REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS DE MOSTAGANEM

FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET D'INFORMATIQUE

Département de mathématiques et d'informatique

Thèse de Doctorat en Sciences

Spécialité: mathématiques

Option : Analyse fonctionnelle

Présentée par

Mr. FETTOUCH Houari

THEME

Etude de certaines classes d'équations différentielles linéaires dans le domaine complexe

Soutenue le 15/02/2017 devant le Jury

Mr. BELAIDI Benharrat	**Président**	**Pr**	**U. Mostaganem**
Mr. OUAHAB Abdelghani	**Examinateur**	**Pr**	**U. Sidi Bel Abbes**
Mr. ABBAS Said	**Examinateur**	**MCA**	**U. Saida**
Mr. HAMOUDA Saâda	**Encadreur**	**Pr**	**U. Mostaganem**

Remerciements

Soyons reconnaissants aux personnes qui nous donnent du bonheur.

Alain Proust

Certes, je suis convaincu après maintes réflexions que cette thèse doctorale n'aurait jamais vu le jour sans le soutien moral d'un grand nombre de personnes dont la générosité, la bonne humeur et l'intérêt apporté à l'égard de ce travail m'ont permis au fil du temps de progresser dans cette phase et ces étapes difficiles, ardues et pleine d'embûches et qui par moments d'égarements de ma pensée humaine, nous fasses oublier que justement on n'ait pas solitaire.

Je remercie du fond de mon cœur toute personne qui a cru en moi qui m'a donné la force et le courage de pouvoir mener à terme cette thèse doctorale.

Pour m'avoir permis de bien mener ce projet, je tiens à remercier avant tout mon directeur de thèse, et ami pour toujours, monsieur HAMOUDA Saada de m'avoir fait confiance tout en m'acceptant dans son équipe, d'avoir accepté d'encadrer ce travail, comme je lui suis également reconnaissant pour le temps conséquent qu'il m'a accordé, pour son accueil chaleureux à chaque fois que j'ai sollicité son aide, de ses qualités pédagogiques et scientifiques, sa maitrise de son domaine, sa franchise et surtout sa sympathie. Je tiens aussi à lui exprimer ma gratitude pour son aide tellement précieuse, de son attention de tout instant sur mes travaux, pour ses conseils laborieux, de ses qualités d'écoute et de compréhension qui ont été prépondérantes pour l'accomplissement de cette thèse. Son aide m'a été d'un grand secours, toujours présent, méticuleux dans son raisonnement et ses suggestions m'ont étaient très utiles pour l'élaboration de cette thèse.

Je remercie vivement monsieur BELAIDI Benharrat qui m'a initié dans le domaine de la recherche vu ses qualités pédagogiques hors du commun et la maitrise de son domaine et d'avoir accepté malgré les charges, d'être président de jury. Monsieur Belaidi, je vous suis très reconnaissant.

Mes remerciements vont également à monsieur OUAHAB Abdelghani et monsieur ABBAS Said pour avoir accepté d'être membres de ce jury, à l'intérêt qu'ils ont manifestés à l'égard de cette thèse, au temps si précieux qu'ils m'ont accordés pour la lecture et la relecture tout en s'engageant à être des examinateurs.

J'exprime tous mes remerciements à l'ensemble du personnel enseignant, à tous mes amis et plus particulièrement à ceux ou celles qui m'ont encouragé et soutenu dans des moments difficiles.

Je remercie vivement monsieur BELHAMITI Omar, ex-chef de département, pour son aide et sa compréhension à mon égard dans l'exercice de ma fonction qui dans ses conditions, sont un apport considérable.

Enfin, là où il ne faut pas s'abstenir, j'adresse toute mon affection à ma famille et plus particulièrement à mes parents qui m'ont fait comprendre que la réussite est un vrai labeur, je dois dire que sans leurs conseils et leurs amours, je ne serais là, sans oublier bien sur mes sœurs et ma joie de vivre : mes enfants ainsi que leurs maman.

Aussi, j'exprime ma gratitude à mon ami Y.C.Abdelaziz pour son soutien moral, qui a su me donner confiance et sagesse au cours de ces trois dernières années et je ne saurais l'oublier.

Comme j'exprime ma gratitude à mon ami et collègue, monsieur LATREUCH Zinelâabidine.

Je dédié ce travail à mon garçon et mes chères trois petites filles.

Table des Matières

Introduction

La théorie de la distribution des valeurs des fonctions méromorphes fondée par le célèbre mathématicien Rolph Nevanlinna occupe une place centrale dans l'analyse complexe. Cette théorie est devenu un outil indispensable dans l'étude de la croissance et l'oscillation des solutions des équations différentielles dans le domaine complexe et elle a aussi d'autres applications dans diverses domaines. Depuis son apparition en 1925, des chercheurs ne cessent de l'étuliser pour résoudre certains problèmes y liés et de l'étendre dans d'autre domaines et d'autres situations.

Il très connu que si les coefficients $A_i(z)$ $(i = 0, ..., n-1)$ de l'équation différentielle

$$f^{(n)} + A_{n-1}(z) f^{(n-1)} + ... + A_1(z) f' + A_0(z) f = 0, \tag{1}$$

sont des fonctions entières, alors toute solution est également une fonction entière. En 1953, Frei a démontré dans [19] que si p est le plus grand entier tel que $A_p(z)$ est transcendante, alors il existe au maximum p solutions indépendantes d'ordre fini de l'équation différentielle (Pour la définition de l'ordre d'une fonction entière f voir la page 13). Un autre résultat classique du à Wittich [44] affirme que toutes les solutions de (1) sont d'ordre fini si et seulement si tous les coefficients de l'équation différentielle (1) sont des polynômes. Pour une analyse complète sur l'ordre des solutions dans le cas des coefficients polynomiaux voir [23]. Depuis ces résultats, des recherches actives dans ce sens se sont lancés dans l'étude et la résolution de certains problème et suite à cela, beaucoup d'articles ont été publiés concernant la relation entre la croissance des coefficients et la croissance des solutions. En 1982, La théorie de l'oscillation complexe des solutions des équations différentielles linéaires dans le plan complexe $\mathbb{C}$ a été introduite pour la première fois par Bank et Laine [2]; suite à l'étude du problème de l'oscillation des équations différentielles de la forme $f'' + Af = 0$ où A est une fonction entière; puis en 1983, puis ils ont élargis leurs champs d'étude au zéros des solutions méromorphes des équations différentielles linéaires de second ordre.

Depuis une dizaine d'années, beaucoup de chercheurs essayent d'étendre certains résultats du plan complexe vers le disque unité; c'est à dire de passer des fonctions méromorphes dans le plan complexe aux fonctions méromorphes seulement dans le disque unité; voir à titre d'exemples [28, 30, 15, 8, 24, 25]. Le deuxième chapitre de ce travail contient une contribution dans ce sens.

Cette thèse se compose d'une introduction et de quatre chapitres.

Dans le premier chapitre, on va citer quelques notations, définitions et résultats dont on aura besoin dans la suite de notre travail, notament quelques éléments de la théorie de Nevanlinna et son extension vers le disque unité.

Dans le deuxième chapitre, qui est la première partie de notre travail, on s'intéresse à étudier la distribution des valeurs et en particulier les points fixes des solutions ainsi que leurs dérivées de certains types d'équations différentielles linéaires dont les coefficients sont des fonctions analytiques ou méromorphes dans le disques unité.

Le troisième chapitre consiste à étudier la croissance des solutions de certaines classes d'équation différentielles linéaires non homogènes dont les équations homogènes correspondantes ont été étudiés par Hamouda [25]. Dans cette investigation, on se base sur le comportement des coefficients au voisinage d'un point sur le bord du disque unité. Cette nouvelle idée a permet d'étudier la croissance des solutions des équations différentielles sous la forme

$$f'' + A(z)\, e^{\frac{a}{(z_0 - z)^{\mu}}} f' + B(z)\, e^{\frac{b}{(z_0 - z)^{\mu}}} f = F(z)$$

et la comparer avec les équations différentielles de type

$$f'' + A(z) e^{az} f' + B(z) e^{bz} f = G(z),$$

qui ont été étudiés par plusieurs auteurs dans le plan complexe.

Dans le quatrième chapitre, on s'intéresse à une étude très particulière dans ce domaine qui consiste à déterminer la croissance des solutions des équations différentielles linéaires au voisinage d'un point singulier isolé en utilisant des nouvelles définitions similaires aux celles de la théorie de Nevanlinna pour le plan complexe.

Chapitre 1

Quelques éléments de la théorie de R. Nevanlinna

Introduction, notations et résultats

Dans cette partie, on va citer quelques définitions, notations et résultats sur les fonctions méromorphes et analytiques dont on aura besoin par la suite.

1.1 Fonction caractéristique de R. Nevanlinna

Définition 1.1.1 *Soit f une fonction méromorphe, n'étant pas identiquement égal à $a \in \mathbb{C}$. Soit $i(z, a, f)$ désignant la multiplicité de a-point de f à z, Ainsi, on définit*

$$n(r, a, f) = n\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = \sum_{\substack{|z| \leq r \\ f(z)=a}} i(z, a, f).$$

c'est à-dire, $n(r, a, f)$ est le nombre de racines de $f(z) = a$ dans $|z| \leq r$, chaque racine étant compté avec son ordre de multiplicité, pour les pôles de f, nous définissons

$$n(r, \infty, f) = n(r, f) = \sum_{\substack{|z| \leq r \\ f(z)=\infty}} i(z, \infty, f)$$

1.2 Fonction a -points

Définition 1.2.1 *[36] Soit f une fonction méromorphe, n'étant pas identiquement égal à $a \in \mathbb{C}$. On définit*

$$N(r,a,f) = N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = \int_0^r \frac{n(t,a,f) - n(0,a,f)}{t} dt + n(0,a,f)\log r$$

pour $a \neq \infty$ et

$$N(r,\infty,f) = N(r,f) = \int_0^r \frac{n(t,\infty,f) - n(0,\infty,f)}{t} dt + n(0,\infty,f)\log r$$

$N(r,a,f)$ est appelée fonction a -points de la fonction f dans le disque $|z| \leq r$.

1.3 Fonction de proximité

Définition 1.3.1 *[26, 27] Soit f une fonction méromorphe, n'étant pas identiquement égal à $a \in \mathbb{C}$. On définit*

$$m(r,a,f) = m\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \left| \frac{1}{f(re^{i\varphi}) - a} \right| d\varphi, \ a \neq \infty$$

et

$$m(r,a,f) = m(r,f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \left| f\left(re^{i\varphi}\right) \right| d\varphi,$$

où $\log^+ \alpha = \max(0, \log \alpha). (\alpha > 0)$; $m(r,a,f)$ est appelée la fonction de proximité de la fonction f au point a

1.4 Fonction caractéristique

Définition 1.4.1 *[31] La fonction caractéristique d'une fonction méromorphe f est définie comme suit*

$$T(r,f) = N(r,f) + m(r,f).$$

Exemple 1.4.1 *Pour la fonction $f(z) = e^{az}$, $a \neq 0$, on a $m(r,f) = \dfrac{|a|\, r}{\pi}$, $N(r,f) = 0$ d'où $T(r,f) = \dfrac{|a|\, r}{\pi}$.*

Remarque 1.4.1 *Les définitions en dessus restent valables pour les fonctions méromorphes dans le disque unité et pour celà il suffit de prendre $0 < r < 1$.*

Exemple 1.4.2 *Soit $f(z) = \exp\left\{\frac{1}{(1-z)^{\lambda}}\right\}$ $(\lambda > 1)$. Il est claire que $N(r,f) = 0$. D'aprés [41], on a $T(r,f) = \frac{c}{(1-r)^{\lambda-1}}(1 + o(1))\, (c > 0,\ r \to 1^{-})$.*

Les propriétés du logarithme tronqué sont contenues dans le lemme suivant.

