i=1}^{4}\omega_i F_1 = 0.4688,\ \ \sum_{i=1}^{4}\omega_i F_2 = 0.4084,\ \ \sum_{i=1}^{4}\omega_i F_3 = 0.5840.$$

Les conditions du Théorème 4.6 sont satisfaites. On conclut donc que le problème (4.50) admet une solution unique $u(t)$, $t \in [0,1]$.

4.5.4 Conditions Suffisantes pour l'Existence d'une Solution au Moins

Maintenant, on est prêt à énoncer et démontrer le résultat suivant :

Théorème 4.7. *[87] On suppose que* $n-1 < \alpha_n < n$, $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, $0 < \rho < 1$, $f :]0,1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *est continue,* $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t,...) = \infty$, *et* $t^\rho f(t,...)$ *est continue sur* $[0,1]\times\mathbb{R}^n$. *Alors, le problème non linéaire* (4.1) *admet au moins une solution* $u(t)$, $t \in [0,1]$.

Démonstration. Soient $C_0 = \sup\limits_{t\in[0,1]} t^\rho \left|f\left(t, u(t), D_0^{\alpha_1}u(t), ..., D_0^{\alpha_{n-1}}u(t)\right)\right|$,

$$r = \max_{1\le k\le n-2}\begin{pmatrix} C_0 F_0 + \sum\limits_{j=0}^{n-2}\frac{|\mu_j|}{j!} + \frac{\Gamma(n-\delta)|\mu_{n-1}|}{(n-1)!}, \\ \\ C_0 F_k + \sum\limits_{j=k}^{n-2}\frac{|\mu_j|}{\Gamma(j+1-\alpha_k)} + \frac{\Gamma(n-\delta)|\mu_{n-1}|}{\Gamma(n-\alpha_k)}, \\ \\ C_0 F_{n-1} + \frac{\Gamma(n-\delta)|\mu_{n-1}|}{\Gamma(n-\alpha_{n-1})}\end{pmatrix}, \tag{4.51}$$

et $\Sigma := \{u \in B : \|u\|_B \le r\}$. On montre que $T : \Sigma \to \Sigma$. Pour $u \in \Sigma$ et $t \in [0,1]$, on a :

$$\begin{aligned}\|Tu\|_\infty &\le \frac{C_0}{\Gamma(\alpha_n)}\sup_{t\in J}\int_0^t (t-s)^{\alpha_n-1}s^{-\rho}ds + \sum_{j=0}^{n-2}\frac{|\mu_j|}{j!}\sup_{t\in J} t^j \\ &\quad + \frac{\Gamma(n-\delta)}{(n-1)!}\sup_{t\in J} t^{n-1}\left(|\mu_{n-1}| + \frac{C_0}{\Gamma(\alpha_n-\delta)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha_n-\delta-1}s^{-\rho}ds\right) \\ &\le C_0 F_0 + \sum_{j=0}^{n-2}\frac{|\mu_j|}{j!} + \frac{\Gamma(n-\delta)|\mu_{n-1}|}{(n-1)!}.\end{aligned} \tag{4.52}$$

D'autre part, pour tout $k=1,2,...,n-2$, on a :

$$\begin{aligned}\|D_0^{\alpha_k}Tu\|_\infty &\leq \frac{C_0}{\Gamma(\alpha_n-\alpha_k)}\sup_{t\in J}\int_0^t (t-s)^{\alpha_n-\alpha_k-1}s^{-\rho}ds+\sum_{j=k}^{n-2}\frac{|\mu_j|}{\Gamma(j+1-\alpha_k)}\sup_{t\in J}t^{j-\alpha_k}\\&+\frac{\Gamma(n-\delta)}{\Gamma(n-\alpha_k)}\sup_{t\in J}t^{n-1-\alpha_k}\left(|\mu_{n-1}|+\frac{C_0}{\Gamma(\alpha_n-\delta)}\int_0^1(1-s)^{\alpha_n-\delta-1}s^{-\rho}ds\right)\\&\leq C_0F_k+\sum_{j=k}^{n-2}\frac{|\mu_j|}{\Gamma(j+1-\alpha_k)}+\frac{\Gamma(n-\delta)|\mu_{n-1}|}{\Gamma(n-\alpha_k)},\end{aligned}\tag{4.53}$$

on a aussi :

$$\|D_0^{\alpha_{n-1}}Tu\|_\infty \leq C_0F_{n-1}+\frac{\Gamma(n-\delta)|\mu_{n-1}|}{\Gamma(n-\alpha_{n-1})}.\tag{4.54}$$

Grâce à (4.52), (4.53) et (4.54), on a :

$$\|Tu\|_B\leq \max_{1\leq k\leq n-2}\begin{pmatrix} C_0F_0+\sum_{j=0}^{n-2}\frac{|\mu_j|}{j!}+\frac{\Gamma(n-\delta)|\mu_{n-1}|}{(n-1)!},\\ \\ C_0F_k+\sum_{j=k}^{n-2}\frac{|\mu_j|}{\Gamma(j+1-\alpha_k)}+\frac{\Gamma(n-\delta)|\mu_{n-1}|}{\Gamma(n-\alpha_k)},\\ \\ C_0F_{n-1}+\frac{\Gamma(n-\delta)|\mu_{n-1}|}{\Gamma(n-\alpha_{n-1})}\end{pmatrix}.$$

