REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABD ELHAMID BEN BADIS MOSTAGANEM

Faculté des Sciences Exactes et d'Informatique

Département de Mathématiques et d'Informatique

THESE DE DOCTORAT

=−=−=−=−=−=−=−=−=−o ◯ o−=−=−=−=−=−=−=−=−=

Option : Calcul Fractionnaire

Intitulé

Applications des Inégalités Intégrales aux Problèmes aux Limites d'Ordre Arbitraire

Présenté par : **HOUAS Mohamed**

Soutenu le :10/11/2016 devant le Jury composé de :

Présidente	:	HAMANI BELARBI Samira	Prof. Université de Mostaganem
Examinateur	:	BENDOUKHA Berrabah	Prof. Centre universitaire de Naama
Examinateur	:	DEBBOUCHE Amar	MCA. Université de Guelma
Co-encadreur	:	BENBACHIR Mamar	Prof. Université de Khemis Miliana
Encadreur	:	DAHMANI Zoubir	Prof. Université de Mostaganem

Année Universitaire : **2015 − 2016**

Remerciements

Louange à **ALLAH LE TOUT PUISSANT** qui m'a donné le courage et la volonté pour la réalisation de ce travail.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à mon directeur de thèse Monsieur **Zoubir DAHMANI**, Professeur à l'université ABDELHAMID BEN BADIS de Mostaganem, pour la confiance qu'il m'a accordée en me permettant de réaliser cette thèse sous sa direction. J'avoue surtout qu'il n'a pas cesser d'être présent pour une continuité solide de mes travaux de recherches.

Je remercie très sincèrement mon co-directeur de thèse Monsieur **Maamar BENBACHIR**, Professeur à l'université DJILALI BOUNAAMA de Khemis-Miliana, pour ses suggestions et propositions très utiles pour l'amélioration de ce travail, par son soutien, son suivi et l'intêret apportés à cette thèse.

Je remercie aussi Madame **Samira HAMANI BELARBI**, Professeur à l'université ABDELHAMID BEN BADIS de Mostaganem, pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.

Je remercie également Monsieur **Berrabah BENDOUKHA**, Professeur au Centre universitaire SALHI AHMED de Naama et Monsieur **Amar DEBBOUCHE**, Maître de conférence à l'université 8 MAI 1945 de Guelma, pour avoir accepté de participer au jury de cette thèse et pour l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux et leurs remarques judicieuses.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à tous les membres de ma famille et amis qui m'ont toujours encouragé au cours de la réalisation de cette thèse.

Résumé

Le travail de cette thèse porte sur l'application des inégalités intégrales aux problèmes aux limites d'ordre arbitraire.

Les inégalités intégrales jouent un rôle important en théorie des équations différentielles et en sciences appliquées. De plus, les inégalités de type fractionnaire sont également assez importante dont les applications sont très nombreuses, notamment en théorie des équations différentielles fractionnaires, en théorie des approximations, en probabilités et statistique.

Dans cette thèse, on présentra des résultats d'ordre non entier sur les estimations des moments fractionnaires d'ordres (r, α) en utilisant la théorie des intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville. Aussi en appliquant l'intégrale $k-$fractionnaire de Riemann-Liouville on donnera des résultats sur les estimations des espérances $k-$fractionnaire, des variances $k-$fractionnaire. En suite, on s'intéresse à l'applications des inégalités intégrales fractionnaires pour étudier un problème aux limites d'ordre arbitraire dans un espace de Banach. Finalement, on traitera la question d'existence et d'unicité de solutions d'un système d'équations différentielles fractionnaire.

Abstract

The work of this thesis focuses on the application of integral inequalities to boundary value problems of arbitrary order.

Integral inequalities play an important role in the theory of differential equations and applied sciences. Moreover, the fractional type inequalities are also quite important that the applications are numerous, including fractional theory of differential equations, theoretical approximations in probability and statistics.

In this thesis, we present some results of fractional order on estimates of $(r, \alpha)-$fractional moments using the Riemann-Liouville fractional integral theory. Also by applying the $k-$fractional Riemann-Liouville integral we give some results on estimates of $k-$fractional dispersion and $k-$fractional variance. Next, we are interested at the applications of fractional integral inequalities to study a boundary value problem of arbitrary order in a Banach space. Finally, we treat the question of existence and uniqueness of the solution of a system of fractional differential equations.

Table des matières

Introduction

"Peut-on étendre l'ordre entier de la dérivation et de l'intégration à un ordre non entier, voire fractionnaire ?" Plus précisément qu'est ce qu'il pourrait représenter une dérivée d'ordre $\frac{1}{2}$? Cette intérrogation a fait l'objet d'une lettre de G. Leibniz adressée en 1695 à G. L'Hopital. C'était la naissance du calcul fractionnaire. On doit donc attendre la fin du $17^{ème}$ siècle, pour voir les premières contributions au développement de la théorie du calcul fractionnaire, comme : P.S. Laplace (1812), J.B. J. Fourier (1822), N.H. Abel (1823), J. Liouville (1832-1873), B. Riemann (1847), A.K. Grunwald (1867-1872), A.V. Letnikov (1868-1872), H. Weyl (1917) et M. Riesz (1949). Il est extrêmement important de signaler qu'il y a plusieurs approches d'intégration et de dérivation fractionnaires au point ou il sont parfois incompatible, chose qui a permis à de nombreux mathématiciens de remettre en cause l'existence d'une telle théorie.

Les premières applications ont vu le jour dans la fin du $20^{ème}$ siècle, en particulier dans la théorie du contrôle et de la géométrie fractale. Les ingénieurs l'ont trouvé parfaitement adéquate quant à la description de phénomènes physiques, c'est un outil puissant qui permet la proposition de modèles qui décrivent de façon précise certains problèmes physiques, comme dans la biologie, la chimie, la mécanique, l'électricité, l'automatique etc $[53, 55, 62]$.

La théorie des équations différentielles fractionnaires est l'un des plus important champs d'applications de la théorie du calcul fractionnaire, en effet de nombreux phénomènes se modélisent par des équations différentielles fractionnaires $[34, 65]$ et l'étude de ces dernières permet certainement une meilleure interprétation des phénomènes physiques. Les inégalités intégrales est un outil éxtrèment important qui intervient dans l'étude des équations différentielles fractionnaires $[4, 8, 21, 22, 27, 28, 39, 40, 41, 58, 77]$ et permet d'établir des résultats d'existences et d'unicités, il constitue en lui même une branche de mathématiques en pleinne évolution $[1, 8, 13, 20, 26, 32, 47, 49, 52, 63, 69, 70, 74]$.

Ce manuscrit s'organise en quatre chapitres.

Le premier chapitre contient les principales définitions et notations nécessaires à la compréhension du contenu de cette thèse. On rappelera les définitions et les propriétés essentielles correspondantes à la notion de l'intégration et la dérivation fractionnaire. Quelques théorèmes du point fixe seront présentés à la fin de ce chapitre.

Dans le deuxième chapitre, on présentera des résultats sur les estimations des moments fractionnaires d'ordres (r, α) en appliquant la théorie des intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville. En utilisant l'intégrale $k-$Riemann-Liouville fractionnaire, on présentera également des résultats sur les estimations des espérances $k-$fractionnaire et variances $k-$fractionnaire.

Dans le chapitre III, on donnera des résultats d'éxistence et d'unicité des solutions pour les problèmes aux limites d'ordre fractionnaire avec conditions non locales. En se basant sur les théorèmes de point fixe, on prouvera l'existence et l'unicité de la solution du problème. On fera appel, en particulier, à la théorie des inégalités fractionnaires, qui sera appliquée dans les démonstrations de nos résultats.

Le chapitre IV est consacré à l'étude du système d'équations différentielles fractionnaires avec une dérivée fractionnaire au sens de Caputo. En effet, après avoir donné la solution générale du système, on utilisera les théorèmes de point fixe du Banach, Schaefer et Krasnoselskii pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution du système fractionnaire.

Cette thèse s'achève par une conclusion et quelques perspectives.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, on introduit les éléments nécessaires dont on aura besoin pour nos resultats principaux.

La première et la deuxième section rassemblent les définitions et les propriétés essentielles correspondantes à la notion de l'intégration et la dérivation fractionnaire. Ces définitions et propriétés peuvent être retrouvées avec plus de détails dans les références suivantes : $[43, 46, 54, 56, 60, 64, 66]$. La dernière section est consacrée à la présentations de quelques théorèmes classiques de ponit fixe.

1.1 Intégration d'Ordre Arbitraire

1.1.1 Fonctions d'Euler

Le présent paragraphe sera dédie aux fonctions d'Euler qui sont le noyau dur du calcul fractionnaire, il s'agit de la fonction Gamma et de la fonction Bêta.

Fonction Gamma

La fonction Gamma est simplement la généralisation de la fonction factorielle. Elle est donneé par la définition suivante :

Définition 1.1 *On appelle la fonction Gamma notée* Γ*, la fonction définie par l'intégale suivante :*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{\alpha-1} du, \ \ Re(\alpha) > 0 \ . \tag{1.1}$$

Propriétés Pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, \ -1, \ -2, ...\}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

(*i*)

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)\ , \tag{1.2}$$

(*ii*)

$$\Gamma(\alpha+n)=\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\,\Gamma(\alpha)\ , \tag{1.3}$$

(*iii*)

$$\Gamma(n+1)=n!\ . \tag{1.4}$$

Fonction Bêta

Définition 1.2 *La fonction Bêta est donnée par :*

$$B(\alpha,\beta)=\int_0^1(1-u)^{\alpha-1}u^{\beta-1}du,\ \ Re(\alpha)>0,\ \ Re(\beta)>0\ . \tag{1.5}$$

Proposition 1.1 *Les fonctions Gamma et Bêta sont reliées par la relation suivante :*

$$B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},\ \ \forall\alpha,\ \ \beta;\ \ Re(\alpha)>0,\ \ Re(\beta)>0\ . \tag{1.6}$$

1.1.2 Intégration-Riemann-Liouville

L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville s'appuie sur la formule de Cauchy pour le calcul de l'intégrale répétée n fois qui est donnée par :

$$I^n[f(t)]=\frac{1}{(n-1)!}\int_a^t(t-\tau)^{n-1}f(\tau)\,d\tau,\ \ n\in\mathbb{N}^*\ . \tag{1.7}$$

En généralisant la formule (1.7) à un ordre α réel positif et en remplaçant la fonction factorielle par la fonction Gamma, on aura la définition suivante :

Définition 1.3 *L'opérateur intégral fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre* $\alpha\geq0$, *pour une fonction continue* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *est défini par :*

$$\begin{cases} I_a^\alpha[f(t)]=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t(t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)\,d\tau;\ \ t>a,\ \ \alpha>0, \\ I_a^0[f(t)]=f(t)\,. \end{cases} \tag{1.8}$$

Exemple 1.1 *Calculons l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction suivante :*

$$f(t) = (t-a)^{\beta}, \ \beta > -1 \ . \tag{1.9}$$

En utilisant la définition (1.8), on obtient :

$$I_a^{\alpha}\left[(t-a)^{\beta}\right] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}(\tau-a)^{\beta}\, d\tau. \tag{1.10}$$

En effectuant le changement de variable $\tau = a + x(t-a)$ et en utilisant la fonction Bêta il résulte que :

$$\begin{aligned} I_a^{\alpha}\left[(t-a)^{\beta}\right] &= \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (t-a-x(t-a))^{\alpha-1}(x(t-a))^{\beta}(t-a)\,dx \\ &= \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\beta+\alpha}\int_0^1 (1-x)^{\alpha-1}x^{\beta}dx \\ &= \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\beta+\alpha}B(\alpha,\beta+1) = \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\beta+\alpha}\tfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \\ &= \tfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(t-a)^{\beta+\alpha}, \end{aligned} \tag{1.11}$$

donc

$$I_a^{\alpha}\left[(t-a)^{\beta}\right] = \tfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(t-a)^{\alpha+\beta} \ . \tag{1.12}$$

Par exemple, pour $\alpha = 1$ et $\beta = 1$, on utilise la formule (1.12), on obtient :

$$I_a^1[(t-a)] = \tfrac{\Gamma(2)}{\Gamma(3)}(t-a)^2 = \tfrac{1}{2}(t-a)^2 \ . \tag{1.13}$$

Et pour $\alpha = \frac{1}{2}$, on a :

$$I_a^{\frac{1}{2}}\left[(t-a)^{\beta}\right] = \tfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}+1\right)}(t-a)^{\beta+\frac{1}{2}} = \tfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma\left(\beta+\frac{3}{2}\right)}(t-a)^{\beta+\frac{1}{2}} \ . \tag{1.14}$$

Lemme 1.1 [43, 46] *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors pour tout $\alpha > 0$, $\beta > 0$ on a :*

$$I_a^{\alpha}\left[I_a^{\beta}[f(t)]\right] = I_a^{\alpha+\beta}[f(t)] \ , \tag{1.15}$$

et

$$I_a^{\alpha}\left[I_a^{\beta}[f(t)]\right] = I_a^{\beta}\left[I_a^{\alpha}[f(t)]\right] \ . \tag{1.16}$$

Preuve. On démontre l'identité (1.15)

En effet,

$$I_a^{\alpha}\left[I_a^{\beta}\left[f\left(t\right)\right]\right]=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\left(x-\tau\right)^{\alpha-1}I_a^{\beta}\left[f\left(\tau\right)\right]d\tau$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x\left[\left(x-\tau\right)^{\alpha-1}\int_a^{\tau}\left(\tau-t\right)^{\beta-1}f\left(t\right)dt\right]d\tau$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x\left(x-\tau\right)^{\alpha-1}d\tau\int_a^{\tau}\left(\tau-t\right)^{\beta-1}f\left(t\right)dt \tag{1.17}$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x f\left(t\right)dt\int_t^x\left(x-\tau\right)^{\alpha-1}\left(\tau-t\right)^{\beta-1}d\tau.$$

■

En effectuant le changement de variable $\tau=t+\left(x-t\right)\rho$ et en utilisant la fonction Bêta, on obtient :

$$I_a^{\alpha}\left[I_a^{\beta}\left[f\left(t\right)\right]\right]$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x f\left(t\right)dt\int_0^1\left(x-t-\left(x-t\right)\rho\right)^{\alpha-1}\left(\left(x-t\right)\rho\right)^{\beta-1}\left(x-t\right)d\rho$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x f\left(t\right)\left(x-t\right)^{\alpha+\beta-1}dt\int_0^1\left(1-\rho\right)^{\alpha-1}\rho^{\beta-1}d\rho \tag{1.18}$$

$$=\frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x\left(x-t\right)^{\alpha+\beta-1}f\left(t\right)dt$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^x\left(x-t\right)^{\alpha+\beta-1}f\left(t\right)dt=I_a^{\alpha+\beta}\left[f\left(t\right)\right].$$

Exemple 1.2 *Si on prend $f\left(x\right)=t-a$ et $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$, on trouve :*

$$I_a^{\alpha}\left[I_a^{\beta}\left[f\left(t\right)\right]\right]=I_a^{\alpha}\left[I_a^{\beta}\left[\left(t-a\right)\right]\right]=I_a^{\alpha}\left[\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\beta+2)}\left(t-a\right)^{\beta+1}\right]=\frac{1}{2}\left(t-a\right)^2\ . \tag{1.19}$$

D'autre part, on a :

$$I_a^{\alpha+\beta}\left[f\left(t\right)\right]=I_a^1\left[\left(t-a\right)\right]=\int_a^x\left(t-a\right)dt=\frac{1}{2}\left(t-a\right)^2\ . \tag{1.20}$$

1.2 Dérivation Non Entière

Dans la littérature, il ya plusieurs appproches de la dérivée fractionnaire parmi celles-ci on cite : dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville et celle de Caputo qui sont les plus utilisées.

1.2.1 Dérivée-Riemann-Liouville

Définition 1.4 *On définit la dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ au sens de Riemann-Liouville d'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ par :*

$$^{RL}D_a^{\alpha}\left[f(t)\right] = \frac{d^n}{dt^n}\left(I_a^{n-\alpha}\left[f(t)\right]\right)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau)\, d\tau, \; n-1<\alpha<n, \; n \in \mathbb{N}^*, \\ \\ \frac{d^n}{dt^n} f(t), \; \alpha = n. \end{cases} \tag{1.21}$$

Exemple 1.3 *Calculons la dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Riemann-Liouville de la fonction $f(t) = (t-a)^{\beta}$ avec $\beta > -1$, alors*

$$^{RL}D_a^{\alpha}\left[(t-a)^{\beta}\right] = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{-\alpha}(\tau-a)^{\beta}\, d\tau\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(I_a^{1-\alpha}\left[(t-a)^{\beta}\right]\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+2)}(t-a)^{1-\alpha+\beta}\right) \tag{1.22}$$

$$= \frac{(\beta-\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+2)}(t-a)^{\beta-\alpha}.$$

Par exemple, pour $\alpha = \frac{1}{2}$, on utilise la formule (1.22), on obtient :

$$^{RL}D_a^{\frac{1}{2}}\left[(t-a)^{\beta}\right] = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right)}\int_a^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}}(\tau-a)^{\beta}\, d\tau\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(I_a^{\frac{1}{2}}\left[(t-a)^{\beta}\right]\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma\left(\beta+\frac{3}{2}\right)}(t-a)^{\beta+\frac{1}{2}}\right) \tag{1.23}$$

$$= \frac{\left(\beta+\frac{1}{2}\right)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma\left(\beta+\frac{3}{2}\right)}(t-a)^{\beta-\frac{1}{2}}.$$

Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, et $\beta = 1$, on a :

$$^{RL}D_a^{\frac{1}{2}}\left[(t-a)\right] = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right)}\int_a^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}}(\tau-a)\, d\tau\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(I_a^{\frac{1}{2}}\left[(t-a)\right]\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}(t-a)^{\frac{3}{2}}\right) \tag{1.24}$$

$$= \frac{3}{2\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}(t-a)^{\frac{1}{2}}.$$

Remarque 1.1 *La dérivée fractionnaire d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville n'est pas nulle.*

En effet, on a :

$$^{RL}D_a^{\alpha}[c] = \frac{d}{dt}\left(\frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{-\alpha}\,d\tau\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(I_a^{1-\alpha}[c]\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{c}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{1-\alpha}\right) \tag{1.25}$$

$$= \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}.$$

Pour $c = 1$, on a :

$$^{RL}D_a^{\alpha}[1] = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha} \ . \tag{1.26}$$

On présente maintenant quelques propriétés de l'opérateur de dérivation au sens de Riemann-Liouville.

Proposition 1.2 [43, 46, 47]
(1). *Soient f et g deux fonctions dont les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville existent. Alors pour tous λ, $\mu \in \mathbb{R}$, $^{RL}D_a^{\alpha}[\lambda f + \mu g]$ existe, et l'on a :*

$$^{RL}D_a^{\alpha}[\lambda f(t) + \mu g(t)] = \lambda\, {}^{RL}D_a^{\alpha}[f(t)] + \mu\, {}^{RL}D_a^{\alpha}[g(t)] \ . \tag{1.27}$$

(2). *En général, on a*

$$^{RL}D_a^{\alpha}\left[{}^{RL}D_a^{\beta}[f(t)]\right] \neq {}^{RL}D_a^{\alpha+\beta}[f(t)] \ . \tag{1.28}$$

(3). *On a aussi*

$$^{RL}D_a^{\alpha}\left[{}^{RL}D_a^{\beta}[f(t)]\right] \neq {}^{RL}D_a^{\beta}\left[{}^{RL}D_a^{\alpha}[f(t)]\right] \ . \tag{1.29}$$

Lemme 1.2 [43, 46, 47] *Soit f une fonction définie sur $[a, b]$ vérifiant $^{RL}D_a^{\alpha}[f(t)] = 0$, $\alpha \in \,]n-1, n[\,$, $n \in \mathbb{N}^*$. Alors*

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i \frac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(\alpha-n+i+1)}(t-a)^{\alpha-n+i} \ , n = [\alpha]+1, \tag{1.30}$$

où les b_i, $i = 0, ..., n-1$ sont des constantes arbitraires.

1.2.2 Dérivée-Caputo

La définition de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo est donnée par :

Définition 1.5 *Soit $f \in C^n([a,b])$, $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre $\alpha \geq 0$ de la fonction f comme suit :*

$$D_a^\alpha [f(t)] = I_a^{n-\alpha}\left[f^{(n)}(t)\right]$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau)\, d\tau, \ n-1 < \alpha < n, \ n \in \mathbb{N}^*, \\ \frac{d^n}{dt^n} f(t), \ \alpha = n. \end{cases} \tag{1.31}$$

Exemple 1.4 *Soit $f(t) = (t-a)^\beta$, $\beta > -1$. Pour $\alpha > 0$, on a :*

$$D_a^\alpha [f(t)] = I_a^{n-\alpha}\left[f^{(n)}(t)\right] = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau)\, d\tau \ . \tag{1.32}$$

Et comme

$$f^{(n)}(t) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)} (t-a)^{\beta-n} \ , \tag{1.33}$$

alors

$$\begin{aligned} D_a^\alpha [f(t)] &= I_a^{n-\alpha}\left[\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)} (t-a)^{\beta-n}\right] \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} (\tau-a)^{\beta-n}\, d\tau. \end{aligned} \tag{1.34}$$

En effectuant le changement de variable $\tau = a + x(t-a)$, on aura :

$$\begin{aligned} D_a^\alpha [f(t)] &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} \int_0^1 (t-a-x(t-a))^{n-\alpha-1} (x(t-a))^{\beta-n} (t-a)\, dx \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} (t-a)^{\beta-\alpha} \int_0^1 (1-x)^{n-\alpha-1} x^{\beta-n} dx \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} (t-a)^{\beta-\alpha} \int_0^1 (1-x)^{n-\alpha-1} x^{\beta-n} dx \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1) B(n-\alpha, \beta-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} (t-a)^{\beta-\alpha} = \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha}. \end{aligned} \tag{1.35}$$

Si l'on prend $\beta = 1$ et $\alpha = \frac{1}{2}$, alors

$$D_a^\alpha [f(t)] = I_a^{n-\alpha}\left[\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right] = I_a^{\frac{1}{2}}\left[\frac{d}{dt}(t-a)\right] = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} (t-a)^{\frac{1}{2}} \ . \tag{1.36}$$

Remarque 1.2 *Si $f = c$, alors*

$$D_a^\alpha [f(t)] = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau)\, d\tau$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \left((t-\tau)^{n-\alpha-1} \times 0\right) d\tau = 0 \tag{1.37}$$

$$= D_a^\alpha [c] = c D_a^\alpha [1] .$$

Proposition 1.3 [43, 46]
(i) Pour tout $\alpha > 0$, λ, $\mu \in \mathbb{R}$, on a :

$$D_a^\alpha [\lambda f(t) + \mu g(t)] = \lambda D_a^\alpha [f(t)] + \mu D_a^\alpha [g(t)] \; . \tag{1.38}$$

(ii) Pour tout $\alpha > 0$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, on a :

1.
$$D_a^\alpha I_a^\alpha [f(t)] = f \; . \tag{1.39}$$

2.
$$\textit{si } D_a^\alpha [f(t)] = 0 \textit{ alors } f(t) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i (t-a)^i \; . \tag{1.40}$$

3.
$$I_a^\alpha D_a^\alpha [f(t)] = f(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (t-a)^i \; . \tag{1.41}$$

Lemme 1.3 [43, 46, 47] *Soit $\beta > \alpha > 0$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors*

$$D_a^\alpha I_a^\beta [f(t)] = I^{\beta-\alpha} [f(t)] , \; t \in [a, b] \; . \tag{1.42}$$

1.3 Autour des Points Fixes

Les théorèmes de point fixe consistent à transformer un problème donné en un problème du type $x = \phi(x)$, ainsi ils fournissent des conditions généralement suffisantes pour lesquelles l'équation $x = \phi(x)$ admet une solution.

Définition 1.6 *Soient $(X, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et (x_n) une suite de X. On dit que (x_n) est une suite de Cauchy si*

$$\forall \varepsilon > 0, \; \exists N \in \mathbb{N}, \; \forall n \geq N, \; \forall m \geq N, \;\; \|x_{n+m} - x_n\| \leq \varepsilon \; .$$

Définition 1.7 *On dit que X est complet pour la norme $\|.\|$ si toute suite de Cauchy dans X est convergente. Un tel espace est aussi appelé espace de Banach.*

Définition 1.8 *Soit X un espace normé. Un sous-ensemble $\Omega \subset X$ est dit borné s'il existe $M > 0$ telle que pour tout $x \in \Omega$ on a :*

$$||x|| \leq M.$$

Définition 1.9 *On dit que Ω est une partie compacte de X si de toute suite de points de Ω on peut extraire une sous-suite qui converge vers un élément de Ω.*

Définition 1.10 *Une partie Ω de X est dite relativement compacte si son adhérence est compact.*

Définition 1.11 *Soit Ω un sous ensemble de $X = C\left(J, E\right)$. Ω est équicontinue si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que :*

$$|t_1 - t_2| \leq \delta \Rightarrow |\phi\left(t_1\right) - \phi\left(t_1\right)| \leq \varepsilon, \text{ pour tout } t_1, t_2 \in J \text{ et } \phi \in \Omega \ .$$

Définition 1.12 *Soit $(X, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Une application ϕ de X dans X est dite contractante s'il existe un nombre positive $\kappa \in [0, 1[$, tel que pour tout $x, y \in X$, on a :*

$$\|\phi\left(x\right) - \phi\left(y\right)\| \leq \kappa \|x - y\| .$$

Définition 1.13 *Soient X un espace vectoriel normé, de norme $\|.\|$ et ϕ une application d'un ensemble X dans lui même. On appelle point fixe de ϕ tout point $x \in X$ tel que :*

$$\phi x = x.$$

Définition 1.14 *Soient X et Y deux espaces de Banach. L'opérateur continu $\phi : X \to Y$ est complètement continu s'il transforme tout borné de X en une partie relativement compacte dans Y.*

Théorème 1.1 *(Point Fixe de Banach)* [30]

Soient X un espace de Banach et $\phi : X \to X$ est un opérateur contractant. Alors il existe un point fixe $x \in X$ tel que $\phi x = x$.

Lemme 1.4 *(Lemme d'O'Regan)* [61]

Soient X un espace de Banach et $C \subset X$ un convexe fermé, et soit un ouvert Ω dans C tel que $0 \in \Omega$. On suppose $\phi\left(\overline{\Omega}\right)$ est borné et $\phi : \overline{\Omega} \to C$ est donné par $\phi = \phi_1 + \phi_2$, où

1. *$\phi_1 : \overline{\Omega} \to X$ est continu et complètement continu.*

2. *$\phi_2 : \overline{\Omega} \to X$ est contractant (i. e, il existe une fonction positive croissante $\theta : [0, \infty) \to [0, \infty)$ satisfaite $\theta(v) < v$, $v > 0$, telle que $\|\phi_2(x) - \phi_2(y)\| \leq \theta \|x - y\|$, pour tout x, $y \in \overline{\Omega}$). Alors,*

(i) ϕ admet un point fixe ; ou bien

(ii) Il existe $x \in \partial\Omega$; $x = \mu\phi x$ pour $0 < \mu < 1$.

Lemme 1.5 *(Lemme d'Ascoli-Arzelà)* [33]

Soit $\Omega \subset X$. Alors Ω est relativement compact dans X si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées

1. *Ω est uniformément borné.*

2. *Ω est équicontinu.*

Théorème 1.2 *(Point Fixe de Schaefer)* [30, 33]

Soient X un espace de Banach et $\phi : X \to X$ un opérateur complètement continu. Si l'ensemble

$$\Omega := \{x \in X : x = \mu\phi x,\ 0 < \mu < 1\}$$

est borné, alors ϕ possède au moins un point fixe.

Théorème 1.3 *(Krasnoselskii)* [5]

Soient X un espase de Banach et F un sous-ensemble fermé, borné et convexe de X. On suppose que les opérateurs R et T vérifient

(i) $Tx + Ry \in F$, pour tou x, $y \in F$.

(ii) R est continu et compact.

(iii) T est contractant.

Alors il existe au moins un élement $z \in F$ tel que $Rz + Tz = z$.

Chapitre 2

Inégalités Intégrales : Riemann Liouville et k- Riemann-Liouville

2.1 Introduction

L'étude des inégalités intégrales a une grande importance dans la théorie des équations différentielles et les sciences appliquées. Dans les deux dernières décenies, beaucoup de chercheurs en mathématiques ont investi dans le développement de cette théorie [1, 6, 24, 44, 45, 52]. Les inégalités de type fractionnaire sont également assez importantes dont les applications sont très nombreuses, notamment en théorie des équations différentielles fractionnaires et en théorie de probabilités. Plusieurs auteurs s'intéressent à l'étude des inégalités intégrales fractionnaires, voir [2, 7, 13, 18, 19, 20, 67, 68] .

Dans ce chapitre, on s'intèresse aux inégalités intégrales fractionnaires et les inégalités intégrales $k-$fractionnaire pour une variable aléatoire continue X avec une fonction de densité de probabilité $(f.\ d.\ p.)$ $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ définie sur un intervalle fini. On présente des résultats sur les estimations des moments fractionnaires d'ordre (r, α) en utilisant l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville. En appliquant l'intégrale $k-$Riemann-Liouville fractionnaire, on présente aussi des résultats sur les estimations des espérances et variances $k-$fractionnaires.

Dans la section 2.2, on introduit les définitions des espérances et des variances relativement au intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville, ensuite on donne quelques propriétés. La section 2.3 est consacrèe à la présentation des résultats fractionnaires qui seront utilisés dans la suite de ce chapitre. Dans la section 2.4, on présente des applications de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville au moment d'ordre (r, α) d'une variable aléatoire continue X avec une fonction de densité de probabilité. On consacre la section 2.5 à l'étude des inégalités intégrales $k-$fractionnaire, dans laquelle on présente l'intégrale $k-$Riemann-Liouville fractionnaire, ensuite on donne les définitions de la fonction de l'espérance et variance adaptées à l'intégrale $k-$Riemann-Liouville fractionnaire. En outre, on présente des applications de l'intégrale $k-$Riemann-Liouville fractionnaire aux espérances et variances d'une variable aléatoire continue X avec une $f.\ d.\ p.\ f$.

2.2 Applications : Espérances, Variances, Moments

Dans ce paragraphe, on présente les définitions de la fonction ésperance, variance fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ et la fonction moment fractionnaire d'ordres $(r > 0,\ \alpha > 0)$ pour une variable aléatoire continue X avec $f.\ d.\ p.\ f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^{+}$. Pour plus de détail, voir les travaux de Z. DAHMANI dans [20].

Définition 2.1 *La fonction ésperance fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ de la variable aléatoire continue X ayant une $f.\ d.\ p.\ f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^{+}$ est définie comme suit :*

$$E_{X,\alpha}(t) := I_a^{\alpha}[tf(t)] = \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} \tau f(\tau)\, d\tau;\ \alpha > 0,\ a < t \leq b\ . \tag{2.1}$$

Définition 2.2 *La fonction espérance fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ de la variable aléatoire continue $X - E(X)$ est définie par :*

$$E_{X-E(X),\alpha}(t) := \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} (\tau - E(X)) f(\tau)\, d\tau;\ \alpha > 0,\ a < t \leq b\ , \tag{2.2}$$

où $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^{+}$ est la $f.\ d.\ p$ de variable aléatoire X et $E(X) = \int_a^b \tau f(\tau)\, d\tau$ est l'espérance de X.

Pour $t = b$, on donne les définitions suivantes :

Définition 2.3 *L'espérance fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ de la variable aléatoire continue X ayant une $f.\ d.\ p.\ f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^{+}$ est définie par :*

$$E_{X,\alpha} := \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b (b-\tau)^{\alpha-1} \tau f(\tau)\, d\tau;\ \alpha > 0\ . \tag{2.3}$$

Définition 2.4 *L'espérance fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ de la variable aléatoire continue $X - E(X)$ est définie comme suit :*

$$E_{X-E(X),\alpha} := \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b (b-\tau)^{\alpha-1} (\tau - E(X)) f(\tau)\, d\tau;\ \alpha > 0\ , \tag{2.4}$$

avec $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^{+}$ est la $f.\ d.\ p$ de X.

Définition 2.5 *La fonction variance fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ d'une variable aléatoire continue X de $f.\ d.\ p.\ f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^{+}$ est donnée par :*

$$\sigma^2_{X,\alpha}(t) := \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} \tau^r f(\tau)\, d\tau;\ \alpha > 0,\ a < t \leq b. \tag{2.5}$$

Pour $t = b$, on a :

Définition 2.6 *La variance fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ d'une variable aléatoire continue X de f. d. p. $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ est donnée par :*

$$\sigma^2_{X,\alpha} := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b (b - \tau)^{\alpha-1} \tau^r f(\tau)\, d\tau;\ \alpha > 0. \tag{2.6}$$

Définition 2.7 *La fonction moment fractionnaire d'ordres $(r > 0,\ \alpha > 0)$ d'une variable aléatoire continue X ayant f. d. p. $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ est donnée par :*

$$M_{r,\alpha}(t) := I_a^\alpha [t^r f(t)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} \tau^r f(\tau)\, d\tau;\ \alpha > 0,\ a < t \leq b\ , \tag{2.7}$$

Définition 2.8 *Le moment fractionnaire d'ordres $(r > 0,\ \alpha > 0)$ d'une variable aléatoire continue X ayant une f. d. p. f est donnée par :*

$$M_{r,\alpha} := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b (b - \tau)^{\alpha-1} \tau^r f(\tau)\, d\tau;\ \alpha > 0\ . \tag{2.8}$$

2.2.1 Propriétés

(P_1) : En appliquant la définition 2.3 pour $\alpha = 1$, on obtient l'espérance classique $E_{X,1} = E(X)$.

(P_2) : En appliquant la définition 2.6 pour $\alpha = 1$, on trouve la variance classique $\sigma^2_{X,1} = \sigma^2(X) = \int_a^b (\tau - E(X))^2 f(\tau)\, d\tau$.

(P_3) : En appliquant la définition 2.8 pour $\alpha = 1$, on obtient le moment classique d'ordre r, $M_{r,1} = M_r = \int_a^b \tau^r f(\tau)\, d\tau$.

(P_4) : Pour $\alpha > 0$, la $f.\ d.\ p.\ f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ satisfaite $I_a^\alpha [f(t)] \leq \frac{(b-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$, $\forall t \in (a, b)$.
(P_5) : Pour $\alpha = 1$, on trouve $I_a^\alpha [f(b)] = 1$.

2.3 Résultats d'Ordre Non Entier

Pour les applications ultérieures, on a besoin des théorèmes et des lemmes suivants, voir [18, 19] .