Lemme 1.4.1 *Soient $\alpha > 0, \beta > 0, \alpha_i > 0$. On a les propriétés suivantes.*

(a) $\log \alpha \leq \log^{+} \alpha$,

(b) $\log^{+} \alpha \leq \log^{+} \beta$ *pour* $\alpha \leq \beta$,

(c) $\log \alpha = \log^{+} \alpha - \log^{+} \frac{1}{\alpha}$,

(d) $|\log \alpha| = \log^{+} \alpha + \log^{+} \frac{1}{\alpha}$,

(e) $\log^{+}\left(\prod\limits_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \log^{+} \alpha_i$,

(f) $\log^{+}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \log^{+} \alpha_i + \log n$,

Preuve 1.4.1 *On va démontrer seulement (e) et (f).*
(e) Si $\prod\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \leq 1$, alors l'inégalité est trivial Si $\prod\limits_{i=1}^{n} \alpha_i > 1$, alors $\ln^{+}\left(\prod\limits_{i=1}^{n} \alpha_i\right) = \ln\left(\prod\limits_{i=1}^{n} \alpha_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \ln \alpha_i \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \ln^{+} \alpha_i$.

(f). *De* (e) *on a*

$$\begin{aligned}\ln^+\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right) &\leq \ln^+\left(n\max_{1\leq i\leq n}\alpha_i\right)\leq \ln n+\ln^+\left(n\max_{1\leq i\leq n}\alpha_i\right)\\ &\leq \ln n+\sum_{i=1}^{n}\ln^+\alpha_i.\end{aligned}$$

Lemme 1.4.2 *[36] Soient* $f, f_1, ..., f_n$ *des fonctions méromorphes et* $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ *tels que* $ad - bc \neq 0$. *Alors*

(A) $\quad m\left(r, \sum\limits_{i=1}^{n} f_i\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} m(r, f_i) + \log n$

(B) $\quad m\left(r, \prod\limits_{i=1}^{n} f_i\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} m(r, f_i)$

(C) $\quad N\left(r, \sum\limits_{i=1}^{n} f_i\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} N(r, f_i)$

(D) $\quad N\left(r, \prod\limits_{i=1}^{n} f_i\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} N(r, f_i)$

(E) $\quad T\left(r, \sum\limits_{i=1}^{n} f_i\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} T(r, f_i) + \log n \quad$ *pour* $n \geq 1$

(F) $\quad T\left(r, \prod\limits_{i=1}^{n} f_i\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} T(r, f_i) \quad$ *pour* $n \geq 1$

(G) $\quad T\left(r, f^n\right) = nT\left(r, f\right), \quad$ *pour* $(n \geq 1)$

(H) $\quad T\left(r, \frac{af+b}{cf+d}\right) = T\left(r, f\right) + O\left(1\right), f \neq -\dfrac{d}{c}$

Preuve 1.4.2 *On va montrer seulement quelques propriétés.*

(E) *On a*

$$\begin{aligned}T\left(r,\sum_{j=1}^{n}f_j\right) &= m\left(r,\sum_{j=1}^{n}f_j\right)+N\left(r,\sum_{j=1}^{n}f_j\right)\\ &\leq \sum_{j=1}^{n}m\left(r,f_j\right)+\ln n+\sum_{j=1}^{n}N\left(r,f_j\right)\\ &= \sum_{j=1}^{n}T\left(r,f_j\right)+\ln n.\end{aligned}$$

(F) *on a*

$$m\left(r,\prod_{j=1}^{p}f_j\right)\leq\sum_{j=1}^{p}m\left(r,f_j\right)$$

et

$$N\left(r,\prod_{j=1}^{p}f_j\right)\leq\sum_{j=1}^{p}N\left(r,f_j\right)$$

donc

$$T\left(r,\prod_{j=1}^{p}f_j\right)=m\left(r,\prod_{j=1}^{p}f_j\right)+N\left(r,\prod_{j=1}^{p}f_j\right)\leq\sum_{j=1}^{p}T\left(r,f_j\right).$$

(G) *On a* $|f^n|=|f|^n\leq 1\Leftrightarrow|f|\leq 1$

Si $|f|\leq 1,$ *alors*

$$T\left(r,f^n\right)=N\left(r,f^n\right)=nN\left(r,f\right).$$

Si $|f|>1,$ *alors*

$$\begin{aligned}T\left(r,f^n\right)&=m\left(r,f^n\right)+N\left(r,f^n\right)\\&=nm\left(r,f\right)+nN\left(r,f\right)=nT\left(r,f\right).\end{aligned}$$

(H) *Posons* $f_0=f,\ f_1=f_0+\dfrac{d}{c},\ f_2=cf_1,\ f_3=\dfrac{1}{f_2},$

$$f_4=\frac{bc-ad}{c}f_3,\ f_5=f_4+\frac{a}{c},si\ c\neq 0,T(r,f_{k+1})=T(r,f_k)+O\left(1\right).$$

D'où le résultat.

1.5 Premier théorème fondamental de R. Nevanlinna

Théorème 1.5.1 *[36, 26] Soit* f *une fonction méromorphe non constante et* $a\in\mathbb{C}$. *Soit le développement de Laurent de* $f\left(z\right)-a$ *autour du point d'origine*

$$f\left(z\right)-a=\sum_{i=m}^{\infty}c_iz^i,\quad c_m\neq 0,m\in\mathbb{Z}.$$

Alors

$$T(r,a,f)=T(r,\frac{1}{f-a})=T(r,f)-\ln|c_m|+\varphi\left(r,a\right),$$

où

$$|\varphi\left(r,a\right)|\leq\ln^{+}|a|+\ln 2.$$

Pour la démonstration de ce théorème on a besoin des résultats suivants.

1.5.1 Théorème de Jensen

Théorème 1.5.2 *[36, 26] Soit f une fonction méromorphe telle que $f\left(0\right)\neq 0,\infty$. Soient $a_1,...,a_n$ les zéros et $b_1,b_2,...,b_n$ les pôles de f, chacun étant compté avec son ordre de multiplicité. Alors*

$$\ln|f\left(0\right)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|d\theta+\sum_{0<|b_j|\leq r}\ln\frac{r}{|b_j|}-\sum_{0<|a_j|\leq r}\ln\frac{r}{|a_j|}.$$

Proposition 1.5.1 *[26] Soit f une fonction méromorphe avec le développement de Laurent*

$$f\left(z\right)=\sum_{i=m}^{\infty}c_iz^i,\quad c_m\neq 0,m\in\mathbb{Z}.$$

Alors

$$\ln|c_m|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|d\theta+N\left(r,f\right)-N\left(r,\frac{1}{f}\right).$$

Lemme 1.5.1 *Soit f une fonction méromorphe avec $a-$point $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ dans le disque $|z|\leq r$, tel que $0<\alpha_1<\alpha_2<...<\alpha_n<r$ étant compté avec son ordre de multiplicité. Alors*

$$\int_0^r\frac{n\left(t,a,f\right)}{t}dt=\int_0^r\frac{n\left(t,a,f\right)-n\left(0,a,f\right)}{t}dt=\sum_{0<|\alpha_j|\leq r}\ln\frac{r}{|\alpha_j|}.$$

Preuve 1.5.1 *On considère la fonction $h\left(z\right)=f\left(z\right)z^{-m}$. Il est clair que $h\left(0\right)\neq 0,\infty$ et*

$$m=n\left(0,0,f\right)-n\left(0,\infty,f\right).$$

En fait, si $m > 0$ alors

$$n(0,0,f) = m \text{ et } n(0,\infty,f) = 0.$$

Si $m < 0$ alors

$$n(0,0,f) = 0 \text{ et } n(0,\infty,f) = -m.$$

Si $m = 0$ alors

$$n(0,0,f) = n(0,\infty,f) = 0.$$

Donc les fonctions f et h on les même zéros et même pôles dans $0 < |z| \leq r$. Du théorème de Jensen et lemme 1.5.1 on a

$$\begin{aligned}
\ln|c_m| &= \ln|h(0)| \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|f\left(re^{i\theta}\right)r^{-m}\right| d\theta + \sum_{0<|b_j|\leq r} \ln\frac{r}{|b_j|} - \sum_{0<|a_j|\leq r} \ln\frac{r}{|a_j|} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta - m\ln r + \int_0^r \frac{n(t,\infty,f) - n(0,\infty,f)}{t}dt \\
&\quad - \int_0^r \frac{n(t,0,f) - n(0,0,f)}{t}dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ln|c_m| &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta - \left[n(0,0,f) - n(0,\infty,f)\right]\ln r \\
&\quad + \int_0^r \frac{n(t,\infty,f) - n(0,\infty,f)}{t}dt - \int_0^r \frac{n(t,0,f) - n(0,0,f)}{t}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta + \int_0^r \frac{n(t,\infty,f) - n(0,\infty,f)}{t}dt + n(0,\infty,f)\ln r \\
&\quad - \left[\int_0^r \frac{n(t,0,f) - n(0,0,f)}{t}dt + n(0,0,f)\ln r\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta + N(r,f) - N\left(r,\frac{1}{f}\right).
\end{aligned}$$

Preuve 1.5.2 *(du Théorème 1.5.1)*

1) Montrons le théorème pour $a = 0$. D'après la proposition 1.5.1, on a

$$\ln|c_m| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta + N(r,f) - N\left(r,\frac{1}{f}\right),$$

D'après les propriétés de $\left(\ln^+\right)$, *on obtient*

$$\begin{aligned}\ln|c_m| &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|} d\theta + N(r,f) - N\left(r,\frac{1}{f}\right)\\ &= m(r,f) - m\left(r,\frac{1}{f}\right) + N(r,f) - N\left(r,\frac{1}{f}\right)\\ &= T(r,f) - T\left(r,\frac{1}{f}\right).\end{aligned}$$

Donc

$$T\left(r,\frac{1}{f}\right) = T(r,f) - \ln|c_m|,$$

avec $\varphi(r,0) = 0$

2) Montrons le théorème pour $a \neq 0$. Posons $h = f - a$, alors

$$\begin{aligned}N\left(r,\frac{1}{h}\right) &= N\left(r,\frac{1}{f-a}\right),\\ N(r,h) &= N(r,f-a) = N(r,f),\\ m\left(r,\frac{1}{h}\right) &= m\left(r,\frac{1}{f-a}\right),\end{aligned}$$

de plus

$$\begin{aligned}\ln^+|h| &= \ln^+|f-a| \leq \ln^+|f| + \ln^+|a| + \ln 2.\\ \ln^+|f| &= \ln^+|f-a+a| = \ln^+|h+a|\\ &\leq \ln^+|h| + \ln^+|a| + \ln 2.\end{aligned}$$

En intégrant les deux membres de 0 *à* 2π*, on trouve*

$$\begin{aligned} m(r,h) &\leq m(r,f)+\ln^+|a|+\ln 2. \\ m(r,f) &\leq m(r,h)+\ln^+|a|+\ln 2. \end{aligned}$$

Posons

$$\varphi(r,a)=m(r,h)-m(r,f).$$

Alors

$$\varphi\left|(r,a)\right|\leq \ln^+|a|+\ln 2.$$

D'après le 1^{er}*cas, on a*

$$\begin{aligned} T\left(r,\frac{1}{h}\right) &= m\left(r,\frac{1}{h}\right)+N\left(r,\frac{1}{h}\right) \\ &= T(r,h)-\ln|c_m| \\ &= m(r,h)+N(r,h)-\ln|c_m| \\ &= m(r,f)+\varphi(r,a)+N(r,f)-\ln|c_m| \\ &= T(r,f)-\ln|c_m|+\varphi(r,a). \end{aligned}$$

Ainsi

$$T(r,a,f)=T(r,\frac{1}{f-a})=T(r,f)-\ln|c_m|+\varphi(r,a),$$

où

$$|\varphi(r,a)|\leq \ln^+|a|+\ln 2.$$

Remarque 1.5.1 *Le premier théorème fondamental peut être exprimé comme suit :*

$$T(r,\frac{1}{f-a})=T(r,f)+O(1)$$

pour tout $a\in\mathbb{C}$*.*

Remarque 1.5.2 *Le premier théorème fondamental reste valable aussi dans le disque* *unité en prenant* $0 < r < 1$.