Tenant compte de (4.51), on déduit que $\|Tu\|_B\leq r$. En outre, le lemme 4.3 implique que $Tu\in C([0,1],\mathbb{R})$ et pour $k=1,2,...,n-1$, le lemme 4.4 implique que $D_0^{\alpha_k}Tu\in C([0,1],\mathbb{R})$. Par conséquent, $T:\Sigma\to\Sigma$. De plus du lemme 4.5, T est complètement continu, donc Σ est relativement compact. On conclut par le théorème du point fixe de Schauder que l'opérateur T admet au moins un point fixe qui est la solution du problème (4.1). Le Théorème 4.7 est ainsi prouvé.

4.5.5 Exemple 2

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} D_0^{\frac{9}{2}}u(t)+\frac{e^{-t}\cos u(t)D_0^{\frac{2}{3}}u(t)}{t^{\frac{1}{3}}\left(2\pi-\sin D_0^{\frac{5}{4}}u(t)\sin D_0^{\frac{8}{3}}u(t)+\cos D_0^{\frac{7}{2}}u(t)\right)}=0,\ 0<t\leq 1, \\ u(0)=\sqrt{2},\ u'(0)=3\sqrt{3},\ u''(0)=-1,\ u'''(0)=\frac{1}{4},\ D_0^{\frac{13}{4}}u(1)=1. \end{cases} \tag{4.55}$$

Ici, $n=5$, $\alpha_5=\frac{9}{2}$, $\alpha_1=\frac{2}{3}$, $\alpha_2=\frac{5}{4}$, $\alpha_3=\frac{8}{3}$, $\alpha_4=\frac{7}{2}$, $\delta=\frac{13}{4}$, $\mu_0=\sqrt{2}$, $\mu_1=3\sqrt{3}$, $\mu_2=-1$, $\mu_3=\frac{1}{4}$, $\mu_4=1$.

Pour toute $(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5)\in\mathbb{R}^5$, et $t\in[0,1]$, on a :

$$f(t,v_1,v_2,v_3,v_4,v_5)=\frac{e^{-t}\cos v_1v_2}{t^{\frac{1}{3}}(2\pi-\sin v_3\sin v_4+\cos v_5)}.$$

Alors, $f:\,]0,1]\times\mathbb{R}^5\to\mathbb{R}$ est continue, $\lim\limits_{t\to 0^+}f(t,...)=\infty$. Pour $\rho=\frac{2}{3}$, on obtient $t^{\frac{2}{3}}f(t,....)$ est continue sur $[0,1]\times\mathbb{R}^5$. Donc, le Théorème 4.7 assure l'existence de la solution du problème (4.55).

4.6 Stabilité au sens de Ulam-Hyers

En considérant le problème (4.1), on va définir et étudier la stabilité au sens d'Ulam-Hyers.

4.6.1 Définitions

Définition 4.8. *[87] L'équation* (4.1) *est stable au sens d'Ulam-Hyers s' il existe un nombre réel $A>0$ tel que pour tout $\epsilon>0$ et pour toute solution $u\in B$ de l'inégalité suivante :*

$$\left|D_0^{\alpha_n}u(t)+f\left(t,u(t),D_0^{\alpha_1}u(t),...,D_0^{\alpha_{n-1}}u(t)\right)\right| \;<\; \epsilon,\ 0<t\leq 1, \tag{4.56}$$

il existe une solution $v\in B$ de (4.1) *satisfaite :*

$$D_0^{\alpha_n}v(t)+f\left(t,v(t),D_0^{\alpha_1}v(t),...,D_0^{\alpha_{n-1}}v(t)\right) \;=\; 0,\ 0<t\leq 1, \tag{4.57}$$

$v^{(j)}(0)=\mu_j$, $j=0,1,...,n-2$, $D_0^{\delta}v(1)=\mu_{n-1}$, $n-2<\delta<n-1$,

avec

$$\left\|v-u\right\|_{B} \quad < \quad A\epsilon. \tag{4.58}$$

Définition 4.9. *[87] L'équation* (4.1) *est stable au sens d'Ulam-Hyers généralisée s'il existe* $\Upsilon \in C\left(\mathbb{R}_{+},\mathbb{R}_{+}\right)$, $\Upsilon\left(0\right)=0$ *telle que pour tout* $\epsilon>0$ *et pour toute solution* $u\in B$ *de l'inégalité* (4.56), *il existe une solution* $v\in B$ *de* (4.57) *vérifiant* $v^{(j)}\left(0\right)=\mu_{j}$, $j=0,1,...,n-2$, $D_{0}^{\delta}v\left(1\right)=\mu_{n-1}$, $n-1<\delta<\alpha_{n}$,

avec

$$\left\|v-u\right\|_{B} \quad < \quad \Upsilon\left(\epsilon\right),\ 0<t\leq 1. \tag{4.59}$$

4.6.2 Étude de la Stabilité

Afin d'étudier la stabilité de (4.1), on considère (4.56) et (4.57).