Théorème 2.1 *Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[0,\infty[$ et p une fonction positive sur $[0,\infty[$. S'il existe $\Phi,\ \varphi,\ \Psi,\ \psi \in \mathbb{R}$ tels que :*

$$\varphi \leq f(x) \leq \Phi,\ \ \psi \leq g(x) \leq \Psi,\ \ x \in [0,t],\ \ t>0\ , \tag{2.9}$$

alors pour tout $t>0$ et $\alpha>0$, on a :

$$\left|I^{\alpha}[p(t)]\,I^{\alpha}[p(t)f(t)g(t)] - I^{\alpha}[p(t)f(t)]\,I^{\alpha}[p(t)g(t)]\right| \leq \left(\tfrac{I^{\alpha}p(t)}{2}\right)^{2}(\Phi-\varphi)(\Psi-\psi)\ . \tag{2.10}$$

Théorème 2.2 *Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[0,\infty[$ vérifiant la condition (2.9) et p une fonction positive sur $[0,\infty[$. Alors pour tout $t>0$ et $\alpha>0$, $\beta>0$, on a :*

$$\begin{aligned}
&\big(I^{\alpha}[p(t)]\,I^{\beta}[p(t)f(t)g(t)] + I^{\beta}[p(t)]\,I^{\alpha}[p(t)f(t)g(t)] \\
&-I^{\alpha}[p(t)f(t)]\,I^{\beta}[p(t)g(t)] - I^{\beta}[p(t)f(t)]\,I^{\alpha}[p(t)g(t)]\big)^{2} \\
&\leq \big[(\Phi I^{\alpha}[p(t)] - I^{\alpha}[p(t)f(t)])\big(I^{\beta}[p(t)f(t)] - \varphi I^{\beta}[p(t)]\big) \\
&+(I^{\alpha}[p(t)f(t)] - \varphi I^{\alpha}[p(t)])\big(\Phi I^{\beta}[p(t)] - I^{\beta}[p(t)f(t)]\big)\big] \\
&\times\big[(\Psi I^{\alpha}[p(t)] - I^{\alpha}[p(t)g(t)])\big(I^{\beta}[p(t)g(t)] - \psi I^{\beta}[p(t)]\big) \\
&+(I^{\alpha}[p(t)g(t)] - \psi I^{\alpha}[p(t)])\big(\Psi I^{\beta}[p(t)] - I^{\beta}[p(t)g(t)]\big)\big].
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Théorème 2.3 *Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[0,\infty[$ vérifiant (2.9). Alors pour tout $t>0$ et $\alpha>0$, on a :*

$$\left|\tfrac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}I^{\alpha}[f(t)g(t)] - I^{\alpha}[f(t)]\,I^{\alpha}[g(t)]\right| \leq \left(\tfrac{t^{\alpha}}{2\Gamma(\alpha+1)}\right)^{2}(\Phi-\varphi)(\Psi-\psi)\ . \tag{2.11}$$

Lemme 2.1 *Soit u une fonction intégrable sur $[0,\infty[$ satisfait la condition (2.9). Alors pour tout $t>0$ et $\alpha>0$, on a :*

$$\begin{aligned}
&\tfrac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}I^{\alpha}[u^{2}(t)] - (I^{\alpha}[u(t)])^{2} \\
&\leq \left(\Phi\tfrac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} - I^{\alpha}[u(t)]\right)\left(I^{\alpha}[u(t)] - \varphi\tfrac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right) \\
&-\tfrac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}I^{\alpha}[(\Phi-u(t))(u(t)-\varphi)].
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Théorème 2.4 *Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[0,\infty[$ satisfaisant la condition (2.9). Alors pour tout $t>0$ et $\alpha,\ \beta>0$, on a :*

$$\begin{aligned}
&\left(\tfrac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}I^{\beta}\left[f\left(t\right)g\left(t\right)\right]+\tfrac{t^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}I^{\alpha}\left[f\left(t\right)g\left(t\right)\right]-I^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right]I^{\beta}\left[g\left(t\right)\right]-I^{\beta}\left[f\left(t\right)\right]I^{\alpha}\left[g\left(t\right)\right]\right)^{2}\\
&\leq\left[\left(\Phi\tfrac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}-I^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right]\right)\left(I^{\beta}\left[f\left(t\right)\right]-\varphi\tfrac{t^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}\right)\right.\\
&\left.+\left(I^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right]-\varphi\tfrac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\left(\Phi\tfrac{t^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}-I^{\beta}\left[f\left(t\right)\right]\right)\right]\\
&\times\left[\left(\Psi\tfrac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}-I^{\alpha}\left[g\left(t\right)\right]\right)\left(I^{\beta}\left[g\left(t\right)\right]-\psi\tfrac{t^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}\right)\right.\\
&\left.+\left(I^{\alpha}\left[g\left(t\right)\right]-\psi\tfrac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\left(\Psi\tfrac{t^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}-I^{\beta}\left[g\left(t\right)\right]\right)\right].
\end{aligned}\tag{2.13}$$

Lemme 2.2 *Soient f et g deux fonctions intégrables sur l'intervalle $[0,\infty[$. Alors pour tout $t>0$ et $\alpha,\ \beta>0$, on a :*

$$\begin{aligned}
&\left(\tfrac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}I^{\beta}\left[f\left(t\right)g\left(t\right)\right]+\tfrac{t^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}I^{\alpha}\left[f\left(t\right)g\left(t\right)\right]-I^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right]I^{\beta}\left[g\left(t\right)\right]-I^{\beta}\left[f\left(t\right)\right]I^{\alpha}\left[g\left(t\right)\right]\right)^{2}\\
&\leq\left(\tfrac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}I^{\beta}\left[f^{2}\left(t\right)\right]+\tfrac{t^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}I^{\alpha}\left[f^{2}\left(t\right)\right]-2I^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right]I^{\beta}\left[f\left(t\right)\right]\right)\\
&\times\left(\tfrac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}I^{\beta}\left[g^{2}\left(t\right)\right]+\tfrac{t^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}I^{\alpha}\left[g^{2}\left(t\right)\right]-2I^{\alpha}\left[g\left(t\right)\right]I^{\beta}\left[g\left(t\right)\right]\right).
\end{aligned}\tag{2.14}$$

Lemme 2.3 *Soit u une fonction intégrable sur l'intervalle $[0,\infty[$ vérifiant la condition (2.9). Alors pour tout $t>0$ et $\alpha>0$, $\beta>0$ on a :*

$$\begin{aligned}
&\tfrac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}I^{\beta}\left[u^{2}\left(t\right)\right]+\tfrac{t^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}I^{\alpha}\left[u^{2}\left(t\right)\right]-2I^{\alpha}\left[u\left(t\right)\right]I^{\beta}\left[u\left(t\right)\right]\\
&\leq\left(\Phi\tfrac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}-I^{\alpha}\left[u\left(t\right)\right]\right)\left(I^{\beta}\left[u\left(t\right)\right]-\varphi\tfrac{t^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}\right)\\
&+\left(\Phi\tfrac{t^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}-I^{\beta}\left[u\left(t\right)\right]\right)\left(I^{\alpha}\left[u\left(t\right)\right]-\varphi\tfrac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)
\end{aligned}\tag{2.15}$$

$$-\tfrac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}I^{\beta}\left[\left(\Phi-u\left(t\right)\right)\left(u\left(t\right)-\varphi\right)\right]-\tfrac{t^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}I^{\alpha}\left[\left(\Phi-u\left(t\right)\right)\left(u\left(t\right)-\varphi\right)\right].$$

2.4 $(r,\alpha)-$ Moments

Dans cette section, on présente des applications de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville aux moments fractionnaires d'ordre (r,α) d'une variable aléatoire continue X avec une fonction de densité de probabilité définie sur $[a,b]$.

La première application de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville au moment fractionnaire d'ordre (r,α) est la suivante :

Théorème 2.5 [35] *Soit X une variable aléatoire continue muni d'une fonction de densité de probabilité $f:[a,b]\to\mathbb{R}^{+}$. Alors pour tout $a<t\leq b$ et $\alpha>0$, les deux inégalities suivantes sont satisfaites :*

$$\begin{aligned} &I_a^\alpha\left[f(t)\right]I_a^\alpha\left[t^{r-1}\left(t-E(X)\right)f(t)\right]-\left(I_a^\alpha\left[\left(t-E(X)\right)f(t)\right]\right)M_{r-1,\alpha}(t)\\ &\leq \|f\|_\infty^2\left[\tfrac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}I_a^\alpha\left[t^r\right]-I_a^\alpha\left[t\right]I_a^\alpha\left[t^{r-1}\right]\right];\ f\in L_\infty\left[a,b\right], \end{aligned} \tag{2.16}$$

et

$$\begin{aligned} &I_a^\alpha\left[f(t)\right]I_a^\alpha\left[t^{r-1}\left(t-E(X)\right)f(t)\right]-\left(I_a^\alpha\left[\left(t-E(X)\right)f(t)\right]\right)M_{r-1,\alpha}(t)\\ &\leq \tfrac{1}{2}\left(t-a\right)\left(t^{r-1}-a^{r-1}\right)\left(I_a^\alpha\left[f(t)\right]\right)^2. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Preuve. On considère la quantité suivante :

$$H(x,y):=\left(g(x)-g(y)\right)\left(h(x)-h(y)\right);\ x,\ y\in(a,t),\ a<t\leq b\ . \tag{2.18}$$

On prend $p:[a,b]\to\mathbb{R}^{+}$ et on multiplie les deux membres de (2.18) par $\frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-x)^{\alpha-1}p(x)$; $x\in(a,t)$, puis on intègre sur (a,t) par rapport à x, on obtient :

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t(t-x)^{\alpha-1}p(x)H(x,y)\,dx\\ &=\tfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t(t-x)^{\alpha-1}p(x)g(x)h(x)\,dx-g(y)\tfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t(t-x)^{\alpha-1}p(x)h(x)\,dx\\ &-h(y)\tfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t(t-x)^{\alpha-1}p(x)g(x)\,dx+g(y)h(y)\tfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t(t-x)^{\alpha-1}p(x)\,dx\\ &=I_a^\alpha\left[p(t)g(t)h(t)\right]-g(\rho)I_a^\alpha\left[p(t)h(t)\right]-h(\rho)I_a^\alpha\left[p(t)g(t)\right]+g(\rho)h(\rho)I_a^\alpha\left[p(t)\right]. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Maitenant, on multiplie les deux membres de (2.19) par $\frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-y)^{\alpha-1}p(y)$; $y\in(a,t)$, puis on intègre sur (a,t) par rapport à y, on trouve :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma^2(\alpha)}\int_a^t\int_a^t (t-x)^{\alpha-1}(t-y)^{\alpha-1}p(x)\,p(y)\,H(x,y)\,dxdy\\
&=\frac{1}{\Gamma^2(\alpha)}\int_a^t\int_a^t (t-x)^{\alpha-1}(t-y)^{\alpha-1}p(x)\,g(x)\,h(x)\,p(y)\,dxdy\\
&-\frac{1}{\Gamma^2(\alpha)}\int_a^t\int_a^t (t-x)^{\alpha-1}(t-y)^{\alpha-1}p(x)\,h(x)\,p(y)\,g(y)\,dxdy\\
&-\frac{1}{\Gamma^2(\alpha)}\int_a^t\int_a^t (t-x)^{\alpha-1}(t-y)^{\alpha-1}p(x)\,g(x)\,p(y)\,h(y)\,dxdy\\
&+\frac{1}{\Gamma^2(\alpha)}\int_a^t\int_a^t (t-x)^{\alpha-1}(t-y)^{\alpha-1}p(x)\,p(y)\,g(y)\,h(y)\,dxdy.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Ce qui revient à :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma^2(\alpha)}\int_a^t\int_a^t (t-x)^{\alpha-1}(t-y)^{\alpha-1}p(x)\,p(y)\,H(x,y)\,dxdy\\
&=\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-x)^{\alpha-1}p(x)\,g(x)\,h(x)\,dx\right]\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-y)^{\alpha-1}p(y)\,dy\right]\\
&-\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-x)^{\alpha-1}p(x)\,h(x)\,dx\right]\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-y)^{\alpha-1}p(y)\,g(y)\,dy\right]\\
&-\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-x)^{\alpha-1}p(x)\,g(x)\,dx\right]\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-y)^{\alpha-1}p(y)\,h(y)\,dy\right]\\
&+\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-x)^{\alpha-1}p(x)\,dx\right]\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-y)^{\alpha-1}p(y)\,g(y)\,h(y)\,dy\right].
\end{aligned} \tag{2.21}$$

En calculant les intégrales du second membre, on a :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma^2(\alpha)}\int_a^t\int_a^t (t-x)^{\alpha-1}(t-y)^{\alpha-1}p(x)\,p(y)\,H(x,y)\,dxdy\\
&=I_a^\alpha[p(t)]\,I_a^\alpha[p(t)\,g(t)\,h(t)]-I_a^\alpha[p(t)\,g(t)]\,I_a^\alpha[p(t)\,h(t)]\\
&-I_a^\alpha[p(t)\,g(t)]\,I_a^\alpha[p(t)\,h(t)]+I_a^\alpha[p(t)]\,I_a^\alpha[p(t)\,g(t)\,h(t)]\\
&=2I_a^\alpha[p(t)]\,I_a^\alpha[p(t)\,g(t)\,h(t)]-2I_a^\alpha[p(t)\,g(t)]\,I_a^\alpha[p(t)\,h(t)].
\end{aligned} \tag{2.22}$$

On prend $p(t)=f(t)$, $g(t)=t-E(X)$ et $h(t)=t^{r-1}$, $a<t\leq b$ dans l'identité (2.22), on obtient :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma^2(\alpha)}\int_a^t\int_a^t (t-x)^{\alpha-1}(t-y)^{\alpha-1}(x-y)\left(x^{r-1}-y^{r-1}\right)f(x)\,f(y)\,dxdy\\
&=2I_a^\alpha[f(t)]\,I_a^\alpha\left[t^{r-1}(t-E(X))\,f(t)\right]-2I_a^\alpha[(t-E(X))\,f(t)]\,I_a^\alpha\left[t^{r-1}f(t)\right],
\end{aligned} \tag{2.23}$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma^2(\alpha)}\int_a^t\int_a^t (t-x)^{\alpha-1}(t-y)^{\alpha-1}(x-y)\left(x^{r-1}-y^{r-1}\right)f(x)\,f(y)\,dxdy\\
&=2I_a^\alpha[f(t)]\,I_a^\alpha\left[t^{r-1}(t-E(X))\,f(t)\right]-2I_a^\alpha[(t-E(X))\,f(t)]\,M_{r-1,\alpha}(t).
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Puisque $f \in L_\infty[a,b]$, on peut alors écrire

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma^2(\alpha)}\int_a^t\int_a^t (t-x)^{\alpha-1}(t-y)^{\alpha-1}(x-y)\left(x^{r-1}-y^{r-1}\right)f(x)\,f(y)\,dxdy\\
&\leq \|f\|_\infty^2\frac{1}{\Gamma^2(\alpha)}\int_a^t\int_a^t (t-x)^{\alpha-1}(t-y)^{\alpha-1}(x-y)\left(x^{r-1}-y^{r-1}\right)dxdy \qquad (2.25)\\
&\leq 2\|f\|_\infty^2\left[\frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}I_a^\alpha\left[t^r\right]-I_a^\alpha[t]\,I_a^\alpha\left[t^{r-1}\right]\right].
\end{aligned}$$

De (2.24) et (2.25), on obtient (2.16).

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma^2(\alpha)}\int_a^t\int_a^t (t-x)^{\alpha-1}(t-y)^{\alpha-1}(x-y)\left(x^{r-1}-y^{r-1}\right)f(x)\,f(y)\,dxdy\\
&\leq \sup\nolimits_{x,y\in[a,t]}|(x-y)|\left|\left(x^{r-1}-y^{r-1}\right)\right|I_a^\alpha\left[f(t)\right]^2.
\end{aligned}\qquad (2.26)$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma^2(\alpha)}\int_a^t\int_a^t (t-x)^{\alpha-1}(t-y)^{\alpha-1}(x-y)\left(x^{r-1}-y^{r-1}\right)f(x)\,f(y)\,dxdy\\
&\leq (t-a)\left(t^{r-1}-a^{r-1}\right)I_a^\alpha\left[f(t)\right]^2.
\end{aligned}\qquad (2.27)$$

De (2.24) et (2.27), on obtient (2.17).

D'où la preuve du Théorème 2.5. ■

On généralise le Théorème 2.5, en considérant deux paramètres réels.

Théorème 2.6 [35] *Soit X une variable aléatoire continue muni d'une f. d. p. $f:[a,b]\to\mathbb{R}^+$. Alors*

(i) : *Pour tout $a<t\leq b$, $\alpha>0$, $\beta>0$, on a :*

$$\begin{aligned}
&I_a^\alpha[f(t)]\,I_a^\beta\left[t^{r-1}(t-E(x))\,f(t)\right]+I_a^\beta[f(t)]\,I_a^\alpha\left[t^{r-1}(t-E(x))\,f(t)\right]\\
&-I_a^\alpha\left[(t-E(x))\,f(t)\right]M_{r-1,\beta}-I_a^\beta\left[(t-E(x))\,f(t)\right]M_{r-1,\alpha} \qquad (2.28)\\
&\leq \|f\|_\infty^2\left[\frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}I_a^\beta\left[t^r\right]+\frac{(t-a)^\beta}{\Gamma(\beta+1)}I_a^\alpha\left[t^r\right]-I_a^\alpha[t]\,I_a^\beta\left[t^{r-1}\right]-I_a^\beta[t]\,I_a^\alpha\left[t^{r-1}\right]\right],
\end{aligned}$$

où $f\in L_\infty[a,b]$.

(ii) : *On a aussi :*

$$I_a^{\alpha}\left[f(t)\right] I_a^{\beta}\left[t^{r-1}\left(t-E(x)\right) f(t)\right]+I_a^{\beta}\left[f(t)\right] I_a^{\alpha}\left[t^{r-1}\left(t-E(x)\right) f(t)\right]$$

$$-I_a^{\alpha}\left[\left(t-E(x)\right) f(t)\right] M_{r-1,\beta}-I_a^{\beta}\left[\left(t-E(x)\right) f(t)\right] M_{r-1,\alpha} \tag{2.29}$$

$$\leq (t-a)\left(t^{r-1}-a^{r-1}\right) I_a^{\alpha}\left[f(t)\right] J_a^{\beta}\left[f(t)\right],$$

pour tout $a<t\leq b,\ \alpha>0,\ \beta>0,$

Preuve. On multiplie les deux membres de (2.19) par $\frac{1}{\Gamma(\beta)}(t-y)^{\beta-1} p(y)\,;\ y\in(a,t)$, puis on intègre sur (a,t) par rapport à y, on trouve :

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t\int_a^t (t-x)^{\alpha-1}(t-y)^{\beta-1} p(x)\,p(y)\,H(x,y)\,dxdy$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t\int_a^t (t-x)^{\alpha-1}(t-y)^{\beta-1} p(x)\,g(x)\,h(x)\,p(y)\,dxdy$$

$$-\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t\int_a^t (t-x)^{\alpha-1}(t-y)^{\beta-1} p(x)\,h(x)\,p(y)\,g(y)\,dxdy \tag{2.30}$$

$$-\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t\int_a^t (t-x)^{\alpha-1}(t-y)^{\beta-1} p(x)\,g(x)\,p(y)\,h(y)\,dxdy$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t\int_a^t (t-x)^{\alpha-1}(t-y)^{\beta-1} p(x)\,p(y)\,g(y)\,h(y)\,dxdy,$$

ce qui revient à :

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t\int_a^t (t-x)^{\alpha-1}(t-y)^{\beta-1} p(x)\,p(y)\,H(x,y)\,dxdy$$

$$=\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-x)^{\alpha-1} p(x)\,g(x)\,h(x)\,dx\right]\left[\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^t (t-y)^{\beta-1} p(y)\,dy\right]$$

$$-\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-x)^{\alpha-1} p(x)\,h(x)\,dx\right]\left[\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^t (t-y)^{\beta-1} p(y)\,g(y)\,dy\right] \tag{2.31}$$

$$-\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-x)^{\alpha-1} p(x)\,g(x)\,dx\right]\left[\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^t (t-y)^{\beta-1} p(y)\,h(y)\,dy\right]$$

$$+\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-x)^{\alpha-1} p(x)\,dx\right]\left[\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^t (t-y)^{\beta-1} p(y)\,g(y)\,h(y)\,dy\right].$$

Il s'en suit

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t\int_a^t (t-x)^{\alpha-1}(t-y)^{\beta-1} p(x)\,p(y)\,H(x,y)\,dxdy$$

$$=I_a^{\alpha}\left[p(t)\,g(t)\,h(t)\right] I_a^{\beta}\left[p(t)\right]-I_a^{\alpha}\left[p(t)\,h(t)\right] I_a^{\beta}\left[p(t)\,g(t)\right] \tag{2.32}$$

$$-I_a^{\alpha}\left[p(t)\,g(t)\right] I_a^{\beta}\left[p(t)\,h(t)\right]+I_a^{\alpha}\left[p(t)\right] I_a^{\beta}\left[p(t)\,g(t)\,h(t)\right].$$

Maintenant, on prend $p(t) = f(t)$, $g(t) = t - E(X)$ et $h(t) = t^{r-1}$, $a < t \leq b$ dans l'identité (2.32), on obtient :

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t\int_a^t (t-x)^{\alpha-1}(t-y)^{\beta-1}(x-y)\left(x^{r-1}-y^{r-1}\right)f(x)f(y)\,dxdy$$
$$= I_a^\beta[f(t)]\,I_a^\alpha\left[t^{r-1}(t-E(X))f(t)\right] - I_a^\alpha\left[t^{r-1}f(t)\right]I_a^\beta\left[(t-E(X))f(t)\right] \tag{2.33}$$
$$-I_a^\alpha\left[(t-E(X))f(t)\right]I_a^\beta\left[t^{r-1}f(t)\right] + I_a^\alpha[f(t)]\,I_a^\beta\left[t^{r-1}(t-E(X))f(t)\right],$$

ce qui implique que

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t\int_a^t (t-x)^{\alpha-1}(t-y)^{\beta-1}(x-y)\left(x^{r-1}-y^{r-1}\right)f(x)f(y)\,dxdy$$
$$= I_a^\alpha[f(t)]\,I_a^\beta\left[t^{r-1}(t-E(X))f(t)\right] + I_a^\beta[f(t)]\,I_a^\alpha\left[t^{r-1}(t-E(X))f(t)\right] \tag{2.34}$$
$$-I_a^\beta\left[(t-E(X))f(t)\right]M_{r-1,\alpha} - I_a^\alpha\left[(t-E(X))f(t)\right]M_{r-1,\beta}.$$

En utilisant le fait que $f \in L_\infty[a,b]$, on peut écrire

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t\int_a^t (t-x)^{\alpha-1}(t-y)^{\beta-1}(x-y)\left(x^{r-1}-y^{r-1}\right)f(x)f(y)\,dxdy$$
$$\leq \frac{\|f\|_\infty^2}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t\int_a^t (t-x)^{\alpha-1}(t-y)^{\beta-1}(x-y)\left(x^{r-1}-y^{r-1}\right)dxdy. \tag{2.35}$$

En calculant les intégrales du second membre, on obtient :

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t\int_a^t (t-x)^{\alpha-1}(t-y)^{\beta-1}(x-y)\left(x^{r-1}-y^{r-1}\right)f(x)f(y)\,dxdy$$
$$\leq \|f\|_\infty^2\left[\frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}I_a^\beta[t^r] + \frac{(t-a)^\beta}{\Gamma(\beta+1)}I_a^\alpha[t^r] - I_a^\alpha[t]\,I_a^\beta\left[t^{r-1}\right] - I_a^\beta[t]\,I_a^\alpha\left[t^{r-1}\right]\right]. \tag{2.36}$$

En utilisant l'inégalité (2.34) et l'inégalité (2.36), on obtient l'inégalité (2.28).

Pour l'inégalité (ii), on a :

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t\int_a^t (t-x)^{\alpha-1}(t-y)^{\beta-1}(x-y)\left(x^{r-1}-y^{r-1}\right)f(x)f(y)\,dxdy$$
$$\leq \sup_{x,y\in[a,t]}\left[|x-y|\left|x^{r-1}-y^{r-1}\right|\right]I_a^\alpha[f(t)]\,I_a^\beta[f(t)], \tag{2.37}$$

de l'inégalité (2.37), on tire :

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t\int_a^t (t-x)^{\alpha-1}(t-y)^{\beta-1}(x-y)\left(x^{r-1}-y^{r-1}\right)f(x)f(y)\,dxdy$$
$$\leq (t-a)\left(t^{r-1}-a^{r-1}\right)I_a^\alpha[f(t)]\,I_a^\beta[f(t)]. \tag{2.38}$$

Par l'inégalité (2.34) et l'inégalité (2.38), on obtient (2.29).

Ainsi le Théorème 2.6. est démontré. ■

Pour établir une relation entre $M_{2r,\alpha}$ et $M_{r,\alpha}^2$, on prouve le résultat suivant :

Théorème 2.7 [35] *Soit X une variable aléatoire continue munie d'une f. d. p. $f:[a,b]\to\mathbb{R}^{+}$. Alors, pour tout $\alpha>0$ et $a<t\leq b$, on a :*

$$I_a^\alpha\left[f(t)\right]M_{2r,\alpha}(t)-M_{r,\alpha}^2(t)\leq\frac{1}{4}\left(I_a^\alpha\left[f(t)\right]\right)^2\left(b^r-a^r\right)^2\ . \tag{2.39}$$

Preuve. En utilisant le Théorème 2.1, on peut écrire

$$\left|I_a^\alpha\left[p(t)\right]I_a^\alpha\left[p(t)g^2(t)\right]-\left(I_a^\alpha\left[p(t)g(t)\right]\right)^2\right|\leq\frac{1}{4}\left(I_a^\alpha\left[p(t)\right]\right)^2(M-m)^2\ . \tag{2.40}$$

Prenons $p(t)=f(t)$ et $g(t)=t^r$, $a<t\leq b$, on obtient $m=a^r$ et $M=b^r$.

Par conséquent l'inégalité (2.40) permet d'obtenir

$$0\leq I_a^\alpha\left[f(t)\right]I_a^\alpha\left[t^2f(t)\right]-\left(I_a^\alpha\left[tf(t)\right]\right)^2\leq\frac{1}{4}\left(I_a^\alpha\left[f(t)\right]\right)^2\left(b^r-a^r\right)^2\ . \tag{2.41}$$

Ce qui implique que

$$I_a^\alpha\left[f(t)\right]M_{2r,\alpha}-M_{r,\alpha}^2\leq\frac{1}{4}\left(I_a^\alpha\left[f(t)\right]\right)^2\left(b^r-a^r\right)^2\ . \tag{2.42}$$

On a ainsi démontré le Théorème 2.7. ■

Maintenant, on établit une relation entre $M_{2r,\alpha}$, $M_{2r,\beta}$, $M_{r,\alpha}^2$ et $M_{r,\beta}^2$:

Théorème 2.8 [35] *Soit X une variable aléatoire continue ayant une f. d. p. $f:[a,b]\to\mathbb{R}^{+}$. Alors, pour tout $\alpha>0$, $\beta>0$ et $a<t\leq b$, on a :*

$$\begin{aligned}&I_a^\alpha\left[f(t)\right]M_{2r,\beta}(t)+I_a^\beta\left[f(t)\right]M_{2r,\alpha}(t)+2a^rb^rI_a^\alpha\left[f(t)\right]I_a^\beta\left[f(t)\right]\\&\leq\left(a^r+b^r\right)\left[I_a^\alpha\left[f(t)\right]M_{r,\beta}(t)+I_a^\beta\left[f(t)\right]M_{r,\alpha}(t)\right].\end{aligned} \tag{2.43}$$

Preuve. En appliquant le Théorème 2.2, on peut écrire

$$\begin{aligned}&\left[I_a^\alpha\left[p(t)\right]I_a^\beta\left[p(t)g^2(t)\right]+I_a^\beta\left[p(t)\right]I_a^\alpha\left[p(t)g^2(t)\right]-2I_a^\alpha\left[p(t)g(t)\right]I_a^\beta\left[p(t)g(t)\right]\right]^2\\&\leq\left[\left(MI_a^\alpha\left[p(t)\right]-I_a^\alpha\left[p(t)g(t)\right]\right)\left(I_a^\beta\left[p(t)g(t)\right]-mI_a^\beta\left[p(t)\right]\right)\right.\\&\left.+\left(I_a^\alpha\left[p(t)g(t)\right]-mI_a^\alpha\left[p(t)\right]\right)\left(MI_a^\beta\left[p(t)\right]-I_a^\beta\left[p(t)g(t)\right]\right)\right]^2.\end{aligned} \tag{2.44}$$

On pose $p(t)=f(t)$ et $g(t)=t^r$, $a<t\leq b$ dans l'inégalité (2.44), on obtient l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}&\left[I_a^\alpha\left[f(t)\right]I_a^\beta\left[t^{2r}f(t)\right]+I_a^\beta\left[f(t)\right]I_a^\alpha\left[t^{2r}f(t)\right]-2I_a^\alpha\left[t^rf(t)\right]I_a^\beta\left[t^rf(t)\right]\right]^2\\&\leq\left[\left(MI_a^\alpha\left[f(t)\right]-I_a^\alpha\left[t^rf(t)\right]\right)\left(I_a^\beta\left[t^rf(t)\right]-mI_a^\beta\left[f(t)\right]\right)\right.\\&\left.+\left(I_a^\alpha\left[t^rf(t)\right]-mI_a^\alpha\left[f(t)\right]\right)\left(MI_a^\beta\left[f(t)\right]-I_a^\beta\left[t^rf(t)\right]\right)\right]^2.\end{aligned} \tag{2.45}$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned} & I_a^\alpha[f(t)]\, M_{2r,\beta}(t) + I_a^\beta[f(t)]\, M_{2r,\alpha}(t) - 2M_{r,\alpha}(t)\, M_{r,\beta}(t) \\ & \leq \left(MI_a^\alpha[f(t)] - M_{r,\alpha}(t)\right)\left(M_{r,\beta}(t) - mI_a^\beta[f(t)]\right) \\ & + \left(M_{r,\alpha}(t) - mI_a^\alpha[f(t)]\right)\left(MI_a^\beta[f(t)] - M_{r,\beta}(t)\right). \end{aligned} \tag{2.46}$$

Donc,

$$\begin{aligned} & I_a^\alpha[f(t)]\, M_{2r,\beta}(t) + I_a^\beta[f(t)]\, M_{2r,\alpha}(t) + 2mMI_a^\alpha[f(t)]\, I_a^\beta[f(t)] \\ & \leq M\left(I_a^\alpha[f(t)]\, M_{r,\beta}(t) + I_a^\beta[f(t)]\, M_{r,\alpha}(t)\right) \\ & + m\left(I_a^\alpha[f(t)]\, M_{r,\beta}(t) + I_a^\beta[f(t)]\, M_{r,\alpha}(t)\right). \end{aligned} \tag{2.47}$$

On substitue les valeurs de m et M dans l'inégalité (2.47), on obtient :

$$\begin{aligned} & I_a^\alpha[f(t)]\, M_{2r,\beta}(t) + I_a^\beta[f(t)]\, M_{2r,\alpha}(t) + 2a^r b^r I_a^\alpha[f(t)]\, I_a^\beta[f(t)] \\ & \leq (a^r + b^r)\, I_a^\alpha[f(t)]\, M_{r,\beta}(t) + (a^r + b^r)\, I_a^\beta[f(t)]\, M_{r,\alpha}(t). \end{aligned} \tag{2.48}$$

Ce qui achève la démonstration du Théorème 2.8. ■

Un autre résultat pour le moment fractionnaire est le suivant :

Théorème 2.9 [35] *Soit X une variable aléatoire continue ayant une f. d. p. $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ et $\alpha > 0$. Alors pour tout $a < t \leq b$, on a l'inégalité suivante :*

$$\begin{aligned} & \left|\tfrac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} M_{r,\alpha}(t) - I_a^\alpha[f(t)]\, I_a^\alpha[t^r]\right| \\ & \leq \tfrac{(t-a)^\alpha}{2\Gamma(\alpha+1)}(M - m)\left(\tfrac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} I_a^\alpha[t^{2r}] - \left(I_a^\alpha[t^r]\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{2.49}$$

Preuve. Par le Théorème 2.3 et le Lemme 2.1, on a :

$$\begin{aligned} & \left|\tfrac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} I_a^\alpha[f(t)\, g(t)] - I_a^\alpha[f(t)]\, I_a^\alpha[g(t)]\right| \\ & \leq \tfrac{(t-a)^\alpha}{2\Gamma(\alpha+1)}(M - m)\left(\tfrac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} I_a^\alpha[g^2(t)] - \left(I_a^\alpha[g(t)]\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{2.50}$$

Maintenant, on prend $g(t) = t^r$, $a < t \leq b$. On peut alors écrire

$$\begin{aligned} & \left|\tfrac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} I_a^\alpha[t^r f(t)] - I_a^\alpha[f(t)]\, I_a^\alpha[t^r]\right| \\ & \leq \tfrac{(t-a)^\alpha}{2\Gamma(\alpha+1)}(M - m)\left(\tfrac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} I_a^\alpha[t^{2r}] - \left(I_a^\alpha[t^r]\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \tag{2.51}$$

d'où, il vient

$$\begin{aligned}&\left|\tfrac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}M_{r,\alpha}-I_a^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right]I_a^{\alpha}\left[t^r\right]\right|\\&\leq\tfrac{(t-a)^{\alpha}}{2\Gamma(\alpha+1)}\left(M-m\right)\left(\tfrac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}I_a^{\alpha}\left[t^{2r}\right]-\left(I_a^{\alpha}\left[t^r\right]\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}\tag{2.52}$$

■

En utilisant deux paramètres fractionnaires, on établit la généralisation suivante :

Théorème 2.10 [35] *Soit X une variable aléatoire continue munie d'une f. d. p. $f:[a,b]\to\mathbb{R}^+$ f. Alors pour tout $a<t\leq b$, et $\alpha>0$, $\beta>0$, on a l'inégalité fractionnaire suivante :*

$$\begin{aligned}&\tfrac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}M_{r,\alpha}\left(t\right)+\tfrac{(t-a)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}M_{r,\beta}\left(t\right)-I_a^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right]I_a^{\beta}\left[t^r\right]-I_a^{\beta}\left[f\left(t\right)\right]J_a^{\alpha}\left[t^r\right]\\&\leq\left[\left(M\tfrac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}-I_a^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right]\right)\left(I_a^{\beta}\left[f\left(t\right)\right]-m\tfrac{(t-a)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}\right)\right.\\&\left.+\left(I_a^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right]-m\tfrac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\left(M\tfrac{(t-a)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}-I_a^{\beta}\left[f\left(t\right)\right]\right)\right]\\&\times\left[\tfrac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}I_a^{\beta}\left[t^{2r}\right]+\tfrac{(t-a)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}I_a^{\alpha}\left[t^{2r}\right]-2I_a^{\alpha}\left[t^r\right]I_a^{\beta}\left[t^r\right]\right]^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}\tag{2.53}$$

Preuve. En appliquant le Théorème 2.4 et le Lemme 2.3, on arrive à :

$$\begin{aligned}&\left|\tfrac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}J_a^{\beta}\left[f\left(t\right)g\left(t\right)\right]+\tfrac{(t-a)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}J_a^{\alpha}\left[f\left(t\right)g\left(t\right)\right]-J_a^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right]J_a^{\beta}\left[g\left(t\right)\right]-J_a^{\beta}\left[f\left(t\right)\right]J_a^{\alpha}\left[g\left(t\right)\right]\right|\\&\leq\left[\left(M\tfrac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}-J_a^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right]\right)\left(J_a^{\beta}\left[f\left(t\right)\right]-m\tfrac{(t-a)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}\right)\right.\\&\left.+\left(J_a^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right]-m\tfrac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\left(M\tfrac{(t-a)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}-J_a^{\beta}\left[f\left(t\right)\right]\right)\right]\\&\times\left(\tfrac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}J_a^{\beta}\left[g^2\left(t\right)\right]+\tfrac{(t-a)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}J_a^{\alpha}\left[g^2\left(t\right)\right]-2J_a^{\alpha}\left[g\left(t\right)\right]J_a^{\beta}\left[g\left(t\right)\right]\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}\tag{2.54}$$

On pose $g\left(t\right)=t^r$, $a<t\leq b$, on a l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}&\left|\tfrac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}J_a^{\beta}\left[t^rf\left(t\right)\right]+\tfrac{(t-a)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}J_a^{\alpha}\left[t^rf\left(t\right)\right]-J_a^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right]J_a^{\beta}\left[t^r\right]-J_a^{\beta}\left[f\left(t\right)\right]J_a^{\alpha}\left[t^r\right]\right|\\&\leq\left[\left(M\tfrac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}-J_a^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right]\right)\left(J_a^{\beta}\left[f\left(t\right)\right]-m\tfrac{(t-a)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}\right)\right.\\&\left.+\left(J_a^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right]-m\tfrac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\left(M\tfrac{(t-a)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}-J_a^{\beta}\left[f\left(t\right)\right]\right)\right]\\&\times\left(\tfrac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}J_a^{\beta}\left[t^{2r}\right]+\tfrac{(t-a)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}J_a^{\alpha}\left[t^{2r}\right]-2J_a^{\alpha}\left[t^r\right]J_a^{\beta}\left[t^r\right]\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}\tag{2.55}$$

De l'inégalité (2.55), on a :

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}M_{r,\beta}\left(t\right)+\tfrac{(t-a)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}M_{r,\alpha}\left(t\right)-J_{a}^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right]J_{a}^{\beta}\left[t^{r}\right]-J_{a}^{\beta}\left[f\left(t\right)\right]J_{a}^{\alpha}\left[t^{r}\right]\right|\\
&\qquad\leq\left[\left(M\tfrac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}-J_{a}^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right]\right)\left(J_{a}^{\beta}\left[f\left(t\right)\right]-m\tfrac{(t-a)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}\right)\right.\\
&\qquad\left.+\left(J_{a}^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right]-m\tfrac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\left(M\tfrac{(t-a)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}-J_{a}^{\beta}\left[f\left(t\right)\right]\right)\right]\\
&\qquad\times\left(\tfrac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}J_{a}^{\beta}\left[t^{2r}\right]+\tfrac{(t-a)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}J_{a}^{\alpha}\left[t^{2r}\right]-2J_{a}^{\alpha}\left[t^{r}\right]J_{a}^{\beta}\left[t^{r}\right]\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}\tag{2.56}$$

D'où la preuve du Théorème 2.10. ■

2.5 Inégalités $k-$Fractionnaires

On va présenter dans cette section les résultats des espérances et variances $k-$fractionnaire des variables aléatoires continues en ultilisant l'intégrale $k-$Riemann-Liouville fractionnaire.