1.6 Ordre de la croissance d'une fonction méromorphe et entière dans le plan complexe

Définition 1.6.1 *[26, 36] Soit f une fonction entière. Alors l'ordre et l'hyper-ordre de* f *sont définis respectivement par*

$$\sigma(f) = \limsup_{r \longrightarrow +\infty} \frac{\log\log M(r,f)}{\log r}$$

et

$$\sigma_2(f) = \limsup_{r \longrightarrow +\infty} \frac{\log\log\log M(r,f)}{\log r},$$

où $M(r,f) = \max_{|z|=r} |f(z)|$. *Si* f *est une fonction méromorphe, alors l'ordre et l'hyper-ordre de* f *sont définis respectivement par*

$$\sigma(f) = \limsup_{r \longrightarrow +\infty} \frac{\log T(r,f)}{\log r}$$

et

$$\sigma_2(f) = \limsup_{r \longrightarrow +\infty} \frac{\log\log T(r,f)}{\log r},$$

où $T(r,f)$ *est la fonction caractéristique de* f.

Exemple 1.6.1 *La fonction* $f(z) = \exp\{\exp z\}$ *est d'ordre* $\sigma(f) = \infty$ *et d'hyper ordre* $\sigma_2(f) = 1$.

Lemme 1.6.1 *[36] Si* f *est une fonction méromorphe non constante dans* $\mathbb{C}$, *alors* $\sigma(f^{(k)}) = \sigma(f)$.

Définition 1.6.2 *La fonction* $a(z)$ *est appelée fonction de petite croissance par rapport à* f *si* $a(z)$ *est une fonction méromorphe satisfaisant* $T(r,a) = S(r,f)$, *c'est-*

à-dire $T(r,a) = o(T(r,f))$ *quand* $r \to \infty$ *à l'extérieur d'un ensemble de mesure linéaire finie.*

Définition 1.6.3 *[37, 40, 42] Soit* f *une fonction méromorphe. On définit l'exposant de convergence des zéros de la fonction* f *par*

$$\lambda\left(f\right) = \limsup_{r \longrightarrow +\infty} \frac{\log N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r}$$

où

$$N\left(r, \frac{1}{f}\right) = \int_{0}^{r} \frac{n\left(t, \frac{1}{f}\right) - n\left(0, \frac{1}{f}\right)}{t} dt + n\left(0, \frac{1}{f}\right) \log r,$$

$n\left(t, \frac{1}{f}\right)$ *désigne le nombre des zéros de la fonction* f *situés dans le disque* $|z| \leq t$ *et l'exposant de convergence des zéros distincts de la fonction* f *par*

$$\overline{\lambda}\left(f\right) = \limsup_{r \longrightarrow +\infty} \frac{\log \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r}$$

où

$$\overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) = \int_{0}^{r} \frac{\overline{n}\left(t, \frac{1}{f}\right) - \overline{n}\left(0, \frac{1}{f}\right)}{t} dt + \overline{n}\left(0, \frac{1}{f}\right) \log r,$$

$\overline{n}\left(t, \frac{1}{f}\right)$ *désigne le nombre des zéros distincts de la fonction* f *situés dans le disque* $|z| \leq t$.

De même on définit l'exposant n-itératif de convergence des zéros de la fonction f par

$$\lambda_n\left(f\right) = \limsup_{r \longrightarrow +\infty} \frac{\log_n N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r};$$

et des zéro distingue par

$$\overline{\lambda}_n\left(f\right) = \limsup_{r \longrightarrow +\infty} \frac{\log_n \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r}.$$

Exemple 1.6.2 *L'exposant de convergence des zéros distincts de la fonction* $f(z) = e^z - 1$ *est égal à* 1.

1.7 Ordre de la croissance d'une fonction méromorphe et analytique dans le disque unité

Dans la suite, on donne les définitions de l'ordre et du type d'une fonction analytique et méromorphe dans le disque unité $D = \{z : |z| < 1\}$.

Définition 1.7.1 *[28] Soit* f *une fonction analytique dans le disque* $D = \{z : |z| < 1\}$. *Alors l'ordre et l'hyper-ordre de* f *sont définis respectivement par*

$$\sigma_M(f) = \limsup_{r\to 1^-} \frac{\log^+ \log^+ M(r,f)}{-\log(1-r)},$$

$$\sigma_{M,2}(f) = \limsup_{r\to 1^-} \frac{\log^+ \log^+ \log^+ M(r,f)}{-\log(1-r)},$$

où $M(r,f) = \max\{|f(z)|, |z| = r\}$. *Si* f *est une fonction méromorphe sur* D, *alors l'ordre et l'hyper-ordre de* f *sont définis par*

$$\sigma(f) = \limsup_{r\to 1^-} \frac{\log^+ T(r,f)}{-\log(1-r)}$$

et

$$\sigma_2(f) = \limsup_{r\to 1^-} \frac{\log^+ \log^+ T(r,f)}{-\log(1-r)},$$

où $T(r,f)$ *est la fonction caractéristique de* f.

Définition 1.7.2 *[30] Soit* f *une fonction méromorphe. On définit l'ordre* n*-itératif de croissance de la fonction* f *par*

$$\sigma_n(f) = \limsup_{r\to 1^-} \frac{\log_n^+ T(r,f)}{-\log(1-r)},$$

où $\log_1^+(x) = \log^+(x) = \max\{\log x, 0\}$, $\log_{n+1}^+(x) = \log^+\log_n^+(x)$ *où* $T(r,f)$ *est la fonction caractéristique de Nevanlinna. Si* f *est analytique, alors l'ordre* n*-itératif de la fonction* f *est défini par*

$$\sigma_{M,n}(f) = \limsup_{r\to 1^-} \frac{\log_{n+1}^+ M(r,f)}{-\log(1-r)}.$$

Remarque 1.7.1 *Si* f *est analytique dans* D*, Tsuji [41, p.205] a montré que*

$$\sigma_1(f) \leq \sigma_{M,1}(f) \leq \sigma_1(f) + 1, \tag{1.1}$$

et $\sigma_n(f) = \sigma_{M,n}(f)$ *pour* $n \geq 2$ *d'après la [36, Proposition 2.2.2].*

Les inégalités (1.1) sont les meilleures estimations possible dans le sens où ils existent des fonctions analytiques g et h telles que $\sigma_{M,1}(g) = \sigma_1(g)$ *et* $\sigma_{M,1}(h) = \sigma_1(h) + 1$.

De toute évidence, on a

$$\sigma(f) < \infty \text{ si et seulement si } \sigma_M(f) < \infty.$$

Exemple 1.7.1 *Pour la fonction* $f(z) = \exp\left\{\dfrac{1}{(1-z)^\mu}\right\}$, $(\mu \geq 1)$, *on a* $\sigma_1(f) = \mu - 1$ *et* $\sigma_{M,1}(f) = \mu$*. Par contre, pour la fonction* $f(z) = \exp\left\{\frac{1}{z-1}\right\}$, *on a*

$$\sigma(f) = \sigma_M(f) = 0.$$

Exemple 1.7.2 *Soit la fonction* $f(z) = \exp\exp\left\{\frac{1}{(1-z)^2}\right\}$. *Alors*

$$\sigma_2(f) = \sigma_{2,M}(f) = 2.$$

Exemple 1.7.3 *Pour la fonction* $f(z) = \exp_5 \left\{ \frac{1}{(1-z)} \right\}$

$$\sigma_n(f) = \begin{cases} +\infty \ \ si \ n < 5, \\ 1 \quad si \ n = 5, \\ 0 \quad si \ n > 5. \end{cases}$$

Définition 1.7.3 *[38] Soit f une fonction méromorphe dans le disque unité D. On définit l'exposant n-itératif de convergence des zéros de la fonction f par*

$$\lambda_n(f) = \limsup_{r \to 1^-} \frac{\log_n N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{-\log(1-r)},$$

et l'exposant n-itératif de convergence des zéros distincts de la fonction f par

$$\overline{\lambda}_n(f) = \limsup_{r \to 1^-} \frac{\log_n \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)}{-\log(1-r)}.$$

Définition 1.7.4 *[38] Soit f une fonction méromorphe dans D, d'ordre n-itératif $\sigma_n(f)$ $(0 < \sigma_n(f) < +\infty)$. Alors le type n-itératif de croissance de f est défini par*

$$\tau_n(f) = \limsup_{r \to 1^-} (1-r)^{\sigma_n} \log_{n-1}^+ T(r, f); (n \geq 1 \ \textit{est un entier})$$

Si f est une fonction analytique sur D, d'ordre n-itératif $\sigma_{M,n}(f)$ $(0 < \sigma_{M,n}(f) < +\infty)$, alors le type n-itératif de la fonction f est défini par

$$\tau_{M,n}(f) = \limsup_{r \to 1^-} (1-r)^{\sigma_{M,n}} \log_n^+ M(r, f). (n \geq 1 \ \textit{est un entier}).$$

Remarque 1.7.2 *A noter que par [36, Proposition 2.2.2], on a $\tau_n(f) = \tau_{M,n}(f)$ pour $n \geq 3$.*

Définition 1.7.5 *[28] Une fonction f méromorphe dans le disque unité D est ap-*

pelée admissible si

$$\limsup_{r\to 1^-}\frac{T(r,f)}{-\log(1-r)}=\infty$$

et non admissible si

$$\limsup_{r\to 1^-}\frac{T(r,f)}{-\log(1-r)}<\infty.$$

Définition 1.7.6 *L'indice de croissance d'ordre n-itératif d'une fonction méromorphe f est définit par*

$$i(f)=\begin{cases}0 & si\ f\ \ non\ admissible,\\ \min\{n\in\mathbb{N}:\sigma_n(f)<\infty\} & si\ f\ admissible,\\ \infty & si\ \sigma_n(f)=\infty\ pour\ tout\ n\in N.\end{cases}$$

Définition 1.7.7 *L'indice de la croissance de l'exposant de convergence de la fonction méromorphe $f(z)$ est définie par*

$$i_\lambda(f)=\begin{cases}0 & si\ N\left(r,\frac{1}{f}\right)=O\left(\log\frac{1}{1-r}\right)\\ \min\{n\in\mathbb{N}:\lambda_n(f)<\infty\} & si\ \log\frac{1}{1-r}=o\left(N\left(r,\frac{1}{f}\right)\right)\\ \infty & si\ \lambda_n(f)=\infty\ pour\ tout\ n\in\mathbb{N}.\end{cases}$$

On peut définir $i_{\overline{\lambda}}(f)$ par le même procédé de $i_\lambda(f)$.

Lemme 1.7.1 *[8] Si f est une fonction méromorphe non constante dans le disque unité, alors $\sigma(f^{(k)})=\sigma(f)$.*

1.8 Mesure linéaire et logarithmique

Définition 1.8.1 *La mesure linéaire d'un ensemble $E\subset[0,+\infty)$ est définie par*

$$m(E)=\int_0^{+\infty}\chi_E(t)\,dt,$$

où $\chi_E(t)$ *est la fonction caractéristique de l'ensemble* E *et la mesure logarithmique d'un ensemble* $F \subset [1, +\infty)$ *est définie par*

$$lm(F) = \int_1^{+\infty} \frac{\chi_F(t)}{t} dt$$

Exemple 1.8.1 *Pour* $E = [1, 2]$*, on a* $m(E) = 1; lm(E) = \ln 2.$

Définition 1.8.2 *La mesure logarithmique d'un ensemble* $E \subset (0, 1)$ *dans le disque unité est définie par*

$$\int\limits_E \frac{dr}{1 - r}.$$

Exemple 1.8.2 *La mesure logarithmique de l'ensemble* $E = \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]$ *dans le disque unité est égale à* $\ln \frac{3}{2}$.

Parmi les résultats remarquables des dérivées logarithmiques, on cite les résultats suivants.

Lemme 1.8.1 *[26] Soient* f *une fonction méromorphe transcendante et* $k \geq 1$ *un entier positif. Alors*

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = O\left(\log\left(rT(r, f)\right)\right)$$

à l'extérieur d'un ensemble exceptionnel E *de mesure linéaire finie. Si* f *est d'ordre fini, alors*

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = O\left(\log r\right).$$

Lemme 1.8.2 *[28] Soient* f *une fonction méromorphe dans le disque unité et* $k \geq 1$ *un entier positif. Alors*

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = O\left(\log^+ T(r, f) + \log \frac{1}{1 - r}\right),$$

où $r \notin E \subset (0,1)$ *de mesure logarithmique finie,* $\int\limits_{E} \frac{dr}{1-r} < \infty$*. Si* f *est d'ordre fini, alors*

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = O\left(\log \frac{1}{1-r}\right).$$

Chapitre 2

Exposant itératif de convergence de $\left(f^{(i)}-\varphi\right)$ des équations différentielles linéaires dans le disque unité

2.1 Introduction et présentation des résultats

Xu, Tu et Zheng ont étudié la relation entre les petites fonctions et les dérivées des solutions d'équations différentielles d'ordre supérieur:

$$f^{(k)}+A_{k-1}(z)\,f^{(k-1)}+...+A_1(z)\,f'+A_0(z)\,f=0, \tag{2.1}$$

où $A_j(z)$ sont des fonctions entières ou méromorphes dans le plan complexe, et ils ont obtenu le résultat suivant.