Théorème 4.10. *[87] Sous les hypothèses du Théorème 4.6, on suppose que* $n-1<\alpha_{n}<n$, $n\in\mathbb{N}^{*}-\{1\}$, $0<\rho<1$, $f:\left]0,1\right]\times\mathbb{R}^{n}\rightarrow\mathbb{R}$ *est continue et* $\lim\limits_{t\rightarrow 0^{+}}f\left(t,...\right)=\infty$, *on suppose aussi que* $t^{\rho}f\left(t,...\right)$ *est continue sur* $\left[0,1\right]\times\mathbb{R}^{n}$. *Alors, le problème* (4.1) *est stable au sens d'Ulam-Hyers dans* B *pourvu que :*

$$\left\|t^{\rho}D_{0}^{\alpha_{n}}v\right\|_{\infty} \quad \geq \quad \max_{1\leq k\leq n-2}\left(\begin{array}{c} C_{0}F_{0}+\sum\limits_{j=0}^{n-2}\frac{\left|\mu_{j}\right|}{j!}+\frac{\Gamma(n-\delta)\left|\mu_{n-1}\right|}{(n-1)!}, \\ \\ C_{0}F_{k}+\sum\limits_{j=k}^{n-2}\frac{\left|\mu_{j}\right|}{\Gamma(j+1-\alpha_{k})}+\frac{\Gamma(n-\delta)\left|\mu_{n-1}\right|}{\Gamma(n-\alpha_{k})}, \\ \\ C_{0}F_{n-1}+\frac{\Gamma(n-\delta)\left|\mu_{n-1}\right|}{\Gamma(n-\alpha_{n-1})} \end{array}\right), \tag{4.60}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_{i} \quad < \quad 1. \tag{4.61}$$

Démonstration. On suppose que (4.60) est satisfaite. Soit $u\in B$ une solution de l'inégalité (4.56). On note par $v\in B$ la solution du problème (4.57). Alors, on a les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}\|v\|_\infty &\leq \sup_{s\in[0,1]}\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_n-1}s^{-\rho}}{\Gamma(\alpha_n)}s^\rho\left|f\left(s,v(s),D_0^{\alpha_1}v(s),...,D_0^{\alpha_{n-1}}v(s)\right)\right|ds\\
&\quad+\sum_{j=0}^{n-2}\frac{\left|\mu_j\right|}{j!}\sup_{t\in[0,1]}t^j+\frac{\Gamma(n-\delta)}{(n-1)!}\sup_{t\in[0,1]}t^{n-1}\\
&\quad\times\left(\left|\mu_{n-1}\right|+\int_0^1\frac{(1-s)^{\alpha_n-\delta-1}s^{-\rho}}{\Gamma(\alpha_n-\delta)}s^\rho\left|f\left(s,v(s),D_0^{\alpha_1}v(s),...,D_0^{\alpha_{n-1}}v(s)\right)\right|ds\right)\\
&\leq C_0\digamma_0+\sum_{j=0}^{n-2}\frac{\left|\mu_j\right|}{j!}+\frac{\Gamma(n-\delta)\left|\mu_{n-1}\right|}{(n-1)!},\end{aligned} \tag{4.62}$$

$$\left\|D_0^{\alpha_k}v\right\|_\infty \leq C_0\digamma_k+\sum_{j=k}^{n-2}\frac{\left|\mu_j\right|}{\Gamma(j+1-\alpha_k)}+\frac{\Gamma(n-\delta)\left|\mu_{n-1}\right|}{\Gamma(n-\alpha_k)},\ k=1,2,...,n-2, \tag{4.63}$$

et

$$\left\|D_0^{\alpha_{n-1}}v\right\|_\infty \leq C_0\digamma_{n-1}+\frac{\Gamma(n-\delta)\left|\mu_{n-1}\right|}{\Gamma(n-\alpha_{n-1})}. \tag{4.64}$$

En utilisant (4.62), (4.63) et (4.64), on déduit que :

$$\|v\|_B \leq \max_{1\leq k\leq n-2}\begin{pmatrix} C_0\digamma_0+\sum_{j=0}^{n-2}\frac{\left|\mu_j\right|}{j!}+\frac{\Gamma(n-\delta)\left|\mu_{n-1}\right|}{(n-1)!},\\ \\ C_0\digamma_k+\sum_{j=k}^{n-2}\frac{\left|\mu_j\right|}{\Gamma(j+1-\alpha_k)}+\frac{\Gamma(n-\delta)\left|\mu_{n-1}\right|}{\Gamma(n-\alpha_k)},\\ \\ C_0\digamma_{n-1}+\frac{\Gamma(n-\delta)\left|\mu_{n-1}\right|}{\Gamma(n-\alpha_{n-1})}\end{pmatrix}. \tag{4.65}$$