2.5.1 Intégration au Sens de $k-$Riemann-Liouville

Dans la présente sous-section on présente l'intégrale $k-$Riemann-Liouville fractionnaire, qui généralise l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville. Pour plus de détails, voir [57] et [67] .

Définition 2.9 *La fonction $k-$Gamma est définie par l'intégrale suivante :*

$$\Gamma_{k}\left(\alpha\right)=\int_{0}^{\infty}u^{\alpha-1}e^{\frac{-u^{k}}{k}}du\ \ .\tag{2.57}$$

Remarque 2.1 *La fonction $k-$Gamma satisfait les propriétés suivantes :*

(1) :

$$\lim_{k\rightarrow1}\Gamma_{k}\left(\alpha\right)=\Gamma\left(\alpha\right)\ .\tag{2.58}$$

(2) :

$$\Gamma_{k}\left(\alpha\right)=k^{\frac{\alpha}{k}-1}\Gamma\left(\alpha\right)\ .\tag{2.59}$$

(3) :

$$\Gamma_{k}\left(\alpha+k\right)=\alpha\Gamma_{k}\left(\alpha\right)\ .\tag{2.60}$$

Définition 2.10 *La fonction $k-$Bêta est donnée par :*

$$B_k(\alpha,\beta) = \frac{1}{k}\int_0^1 u^{\frac{\alpha}{k}-1}(1-u)^{\frac{\beta}{k}-1}\,du\ . \tag{2.61}$$

Remarque 2.2 *La fonction $k-$Bêta est liée à la fonction Bêta et $k-$Gamma comme suit :*

$$B_k(\alpha,\beta) = \frac{1}{k}B\left(\frac{\alpha}{k},\frac{\beta}{k}\right) \tag{2.62}$$

et

$$B_k(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma_k(\alpha)\Gamma_k(\beta)}{\Gamma_k(\alpha+\beta)}\ . \tag{2.63}$$

Définition 2.11 *L'opérateur intégral $k-$Rieman-Liouville fractionnaire d'ordre α, pour une fonction f continue sur $[a,b]$ est défini par :*

$${}_kI_a^\alpha[f(t)] := \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\frac{\alpha}{k}-1} f(\tau)\,d\tau;\ \alpha>0,\ k>0,\ a<t\leq b\ . \tag{2.64}$$

Théorème 2.11 [57] *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et soit $\alpha>0$, $\beta>0$. Alors pour tout $a<t\leq b$, on a :*

$${}_kI_a^\alpha\left[{}_kJ_a^\beta[f(t)]\right] = {}_kI_a^{\alpha+\beta}[f(t)] = {}_kI_a^\beta\left[{}_kJ_a^\alpha[f(t)]\right],\ k>0\ . \tag{2.65}$$

Théorème 2.12 [57] *Soit $\alpha>0$, $\beta>0$, $a>0$, alors on a :*

$${}_kI_a^\alpha\left[(t-a)^{\frac{\beta}{k}-1}\right] = \frac{\Gamma_k(\beta)}{\Gamma_k(\alpha+\beta)}(t-a)^{\frac{\beta+\alpha}{k}-1},\ k>0\ . \tag{2.66}$$

Remarque 2.3 *Dans la relation* (2.66), *si on prend $k=1$, on obtient :*

$$I_a^\alpha\left[(t-a)^{\beta-1}\right] = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(t-a)^{\beta+\alpha-1}\ . \tag{2.67}$$

Corollaire 2.1 [57] *Soit $\alpha>0$, $\beta>0$, alors on a la formule suivante :*

$${}_kI_a^\alpha[1] = \frac{1}{\Gamma_k(\alpha+k)}(t-a)^{\frac{\alpha}{k}-2},\ k>0\ . \tag{2.68}$$

Remarque 2.4 *pour $k=1$, on trouve :*

$$I_a^\alpha[1] = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}(t-a)^{\alpha-2}\ . \tag{2.69}$$

2.5.2 $k-$Estimations : Espérances et Variances

On introduit ici les définitions de la fonction espérance et la fonction variance adaptées à l'intégrale $k-$Riemann-Liouville fractionnaire. Ces définitions seront utiles dans la suite de cette section.

Définition 2.12 *La fonction espérance $k-$fractionaire d'ordre $\alpha > 0$ d'une variable aléatoire continue X ayant une f. d. p. $f : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ est définie comme suit :*

$$E_{X,k,\alpha}(t) := \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\frac{\alpha}{k}-1} \tau f(\tau)\, d\tau;\ \alpha > 0,\ a < t \leq b,\ k > 0\ . \tag{2.70}$$

Définition 2.13 *La fonction espérance $k-$fractionaire d'ordre $\alpha > 0$ de la variable aléatoire continue $X - E(X)$ est définie par :*

$$E_{X-E(X),k,\alpha}(t) := \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\frac{\alpha}{k}-1} (\tau - E(X)) f(\tau)\, d\tau;\ \alpha > 0,\ a < t \leq b,\ k > 0\ . \tag{2.71}$$

Pour $t = b$, on donne les définitions suivantes :

Définition 2.14 *L'espérance $k-$fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ d'une variable aléatoire continue X ayant f. d. p. $f : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ est définie par :*

$$E_{X,k,\alpha} := \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)} \int_a^b (b-\tau)^{\frac{\alpha}{k}-1} \tau f(\tau)\, d\tau;\ \alpha > 0,\ k > 0\ . \tag{2.72}$$

Définition 2.15 *L'espérance $k-$fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ de la variable aléatoire continue $X - E(X)$ est définie comme suit :*

$$E_{X-E(X),k,\alpha} := \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)} \int_a^b (b-\tau)^{\frac{\alpha}{k}-1} (\tau - E(X)) f(\tau)\, d\tau;\ \alpha > 0,\ k > 0\ . \tag{2.73}$$

Définition 2.16 *La fonction variance $k-$fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ d'une variable aléatoire X ayant une f. d. p. $f : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ est donnée par :*

$$\sigma^2_{X,k,\alpha}(t) =: \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\frac{\alpha}{k}-1} (\tau - E(X))^2 f(\tau)\, d\tau;\ \alpha > 0,\ a < t \leq b,\ k > 0\ . \tag{2.74}$$

Pour $t = b$, on a :

Définition 2.17 *La variance $k-$fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ de la variable aléatoire X avec ayant une f. d. p. $f : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ est définie par :*

$$\sigma^2_{X,k,\alpha} := \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)} \int_a^b (b-\tau)^{\frac{\alpha}{k}-1} (\tau - E(X))^2 f(\tau)\, d\tau;\ \alpha > 0,\ k > 0\ . \tag{2.75}$$

2.5.3 Applications de Type $k-$Riemann-Liouville

Dans ce qui suit, on présente quelques applications de l'intégrale $k-$Riemann-Liouville fractionnaire aux espérances et variances d'une variable aléatoire continue X avec une fonction de densité de probabilité f définie sur $[a,b]$.

Le premier résultat sur l'inégalité intégrale $k-$fractionnaire de l'espérance et variance fractionnaire est donné par :

Théorème 2.13 [36] *Soit X une variable aléatoire continue munie d'une f. d. p. $f:[a,b]\to\mathbb{R}^{+}$. Alors pour tout $a<t\leq b$, et $\alpha>0$, on a l'inégalité $k-$fractionnaire suivante :*

$$\begin{aligned} & {}_kI_a^{\alpha}\left[f(t)\right]\sigma^2_{X,k,\alpha}(t)-\left(E_{X-E(X),k,\alpha}(t)\right)^2 \\ \leq & \left\{\begin{array}{l} \left[\frac{1}{\Gamma_k(\alpha+k)}(t-a)^{\frac{\alpha}{k}-2}\ {}_kI_a^{\alpha}\left[t^2\right]-\left({}_kI_a^{\alpha}\left[t\right]\right)^2\right]\|f\|_{\infty}^2,\ \ si\ f\in L_{\infty}[a,b], \\ \\ \frac{(t-a)^2}{2}\left({}_kI_a^{\alpha}\left[f(t)\right]\right)^2. \end{array}\right. \end{aligned} \tag{2.76}$$

Preuve. On considère la quantité suivante :

$$G_{k,\alpha}(t,x)=\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}(t-x)^{\frac{\alpha}{k}-1}p(x),\ \ x\in(a,t)\ , \tag{2.77}$$

où $p:[a,b]\to\mathbb{R}^{+}$, est une fonction continue.

En multipliant les deux membres de (2.18) par $G_{k,\alpha}(t,x)$, on obtient :

$$G_{k,\alpha}(t,x)H(x,y)=G_{k,\alpha}(t,x)\left(g(x)-g(y)\right)\left(h(x)-h(y)\right)\ . \tag{2.78}$$

On intégre (2.78) par rapport à x sur (a,t), on trouve :

$$\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t(t-x)^{\frac{\alpha}{k}-1}p(x)H(x,y)\,dx=\int_a^t G_{k,\alpha}(t,x)\left(g(x)-g(y)\right)\left(h(x)-h(y)\right)dx\ , \tag{2.79}$$

ce qui revient à :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t(t-x)^{\frac{\alpha}{k}-1}p(x)H(x,y)\,dx \\ = & \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t(t-x)^{\frac{\alpha}{k}-1}p(x)g(x)h(x)\,dx-\frac{h(y)}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t(t-x)^{\frac{\alpha}{k}-1}p(x)g(x)\,dx \\ & -\frac{g(y)}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t(t-x)^{\frac{\alpha}{k}-1}p(x)h(x)\,dx+\frac{g(y)h(y)}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t(t-x)^{\frac{\alpha}{k}-1}p(x)\,dx. \end{aligned} \tag{2.80}$$

Il s'en suit

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t (t-x)^{\frac{\alpha}{k}-1} p(x)\, H(x,y)\, dx\\ &= \ {}_kI_a^\alpha\left[p(t)\, g(t)\, h(t)\right] - h(y)\ {}_kI_a^\alpha\left[p(t)\, g(t)\right]\\ &-g(y)\ {}_kI_a^\alpha\left[p(t)\, h(t)\right] + g(y)\, h(y)\ {}_kI_a^\alpha\left[p(t)\right].\end{aligned} \tag{2.81}$$

On multiplie les deux membres de (2.81) par $G_{k,\alpha}(t,y)$, puis on intègre sur (a,t) par rapport à y, on trouve :

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{k^2\Gamma_k^2(\alpha)}\int_a^t\int_a^t (t-x)^{\frac{\alpha}{k}-1}(t-y)^{\frac{\alpha}{k}-1} p(x)\, p(y)\, H(x,y)\, dxdy\\ &= \ {}_kI_a^\alpha\left[p(t)\, g(t)\, h(t)\right] \tfrac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t (t-y)^{\frac{\alpha}{k}-1} p(y)\, dy\\ &- \ {}_kI_a^\alpha\left[p(t)\, g(t)\right] \tfrac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t (t-y)^{\frac{\alpha}{k}-1} p(y)\, h(y)\, dy\\ &- \ {}_kI_a^\alpha\left[p(t)\, h(t)\right] \tfrac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t (t-y)^{\frac{\alpha}{k}-1} p(y)\, g(y)\, dy\\ &+ \ {}_kI_a^\alpha\left[p(t)\right] \tfrac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t (t-y)^{\frac{\alpha}{k}-1} p(y)\, g(y)\, h(y)\, dy.\end{aligned} \tag{2.82}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{k^2\Gamma_k^2(\alpha)}\int_a^t\int_a^t (t-x)^{\frac{\alpha}{k}-1}(t-y)^{\frac{\alpha}{k}-1} p(x)\, p(y)\, H(x,y)\, dxdy\\ &= 2\ {}_kI_a^\alpha\left[p(t)\, g(t)\, h(t)\right]\ {}_kI_a^\alpha\left[p(t)\right] - 2\ {}_kI_a^\alpha\left[p(t)\, g(t)\right]\ {}_kI_a^\alpha\left[p(t)\, h(t)\right].\end{aligned} \tag{2.83}$$

Maitenant, on pose $p(t) = f(t)$ et $g(t) = h(t) = t - E(X)$, $a < t \leq b$, dans l'inégalité (2.83) on a l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{k^2\Gamma_k^2(\alpha)}\int_a^t\int_a^t (t-x)^{\frac{\alpha}{k}-1}(t-y)^{\frac{\alpha}{k}-1} p(x)\, p(y)\, (x-y)^2\, dxdy\\ &= 2\ {}_kI_a^\alpha\left[f(t)\right]\ {}_kI_a^\alpha\left[(t-E(X))^2 f(t)\right] - 2\ \left({}_kI_a^\alpha\left[(t-E(X))\, f(t)\right]\right)^2.\end{aligned} \tag{2.84}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{k^2\Gamma_k^2(\alpha)}\int_a^t\int_a^t (t-x)^{\frac{\alpha}{k}-1}(t-y)^{\frac{\alpha}{k}-1} p(x)\, p(y)\, (x-y)^2\, dxdy\\ &= 2\ {}_kI_a^\alpha\left[f(t)\right]\sigma^2_{X,k,\alpha}(t) - 2\left(E_{X-E(X),k,\alpha}(t)\right)^2\end{aligned} \tag{2.85}$$

et

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{k^2\Gamma_k^2(\alpha)}\int_a^t\int_a^t (t-x)^{\frac{\alpha}{k}-1}(t-y)^{\frac{\alpha}{k}-1} p(x)\, p(y)\, (x-y)^2\, dxdy\\ &\leq \tfrac{\|f\|_\infty^2}{k^2\Gamma_k^2(\alpha)}\int_a^t\int_a^t (t-x)^{\frac{\alpha}{k}-1}(t-y)^{\frac{\alpha}{k}-1} (x-y)^2\, dxdy.\end{aligned} \tag{2.86}$$

Ce qui implique que

$$\frac{1}{k^2\Gamma_k^2(\alpha)}\int_a^t\int_a^t (t-x)^{\frac{\alpha}{k}-1}(t-y)^{\frac{\alpha}{k}-1} p(x)\,p(y)\,(x-y)^2\,dxdy$$
$$\leq 2\left[{}_kJ_a^\alpha[1]\ \ {}_kJ_a^\alpha[t^2]-\left({}_kJ_a^\alpha[t]\right)^2\right]\|f\|_\infty^2. \tag{2.87}$$

D'après (2.85) et (2.87), on trouve la première inégalité de (2.76).

D'autre part, on a :

$$\frac{1}{k^2\Gamma_k^2(\alpha)}\int_a^t\int_a^t (t-x)^{\frac{\alpha}{k}-1}(t-y)^{\frac{\alpha}{k}-1} p(x)\,p(y)\,(x-y)^2\,dxdy$$
$$\leq \sup_{x,y\in[a,t]}|(x-y)|^2\left({}_kJ_a^\alpha[f(t)]\right)^2=(t-a)^2\left({}_kJ_a^\alpha[f(t)]\right)^2. \tag{2.88}$$

De (2.85) et (2.88), on trouve la deuxième inégalité de (2.76).

Ainsi le Théorème 2.13 est démontré. ■

On donne aussi le résultat suivant :

Théorème 2.14 [36] *Soit X une variable aléatoire continue muni d'une f. d. p. $f:[a,b]\rightarrow \mathbb{R}^+$. Alors pour tout $a<t\leq b$, et α, $\beta>0$, on a :*

$$ {}_kI_a^\alpha[f(t)]\,\sigma^2_{X,k,\beta}+\ {}_kI_a^\beta[f(t)]\,\sigma^2_{X,k,\alpha}-2\left(E_{X-E(X),k,\alpha}(t)\right)\left(E_{X-E(X),k,\beta}(t)\right)$$
$$\leq\begin{cases}\left[\frac{1}{\Gamma_k(\alpha+k)}(t-a)^{\frac{\alpha}{k}-2}\ {}_kJ_a^\beta[t^2]+\frac{1}{\Gamma_k(\beta+k)}(t-a)^{\frac{\beta}{k}-2}\ {}_kJ_a^\alpha[t^2]\right.\\ \left.\qquad -2\ {}_kI_a^\alpha[t]\ \ {}_kJ_a^\beta[t]\right]\|f\|_\infty^2,\ \ f\in L_\infty[a,b],\\ \qquad {}_kI_a^\alpha[f(t)]\ \ {}_kI_a^\beta[f(t)]\,(t-a)^2.\end{cases} \tag{2.89}$$

Preuve. On multiplie les deux membres de l'identité (2.18) par $G_{k,\alpha}(t,y)$, on aboutit à l'identité suivante :

$$G_{k,\beta}(t,y)\,H(x,y)=G_{k,\beta}(t,y)\,(g(x)-g(y))\,(h(x)-h(y))\ . \tag{2.90}$$

Par une intégration par rapport à y sur (a,t), on obtient :

$$\int_a^t G_{k,\beta}(t,y)\,H(x,y)\,dy=\int_a^t G_{k,\beta}(t,y)\,(g(x)-g(y))\,(h(x)-h(y))\,dy\ , \tag{2.91}$$

ce qui entraine

$$\frac{1}{k\Gamma_k(\beta)}\int_a^t (t-y)^{\frac{\beta}{k}-1}p(y)\,H(x,y)\,dy$$
$$=\frac{g(x)h(x)}{k\Gamma_k(\beta)}\int_a^t (t-y)^{\frac{\beta}{k}-1}p(y)\,dy-\frac{g(x)}{k\Gamma_k(\beta)}\int_a^t (t-y)^{\frac{\beta}{k}-1}p(y)\,h(y)\,dy \tag{2.92}$$
$$-\frac{h(x)}{k\Gamma_k(\beta)}\int_a^t (t-y)^{\frac{\beta}{k}-1}p(y)\,g(y)\,dy+\frac{1}{k\Gamma_k(\beta)}\int_a^t (t-y)^{\frac{\beta}{k}-1}p(y)\,g(y)\,h(y)\,dy.$$

De l'identité (2.92) , il vient

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{k\Gamma_k(\beta)} \int_a^t (t-y)^{\frac{\beta}{k}-1} p(y) H(x,y) dy \\ &= g(x) h(x) \ {}_kI_a^\beta [p(t)] - g(x) \ {}_kI_a^\beta [p(t) h(t)] \\ &-h(x) \ {}_kI_a^\beta [p(t) g(t)] + \ {}_kI_a^\beta [p(t) g(t) h(t)] . \end{aligned} \tag{2.93}$$

On multiplie les deux membres de (2.93) par $G_{k,\alpha}(t,x)$, on obtient :

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{k\Gamma_k(\beta)} \int_a^t (t-y)^{\frac{\beta}{k}-1} G_{k,\alpha}(t,x) p(y) H(x,y) dy \\ &= G_{k,\alpha}(t,x) g(x) h(x) \ {}_kI_a^\beta [p(t)] - G_{k,\alpha}(t,x) g(x) \ {}_kI_a^\beta [p(t) h(t)] \\ &-G_{k,\alpha}(t,x) h(x) \ {}_kI_a^\beta [p(t) g(t)] + G_{k,\alpha}(t,x) \ {}_kI_a^\beta [p(t) g(t) h(t)] . \end{aligned} \tag{2.94}$$

Maintenant on intègre l'identité (2.94) entre a, t, il vient

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{k^2\Gamma_k(\alpha)\Gamma_k(\beta)} \int_a^t \int_a^t (t-x)^{\frac{\alpha}{k}-1} (t-y)^{\frac{\beta}{k}-1} p(x) p(y) H(x,y) dxdy \\ &= \ {}_kI_a^\beta [p(t)] \tfrac{1}{k\Gamma_k(\alpha)} \int_a^t (t-x)^{\frac{\alpha}{k}-1} p(x) g(x) h(x) dx \\ &- \ {}_kI_a^\beta [p(t) h(t)] \tfrac{1}{k\Gamma_k(\alpha)} \int_a^t (t-x)^{\frac{\alpha}{k}-1} p(x) g(x) dx \\ &- \ {}_kI_a^\beta [p(t) g(t)] \tfrac{1}{k\Gamma_k(\alpha)} \int_a^t (t-x)^{\frac{\alpha}{k}-1} p(x) h(x) dx \\ &+ \ {}_kI_a^\beta [p(t) g(t) h(t)] \tfrac{1}{k\Gamma_k(\alpha)} \int_a^t (t-x)^{\frac{\alpha}{k}-1} p(x) dx. \end{aligned} \tag{2.95}$$

D'où

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{k^2\Gamma_k(\alpha)\Gamma_k(\beta)} \int_a^t \int_a^t (t-x)^{\frac{\alpha}{k}-1} (t-y)^{\frac{\beta}{k}-1} p(x) p(y) H(x,y) dxdy \\ &= \ {}_kI_a^\beta [p(t)] \ {}_kI_a^\alpha [p(t) g(t) h(t)] + \ {}_kI_a^\beta [p(t) g(t) h(t)] \ {}_kI_a^\alpha [p(t)] \\ &-2 \ {}_kI_a^\beta [p(t) h(t)] \ {}_kI_a^\alpha [p(t) g(t)] . \end{aligned} \tag{2.96}$$

Si on prend $p(t) = f(t)$ et $g(t) = h(t) = t - E(X)$, $a < t \leq b$, alors

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{k^2\Gamma_k(\alpha)\Gamma_k(\beta)} \int_a^t \int_a^t (t-x)^{\frac{\alpha}{k}-1} (t-y)^{\frac{\beta}{k}-1} (x-y)^2 f(x) f(y) dxdy \\ &= \ {}_kI_a^\beta [f(t)] \ {}_kI_a^\alpha \left[(t-E(X))^2 f(t)\right] + \ {}_kI_a^\alpha [f(t)] \ {}_kI_a^\beta \left[(t-E(X))^2 f(t)\right] \\ &-2 \ {}_kI_a^\beta [(t-E(X)) f(t)] \ {}_kI_a^\alpha [(t-E(X)) f(t)] . \end{aligned} \tag{2.97}$$

On a aussi :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{k^2\Gamma_k(\alpha)\Gamma_k(\beta)}\int_a^t\int_a^t (t-x)^{\frac{\alpha}{k}-1}(t-y)^{\frac{\beta}{k}-1}(x-y)^2 f(x)f(y)\,dxdy \\ &\leq \frac{\|f\|_\infty^2}{k^2\Gamma_k(\alpha)\Gamma_k(\beta)}\int_a^t\int_a^t (t-x)^{\frac{\alpha}{k}-1}(t-y)^{\frac{\beta}{k}-1}(x-y)^2\,dxdy \\ &= \|f\|_\infty^2\left[{}_kI_a^\alpha[1]\ {}_kI_a^\beta[t^2] + {}_kI_a^\beta[1]\ {}_kI_a^\alpha[t^2] - 2\,{}_kI_a^\alpha[t]_k\,I_a^\beta[t]\right]. \end{aligned} \tag{2.98}$$

De (2.97) et (2.98) on aboutit à la première inégalité de (2.89).

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{k^2\Gamma_k(\alpha)\Gamma_k(\beta)}\int_a^t\int_a^t (t-x)^{\frac{\alpha}{k}-1}(t-y)^{\frac{\beta}{k}-1}(x-y)^2 f(x)f(y)\,dxdy \\ &\leq \sup_{x,y\in[a,t]}|x-y|^2\ {}_kI_a^\alpha[f(t)]\ {}_kI^a[f(t)] = {}_kI_a^\alpha[f(t)]\,{}_k\,I_a^\beta[f(t)](t-a)^2, \end{aligned} \tag{2.99}$$

et de (2.97) et (2.99) on obtient la deuxième inégalité de (2.89).

Le Théorème 2.14 est ainsi démontré. ■

On donne l'inégalité intégrale $k-$fractionnaire suivante :

Théorème 2.15 [36] *Soit X une variable aléatoire continue ayant une f. d. p. $f:[a,b]\to\mathbb{R}^+$. Alors pour tout $a<t\leq b$, et $\alpha>0$, on a l'inégalité $k-$fractionnaire suivante :*

$${}_kI_a^\alpha[f(t)]\,\sigma^2_{X,k,\alpha}(t) - \left(E_{X-E(X),k,\alpha}(t)\right)^2 \leq \frac{(b-a)^2}{4}\left({}_kI_a^\alpha[f(t)]\right)^2. \tag{2.100}$$

Preuve. D'après le Théorème 2.1, on peut écrire

$$\left|{}_kI_a^\alpha[p(t)]\ {}_kI_a^\alpha[p(t)g^2(t)] - \left({}_kI_a^\alpha[p(t)g(t)]\right)^2\right| \leq \frac{1}{4}\left({}_kI_a^\alpha[f(t)]\right)^2(M-m)^2. \tag{2.101}$$

On prend $p(t)=f(t)$ et $g(t)=h(t)=t-E(X)$, $a<t\leq b$ dans (2.101), on obtient :

$$\begin{aligned} 0 \leq\ &{}_kI_a^\alpha[f(t)]\ {}_kI_a^\alpha\left[(t-E(X))^2 f(t)\right] - \left({}_kI_a^\alpha[(t-E(X))f(t)]\right)^2 \\ &\leq \frac{1}{4}\left({}_kI_a^\alpha[f(t)]\right)^2(M-m)^2. \end{aligned} \tag{2.102}$$

Si on pose $m=a-E(X)$ et $M=b-E(X)$, alors

$$\begin{aligned} &{}_kI_a^\alpha[f(t)]\ {}_kI_a^\alpha\left[(t-E(X))^2 f(t)\right] - \left({}_kI_a^\alpha[(t-E(X))f(t)]\right)^2 \\ &\leq \frac{1}{4}\left({}_kI_a^\alpha[f(t)]\right)^2(b-a)^2. \end{aligned} \tag{2.103}$$

Ce qui implique que

$$ {}_{k}I_{a}^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right]\sigma_{X,k,\alpha}^{2}\left(t\right)-\left(E_{X-E(X),k,\alpha}\left(t\right)\right)^{2}\leq\frac{1}{4}\left({}_{k}I_{a}^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right]\right)^{2}\left(b-a\right)^{2}\ . \tag{2.104}$$

Le Théorème 2.15 est démontré. ■

Chapitre 3

Inégalités Fractionnaires et Caputo-Equations Differentielles

3.1 Introduction

Ce chapitre est consacré aux applications des inégalités intégrales fractionnaires sur des problèmes aux limites d'ordre fractionnaire. On établit des hypothèses assurant l'existence et l'unicité des solutions pour un problème aux limites fractionnaire avec conditions non locales. D'autres résultats d'existence seront aussi traités.

On considère le problème :

$$\begin{cases} D^{\alpha}x(t) - \sum_{l=1}^{q}\varphi_l(t) f(t, x(t)) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\sigma-1}}{\Gamma(\sigma)} f(s, x(s))\, ds, \ t \in J, \\ \\ x(0) = x^* + h(x), \ D^p x(T) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i D^p x(\eta_i), \end{cases} \tag{3.1}$$

où D^{α} et D^p représentent les dérivées fractionnaires au sens de Caputo d'ordre α et p respectivement, avec $1 < \alpha \leq 2$, $0 < p < 1$ et $\sigma \in \mathbb{R}^+$, soient φ_l, $1 \leq l \leq q$ des fonctions continues sur $J := [0, T]$, $x^* \in \mathbb{R}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $0 < \eta_i < T$, $i = 1, 2, ..., m$, $m \geq 2$ et $f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction donnée vérifiant certaines hypothèses qui seront précisées plus tard et soit $h : X \to \mathbb{R}$ est une fonction continue donnée et $X = C(J, \mathbb{R})$ est l'espace de Banach de toutes les fonctions continues de J dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|.\|$, $\|x\| = \sup\{|x(t)| : t \in J\}$.

La condition non locale est aussi utile que la condition locale pour décrire certains phénomènes physiques [11, 12, 23]. Celle-ci est donnée sous la forme suivante : $x(0) + h(x) = x_0$, telle que $h(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i x(t_i)$ où c_i, $i = 1, ..., k$ sont des constantes données et $0 < t_1 < t_2 < ... < t_k < T$.

Durant les dernières années [8, 9, 58, 77], plusieurs auteurs se sont penchés sur les problèmes fractionnaires avec condition non locale.

Dans ce contexte, on établit des hypothèses sous lesquelles on peut montrer l'existence et l'unicité des solutions du problème aux limites fractionnaire (3.1). Ensuite, on prouve l'existence et l'unicité de la solution de tel problème en utilisant le théorème de point fixe de Banach. On consacre la section 3.4 à l'éxistence des solutions du problème (3.1) en utilisant le théorème de O'Regan. Des exemples sur les résultats théoriques suivront dans la section 4.4.

3.2 Résutats Préliminaires

Dans la présente section, on présente quelques lemmes qui seront utilisés dans ce chapitre.

Lemme 3.1 [43] *Soient $\alpha > 0$ et f une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$. Alors la solution générale de l'équation*

$$D^\alpha f(t) = 0, \tag{3.2}$$

est donnée par :

$$f(t) = \sum_{i=0}^{r-1} c_i t^i, \ c_i \in \mathbb{R}, \ i = 0, 1, 2, ..., r-1, \tag{3.3}$$

où $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2, ..., r-1$, $r = [\alpha] + 1$, avec $[\alpha]$ désigne la partie entière de α.

Lemme 3.2 [43] *Soient $\alpha > 0$ et f une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$, alors*

$$I^\alpha \left[D^\alpha f(t) \right] = f(t) + \sum_{i=0}^{r-1} c_i t^i \ , \tag{3.4}$$

où $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2, ..., r-1$, $r = [\alpha] + 1$.

Lemme 3.3 [37] *Soit $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \eta_i^{1-p} \neq T^{1-p}$ et $g : [0, T] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, alors la solution du problème aux limites fractionnaire suivant :*

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = \sum_{l=1}^{q} \varphi_l(t) g(t) + \int_0^t \frac{(t-s)^{\sigma-1}}{\Gamma(\sigma)} g(s) \, ds, \ t \in J, \ 1 < \alpha \leq 2, \ \sigma > 0, \\ x(0) = x^* + h(x), \ D^p x(T) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i D^p x(\eta_i), \ x^* \in \mathbb{R}, \ 0 < p < 1, \end{cases} \tag{3.5}$$

est *donnée par l'equation intégrale suivante :*

$$x(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \sum_{l=1}^q (\varphi_l)(s)\, g(s)\, ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha+\sigma)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\sigma-1} g(s)\, ds$$

$$+\frac{\Gamma(2-p)t}{\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \eta_i^{1-p} - T^{1-p}\right)\Gamma(\alpha-p)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-p-1} \sum_{l=1}^q (\varphi_l)(s)\, g(s)\, ds$$

$$+\frac{\Gamma(2-p)t}{\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \eta_i^{1-p} - T^{1-p}\right)\Gamma(\alpha+\sigma-p)} \int_0^T (T-s)^{\alpha+\sigma-p-1} g(s)\, ds \tag{3.6}$$

$$-\frac{\Gamma(2-p)\sum_{i=1}^m \lambda_i t}{\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \eta_i^{1-p} - T^{1-p}\right)\Gamma(\alpha-p)} \int_0^{\eta_i} (\eta_i-s)^{\alpha-p-1} \sum_{l=1}^q (\varphi_l)(s)\, g(s)\, ds$$

$$-\frac{\Gamma(2-p)\sum_{i=1}^m \lambda_i t}{\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \eta_i^{1-p} - T^{1-p}\right)\Gamma(\alpha+\sigma-p)} \int_0^{\eta_i} (\eta_i-s)^{\alpha+\sigma-p-1} g(s)\, ds + (x^* + h(x)).$$

Preuve. D'aprés les Lemmes 3.1 et 3.2, la solution générale du problème est écrite comme suit :

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \sum_{l=1}^q \varphi_l(s)\, g(s)\, ds \\ &+\frac{1}{\Gamma(\alpha+\sigma)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\sigma-1} g(s)\, ds - c_0 - c_1 t, \end{aligned} \tag{3.7}$$

où c_0 and c_2 sont des constantes arbitraires. En utilisant la condition $x(0) = x^* + h(x)$, on trouve :

$$c_0 = -(x^* + h(x)) \tag{3.8}$$

En utilisant le Lemme 3.1 et en appliquant l'opérateur D^p aux deux membres de (3.7), on obtient :

$$\begin{aligned} D^p x(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-p)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-p-1} \sum_{l=1}^q \varphi_l(s)\, g(s)\, ds \\ &+\frac{1}{\Gamma(\alpha+\sigma-p)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\sigma-p-1} g(s)\, ds - c_1 \frac{1}{\Gamma(2-p)} t^{1-p}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

En particulier, pour $t = T$, on a :

$$\begin{aligned} D^p x(T) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-p)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-p-1} \sum_{l=1}^q \varphi_l(s)\, g(s)\, ds \\ &+\frac{1}{\Gamma(\alpha+\sigma-p)} \int_0^T (T-s)^{\alpha+\sigma-p-1} g(s)\, ds - c_1 \frac{1}{\Gamma(2-p)} T^{1-p}, \end{aligned} \tag{3.10}$$

Ensuite pour $t = \eta_i, i = 1, 2, ..., m$, on a :

$$\begin{aligned} D^p x(\eta_i) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-p)} \int_0^{\eta_i} (\eta_i-s)^{\alpha-p-1} \sum_{l=1}^q \varphi_l(s)\, g(s)\, ds \\ &+\frac{1}{\Gamma(\alpha+\sigma-p)} \int_0^{\eta_i} (\eta_i-s)^{\alpha+\sigma-p-1} g(s)\, ds - c_1 \frac{1}{\Gamma(2-p)} \eta_i^{1-p},\ \ i = 1, 2, ..., m. \end{aligned} \tag{3.11}$$

En utilisant la condition $D^p x(T) = \sum_{i=1}^m \lambda_i D^p x(\eta_i)$, on obtient :

$$\begin{aligned} c_1 = &-\tfrac{\Gamma(2-p)}{\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \eta_i^{1-p} - T^{1-p}\right)\Gamma(\alpha-p)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-p-1} \sum_{l=1}^q (\varphi_l)(s)\, g(s)\, ds \\ &-\tfrac{\Gamma(2-p)}{\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \eta_i^{1-p} - T^{1-p}\right)\Gamma(\alpha+\sigma-p)} \int_0^T (T-s)^{\alpha+\sigma-p-1} g(s)\, ds \\ &+\tfrac{\Gamma(2-p)\sum_{i=1}^m \lambda_i}{\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \eta_i^{1-p} - T^{1-p}\right)\Gamma(\alpha-p)} \int_0^{\eta_i} (\eta_i-s)^{\alpha-p-1} \sum_{l=1}^q (\varphi_l)(s)\, g(s)\, ds \\ &+\tfrac{\Gamma(2-p)\sum_{i=1}^m \lambda_i}{\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \eta_i^{1-p} - T^{1-p}\right)\Gamma(\alpha+\sigma-p)} \int_0^{\eta_i} (\eta_i-s)^{\alpha+\sigma-p-1} g(s)\, ds. \end{aligned} \tag{3.12}$$

On remplace c_0 et c_1 dans (3.6), on trouve (3.7).