Théorème 2.1.1 *[45] Soient* $A_j(z)$ $j=0,1,...,k-1$ *des fonctions entières d'ordre fini et satisfaisants aux conditions suivantes:*
(i) $\max\{\sigma(A_j):j=1,2,...,k-1\}<\sigma(A_0)<\infty$*;*

(ii) $0 < \sigma(A_{k-1}) = ... = \sigma(A_1) = \sigma(A_0) < \infty$ *et* $\max\{\tau(A_j) : j = 1, 2, ..., k-1\} = \tau_1 < \tau(A_0) = \tau$*;*

Alors pour chaque solution $f \not\equiv 0$ *de (2.1) et pour toute fonction entière* $\varphi(z) \not\equiv 0$ *satisfaisant* $\sigma_2(\varphi) < \sigma(A_0)$*, on a*

$$\overline{\lambda}_2(f - \varphi) = \overline{\lambda}_2(f' - \varphi) = \overline{\lambda}_2(f'' - \varphi) = \overline{\lambda}_2\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \sigma_2(f) = \sigma(A_0) \quad (i \in \mathbb{N}).$$

Par la suite, Tu, Xuan et Xu ont amélioré ce résultat en substituant aux fonctions entières d'ordre fini des fonctions entières d'ordre itératif fini de l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$f'' + A(z) f' + B(z) f = 0 \tag{2.2}$$

et ils ont obtenus les deux théorèmes suivants.

Théorème 2.1.2 *[43] Soient* $A(z)$ *et* $B(z)$ *deux fonctions entières d'ordres itératifs finies satisfaisant* $\sigma_n(A) < \sigma_n(B)$ *ou* $0 < \sigma_n(A) = \sigma_n(B) < \infty$ *et* $0 \leq \tau_n(A) < \tau_n(B) \leq \infty$*. Alors, pour chaque solution* $f \not\equiv 0$ *de (2.2) et pour toute fonction entière* $\varphi(z) \not\equiv 0$ *satisfaisant* $\sigma_{n+1}(\varphi) < \sigma_n(B)$*, on a*

$$\overline{\lambda}_{n+1}(f - \varphi) = \overline{\lambda}_{n+1}\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \sigma_{n+1}(f) = \sigma_n(B), \; i \in \mathbb{N}.$$

Théorème 2.1.3 *[43] Soient* $A(z)$ *et* $B(z)$ *deux fonctions entières d'ordres itératifs finies satisfaisant* $i(A) < i(B) = n$*.Alors pour tout* $f \not\equiv 0$ *solution de (2.2) et pour toute fonction entière* $\varphi(z)$ *satisfaisant* $i(\varphi) \leq n$*, on a*

(i) $i_{\overline{\lambda}}\left(f^{(i)} - \varphi\right) = i_\lambda\left(f^{(i)} - \varphi\right) = i\left(f^{(i)} - \varphi\right) = n + 1 \; (i = 0, 1, 2, ...)$;

(ii) $\overline{\lambda}_{n+1}\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \lambda_{n+1}\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \sigma_{n+1}\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \sigma_n(B), \; (i = 0, 1, 2, ...)$.

Bouabdelli et Belaïdi ont étendu ces résultats, en utilisant la notion de l'ordre itératif, pour les équations différentielles linéaires d'ordre supérieur à coefficients entières ou méromorphes, voir [6].

Dans ce chapitre, on se consacrera à étudier l'analogue de ces résultats dans le disque unité pour les équations différentielles linéaires à coefficients analytiques ou méromorphes, et en extraire les affinités et les résultats sous-jacents qui en résulte des deux théories. Ensuite, on donnera quelques exemples illustratifs. On commence par énnocer lés théorèmes élaborés pour l'étude du problème posé.

Théorème 2.1.4 *Soient* $A_j(z)$ $j = 0, 1, ..., k-1$ *des fonctions analytiques dans le disque unité* D *tel que* $i(A_0) = n,\ 0 < \sigma_n(A_0) = \sigma < \infty,\ (n \geq 2,\ n \in \mathbb{N})$, *et pour tout* $j \in \{1, ..., k-1\}$, $A_j(z)$ *satisfait aux conditions suivantes:*

(1) $i(A_j) < i(A_0)$;

(2) $i(A_j) = i(A_0)$ *et* $\sigma_n(A_j) < \sigma_n(A_0)$;

(3) $i(A_j) = i(A_0)$, $\sigma_n(A_j) = \sigma_n(A_0)$ *et* ($\tau_{M,n}(A_j) < \tau_{M,n}(A_0) < \infty$ *ou* $\tau_n(A_j) < \tau_n(A_0) < \infty$).

Alors, pour chaque solution $f \not\equiv 0$ *de (2.1) et pour toute fonction analytique* $\varphi(z) \not\equiv 0$ *dans le disque unité* D *satisfaisant à l'une au moins des deux conditions suivantes :*

$$i(\varphi) \leq n \ ou (i(\varphi) = n+1 \ et\ \sigma_{n+1}(\varphi) < \sigma_n(A_0)), \tag{2.3}$$

on a

(a) $i_{\overline{\lambda}}\left(f^{(i)} - \varphi\right) = i_\lambda\left(f^{(i)} - \varphi\right) = i\left(f^{(i)} - \varphi\right) = n+1$ *(pout tout* $i \in \mathbb{N}$*);*

(b) $\overline{\lambda}_{n+1}\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \lambda_{n+1}\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \sigma_{n+1}(f) = \sigma_n(A_0)$, *(pour tout* $i \in \mathbb{N}$*);*

où $f^{(0)} = f$.

Théorème 2.1.5 *Soient* $A_j(z)$ $j = 0, 1, ..., k-1$ *des fonctions analytiques dans le disque unité* D *telles que* $i(A_0) = n,\ \sigma_n(A_0) = 0\ (n \geq 2,\ n \in \mathbb{N})$ *et* $i(A_j) < i(A_0)$ *pour chaque* $j \in \{1, ..., k-1\}$ *.Alors, pour chaque solution* $f \not\equiv 0$ *de (2.1) et pour toute fonction analytique* $\varphi(z) \not\equiv 0$ *dans le disque unité* D *satisfaisant*

$i(\varphi) \leq n$, *on a*

(a) $i_{\overline{\lambda}}\left(f^{(i)} - \varphi\right) = i_\lambda\left(f^{(i)} - \varphi\right) = i\left(f^{(i)} - \varphi\right) = n+1$ *(pout tout* $i \in \mathbb{N}$*);*

(b) $\overline{\lambda}_{n+1}\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \lambda_{n+1}\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \sigma_{n+1}(f) = 0$, *(pout tout* $i \in \mathbb{N}$*).*

Maintenant, dans le cas où les coefficients de (2.1) sont méromorphes dans le disque unité alors, on a le théoreme suivant :

Théorème 2.1.6 *Soient $A_j(z)$ $j = 0, 1, ..., k-1$ des fonctions méromorphes dans le disque unité D telles que $\delta(\infty, A_0) = \liminf\limits_{r\to 1^-} \frac{m(r,A_0)}{T(r,A_0)} > 0$, $i(A_0) = n$, $0 < \sigma_n(A_0) = \sigma < \infty$, $0 < \tau_n(A_0) = \tau < \infty$, $(n \geq 2,\ n \in \mathbb{N})$, et pour chaque $j \in \{1, ..., k-1\}$, $A_j(z)$ satisfait aux conditions suivantes:*
(1) $i(A_j) < i(A_0)$;
(2) $i(A_j) = i(A_0)$ et $\sigma_n(A_j) < \sigma_n(A_0)$;
(3) $i(A_j) = i(A_0)$, $\sigma_n(A_j) = \sigma_n(A_0)$ et $\tau_n(A_j) < \tau_n(A_0)$.
Alors, pour chaque solution méromorphe $f \not\equiv 0$ de (2.1) et pour toute fonction méromorphe $\varphi(z) \not\equiv 0$ dans le disque unité D satisfaisant (2.3),on a
(a) $i_{\overline{\lambda}}\left(f^{(i)} - \varphi\right) = i_\lambda\left(f^{(i)} - \varphi\right) = i\left(f^{(i)} - \varphi\right) = n+1$ (pour tout $i \in \mathbb{N}$);
(b) $\overline{\lambda}_{n+1}\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \lambda_{n+1}\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \sigma_{n+1}(f) \geq \sigma_n(A_0)$, (pour tout $i \in \mathbb{N}$).

Remarque 2.1.1 *Dans ces résultats, on a pris $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$; le cas $n = 1$ a été étudié en détail par Berrighi et Hamouda dans [4].*

Exemple 2.1.1 *Considérons l'équation différentielle:*

$$f''' + A_2(z) f'' + A_1(z) f' + A_0(z) f = 0.$$

telle que $A_0(z) = \exp\left(\exp\left(\frac{1}{(1-z)^4}\right)\right)$, $A_1(z) = \exp\left(\frac{1}{(1-z)^3}\right)$ *et* $A_2(z) = \exp\left(\frac{1}{(1-z)^2}\right)$ *on a*
$i(A_0(z)) = 2$, $i(A_j(z)) = 1$, $j = 1, 2$; $\varphi(z) = \exp\left(\frac{1}{(1-z)^3}\right)$, $i(\varphi) = 1$, $\sigma_2(\varphi) = 0$ et $\sigma_2(A_0(z)) = 4$
Donc, les conditions du Théorème 2.1.4 sont vérifiées. Alors chaque solution $f \neq 0$ de cette équation différentielle vérifie
(a) $i_{\overline{\lambda}}\left(f^{(i)} - \varphi\right) = i_\lambda\left(f^{(i)} - \varphi\right) = i\left(f^{(i)} - \varphi\right) = 3$;
(b) $\overline{\lambda}_3\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \lambda_3\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \sigma_3(f) = \sigma_2(A_0)$.

Exemple 2.1.2 *Considérons l'équation différentielle:*

$$f'' + A_1(z) f' + A_0(z) f = 0.$$

telle que $A_0(z) = \frac{1}{z}\exp_3\left(\frac{2}{1-z}\right)$ *et* $A_1(z) = \frac{1}{z^2}\exp_3\left(\frac{1}{1-z}\right)$ *on a*
$i(A_0(z)) = 3,\ i(A_1(z)) = 3,\ \sigma_3(A_0) = \sigma_3(A_1) = 1,\ \tau_3(A_1) = 1 < \tau_3(A_0) = 2$ *on a*
$\delta(\infty, A_0) = \liminf\limits_{r\to 1^-} \frac{m(r,A_0)}{T(r,A_0)} = 1$

et $\varphi(z) = \exp\left(\frac{1}{(1-z)^2}\right),\ i(\varphi) = 1,\ \sigma_2(\varphi) = 0$

Donc, les conditions du Théorème 2.1.6 sont vérifiées. Alors chaque solution méromorphe $f \neq 0$ *de cette équation différentielle vérifie*
(a) $i_{\overline{\lambda}}\left(f^{(i)} - \varphi\right) = i_{\lambda}\left(f^{(i)} - \varphi\right) = i\left(f^{(i)} - \varphi\right) = 3$
(b) $\overline{\lambda}_3\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \lambda_3\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \sigma_3(f) \geq \sigma_2(A_0)$,

Dans la section suivante, nous allons cités les lemmes nécessaires pour les démonstrations des théorèmes cités au dessus.