Donc, de (4.60) et (4.65), on obtient :

$$\|v\|_B \leq \left\|t^\rho D_0^{\alpha_n}v\right\|_\infty. \tag{4.66}$$

À partir de (4.66), on peut écrire :

$$\|(v-u)\|_B \leq \|t^\rho D_0^{\alpha_n}(v-u)\|_\infty$$

$$\leq \left\| \begin{array}{c} t^\rho\left(D_0^{\alpha_n}v + f\left(s, v, D_0^{\alpha_1}v, ..., D_0^{\alpha_{n-1}}v\right)\right) \\ -t^\rho\left(D_0^{\alpha_n}u + f\left(s, u, D_0^{\alpha_1}u, ..., D_0^{\alpha_{n-1}}u\right)\right) \\ +t^\rho\left(f\left(s, u, D_0^{\alpha_1}u, ..., D_0^{\alpha_{n-1}}u\right) - f\left(s, v, D_0^{\alpha_1}v, ..., D_0^{\alpha_{n-1}}v\right)\right) \end{array} \right\|_\infty . \tag{4.67}$$

Donc,

$$\|(v-u)\|_B \leq \left(\begin{array}{c} \|t^\rho\|_\infty \left\| \; D_0^{\alpha_n}v + f\left(s, v, D_0^{\alpha_1}v, ..., D_0^{\alpha_{n-1}}v\right) \; \right\|_\infty \\ + \|t^\rho\|_\infty \left\| \; -\left(D^{\alpha_n}u + f\left(s, u, D_0^{\alpha_1}u, ..., D_0^{\alpha_{n-1}}u\right)\right) \; \right\|_\infty \\ + \left\| t^\rho \left(\begin{array}{c} f\left(s, u, D_0^{\alpha_1}u, ..., D_0^{\alpha_{n-1}}u\right) \\ -f\left(s, v, D_0^{\alpha_1}v, ..., D_0^{\alpha_{n-1}}v\right) \end{array} \right) \right\|_\infty \end{array} \right). \tag{4.68}$$

D'une part, en vérifiant bien que v est une solution de l'équation (4.57), on en déduit :

$$\|(v-u)\|_B \leq \left(\begin{array}{c} \|t^\rho\|_\infty \left\| \; D_0^{\alpha_n}u + f\left(s, u, D_0^{\alpha_1}u, ..., D_0^{\alpha_{n-1}}u\right) \; \right\|_\infty \\ + \left\| t^\rho \left(\begin{array}{c} f\left(s, u, D_0^{\alpha_1}u, ..., D_0^{\alpha_{n-1}}u\right) \\ -f\left(s, v, D_0^{\alpha_1}v, ..., D_0^{\alpha_{n-1}}v\right) \end{array} \right) \right\|_\infty \end{array} \right). \tag{4.69}$$

D'autre part, en utilisant l'hypothèse (H_1) du Théorème 4.6, et l'inégalité (4.56), on obtient :

$$\begin{aligned} \|(v-u)\|_B &\leq \epsilon + \sum_{i=1}^{n} \omega_i \max\left(\|v-u\|_\infty, \left\|D_0^{\alpha_1}(v-u)\right\|_\infty, ..., \left\|D_0^{\alpha_{n-1}}(v-u)\right\|_\infty\right) \\ &\leq \epsilon + \sum_{i=1}^{n} \omega_i \|(v-u)\|_B , \end{aligned} \tag{4.70}$$

ce qui implique que :

$$\|(v-u)\|_B \leq \frac{\epsilon}{1-\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i} := A\epsilon, \; A := \frac{1}{1-\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i}. \tag{4.71}$$

À partir de (4.61) , on déduit que $A > 0$. Part conséquent, l'équation fractionnaire (4.1) est stable au sens d'Ulam-Hyers. Prenant $\Upsilon(\epsilon) = A\epsilon$, implique que (4.1) est stable au sens d'Ulam-Hyers généralisée. Ceci complète ainsi la preuve de ce théorème.

Conclusion Générale

À la fin de cette thèse, on pense que les résultats présentés contribueront au développement de l'étude des équations différentielles fractionnaires. Cette étude s'inscrit dans la démarche de l'application des outils d'analyse aux systèmes d'équations différentielles fractionnaires.

Le premier chapitre nous a permis de nous familiariser avec l'outil fractionnaire et a fourni quelques résultats élémentaires qui sont utiles pour notre étude ainsi que quelques applications de la théorie du calcul fractionnaire dans certains domaines.

Ensuite, le deuxième et le troisième chapitre de cette thèse sont consacrés aux systèmes fractionnaires et au rappel des principaux résultats concernant tels systèmes. Nos contributions apparaissent dans ces deux chapitres peuvent se décomposer en trois grandes étapes :

• Proposer des multi termes non linéaires dans chaque équation différentielle fractionnaire pour un système fractionnaire.

• Développer une nouvelle classe de problèmes différentiels fractionnaires multiples relatifs à la dérivée de Caputo.

• Appliquer les techniques de points fixes pour établir des résultats d'existence et d'unicité des problèmes proposés dans des espaces de Banach.

Des synthèses de ces résultats ont fait l'objet des publications dans des revues de renommées établies [25, 86].

Enfin, dans le quatrième chapitre, on a introduit une nouvelle classe d'équations fractionnaires non linéaires singulières. En effet, dans un premier temps, on a établit des conditions suffisantes pour l'existence et l'unicité de solutions. On a présenté également une étude originale pour la stabilité au sens d'Ulam de telles équations.