■

Maintenant, on transforme le problème (3.1) à un problème du point fixe. Pour cela, on considère l'opérateur $\phi : X \to X$ défini par :

$$\begin{aligned} \phi x(t) := &\tfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \sum_{l=1}^q \varphi_l(s)\, f(s, x(s))\, ds \\ &+\tfrac{1}{\Gamma(\alpha+\sigma)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\sigma-1} f(s, x(s))\, ds \\ &+\tfrac{\Gamma(2-p)t}{\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \eta_i^{1-p} - T^{1-p}\right)\Gamma(\alpha-p)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-p-1} \sum_{l=1}^q \varphi_l(s)\, f(s, x(s))\, ds \\ &+\tfrac{\Gamma(2-p)t}{\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \eta_i^{1-p} - T^{1-p}\right)\Gamma(\alpha+\sigma-p)} \int_0^T (T-s)^{\alpha+\sigma-p-1} f(s, x(s))\, ds \\ &-\tfrac{\Gamma(2-p)\sum_{i=1}^m \lambda_i t}{\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \eta_i^{1-p} - T^{1-p}\right)\Gamma(\alpha-p)} \int_0^{\eta_i} (\eta_i-s)^{\alpha-p-1} \sum_{l=1}^q \varphi_l(s)\, f(s, x(s))\, ds \\ &-\tfrac{\Gamma(2-p)\sum_{i=1}^m \lambda_i t}{\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \eta_i^{1-p} - T^{1-p}\right)\Gamma(\alpha+\sigma-p)} \int_0^{\eta_i} (\eta_i-s)^{\alpha+\sigma-p-1} f(s, x(s))\, ds \\ &+ (x^* + h(x)). \end{aligned} \tag{3.13}$$

où $t \in [0, T]$, $1 < \alpha \leq 2$, $\sigma > 0$.

Pour établir l'existence et l'unicité de la solution du problème (3.1), on considère les hypothèses suivantes :

(H_1) : La fonction $f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue.

(H_2) : Il existe $\omega > 0$ tel que pour tout $t \in J$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq \omega |x - y| .$$

(H_3) : Il existe une constante positive $\varpi < 1$ et une fonction continue $\theta : [0, \infty) \to [0, \infty)$ telles que :

$$\theta(v) \leq \varpi v \quad \text{et} \quad |h(x) - h(y)| \leq \theta(\|x - y\|), \quad \text{pour tout } x,\ y \in X.$$

(H_4) : $h(0) = 0$.

(H_5) : Il existe une fonction positive $\gamma(t) \in C(J, \mathbb{R})$ et une fonction croissante $\psi : [0, \infty) \to (0, \infty)$, telles que :

$$|f(t, x)| \leq \gamma(t)\, \psi(|x|), \quad \text{pour chaque } (t, x) \in J \times \mathbb{R}.$$

(H_6) : $\sup_{\delta \in (0,\infty)} \frac{\delta}{|x^*| + \gamma_0 \psi(\delta)} > \frac{1}{1-\varpi}$, où

$$\begin{aligned}
\gamma_0 =: & \frac{\sum_{l=1}^{q} \|\varphi_l\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \gamma(s)\, ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha+\sigma)} \int_0^T (T-s)^{\alpha+\sigma-1} \gamma(s)\, ds \\
& + \frac{\Gamma(2-p) \sum_{l=1}^{q} \|\varphi_l\|_\infty T}{\left| \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \eta_i^{1-p} - T^{1-p} \right| \Gamma(\alpha-p)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-p-1} \gamma(s)\, ds \\
& + \frac{\Gamma(2-p) T}{\left| \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \eta_i^{1-p} - T^{1-p} \right| \Gamma(\alpha+\sigma-p)} \int_0^T (T-s)^{\alpha+\sigma-p-1} \gamma(s)\, ds \qquad (3.14) \\
& + \frac{\Gamma(2-p) \sum_{l=1}^{q} \|\varphi_l\|_\infty \sum_{i=1}^{m} |\lambda_i| T}{\left| \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \eta_i^{1-p} - T^{1-p} \right| \Gamma(\alpha-p)} \int_0^{\eta_i} (\eta_i - s)^{\alpha-p-1} \gamma(s)\, ds \\
& + \frac{\Gamma(2-p) \sum_{i=1}^{m} |\lambda_i| T}{\left| \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \eta_i^{1-p} - T^{1-p} \right| \Gamma(\alpha+\sigma-p)} \int_0^{\eta_i} (\eta_i - s)^{\alpha+\sigma-p-1} \gamma(s)\, ds.
\end{aligned}$$

Dans ce qui suit, les inégalités fractionnaires ainsi que les théorèmes du ponit fixe (Théorème 1.1, Lemme 1.4 : chapitre 1) seront utilisées pour prouver l'existence et l'unicité de la solution de notre problème (3.1).

3.3 Existence et Unicité : Quelques Résultats

En se basant sur le principe de contraction de Banach, l'unicité de la solution du problème (3.1) sera prouvée.

Théorème 3.1 [37] *Soit* $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \eta_i^{1-p} \neq T^{1-p}$. *Supposons que les hypothèses* (H_1), (H_2) *et* (H_3) *sont vérifiées. Si*

$$\Lambda \omega + \varpi \leq 1, \qquad (3.15)$$

avec,

$$\Lambda := \frac{\sum_{l=1}^{q}\|\varphi_l\|_\infty T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{T^{\alpha+\sigma}}{\Gamma(\alpha+\sigma+1)}$$

$$+\frac{\Gamma(2-p)\sum_{l=1}^{q}\|\varphi_l\|_\infty\left(T^{\alpha-p+1}+\sum_{i=1}^{m}|\lambda_i|\eta_i^{\alpha-p}T\right)}{\left|\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\eta_i^{1-p}-T^{1-p}\right|\Gamma(\alpha-p+1)} \tag{3.16}$$

$$+\frac{\Gamma(2-p)\left(T^{\alpha+\sigma-p+1}+\sum_{i=1}^{m}|\lambda_i|\eta_i^{\alpha+\sigma-p}T\right)}{\left|\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\eta_i^{1-p}-T^{1-p}\right|\Gamma(\alpha+\sigma-p+1)},$$

alors le problème (3.1) *admet une solution unique sur J.*

Preuve. Pour montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème (3.1), il suffit de montrer que l'opérateur ϕ admet un point fixe.

En effet, pour $x, y \in X$ et $t \in J$, on a :

$$|\phi(x)(t)-\phi(y)(t)| = \Big|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\sum_{l=1}^{q}\varphi_l(s)\left(f(s,x(s))-f(s,y(s))\right)ds$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha+\sigma)}\int_0^t (t-s)^{\alpha+\sigma-1}\left(f(s,x(s))-f(s,y(s))\right)ds$$

$$\frac{\Gamma(2-p)t}{\left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\eta_i^{1-p}-T^{1-p}\right)\Gamma(\alpha-p)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-p-1}\sum_{l=1}^{q}\varphi_l(s)\left(f(s,x(s))-f(s,y(s))\right)ds$$

$$+\frac{\Gamma(2-p)t}{\left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\eta_i^{1-p}-T^{1-p}\right)\Gamma(\alpha+\sigma-p)}\int_0^T (T-s)^{\alpha+\sigma-p-1}\left(f(s,x(s))-f(s,y(s))\right)ds \tag{3.17}$$

$$+\frac{\Gamma(2-p)\sum_{i=1}^{m}\lambda_i t}{\left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\eta_i^{1-p}-T^{1-p}\right)\Gamma(\alpha-p)}\int_0^{\eta_i} (\eta_i-s)^{\alpha-p-1}\sum_{l=1}^{q}\varphi_l(s)\left(f(s,x(s))-f(s,y(s))\right)ds$$

$$+\frac{\Gamma(2-p)\sum_{i=1}^{m}\lambda_i t}{\left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\eta_i^{1-p}-T^{1-p}\right)\Gamma(\alpha+\sigma-p)}\int_0^{\eta_i} (\eta_i-s)^{\alpha+\sigma-p-1}\left(f(s,x(s))-f(s,y(s))\right)ds$$

$$+h(x)-h(y)\Big|.$$

Alors

$$\begin{aligned}\|\phi(x)-\phi(y)\| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\sup_{0\leq s\leq 1}\sum_{l=1}^q |\varphi_l(s)|\,\|f(s,x(s))-f(s,y(s))\|\,ds\\
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha+\sigma)}\int_0^T (T-s)^{\alpha+\sigma-1}\|f(s,x(s))-f(s,y(s))\|\,ds\\
&+\frac{\Gamma(2-p)T}{\left|\sum_{i=1}^m \lambda_i\eta_i^{1-p}-T^{1-p}\right|\Gamma(\alpha-p)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-p-1}\sup_{0\leq s\leq 1}\sum_{l=1}^q |\varphi_l(s)|\,\|f(s,x(s))-f(s,y(s))\|\,ds\\
&+\frac{\Gamma(2-p)T}{\left|\sum_{i=1}^m \lambda_i\eta_i^{1-p}-T^{1-p}\right|\Gamma(\alpha+\sigma-p)}\int_0^T (T-s)^{\alpha+\sigma-p-1}\|f(s,x(s))-f(s,y(s))\|\,ds\\
&+\frac{\Gamma(2-p)\sum_{i=1}^m|\lambda_i|T}{\left|\sum_{i=1}^m \lambda_i\eta_i^{1-p}-T^{1-p}\right|\Gamma(\alpha-p)}\int_0^{\eta_i} (\eta_i-s)^{\alpha-p-1}\sup_{0\leq s\leq 1}\sum_{l=1}^q |\varphi_l(s)|\,\|f(s,x(s))-f(s,y(s))\|\,ds\\
&+\frac{\Gamma(2-p)\sum_{i=1}^m|\lambda_i|T}{\left|\sum_{i=1}^m \lambda_i\eta_i^{1-p}-T^{1-p}\right|\Gamma(\alpha+\sigma-p)}\int_0^{\eta_i} (\eta_i-s)^{\alpha+\sigma-p-1}\|f(s,x(s))-f(s,y(s))\|\,ds\\
&+\|h(x)-h(y)\|.\end{aligned} \tag{3.18}$$

En utilisant les l'hypothèses $(H_1)-(H_3)$, on obtient :

$$\begin{aligned}\|\phi(x)-\phi(y)\| &\leq \frac{\omega\|x-y\|\sum_{l=1}^q\|\varphi_l\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\,ds\\
&+\frac{\omega\|x-y\|}{\Gamma(\alpha+\sigma)}\int_0^T (T-s)^{\alpha+\sigma-1}\,ds\\
&+\frac{\Gamma(2-p)T\omega\|x-y\|\sum_{l=1}^q\|\varphi_l\|_\infty}{\left|\sum_{i=1}^m \lambda_i\eta_i^{1-p}-T^{1-p}\right|\Gamma(\alpha-p)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-p-1}\,ds\\
&+\frac{\Gamma(2-p)T\omega\|x-y\|}{\left|\sum_{i=1}^m \lambda_i\eta_i^{1-p}-T^{1-p}\right|\Gamma(\alpha+\sigma-p)}\int_0^T (T-s)^{\alpha+\sigma-p-1}\,ds\\
&+\frac{\Gamma(2-p)\sum_{i=1}^m|\lambda_i|T\omega\|x-y\|\sum_{l=1}^q\|\varphi_l\|_\infty}{\left|\sum_{i=1}^m \lambda_i\eta_i^{1-p}-T^{1-p}\right|\Gamma(\alpha-p)}\int_0^{\eta_i} (\eta_i-s)^{\alpha-p-1}\,ds\\
&+\frac{\Gamma(2-p)\sum_{i=1}^m|\lambda_i|T\omega\|x-y\|}{\left|\sum_{i=1}^m \lambda_i\eta_i^{1-p}-T^{1-p}\right|\Gamma(\alpha+\sigma-p)}\int_0^{\eta_i} (\eta_i-s)^{\alpha+\sigma-p-1}\,ds+\varpi\|x-y\|.\end{aligned} \tag{3.19}$$

En calculant les intégrales, on aboutit à :

$$
\begin{aligned}
\|\phi(x)-\phi(y)\| &\leq \tfrac{\sum_{l=1}^{q}\|\varphi_l\|_\infty T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\omega\|x-y\|+\tfrac{T^{\alpha+\sigma}}{\Gamma(\alpha+\sigma+1)}\omega\|x-y\| \\
&+\tfrac{\Gamma(2-p)T^{\alpha-p+1}\sum_{l=1}^{q}\|\varphi_l\|_\infty}{\left|\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\eta_i^{1-p}-T^{1-p}\right|\Gamma(\alpha-p+1)}\omega\|x-y\| \\
&+\tfrac{\Gamma(2-p)T^{\alpha+\sigma-p+1}}{\left|\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\eta_i^{1-p}-T^{1-p}\right|\Gamma(\alpha+\sigma-p+1)}\omega\|x-y\| \\
&+\tfrac{\Gamma(2-p)T\sum_{i=1}^{m}|\lambda_i|\eta_i^{\alpha-p}\sum_{l=1}^{q}\|\varphi_l\|_\infty}{\left|\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\eta_i^{1-p}-T^{1-p}\right|\Gamma(\alpha-p+1)}\omega\|x-y\| \\
&+\tfrac{\Gamma(2-p)T\sum_{i=1}^{m}|\lambda_i|\eta_i^{\alpha+\sigma-p}}{\left|\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\eta_i^{1-p}-T^{1-p}\right|\Gamma(\alpha+\sigma-p+1)}\omega\|x-y\|+\varpi\|x-y\|.
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

Ce qui implique que

$$
\begin{aligned}
\|\phi(x)-\phi(y)\| &\leq \left[\tfrac{\sum_{l=1}^{q}\|\varphi_l\|_\infty T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\tfrac{T^{\alpha+\sigma}}{\Gamma(\alpha+\sigma+1)}\right]\omega\|x-y\| \\
&+\left[\tfrac{\Gamma(2-p)\sum_{l=1}^{q}\|\varphi_l\|_\infty\left(\sum_{i=1}^{m}|\lambda_i|\eta_i^{\alpha-p}T+T^{\alpha-p+1}\right)}{\left|\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\eta_i^{1-p}-T^{1-p}\right|\Gamma(\alpha-p+1)}\right. \\
&\left.+\tfrac{\Gamma(2-p)\left(\sum_{i=1}^{m}|\lambda_i|\eta_i^{\alpha+\sigma-p}T+T^{\alpha+\sigma-p+1}\right)}{\left|\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\eta_i^{1-p}-T^{1-p}\right|\Gamma(\alpha+\sigma-p+1)}\right]\omega\|x-y\|+\varpi\|x-y\|.
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

D'où,

$$
\|\phi(x)-\phi(y)\|\leq[\Lambda\omega+\varpi]\|x-y\|. \tag{3.22}
$$

Comme $\Lambda\omega+\varpi<1$, alors ϕ est contractant. On conclut par le théorème du point fixe de Banach l'opérateur ϕ admet un point fixe unique $x\in X$ qui est la solution du problème (3.1). ■

Notre deuxième résultat de l'existence des solutions du problème (3.1) est basé sur le Lemme 1.4.

3.4 Existence : D'autres Résultats

Afin d'appliquer le Lemme 1.4 on considère l'opérateur $\phi : X \to X$ défini par :

$$
\phi x(t) := \phi_1 x(t) + \phi_2 x(t), \ t \in J \ , \tag{3.23}
$$

où

$$\begin{aligned}\phi_1 x(t) := & \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \sum_{l=1}^{q} \varphi_l(s) f(s, x(s))\, ds \\ & + \tfrac{1}{\Gamma(\alpha+\sigma)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\sigma-1} f(s, x(s))\, ds \\ & + \tfrac{\Gamma(2-p)t}{\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \eta_i^{1-p} - T^{1-p}\right)\Gamma(\alpha-p)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-p-1} \sum_{l=1}^{q} \varphi_l(s) f(s, x(s))\, ds \\ & + \tfrac{\Gamma(2-p)t}{\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \eta_i^{1-p} - T^{1-p}\right)\Gamma(\alpha+\sigma-p)} \int_0^T (T-s)^{\alpha+\sigma-p-1} f(s, x(s))\, ds \\ & - \tfrac{\Gamma(2-p)\sum_{i=1}^{m} \lambda_i t}{\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \eta_i^{1-p} - T^{1-p}\right)\Gamma(\alpha-p)} \int_0^{\eta_i} (\eta_i-s)^{\alpha-p-1} \sum_{l=1}^{q} \varphi_l(s) f(s, x(s))\, ds \\ & - \tfrac{\Gamma(2-p)\sum_{i=1}^{m} \lambda_i}{\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \eta_i^{1-p} - T^{1-p}\right)\Gamma(\alpha+\sigma-p)} \int_0^{\eta_i} (\eta_i-s)^{\alpha+\sigma-p-1} f(s, x(s))\, ds, \ t \in J, \end{aligned} \tag{3.24}$$

et

$$\phi_2 x(t) := x^* + h(x), \ t \in J \ . \tag{3.25}$$

Théorème 3.2 [37] *Soit* $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \eta_i^{1-p} \neq T^{1-p}$. *Supposons que les hypothèses* (H_1), $(H_3) - (H_6)$ *sont vérifiées. Alors le problème* (3.1) *admet au moins une solution sur* J.

Preuve. D'après l'hypothèse (H_6), il existe un nombre $\delta_0 > 0$ tel que :

$$\frac{\delta_0}{|x^*| + \gamma_0 \psi(\delta_0)} > \frac{1}{1-\varpi}. \tag{3.26}$$

On montre que les opérateurs ϕ_1 et ϕ_2 définis par (3.24) et (3.25), respectivement, vérifient toutes les conditions du Lemme 1.4.

La preuve sera donnée en quatre étapes.

Étape 1 : *On montre que l'opérateur* ϕ_1 *est continu et complétement continu.* On considère l'ensemble $\overline{\Omega}_{\delta_0}$ définit par :

$$\overline{\Omega}_{\delta_0} := \{x \in X : \|x\| \leq \delta_0\}. \tag{3.27}$$

Pour montrer la continuité de l'opérateur $\phi_1 : \overline{\Omega}_{\delta_0} \to X$, on considère $x_n \subset \overline{\Omega}_{\delta_0}$ tel que $x_n(t) \to x(t)$, alors pour tout $t \in J$, on a :

$$\begin{aligned}\|\phi_1(x_n) - \phi_1(x)\| = \Big\| & \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \textstyle\sum_{l=1}^q \varphi_l(s) \left(f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))\right) ds \\ & + \tfrac{1}{\Gamma(\alpha+\sigma)} \int_0^T (T-s)^{\alpha+\sigma-1} \left(f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))\right) ds \\ & + \tfrac{\Gamma(2-p)T}{\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \eta_i^{1-p} - T^{1-p}\right)\Gamma(\alpha-p)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-p-1} \textstyle\sum_{l=1}^q \varphi_l(s) \left(f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))\right) ds \\ & + \tfrac{\Gamma(2-p)T}{\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \eta_i^{1-p} - T^{1-p}\right)\Gamma(\alpha+\sigma-p)} \int_0^T (T-s)^{\alpha+\sigma-p-1} \left(f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))\right) ds \\ & - \tfrac{\Gamma(2-p)T \sum_{i=1}^m \lambda_i}{\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \eta_i^{1-p} - T^{1-p}\right)\Gamma(\alpha-p)} \int_0^{\eta_i} (\eta_i-s)^{\alpha-p-1} \textstyle\sum_{l=1}^q \varphi_l(s) \left(f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))\right) ds \\ & - \tfrac{\Gamma(2-p)T \sum_{i=1}^m \lambda_i}{\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \eta_i^{1-p} - T^{1-p}\right)\Gamma(\alpha+\sigma-p)} \int_0^{\eta_i} (\eta_i-s)^{\alpha+\sigma-p-1} \left(f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))\right) ds \Big\|. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Alors

$$\begin{aligned}\|\phi_1(x_n) - \phi_1(x)\| \leq & \tfrac{\sum_{l=1}^q \|\varphi_l\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \|f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))\| ds \\ & + \tfrac{1}{\Gamma(\alpha+\sigma)} \int_0^T (T-s)^{\alpha+\sigma-1} \|f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))\| ds \\ & + \tfrac{\Gamma(2-p)T \sum_{l=1}^q \|\varphi_l\|_\infty}{\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \eta_i^{1-p} - T^{1-p}\right)\Gamma(\alpha-p)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-p-1} \|f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))\| ds \\ & + \tfrac{\Gamma(2-p)T}{\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \eta_i^{1-p} - T^{1-p}\right)\Gamma(\alpha+\sigma-p)} \int_0^T (T-s)^{\alpha+\sigma-p-1} \|f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))\| ds \\ & + \tfrac{\Gamma(2-p)T \sum_{i=1}^m \lambda_i \sum_{l=1}^q \|\varphi_l\|_\infty}{\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \eta_i^{1-p} - T^{1-p}\right)\Gamma(\alpha-p)} \int_0^{\eta_i} (\eta_i-s)^{\alpha-p-1} \|f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))\| ds \\ & + \tfrac{\Gamma(2-p)T \sum_{i=1}^m \lambda_i}{\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \eta_i^{1-p} - T^{1-p}\right)\Gamma(\alpha+\sigma-p)} \int_0^{\eta_i} (\eta_i-s)^{\alpha+\sigma-p-1} \|f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))\| ds. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Par suite

$$\begin{aligned}\|\phi_1(x_n) - \phi_1(x)\| \leq & \left[\tfrac{T^\alpha \sum_{l=1}^q \|\varphi_l\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} + \tfrac{T^{\alpha+\sigma}}{\Gamma(\alpha+\sigma+1)}\right] \|f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))\| \\ & + \Bigg[\tfrac{\Gamma(2-p) \sum_{l=1}^q \|\varphi_l\|_\infty \left(T^{\alpha-p+1} + T \sum_{i=1}^m \lambda_i \eta_i^{\alpha-p}\right)}{\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \eta_i^{1-p} - T^{1-p}\right)\Gamma(\alpha-p+1)} \\ & + \tfrac{\Gamma(2-p)\left(T^{\alpha+\sigma-p+1} + T \sum_{i=1}^m \lambda_i \eta_i^{\alpha+\sigma-p}\right)}{\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \eta_i^{1-p} - T^{1-p}\right)\Gamma(\alpha+\sigma-p+1)}\Bigg] \|f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))\|. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Ce qui donne

$$\left\|\phi_1\left(x_n\right)-\phi_1\left(x\right)\right\| \leq \Lambda\left\|f\left(s, x_n\left(s\right)\right)-f\left(s, x\left(s\right)\right)\right\|. \tag{3.31}$$

Puisque f est continue, alors

$$\left\|\phi_1\left(x_n\right)-\phi_1\left(x\right)\right\| \rightarrow 0, \text{ quand } n \rightarrow \infty, \tag{3.32}$$

ce qui prouve la continuité de ϕ_1.

Maintenant, on montre que $\phi_1\left(\overline{\Omega}_{\delta_0}\right)$ est borné. Pour tout $x \in \overline{\Omega}_{\delta_0}$ et $t \in J$, on a :

$$\begin{aligned}
\left\|\phi_1\left(x\right)\right\| = \Bigg\| & \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T \left(T-s\right)^{\alpha-1} \textstyle\sum_{l=1}^q \varphi_l\left(s\right) f\left(s, x\left(s\right)\right) ds \\
& + \tfrac{1}{\Gamma(\alpha+\sigma)} \int_0^T \left(T-s\right)^{\alpha+\sigma-1} f\left(s, x\left(s\right)\right) ds \\
& + \tfrac{\Gamma(2-p)T}{\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \eta_i^{1-p}-T^{1-p}\right)\Gamma(\alpha-p)} \int_0^T \left(T-s\right)^{\alpha-p-1} \textstyle\sum_{l=1}^q \varphi_l\left(s\right) f\left(s, x\left(s\right)\right) ds \\
& + \tfrac{\Gamma(2-p)T}{\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \eta_i^{1-p}-T^{1-p}\right)\Gamma(\alpha+\sigma-p)} \int_0^T \left(T-s\right)^{\alpha+\sigma-p-1} f\left(s, x\left(s\right)\right) ds \\
& - \tfrac{\Gamma(2-p)T \sum_{i=1}^m \lambda_i}{\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \eta_i^{1-p}-T^{1-p}\right)\Gamma(\alpha-p)} \int_0^{\eta_i} \left(\eta_i-s\right)^{\alpha-p-1} \textstyle\sum_{l=1}^q \varphi_l\left(s\right) f\left(s, x\left(s\right)\right) ds \\
& - \tfrac{\Gamma(2-p)T \sum_{i=1}^m \lambda_i}{\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \eta_i^{1-p}-T^{1-p}\right)\Gamma(\alpha+\sigma-p)} \int_0^{\eta_i} \left(\eta_i-s\right)^{\alpha+\sigma-p-1} f\left(s, x\left(s\right)\right) ds \Bigg\|.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\left\|\phi_1\left(x\right)\right\| \leq & \tfrac{\sum_{l=1}^q \|\varphi_l\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T \left(T-s\right)^{\alpha-1} \left|f\left(s, x\left(s\right)\right)\right| ds \\
& + \tfrac{1}{\Gamma(\alpha+\sigma)} \int_0^T \left(T-s\right)^{\alpha+\sigma-1} \left|f\left(s, x\left(s\right)\right)\right| ds \\
& + \tfrac{\Gamma(2-p)T \sum_{l=1}^q \|\varphi_l\|_\infty}{\left|\sum_{i=1}^m \lambda_i \eta_i^{1-p}-T^{1-p}\right|\Gamma(\alpha-p)} \int_0^T \left(T-s\right)^{\alpha-p-1} \left|f\left(s, x\left(s\right)\right)\right| ds \\
& + \tfrac{\Gamma(2-p)T}{\left|\sum_{i=1}^m \lambda_i \eta_i^{1-p}-T^{1-p}\right|\Gamma(\alpha+\sigma-p)} \int_0^T \left(T-s\right)^{\alpha+\sigma-p-1} \left|f\left(s, x\left(s\right)\right)\right| ds \\
& + \tfrac{\Gamma(2-p)T \sum_{i=1}^m |\lambda_i| \sum_{l=1}^q \|\varphi_l\|_\infty}{\left|\sum_{i=1}^m \lambda_i \eta_i^{1-p}-T^{1-p}\right|\Gamma(\alpha-p)} \int_0^{\eta_i} \left(\eta_i-s\right)^{\alpha-p-1} \left|f\left(s, x\left(s\right)\right)\right| ds \\
& + \tfrac{\Gamma(2-p)T \sum_{i=1}^m |\lambda_i|}{\left|\sum_{i=1}^m \lambda_i \eta_i^{1-p}-T^{1-p}\right|\Gamma(\alpha+\sigma-p)} \int_0^{\eta_i} \left(\eta_i-s\right)^{\alpha+\sigma-p-1} \left|f\left(s, x\left(s\right)\right)\right| ds.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

En utilisant l'hypothèse (H_5), on obtient :

$$\begin{aligned}\|\phi_1(x)\| \leq{}& \frac{\|\gamma\|\psi(\delta_0)\sum_{l=1}^{q}\|\varphi_l\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\,ds \\ &+\frac{\|\gamma\|\psi(\delta_0)}{\Gamma(\alpha+\sigma)}\int_0^T (T-s)^{\alpha+\sigma-1}\,ds \\ &+\frac{\|\gamma\|\psi(\delta_0)\Gamma(2-p)T\sum_{l=1}^{q}\|\varphi_l\|_\infty}{\left|\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\eta_i^{1-p}-T^{1-p}\right|\Gamma(\alpha-p)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-p-1}\,ds \\ &+\frac{\|\gamma\|\psi(\delta_0)\Gamma(2-p)T}{\left|\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\eta_i^{1-p}-T^{1-p}\right|\Gamma(\alpha+\sigma-p)}\int_0^T (T-s)^{\alpha+\sigma-p-1}\,ds \\ &+\frac{\|\gamma\|\psi(\delta_0)\Gamma(2-p)T\sum_{i=1}^{m}|\lambda_i|\sum_{l=1}^{q}\|\varphi_l\|_\infty}{\left|\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\eta_i^{1-p}-T^{1-p}\right|\Gamma(\alpha-p)}\int_0^{\eta_i} (\eta_i-s)^{\alpha-p-1}\,ds \\ &+\frac{\|\gamma\|\psi(\delta_0)\Gamma(2-p)T\sum_{i=1}^{m}|\lambda_i|}{\left|\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\eta_i^{1-p}-T^{1-p}\right|\Gamma(\alpha+\sigma-p)}\int_0^{\eta_i} (\eta_i-s)^{\alpha+\sigma-p-1}\,ds.\end{aligned} \tag{3.35}$$

En calculant les intégrales du second membre, on aboutit à :

$$\begin{aligned}\|\phi_1(x)\| \leq{}& \frac{\|\gamma\|\psi(\delta_0)T^\alpha\sum_{l=1}^{q}\|\varphi_l\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{\|\gamma\|\psi(\delta_0)T^{\alpha+\sigma}}{\Gamma(\alpha+\sigma+1)} \\ &+\frac{\|\gamma\|\psi(\delta_0)\Gamma(2-p)T^{\alpha-p+1}\sum_{l=1}^{q}\|\varphi_l\|_\infty}{\left|\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\eta_i^{1-p}-T^{1-p}\right|\Gamma(\alpha-p+1)}+\frac{\|\gamma\|\psi(\delta_0)\Gamma(2-p)T^{\alpha+\sigma-p+1}}{\left|\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\eta_i^{1-p}-T^{1-p}\right|\Gamma(\alpha+\sigma-p+1)} \\ &+\frac{\|\gamma\|\psi(\delta_0)\Gamma(2-p)T\sum_{i=1}^{m}|\lambda_i|\eta_i^{\alpha-p+1}\sum_{l=1}^{q}\|\varphi_l\|_\infty}{\left|\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\eta_i^{1-p}-T^{1-p}\right|\Gamma(\alpha-p+1)}+\frac{\|\gamma\|\psi(\delta_0)\Gamma(2-p)T\sum_{i=1}^{m}|\lambda_i|\eta_i^{\alpha+\sigma-p+1}}{\left|\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\eta_i^{1-p}-T^{1-p}\right|\Gamma(\alpha+\sigma-p+1)}.\end{aligned} \tag{3.36}$$

Et donc,

$$\begin{aligned}\|\phi_1(x)\| \leq{}& \|\gamma\|\,\psi(\delta_0)\left[\frac{\sum_{l=1}^{q}\varphi_l(s)T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{T^{\alpha+\sigma}}{\Gamma(\alpha+\sigma+1)}\right] \\ &+\|\gamma\|\,\psi(\delta_0)\left[\frac{\Gamma(2-p)\sum_{l=1}^{q}\varphi_l(s)\left(T^{\alpha-p+1}+\sum_{i=1}^{m}|\lambda_i|\eta_i^{\alpha-p}T\right)}{\left|\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\eta_i^{1-p}-T^{1-p}\right|\Gamma(\alpha-p+1)}\right. \\ &\left.+\frac{\Gamma(2-p)\left(T^{\alpha+\sigma-p+1}+\sum_{i=1}^{m}|\lambda_i|\eta_i^{\alpha+\sigma-p}T\right)}{\left|\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\eta_i^{1-p}-T^{1-p}\right|\Gamma(\alpha+\sigma-p+1)}\right].\end{aligned} \tag{3.37}$$

L'inégalité (3.37) implique que

$$\|\phi_1(x)\| \leq \|\gamma\|\,\psi(\delta_0)\,\Lambda. \tag{3.38}$$

D'où $\phi_1\left(\overline{\Omega}_{\delta_0}\right)$ est uniformément borné.