2.2 Lemmes préliminaires

Tout au long de cette partie, on utilisera les notations suivantes qui ne sont pas nécessairement les mêmes à chaque occurrence:
$E \subset (0,1)$ est un ensemble de mesure logarithmique finie, $\int\limits_E \frac{dr}{1-r} < \infty$.
$F \subset (0,1)$ est un ensemble de mesure logarithmique infinie, $\int\limits_F \frac{dr}{1-r} = \infty$.
De plus, $c > 0,\ \varepsilon > 0,\ \sigma \geq 0,\ \sigma_1 \geq 0,\ \tau \geq 0,\ \tau_1 \geq 0$, sont des constantes réelles.

Lemme 2.2.1 *[45] Supposons que* $f \not\equiv 0$ *est une solution de (2.1).Soit* $g = f - \varphi$*; alors* g *satisfait l'équation*

$$g^{(k)} + A_{k-1}g^{(k-1)} + ... + A_0 g = -\left[\varphi^{(k)} + A_{k-1}\varphi^{(k-1)} + ... + A_0\varphi\right]. \tag{2.4}$$

Lemme 2.2.2 *[45] Supposons que* $f \not\equiv 0$ *est une solution de (2.1).Soit* $g_i = f^{(i)} -$

φ, $(i \in \mathbb{N} - \{0\})$; *alors* g_i *satisfait l'équation*

$$g_i^{(k)} + U_{k-1}^i g_i^{(k-1)} + ... + U_0^i g_i = -\left[\varphi^{(k)} + U_{k-1}^i \varphi^{(k-1)} + ... + U_0^i \varphi\right], \tag{2.5}$$

où

$$U_j^i = \left(U_{j+1}^{i-1}\right)' + U_j^{i-1} - \frac{\left(U_0^{i-1}\right)'}{U_0^{i-1}} U_{j+1}^{i-1}, \tag{2.6}$$

$j = 0, 1, ..., k-1$, $U_j^0 = A_j$ *et* $U_k^i \equiv 1$.

Lemme 2.2.3 *Soit* $h : (0,1) \to (c, \infty)$ $(c > 0)$ *une fonction monotone croissante telle que*

$$\limsup_{r \to 1^-} \frac{\log_n^+ h(r)}{-\log(1-r)} = \alpha, \tag{2.7}$$

(α *est une valeur finie ou infinie); alors il existe un ensemble* $F \subset (0,1)$ *de mesure logarithmique infinie telle que pour tout* $r \in F$ *, on a*

$$\lim_{r \to 1^-} \frac{\log_n^+ h(r)}{-\log(1-r)} = \alpha.$$

Preuve 2.2.1 *D'après (2.7), Il existe une suite croissante* $\{r_m\} \to 1^-$ *lorsque* $m \to \infty$, *satisfaisant* $1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)(1 - r_m) < r_{m+1}$ *et*

$$\lim_{r_m \to 1^-} \frac{\log_n^+ h(r_m)}{-\log(1-r_m)} = \alpha.$$

Alors, il existe m_0 *tel que pour tout* $m \geq m_0$ *et* $r \in I_m = \left[r_m, 1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)(1 - r_m)\right]$ *, on a*

$$\frac{\log_n^+ h(r_m)}{-\log\left[\left(1 - \frac{1}{m}\right)(1 - r_m)\right]} \leq \frac{\log_n^+ h(r)}{-\log(1-r)} \leq \frac{\log_n^+ h\left(1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)(1 - r_m)\right)}{-\log(1-r_m)}. \tag{2.8}$$

La limite des deux côtés de(2.8),lorsque $r_m \to 1^-$,*est égal à* α; *Donc, pour* $r \in I_m$

$$\lim_{r \to 1^-} \frac{\log_n^+ h(r)}{-\log(1-r)} = \alpha.$$

Soit $F = \bigcup_{m=m_0}^{\infty} I_m$*.on a*

$$m_l\left(F\right) = \sum_{m=m_0}^{\infty} \int_{I_m} \frac{dr}{1-r} = \sum_{m=m_0}^{\infty} \log\left(\frac{m}{m-1}\right) = \infty.$$

Lemme 2.2.4 *[15] Soit f une fonction méromorphe dans D tel que $f^{(j)}$ne soit pas identiquement nulle. Soit $\varepsilon > 0$ une constante; k et j des entiers qui satisfont à $k > j \geq 0$ et $d \in (0,1)$. Alors, on a*

$$\left|\frac{f^{(k)}\left(z\right)}{f^{(j)}\left(z\right)}\right| \leq \left(\left(\frac{1}{1-|z|}\right)^{(2+\varepsilon)} \max\left\{\log\frac{1}{1-|z|}, T\left(s\left(|z|\right), f\right)\right\}\right)^{k-j}, \ |z| \notin E,$$

où $s\left(|z|\right) = 1 - d\left(1-|z|\right)$.

Dans le cas particulier: $\sigma_1\left(f\right) < \infty$*, on a*

$$\left|\frac{f^{(k)}\left(z\right)}{f^{(j)}\left(z\right)}\right| \leq \left(\frac{1}{1-|z|}\right)^{(k-j)(\sigma_1+2+\varepsilon)}, \ |z| \notin E;$$

et si $\sigma_n\left(f\right) < \infty$ *pour* $n \geq 2$*, alors*

$$\left|\frac{f^{(k)}\left(z\right)}{f^{(j)}\left(z\right)}\right| \leq \exp_{n-1}\left\{\left(\frac{1}{1-|z|}\right)^{\sigma_n+\varepsilon}\right\}, \ |z| \notin E;$$

où $\exp_1\left(x\right) = \exp\left(x\right)$ *et* $\exp_{n+1}\left(x\right) = \exp\left\{\exp_n\left(x\right)\right\}.$

Lemme 2.2.5 *[25] Soit $f(z)$ une fonction analytique dans le disque unité D avec $\sigma_{M,n}\left(f\right) = \sigma_n$, $\tau_{M,n}\left(f\right) = \tau_n$, $0 < \sigma_n < \infty$, $0 < \tau_n < \infty$, alors pour toute donnée $0 < \beta < \tau_n$, il existe un ensemble $F \subset (0,1)$ de mesure logarithmique infinie telle que pour tout $r \in F$ on a*

$$\log_n^+ M\left(r, f\right) > \frac{\beta}{\left(1-r\right)^{\sigma_n}}.$$

Par le même procédé utilisé dans la preuve du lemme 2.2.5, nous pouvons obtenir les deux lemmes suivants.

Lemme 2.2.6 *Soit f une fonction analytique dans le disque unité D avec $\sigma_{M,n}(f) = \sigma_n$,$0 < \sigma_n < \infty$, alors pour toute donnée $0 < \beta < \sigma_n$, il existe un ensemble $F \subset (0,1)$ de mesure logarithmique infinie telle que pour tout $r \in F$ on a*

$$\log_n^+ M(r,f) > \frac{1}{(1-r)^\beta}.$$

Lemme 2.2.7 *Soit f une fonction méromorphe dans le disque unité D avec $\sigma_n(f) = \sigma_n$, $\tau_n(f) = \tau_n$, $0 < \sigma_n < \infty$, $0 < \tau_n < \infty$, alors pour toute donnée $0 < \beta < \tau_n$, il existe un ensemble $F \subset (0,1)$ de mesure logarithmique infinie telle que pour tout $r \in F$ on a*

$$\log_{n-1}^+ T(r,f) > \frac{\beta}{(1-r)^{\sigma_n}}.$$

Lemme 2.2.8 *Soient $A_j(z)$ $j = 0,1,...,k-1$ des fonctions analytiques dans D telles que: $i(A_0) = n$, $0 < \sigma_n(A_0) = \sigma < \infty$, $0 < \tau_{M,n}(A_0) = \tau < \infty$ $(n \geq 2,\ n \in \mathbb{N})$ et pour chaque $j \in \{1,...,k-1\}$, $A_j(z)$ satisfait aux conditions suivantes:*
(1) $i(A_j) < i(A_0)$;
(2) $i(A_j) = i(A_0)$ et $\sigma_n(A_j) < \sigma_n(A_0)$;
(3) $i(A_j) = i(A_0)$, $\sigma_n(A_j) = \sigma_n(A_0)$ et $\tau_{M,n}(A_j) < \tau_{M,n}(A_0)$.
et U_j^i $(j = 0,1,...,k)$ $(i \in \mathbb{N})$ comme dans (2.6). Alors, pour toute donnée ε $(0 < 2\varepsilon < \tau - \tau_1)$, il existe un ensemble F de mesure logarithmique infinie telle que pour $|z| = r \in F$ et $|A_0(z)| = M(r,A_0)$ on ait

$$\left|U_0^i\right| \geq \exp_n\left\{\frac{\tau-\varepsilon}{(1-r)^\sigma}\right\} \quad et \quad \left|U_j^i\right| \leq \exp_n\left\{\frac{\tau_1+\varepsilon}{(1-r)^\sigma}\right\},\ (j \neq 0) \tag{2.9}$$

où $\tau_1 = \max\{\tau_{M,n}(A_j) : j \neq 0\}$. S'il n'existent pas de coefficients satisfaisants à la condition (3), alors on posera $\tau_1 = 0$.

Preuve 2.2.2 *Supposons que nous voulons prouver (2.9 pour $i = m \geq 1$. Par le lemme 2.2.5, il existe un ensemble F de mesure logarithmique infinie telle que pour*

$|z| = r \in F$ et $|A_0| = M(r, A_0)$ on a

$$|A_0| \geq \exp_n \left\{ \frac{\tau - \varepsilon/2^m}{(1-r)^\sigma} \right\} \quad et \ \ |A_j| \leq \exp_n \left\{ \frac{\tau_1 + \varepsilon/2^m}{(1-r)^\sigma} \right\}.$$

De (2.6), on a $U_j^1 = A'_{j+1} + A_j - \frac{A'_0}{A_0} A_{j+1} = A_j + A_{j+1} \left(\frac{A'_{j+1}}{A_{j+1}} - \frac{A'_0}{A_0} \right)$ $(j = 0, 1, ..., k-1)$ et $A_k \equiv 1$. alors

$$\left| U_0^1 \right| \geq |A_0| - |A_1| \left(\left| \frac{A'_1}{A_1} \right| + \left| \frac{A'_0}{A_0} \right| \right) \tag{2.10}$$

et

$$\left| U_j^1 \right| \leq |A_j| + |A_{j+1}| \left(\left| \frac{A'_{j+1}}{A_{j+1}} \right| + \left| \frac{A'_0}{A_0} \right| \right) \ (j \neq 0). \tag{2.11}$$

D'après Lemme (2.2.4) et (2.10)-(2.11), on déduit que

$$\left| U_0^1 \right| \geq \exp_n \left\{ \frac{\tau - \varepsilon/2^m}{(1-r)^\sigma} \right\} - 2 \exp_n \left\{ \frac{\tau_1 + \varepsilon/2^m}{(1-r)^\sigma} \right\} \exp_{n-1} \left\{ \frac{1}{(1-r)^{\sigma+\varepsilon}} \right\}$$

$$\left| U_0^1 \right| \geq \exp_n \left\{ \frac{\tau - \varepsilon/2^{m-1}}{(1-r)^\sigma} \right\}, \tag{2.12}$$

et

$$\left| U_j^1 \right| \leq \exp_n \left\{ \frac{\tau_1 + \varepsilon/2^m}{(1-r)^\sigma} \right\} + 2 \exp_n \left\{ \frac{\tau_1 + \varepsilon/2^m}{(1-r)^\sigma} \right\} \exp_{n-1} \left\{ \frac{1}{(1-r)^{\sigma+\varepsilon}} \right\}$$

$$\left| U_j^1 \right| \leq \exp_n \left\{ \frac{\tau_1 + \varepsilon/2^{m-1}}{(1-r)^\sigma} \right\}, \quad j \neq 0, \tag{2.13}$$

Maintenant, pour $i = 2$ dans (2.6), on a

$$\left| U_0^2 \right| \geq \left| U_0^1 \right| - \left| U_1^1 \right| \left(\left| \frac{(U_1^1)'}{U_1^1} \right| + \left| \frac{(U_0^1)'}{U_0^1} \right| \right), \tag{2.14}$$

et

$$\left| U_j^2 \right| \leq \left| U_j^2 \right| + \left| U_{j+1}^2 \right| \left(\left| \frac{(U_{j+1}^2)'}{U_{j+1}^2} \right| + \left| \frac{(U_0^2)'}{U_0^2} \right| \right), \quad j \neq 0. \tag{2.15}$$