La stabilité au sens d'Ulam des solutions a été basée sur deux définitions. En considérant ces deux approches, des conditions suffisantes sont proposées pour assurer la stabilité des solutions pour cette classe d'équation fractionnaire non linéaire singulière.

Ces résultats sont accépté pour publication [87].

Quant aux perspectives qui peuvent être lancées à la suite de ce travail :

On a l'intention d'étudier différents systèmes fractionnaires non linéaires singuliers, de plus l'étude de la stabilité au sens d'Ulam de ces systèmes.

En outre, l'établissement de conditions nécessaires et suffisantes assurant l'existence, l'unicité et la stabilité au sens d'Ulam pour quelques classes d'équations différentielles fractionnaires soumises à des conditions qui peuvent être de type intégral, dérivé ou multipoints.

Par ailleurs, le développement d'éventuels modèles des systèmes correspondant aux équations fractionnaires est dans l'ordre de nos perspectives.

Bibliographie

[1] M.A. Abdellaoui, Z. Dahmani : *New Results For A Weighted Nonlinear System Fractional Integro-Differential Equations,* Facta Universitatis (NIS) Ser. Math. Inform., Vol. 29, No. 3, (2014), pp. 233-242.

[2] M.A. Abdellaoui, Z. Dahmani and M. Houas : *On Some Boundary Value Problems for a Coupled System of Arbitrary Order,* Indian Journal Of Industrial and Applied Mathematics, Vol. 4, (2013), pp. 180–188.

[3] R.P. Agarwal, D. O'Regan : *Existence Theory For Singular Initial And Boundary Value Problems : A Fixed Point Approach*, Appl. Anal., 81, (2002), pp. 391-434.

[4] R.P. Agarwal, D. O'Regan and S. Stanek : *Positive Solutions For Dirichlet Problems Of Singular Nonlinear Fractional Differential Equations,* J. Math. Anal. Appl., 371, (2010), pp. 57–68.

[5] A.P. Agrawal, J.A. Tenreiro Machado and J. Sabatier : *Fractional Derivatives And Their Applications*, Nonlinear Dynamics., Vol. 38, No. 1–4, (2004), pp. 1–489.

[6] A.P. Agrawal, M. Benchora and B.A. Slimani : *Existence Results For Differential Equations With Fractional Order And Impulses,* Mem. Differential Equations Math. Phys., 44, (2008), pp. 1-21.

[7] A. Anber, S. Belarbi, Z. Dahmani : *New Existence And Uniqueness Results For Fractional Differential Equations,* An. S.t. Univ. Ovidius Constant., (2013), pp. 33-41.

[8] E.W. Anderson, L.P. Hansen : *Second International Conference On Computing in Economics And Finance*, Geneva., (1996), pp. 1-13.

[9] R.L. Bagley : *Application Of Generalized Derivatives To Viscoelasticity,* PhD Thesis, Air Force Institute Of Technologie., (1979).

[10] C.T.H. Baker, K. Burrage and N.J. Ford : *Evolutionary Problems,* Journal Of Computational And Applied Mathematics., Vol. 205, No. 2, (2007), pp. 377-427.

[11] D. Baleanu, S.Z. Nazemi and S. Rezapour : *The Existence Of Solution For A n Dimensional System Of Multiterm Fractional Integrodifferential Equations With Antiperiodic Boundary Value Problems,* Abstract and Applied Analysis, Vol. (2013), 7 pages.

[12] M. Benchohra, S. Hamani, S.K. Ntouyas : *Boundary Value Problems For Differential Equations With Fractional Order And Nonlocal Conditions*, Nonlinear Anal., 71, (2009), pp. 2391-2396.

[13] M. E. Bengrine, Z. Dahmani : *Boundary Value Problem For Fractional Differential Equations,* Int. J. Open Problems Compt. Math., 5(4), (2012), pp. 7-15.

[14] A. Blumen, J. Klafter, R. Hilfer and R. Metzler : *Strange Kinetics*, Chemical Physics., Vol. 284, No.1, (2002), pp. 104-301.

[15] R. Caponetto, G. Dongola, L. Fortuna, and I. Petrás : *Fractional Order Systems : Modeling and Control Applications*, World Scientific Series On Nonlinear Science, Series A. World Scientific., Singapore, (2010).

[16] M. Caputo : *Linear Model Of Dissipation Whose Q is Almost Frequency Independent*, Part II. Geophysical Journal Of Royal Astronomical Society., 13, (1967), pp. 529-39.

[17] G. Cooper, D. Cowan : *The Application Of Fractional Calculus To Potential Field Data*, Exploration geophysics., 34, (2003), pp. 51-56.

[18] C. Corduneanu : *Principles Of Differential And Integral Equations*, Chelsea Publ. Comp., 2nd Edition, (1977).

[19] Z. Cui. P. Yu, Z. Mao : *Existence Of Solutions For Nonlocal Boundary Value Problems Of Nonlinear Fractional Differential Equations*, Advances In Dynamical Systems And Applications., 7(1), (2012), pp. 31-40.

[20] Z. Dahmani, M.A. Abdellaoui and M. Houas : *Coupled Systems Of Fractional Integro-Differential Equations Involving Several Functions,* TAMCS Journal., 5 (1) (2015), pp.53–61.