Ensuite, on établit l'équicontinuité de ϕ_1. Soit t_1, $t_2 \in J$, $t_2 < t_1$ et $x \in \overline{\Omega}_{\delta_0}$. Alors

$$\begin{aligned}
&\left\| \phi\left(x\right)\left(t_1\right) - \phi\left(x\right)\left(t_2\right)\right\| \\
&\leq \frac{\sum_{l=1}^{q}\|\varphi_l\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_2} \left[(t_1-s)^{\alpha-1} - (t_2-s)^{\alpha-1}\right] \left|f\left(s,x\left(s\right)\right)\right| ds \\
&+\frac{\sum_{l=1}^{q}\|\varphi_l\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_2}^{t_1} (t_1-s)^{\alpha-1} \left|f\left(s,x\left(s\right)\right)\right| ds \\
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha+\sigma)} \int_0^{t_1} \left[(t_1-s)^{\alpha+\sigma-1} - (t_2-s)^{\alpha+\sigma-1}\right] \left|f\left(s,x\left(s\right)\right)\right| ds \\
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha+\sigma)} \int_{t_1}^{t_2} (t_1-s)^{\alpha+\sigma-1} \left|f\left(s,x\left(s\right)\right)\right| ds \\
&+\frac{\Gamma(2-p)\sum_{l=1}^{q}\|\varphi_l\|_\infty (t_1-t_2)}{\left|\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\eta_i^{1-p}-T^{1-p}\right|\Gamma(\alpha-p)} \int_0^{T} (T-s)^{\alpha-p-1} \left|f\left(s,x\left(s\right)\right)\right| ds \\
&+\frac{\Gamma(2-p)(t_1-t_2)}{\left|\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\eta_i^{1-p}-T^{1-p}\right|\Gamma(\alpha+\sigma-p)} \int_0^{T} (T-s)^{\alpha+\sigma-p-1} \left|f\left(s,x\left(s\right)\right)\right| ds \\
&+\frac{\Gamma(p+2)\sum_{l=1}^{q}\|\varphi_l\|_\infty \sum_{i=1}^{m}|\lambda_i|(t_2-t_1)}{\left|\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\eta_i^{1-p}-T^{1-p}\right|\Gamma(\alpha-p)} \int_0^{\eta_i} (\eta_i-s)^{\alpha-p-1} \left|f\left(s,x\left(s\right)\right)\right| ds \\
&+\frac{\Gamma(2-p)\sum_{i=1}^{m}|\lambda_i|(t_2-t_1)}{\left|\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\eta_i^{1-p}-T^{1-p}\right|\Gamma(\alpha+\sigma-p)} \int_0^{\eta_i} (\eta_i-s)^{\alpha+\sigma-p-1} \left|f\left(s,x\left(s\right)\right)\right| ds.
\end{aligned} \tag{3.39}$$

L'hypothèse (H_5) implique que

$$\begin{aligned}
&\left\| \phi\left(x\right)\left(t_1\right) - \phi\left(x\right)\left(t_2\right)\right\| \\
&\leq \frac{\|\gamma\|\psi(\delta_0)\sum_{l=1}^{q}\|\varphi_l\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_2} \left[(t_1-s)^{\alpha-1} - (t_2-s)^{\alpha-1}\right] ds \\
&+\frac{\|\gamma\|\psi(\delta_0)\sum_{l=1}^{q}\|\varphi_l\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_2}^{t_1} (t_1-s)^{\alpha-1} ds \\
&+\frac{\|\gamma\|\psi(\delta_0)}{\Gamma(\alpha+\sigma)} \int_0^{t_1} \left[(t_1-s)^{\alpha+\sigma-1} - (t_2-s)^{\alpha+\sigma-1}\right] ds \\
&+\frac{\|\gamma\|\psi(\delta_0)}{\Gamma(\alpha+\sigma)} \int_{t_1}^{t_2} (t_1-s)^{\alpha+\sigma-1} ds \\
&+\frac{\|\gamma\|\psi(\delta_0)\Gamma(2-p)\sum_{l=1}^{q}\|\varphi_l\|_\infty (t_1-t_2)}{\left|\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\eta_i^{1-p}-T^{1-p}\right|\Gamma(\alpha-p)} \int_0^{T} (T-s)^{\alpha-p-1} ds \\
&+\frac{N_\delta\Gamma(2-p)(t_1-t_2)}{\left|\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\eta_i^{1-p}-T^{1-p}\right|\Gamma(\alpha+\sigma-p)} \int_0^{T} (T-s)^{\alpha+\sigma-p-1} ds \\
&+\frac{\Gamma(p+2)\sum_{l=1}^{q}\|\varphi_l\|_\infty \sum_{i=1}^{m}|\lambda_i|(t_2-t_1)}{\left|\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\eta_i^{1-p}-T^{1-p}\right|\Gamma(\alpha-p)} \int_0^{\eta_i} (\eta_i-s)^{\alpha-p-1} ds \\
&+\frac{\|\gamma\|\psi(\delta_0)\Gamma(2-p)\sum_{i=1}^{m}|\lambda_i|(t_2-t_1)}{\left|\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\eta_i^{1-p}-T^{1-p}\right|\Gamma(\alpha+\sigma-p)} \int_0^{\eta_i} (\eta_i-s)^{\alpha+\sigma-p-1} ds.
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
&\left\|\phi\left(x\right)\left(t_{1}\right)-\phi\left(x\right)\left(t_{2}\right)\right\| \\
&\leq \tfrac{\|\gamma\|\psi(\delta_0)\sum_{l=1}^{q}\|\varphi_l\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\left|(t_1-t_2)^{\alpha}+t_2^{\alpha}-t_1^{\alpha}\right|\right) \\
&+\tfrac{\|\gamma\|\psi(\delta_0)}{\Gamma(\alpha+\sigma+1)}\left(\left|(t_1-t_2)^{\alpha+\sigma}+t_2^{\alpha+\sigma}-t_1^{\alpha+\sigma}\right|\right) \\
&+\tfrac{\|\gamma\|\psi(\delta_0)\Gamma(2-p)}{\left|\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\eta_i^{1-p}-T^{1-p}\right|}\left[\tfrac{T^{\alpha-p}\sum_{l=1}^{q}\|\varphi_l\|_\infty}{\Gamma(\alpha-p+1)}+\tfrac{T^{\alpha+\sigma-p}}{\Gamma(\alpha+\sigma-p+1)}\right]\left(\left|t_1-t_2\right|\right) \\
&+\tfrac{\|\gamma\|\psi(\delta_0)\Gamma(2-p)}{\left|\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\eta_i^{1-p}-T^{1-p}\right|}\left[\tfrac{\sum_{l=1}^{q}\|\varphi_l\|_\infty\sum_{i=1}^{m}|\lambda_i|{\eta_i}^{\alpha-p}}{\Gamma(\alpha-p+1)}+\tfrac{\sum_{i=1}^{m}|\lambda_i|{\eta_i}^{\alpha+\sigma-p}}{\Gamma(\alpha+\sigma-p+1)}\right]\left(\left|t_2-t_1\right|\right).
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Passant à la limite lorsque $t_1 \to t_2$ dans (3.41), on trouve que $\left\|\phi\left(x\right)\left(t_{1}\right)-\phi\left(x\right)\left(t_{2}\right)\right\|$ tend vers zéro. Donc $\phi_1\left(\overline{\Omega}_{\delta_0}\right)$ est équicontinu. D'après le théorème d'Ascolli-Arzella, ϕ_1 est un opérateur complètement continu, ce qui achève la preuve de l'étape 1.

Étape 2 : *On montre que l'opérateur* $\phi_2 : \overline{\Omega}_{\delta_0} \to X$ *est contractant.*

En effet, pour $x, y \in \overline{\Omega}_{\delta_0}$ et $t \in J$, on a :

$$\left\|\phi_2\left(x\right)-\phi_2\left(y\right)\right\| = \left\|h\left(x\right)-h\left(y\right)\right\| \ . \tag{3.42}$$

D'après l'hypothèse (H_2), on trouve que :

$$\left\|\phi_2\left(x\right)-\phi_2\left(y\right)\right\| \leq \varpi\left\|x-y\right\| \ . \tag{3.43}$$

Comme $\varpi < 1$, alors ϕ_2 est contractant.

Étape 3 : *On montre que l'opérateur* $\phi_2 : \overline{\Omega}_{\delta_0} \to X$ *est borné.*

En effet, soit $x \in \overline{\Omega}_{\delta_0}$, alors pour tout $t \in J$, on a :

$$\left\|\phi_2\left(x\right)\right\| \leq \left\|x^* + h\left(x\right)\right\| \ . \tag{3.44}$$

Donc,

$$\left\|\phi_2\left(x\right)\right\| \leq \left|x^*\right| + \left\|h\left(x\right)-h\left(0\right)\right\| + \left\|h\left(0\right)\right\| \ . \tag{3.45}$$

Les hypothèses (H_3) et (H_4) impliquent que

$$\left\|\phi_2\left(x\right)\right\| \leq \left|x^*\right| + \varpi\delta_0 \ . \tag{3.46}$$

Ce qui prouve que $\phi_2\left(\overline{\Omega}_{\delta_0}\right)$ est borné. De plus, d'après le fait que $\phi_1\left(\overline{\Omega}_{\delta_0}\right)$ soit borné, on peut conclure que $\phi\left(\overline{\Omega}_{\delta_0}\right)$ est borné.

Étape 4 : *Finalement, on montre que le cas (II) du Lemme 1.4 n'est pas vérifie.*

À cette fin, on effectue la démonstration par l'absurde. Supposons que (II) est satisfaite. Alors il existe $0<\mu<1$, $x\in\partial\Omega_{\delta_0}$, tel que $x=\mu\phi(x)$.

Par conséquent, on a $\|x\|=\delta_0$ et

$$\begin{aligned}
x(t)=\mu\Big[&\tfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\sum_{l=1}^q\varphi_l(s)f(s,x(s))\,ds\\
&+\tfrac{1}{\Gamma(\alpha+\sigma)}\int_0^t(t-s)^{\alpha+\sigma-1}f(s,x(s))\,ds\\
&+\tfrac{\Gamma(2-p)t}{\left(\sum_{i=1}^m\lambda_i\eta_i^{1-p}-T^{1-p}\right)\Gamma(\alpha-p)}\int_0^T(T-s)^{\alpha-p-1}\sum_{l=1}^q\varphi_l(s)f(s,x(s))\,ds\\
&+\tfrac{\Gamma(2-p)t}{\left(\sum_{i=1}^m\lambda_i\eta_i^{1-p}-T^{1-p}\right)\Gamma(\alpha+\sigma-p)}\int_0^T(T-s)^{\alpha+\sigma-p-1}f(s,x(s))\,ds\\
&-\tfrac{\Gamma(2-p)\sum_{i=1}^m\lambda_it}{\left(\sum_{i=1}^m\lambda_i\eta_i^{1-p}-T^{1-p}\right)\Gamma(\alpha-p)}\int_0^{\eta_i}(\eta_i-s)^{\alpha-p-1}\sum_{l=1}^q\varphi_l(s)f(s,x(s))\,ds\\
&-\tfrac{\Gamma(2-p)\sum_{i=1}^m\lambda_it}{\left(\sum_{i=1}^m\lambda_i\eta_i^{1-p}-T^{1-p}\right)\Gamma(\alpha+\sigma-p)}\int_0^{\eta_i}(\eta_i-s)^{\alpha+\sigma-p-1}f(s,x(s))\,ds\\
&+(x^*+h(x))\Big],\ t\in J.
\end{aligned}\tag{3.47}$$

En utilisant les hypothèses (H_3) et $(H_4)-(H_6)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\|x\|\le\psi(\|x\|)\Big[&\tfrac{\sum_{l=1}^q\|\varphi_l\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\gamma(s)\,ds\\
&+\tfrac{1}{\Gamma(\alpha+\sigma)}\int_0^t(t-s)^{\alpha+\sigma-1}\gamma(s)\,ds\\
&+\tfrac{\Gamma(2-p)t\sum_{l=1}^q\|\varphi_l\|_\infty}{\left(\sum_{i=1}^m\lambda_i\eta_i^{1-p}-T^{1-p}\right)\Gamma(\alpha-p)}\int_0^T(T-s)^{\alpha-p-1}\gamma(s)\,ds\\
&+\tfrac{\Gamma(2-p)t}{\left(\sum_{i=1}^m\lambda_i\eta_i^{1-p}-T^{1-p}\right)\Gamma(\alpha+\sigma-p)}\int_0^T(T-s)^{\alpha+\sigma-p-1}\gamma(s)\,ds\\
&+\tfrac{\Gamma(2-p)t\sum_{i=1}^m\lambda_i\sum_{l=1}^q\|\varphi_l\|_\infty}{\left(\sum_{i=1}^m\lambda_i\eta_i^{1-p}-T^{1-p}\right)\Gamma(\alpha-p)}\int_0^{\eta_i}(\eta_i-s)^{\alpha-p-1}\gamma(s)\,ds\\
&+\tfrac{\Gamma(2-p)\sum_{i=1}^m\lambda_it}{\left(\sum_{i=1}^m\lambda_i\eta_i^{1-p}-T^{1-p}\right)\Gamma(\alpha+\sigma-p)}\int_0^{\eta_i}(\eta_i-s)^{\alpha+\sigma-p-1}\gamma(s)\,ds\Big]\\
&+|x^*|+\varpi\delta_0.
\end{aligned}\tag{3.48}$$

Maintenant, on prend $t \in J$ et en ulilisant la définition de $\overline{\Omega}_{\delta_0}$, alors

$$\delta_0 \leq \psi(\delta_0)\left[\frac{\sum_{l=1}^{q}\|\varphi_l\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\gamma(s)\,ds\right.$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha+\sigma)}\int_0^T (T-s)^{\alpha+\sigma-1}\gamma(s)\,ds$$

$$+\frac{\Gamma(2-p)t\sum_{l=1}^{q}\|\varphi_l\|_\infty}{\left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\eta_i^{1-p}-T^{1-p}\right)\Gamma(\alpha-p)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-p-1}\gamma(s)\,ds$$

$$+\frac{\Gamma(2-p)t}{\left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\eta_i^{1-p}-T^{1-p}\right)\Gamma(\alpha+\sigma-p)}\int_0^T (T-s)^{\alpha+\sigma-p-1}\gamma(s)\,ds \tag{3.49}$$

$$+\frac{\Gamma(2-p)t\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\sum_{l=1}^{q}\|\varphi_l\|_\infty}{\left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\eta_i^{1-p}-T^{1-p}\right)\Gamma(\alpha-p)}\int_0^{\eta_i} (\eta_i-s)^{\alpha-p-1}\gamma(s)\,ds$$

$$\left.+\frac{\Gamma(2-p)\sum_{i=1}^{m}\lambda_i t}{\left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\eta_i^{1-p}-T^{1-p}\right)\Gamma(\alpha+\sigma-p)}\int_0^{\eta_i} (\eta_i-s)^{\alpha+\sigma-p-1}\gamma(s)\,ds\right]$$

$$+|x^*|+\varpi\delta_0.$$

Ce qui implique

$$\delta_0 \leq \gamma_0\psi(\delta_0)+|x^*|+\varpi\delta_0. \tag{3.50}$$

Donc,

$$\frac{\delta_0}{\gamma_0\psi(\delta_0)+|x^*|} \leq \frac{1}{1-\varpi} \tag{3.51}$$

ce qui constitue une contradiction avec (3.26). Par conséquent, on a montré que les opérateurs ϕ_1 et ϕ_2, vérifient toutes les conditions du Lemme 1.4. On peut conclure que l'opérateur ϕ admet au moins un point fixe $x \in \overline{\Omega}_{\delta_0}$ qui est la solution du problème (3.1), ce qui achève la démonstration du Théorème 3.2.

■

Dans cette section, on présente des exemples validant les résultats.

3.5 Exemples Validant les résultats

Exemple 3.1 *Soit le problème suivant :*

$$\begin{cases} D^{\frac{3}{2}}x(t)-\left(\frac{\sinh\left(e^{t^2}\right)}{21\sqrt{1+\pi e^{t^2}}}+\frac{e^{-t}}{7+e^t}+\frac{\sqrt{\pi}\sinh t}{12\pi+t^2}\right)\left(\frac{1}{\left(5\sqrt{\pi}+t\right)^2}\tan^{-1}x(t)+\frac{1}{2}t^2\right) \\ \qquad =\int_0^t\frac{(t-s)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\left(\frac{1}{15\sqrt{\pi}}\tan^{-1}x(t)+\frac{1}{2}s^2\right)ds,\ t\in[0,1], \\ x(0)=\frac{3}{5}+\sum_{i=1}^k c_i x(t_i),\ D^{\frac{3}{5}}(1)=\frac{\sqrt{3}}{4}D^{\frac{3}{5}}\left(\frac{1}{5}\right)+3D^{\frac{3}{5}}\left(\frac{2}{7}\right)+\frac{5}{8}D^{\frac{3}{5}}\left(\frac{4}{9}\right), \end{cases} \tag{3.52}$$

où $0<t_1<t_2<...<t_k<T$, c_i, $i=1,...,k$ sont des constantes positives avec $\sum_{i=1}^k c_i<\frac{1}{2}$.

Pour cet exemple, on a $\alpha=\frac{3}{2}$, $p=\frac{3}{5}$, $\sigma=\frac{1}{2}$, $\lambda_1=\frac{\sqrt{3}}{4}$, $\lambda_2=3$, $\lambda_3=\frac{5}{8}$, $\eta_1=\frac{1}{5}$, $\eta_2=\frac{2}{7}$, $\eta_3=\frac{4}{9}$, $x^*=\frac{3}{5}$, $T=1$ et $\varphi_1(t):=\frac{\sinh\left(e^{t^2}\right)}{21\sqrt{1+\pi e^{t^2}}}$,

$\varphi_2(t):=\frac{e^{-t}}{7+e^t}$, $\varphi_3(t)=\frac{\sqrt{\pi}\sinh t}{12\pi+t^2}$, $f(t,x):=\frac{1}{\left(5\sqrt{\pi}+t\right)^2}\tan^{-1}x+\frac{1}{2}t^2$, $h(x):=\sum_{i=1}^k c_i x(t_i)$.

Soit $t\in[0,1]$ et $x,y\in\mathbb{R}$. Alors

$$|f(t,x)-f(t,y)|\leq\frac{1}{\left(5\sqrt{\pi}+t\right)^2}\left|\tan^{-1}x-\tan^{-1}y\right|\leq\frac{1}{25\pi}|x-y|\ .$$

Par conséquent, l'hypothèse (H_1) est vérifiée avec $\omega=\frac{1}{25\pi}$. Aussi on a :

$$|h(x)-h(y)|\leq\left|\sum_{i=1}^k c_i x(t_i)-\sum_{i=1}^k c_i y(t_i)\right|\leq\sum_{i=1}^k c_i|x-y|\ .$$

D'où l'hypothèse (H_2) est satisfaite avec $\varpi=\sum_{i=1}^k c_i<\frac{1}{2}$.

Comme

$$\|\varphi_1\|_\infty=\sup_{t\in[0,1]}\varphi_1(t)=0,01757\,,\ \ \|\varphi_2\|_\infty=\sup_{t\in[0,1]}\varphi_2(t)=0,125,$$
$$\|\varphi_3\|_\infty=\sup_{t\in[0,1]}\varphi_3(t)=0,053835,$$

il en découle que

$$\Lambda:=\frac{\sum_{l=1}^3\|\varphi_l\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{1}{\Gamma(\alpha+\sigma+1)}+\frac{\Gamma(2-p)\sum_{l=1}^3\|\varphi_l\|_\infty\left(1+\sum_{i=1}^3|\lambda_i|\eta_i^{\alpha-p}\right)}{\left|\sum_{i=1}^3\lambda_i\eta_i^{1-p}-1\right|\Gamma(\alpha-p+1)}$$

$$+\frac{\Gamma(2-p)\left(1+\sum_{i=1}^3|\lambda_i|\eta_i^{\alpha+\sigma-p}\right)}{\left|\sum_{i=1}^3\lambda_i\eta_i^{1-p}-1\right|\Gamma(\alpha+\sigma-p+1)}=1,\ 320\,7.$$

Par conséquent,

$$\Lambda\omega+\varpi=\frac{1.320\,7}{25\pi}+\sum_{i=1}^k c_i<1\ .$$

D'où, d'après le Théorème 3.1, le problème (3.52) admet une solution unique sur $[0,1]$.

Exemple 3.2 *Considérons le problème suivant :*

$$\begin{cases} D^{\frac{4}{3}}x\left(t\right)-\left(\frac{\ln(1+t)}{17(1+t^2)}+\frac{e^{-\pi t}}{20\sqrt{1+\pi t^2}}\right)\left(\frac{\sqrt{\pi}\cos(\pi t)|x(t)|}{16(t+2)^2}+\frac{1}{2}+\ln\left(1+t^2\right)\right) \\ \quad =\int_0^t\frac{(t-s)^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}\left(\frac{\sqrt{\pi}\cos(\pi s)|x(s)|}{16(s+2)^2}+\frac{1}{2}+\ln\left(1+s^2\right)\right)ds,\ t\in[0,1], \\ x\left(0\right)=\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{3}{7}x\left(\zeta\right),\ D^{\frac{1}{3}}\left(1\right)=\sqrt{3}D^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{4}\right)+D^{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\right)+\frac{5}{4}D^{\frac{1}{3}}\left(\frac{4}{5}\right),\ 0<\zeta<1. \end{cases} \tag{3.53}$$

On a $\alpha=\frac{4}{3}$, $p=\frac{1}{3}$, $\sigma=\frac{3}{2}$, $\lambda_1=\sqrt{3}$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=\frac{5}{4}$, $\eta_1=\frac{1}{4}$, $\eta_2=\frac{2}{3}$, $\eta_3=\frac{4}{5}$, $0<\zeta<1$, $x^*=\frac{\sqrt{2}}{3}$, $T=1$ et $\varphi_1\left(t\right):=\frac{\ln(1+t)}{17(1+t^2)}$, $\varphi_2\left(t\right):=\frac{e^{-\pi t}}{20\sqrt{1+\pi t^2}}$.

On définit

$$f\left(t,x\right):=\frac{\sqrt{\pi}\cos(\pi t)|x(t)|}{16(t+2)^2}+\frac{1}{2}+\ln\left(1+t^2\right),\ t\in[0,1],\ x\in\mathbb{R}\ .$$

Pour tout $t\in[0,1]$ et x, $y\in\mathbb{R}$, on a :

$$\left|f\left(t,x\right)-f\left(t,y\right)\right|\leq\frac{\sqrt{\pi}\cos(\pi t)}{16(t+2)^2}\left|x-y\right|\leq\frac{\sqrt{\pi}}{64}\left|x-y\right|$$

et

$$\left|h\left(x\right)-h\left(y\right)\right|\leq\frac{3}{7}\left|x-y\right|\ .$$

Il est clair que les l'hypothèses (H_2) et (H_3) sont vérifiées avec $\omega=\frac{\sqrt{\pi}}{64}$ et $\varpi=\frac{3}{7}$.

On a aussi

$$\left\|\varphi_1\right\|_\infty=0,04077\,3,\quad\left\|\varphi_2\right\|_\infty=0,02456\,9$$

et

$$\Lambda:=\frac{\sum_{l=1}^2\|\varphi_l\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{1}{\Gamma(\alpha+\sigma+1)}+\frac{\Gamma(2-p)\sum_{l=1}^2\|\varphi_l\|_\infty\left(1+\sum_{i=1}^3|\lambda_i|\eta_i^{\alpha-p}\right)}{\left|\sum_{i=1}^3\lambda_i\eta_i^{1-p}-1\right|\Gamma(\alpha-p+1)}$$

$$+\frac{\Gamma(2-p)\left(1+\sum_{i=1}^3|\lambda_i|\eta_i^{\alpha+\sigma-p}\right)}{\left|\sum_{i=1}^3\lambda_i\eta_i^{1-p}-1\right|\Gamma(\alpha+\sigma-p+1)}=0,58112.$$

Par conséquent,

$$\Lambda\omega+\varpi=0,01609+0,42857=0,1609,42\,857<1\ .$$

D'après le Théorème 3.1, le problème (3.53) admet une solution unique sur $[0,1]$.

Exemple 3.3 *On Considère le problème suivant :*

$$\begin{cases} D^{\frac{7}{4}}x\left(t\right)-\left(\frac{\cosh(\pi t+1)}{18(t^{2}+2)^{2}}+\frac{e^{-t^{2}}}{\pi e^{t}+15}+\frac{\ln(1+t)}{17(1+t^{2})}\right)\beta tx^{2}\sin x\left(\pi^{2}t\right) \\ =\int_{0}^{t}\frac{(t-s)^{\sqrt{21}-1}}{\Gamma\left(\sqrt{21}\right)}\beta ts^{2}\sin s\left(\pi^{2}t\right)ds,\ t\in[0,1], \\ x\left(0\right)=\frac{1}{3}+\varpi x\left(\xi\right),\ D^{\frac{2}{5}}\left(1\right)=2D^{\frac{2}{5}}\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{5}{6}D^{\frac{2}{5}}\left(\frac{3}{7}\right)+\frac{4}{7}D^{\frac{2}{5}}\left(\frac{5}{8}\right),0<\xi<1. \end{cases} \tag{3.54}$$

Pour cet exemple, on a $\alpha=\frac{7}{4}$, $p=\frac{2}{5}$, $\sigma=\sqrt{21}$, $\lambda_1=2$, $\lambda_2=\frac{5}{6}$, $\lambda_3=\frac{4}{7}$, $\eta_1=\frac{1}{3}$, $\eta_2=\frac{3}{7}$, $\eta_3=\frac{5}{8}$, $0<\zeta<1$, et $\varphi_1\left(t\right):=\frac{\cosh(\pi t+1)}{18(t^{2}+2)^{2}}$, $\varphi_2\left(t\right):=\frac{e^{-t^{2}}}{\pi e^{t}+15}$, $\varphi_3\left(t\right)=:\frac{\ln(1+t)}{17(1+t^{2})}$, $x^*=\frac{1}{3}$.

On définit

$$f\left(t,x\right):=\beta tx^{2}\sin x\left(\pi^{2}t\right)$$

et

$$h\left(x\right):=\varpi x\left(\xi\right),\ 0<\zeta<1\ .$$

En appliquant l'hypothèse (H_3), on obtient :

$$\left|h\left(x\right)-h\left(y\right)\right|\leq\varpi\left\|x-y\right\|,\ x,\ y\in C\left([0,1]\right)\ ,$$

ce qui signifie que h est contractant. De plus $h\left(0\right)=0$. Par conséquent, l'hypothèse (H_4) est satisfaite.

Pour tout $t\in[0,1]$ et $x\in\mathbb{R}$, on a :

$$\left|f\left(t,x\right)\right|=\left|\beta tx^{2}\sin x\left(\pi^{2}t\right)\right|\leq\beta tx^{2}\ .$$

D'où, l'hypothèse (H_5) est satisfaite avec $\gamma\left(t\right)=\beta t$ et $\psi\left(x\right)=x^{2}$.

Maintenant, en calculant la valeur de γ_0, on obtient :

$$\begin{aligned}\gamma_0:=&\frac{\sum_{l=1}^{3}\|\varphi_l\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1\left(1-s\right)^{\alpha-1}\beta sds+\frac{1}{\Gamma(\alpha+\sigma)}\int_0^1\left(1-s\right)^{\alpha+\sigma-1}\beta sds\\&+\frac{\Gamma(2-p)\sum_{l=1}^{3}\|\varphi_l\|_\infty}{\left|\sum_{i=1}^{3}\lambda_i\eta_i^{1-p}-1\right|\Gamma(\alpha-p)}\int_0^1\left(1-s\right)^{\alpha-p-1}\beta sds\\&+\frac{\Gamma(2-p)}{\left|\sum_{i=1}^{3}\lambda_i\eta_i^{1-p}-1\right|\Gamma(\alpha+\sigma-p)}\int_0^1\left(1-s\right)^{\alpha+\sigma-p-1}\beta sds\\&+\frac{\Gamma(2-p)\sum_{l=1}^{3}\|\varphi_l\|_\infty\sum_{i=1}^{3}|\lambda_i|}{\left|\sum_{i=1}^{3}\lambda_i\eta_i^{1-p}-1\right|\Gamma(\alpha-p)}\int_0^{\eta_i}\left(\eta_i-s\right)^{\alpha-p-1}\beta sds\\&+\frac{\Gamma(2-p)\sum_{i=1}^{3}|\lambda_i|T}{\left|\sum_{i=1}^{3}\lambda_i\eta_i^{1-p}-1\right|\Gamma(\alpha+\sigma-p)}\int_0^{\eta_i}\left(\eta_i-s\right)^{\alpha+\sigma-p-1}\beta sds=2,04552\beta.\end{aligned}$$

Par conséquent, on aboutit à :

$$\sup_{\delta\in(0,\infty)} \frac{\delta}{|x^*|+\gamma_0\psi(\delta)} = \sup_{\delta\in(0,\infty)} \frac{\delta}{\frac{1}{3}+2{,}04552\beta\delta^2} = \frac{0{,}60552}{\sqrt{\beta}} > \frac{1}{1-|\varpi|} \ .$$

Ce qui signifie que $0 < \beta < (0,60552)^2 (1 - |\varpi|)^2$.

Ainsi, toutes les hypothèses du Théorème 3.2 sont vérifiées ce qui permet de conclure que le problème (3.54) admet au moins une solution sur $[0, 1]$.

Chapitre 4

Système d'Equations Différentielles Fractionnaires avec n Dérivées

4.1 Introduction

L'étude des systèmes d'équations différentielles fractionnaires soumis à des conditions aux limites, a pris part d'une attention particulière lors de recherche très récents. Ces résultats peuvent être consultés dans les références $[21, 42, 50, 51, 59, 72, 73, 75-77]$.

Ce chapitre est consacré à l'étude d'existence et d'unicité des solutions du système d'équations différentielles fractionnaires avec dérivée fractionnaire au sens de Caputo. On considère alors :

$$\begin{cases} D^{\alpha_0}x(t) = f_1\left(t, y(t), D^{\alpha_1}y(t), D^{\alpha_2}y(t), ..., D^{\alpha_{n-1}}y(t)\right), \ t \in J, \\ D^{\beta_0}y(t) = f_2\left(t, x(t), D^{\beta_1}x(t), D^{\beta_2}x(t), ..., D^{\beta_{n-1}}x(t)\right), \ t \in J, \\ x(0) = x^*, \ x'(0) = x''(0) = ... = x^{(n-2)}(0) = 0, \ D^p x(1) = \lambda_1 D^p x(\eta), \\ y(0) = y^*, \ y'(0) = y''(0) = ... = y^{(n-2)}(0) = 0, \ D^q y(1) = \lambda_2 D^q y(\xi), \end{cases} \tag{4.1}$$

où D^{α_i}, D^{β_i}, $i = 0, 1, 2, ..., n-1$, D^p et D^q, sont des dérivées fractionnaires au sens de Caputo, avec $n-1 < \alpha_{n-1} < ... < \alpha_1 < \alpha_0 < n$ et $n-1 < \beta_{n-1} < ... < \beta_1 < \beta_0 < n$, $p < \alpha_0$, $q < \beta_0$, $n \in N^*$, $n \neq 1$, $J := [0,1]$, λ_1, $\lambda_2 \neq 0$ deux constantes réelles, $0 < \eta$, $\xi < 1$, f_1, $f_2 : J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont des fonctions qui seront à préciser plus tard.

Dans la section 4.2 de ce chapitre, on présente la solution générale du système d'équations différentielles fractionnaires (4.1). Des hypothèses sous lesquelles on peut montrer l'existence et l'unicité des solutions du système fractionnaire (4.1) sont proposées. La section 4.3 est consacrée à l'étude de l'existence et l'unicité de la solution du système (4.1) en utilisant le principe de contraction de Banach. Dans la section 4.4, on s'intéresse à l'éxistence des solutions du système (4.1). Enfin, on présente des exemples dans la section 4.5.

4.2 Résutat Préliminaire et Hypothèses

On démontre le lemme suivant :

Lemme 4.1 [38] *Soit* $n-1<\alpha_0<n$, $n>0$ *et* $g : J \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. Alors la solution du problème :*

$$D^{\alpha_0} x(t) = g(t), \; t \in J, \; n-1 < \alpha_0 < n \;, \tag{4.2}$$

avec

$$x(0) = x^*, \; x'(0) = x''(0) = ... = x^{(n-2)}(0) = 0 \tag{4.3}$$

et

$$D^p x(1) = \lambda_1 D^p x(\eta) \;, \tag{4.4}$$

est donnée par :

$$\begin{aligned} x(t) &:= \tfrac{1}{\Gamma(\alpha_0)} \int_0^t (t-s)^{\alpha_0-1} g(s)\, ds + x^* \\ &- \tfrac{\Gamma(n-p)t^{n-1}}{(1-\lambda_1\eta^{n-p-1})\Gamma(n)\Gamma(\alpha_0-p)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha_0-p-1} g(s)\, ds \\ &+ \tfrac{\lambda_1\Gamma(n-p)t^{n-1}}{(1-\lambda_1\eta^{n-p-1})\Gamma(n)\Gamma(\alpha_0-p)} \int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha_0-p-1} g(s)\, ds. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Preuve. On a :

$$x(t) = \tfrac{1}{\Gamma(\alpha_0)} \int_0^t (t-s)^{\alpha_0-1} g(s)\, ds - c_0 - c_1 t - c_2 t^2 - .... - c_{n-1} t^{n-1} \;, \tag{4.6}$$

où c_0 et $c_1, c_2, ..., c_{n-1}$ sont des constantes arbitraires. Les conditions $x(0) = x^*$ et $x^{'}(0) = ... = x^{(n-2)}(0) = 0$ impliquent que

$$c_0 = -x^* \tag{4.7}$$

et

$$c_1 = c_2 = ... = c_{n-2} \;. \tag{4.8}$$

En appliquant le Lemme 3.1, on obtient :

$$D^p x(t) = \tfrac{1}{\Gamma(\alpha_0-p)} \int_0^t (t-s)^{\alpha_0-p-1} g(s)\, ds - c_{n-1} \tfrac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-p)} t^{n-p-1} \;. \tag{4.9}$$

En utilisant la condition $D^p x(1) = \lambda_1 D^p x(\eta)$, on oboutit à :

$$\begin{aligned} c_{n-1} &= \tfrac{\Gamma(n-p)}{(1-\lambda_1\eta^{n-p-1})\Gamma(n)\Gamma(\alpha_0-p)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha_0-p-1} g(s)\, ds \\ &- \tfrac{\lambda_1\Gamma(n-p)}{(1-\lambda_1\eta^{n-p-1})\Gamma(n)\Gamma(\alpha_0-p)} \int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha_0-p-1} g(s)\, ds. \end{aligned} \tag{4.10}$$

On injecte c_0 et $c_1,\ c_2, ..., c_{n-2},\ c_{n-1}$ dans l'égalité (4.6), on obtient la quantité (4.5).

Le Lemme 4.1 est démontré. ■

On introduit l'espace de Banach suivant :

$$X := \{x : x \in C(J, \mathbb{R})\,;\ D^{\alpha_1}x,\ D^{\alpha_2}x, ..., D^{\alpha_{n-1}}x \in C(J, \mathbb{R})\}\ ,$$

muni de la norme

$$\|x\|_X = \|x\| + \|D^{\alpha_1}x\| + \|D^{\alpha_2}x\| + ... + \|D^{\alpha_{n-1}}x\|\ ,$$

telle que

$$\|x\| = \sup_{t\in J}|x(t)|\,,\ \ \|D^{\alpha_1}x\| = \sup_{t\in J}|D^{\alpha_1}x(t)|\,,$$

$$\|D^{\alpha_2}x\| = \sup_{t\in J}|D^{\alpha_2}x(t)|\,, ..., \|D^{\alpha_{n-1}}x\| = \sup_{t\in J}|D^{\alpha_{n-1}}x(t)|\,.$$

De la même façon, on peut définir l'espace suivant :

$$Y := \{y : y \in C(J, \mathbb{R})\,;\ D^{\beta_1}y,\ D^{\beta_2}y, ..., D^{\beta_{n-1}}y \in C(J, \mathbb{R})\ ,$$

muni de la norme

$$\|y\|_Y = \|y\| + \left\|D^{\beta_1}y\right\| + \left\|D^{\beta_2}y\right\| + ... + \left\|D^{\beta_{n-1}}y\right\|\ ,$$

avec

$$\|y\| = \sup_{t\in J}|y(t)|\,,\ \ \left\|D^{\beta_1}y\right\| = \sup_{t\in J}\left|D^{\beta_1}y(t)\right|\,,$$

$$\left\|D^{\beta_2}y\right\| = \sup_{t\in J}\left|D^{\beta_2}y(t)\right|\,, ..., \left\|D^{\beta_{n-1}}y\right\| = \sup_{t\in J}\left|D^{\beta_{n-1}}y(t)\right|\,.$$

Alors, pour tout $(x, y) \in X \times Y$, on a :

$$X \times Y = \left\{(x, y) : (x, y) \in C^2(J, \mathbb{R})\ \text{ et }\ \|(x, y)\|_{X\times Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y\right\}\ ,$$

où $\left(X \times Y, \|(x, y)\|_{X\times Y}\right)$ est un espace de Banach.

On considère les hypothèses suivantes :

$(H_1) : f_1,\ f_2 : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues.