De (2.12)-(2.15), on déduit

$$\left|U_0^2\right| \geq \exp_n\left\{\frac{\tau-\varepsilon/2^{m-2}}{(1-r)^{\sigma}}\right\} \quad et \quad \left|U_j^2\right| \leq \exp_n\left\{\frac{\tau_1+\varepsilon/2^{m-2}}{(1-r)^{\sigma}}\right\}. \tag{2.16}$$

D'après (2.16) et pour $i=3$ dans (2.6), on déduit

$$\left|U_0^3\right| \geq \exp_n\left\{\frac{\tau-\varepsilon/2^{m-3}}{(1-r)^{\sigma}}\right\} \quad \text{et} \quad \left|U_j^3\right| \leq \exp_n\left\{\frac{\tau_1+\varepsilon/2^{m-3}}{(1-r)^{\sigma}}\right\}.$$

en réitérant le procédé à l'ordre $i=m$, on déduit

$$\left|U_0^i\right| \geq \exp_n\left\{\frac{\tau-\varepsilon}{(1-r)^{\sigma}}\right\} \quad \text{et} \quad \left|U_j^i\right| \leq \exp_n\left\{\frac{\tau_1+\varepsilon}{(1-r)^{\sigma}}\right\}.$$

Remarque 2.2.1 *Dans le Lemme 2.2.8, si nous remplaçons la condition $\tau_{M,n}(A_j) < \tau_{M,n}(A_0)$ par, $\tau_n(A_j) < \tau_n(A_0)$, puis par une méthode similaire utilisée précèdement nous pouvons obtenir, au lieu de (2.9), le resultat suivant*

$$m\left(r, U_0^i\right) \geq \exp_{n-1}\left\{\frac{\tau-\varepsilon}{(1-r)^{\sigma}}\right\} \quad et \quad m\left(r, U_j^i\right) \leq \exp_{n-1}\left\{\frac{\tau_1+\varepsilon}{(1-r)^{\sigma}}\right\}, \ (j \neq 0),$$

où $\tau = \tau_n(A_0)$ et $\tau_1 = \max\{\tau_n(A_j) : j \neq 0\}$.

Remarque 2.2.2 *Lemme 2.2.8 ne couvre pas tous les cas de Théorème 2.1.4, car s' il n'existe pas de coefficients qui satisfont à la condition (3) dans le théorème 2.1.4 et $\tau_{M,n}(A_0) = 0$ avec $\tau_n(A_0) = 0$, alors le lemme 8 n'est plus utilisable. cependant, le lemme suivant répond à la question qui peut etre prouver par le même raisonnement utilisé dans la preuve du lemme 2.2.8.*

Lemme 2.2.9 *Soient $A_j(z)$ $j = 0, 1, ..., k-1$ des fonctions analytiques dans le disque l'unité D telles que $i(A_0) = n$, $0 < \sigma_n(A_0) = \sigma < \infty$, $(n \geq 2, n \in \mathbb{N})$ et pour chaque $j \in \{1, ..., k-1\}$, $A_j(z)$ satisfait les conditions suivantes:*

(1) $i(A_j) < i(A_0)$;

(2) $i(A_j) = i(A_0)$ et $\sigma_n(A_j) < \sigma_n(A_0)$;

et U_j^i $(j = 0, 1, ..., k)$ $(i \in \mathbb{N})$ *des données comme dans (2.6). Alors, il existe un ensemble* F *de mesure logarithmique infinie telle que pour* $|z| = r \in F$ *et* $|A_0(z)| = M(r, A_0)$*, on a*

$$\left|U_0^i\right| \geq \exp_n \left\{ \frac{1}{(1-r)^{\sigma-\varepsilon}} \right\} \quad et \quad \left|U_j^i\right| \leq \exp_n \left\{ \frac{1}{(1-r)^{\sigma-2\varepsilon}} \right\} \ (j \neq 0),$$

où $\varepsilon > 0$ *est supposé assez petit.*

Aussi, si seulement la condition (1) dans le théorème 2.1.4 qui détient avec $\sigma_n(A_0) = 0$*, on ne peut pas utiliser le lemme 2.2.9; de sorte que le lemme suivant résout ce problème.*

Lemme 2.2.10 *Soient* $A_j(z)$ $j = 0, 1, ..., k-1$ *des fonctions analytiques dans le disque l'unité* D *telles que pour tout* $j \neq 0$, $i(A_j) < i(A_0) = n$ $(n \geq 2,\ n \in \mathbb{N})$ *et* $\sigma_n(A_0) = 0$*; et* U_j^i $(j = 0, 1, ..., k)$ $(i \in \mathbb{N})$ *des données comme dans (2.6). Alors, il existe un ensemble* F *de mesure logarithmique infinie et un ensemble* E *de mesure logarithmique finie tels que*

$$\limsup_{r \to 1^-} \frac{\log_{n-1}^+ m(r, U_0^i)}{-\log(1-r)} = \infty \ et \ \limsup_{r \to 1^-} \frac{\log_n^+ m(r, U_0^i)}{-\log(1-r)} = 0, \ r \in F, \tag{2.17}$$

et

$$\limsup_{r \to 1^-} \frac{\log_{n-1}^+ m\left(r, U_j^i\right)}{-\log(1-r)} < \infty, \ j \neq 0 \ et \ r \notin E. \tag{2.18}$$

Preuve 2.2.3 *La méthode inductive sera utilisée. Nous commençons avec (2.17). De* $i(A_0) = n$ $(n \geq 2,\ n \in \mathbb{N})$ *et* $\sigma_n(A_0) = 0$*, alors on a*

$$\limsup_{r \to 1^-} \frac{\log_{n-1}^+ m(r, A_0)}{-\log(1-r)} = \infty \quad et \quad \limsup_{r \to 1^-} \frac{\log_n^+ m(r, A_0)}{-\log(1-r)} = 0;$$

et par le lemme 2.2.3, il existe un ensemble F *de mesure logarithmique infinie telle que pour* $r \in F$ *on a*

$$\lim_{r \to 1^-} \frac{\log_{n-1}^+ m(r, A_0)}{-\log(1-r)} = \infty \quad et \quad \lim_{r \to 1^-} \frac{\log_n^+ m(r, A_0)}{-\log(1-r)} = 0.$$

A partir de (2.6), on a $U_0^1 = A_0 + A_1\left(\frac{A_1'}{A_1} - \frac{A_0'}{A_0}\right)$*; et par le lemme de dérivée logarithmique, on obtient*

$$m\left(r, U_0^1\right) \leq m\left(r, A_0\right) + m\left(r, A_1\right) + m\left(r, \frac{A_1'}{A_1}\right) + m\left(r, \frac{A_0'}{A_0}\right) + O\left(1\right). \tag{2.19}$$

D'autre part, comme $A_0 = U_0^1 - A_1\left(\frac{A_1'}{A_1} - \frac{A_0'}{A_0}\right)$ *alors, on déduit facilement*

$$m\left(r, A_0\right) \leq m\left(r, U_0^1\right) + m\left(r, A_1\right) + m\left(r, \frac{A_1'}{A_1}\right) + m\left(r, \frac{A_0'}{A_0}\right) + O\left(1\right);$$

et comme $m\left(r, \frac{A_0'}{A_0}\right) = o\left(m\left(r, A_0\right)\right)$, $m\left(r, \frac{A_1'}{A_1}\right) = o\left(m\left(r, A_1\right)\right)$, *et* $m\left(r, A_1\right) = o\left(m\left(r, A_0\right)\right)$, *alors* $m\left(r, U_0^1\right) \sim m\left(r, A_0\right)$ *tant que* $r \to \infty$, $r \in F$*; ainsi*

$$\lim_{r \to 1^-} \frac{\log_{n-1}^+ m\left(r, U_0^1\right)}{-\log\left(1-r\right)} = \infty \quad et \lim_{r \to 1^-} \frac{\log_n^+ m\left(r, U_0^i\right)}{-\log\left(1-r\right)} = 0. \tag{2.20}$$

Par induction sur $i \in \mathbb{N}$*, si*

$$\limsup_{r \to 1^-} \frac{\log_{n-1}^+ m\left(r, U_0^{i-1}\right)}{-\log\left(1-r\right)} = \infty \ et \ \limsup_{r \to 1^-} \frac{\log_n^+ m\left(r, U_0^{i-1}\right)}{-\log\left(1-r\right)} = 0, \ r \in F,$$

alors de $U_0^i = U_0^{i-1} + U_1^{i-1}\left(\frac{\left(U_1^{i-1}\right)'}{U_1^{i-1}} - \frac{\left(U_0^{i-1}\right)'}{U_0^{i-1}}\right)$ *et par le même procédé que ci-dessus, on obtient*

$$\limsup_{r \to 1^-} \frac{\log_{n-1}^+ m\left(r, U_0^i\right)}{-\log\left(1-r\right)} = \infty \ et \ \limsup_{r \to 1^-} \frac{\log_n^+ m\left(r, U_0^i\right)}{-\log\left(1-r\right)} = 0, \ r \in F,$$

Maintenant, pour $i\left(A_j\right) < i\left(A_0\right) = n \ j \neq 0$*, alors*

$$\limsup_{r \to 1^-} \frac{\log_{n-1}^+ m\left(r, A_j\right)}{-\log\left(1-r\right)} < \infty, \ r \notin E.$$

De (2.6), on a $U_j^1 = A_j + A_{j+1}\left(\frac{A'_{j+1}}{A_{j+1}} - \frac{A'_0}{A_0}\right)$*,et ainsi*

$$\limsup_{r\to 1^-} \frac{\log_{n-1}^+ m\left(r, U_j^1\right)}{-\log\left(1-r\right)} < \infty,\ r \notin E.$$

Si nous supposons que

$$\limsup_{r\to 1^-} \frac{\log_{n-1}^+ m\left(r, U_j^{i-1}\right)}{-\log\left(1-r\right)} < \infty,\ r \notin E;$$

alors de $U_j^i = U_j^{i-1} + U_{j+1}^{i-1}\left(\frac{\left(U_{j+1}^{i-1}\right)'}{U_{j+1}^{i-1}} - \frac{\left(U_0^{i-1}\right)'}{U_0^{i-1}}\right)$ *et par le même procédé, on obtient*

$$\limsup_{r\to 1^-} \frac{\log_{n-1}^+ m\left(r, U_j^{i}\right)}{-\log\left(1-r\right)} < \infty,\ r \notin E.$$

Lemme 2.2.11 *Soient* $H_j(z)$ $j = 0, 1, ..., k-1$ *des fonctions méromorphes d'ordre n-itératif fini dans le disque unité* D *satisfaisant* $\max\left\{|H_j(z)|,\ j = 1, ..., k-1\right\} \le \exp_n\left\{\frac{\beta_1}{(1-r)^\sigma}\right\}$ *et* $|H_0(z)| \ge \exp_n\left\{\frac{\beta}{(1-r)^\sigma}\right\}$ *pour* $|z| = r \in F \subset (0,1)$, *F de mesure logarithmique infinie, où* $0 < \beta_1 < \beta,\ \sigma > 0,\ (n \ge 2,\ n \in \mathbb{N})$. *Alors, chaque solution méromorphe* f *de l'équation différentielle*

$$f^{(k)} + H_{k-1}(z) f^{(k-1)} + ... + H_1(z) f' + H_0(z) f = 0 \tag{2.21}$$

satisfait $\sigma_{n+1}(f) \ge \sigma$.