[21] Z. Dahmani, A. Taïeb : *The Hight Order Lane-Emden Fractional Differential System : Existence, Uniqueness And Ulam Stabilities,* Kragujevac Journal of Mathematics., To Appear In 2015.

[22] Z. Dahmani, A. Taïeb : *Solvability Of A Coupled System Of Fractional Differential Equations With Periodic And Antiperiodic Boundary Conditions,* PALM Letters., (2015), pp. 29-36.

[23] Z. Dahmani, A. Taïeb : *A Coupled System Of Fractional Differential Equations Involving Two Fractional Orders,* ROMAI Journal., Vol. 11, No.2 (2015), pp.141–177.

[24] Z. Dahmani, A. Taïeb : *New Existence And Uniqueness Results For High Dimensional Fractional Differential Systems,* Ser. Math. Inform., Vol. 30, No 3, (2015), pp. 281–293.

[25] Z. Dahmani, A. Taïeb : *Solvability For High Dimensional Fractional Differential Systems with High Arbitrary Orders,* Journal of Advanced Scientific Research In Dynamical And Control Systems., Vol. 7, 4, (2015), pp. 51 - 64.

[26] Z. Dahmani, A. Taïeb and Nabil Bedjaoui : *Solvability and Stability For Nonlinear Fractional Integro-Differential Systems of Hight Fractional Orders,* Ser. Math. Inform., Accepted 2016.

[27] S.A. David : *In Proceddings Of The 2007 Iternational Conference On Computational And Mathematical Methods In Science And Engineering*, Chicago., Vol. 1, (2007), pp. 148-158.

[28] S.A. David, J.L. Linarese and E.M.J.A. Pallone : *Fractional Order Calculus : Historical Apologia, Basic Concepts and Some Applications,* Revista Brasileira de Ensino de Fisica., Vol. 33, No. 4, 4302, (2011).

[29] W. Deng : *Smoothness And Stability Of The Solutions For Nonlinear Fractional Differential Equations,* Nonlinear Anal-Theor., 72, (2010), pp. 1768-1777.

[30] M. Fečkan, J. Wang and Y. Zhou : *Ulam's Type Stability Of Impulsive Ordinary Differential Equations,* J. Math. Anal. Appl., 395, (2012), pp. 258–264.

[31] Y. Ferdi, J.P. Herbeuval and A. Charef : *Un filtre Numérique Basé Sur La Dérivation Non-Entière Pour L'analyse du Signal Electrocardiographique,* ITBM-RBM., 21, (2000), pp. 205-209,

[32] M. Gaber, M.G. Brikaa : *Existence Results For A Coupled System Of Nonlinear Fractional Differential Equation With Three Point Boundary Conditions*, Journal Of Fractional Calculus And Applications, Vol. 3(21), (2012), pp. 1-10.

[33] V. Ga ychuk, B. Datsko and V. Meleshko : *Mathematical Modeling Of Time Fractional Reaction Diffusion Systems*, Journal Of Computational And Applied Mathematics., Vol. 220. No. 1-2, (2008), pp. 215-225.

[34] R. Gorenflo, F. Mainardi : *Fractional Calculus : Integral And Differential Equations Of fractional Order, In Fractals And Fractional Calculus In Continuum Mechanics*, Springer-Verlag., Vienna, (1997), pp. 291-348.

[35] R. Gorenflo, F. Mainardi, M. Raberto and E. Scalas : *Fractional Diffusion In Finance : Basic Theory, In Modelli Dinamicia In Economia E Finnanza*. Urbino : MDF, (2000).

[36] B.M. Hambly, S. Howison et T. Kluge : *Quantitative Finance,* 9, 937, (2009).

[37] T. Hélie and D. Matignon : *Diffusive Representations For The Analysis And Simulation Of Flared Acoustic Pipes With Visco-Thermal Losses,* Math. Mod. and Meth. In Appl., (2006), pp. 503–536.

[38] D. Henry : *Geometric Theory Of Semilinear Parabolic Equations*, LNM 840, Springer-Verlag., Berlin, Heidelberg, New York, (1981).

[39] R. Hilfer : *Applications Of Fractional Calculus In Physics*, World Scientific, River Edge., New Jersey, (2000).

[40] M. Houas, Z. Dahmani : *New Results For A Caputo Boundary Value Problem*, American Journal Of Computational And Applied Mathematics., 3(3), (2013), pp. 143-161.

[41] M. Houas, Z. Dahmani : *New Results For A Coupled System Of Fractional Differential Equations,* Ser. Math. Inform., Vol. 28, No. 2, (2013), pp. 133-150.

[42] M. Houas, M. Benbachir and Z. Dahmani : *Some Resullts For A Four Point BVP Of A Coupled System With Caputo Derivative,* Malaya, J. Math., Vol. 3, No. 1, (2015), pp. 30-42.

[43] D.H. Hyers : *On The Stability Of The Linear Functional Equation*, Proc. Nat. Acad, Sci., 27, (1941), pp. 222–224.