(H_2) : Il existe des fonctions positives $a_i,\ b_i \in C([0,1])$, $i = 0, 1, ..., n-1$, telles que pour tout $t \in J$ et $(x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1})$, $(y_0, y_1, y_2, ..., y_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\begin{gathered} |f_1(t, x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}) - f_1(t, y_0, y_1, y_2, ..., y_{n-1})| \\ \leq a_0(t)|x_0 - y_0| + a_1(t)|x_1 - y_1| + a_2(t)|x_2 - y_2| + ... + a_{n-1}(t)|x_{n-1} - y_{n-1}| \end{gathered} \tag{4.11}$$

et

$$\begin{gathered} |f_2(t, x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}) - f_2(t, y_0, y_1, y_2, ..., y_{n-1})| \\ \leq b_0(t)|x_0 - y_0| + b_1(t)|x_1 - y_1| + b_2(t)|x_2 - y_2| + ... + b_{n-1}(t)|x_{n-1} - y_{n-1}|, \end{gathered} \tag{4.12}$$

où

$$\begin{gathered} \omega_0 = \sup_{t\in J} a_0(t), \omega_1 = \sup_{t\in J} a_1(t), \omega_2 = \sup_{t\in J} a_2(t), ..., \omega_{n-1} = \sup_{t\in J} a_{n-1}(t), \\ \varpi_0 = \sup_{t\in J} b_0(t), \varpi_1 = \sup_{t\in J} b_1(t), \varpi_2 = \sup_{t\in J} b_2(t), ..., \varpi_{n-1} = \sup_{t\in J} b_{n-1}(t). \end{gathered} \tag{4.13}$$

(H_3) : Il existe deux fonctions positives l_1 et l_2 telles que :

$$\begin{gathered} |f_1(t, x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1})| \leq l_1(t),\ t \in J, \\ |f_2(t, x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1})| \leq l_2(t),\ t \in J, \end{gathered} \tag{4.14}$$

pour tout $t \in J$ et $(x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1})$, $(y_0, y_1, y_2, ..., y_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$, avec

$$L_1 = \sup_{t\in[0,1]} l_1(t),\ L_2 = \sup_{t\in[0,1]} l_2(t).$$

On introduit les quantités suivantes :

$$\begin{gathered} N_0 := \frac{1}{\Gamma(\alpha_0+1)} + \frac{\Gamma(n-p)\left(1+|\lambda_1|\eta^{\alpha_0-p}\right)}{|1-\lambda_1\eta^{n-p-1}|\Gamma(n)\Gamma(\alpha_0-p+1)}. \\ N_k := \frac{1}{\Gamma(\alpha_0-\alpha_k+1)} + \frac{\Gamma(n-p)\left(1+|\lambda_1|\eta^{\alpha_0-p}\right)}{|1-\lambda_1\eta^{n-p-1}|\Gamma(n-\alpha_k)\Gamma(\alpha_0-p+1)}, k = 1, ..., n-1. \\ M_0 := \frac{1}{\Gamma(\beta_0+1)} + \frac{\Gamma(n-q)\left(1+|\lambda_2|\xi^{\beta_0-q}\right)}{\left|1-\lambda_2\xi^{n-q-1}\right|\Gamma(n)\Gamma(\beta_0-q+1)}. \\ M_h := \frac{1}{\Gamma(\beta_0-\beta_h+1)} + \frac{\Gamma(n-q)\left(1+|\lambda_2|\xi^{\beta_0-q}\right)}{\left|1-\lambda_2\xi^{n-q-1}\right|\Gamma(n-\beta_h)\Gamma(\beta_0-q+1)}, h = 1, ..., n-1. \end{gathered} \tag{4.15}$$

$$\omega := \omega_0 + \omega_1 + ... + \omega_{n-1}.$$

$$\varpi := \varpi_0 + \varpi_1 + ... + \varpi_{n-1}.$$

$$\theta := \frac{\Gamma(n-p)\left(1+|\lambda_1|\eta^{\alpha_0-p}\right)}{|1-\lambda_1\eta^{n-p-1}|\Gamma(n)\Gamma(\alpha_0-p+1)} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\Gamma(n-p)\left(1+|\lambda_1|\eta^{\alpha_0-p}\right)}{|1-\lambda_1\eta^{n-p-1}|\Gamma(n-\alpha_k)\Gamma(\alpha_0-p+1)}.$$

$$\theta' := \frac{\Gamma(n-q)\left(1+|\lambda_2|\xi^{\beta_0-q}\right)}{\left|1-\lambda_2\xi^{n-q-1}\right|\Gamma(n)\Gamma(\beta_0-q+1)} + \sum_{h=1}^{n-1} \frac{\Gamma(n-q)\left(1+|\lambda_2|\xi^{\beta_0-q}\right)}{\left|1-\lambda_2\xi^{n-q-1}\right|\Gamma(n-\beta_h)\Gamma(\beta_0-q+1)}. \tag{4.16}$$

4.3 Unicité de Solutions

On définit l'opérateur $\phi : X \times Y \to X \times Y$ par :

$$\phi(x,y)(t) := (\phi_1(y)(t),\ \phi_2(x)(t)),\ t \in J\ , \tag{4.17}$$

où pour tout $t \in J$,

$$\phi_1 y(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha_0)} \int_0^t (t-s)^{\alpha_0-1} f_1\left(s, y(s), D^{\alpha_1}y(s), ..., D^{\alpha_{n-1}}y(s)\right) ds + x^*$$

$$-\frac{\Gamma(n-p)t^{n-1}}{(1-\lambda_1\eta^{n-p-1})\Gamma(n)\Gamma(\alpha_0-p)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha_0-p-1} f_1\left(s, y(s), D^{\alpha_1}y(s), ..., D^{\alpha_{n-1}}y(s)\right) ds \tag{4.18}$$

$$+\frac{\lambda_1\Gamma(n-p)t^{n-1}}{(1-\lambda_1\eta^{n-p-1})\Gamma(n)\Gamma(\alpha_0-p)} \int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha_0-p-1} f_1\left(s, y(s), D^{\alpha_1}y(s), ..., D^{\alpha_{n-1}}y(s)\right) ds$$

et

$$\phi_2 x(t) := \frac{1}{\Gamma(\beta_0)} \int_0^t (t-s)^{\beta_0-1} f_2\left(s, x(s), D^{\beta_1}x(s), ..., D^{\beta_{n-1}}x(s)\right) ds + y^*$$

$$-\frac{\Gamma(n-q)t^{n-1}}{\left(1-\lambda_2\xi^{n-q-1}\right)\Gamma(n)\Gamma(\beta_0-q)} \int_0^1 (1-s)^{\beta_0-q-1} f_2\left(s, x(s), D^{\beta_1}x(s), ..., D^{\beta_{n-1}}x(s)\right) ds \tag{4.19}$$

$$+\frac{\lambda_2\Gamma(n-q)t^{n-1}}{\left(1-\lambda_2\xi^{n-q-1}\right)\Gamma(n)\Gamma(\beta_0-q)} \int_0^\xi (\xi-s)^{\beta_0-q-1} f_2\left(s, x(s), D^{\beta_1}x(s), ..., D^{\beta_{n-1}}x(s)\right) ds.$$

Théorème 4.1 [38] *Soit $\eta^{n-p-1} \neq \frac{1}{\lambda_1}$ et $\xi^{n-q-1} \neq \frac{1}{\lambda_2}$. Supposons que l'hypothèse (H_2) est vérifiée. Si*

$$\left(N_0 + \sum_{k=1}^{n-1} N_k\right)\omega + \left(M_0 + \sum_{h=1}^{n-1} M_h\right)\varpi < 1\ , \tag{4.20}$$

alors le système (4.1) *admet une* solution unique sur J.

Preuve. Pour montrer que ϕ admet un point fixe, il suffit de montrer que ϕ est une contraction. En effet, si on note

$$F(s) := f_1\left(s, y(s), D^{\alpha_1}y(s), ..., D^{\alpha_{n-1}}y(s)\right)$$
$$-f_1\left(s, y_1(s), D^{\alpha_1}y_1(s), ..., D^{\alpha_{n-1}}y_1(s)\right), \tag{4.21}$$

alors pour tout $t \in J$, et $(x,y)\,,(x_1,y_1) \in X \times Y$, on a :

$$
\begin{aligned}
|\phi_1 y\,(t) - \phi_1 y_1\,(t)| = \Big| &\tfrac{1}{\Gamma(\alpha_0)} \int_0^t (t-s)^{\alpha_0-1} F\,(s)\,ds \\
&- \tfrac{\Gamma(n-p)t^{n-1}}{(1-\lambda_1\eta^{n-p-1})\Gamma(n)\Gamma(\alpha_0-p)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha_0-p-1} F\,(s)\,ds \\
&+ \tfrac{\lambda_1\Gamma(n-p)t^{n-1}}{(1-\lambda_1\eta^{n-p-1})\Gamma(n)\Gamma(\alpha_0-p)} \int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha_0-p-1} F\,(s)\,ds \Big| .
\end{aligned}
\tag{4.22}
$$

Ceci signifie que

$$
\begin{aligned}
\|\phi_1\,(y) - \phi_1\,(y_1)\| \leq &\tfrac{1}{\Gamma(\alpha_0)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha_0-1} \|F\,(s)\|\,ds \\
&+ \tfrac{\Gamma(n-p)T^{n-1}}{|1-\lambda_1\eta^{n-p-1}|\Gamma(n)\Gamma(\alpha_0-p)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha_0-p-1} \|F\,(s)\|\,ds \\
&+ \tfrac{|\lambda_1|\Gamma(n-p)T^{n-1}}{|1-\lambda_1\eta^{n-p-1}|\Gamma(n)\Gamma(\alpha_0-p)} \int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha_0-p-1} \|F\,(s)\|\,ds.
\end{aligned}
\tag{4.23}
$$

D'après (4.21) et l'hypothèse (H_2), on obtient l'estimation suivante :

$$
\begin{aligned}
&\|\phi_1\,(y) - \phi_1\,(y_1)\| \leq \\
&[\sup_{t\in J} a_0\,(t)\,\|y-y_1\| + \sup_{t\in J} a_1\,(t)\,\|D^{\alpha_1}y - D^{\alpha_1}y_1\| + ... \\
&+ \sup_{t\in J} a_{n-1}\,(t)\,\|D^{\alpha_{n-1}}y - D^{\alpha_{n-1}}y_1\|]\,\tfrac{1}{\Gamma(\alpha_0)} \int_0^t (t-s)^{\alpha_0-1}\,ds \\
&+ [\sup_{t\in J} a_0\,(t)\,\|y-y_1\| + \sup_{t\in J} a_1\,(t)\,\|D^{\alpha_1}y - D^{\alpha_1}y_1\| + ... \\
&+ \sup_{t\in J} a_{n-1}\,(t)\,\|D^{\alpha_{n-1}}y - D^{\alpha_{n-1}}y_1\|]\,\tfrac{\Gamma(n-p)t^{n-1}}{|1-\lambda_1\eta^{n-p-1}|\Gamma(n)\Gamma(\alpha_0-p)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha_0-p-1}\,ds \\
&+ [\sup_{t\in J} a_0\,(t)\,\|y-y_1\| + \sup_{t\in J} a_1\,(t)\,\|D^{\alpha_1}y - D^{\alpha_1}y_1\| + ... \\
&+ \sup_{t\in J} a_{n-1}\,(t)\,\|D^{\alpha_{n-1}}y - D^{\alpha_{n-1}}y_1\|]\,\tfrac{|\lambda_1|\Gamma(n-p)t^{n-1}}{|1-\lambda_1\eta^{n-p-1}|\Gamma(n)\Gamma(\alpha_0-p)} \int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha_0-p-1}\,ds.
\end{aligned}
\tag{4.24}
$$

Alors

$$
\begin{aligned}
&\|\phi_1\,(y) - \phi_1\,(y_1)\| \leq (\omega_0 + \omega_1 + ... + \omega_{n-1}) \\
&\times [\|y-y_1\| + \|D^{\alpha_1}y - D^{\alpha_1}y_1\| + ... + \|D^{\alpha_{n-1}}y - D^{\alpha_{n-1}}y_1\|]\,\tfrac{1}{\Gamma(\alpha_0)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha_0-1}\,ds \\
&+ (\omega_0 + \omega_1 + ... + \omega_{n-1})\,[\|y-y_1\| + \|D^{\alpha_1}y - D^{\alpha_1}y_1\| + ... + \|D^{\alpha_{n-1}}y - D^{\alpha_{n-1}}y_1\|] \\
&\times \tfrac{\Gamma(n-p)T^{n-1}}{|1-\lambda_1\eta^{n-p-1}|\Gamma(n)\Gamma(\alpha_0-p)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha_0-p-1}\,ds \\
&+ (\omega_0 + \omega_1 + ... + \omega_{n-1})\,[\|y-y_1\| + \|D^{\alpha_1}y - D^{\alpha_1}y_1\| + ... + \|D^{\alpha_{n-1}}y - D^{\alpha_{n-1}}y_1\|] \\
&\times \tfrac{|\lambda_1|\Gamma(n-p)T^{n-1}}{|1-\lambda_1\eta^{n-p-1}|\Gamma(n)\Gamma(\alpha_0-p)} \int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha_0-p-1}\,ds.
\end{aligned}
\tag{4.25}
$$

En calculant les intégrales du second membre de (4.25) , il résulte que :

$$\begin{aligned}
&\left\|\phi_1(y)-\phi_1(y_1)\right\| \\
&\leq \tfrac{(\omega_0+\omega_1+...+\omega_{n-1})[\|y-y_1\|+\|D^{\alpha_1}y-D^{\alpha_1}y_1\|+...+\|D^{\alpha_{n-1}}y-D^{\alpha_{n-1}}y_1\|]}{\Gamma(\alpha_0+1)} \\
&+\tfrac{(\omega_0+\omega_1+...+\omega_{n-1})[\|y-y_1\|+\|D^{\alpha_1}y-D^{\alpha_1}y_1\|+...+\|D^{\alpha_{n-1}}y-D^{\alpha_{n-1}}y_1\|]\Gamma(n-p)}{|1-\lambda_1\eta^{n-p-1}|\Gamma(n)\Gamma(\alpha_0-p+1)} \\
&+\tfrac{(\omega_0+\omega_1+...+\omega_{n-1})[\|y-y_1\|+\|D^{\alpha_1}y-D^{\alpha_1}y_1\|+...+\|D^{\alpha_{n-1}}y-D^{\alpha_{n-1}}y_1\|]|\lambda_1|\Gamma(n-p)\eta^{\alpha_0-p}}{|1-\lambda_1\eta^{n-p-1}|\Gamma(n)\Gamma(\alpha_0-p+1)}.
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned}
&\left\|\phi_1(y)-\phi_1(y_1)\right\| \\
&\leq \left[\tfrac{1}{\Gamma(\alpha_0+1)}+\tfrac{\Gamma(n-p)\left(1+|\lambda_1|\eta^{\alpha_0-p}\right)}{|1-\lambda_1\eta^{n-p-1}|\Gamma(n)\Gamma(\alpha_0-p+1)}\right](\omega_0+\omega_1+...+\omega_{n-1}) \\
&\times\left[\|y-y_1\|+\|D^{\alpha_1}y-D^{\alpha_1}y_1\|+...+\|D^{\alpha_{n-1}}y-D^{\alpha_{n-1}}y_1\|\right].
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Grâce à (4.15), on a :

$$\begin{aligned}
&\left\|\phi_1(y)-\phi_1(y_1)\right\| \\
&\leq N_0\omega\left[\|y-y_1\|+\|D^{\alpha_1}y-D^{\alpha_1}y_1\|+...+\|D^{\alpha_{n-1}}y-D^{\alpha_{n-1}}y_1\|\right].
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Et donc,

$$\begin{aligned}
&\left\|\phi_1(y)-\phi_1(y_1)\right\| \\
&\leq N_0\omega\left[\|y-y_1\|+\|D^{\alpha_1}y-D^{\alpha_1}y_1\|+...+\|D^{\alpha_{n-1}}y-D^{\alpha_{n-1}}y_1\|\right].
\end{aligned} \tag{4.29}$$

De la même manière, on peut obtenir l'estimation suivante :

$$\begin{aligned}
&\left\|\phi_2(x)-\phi_2(x_1)\right\| \\
&\leq M_0\varpi\left[\|x-x_1\|+\left\|D^{\beta_1}x-D^{\beta_1}x_1\right\|+...+\left\|D^{\beta_{n-1}}x-D^{\beta_{n-1}}x_1\right\|\right].
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Ensuite, pour tout $k=1,2,...,n-1$, on a :

$$\begin{aligned}
\left\|D^{\alpha_k}\phi_1(y)-D^{\alpha_k}\phi_1(y_1)\right\| &\leq \tfrac{1}{\Gamma(\alpha_0-\alpha_k)}\int_0^1(1-s)^{\alpha_0-\alpha_k-1}\|F(s)\|\,ds \\
&+\tfrac{\Gamma(n-p)T^{n-\alpha_k-1}}{|1-\lambda_1\eta^{n-p-1}|\Gamma(n-\alpha_k)\Gamma(\alpha_0-p)}\int_0^1(1-s)^{\alpha_0-p-1}\|F(s)\|\,ds \\
&+\tfrac{|\lambda_1|\Gamma(n-p)T^{n-\alpha_k-1}}{|1-\lambda_1\eta^{n-p-1}|\Gamma(n-\alpha_k)\Gamma(\alpha_0-p)}\int_0^\eta(\eta-s)^{\alpha_0-p-1}\|F(s)\|\,ds.
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Par (H_2), on a :

$$\|D^{\alpha_k}\phi_1(y) - D^{\alpha_k}\phi_1(y_1)\| \leq$$

$$[\sup_{t\in J} a_0(t)\|y-y_1\| + \sup_{t\in J} a_1(t)\|D^{\alpha_1}y - D^{\alpha_1}y_1\| + ...$$

$$+\sup_{t\in J} a_{n-1}(t)\|D^{\alpha_{n-1}}y - D^{\alpha_{n-1}}y_1\|]\frac{1}{\Gamma(\alpha_0-\alpha_k)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha_0-\alpha_k-1}ds$$

$$+[\sup_{t\in J} a_0(t)\|y-y_1\| + \sup_{t\in J} a_1(t)\|D^{\alpha_1}y - D^{\alpha_1}y_1\| + ...$$

$$+\sup_{t\in J} a_{n-1}(t)\|D^{\alpha_{n-1}}y - D^{\alpha_{n-1}}y_1\|]\frac{\Gamma(n-p)t^{n-\alpha_k-1}}{|1-\lambda_1\eta^{n-p-1}|\Gamma(n-\alpha_k)\Gamma(\alpha_0-p)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha_0-p-1}ds$$

$$+[\sup_{t\in J} a_0(t)\|y-y_1\| + \sup_{t\in J} a_1(t)\|D^{\alpha_1}y - D^{\alpha_1}y_1\| + ...$$

$$+\sup_{t\in J} a_{n-1}(t)\|D^{\alpha_{n-1}}y - D^{\alpha_{n-1}}y_1\|]\frac{|\lambda_1|\Gamma(n-p)t^{n-\alpha_k-1}}{|1-\lambda_1\eta^{n-p-1}|\Gamma(n-\alpha_k)\Gamma(\alpha_0-p)}\int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha_0-p-1}ds, \tag{4.32}$$

Alors

$$\|D^{\alpha_k}\phi_1(y) - D^{\alpha_k}\phi_1(y_1)\| \leq (\omega_0+\omega_1+...+\omega_{n-1})$$

$$\times[\|y-y_1\| + \|D^{\alpha_1}y - D^{\alpha_1}y_1\| + ... + \|D^{\alpha_{n-1}}y - D^{\alpha_{n-1}}y_1\|]\frac{1}{\Gamma(\alpha_0-\alpha_k)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha_0-\alpha_k-1}ds$$

$$+(\omega_0+\omega_1+...+\omega_{n-1})[\|y-y_1\| + \|D^{\alpha_1}y - D^{\alpha_1}y_1\| + ... + \|D^{\alpha_{n-1}}y - D^{\alpha_{n-1}}y_1\|]$$
$$\times\frac{\Gamma(n-p)t^{n-\alpha_k-1}}{|1-\lambda_1\eta^{n-p-1}|\Gamma(n-\alpha_k)\Gamma(\alpha_0-p)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha_0-p-1}ds$$

$$+(\omega_0+\omega_1+...+\omega_{n-1})[\|y-y_1\| + \|D^{\alpha_1}y - D^{\alpha_1}y_1\| + ... + \|D^{\alpha_{n-1}}y - D^{\alpha_{n-1}}y_1\|]$$

$$\times\frac{|\lambda_1|\Gamma(n-p)t^{n-\alpha_k-1}}{|1-\lambda_1\eta^{n-p-1}|\Gamma(n-\alpha_k)\Gamma(\alpha_0-p)}\int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha_0-p-1}\|F(s)\|ds. \tag{3.33}$$

En utilisant (4.33), on obtient :

$$\begin{aligned}
&\|D^{\alpha_k}\phi_1(y) - D^{\alpha_k}\phi_1(y_1)\| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha_0-\alpha_k+1)}(\omega_0+\omega_1+...+\omega_{n-1})\\
&\times[\|y-y_1\| + \|D^{\alpha_1}y - D^{\alpha_1}y_1\| + ... + \|D^{\alpha_{n-1}}y - D^{\alpha_{n-1}}y_1\|]\\
&+\frac{\Gamma(n-p)t^{n-\alpha_k-1}}{|1-\lambda_1\eta^{n-p-1}|\Gamma(n-\alpha_k)\Gamma(\alpha_0-p+1)}(\omega_0+\omega_1+...+\omega_{n-1})\\
&\times[\|y-y_1\| + \|D^{\alpha_1}y - D^{\alpha_1}y_1\| + ... + \|D^{\alpha_{n-1}}y - D^{\alpha_{n-1}}y_1\|]\\
&+\frac{|\lambda_1|\Gamma(n-p)t^{n-\alpha_k-1}\eta^{\alpha_0-p}}{|1-\lambda_1\eta^{n-p-1}|\Gamma(n-\alpha_k)\Gamma(\alpha_0-p+1)}(\omega_0+\omega_1+...+\omega_{n-1})\\
&[\|y-y_1\| + \|D^{\alpha_1}y - D^{\alpha_1}y_1\| + ... + \|D^{\alpha_{n-1}}y - D^{\alpha_{n-1}}y_1\|].
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Et pour $k = 1, 2, ..., n-1$, on a :

$$\begin{gathered}\left\| D^{\alpha_k}\phi_1(y) - D^{\alpha_k}\phi_1(y_1)\right\| \\ \leq \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha_0-\alpha_k+1)} + \frac{\Gamma(n-p)\left(1+|\lambda_1|\eta^{\alpha_0-p}\right)}{|1-\lambda_1\eta^{n-p-1}|\Gamma(n-\alpha_k)\Gamma(\alpha_0-p+1)}\right](\omega_0+\omega_1+...+\omega_{n-1}) \\ \times\left[\|y-y_1\| + \|D^{\alpha_1}y - D^{\alpha_1}y_1\| + ... + \|D^{\alpha_{n-1}}y - D^{\alpha_{n-1}}y_1\|\right].\end{gathered} \tag{4.35}$$

Par conséquent, (4.35) devient

$$\begin{gathered}\left\| D^{\alpha_k}\phi_1(y) - D^{\alpha_k}\phi_1(y_1)\right\| \\ \leq N_k\omega\left[\|y-y_1\| + \|D^{\alpha_1}y - D^{\alpha_1}y_1\| + ... + \|D^{\alpha_{n-1}}y - D^{\alpha_{n-1}}y_1\|\right].\end{gathered} \tag{4.36}$$

D'où

$$\begin{gathered}\left\| D^{\alpha_k}\phi_1(y) - D^{\alpha_k}\phi_1(y_1)\right\| \\ \leq N_k\omega\left(\|y-y_1\| + \|D^{\alpha_1}y - D^{\alpha_1}y_1\| + ... + \|D^{\alpha_{n-1}}y - D^{\alpha_{n-1}}y_1\|\right).\end{gathered} \tag{4.37}$$

Avec le même raisonnement que précédement, on a :

$$\begin{gathered}\left\| D^{\beta_h}\phi_2(x) - D^{\beta_h}\phi_2(x_1)\right\| \\ \leq M_h\varpi\left(\|x-x_1\| + \left\|D^{\beta_1}x - D^{\beta_1}x_1\right\| + ... + \left\|D^{\beta_{n-1}}x - D^{\beta_{n-1}}x_1\right\|\right).\end{gathered} \tag{4.38}$$

Grâce à (4.29) et (4.37), on obtient :

$$\begin{gathered}\left\|\phi_1(y) - \phi_1(y_1)\right\|_X \\ \leq \left(N_0 + \sum_{k=1}^{n-1} N_k\right)\omega\left(\|y-y_1\| + \|D^{\alpha_1}y - D^{\alpha_1}y_1\| + ... + \|D^{\alpha_{n-1}}y - D^{\alpha_{n-1}}y_1\|\right).\end{gathered} \tag{4.39}$$

En utilisant (4.30) et (4.38), on trouve :

$$\begin{gathered}\left\|\phi_2(x) - \phi_2(x_1)\right\|_Y \\ \leq \left(M_0 + \sum_{h=1}^{n-1} M_h\right)\varpi\left(\|x-x_1\| + \left\|D^{\beta_1}x - D^{\beta_1}x_1\right\| + ... + \left\|D^{\beta_{n-1}}x - D^{\beta_{n-1}}x_1\right\|\right).\end{gathered} \tag{4.40}$$

En combinant (4.39) et (4.40), on obtient :

$$\begin{gathered}\left\|\phi(x,y) - \phi(x_1,y_1)\right\|_{X\times Y} \\ \leq \left[\left(N_0 + \sum_{k=1}^{n-1} N_k\right)\omega + \left(M_0 + \sum_{h=1}^{n-1} M_h\right)\varpi\right]\left\|(x-x_1, y-y_1)\right\|_{X\times Y}.\end{gathered} \tag{4.41}$$

Donc ϕ est une contraction et d'après le théorème de Banach ϕ admet un seul point fixe qui est une solution du système (4.1).

■

4.4 Existence de Solutions

On démontre le théorème suivant :

Théorème 4.2 [38] *Soit* $\eta^{n-p-1} \neq \frac{1}{\lambda_1}$ *et* $\xi^{n-q-1} \neq \frac{1}{\lambda_2}$. *Supposons que les hypothèses* (H_1) *et* (H_3) *sont satisfaites. Alors le système* (4.1) *a au moins une solution sur* J.

Preuve. On considère l'opérateur $\phi(x,y)(t) := (\phi_1(y)(t), \ \phi_2(x)(t)), \ t \in J$ défini en (4.17).

Soit :

$$B_\sigma := \left\{(x,y) \in X \times Y : \|(x,y)\|_{X\times Y} \leq \sigma\right\} . \tag{4.42}$$

($*$:) ϕ est un opérateur continu sur $X \times Y$ puisque f_1 et f_2 sont continues (hypothèse (H_1)).

($**$:) Maintenant, on montre que ϕ est complètement continu. En effet, $\phi(B_\sigma)$ est relativement compact, c'est à dire :

(i :) Pour tout $(x,y) \in B_\sigma$ et $t \in J$, on a l'estimation suivante :

$$\begin{aligned}
\|\phi_1(y)\| &\leq \tfrac{1}{\Gamma(\alpha_0)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha_0-1} \|f_1(s, y(s), D^{\alpha_1}y(s), ..., D^{\alpha_{n-1}}y(s))\| \, ds + |x^*| \\
&+ \tfrac{\Gamma(n-p)T^{n-1}}{|1-\lambda_1\eta^{n-p-1}|\Gamma(n)\Gamma(\alpha_0-p)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha_0-p-1} \|f_1(s, y(s), D^{\alpha_1}y(s), ..., D^{\alpha_{n-1}}y(s))\| \, ds \\
&+ \tfrac{|\lambda_1|\Gamma(n-p)T^{n-1}}{|1-\lambda_1\eta^{n-p-1}|\Gamma(n)\Gamma(\alpha_0-p)} \int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha_0-p-1} \|f_1(s, y(s), D^{\alpha_1}y(s), ..., D^{\alpha_{n-1}}y(s))\| \, ds.
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Par (H_3), on a :

$$\begin{aligned}
\|\phi_1(y)\| &\leq \frac{\sup\limits_{t\in J} l_1(t)}{\Gamma(\alpha_0)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha_0-1} \, ds + |x^*| \\
&+ \frac{\Gamma(n-p)T^{n-1} \sup\limits_{t\in J} l_1(t)}{|1-\lambda_1\eta^{n-p-1}|\Gamma(n)\Gamma(\alpha_0-p)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha_0-p-1} \, ds \\
&+ \frac{|\lambda_1|\Gamma(n-p)T^{n-1} \sup\limits_{t\in J} l_1(t)}{|1-\lambda_1\eta^{n-p-1}|\Gamma(n)\Gamma(\alpha_0-p)} \int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha_0-p-1} \, ds.
\end{aligned} \tag{4.44}$$

D'où

$$\|\phi_1(y)\| \leq \sup_{t\in J} l_1(t) \left[\tfrac{1}{\Gamma(\alpha_0+1)} + \tfrac{\Gamma(n-p)\left(1+|\lambda_1|\eta^{\alpha_0-p}\right)}{|1-\lambda_1\eta^{n-p-1}|\Gamma(n)\Gamma(\alpha_0-p+1)}\right] + |x^*| . \tag{4.45}$$

A l'aide du (4.15), on peut avoir

$$\|\phi_1(y)\| \leq L_1 N_0 + |x^*| . \tag{4.46}$$

On a aussi

$$\|\phi_2(x)\| \leq L_2 M_0 + |y^*| \ . \tag{4.47}$$

Ensuite, pour tout $k = 1, 2, ..., n-1$, on a :

$$\|D^{\alpha_k}\phi_1(y)\| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha_0-\alpha_k)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha_0-\alpha_k-1}\|f_1(s, y(s), D^{\alpha_1}y(s), ..., D^{\alpha_{n-1}}y(s))\|\, ds$$

$$+\frac{\Gamma(n-p)T^{n-\alpha_k-1}}{|1-\lambda_1\eta^{n-p-1}|\Gamma(n-\alpha_k)\Gamma(\alpha_0-p)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha_0-p-1}\|f_1(s, y(s), D^{\alpha_1}y(s), ..., D^{\alpha_{n-1}}y(s))\|\, ds$$

$$+\frac{|\lambda_1|\Gamma(n-p)T^{n-\alpha_k-1}}{|1-\lambda_1\eta^{n-p-1}|\Gamma(n-\alpha_k)\Gamma(\alpha_0-p)}\int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha_0-p-1}\|f_1(s, y(s), D^{\alpha_1}y(s), ..., D^{\alpha_{n-1}}y(s))\|\, ds. \tag{4.48}$$

L'hypothèse (H_3) implique

$$\begin{aligned}\|D^{\alpha_k}\phi_1(y)\| &\leq \frac{L_1}{\Gamma(\alpha_0-\alpha_k)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha_0-\alpha_k-1} ds \\ &+\frac{\Gamma(n-p)T^{n-\alpha_k-1}L_1}{|1-\lambda_1\eta^{n-p-1}|\Gamma(n-\alpha_k)\Gamma(\alpha_0-p)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha_0-p-1} ds \\ &+\frac{|\lambda_1|\Gamma(n-p)T^{n-\alpha_k-1}L_1}{|1-\lambda_1\eta^{n-p-1}|\Gamma(n-\alpha_k)\Gamma(\alpha_0-p)}\int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha_0-p-1} ds.\end{aligned} \tag{4.49}$$

Ainsi

$$\|D^{\alpha_k}\phi_1(y)\| \leq L_1\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha_0-\alpha_k+1)}+\frac{\Gamma(n-p)\left(1+|\lambda_1|\eta^{\alpha_0-p}\right)}{|1-\lambda_1\eta^{n-p-1}|\Gamma(n-\alpha_k)\Gamma(\alpha_0-p+1)}\right]. \tag{4.50}$$

Et pour tout $h = 1, 2, ..., n-1$, on a :

$$\left\|D^{\beta_h}\phi_2(x)\right\| \leq L_2\left[\frac{1}{\Gamma(\beta_0-\beta_h+1)}+\frac{\Gamma(n-q)\left(1+|\lambda_2|\xi^{\beta_0-q}\right)}{\left|1-\lambda_2\xi^{n-q-1}\right|\Gamma(n-\beta_h)\Gamma(\beta_0-q+1)}\right]. \tag{4.51}$$

Maintenant, en combinant (4.46) et (4.50), on obtient :

$$\|\phi_1(y)\|_X \leq L_1\left(N_0+\sum_{k=1}^{n-1}N_k\right)+|x^*| \ . \tag{4.52}$$

Par (4.47) et (4.51) , on a :

$$\|\phi_2(x)\|_Y \leq L_2\left(M_0+\sum_{h=1}^{n-1}M_h\right)+|y^*| \ . \tag{4.53}$$

De (4.52) et (4.53) , découle

$$\|\phi(x,y)\|_{X\times Y} \leq L_1\left(N_0+\sum_{k=1}^{n-1}N_k\right)+L_2\left(M_0+\sum_{h=1}^{n-1}M_h\right)+|x^*|+|y^*| := L \ . \tag{4.54}$$

Par conséquent,

$$\|\phi(x,y)\|_{X\times Y} < L \ , \tag{4.55}$$

et donc $\phi(B_\sigma)$ est uniformément borné.