Preuve 2.2.4 *Supposons que* $f \not\equiv 0$ *est une solution méromorphe de (2.21) avec* $\sigma_n(f) = \rho < \infty$.*De (2.21), on a*

$$|H_0(z)| \le \left|\frac{f^{(k)}}{f}\right| + \sum_{j=1}^{k-1} |H_j(z)| \left|\frac{f^{(j)}}{f}\right|. \tag{2.22}$$

Par le lemme 2.2.4, et pour une donnée $\varepsilon > 0$, *il existe un ensemble* $E \subset [0,1)$ *de* *mesure logarithmique finie telle que pour tout $z \in D$ satisfaisant $|z| \notin E$,on ait*

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right| \leq \exp_{n-1}\left\{\left(\frac{1}{1-|z|}\right)^{\rho+\varepsilon}\right\}. \tag{2.23}$$

De (2.22)-(2.23) et les hypothèses du lemme 2.2.11, on obtient

$$\exp_n\left\{\frac{\beta}{(1-r)^{\sigma}}\right\} \leq c\exp_{n-1}\left\{\frac{1}{(1-r)^{\rho+\varepsilon}}\right\}\exp_n\left\{\frac{\beta_1}{(1-r)^{\sigma}}\right\}, \tag{2.24}$$

où $c > 0$ est une constante. Comme $r \to 1^-$, alors de $\beta_1 < \beta$ résulte une contradiction qui découle de (2.24). Ainsi, $\sigma_n(f) = \infty$. Maintenant, par le Lemme 2.2.4, on déduit

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right| \leq \frac{1}{(1-r)^{j(2+\varepsilon)}}\left(T(s(r), f)\right)^j,\ r \notin E. \tag{2.25}$$

De (2.22), (2.25) et les hypothèses de ce lemme, on obtient

$$\exp_n\left\{\frac{\beta}{(1-r)^{\sigma}}\right\} \leq \frac{c}{(1-r)^{k(2+\varepsilon)}}\left(T(s(r), f)\right)^k\exp_n\left\{\frac{\beta_1}{(1-r)^{\sigma}}\right\}. \tag{2.26}$$

pour $s(r) = R$. on a $1-r = \frac{1}{d}(1-R)$ et pour $R \in F$, (2.26) prend la forme suivante

$$\exp_n\left\{\frac{\beta d^{\sigma}}{(1-R)^{\sigma}}\right\} \leq c\left(\frac{d}{1-R}\right)^{k(2+\varepsilon)}\left(T(R, f)\right)^k\exp_n\left\{\frac{\beta_1 d^{\sigma}}{(1-R)^{\sigma}}\right\}. \tag{2.27}$$

De (2.27), on conclut que

$$\sigma_{n+1}(f) \geq \sigma.$$

En utilisant la même méthode dans la preuve du lemme 2.2.11, on obtient le lemme suivant:

Lemme 2.2.12 *Soient $H_j(z)$ $j = 0, 1, ..., k-1$ des fonctions méromorphes d'ordre n-itératif fini dans le disque unité D satisfaisant* $\max\{|H_j(z)|,\ j = 1, ..., k-1\} \leq \exp_n\left\{\frac{1}{(1-r)^{\sigma_1}}\right\}$ *et* $|H_0(z)| \geq \exp_n\left\{\frac{1}{(1-r)^{\sigma}}\right\}$ *où*

$0 < \sigma_1 < \sigma$, $(n \geq 2,\ n \in \mathbb{N})$ *et* $|z| = r \in F \subset (0,1)$ *avec* F *un ensemble de mesure logarithmique infinie. Alors, chaque solution méromorphe* $f \not\equiv 0$ *de (2.21) vérifiée* $\sigma_{n+1}(f) \geq \sigma$.

Lemme 2.2.13 *Soient* $A_j(z)$ $j = 0, 1, ..., k-1$ *des fonctions méromorphes dans le disque unité* D *satisfaisant aux conditions du théorème 2.1.6.Alors, chaque solution méromorphe* $f \not\equiv 0$ *de (2.1) vérifiée* $\sigma_{n+1}(f) \geq \sigma$.

Preuve 2.2.5 *Soit* $f \not\equiv 0$ *une solution méromorphe de (2.21). D'après (2.21) et le lemme de la dérivée logarithmique, on a*

$$\begin{aligned} m(r, A_0) &\leq m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) + m\left(r, \frac{f^{(k-1)}}{f}\right) + ... + m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + \\ &\quad \sum_{j=1}^{k-1} m(r, A_j) + \log(k+1) \\ &\leq c\left(\log^+ T(r,f) + \log\frac{1}{1-r}\right) + \sum_{j=1}^{k-1} m(r, A_j),\ r \notin E, \end{aligned} \tag{2.28}$$

où $E \subset (0,1)$ *de mesure logarithmique finie et* $c > 0$. *Par le même procédé utilisé dans le lemme 2.2.3, il existe un ensemble* F *de mesure logarithmique infinie telle que pour tout* $r \in F$, *on a*

$$\lim_{r\to 1^-} (1-r)^\sigma \log^+_{n-1} T(r, A_0) = \tau. \tag{2.29}$$

De $\delta(\infty, A_0) = \liminf\limits_{r\to+\infty} \frac{m(r,A_0)}{T(r,A_0)} > 0$, *puis par (2.29), et pour tout* $\varepsilon > 0$ *assez petit et pour tout* $r \in F$, *on a*

$$m(r, A_0) \geq \exp_{n-1}\left\{\frac{\tau - \varepsilon}{(1-r)^\sigma}\right\}. \tag{2.30}$$

Et pour $j \neq 0$,

$$m(r, A_j) \leq \exp_{n-1}\left\{\frac{\tau - 2\varepsilon}{(1-r)^\sigma}\right\}. \tag{2.31}$$

De (2.28)-(2.31), pour $r \in F - E$, on a

$$\exp_{n-1}\left\{\frac{\tau-\varepsilon}{(1-r)^{\sigma}}\right\} \leq c\left(\log^{+} T(r,f) + \log\frac{1}{1-r}\right) + (k-1)\exp_{n-1}\left\{\frac{\tau-2\varepsilon}{(1-r)^{\sigma}}\right\}. \tag{2.32}$$

De (2.32), on obtient $\sigma_{n+1}(f) \geq \sigma$.

Lemme 2.2.14 *Soient $A_j(z)$ $j = 0, 1, ..., k-1$ des fonctions méromorphes dans le disque unité D satisfaisant aux conditions du théorème 2.1.6; et U_j^i $(j = 0, 1, ..., k)$ $(i \in \mathbb{N})$ des données comme dans (2.6). Alors, pour toute donnée ε $(0 < 2\varepsilon < \tau)$, on a*

$$m\left(r, U_j^i\right) \leq \exp_{n-1}\left\{\frac{\tau-2\varepsilon}{(1-r)^{\sigma}}\right\},\ (j = 1, 2, ..., k-1),\ r \notin E;$$

et

$$m\left(r, U_0^i\right) \geq \exp_{n-1}\left\{\frac{\tau-\varepsilon}{(1-r)^{\sigma}}\right\},\ r \in F.$$

Preuve 2.2.6 *Utilisation (2.6) et le lemme de dérivée logarithmique, nous pouvons obtenir la conclusion par induction sur $i \in \mathbb{N}$.*

Lemme 2.2.15 *Soient $H_j(z)$ $j = 0, 1, ..., k-1$ des fonctions méromorphes d'ordre n-itératif fini dans le disque unité D satisfaisant $\max\{m(r, H_j),\ j = 1, ..., k-1\} \leq \exp_{n-1}\left\{\frac{\tau_1}{(1-r)^{\sigma}}\right\}$ et $m(r, H_0) \geq \exp_n\left\{\frac{\tau}{(1-r)^{\sigma}}\right\}$ où $0 < \tau_1 < \tau$, $\sigma > 0$, $n \geq 2$, et $r \in F \subset (0,1)$ avec F un ensemble de mesure logarithmique infinie. Alors, chaque solution méromorphe $f \not\equiv 0$ de (2.21) vérifiée $\sigma_{n+1}(f) \geq \sigma$.*

Preuve 2.2.7 *En utilisant le même procédé de la preuve du lemme 2.2.11 et l'utilisation (2.28) au lieu de (2.22), on peut facilement déduire la démonstration de ce lemme .*

Lemme 2.2.16 *Soient $G \not\equiv 0, H_j(z)$ $j = 0, 1, ..., k-1$ des fonctions méromorphes dans le disque unité D. Si f est une solution méromorphe de l'équation différentielle*

$$f^{(k)} + H_{k-1}(z) f^{(k-1)} + ... + H_1(z) f' + H_0(z) f = G(z), \tag{2.33}$$

vérifiant la condition $\max\{\sigma_n(G), \sigma_n(H_j);\ j=0,1,...,k-1\} < \sigma_n(f) = \sigma_n$, *alors*

$$\overline{\lambda}_n(f) = \lambda_n(f) = \sigma_n(f),\ (n \in \mathbb{N} - \{0\}).$$

Preuve 2.2.8 *On suit le même raisonnement de la preuve du lemme 3.5 à [7] lorsque* $G \not\equiv 0, H_j(z)$ $j=0,1,...,k-1$ *sont analytiques dans le disque unité* D.

Lemme 2.2.17 *[25, Theorem 3] .Soit* $n \in \mathbb{N} - \{0\}$. *Si les coefficients* $A_0(z), ..., A_{k-1}(z)$ *sont analytiques dans* D *tels que* $\sigma_{M,n}(A_j) \leq \sigma_{M,n}(A_0)$ *pour tout* $j = 1, ..., k-1$, *et*

$$\max\{\tau_{M,n}(A_j) : \sigma_{M,n}(A_j) = \sigma_{M,n}(A_0)\} < \tau_{M,n}(A_0),$$

alors toute solution $f \not\equiv 0$ *de (2.1) satisfait* $\sigma_{M,n+1}(f) = \sigma_{M,n}(A_0)$.

Lemme 2.2.18 *Soit* $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$. *Si les coefficients* $A_0(z), ..., A_{k-1}(z)$ *sont analytiques dans* D *tels que* $\sigma_n(A_j) \leq \sigma_n(A_0)$ *pour tout* $j = 1, ..., k-1$, *et*

$$\max\{\tau_n(A_j) : \sigma_n(A_j) = \sigma_n(A_0)\} < \tau_n(A_0),$$

alors toute solution $f \not\equiv 0$ *de (2.1) satisfait* $\sigma_{n+1}(f) = \sigma_n(A_0)$.

Preuve 2.2.9 *Soit* $\tau_n(A_0) = \tau$, *de l'inégalité* $\sigma_{n+1}(f) \leq \sigma_n(A_0) = \sigma_{M,n}(A_0)$ *établit par [29, Theorem 5.1], par l'application du (2.28) et par le lemme 2.2.7, il existe un ensemble* $F \subset (0,1)$ *de mesure logarithmique infinie telle pour tout* $r \in F - E$, *on a*

$$\exp_{n-1}\left\{\frac{\tau-\varepsilon}{(1-r)^{\sigma}}\right\} \leq c\left(\log^{+} T(r,f) + \log\frac{1}{1-r}\right) + \exp_{n-1}\left\{\frac{\tau-2\varepsilon}{(1-r)^{\sigma}}\right\} \quad (2.34)$$

où $\varepsilon > 0$ *assez petit. De (2.34), on obtient* $\sigma_n(A_0) \leq \sigma_{n+1}(f)$.

A noter que ce lemme n'est pas valable pour $n = 1$, *sauf dans le cas des équations différentielles linéaires du second ordre.*

Lemme 2.2.19 *Soient $H_j(z)$ $j = 0, 1, ..., k-1$ des fonctions méromorphes d'ordre n-itératif fini dans le disque unité D satisfaisant*

$$\limsup_{r\to 1^-} \frac{\log^+_{n-1} m(r, H_0)}{-\log(1-r)} = \infty \text{ et } \limsup_{r\to 1^-} \frac{\log^+_n m(r, H_0)}{-\log(1-r)} = 0, \ r \in F,$$

et

$$\limsup_{r\to 1^-} \frac{\log^+_{n-1} m(r, H_j)}{-\log(1-r)} < \infty, \ j \neq 0, \ r \notin E.$$

Alors, chaque solution méromorphe $f \not\equiv 0$ de (2.21)satisfait $i(f) \geq n+1$ et $\sigma_{n+1}(f) \geq 0$.

Preuve 2.2.10 *De (2.21) et le lemme de dérivée logarithmique , on a*

$$m(r, H_0) \leq c\left(\log^+ T(r, f) + \log \frac{1}{1-r}\right) + \sum_{j=1}^{k-1} m(r, H_j), \ r \notin E. \tag{2.35}$$

D'après les hypothèses, le lemme 2.2.3 et (2.35), il existe un ensemble $F \subset (0, 1)$ de mesure logarithmique infinie telle que pour tout $r \in F$, on a

$$\lim_{r\to 1^-} \frac{\log^+_n T(r, f)}{-\log(1-r)} = \infty \text{ et } \lim_{r\to 1^-} \frac{\log^+_{n+1} T(r, f)}{-\log(1-r)} \geq 0;$$

ce qui implique que $i(f) \geq n+1$ et $\sigma_{n+1}(f) \geq 0$.