[44] D.H. Hyers, G. Isac and Th. M. Rassias : *Stability Of Functional Equations In Several Variables,* Birkh Auser., Basel, (1998).

[45] R. W. Ibrahim : *Approximate Solutions For Fractional Differential Equation In The Unit Disk*, Electron J Qualit Th Diff Equat., 64, (2011), pp.1-11.

[46] R.W. Ibrahim : *Ulam Stability For Fractional Differential Equation In Complex Domain,* Abstract And Applied Analysis., Article ID 649517, (2012), pp. 1–8.

[47] R.W. Ibrahim : *Stability Of A Fractional Differential Equation,* International Journal Of Mathematical, Computational, Physical And Quantum Engineering., Vol. 7, No. 3, (2013), pp. 300-305.

[48] R.W. Ibrahim : *Ulam Stability Of Boundary Value Problem,* Kragujevac Journal Of Mathematics., Vol. 37(2), (2013), pp. 287-297.

[49] W.H. Jiang : *Solvability For A Coupled System Of Fractional Differential Equations At Resonance,* Nonlinear Anal. Real World Appl., 13, (2012), pp. 2285-2292.

[50] S.M. Jung : *Hyers-Ulam-Rassias Stability Of Functional Equations,* In Mathematical Analysis., Hadronic Press, Palm Harbor, (2001).

[51] S.M. Jung : *Hyers-Ulam-Rassias Stability of Functional Equations,* In Nonlinear Analysis., Springer, New York, (2011).

[52] A.A. Kilbas, S.A. Marzan : *Nonlinear Differential Equation With The Caputo Fraction Derivative In The Space Of Continuously Differentiable Functions*, Differ. Equ., 41(1), (2005), pp. 84-89.

[53] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo : *Theory And Applications Of Fractional Differential Equations*, Elsevier B.V., Amsterdam, The Netherlands, (2006).

[54] J. Klafter, S.C. Lim, R. Metzler : *Fractional Dynamics,* Recent Advances, World Scientific., Singapore, (2011).

[55] R. C. Koeller : *Applications Of Fractional Calculus To The Theory Of Viscoelasticity.* J. Appl. Mech., 51, (1984), pp. 299–307.

[56] S.F. Lacroix : *Traité du Calcul Différentiel Et du Calcul Integral,* Paris : Mme. V^{e}Courcier, (1819), Tome Troisième, Seconde Edition, pp. 409-410.

[57] V. Lakshmikantham, A.S. Vatsala : *Basic Theory Of Fractional Defferential Equations*, Nonlinear Anal., (2008), pp. 677-2682.

[58] V. Lakshmikantham, S. Leela and J.V. Devis : *Theory Of Fractional Dynamic Systems*, Combridge Academic., Combridge, (2009).

[59] G.W. Leibnitz : *Leibnitzen's Mathematische Schriften*, Hildesheim, Germany : Georg Olm, Vol. 2, (1962), pp. 301-302.

[60] R. Li : *Existence Of Solutions For Nonlinear Singular Fractional Differential Equations With Fractional Derivative Condition,* Advances In Difference Equations., (2014).

[61] M. Li, Y. Liu : *Existence And Uniqueness Of Positive Solutions For A Coupled System Of Nonlinear Fractional Differential Equations,* Open Journal Of Applied Sciences., 3, (2013), pp. 53-61.

[62] Z. Lin, W. Wei and J.R. Wang : *Existence And Stability Resullts For Impulsive Integro-Differential Equations*, Ser. Math. Inform., Vol. 29, No. 2, (2014), pp. 119–130.

[63] C.P. Li, FR. Zhang : *A Survey On The Stability Of Fractional Differential Equations,* Eur Phys J Special Topics., 193, (2011), pp. 27-47.

[64] Z.H. Liu, J.H. Sun : *Nonlinear Boundary Value Problems Of Fractional Differential Systems,* Computers And Mathematics With Applications., Vol. 64, No. 4, (2012), pp. 463-475.

[65] F. Mainardi : *Fractional Calculus : Some Basic Problems In Continuum And Statistical Mechanics,* Fractals And Fractional Calculus In Continuum Mechanics., (1999).

[66] B. Mathieu, P. Melchior, A. Oustaloup and Ch. Ceyral : *Fractional Differentiation For Edge Detection*, Signal Processing., 83, (2003), pp. 2421-2432.

[67] K.S. Miller, B. Ross : *An Introduction To The Fractional Calculus And Fractional Differential Equations*, Wiley, New York, (1993).

[68] P. Muniyappan, S. Rajan : *Hyers-Ulam-Rassias Stability Of Fractional Differential Equation*, International Journal Of Pure And Applied Mathematics., Vol. 102, No. 4, (2015), pp. 631-642.

[69] J. Nieto, J. Pimente : *Positive Solutions Of A Fractional Thermostat Model,* Boundary Value problems., 1(5), (2013), pp. 1-11.

[70] S.K. Ntouyas : *Existence Results For First Order Boundary Value Problems For Fractional Differential Equations And Inclusions With Fractional Integral Boundary Conditions,* Journal Of Fractional Calculus And Applications., 3(9), (2012), pp. 1-14.