$(ii:)$ $\phi(B_\sigma)$ est équicontinu. En effet :

Soit $(x,y)\in B_\sigma$, $t_1,t_2\in J$, tel que $t_1<t_2$. Alors

$$\begin{aligned}
&\left\|\phi_1 y(t_1)-\phi_1 y(t_2)\right\| \\
&\leq \tfrac{1}{\Gamma(\alpha_0)}\int_0^{t_1}\left((t_2-s)^{\alpha_0-1}-(t_1-s)^{\alpha_0-1}\right)\left\|f_1\left(s,y(s),D^{\alpha_1}y(s),...,D^{\alpha_{n-1}}y(s)\right)\right\|ds \\
&\quad+\tfrac{1}{\Gamma(\alpha_0)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha_0-1}\left\|f_1\left(s,y(s),D^{\alpha_1}y(s),...,D^{\alpha_{n-1}}y(s)\right)\right\|ds \\
&+\tfrac{\Gamma(n-p)\left(t_1^{n-1}-t_2^{n-1}\right)}{|1-\lambda_1\eta^{n-p-1}|\Gamma(n)\Gamma(\alpha_0-p)}\int_0^1(1-s)^{\alpha_0-p-1}\left\|f_1\left(s,y(s),D^{\alpha_1}y(s),...,D^{\alpha_{n-1}}y(s)\right)\right\|ds \\
&+\tfrac{|\lambda_1|\Gamma(n-p)\left(t_2^{n-1}-t_1^{n-1}\right)}{|1-\lambda_1\eta^{n-p-1}|\Gamma(n)\Gamma(\alpha_0-p)}\int_0^\eta(\eta-s)^{\alpha_0-p-1}\left\|f_1\left(s,y(s),D^{\alpha_1}y(s),...,D^{\alpha_{n-1}}y(s)\right)\right\|ds.
\end{aligned} \tag{4.56}$$

Compte tenu de l'hypothèse (H_3), on a :

$$\begin{aligned}
\left\|\phi_1 y(t_1)-\phi_1 y(t_2)\right\| &\leq \tfrac{\sup_{t\in J} l_1(t)}{\Gamma(\alpha_0)}\int_0^{t_1}\left((t_2-s)^{\alpha_0-1}-(t_1-s)^{\alpha_0-1}\right)ds \\
&+\tfrac{\sup_{t\in J} l_1(t)}{\Gamma(\alpha_0)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha_0-1}ds+\tfrac{\sup_{t\in J} l_1(t)\Gamma(n-p)\left(t_1^{n-1}-t_2^{n-1}\right)}{|1-\lambda_1\eta^{n-p-1}|\Gamma(n)\Gamma(\alpha_0-p)}\int_0^1(1-s)^{\alpha_0-p-1}ds \\
&+\tfrac{\sup_{t\in J} l_1(t)|\lambda_1|\Gamma(n-p)\left(t_2^{n-1}-t_1^{n-1}\right)}{|1-\lambda_1\eta^{n-p-1}|\Gamma(n)\Gamma(\alpha_0-p)}\int_0^\eta(\eta-s)^{\alpha_0-p-1}ds.
\end{aligned} \tag{4.57}$$

Et par suite

$$\begin{aligned}
\left\|\phi_1 y(t_1)-\phi_1 y(t_2)\right\| &\leq \tfrac{L_1}{\Gamma(\alpha_0+1)}\left(\left|t_1^{\alpha_0}-t_2^{\alpha_0}+2(t_2-t_1)^{\alpha_0}\right|\right) \\
&+\tfrac{L_1\Gamma(n-p)}{|1-\lambda_1\eta^{n-p-1}|\Gamma(n)\Gamma(\alpha_0-p+1)}\left(\left|t_1^{n-1}-t_2^{n-1}\right|\right)+\tfrac{L_1|\lambda_1|\Gamma(n-p)\eta^{\alpha_0-p}}{|1-\lambda_1\eta^{n-p-1}|\Gamma(n)\Gamma(\alpha_0-p+1)}\left(\left|t_2^{n-1}-t_1^{n-1}\right|\right).
\end{aligned} \tag{4.58}$$

Avec le même raisonnement, on a :

$$\begin{aligned}
\left\|\phi_2 x(t_1)-\phi_2 x(t_2)\right\| &\leq \tfrac{L_2}{\Gamma(\beta_0+1)}\left(\left|t_1^{\beta_0}-t_2^{\beta_0}+2(t_2-t_1)^{\beta_0}\right|\right) \\
&+\tfrac{L_2\Gamma(n-q)}{\left|1-\lambda_2\xi^{n-q-1}\right|\Gamma(n)\Gamma(\beta_0-q+1)}\left(\left|t_1^{n-1}-t_2^{n-1}\right|\right)+\tfrac{L_2|\lambda_2|\Gamma(n-q)\xi^{\alpha_0-q}}{\left|1-\lambda_2\xi^{n-q-1}\right|\Gamma(n)\Gamma(\beta_0-q+1)}\left(\left|t_2^{n-1}-t_1^{n-1}\right|\right).
\end{aligned} \tag{4.59}$$

Ensuite, pour tout $k=1,2,...,n-1$, on a :

$$\begin{aligned}
&\left\| D^{\alpha_k}\phi_1 y\left(t_1\right) - D^{\alpha_k}\phi_1 y\left(t_2\right)\right\| \\
\leq &\tfrac{1}{\Gamma(\alpha_0-\alpha_k)}\int_0^{t_1}\left(\left(t_2-s\right)^{\alpha_0-\alpha_k-1}-\left(t_1-s\right)^{\alpha_0-\alpha_k-1}\right)\left\| f_1\left(s,y\left(s\right),D^{\alpha_1}y\left(s\right),...,D^{\alpha_{n-1}}y\left(s\right)\right)\right\| ds \\
&+\tfrac{1}{\Gamma(\alpha_0-\alpha_k)}\int_{t_1}^{t_2}\left(t_2-s\right)^{\alpha_0-\alpha_k-1}\left\| f_1\left(s,y\left(s\right),D^{\alpha_1}y\left(s\right),...,D^{\alpha_{n-1}}y\left(s\right)\right)\right\| ds \\
&+\tfrac{\Gamma(n-p)\left(t_1^{n-\alpha_k-1}-t_2^{n-\alpha_k-1}\right)}{\left|1-\lambda_1\eta^{n-p-1}\right|\Gamma(n-\alpha_k)\Gamma(\alpha_0-p)}\int_0^1\left(1-s\right)^{\alpha_0-p-1}\left\| f_1\left(s,y\left(s\right),D^{\alpha_1}y\left(s\right),...,D^{\alpha_{n-1}}y\left(s\right)\right)\right\| ds \\
&+\tfrac{\left|\lambda_1\right|\Gamma(n-p)\left(t_2^{n-\alpha_k-1}-t_1^{n-\alpha_k-1}\right)}{\left|1-\lambda_1\eta^{n-p-1}\right|\Gamma(n-\alpha_k)\Gamma(\alpha_0-p)}\int_0^\eta\left(\eta-s\right)^{\alpha_0-p-1}\left\| f_1\left(s,y\left(s\right),D^{\alpha_1}y\left(s\right),...,D^{\alpha_{n-1}}y\left(s\right)\right)\right\| ds.
\end{aligned} \tag{4.60}$$

L'hypothèse (H_3) implique

$$\begin{aligned}
&\left\| D^{\alpha_k}\phi_1 y\left(t_1\right) - D^{\alpha_k}\phi_1 y\left(t_2\right)\right\| \\
\leq &\tfrac{\sup_{t\in J} l_1(t)}{\Gamma(\alpha_0-\alpha_k)}\int_0^{t_1}\left(\left(t_2-s\right)^{\alpha_0-\alpha_k-1}-\left(t_1-s\right)^{\alpha_0-\alpha_k-1}\right) ds \\
&+\tfrac{\sup_{t\in J} l_1(t)}{\Gamma(\alpha_0-\alpha_k)}\int_{t_1}^{t_2}\left(t_2-s\right)^{\alpha_0-\alpha_k-1} ds \\
&+\tfrac{\sup_{t\in J} l_1(t)\Gamma(n-p)\left(t_1^{n-\alpha_k-1}-t_2^{n-\alpha_k-1}\right)}{\left|1-\lambda_1\eta^{n-p-1}\right|\Gamma(n-\alpha_k)\Gamma(\alpha_0-p)}\int_0^1\left(1-s\right)^{\alpha_0-p-1} ds \\
&+\tfrac{\sup_{t\in J} l_1(t)\left|\lambda_1\right|\Gamma(n-p)\left(t_2^{n-\alpha_k-1}-t_1^{n-\alpha_k-1}\right)}{\left|1-\lambda_1\eta^{n-p-1}\right|\Gamma(n-\alpha_k)\Gamma(\alpha_0-p)}\int_0^\eta\left(\eta-s\right)^{\alpha_0-p-1} ds.
\end{aligned} \tag{4.61}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
&\left\| D^{\alpha_k}\phi_1 y\left(t_1\right) - D^{\alpha_k}\phi_1 y\left(t_2\right)\right\| \\
\leq &\tfrac{L_1}{\Gamma(\alpha_0-\alpha_k+1)}\left(\left|t_1^{\alpha_0-\alpha_k}-t_2^{\alpha_0-\alpha_k-1}+2\left(t_2-t_1\right)^{\alpha_0-\alpha_k}\right|\right) \\
&+\tfrac{L_1\Gamma(n-p)}{\left|1-\lambda_1\eta^{n-p-1}\right|\Gamma(n-\alpha_k)\Gamma(\alpha_0-p+1)}\left(\left|t_1^{n-\alpha_k-1}-t_2^{n-\alpha_k-1}\right|\right) \\
&+\tfrac{L_1\left|\lambda_1\right|\Gamma(n-p)\eta^{\alpha_0-p}}{\left|1-\lambda_1\eta^{n-p-1}\right|\Gamma(n-\alpha_k)\Gamma(\alpha_0-p+1)}\left(\left|t_2^{n-\alpha_k-1}-t_1^{n-\alpha_k-1}\right|\right).
\end{aligned} \tag{4.62}$$

Et pour tout $h = 1, 2, ..., n-1$, on a :

$$\begin{aligned} &\left\| D^{\beta_h}\phi_2 x\left(t_1\right) - D^{\beta_h}\phi_2 x\left(t_2\right) \right\| \\ &\leq \tfrac{L_2}{\Gamma(\beta_0-\beta_h+1)} \left(\left| t_1^{\beta_0-\beta_h} - t_2^{\beta_0-\beta_h} + 2\left(t_2-t_1\right)^{\beta_0-\beta_h} \right| \right) \\ &+ \tfrac{L_2\Gamma(n-q)}{\left|1-\lambda_2\xi^{n-q-1}\right|\Gamma(n-\beta_h)\Gamma(\beta_0-q+1)} \left(\left| t_1^{n-\beta_h} - t_2^{n-\beta_h} \right| \right) \\ &\tfrac{L_2|\lambda_2|\Gamma(n-q)\xi^{\beta_0-q}}{\left|1-\lambda_2\xi^{n-q-1}\right|\Gamma(n-\beta_h)\Gamma(\beta_0-q+1)} \left(\left| t_2^{n-\beta_h} - t_1^{n-\beta_h} \right| \right). \end{aligned} \tag{4.63}$$

Quand $t_2 - t_1$ les membres de droite de (4.58), (4.59), (4.62) et (4.63) tendent vers zéro. Par Conséquent, on conclut que $\phi\left(B_\delta\right)$ est équicontinu. Par le théorème d'Arzela-Ascoli, on peut conclure que ϕ est un opérateur complètement continu.

$(***:)$ Finalement, on montre que l'ensemble Ω défini par :

$$\Omega := \left\{(x,y) \in X \times Y,\ \ (x,y) = \mu\phi\left(x,y\right),\ 0 < \mu < 1\right\} \tag{4.64}$$

est borné. En effet, soit $(x,y) \in \Omega$, alors $(x,y) = \mu\phi\left(x,y\right)$, pour $\mu \in (0,1)$. Alors pour tout $t \in J$, on a $x\left(t\right) = \mu\phi_1 y\left(t\right)$ et $y\left(t\right) = \mu\phi_2 x\left(t\right)$. D'où

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{\mu}\left\|x\right\| \leq \tfrac{1}{\Gamma(\alpha_0)} \int_0^1 \left(1-s\right)^{\alpha_0-1} \left| f_1\left(s, y\left(s\right), D^{\alpha_1}y\left(s\right), ..., D^{\alpha_{n-1}}y\left(s\right)\right) \right| ds + \left|x^*\right| \\ &+ \tfrac{\Gamma(n-p)t^{n-1}}{|1-\lambda_1\eta^{n-p-1}|\Gamma(n)\Gamma(\alpha_0-p)} \int_0^1 \left(1-s\right)^{\alpha_0-p-1} \left| f_1\left(s, y\left(s\right), D^{\alpha_1}y\left(s\right), ..., D^{\alpha_{n-1}}y\left(s\right)\right) \right| ds \\ &+ \tfrac{|\lambda_1|\Gamma(n-p)t^{n-1}}{|1-\lambda_1\eta^{n-p-1}|\Gamma(n)\Gamma(\alpha_0-p)} \int_0^\eta \left(\eta-s\right)^{\alpha_0-p-1} \left| f_1\left(s, y\left(s\right), D^{\alpha_1}y\left(s\right), ..., D^{\alpha_{n-1}}y\left(s\right)\right) \right| ds. \end{aligned} \tag{4.65}$$

Grâce à (H_3), on a :

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{\mu}\left\|x\right\| &\leq \sup_{t\in J} l_1\left(t\right) \tfrac{1}{\Gamma(\alpha_0+1)} + \left|x^*\right| + \sup_{t\in J} l_1\left(t\right) \tfrac{\Gamma(n-p)}{|1-\lambda_1\eta^{n-p-1}|\Gamma(n)\Gamma(\alpha_0-p+1)} \\ &+ \sup_{t\in J} l_1\left(t\right) \tfrac{|\lambda_1|\eta^{\alpha_0-p}\Gamma(n-p)}{|1-\lambda_1\eta^{n-p-1}|\Gamma(n)\Gamma(\alpha_0-p+1)}. \end{aligned} \tag{4.66}$$

D'où

$$\left\|x\right\| \leq \mu \sup_{t\in J} l_1\left(t\right) \left[\tfrac{1}{\Gamma(\alpha_0+1)} + \tfrac{\Gamma(n-p)\left(1+|\lambda_1|\eta^{\alpha_0-p}\right)}{|1-\lambda_1\eta^{n-p-1}|\Gamma(n)\Gamma(\alpha_0-p+1)} \right] + \left|x^*\right| . \tag{4.67}$$

Donc

$$\left\|x\right\| \leq \mu\left(L_1 N_0 + \left|x^*\right|\right) . \tag{4.68}$$

De la même manière, on peut obtenir

$$\|y\| \leq \mu\left(L_2 M_0 + |y^*|\right) \ . \tag{4.69}$$

En utilisant le fait que la dérivée de Caputo d'une constante est nulle, on obtient pour tout $k = 1, 2, ..., n-1$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu}\left\|D^{\alpha_k}(x)\right\| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha_0-\alpha_k)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha_0-\alpha_k-1}\left\|f_1\left(s, y(s), D^{\alpha_1}y(s), ..., D^{\alpha_{n-1}}y(s)\right)\right\| ds \\
&+\frac{\Gamma(n-p)}{|1-\lambda_1\eta^{n-p-1}|\Gamma(n-\alpha_k)\Gamma(\alpha_0-p)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha_0-p-1}\left\|f_1\left(s, y(s), D^{\alpha_1}y(s), ..., D^{\alpha_{n-1}}y(s)\right)\right\| ds \\
&+\frac{|\lambda_1|\Gamma(n-p)}{|1-\lambda_1\eta^{n-p-1}|\Gamma(n-\alpha_k)\Gamma(\alpha_0-p)}\int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha_0-p-1}\left\|f_1\left(s, y(s), D^{\alpha_1}y(s), ..., D^{\alpha_{n-1}}y(s)\right)\right\| ds.
\end{aligned} \tag{4.70}$$

En appliquant l'hypothèse (H_3), on aboutit à :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu}\left\|D^{\alpha_k}(x)\right\| &\leq \frac{\sup\limits_{t\in J} l_1(t)}{\Gamma(\alpha_0-\alpha_k)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha_0-\alpha_k-1} ds \\
&+\frac{\Gamma(n-p)\sup\limits_{t\in J} l_1(t)}{|1-\lambda_1\eta^{n-p-1}|\Gamma(n-\alpha_k)\Gamma(\alpha_0-p)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha_0-p-1} ds \\
&+\frac{|\lambda_1|\Gamma(n-p)\sup\limits_{t\in J} l_1(t)}{|1-\lambda_1\eta^{n-p-1}|\Gamma(n-\alpha_k)\Gamma(\alpha_0-p)}\int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha_0-p-1} ds.
\end{aligned} \tag{4.71}$$

En calculant les intégrales du seconde membre de (4.71), on trouve :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu}\left\|D^{\alpha_k}(x)\right\| \leq \frac{\sup\limits_{t\in J} l_1(t)}{\Gamma(\alpha_0-\alpha_k+1)} &+ \frac{\Gamma(n-p)\sup\limits_{t\in J} l_1(t)}{|1-\lambda_1\eta^{n-p-1}|\Gamma(n-\alpha_k)\Gamma(\alpha_0-p+1)} \\
&+\frac{|\lambda_1|\Gamma(n-p)\sup\limits_{t\in J} l_1(t)}{|1-\lambda_1\eta^{n-p-1}|\Gamma(n-\alpha_k)\Gamma(\alpha_0-p+1)}.
\end{aligned} \tag{4.72}$$

Alors

$$\left\|D^{\alpha_k}(x)\right\| \leq \mu\sup_{t\in J} l_1(t)\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha_0-\alpha_k+1)} + \frac{L_1\Gamma(n-p)(1+|\lambda_1|\Gamma(n-p))}{|1-\lambda_1\eta^{n-p-1}|\Gamma(n-\alpha_k)\Gamma(\alpha_0-p+1)}\right] \ . \tag{4.73}$$

A l'aide du (4.15), on peut avoir :

$$\left\|D^{\alpha_k}(x)\right\| \leq \mu L_1 N_k \ . \tag{4.74}$$

Et pour tout $h = 1, 2, ..., n-1$,

$$\left\|D^{\beta_h}(y)\right\| \leq \mu L_2 M_h \ . \tag{4.75}$$

De (4.68) et (4.74), on a :

$$\|x\|_X \leq \mu \left[L_1 \left(N_0 + \sum_{k=1}^{n-1} N_k\right) + |x^*|\right] . \tag{4.76}$$

Par (4.69) et (4.75), on obtient :

$$\|y\|_Y \leq \mu \left[L_2 \left(M_0 + \sum_{h=1}^{n-1} M_h\right) + |y^*|\right] . \tag{4.77}$$

Par (4.76) et (4.77), on a :

$$\|(x,y)\|_{X\times Y} \leq \mu \left(\left[L_1 \left(N_0 + \sum_{k=1}^{n-1} N_k\right) + L_2 \left(M_0 + \sum_{h=1}^{n-1} M_h\right)\right] + |x^*| + |y^*|\right) < \infty . \tag{4.78}$$

Ce qui prouve que Ω est borné.

On conclut par le théorème de point fixe de Schaefer que l'opérateur ϕ admet au moins un point fixe qui est la solution du système (4.1). ■

On démontre aussi le résultat suivant :

Théorème 4.3 [38] *Soit $\eta^{n-p-1} \neq \frac{1}{\lambda_1}$ et $\xi^{n-q-1} \neq \frac{1}{\lambda_2}$. Supposons que les hypothèses (H_1) et (H_3) sont satisfaites, telles que :*

$$\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_0+1)} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\Gamma(\alpha_0-\alpha_k+1)}\right)\omega + \left(\frac{1}{\Gamma(\beta_0+1)} + \sum_{h=1}^{n-1} \frac{1}{\Gamma(\beta_0-\beta_h+1)}\right)\varpi < 1 . \tag{4.79}$$

S'il existe $\delta \in \mathbb{R}$, tel que :

$$L_1 \left(N_0 + \sum_{k=1}^{n-1} N_k\right) + L_2 \left(M_0 + \sum_{h=1}^{n-1} M_h\right) + |y^*| + |x^*| \leq \delta , \tag{4.80}$$

alors le système (4.1) admet au moins une solution sur J.

Preuve. Pour montrer l'existence de la solution du système (4.1), il suffit de vérifier les hypothèses du théorème du point fixe de Krasnoselskii.

Soit :

$$\delta \geq L_1 \left(N_0 + \sum_{k=1}^{n-1} N_k\right) + L_2 \left(M_0 + \sum_{h=1}^{n-1} M_h\right) + |y^*| + |x^*| , \tag{4.81}$$

et on considère l'ensemble

$$B_\delta := \left\{(x,y) \in X \times Y : \|(x,y)\|_{X\times Y} \leq \delta\right\} . \tag{4.82}$$

On définit aussi les opérateurs T et R sur B_δ comme suit :

$$T(x,y)(t) := (T_1 y(t), \ T_2 x(t)), \ t \in J , \tag{4.83}$$

et

$$R(x,y)(t) := (R_1y(t),\ R_2x(t)),\ t \in J\ , \tag{4.84}$$

où

$$\begin{aligned} T_1y(t) &:= \tfrac{1}{\Gamma(\alpha_0)} \int_0^t (t-s)^{\alpha_0-1} f_1\left(s, y(s), D^{\alpha_1}y(s), ..., D^{\alpha_{n-1}}y(s)\right) ds + |x^*|, \\ T_2x(t) &:= \tfrac{1}{\Gamma(\beta_0)} \int_0^t (t-s)^{\beta_0-1} f_2\left(s, x(s), D^{\beta_1}x(s), ..., D^{\beta_{n-1}}x(s)\right) ds + |y^*| \end{aligned} \tag{4.85}$$

$$\begin{aligned} R_1y(t) := &-\tfrac{\Gamma(n-p)t^{n-1}}{(1-\lambda_1\eta^{n-p-1})\Gamma(n)\Gamma(\alpha_0-p)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha_0-p-1} f_1\left(s, y(s), D^{\alpha_1}y(s), ..., D^{\alpha_{n-1}}y(s)\right) ds \\ &+\tfrac{\lambda_1\Gamma(n-p)t^{n-1}}{(1-\lambda_1\eta^{n-p-1})\Gamma(n)\Gamma(\alpha_0-p)} \int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha_0-p-1} f_1\left(s, y(s), D^{\alpha_1}y(s), ..., D^{\alpha_{n-1}}y(s)\right) ds \end{aligned} \tag{4.86}$$

et

$$\begin{aligned} R_2x(t) := &-\tfrac{\Gamma(n-q)t^{n-1}}{\left(1-\lambda_2\xi^{n-q-1}\right)\Gamma(n)\Gamma(\beta_0-q)} \int_0^1 (1-s)^{\beta_0-q-1} f_2\left(s, x(s), D^{\beta_1}x(s), ..., D^{\beta_{n-1}}x(s)\right) ds \\ &+\tfrac{\lambda_2\Gamma(n-q)t^{n-1}}{\left(1-\lambda_2\xi^{n-q-1}\right)\Gamma(n)\Gamma(\beta_0-q)} \int_0^\xi (\xi-s)^{\beta_0-q-1} f_2\left(s, x(s), D^{\beta_1}x(s), ..., D^{\beta_{n-1}}x(s)\right) ds. \end{aligned} \tag{4.87}$$

(i :) Premièrement, on montre que si $(x,y), (x_1,y_1) \in B_\delta$, alors $T(x,y)(t)+R(x_1,y_1)(t) \in B_\delta$. En effet, pour tout $(x,y), (x_1,y_1) \in B_\delta$ et $t \in J$, on a :

$$\begin{aligned} &\|T_1(y) + R_1(y_1)\| \\ &\le \tfrac{1}{\Gamma(\alpha_0)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha_0-1} \|f_1\left(s, y(s), D^{\alpha_1}y(s), ..., D^{\alpha_{n-1}}y(s)\right)\| ds + |x^*| \\ &+\tfrac{\Gamma(n-p)}{|1-\lambda_1\eta^{n-p-1}|\Gamma(n)\Gamma(\alpha_0-p)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha_0-p-1} \|f_1\left(s, y(s), D^{\alpha_1}y(s), ..., D^{\alpha_{n-1}}y(s)\right)\| ds \\ &+\tfrac{|\lambda_1|\Gamma(n-p)}{|1-\lambda_1\eta^{n-p-1}|\Gamma(n)\Gamma(\alpha_0-p)} \int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha_0-p-1} \|f_1\left(s, y(s), D^{\alpha_1}y(s), ..., D^{\alpha_{n-1}}y(s)\right)\| ds. \end{aligned} \tag{4.88}$$

En utilisant l'hypothèse (H_3) et en calculant les intégrales du second membre de (4.88), on obtient :

$$\|T_1(y) + R_1(y_1)\| \le \sup_{t\in J} l_1(t) \left[\tfrac{1}{\Gamma(\alpha_0+1)} + \tfrac{\Gamma(n-p)\left(1+|\lambda_1|\eta^{\alpha_0-p}\right)}{|1-\lambda_1\eta^{n-p-1}|\Gamma(n)\Gamma(\alpha_0-p+1)}\right] + |x^*|\ . \tag{4.89}$$

Par conséquent,

$$\|T_1(y) + R_1(y_1)\| \le \sup_{t\in J} l_1(t)\, N_0 + |x^*|\ . \tag{4.90}$$

De (3.89), on a :

$$\|T_1(y) + R_1(y_1)\| \le L_1N_0 + |x^*|\ . \tag{4.91}$$

D'autre part, pour tout $k=1,2,...,n-1$, on a :

$$\left\|D^{\alpha_k}T_1(y)+D^{\alpha_k}R_1(y_1)\right\|$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha_0-\alpha_k)}\int_0^1(1-s)^{\alpha_0-\alpha_k-1}\left\|f_1\left(s,y(s),D^{\alpha_1}y(s),...,D^{\alpha_{n-1}}y(s)\right)\right\|ds$$

$$+\frac{\Gamma(n-p)}{|1-\lambda_1\eta^{n-p-1}|\Gamma(n-\alpha_k)\Gamma(\alpha_0-p)}\int_0^1(1-s)^{\alpha_0-p-1}\left\|f_1\left(s,y(s),D^{\alpha_1}y(s),...,D^{\alpha_{n-1}}y(s)\right)\right\|ds$$

$$+\frac{|\lambda_1|\Gamma(n-p)}{|1-\lambda_1\eta^{n-p-1}|\Gamma(n-\alpha_k)\Gamma(\alpha_0-p)}\int_0^\eta(\eta-s)^{\alpha_0-p-1}\left\|f_1\left(s,y(s),D^{\alpha_1}y(s),...,D^{\alpha_{n-1}}y(s)\right)\right\|ds. \tag{4.92}$$

L'application de l'hypothèse (H_3) implique que

$$\left\|D^{\alpha_k}T_1(y)+D^{\alpha_k}R_1(y_1)\right\|\leq\sup_{t\in J}l_1(t)\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha_0-\alpha_k+1)}+\frac{\Gamma(n-p)\left(1+|\lambda_1|\eta^{\alpha_0-p}\right)}{|1-\lambda_1\eta^{n-p-1}|\Gamma(n-\alpha_k)\Gamma(\alpha_0-p+1)}\right], \tag{4.93}$$

ce qui donne

$$\left\|D^{\alpha_k}T_1(y)+D^{\alpha_k}R_1(y_1)\right\|\leq L_1N_k\ . \tag{4.94}$$

En combinant (4.91) et (4.94), on obtient

$$\left\|T_1(y)+R_1(y_1)\right\|_X\leq L_1\left(N_0+\sum_{k=1}^{n-1}N_k\right)+|x^*|\ . \tag{4.95}$$

De la même manière, on peut obtenir, pour $h=1,2,...,n-1$, l'estimation suivante :

$$\left\|T_2(x)+R_2(x_1)\right\|_Y\leq L_2\left(M_0+\sum_{h=1}^{n-1}M_h\right)+|y^*|\ . \tag{4.96}$$

Par (4.95) et (4.96), on trouve :

$$\begin{gathered}\left\|T(x,y)+R(x_1,y_1)\right\|\\ \leq L_1\left(N_0+\sum_{k=1}^{n-1}N_k\right)+L_2\left(M_0+\sum_{h=1}^{n-1}M_h\right)+|x^*|+|y^*|\leq\delta.\end{gathered} \tag{4.97}$$

Donc

$$T(x,y)+R(x,y)\in B_\delta\ . \tag{4.98}$$

(ii :) Deuxièmement, on montre que R est continu et compact. Il est claire de voir que R est continu puisque f_1 et f_2 sont continues (hypothèse H_1).

- On montre que $R(B_\delta)$ est borné. En effet, soit $(x,y)\in B_\delta$ et $t\in J$, alors

$$\left\|R_1(y)\right\|$$

$$\leq\frac{\Gamma(n-p)}{|1-\lambda_1\eta^{n-p-1}|\Gamma(n)\Gamma(\alpha_0-p)}\int_0^1(1-s)^{\alpha_0-p-1}\left\|f_1\left(s,y(s),D^{\alpha_1}y(s),...,D^{\alpha_{n-1}}y(s)\right)\right\|ds \tag{4.99}$$

$$+\frac{|\lambda_1|\Gamma(n-p)}{|1-\lambda_1\eta^{n-p-1}|\Gamma(n)\Gamma(\alpha_0-p)}\int_0^\eta(\eta-s)^{\alpha_0-p-1}\left\|f_1\left(s,y(s),D^{\alpha_1}y(s),...,D^{\alpha_{n-1}}y(s)\right)\right\|ds.$$

En utilisant l'hypothèse (H_3) et en calculant les intégrales du second membre de (4.99), on obtient :

$$\|R_1(y)\| \leq \sup_{t\in J} l_1(t) \frac{\Gamma(n-p)\left(1+|\lambda_1|\eta^{\alpha_0-p}\right)}{|1-\lambda_1\eta^{n-p-1}|\Gamma(n)\Gamma(\alpha_0-p+1)} \ . \tag{4.100}$$

Puisque $t \in J$, on peut alors écrire

$$\|R_1(y)\| \leq L_1 \frac{\Gamma(n-p)\left(1+|\lambda_1|\eta^{\alpha_0-p}\right)}{|1-\lambda_1\eta^{n-p-1}|\Gamma(n)\Gamma(\alpha_0-p+1)} \ . \tag{4.101}$$

Ensuite, pour tout $k = 1, 2, ..., n-1$, on obtient :

$$\|D^{\alpha_k} R_1(y)\| \leq L_1 \frac{\Gamma(n-p)\left(1+|\lambda_1|\eta^{\alpha_0-p}\right)}{|1-\lambda_1\eta^{n-p-1}|\Gamma(n-\alpha_k)\Gamma(\alpha_0-p+1)} \ . \tag{4.102}$$

En utilisant (4.101) et (3.102), on obtient :

$$\begin{aligned} &\|R_1(y)\|_X \\ &\leq L_1 \left(\frac{\Gamma(n-p)\left(1+|\lambda_1|\eta^{\alpha_0-p}\right)}{|1-\lambda_1\eta^{n-p-1}|\Gamma(n)\Gamma(\alpha_0-p+1)} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\Gamma(n-p)\left(1+|\lambda_1|\eta^{\alpha_0-p}\right)}{|1-\lambda_1\eta^{n-p-1}|\Gamma(n-\alpha_k)\Gamma(\alpha_0-p+1)} \right) := L_1\theta. \end{aligned} \tag{4.103}$$

De la même manière, pour tout $h = 1, 2, ..., n-1$, on a :

$$\begin{aligned} &\|R_2(x)\|_Y \\ &\leq L_2 \left(\frac{\Gamma(n-q)\left(1+|\lambda_2|\xi^{\beta_0-q}\right)}{\left|1-\lambda_2\xi^{n-q-1}\right|\Gamma(n)\Gamma(\beta_0-q+1)} + \sum_{h=1}^{n-1} \frac{\Gamma(n-q)\left(1+|\lambda_2|\xi^{\beta_0-q}\right)}{\left|1-\lambda_2\xi^{n-q-1}\right|\Gamma(n-\beta_h)\Gamma(\beta_0-q+1)} \right) := L_2\theta'. \end{aligned} \tag{4.104}$$

De (4.103) et (4.104), on obtient

$$\|R(x,y)\| \leq L_1\theta + L_2\theta' \ . \tag{4.105}$$

D'où $R(B_\delta)$ est uniformément borné.

• Maitenant, on montre que $R(B_\delta)$ est équicontinu. En effet, soit $t_1,\ t_2 \in J$, tel que $t_2 < t_1$ et $(x,y) \in B_\delta$, alors par (H_3), on a :

$$\begin{aligned} \|R_1 y(t_1) - R_1 y(t_2)\| &\leq \sup_{t\in J} l_1(t) \frac{\Gamma(n-p)\left(t_2^{n-1}-t_1^{n-1}\right)}{|1-\lambda_1\eta^{n-p-1}|\Gamma(n)\Gamma(\alpha_0-p)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha_0-p-1} ds \\ &+ \frac{\sup_{t\in J} l_1(t)|\lambda_1|\Gamma(n-p)\left(t_1^{n-1}-t_2^{n-1}\right)}{|1-\lambda_1\eta^{n-p-1}|\Gamma(n)\Gamma(\alpha_0-p)} \int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha_0-p-1} ds. \end{aligned} \tag{4.106}$$

Et donc,

$$\begin{aligned} \|R_1y(t_1)-R_1y(t_2)\| &\leq L_1\tfrac{\Gamma(n-p)}{|1-\lambda_1\eta^{n-p-1}|\Gamma(n)\Gamma(\alpha_0-p+1)}\left(\left|t_2^{n-1}-t_1^{n-1}\right|\right) \\ &+\tfrac{L_1|\lambda_1|\Gamma(n-p)\eta^{\alpha_0-p}}{|1-\lambda_1\eta^{n-p-1}|\Gamma(n)\Gamma(\alpha_0-p+1)}\left(\left|t_1^{n-1}-t_2^{n-1}\right|\right). \end{aligned} \tag{4.107}$$

De la même manière, on peut obtenir l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} \|R_2x(t_1)-R_2x(t_2)\| &\leq L_2\tfrac{\Gamma(n-q)}{\left|1-\lambda_2\xi^{n-q-1}\right|\Gamma(n)\Gamma(\beta_0-q+1)}\left(\left|t_2^{n-1}-t_1^{n-1}\right|\right) \\ &+L_2\tfrac{|\lambda_2|\Gamma(n-q)\xi^{\beta_0-q}}{\left|1-\lambda_2\xi^{n-q-1}\right|\Gamma(n)\Gamma(\beta_0-q+1)}\left(\left|t_1^{n-1}-t_2^{n-1}\right|\right). \end{aligned} \tag{4.108}$$

Ensuite, pour tout $k=1,2,...,n-1$, on a :

$$\begin{aligned} &\|D^{\alpha_k}R_1y(t_1)-D^{\alpha_k}R_1y(t_2)\| \\ &\leq L_1\tfrac{\Gamma(n-p)}{|1-\lambda_1\eta^{n-p-1}|\Gamma(n-\alpha_k)\Gamma(\alpha_0-p+1)}\left(\left|t_2^{n-\alpha_k-1}-t_1^{n-\alpha_k-1}\right|\right) \\ &+L_1\tfrac{|\lambda_1|\Gamma(n-p)\eta^{\alpha_0-p}}{|1-\lambda_1\eta^{n-p-1}|\Gamma(n-\alpha_k)\Gamma(\alpha_0-p+1)}\left(\left|t_1^{n-\alpha_k-1}-t_2^{n-\alpha_k-1}\right|\right). \end{aligned} \tag{4.109}$$

Et pour tout $h=1,2,...,n-1$, on trouve :

$$\begin{aligned} &\left\|D^{\beta_h}R_2x(t_1)-D^{\beta_h}R_2x(t_2)\right\| \\ &\leq L_2\tfrac{\Gamma(n-q)}{\left|1-\lambda_2\xi^{n-q-1}\right|\Gamma(n-\beta_h)\Gamma(\beta_0-q+1)}\left(\left|t_2^{n-\beta_h-1}-t_1^{n-\beta_h-1}\right|\right) \\ &+L_2\tfrac{|\lambda_2|\Gamma(n-q)\xi^{\beta_0-q}}{\left|1-\lambda_2\xi^{n-q-1}\right|\Gamma(n-\beta_h)\Gamma(\beta_0-q+1)}\left(\left|t_1^{n-\beta_h-1}-t_2^{n-\beta_h-1}\right|\right). \end{aligned} \tag{4.110}$$

Comme $t_2\to t_1$, les secondes membres de (4.107), (4.108), (4.109) et (4.110) tendent vers zéro. Par conséquent $R(B_\delta)$ est équicontinu. D'après le théorème d'Ascoli-Arzela, R est compact.

$(iii:)$ Finalement, on prouve que T est une contraction. En effet pour tout (x,y), $(x_1,y_1)\in X\times Y$ et $t\in J$, on a :

$$\begin{aligned} &\|T_1(y)-T_1(y_1)\| \\ &\leq \tfrac{1}{\Gamma(\alpha_0)}\int_0^1(t-s)^{\alpha_0-1}\|f_1(s,y(s),D^{\alpha_1}y(s),...,D^{\alpha_{n-1}}y(s)) \\ &-f_1(s,y_1(s),D^{\alpha_1}y_1(s),...,D^{\alpha_{n-1}}y_1(s))\,ds\|. \end{aligned} \tag{4.111}$$

En appliquant l'hypothèse (H_2), on aboutit à :

$$\begin{gathered}\|T_1(y)-T_1(y_1)\| \leq (\omega_0+\omega_1+...+\omega_{n-1}) \\ [\|y-y_1\|+\|D^{\alpha_1}y-D^{\alpha_1}y_1\|+...+\|D^{\alpha_{n-1}}y-D^{\alpha_{n-1}}y_1\|]\,\tfrac{1}{\Gamma(\alpha_0)}\int_0^1(1-s)^{\alpha_0-1}\,ds.\end{gathered} \tag{4.112}$$

En calculant l'intégrale du second membre de (4.112), on obtient :

$$\begin{gathered}\|T_1(y)-T_1(y_1)\| \leq \tfrac{(\omega_0+\omega_1+...+\omega_{n-1})}{\Gamma(\alpha_0+1)} \\ \times[\|y-y_1\|+\|D^{\alpha_1}y-D^{\alpha_1}y_1\|+...+\|D^{\alpha_{n-1}}y-D^{\alpha_{n-1}}y_1\|]\,.\end{gathered} \tag{4.113}$$

Et donc,

$$\begin{gathered}\|T_1(y)-T_1(y_1)\| \leq \tfrac{\omega}{\Gamma(\alpha_0+1)} \\ \times[\|y-y_1\|+\|D^{\alpha_1}y-D^{\alpha_1}y_1\|+...+\|D^{\alpha_{n-1}}y-D^{\alpha_{n-1}}y_1\|]\,.\end{gathered} \tag{4.114}$$

De la même manière, on peut obtenir l'estimation suivante :

$$\begin{gathered}\|T_2(x)-T_2(x_1)\| \leq \tfrac{\varpi}{\Gamma(\beta_0+1)} \\ \times\left[\|x-x_1\|+\left\|D^{\beta_1}x-D^{\beta_1}x_1\right\|+...+\left\|D^{\beta_{n-1}}x-D^{\beta_{n-1}}x_1\right\|\right].\end{gathered} \tag{4.115}$$

Ensuite, pour tout $k=1,2,...,n-1$, on a :

$$\begin{gathered}\|D^{\alpha_k}T_1(y)-D^{\alpha_k}T_1(y_1)\| \\ \leq \tfrac{1}{\Gamma(\alpha_0-\alpha_k)}\int_0^t(t-s)^{\alpha_0-\alpha_k-1}\,\|f_1(s,y(s),D^{\alpha_1}y(s),...,D^{\alpha_{n-1}}y(s)) \\ -f_1(s,y_1(s),D^{\alpha_1}y_1(s),...,D^{\alpha_{n-1}}y_1(s))\,ds\|\,.\end{gathered} \tag{4.116}$$

En utilisant l'hypothèse (H_3) et en calculant l'intégrale du second membre de (4.611), on obtient :

$$\begin{gathered}\|D^{\alpha_k}T_1(y)-D^{\alpha_k}T_1(y_1)\| \leq \tfrac{\omega}{\Gamma(\alpha_0-\alpha_k+1)} \\ \times[\|y-y_1\|+\|D^{\alpha_1}y-D^{\alpha_1}y_1\|+...+\|D^{\alpha_{n-1}}y-D^{\alpha_{n-1}}y_1\|]\,,\end{gathered} \tag{4.117}$$

et pour tout $h=1,2,...,n-1$, on trouve :

$$\begin{gathered}\left\|D^{\beta_k}T_2(x)-D^{\beta_k}T_2(x_1)\right\| \leq \tfrac{\varpi}{\Gamma(\beta_0-\beta_h+1)} \\ \times\left[\|x-x_1\|+\left\|D^{\beta_1}x-D^{\beta_1}x_1\right\|+...+\left\|D^{\beta_{n-1}}x-D^{\beta_{n-1}}x_1\right\|\right].\end{gathered} \tag{4.118}$$

De l'inégalité (4.114) et (4.117), on déduit que

$$\begin{aligned} \|T_1(y) - T_1(y_1)\|_X &\leq \left[\tfrac{1}{\Gamma(\alpha_0+1)} + \textstyle\sum_{k=1}^{n-1} \tfrac{1}{\Gamma(\alpha_0-\alpha_k+1)}\right]\omega \\ &\times \left[\|y-y_1\| + \|D^{\alpha_1}y - D^{\alpha_1}y_1\| + ... + \|D^{\alpha_{n-1}}y - D^{\alpha_{n-1}}y_1\|\right]. \end{aligned} \tag{4.119}$$

Par (4.115) et (4.118), on a :

$$\begin{aligned} \|T_2(x) - T_2(x_1)\|_Y &\leq \left[\tfrac{1}{\Gamma(\beta_0+1)} + \textstyle\sum_{h=1}^{n-1} \tfrac{1}{\Gamma(\beta_0-\beta_h+1)}\right]\varpi \\ &\times \left[\|x-x_1\| + \left\|D^{\beta_1}x - D^{\beta_1}x_1\right\| + ... + \left\|D^{\beta_{n-1}}x - D^{\beta_{n-1}}x_1\right\|\right]. \end{aligned} \tag{4.120}$$

Maintenant en combinant (4.119) et (4.120), on aboutit à :

$$\begin{aligned} \|T(x,y) - T(x_1,y_1)\|_{X\times Y} &\leq \left(\left[\tfrac{1}{\Gamma(\alpha_0+1)} + \textstyle\sum_{k=1}^{n-1} \tfrac{1}{\Gamma(\alpha_0-\alpha_k+1)}\right]\omega\right. \\ &\left.+ \left[\tfrac{1}{\Gamma(\beta_0+1)} + \textstyle\sum_{h=1}^{n-1} \tfrac{1}{\Gamma(\beta_0-\beta_h+1)}\right]\varpi\right)\|(x-x_1, y-y_1)\|_{X\times Y}. \end{aligned} \tag{4.121}$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned} \|T(x,y) - T(x_1,y_1)\|_{X\times Y} &\leq \left(\left[\tfrac{1}{\Gamma(\alpha_0+1)} + \textstyle\sum_{k=1}^{n-1} \tfrac{1}{\Gamma(\alpha_0-\alpha_k+1)}\right]\omega\right. \\ &\left.+ \left[\tfrac{1}{\Gamma(\beta_0+1)} + \textstyle\sum_{h=1}^{n-1} \tfrac{1}{\Gamma(\beta_0-\beta_h+1)}\right]\varpi\right)\|(x-x_1, y-y_1)\|_{X\times Y}. \end{aligned} \tag{4.122}$$

En utilisant la condition (4.80), on conclut que T est une contraction.

Par conséquence du théorème du point fixe de Krasnoselskii, on peut conclure que ϕ a un point fixe qui est une solution du système (4.1). ■

Corollaire 4.1 *Supposons que $\eta^{n-p-1} \neq \frac{1}{\lambda_1}, \xi^{n-q-1} \neq \frac{1}{\lambda_2}$ et ils existent des constantes positives Δ_i, $\Lambda_i, i = 0, 1, ..., n-1$, telles que pour tout $t \in J$ et $(x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}), (y_0, y_1, y_2, ..., y_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$, on a :*

$$|f_1(t, x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}) - f_1(t, y_0, y_1, y_2, ..., y_{n-1})|$$

$$\leq \Delta_0(t)|x_0 - y_0| + \Delta_1(t)|x_1 - y_1| + \Delta_2(t)|x_2 - y_2| + ... + \Delta_{n-1}(t)|x_{n-1} - y_{n-1}|$$

et

$$|f_2(t, x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}) - f_2(t, y_0, y_1, y_2, ..., y_{n-1})|$$

$$\leq \Lambda_0(t)|x_0 - y_0| + \Lambda_1(t)|x_1 - y_1| + \Lambda_2(t)|x_2 - y_2| + ... + \Lambda_{n-1}(t)|x_{n-1} - y_{n-1}|.$$

Si

$$\left(N_0 + \textstyle\sum_{k=1}^{n-1} N_k\right)(\Delta_0 + ... + \Delta_{n-1}) + \left(M_0 + \textstyle\sum_{h=1}^{n-1} M_h\right)(\Lambda_0 + ... + \Lambda_{n-1}) < 1 \ ,$$

alors le système (4.1) admet une solution unique sur J.

Corollaire 4.2 *Supposons que* (H_1) *est satisfaite et* $\eta^{n-p-1} \neq \frac{1}{\lambda_1}, \xi^{n-q-1} \neq \frac{1}{\lambda_2}$. *S'il existe* $k_1 > 0$ *et* $k_2 > 0$, *tels que :*

$$|f_1(t, x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1})| \leq k_1 \ \text{ et } \ |f_2(t, x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1})| \leq k_2 \ ,$$

pour tout $t \in J$ *et* $(x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$, *alors le système* (4.1) *admet au moins une solution.*

4.5 Exemples Validant les résultats

Exemple 4.1 *On considère le système suivant :*

$$\begin{cases} D^{\frac{7}{2}}x(t) = \frac{|y(t)|+\left|D^{\frac{9}{4}}y(t)\right|+\left|D^{\frac{3}{2}}y(t)\right|+\left|D^{\frac{1}{2}}y(t)\right|}{(t^2+32\pi)\left(e^t+|y(t)|+\left|D^{\frac{9}{4}}y(t)\right|+\left|D^{\frac{3}{2}}y(t)\right|+\left|D^{\frac{1}{2}}y(t)\right|\right)} + \cosh(2+t^2), \ t \in [0,1], \\ \\ D^{\frac{11}{3}}y(t) = \frac{\sin x(t)+\sin D^{\frac{5}{2}}x(t)+\sin D^{\frac{6}{5}}x(t)+\sin D^{\frac{4}{5}}x(t)}{16(\pi t^2+1)} + \arctan(1+t), \ t \in [0,1], \\ \\ x(0) = \sqrt{2}, \ x'(0) = x''(0) = 0, \ D^{\frac{1}{2}}x(1) = \frac{4}{5}D^{\frac{1}{2}}x\left(\frac{3}{4}\right), \\ \\ y(0) = \sqrt{3}, \ y'(0) = y''(0) = 0, \ D^{\frac{1}{3}}y(1) = \frac{6}{7}D^{\frac{1}{3}}y\left(\frac{2}{5}\right), \end{cases} \tag{4.123}$$

tels que :

$$\begin{cases} f_1(t, x_1, x_2, x_3, x_4) := \frac{|x_1|+|x_2|+|x_3|+|x_4|}{(t^2+32\pi)(e^t+|x_1|+|x_2|+|x_3|+|x_4|)} + \cosh(2+t^2), \\ \\ f_2(t, x_1, x_2, x_3, x_4) := \frac{\sin(x_1)+\sin(x_2)+\sin(x_3)+\sin(x_4)}{16(\pi t^2+1)} + \arctan(1+t), \end{cases}$$

où $t \in [0,1]$ *et* $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$.

Pour tout $t \in [0,1]$ *et* $(x_0, x_1, x_2, x_3), (y_0, y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^4$, *on a :*

$$|f_1(t, x_0, x_1, x_2, x_3) - f_1(t, y_0, y_1, y_2, y_3)|$$

$$\leq \frac{1}{(t^2+32\pi)}(|x_0 - y_0| + |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + |x_3 - y_3|),$$

$$|f_2(t, x_0, x_1, x_2, x_3) - f_2(t, y_0, y_1, y_2, y_3)|$$

$$\leq \frac{1}{16(\pi t^2+1)}(|x_0 - y_0| + |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + |x_3 - y_3|).$$

Ainsi la condition (H_2) *est satisfaite avec* $a_i(t) = \frac{1}{(t^2+32\pi)}$, $b_i(t) = \frac{1}{16(\pi t^2+1)}$, $i = 0, ..., 3$, *alors*

$$\omega_i = \sup_{t\in[0,1]} a_i(t) = \frac{1}{32\pi}, \ \varpi_i = \sup_{t\in[0,1]} b_i(t) = \frac{1}{16}, \ i = 0, ..., 3 \ .$$

Par un simple calcul, on obtient :

$$N_0 = 0,288269, \ N_1 = 2,203434, \ N_2 = 1,413119, \ N_3 = 0,615229, \ \omega = \frac{1}{8\pi},$$

$$M_0 = 0,085713, \ M_1 = 1,124108, \ M_2 = 0,322689, \ M_3 = 0,203869, \ \varpi = \frac{1}{4}.$$

On a aussi

$$\left(N_0 + \sum_{k=1}^{3} N_k\right)\omega + \left(M_0 + \sum_{h=1}^{3} M_h\right)\varpi = 0,179938 + 0,434094 = 0,614032 < 1 \ .$$

Donc d'après le Théorème 4.1, le système (4.123) *admet une solution unique sur* $[0,1]$.

Exemple 4.2 *On considère le système suivant :*

$$\begin{cases} D^{\frac{10}{3}}x(t) = \frac{\cos y(t)+\sin\left(D^{\frac{10}{4}}y(t)+D^{\frac{9}{7}}y(t)\right)}{\pi e^t+15}, \ t \in [0,1], \\ D^{\frac{14}{4}}y(t) = \frac{\sin x(t)+\cos\left(D^{\frac{5}{2}}x(t)+D^{\frac{4}{3}}x(t)\right)}{t^2+20\pi}, \ t \in [0,1], \\ x(0) = 3, \ x'(0) = x''(0) = 0, \ D^{\frac{4}{5}}x(1) = \frac{3}{4}D^{\frac{4}{5}}x\left(\frac{1}{3}\right), \\ y(0) = \sqrt{5}, \ y'(0) = y''(0) = 0, \ D^{\frac{9}{8}}y(1) = \frac{2}{3}D^{\frac{9}{8}}y\left(\frac{2}{5}\right). \end{cases} \tag{4.124}$$

On prend

$$f_1(t,x,y,z) := \frac{\cos x+\sin(y+z)}{\pi e^t+15}, \ t \in [0,1], \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

et

$$f_2(t,x,y,z) := \frac{\sin x+\cos(y+z)}{20\pi+t^2}, \ t \in [0,1], \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ *et* $t \in [0,1]$, *on a :*

$$|f_1(t,x,y,z)| \leq \left|\frac{\cos x+\sin(y+z)}{\pi e^t+15}\right| \leq \frac{2}{\pi e^t+15},$$

et

$$|f_2(t,x,y,z)| \leq \left|\frac{\sin x+\cos(y+z)}{20\pi+t^2}\right| \leq \frac{2}{20\pi+t^2}.$$

Maintenant, on prend $l_1(t) = \frac{2}{\pi e^t+15}$ *et* $l_2(t) = \frac{2}{t^2+20\pi}$, *alors* $L_1 = \frac{2}{\pi+15}$ *et* $L_2 = \frac{1}{10\pi}$.

Ainsi, on en déduit que toutes les hypothèses du Théorème 4.2 sont vérifiées ce qui on permet de conclure que le système (4.124) *admet au moins une solution sur* $[0,1]$.

Exemple 4.3 *Soit le système suivant :*

$$\begin{cases} D^{\frac{17}{5}}x(t) = \frac{e^{-t^2}\left(\sin(y(t))+\cos^2\left(D^{\frac{15}{6}}y(t)\right)+\sin\left(D^{\frac{11}{7}}y(t)+D^{\frac{2}{3}}y(t)\right)\right)}{\left(e^{t^2}+20\pi\right)} + \cos\left(2+t^2\right), \ t\in[0,1], \\ D^{\frac{15}{4}}y(t) = \frac{\sin^2(x(t))+\sin\left(\pi D^{\frac{11}{5}}x(t)\right)+\sin\left(2\pi D^{\frac{4}{3}}x(t)\right)+\tan^{-1}\left(3D^{\frac{1}{2}}x(t)\right)}{(\pi e^t+18)} + \ln\left(2+t^2\right), \ t\in[0,1], \\ x(0)=2, \ x'(0)=x''(0)=0, \ D^{\frac{5}{4}}x(1)=\frac{5}{6}D^{\frac{5}{4}}x\left(\frac{2}{5}\right), \\ y(0)=3, \ y'(0)=y''(0)=0, \ D^{\frac{3}{2}}y(1)=\frac{7}{8}D^{\frac{3}{2}}y\left(\frac{3}{5}\right). \end{cases} \tag{4.125}$$

Soit $t\in[0,1]$ *et* $x_1, \ x_2, \ x_3, \ x_4 \in \mathbb{R}$, *alors*

$$f_1(t,x_1,x_2,x_3,x_4) := \frac{e^{-t^2}\left(\sin(x_1)+\cos^2(x_2)+\sin(x_3+x_4)\right)}{\left(e^{t^2}+20\pi\right)} + \cos\left(2+t^2\right),$$

et

$$f_2(t,x_1,x_2,x_3,x_4) := \frac{\sin^2(x_1)+\sin(\pi x_2)+\sin(2\pi x_3)+\tan^{-1}(3x_4)}{(\pi e^t+18)} + \ln\left(2+t^2\right).$$

En appliquant l'hypothèse $(H3)$, *on trouve :*

$$|f_1(t,x_1,x_2,x_3,x_4)| \leq \left|\frac{e^{-t^2}\left(\sin(x_1)+\cos^2(x_3)+\sin(x_3+x_4)\right)}{\left(e^{t^2}+20\pi\right)} + \cos\left(2+t^2\right)\right|$$

$$\leq \frac{e^{-t^2}}{\left(e^{t^2}+20\pi\right)} + \cos\left(2+t^2\right),$$

et

$$|f_2(t,x_1,x_2,x_3,x_4)| \leq \left|\frac{\sin^2(x_1)+\sin(\pi x_2)+\sin(2\pi x_3)+\tan^{-1}(3x_4)}{(\pi e^t+18)} + \ln\left(2+t^2\right)\right|$$

$$\leq \frac{3\pi+4}{(\pi e^t+18)} + \ln\left(2+t^2\right).$$

ce qui signifie que $l_1(t) = \frac{e^{-t^2}}{\left(e^{t^2}+20\pi\right)} + \cos\left(2+t^2\right)$ *et* $l_2(t) = \frac{3\pi+4}{(\pi e^t+18)} + \ln\left(2+t^2\right)$.

Pour tout $x_0, \ x_1, \ x_2, \ x_3, \ y_0 \ y_1, \ y_2, \ y_3 \in \mathbb{R}$, *et* $t\in[0,1]$, *on a :*

$$|f_1(t,x_0,x_1,x_2,x_3) - f_1(t,y_0,y_1,y_2,y_3)|$$

$$\leq \frac{e^{-t^2}}{e^{t^2}+20\pi}\left(|x_0-y_0|+|x_1-y_1|+|x_2-y_2|+|x_3-y_3|\right)$$

et

$$|f_2(t,x_0,x_1,x_2,x_3) - f_2(t,y_0,y_1,y_2,y_3)|$$

$$\leq \frac{1}{\pi e^t+18}|x_0-y_0| + \frac{\pi}{\pi e^t+18}|x_1-y_1| + \frac{2\pi}{\pi e^t+18}|x_2-y_2| + \frac{3}{\pi e^t+18}|x_3-y_3|.$$

Par conséquent, l'hypothèse (H_2) *est satisfaite avec* $a_i(t) = \frac{e^{-t^2}}{\left(e^{t^2}+20\pi\right)}$, $i = 0, ..., 3$ *et* $b_0(t) = \frac{1}{(\pi e^t+18)}$, $b_1(t) = \frac{\pi}{(\pi e^t+18)}$, $b_2(t) = \frac{2\pi}{(\pi e^t+18)}$, $b_3(t) = \frac{3}{(\pi e^t+18)}$. *Alors,*

$$\omega_i = \sup_{t\in[0,1]} a_i(t) = \tfrac{1}{1+20\pi},\ i = 0, ..., 3,\ \varpi_0 = \sup_{t\in[0,1]} b_0(t) = \tfrac{1}{(\pi+18)},$$

$$\varpi_1 = \sup_{t\in[0,1]} b_1(t) = \tfrac{\pi}{(\pi+18)},\ \varpi_2 = \sup_{t\in[0,1]} b_2(t) = \tfrac{2\pi}{(\pi+18)},\ \varpi_3 = \sup_{t\in[0,1]} b_3(t) = \tfrac{3}{(\pi+18)}.$$

Maintenant, on va vérifier la condition (4.80).

Tout d'abord, en calculant la valeur de ω *et* ϖ, *on trouve :*

$$\omega = \omega_0 + \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 4,699\,8 \times 10^{-2}$$

et

$$\varpi = \varpi_0 + \varpi_1 + \varpi_2 + \varpi_3 = 0,634\,99.$$

Pour $k,\ h \in \{1,\ 2,\ 3\}$, *on a :*

$$\tfrac{1}{\Gamma(\alpha_0+1)} + \textstyle\sum_{k=1}^{3} \tfrac{1}{\Gamma(\alpha_0-\alpha_k+1)} = 1,951303$$

et

$$\tfrac{1}{\Gamma(\beta_0+1)} + \textstyle\sum_{h=1}^{3} \tfrac{1}{\Gamma(\beta_0-\beta_h+1)} = 1,236325\ .$$

Finalement, on a :

$$\left(\tfrac{1}{\Gamma(\alpha_0+1)} + \textstyle\sum_{k=1}^{3} \tfrac{1}{\Gamma(\alpha_0-\alpha_k+1)}\right)\omega + \left(\tfrac{1}{\Gamma(\beta_0+1)} + \textstyle\sum_{h=1}^{3} \tfrac{1}{\Gamma(\beta_0-\beta_h+1)}\right)\varpi = 0,876\,76 < 1\ .$$

D'après le Théorème 4.3, le système (4.125) *admet au moins une solution sur* $[0,1]$.

Conclusion et perspectives

Dans cette thèse, on s'est intéressé principalement à la théorie des inégalités intégrales fractionnaires et à celle des équations différentielles fractionnaires.

Dans un premier temps, on a présenté des résultats sur les estimations des moments fractionnaires d'ordres (r, α) en appliquant la théorie des intégrales fractionnaires au sens de Riemann-Liouville. Aussi, en utilisant l'intégrale $k-$Riemann-Liouville fractionnaire, on a présenté des résultats sur les estimations des espérances $k-$fractionnaires et variances $k-$fractionnaire.

Ensuite, on a appliqué les inégalités fractionnaires pour étudier les problèmes aux limites d'ordre arbitraire et en particulier pour démontrer l'existence et l'unicité des solutions de certains problèmes fractionnaires au sens de Caputo. En effet, on a d'abord proposé une autre équivalence intégrale du problème posé, puis on a établit des conditions assurant l'existence et l'unicité de solutions pour le problème donné. On a ensuite considéré d'autres conditions pour assurer l'existence d'au moins une solution .

Enfin, on a abordé la question de l'existence et de l'unicité de la solution d'un système d'équations différentielles fractionnaires avec la dérivée fractionnaire de Caputo. En effet, après avoir donné la solution du système fractionnaire, des conditions suffisantes assurant l'existence et l'unicité de solution du système considéré sont mises en évidence.

A l'issu de ces travaux, des perspectives sont ouvertes, en effet, au vu des résultats obtenus sur les estimations des espérances, variances et moments fractionnaires des variables aléatoires continues fractionnaires avec fonction de probabilité de densité définie sur un intervalle fini, il est important de poursuivre l'étude de ces estimations en utilisant l'opérateur (k, s) $-$Riemann-Liouville fractionnaire, l'opérateur fractionnaire de Saigo et l'opérateur hypergéometrique. Il est possible également de généraliser ces résultats aux calculs fractionnaires d'ordre variable. L'une des voies intéressantes, est l'étude des proprietés des variables aléatoires continues fractionnaires.

Bibliographie

[1] **R.P Agarwal, Y. Zhou and Y. He**, *Existence of fractional neutral functional differential equations*, Comput. Math. Appl. 59, (2010), no. 3, 1095-1100.

[2] **R. P. Agarwal**, *Difference equations and inequalities*, Marcel Dekker. 1992.

[3] **A. Anber, S. Belarbi and Z. Dahmani**, *New existence and uniqueness results for fractional differential equations*, Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta, Seria Matematica. 21, (2013), no. 3, 33-41.

[4] **A. Anber, Z. Dahmani and B. Bendoukha**, *New integral inequalities of feng Qi type via Riemann-Liouville fractional integration*, Facta. Universitatis (NIS). Ser. Math. Inform. 27, (2012), no. 2157-166.

[5] **G. A. Anastassiou**, *Fractional differentiation inequalities*, Springer, Dordrecht, 2009.

[6] **N.S. Barnett, P. Cerone, S.S. Dragomir and J. Roumeliotis**, *Some inequalities for the dispersion of a random variable whose PDF is defined on a finite interval.* J. Inequal. Pure Appl. Math. 2, (2001), no. 11-18.

[7] **S. Belarbi, Z. Dahmani**, *On some new fractional integral inequalities*, J. Inequal. Pure Appl. Math. 10 (2009), no. 3, 1-12.

[8] **M. Benchohra, S. Hamania, S.K. Ntouyas**, Boundary value problems for differential equations with fractional order and nonlocal conditions, Nonlinear Analysis. 71, (2009), 2391-2396.

[9] **A.V. Bitsadze**, *On the theory of nonlocal boundary value problems*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR. 277, (1984), 17-19.

[10] **L. Byszewski, V. Lakshmikantham**, *Theorem about the existence and uniqueness of a solution of a nonlocal abstract Cauchy problem in a Banach space*, Appl. Anal. 40 (1991), 11-19.

[11] **L. Byszewski**, *Existence and uniqueness of mild and classical solutions of semilinear functional-differential evolution nonlocal Cauchy problem, Selected problems of mathematics*, 50th Anniv. Cracow Univ. Technol. Anniv., Issue 6, Cracow Univ. Technol., Krakow, 1995, pp. 25-33.

[12] **L. Byszewski**, *Theorems about existence and uniqueness of solutions of a semilinear evolution nonlocal Cauchy problem*, J. Math. Anal. Appl. 162 (1991), 494-505.

[13] **P. L. Chebyshev**, *Sur les expressions approximatives des int egrales définies par les autres prises entre les mêmes limites*, Proc. Math. Soc. Charkov. 2, (1882), 93-98.

[14] **Y. Chen and H-L. An**, *Numerical solution of coupled Burgers equations with time and space fractional derivatives*, Appl. Math. Comput. 200, (2008), 87-95.

[15] **Z. Dahmani**, *New inequalities in fractional integrals*, International Journal of Nonlinear Sciences. 9, (2010), no. 4, 493-497.

[16] **Z. Dahmani and S. Belarbi**, Some inequalities of Qi type using fractional integration, International Journal of Nonlinear Sciences. 10, (2010), no. 4, 396-400.

[17] **Z. Dahmani**, *On Minkowski and Hermite-Hadamard integral inequalities via fractional integration*, Ann. Funct. Anal. 1, (2010), no. 1, 51-58.

[18] **Z. Dahmani, L. Tabharit**, *On weighted Gruss type inequalities via fractional integrals*, JARPM, Journal of Advanced Research in Pure Mathematics. 2, (2010), no. 4, 31-38.

[19] **Z. Dahmani, L. Tabharit and S. Taf**, *New generalisations of Gruss inequality using Riemann-Liouville fractional integrals*, Bulletin of Mathematical Analysis and Applications. 2, (2010), no. 3, 93-99.

[20] **Z. Dahmani**, *Fractional integral inequalities for continuous random variables*, Malaya J. Mat. 2, (2014), no. 2, 172-179.

[21] **Z. Dahmani and L. Tabharit**, *Fractional order differential equations involving Caputo derivative*, Theory and Applications of Mathematics & Computer Science. 4, (2014), no. 1, 40-5.

[22] **Z. Dahmani and S. Belarbi**, *New results for fractional evolution equations using Banach fixed point theorem,* Int. J. Nonlinear Anal. Appl. 5, (2014), no. 2, 22-30.

[23] **Z. Dahmani and N. Bedjaoui**, *New generalized integral inequalities*, J. Advan. Res. Appl. Math. 3, (2011), no. 4, 58-66.

[24] **Z. Dahmani**, *New classes of integral inequalities of fractional order*, Le Matematiche. 69, (2014), no. 1, 227-235.

[25] **K. Deng**, *Exponential decay of solutions of semilinear parabolic equations with nonlocal initial conditions*, Journal of Mathematical Analysis and Applications. 179, (1993), 630-637.

[26] **S. S. Dragomir and S. Wang**, *An inequality of Ostrowski-Gruss' type and its applications to the estimation of error bounds for some special means and for some numerical quadrature rules*, Comput. Math. Appl. 13, (1997), no. 11, 15-20.

[27] **A. M. A. El-Sayed**, *Fractional order evolution equations*, J. Fract. Calc. 7 (1995), 89-100.

[28] **A. M. A. El-Sayed**, *Fractional order diffusion-wave equations*, Intern. J. Theo. Physics 35 (1996), 311-322.

[29] **V. Gafiychuk, B. Datsko, V. Meleshko and D. Blackmore**, *Analysis of the solutions of coupled nonlinear fractional reaction-diffusion equations*, Chaos Solitons Fractals. 41, (2009), 1095-1104.

[30] **A. Granas and J. Dugundji**, *Fixed point theory*, Springer-Verlas, New York. 2003.

[31] **Z. Guo, M. Liu**, *On solutions of a system of higher-order nonlinear fractional differential equations*, Bulletin of Mathematical Analysis and Applications. 3, (2011), no. 4, 59-68.

[32] **G. Gruss**, $''$ *Uber das Maximum des absoluten Betrages von* $(1\backslash(b-a))\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx - \left(1\backslash(b-a)^2\right)\int_a^b f(x)\,dx\int_a^b g(x)\,dx''$ Mathematische Zeitschrift. 39, (1935), no. 1, 215-226.

[33] **J. K. Hale and S. V. Lunel**, Introduction to functional differential equations, Applied Mathematical Sciences, 99, Springer-Verlag, New York, 1993.

[34] **R. Hilfer**, *Applications of Fractional Calculus in Physics*, World Scientific, Singapore, 2000.

[35] **M. Houas, Z. Dahmani and M. Z. Sarikaya**, *New integral inequalities for* $(r,\alpha)-$*fractional moments of continuous random variables*. Submitted.

[36] **M. Houas**, *Some inequalities for* $k-$*fractional continuous random variables*, J. Advan. Res. In Dynamical and Control Systems. 7 (2015), no. 4, 43-50.

[37] **M. Houas and Z. Dahmani**, *On existence of solutions for fractional differential equations with nonlocal multi-point boundary conditions*. Accepted in Lobachevskii Journal of Mathematics. 37, (2016), no. 2, 120-127.

[38] **M. Houas and Z. Dahmani**, *New results for a system of two fractional differential equations involving n Caputo derivatives*, Kragujevac Journal of Mathematics. 38, (2014), no. 2, 283-301.

[39] **M. Houas, Z. Dahmani and M. Benbachir**, *New results for a boundary value problem for differential equations of arbitrary order*. International Journal of Modern Mathematical Sciences. 7, (2013), no. 2, 195-211.

[40] **M. Houas and M. Benbachir**, *Existence and uniqueness results for a nonlinear differential equations of arbitrary order*, Int. J. Nonlinear Anal. Appl. 2, (2015), no. 2, 24-42.

[41] **M. Houas and M. Benbachir**, *Existence solutions for four point boundary value problems for fractional differential equations, Pure and Applied Mathematics Letters, Volume 2015, pages 37-49.*

[42] **Z. Hu, W. Liu and T. Chen**, *Existence solutions for a coupled system of fractional differential equations at resonance,* Boundary value problems. 98, 2012.

[43] **A. A. Kilbas and S. A. Mazran**, *Nonlinear differential equations with Caputo fractional derivative in the space of continuously differentiable functions.* Differential Equations. 41 (2005), no. 1, 84-89.

[44] **P. Kumar**, *Moment inequalities of a random variable defined over a finite interval.* J. Inequal. Pure Appl. Math. 3 (2002), no. 3, 1-24.

[45] **P. Kumar**, *Inequalities involving moments of a continuous random variable defined over a finite interval.* Computers and Mathematics with Applications. 48, (2004), 257-273.

[46] **V. Lakshmikantham and A.S. Vatsala**, *Basic theory of fractional differential equations.* Nonlinear Anal. 69, (2008), no. 8, 2677-2682.

[47] **V. Lakshmikantham and A. S. Vatsala**, *Theory of fractional differential inequalities and applications.* Commun. Appl. Anal. 11, (2007), no. 3-4, 395-402.

[48] **J. Liang , Z. Liu and X . Wang**, *Solvability for a couple system of nonlinear fractional differential equations in a banach space.* Fractional Calculus and Applied Analysis. 16, (2013), no. 1, 51-63.

[49] **Z. Liu**, *Some Ostrowski-Gruss type inequalities and applications.* Comput. Math. Appl. 53, (2007), no. 1, 73-79.

[50] **R. Liu, C. Kou and X. Xie**, *Existence results for a coupled system of nonlinear fractional boundary value problems at resonance.* Mathematical Problems in Engineering. Volume 2013, Article ID 267386, 9 pages.

[51] **Y. Liu, B. Ahmad and R. P. Agarwal**, *Existence of solutions for a coupled system of nonlinear fractional differential equations with fractional boundary conditions on the half-line.* Advances in Difference Equations. 46, (2013), 1-19.

[52] **W. Liu, Q. A. Ngo and V. N. Huy**, *Several interesting integral inequalities.* Journal of Math. Inequal. 3, (2009), no. 2201-212.

[53] **J.J. Loiseau and H. Mounier**, *Stabilisation de l'équation de la chaleur commandée en flux.* ESAIM : Proc. (1998), 131-144.

[54] **F. Mainardi**, *Fractional calculus. Some basic problems in continuum and statistical mechanics, in "Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics" (A. Carpinteri and F. Mainaedi, Eds).* Springer-Verlag, Wien. (1997), 291-348.

[55] **B. Mathieu, P. Melchior, A. Oustaloup, and Ch. Ceyral**, *Fractional differentiation for edge detection.* Signal Processing. 83, (2003), 2421-2432.

[56] **K. S. Miller and B. Ross**, *An introduction to the fractional calculus and differential equations.* Jhon Wiley, New York. 1993.

[57] **S. Mubeen and G. M. Habibullah**, *$k-$Fractional Integrals and Application.* Int. J. Contemp. Math. Sciences. 7, (2012), no. 2, 89-94.

[58] **S.K. Ntouyas**, *Boundary value problems for nonlinear fractional differential equations and inclusions with nonlocal and fractional integral boundary conditions.* Opuscula Math. 33, (2013), no. 117-138.

[59] **S. Ntouyas and M. Obaid**, *A coupled system of fraction differential equation with nonlocal integral boundary conditions.* Boundary value problems. 130, 2012.

[60] **K. B. Oldham and J. Spanier**, *The Fractional Calculs.* Acadimic Press, New York. 1974.

[61] **D. O'Regan**, *Fixed-point theory for the sum of two operators.* Appl. Math. Lett. 9, (1996), no. 3, 1-9.

[62] **A. Oustaloup**, *Systèmes asservis linéaires d'ordre fractionnaire.* Masson. Paris, 1983.

[63] **B.G. Pachpatte**, *On multidimensional Gruss type integral inequalities.* J. Inequal. Pure Appl. Math. 32 (2002), 1-15.

[64] **I. Podlubny**, *Fractional differential equations.* Academic Press, San Diego. 1999.

[65] **I. Podlubny**, *Fractional differential equations.* Mathematics in Science and Engineering, Academic Press, New York, 1999.

[66] **S. G. Samko, A. A. Kilbas and O. I. Marchev**, Fractional integrals and derivatives. Theory and Applications, Gordon and Breach, Yverdon. 1993.

[67] **M. Z. Sarikaya and A. Karaca**, *On the $k-$Riemann-Liouville fractional integral and applications.* International Journal of Statistics and Mathematics. 1, (2014), no. 3, 033-043.

[68] **M. Z. Sarikaya, Z. Dahmani, M.E. KIRIS and F. Ahmad**, $(k, s)-$*Riemann-Liouville fractional integral and applications. Hacettepe University Bulletin of Natural Sciences and Engineering Series B : Mathematics and Statistics.* 45, (2015), no. 1, 1-13.

[69] **M. Z. Sarikaya and H. Yaldiz**, *New generalization fractional inequalities of Ostrowski-Gruss type.* Lobachevskii Journal of Mathematics. 34, (2013), no. 4, 326-331.

[70] **W. Sudsutad, S. K. Ntouyas and J. Tariboon**, *Fractional integral inequalities via Hadamard's fractional integral.* Abstract and Applied Analysis. Volume 2014, Article ID 563096, 11 pages.

[71] **G. Wang, R. P. Agarwal, and A. Cabada**, *Existence results and monotone iterative technique for systems of nonlinear fractional differential equations.* Applied Mathematics Letters. 25, (2012), 1019–1024.

[72] **W. Yang**, *Positive solutions for a coupled system of nonlinear fractional differential equations with integral boundary conditions.* Comput. Math. Appl. 63, (2012), 288-297.

[73] **W. Yang**, *Three-point boundary value problems for a coupled system of nonlinear fractional differential equations.* J. Appl. Math. & Informatics. 30, (2012), no. 5-6, 773-785.

[74] **W. Yang**, *Some new Chebyshev and Gruss-type integral inequalities for Saigo fractional integral operators and Their* $q-$*analogues.* Filomat. 29, (2015), no. 6, 1269-1289.

[75] **Y. Zhang, Z. Bai and T. Feng**, *Existence results for a coupled system of nonlinear fractional three-point boundary value problems at resonance.* Comput.Math. Appl. 61, (2011), 1032-1047.

[76] **X. Zhang, C. Zhu and Z. Wu**, *Solvability for a coupled system of fractional differential equations with impulses at resonance.* Boundary Value Problems, 80, (2013), 1-13.

[77] **W. Zhong and W. Lin**, *Nonlocal and multiple-point boundary value problem for fractional differential equations.* Comput. Math. Appl. 39 (2010), 1345-1351.