[71] N. Octavia : *Nonlocal Initial Value Problems For First Order Differential Systems*, Fixed Point Theory., Vol. 22, No. 1, (2009), pp. 64-69.

[72] M.D. Ortigueira, J.A. Tenreiro Machado : *Fractional Calculus Applications In Signals And Systems*, Signal Processing., Vol. 86, No. 10, (2006), pp. 2503-3094.

[73] A. Oustaloup : *La Commande CRONE*, Hermes, Paris, (1991).

[74] A. Oustaloup, F. Levron, B. Mathieu and F.M. Nanot : *Frequency-Band Complex Noninteger-Differentiator : Characterization And Synthesis*, IEEE Transactions On Circuits And Systems I., 47(1), (2000), pp. 25-39.

[75] I. Podlubny : *Fractional-Order System And Fractional-Order Controllers,* Technical Report UEF-03-94, Institute of Experimental Physics., Academy of Sciences, Slovakia, (1994).

[76] L. Podlubny : *Fractional Differential Equations,* Academic Press., San Diego, (1999).

[77] Th.M. Rassias : *On The Stability Of Linear Mappings In Banach Spaces,* Proc. Amer. Math. Soc., 72, (1978), pp. 297–300.

[78] Y.A. Rossikhin, M.V. Shitikova : *Applications Of Fractional Calculus To Dynamic Problems Of Linear And Nonlinear Hereditary Mechanics Of Solids,* Applied Mechanics Reviews., 50, (1997), pp. 15-67.

[79] S.G. Samko, A.A. Kilbas and O.I. Marichev : *Fractional Integrals And Derivatives : Theory And Applications,* Gordon And Breach Science Publishers., Switzerland, (1993).

[80] E. Scalas, R. Gorenflo and F. Mainardi, Physica A 284, 376, (2000).

[81] D.R. Smart : *Fixed point Theorems*, Cambridge University Press., (1980).

[82] L. Sommacal, P. Melchior, A. Oustaloup, J.M. Cabelguen and A. J. Ijspeert : *Fractional Multi-Models Of The Frog Gastrocnemius Muscle,* Journal Of Vibration And Control, 14(9-10), (2008), pp. 1415-1430.

[83] J. Spanier, K.B. Oldham : *The Fractional Calculus,* Academic Press., New York, (1974).

[84] H.M. Srivastava, S. Owa : *Univalent Functions, Fractional Calculus And Their Applications,* Halsted Press, John Wiley And Sons., New York, Chichester, Brisban, And Toronto, (1989).

[85] S. Staněk : *The Existence Of Positive Solutions Of Singular Fractional Boundary Value problems,* Computers & Mathematics With Applications., Vol. 62, No. 3, (2011), pp. 1379–1388.

[86] A. Taïeb, Z. Dahmani : *A Coupled System Of Nonlinear Differential Equations Involing m Nonlinear Terms,* Georjian Math. Journal. 2016 ; aop, Doi : 10.1515/gmj-2016-0014.

[87] A. Taïeb, Z. Dahmani : *A New Problem Of Singular Fractional Differential Equations,* Journal of Dynamical Systems and Geometric Theories., Accepted 2016.

[88] A. Taïeb, Z. Dahmani : *On Singular Fractional Differential Systems* and Ulam-Hyers Stabilities, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences., Accepted 2016.

[89] V.E. Tarasov : *Fractional Dynamics, Applications Of Fractional Calculus To Dynamics of particles*, Fields And Media, Springer, Heidelberg, (2010).

[90] S.M. Ulam : *A Collection Of Mathematical Problems*, Interscience Publishers., New York, (1968).

[91] J. Wang, L. Lv and Y. Zhou : *Ulam Stability And Data Dependence For Fractional Differential Equations With Caputo Derivative,* Electronic J Qualit TH Diff Equat., 63, (2011), pp. 1-10.

[92] G.T. Wang, B. Ahmad and L. Zhang : *A Coupled System Of Nonlinear Fractional Differential Equations Fractional Boundary Conditions On An Unbounded Domain,* Abst. Appl. Anal., Article ID 248709, (2012), 11 pages.

[93] J. Wang, M. Feckan, Y. Zhou : *Ulam's Type Stability Of Impulsive Ordinary Differential Equations,* J. Math. Anal. Appl. 395, (2012), pp. 258–264.

[94] J. Wang, L. Lv and Y. Zhou : *New Concepts And Results In Stability Of Fractional Differential Equations,* Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 17, (2012), pp. 2530–2538.

[95] W. Yang : *Positive Solutions For A Coupled System Of Nonlinear Fractional Differential Equations With Integral Boundary Conditions,* Comput. Math. App1., Vol. 63, (2012), pp. 288-297.

[96] W.X. Zhou, Y.D. Chu and D. Baleanu : *Uniqueness And Existence Of Positive Solutions For A Multi-Point Boundary Value Problem Of Singular Fractional Differential Equations,* Advances In Difference Equations, (2013).

[97] C. X. Zhu, X. Zhang and Z.Q. Wu : *Solvablity For A Coupled System Of Fractional Differential Equations With Integer Boundary Conditions,* Taiwanese Journal Of Mathematics, Vol. 17, No. 6, (2013), pp. 2039-2054.