2.3 Preuve du Théorème 2.1.4

Supposons que $f \not\equiv 0$ est une solution de (2.1) et soit $\varphi(z) \not\equiv 0$ une fonction analytique dans le disque unité D satisfaisant $i(\varphi) \leq n$ ou $(i(\varphi) = n+1$ et $\sigma_{n+1}(\varphi) < \sigma_n(A_0))$. On commence par prouver (a) et (b) pour $i = 0$, c'est à dire $\overline{\lambda}_{n+1}(f-\varphi) = \lambda_{n+1}(f-\varphi) = \sigma_{n+1}(f) = \sigma_n(A_0)$. De [8] et le lemme 2.2.17 ou le lemme 2.2.18, on a $\sigma_{n+1}(f) = \sigma_n(A_0)$. Soit $g = f - \varphi$. Il est clair que $\sigma_{n+1}(g) = \sigma_{n+1}(f)$. Par le lemme 2.2.1, g satisfait (2.4). Soit $G(z) = \varphi^{(k)} + A_{k-1}\varphi^{(k-1)} + ... + A_0\varphi$. Si $G \equiv 0$, alors par [8] on a $\sigma_{n+1}(\varphi) = \sigma_n(A_0)$, contradiction; donc $G \not\equiv 0$.

Comme $\sigma_{n+1}(g) = \sigma_{n+1}(f) = \sigma_n(A_0) > \max\{\sigma_{n+1}(G), \sigma_{n+1}(A_j)\}$, alors d'aprés l'hypothèse du lemme 2.2.16 et de $\overline{\lambda}_{n+1}(g) = \lambda_{n+1}(g) = \sigma_{n+1}(g)$,on peut conclure que $\overline{\lambda}_{n+1}(f-\varphi) = \lambda_{n+1}(f-\varphi) = \sigma_{n+1}(f) = \sigma_n(A_0)$.

Maintenant, pour $i \geq 1$,soit $g_i = f^{(i)} - \varphi$. De $\sigma_{n+1}\left(f^{(i)}\right) = \sigma_{n+1}(f) = \sigma_n(A_0)$ et $\sigma_{n+1}(\varphi) < \sigma_n(A_0)$, on déduit que $\sigma_{n+1}(g_i) = \sigma_{n+1}(f) = \sigma_n(A_0)$. Par le lemme 2.2.2, g_i satisfait (2.5). Soit $G_i = \varphi^{(k)} + U_{k-1}^i \varphi^{(k-1)} + ... + U_0^i \varphi$. Si $G_i \equiv 0$, par le Lemme 2.2.8 et le lemme 2.2.11 ou Lemme 2.2.12, on déduit que $\sigma_{n+1}(\varphi) \geq \sigma_n(A_0)$, une contradiction; donc $G_i \not\equiv 0$. Maintenant, par le Lemme 2.2.16, on obtient $\overline{\lambda}_{n+1}(g_i) = \lambda_{n+1}(g_i) = \sigma_{n+1}(g_i)$ c'est à dire. $\overline{\lambda}_{n+1}\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \lambda_{n+1}\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \sigma_{n+1}(f) = \sigma_n(A_0)$. CQFD

2.4 Preuve du Théorème 2.1.5

Supposons que $f \not\equiv 0$ est une solution de(2.1) et soit $\varphi(z) \not\equiv 0$ est une fonction analytique dans le disque unité D satisfaisant $i(\varphi) \leq n$.en uitilisant les mêmes notations que dans la preuve du théorème 2.1.4. De [8], on a $\sigma_{n+1}(f) = \sigma_n(A_0) = 0$. Soit $g = f - \varphi$. Comme ci-dessus, on obtient $\overline{\lambda}_{n+1}(g) = \lambda_{n+1}(g) = \sigma_{n+1}(g)$. Maintenant, pour $i \geq 1$, $g_i = f^{(i)} - \varphi$. Si $G_i \equiv 0$, par le Lemme 2.2.10 et le Lemme 2.2.19, on a $i(\varphi) \geq n+1$, contradiction; donc $G_i \not\equiv 0$. Maintenant, par le Lemme 2.2.16, on obtient $\overline{\lambda}_{n+1}(g_i) = \lambda_{n+1}(g_i) = \sigma_{n+1}(g_i)$; c'est à dire. $\overline{\lambda}_{n+1}\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \lambda_{n+1}\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \sigma_{n+1}(f) = 0$.

2.5 Preuve du Théorème 2.1.6

Supposons que $f \not\equiv 0$ est une solution méromorphe (2.1) et soit $\varphi(z) \not\equiv 0$ est une fonction méromorphe dans le disque unité D satisfaisant (2.3). Par le lemme 2.2.13, on a $\sigma_{n+1}(f) \geq \sigma_n(A_0)$. Si $G \equiv 0$, alors par le Lemme 2.2.13 , on déduit $\sigma_{n+1}(\varphi) \geq \sigma_n(A_0)$, contradiction; donc $G \not\equiv 0$; Par le lemme 2.2.16 on obtient le résultat pour $i = 0$. Maintenant, pour $i \geq 1$, si $G_i \equiv 0$, alors par le Lemme 2.2.11, Lemme 2.2.12, Lemme 2.2.14 et le Lemme 2.2.15, on déduit que $\sigma_{n+1}(\varphi) \geq \sigma_n(A_0)$. Contradiction; alors $G_i \not\equiv 0$. De $\sigma_{n+1}(G) = \sigma_{n+1}(A_0) = 0 < \sigma_{n+1}(f)$, et du lemme 2.2.16, on obtient $\overline{\lambda}_{n+1}(g_i) = \lambda_{n+1}(g_i) = \sigma_{n+1}(f)$ c'est à dire. $\overline{\lambda}_{n+1}\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \lambda_{n+1}\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \sigma_{n+1}(f) \geq \sigma_n(A_0)$. CQFD

Chapitre 3

La croissance des solutions d'une classe d'équations différentielles linéaires non homogènes dans le disque unité

3.1 Introduction et présentation des résultats

Tout au long de ce chapitre, on choisit la branche principale de la fonction logarithme $e^{\dfrac{\lambda}{(z_0 - z)^{\mu}}}$ $(\lambda \in \mathbb{C}\backslash \{0\})$ et on note σ pour désigner σ_M.

Soit $z_0 \in \partial D$ $(|z_0| = 1)$. Pour une fonction analytique $f(z)$ dans D, posons

$$\sigma_{z_0}(f) = \limsup_{z \to z_0} \frac{\log^+ \log^+ M(r, z_0, f)}{-\log(1-r)},$$

où $M(r, z_0, f) = \max\{|f(z)| : |z| = r \text{ et } |z_0 - z| \leq 1 - r^2\}$. On peut dire que $\sigma_{z_0}(f)$ désigne l'ordre de la croissance de f près du point z_0 dans le disque D. Evidemment, on a $\sigma_{z_0}(f) \leq \sigma(f)$.

De nombreux auteurs ont étudié l'équation différentielle linéaire

$$f'' + A(z)\, e^{az} f' + B(z)\, e^{bz} f = 0, \tag{3.1}$$

où $A(z)$ et $B(z)$ sont des fonctions entières, voir par exemple [1, 10, 11, 21]. Dans [10], Chen a prouvé que si $ab \neq 0$ et $\arg a \neq \arg b$ ou $a = cb$ $(0 < c < 1)$, alors chaque solution $f(z) \not\equiv 0$ de (4.8) est d'ordre infini.
Récemment, en 2012, Hamouda a étudié les équations différentielles linéaires dans le disque unité similaire à (3.1) et a obtenu les résultats suivants.

Théorème 3.1.1 *[25] Soient $A(z)$ et $B(z) \not\equiv 0$ deux fonctions analytiques dans le disque unité D, $\mu > 1$ une constante réelle et b, z_0 deux nombres complexes tels que $b \neq 0$, $|z_0| = 1$. Si $A(z)$ et $B(z)$ sont analytiques à z_0 alors chaque solution $f(z) \not\equiv 0$ de l'équation différentielle*

$$f'' + A(z)\, f' + B(z)\, e^{\frac{b}{(z_0 - z)^{\mu}}} f = 0,$$

est d'ordre infini.

Théorème 3.1.2 *[25] Soient $A(z)$ et $B(z) \not\equiv 0$ deux fonctions analytiques dans le disque unité D, $\mu > 1$ une constante réelle et a, b, z_0 des nombres complexes tels que $ab \neq 0$, $\arg a \neq \arg b$, $|z_0| = 1$. Si $A(z)$ et $B(z)$ sont analytiques à z_0 alors chaque solution $f(z) \not\equiv 0$ de l'équation différentielle*

$$f'' + A(z)\, e^{\frac{a}{(z_0 - z)^{\mu}}} f' + B(z)\, e^{\frac{b}{(z_0 - z)^{\mu}}} f = 0, \tag{3.2}$$

est d'ordre infini.

Théorème 3.1.3 *[25] Soient $A(z)$ et $B(z) \not\equiv 0$ deux fonctions analytiques dans le disque unité D, $\mu > 1$ une constante réelle et a, b, z_0 des nombres complexes tels que*

$ab \neq 0,\ a = cb\ \ (0 < c < 1)\,,\ |z_0| = 1$.Si $A(z)$ et $B(z)$ sont analytiques à z_0 alors chaque solution $f(z) \not\equiv 0$ de (3.2) est d'ordre infini.

Dans cette partie, nous allons étudier la nature quant à l'ordre des solutions des équations différentielles linéaires non homogènes avec une certaine amélioration sur les conditions. En fait, nous allons prouver les résultats suivants:

Théorème 3.1.4 *[17] Soient $A(z)$, $B(z) \not\equiv 0$ et $F(z)$ des fonctions analytiques dans le disque unité D, $\mu > 1$ une constante réelle et b, z_0 deux nombres complexes tels que $b \neq 0$, $|z_0| = 1$. Si $B(z)$ est analytique à z_0 et $\max\{\sigma_{z_0}(A), \sigma_{z_0}(F)\} < \mu$, alors chaque solution $f(z) \not\equiv 0$ de l'équation différentielle*

$$f'' + A(z) f' + B(z) e^{\dfrac{b}{(z_0 - z)^{\mu}}} f = F(z)\,, \tag{3.3}$$

est d'ordre infini et $\sigma_2(f) \geq \mu$.

Exemple 3.1.1 *Considérons l'équation différentielle:*

$$f'' + A(z) f' + B(z) e^{\dfrac{2i}{(i - z)^{2}}} f = F(z)\,,$$

telle que $A(z) = \exp\left(\frac{1}{(1-z)^3}\right)$, $B(z) = z + 5$ *et* $F(z) = \exp\left(\frac{1}{(1-z)^4}\right)$
Donc, les conditions du Théorème 3.1.4 sont vérifiées. Alors chaque solution $f \neq 0$ de cette équation différentielle est d'ordre infini et $\sigma_2(f) \geq 2$.

Théorème 3.1.5 *[17] Soient $A(z)$, $B(z) \not\equiv 0$ et $F(z)$ des fonctions analytiques dans le disque unité D, $\mu > 1$ une constante réelle et a, b, z_0 des nombres complexes tels que $b \neq 0$, $\arg a \neq \arg b$ et $|z_0| = 1$. Si $B(z)$ est analytique au point z_0 et $\max\{\sigma_{z_0}(A), \sigma_{z_0}(F)\} < \mu$, alors chaque solution $f(z) \not\equiv 0$ de l'équation différentielle*

$$f'' + A(z) e^{\dfrac{a}{(z_0 - z)^{\mu}}} f' + B(z) e^{\dfrac{b}{(z_0 - z)^{\mu}}} f = F(z)\,, \tag{3.4}$$

est d'ordre infini et $\sigma_2(f) \geq \mu$.

Théorème 3.1.6 *[17] Soient* $A(z)$, $B(z) \not\equiv 0$ *et* $F(z)$ *des fonctions analytiques dans le disque unité* D, $\mu > 1$ *une constante réelle,* a, b *et* z_0 *des nombres complexes tels que* $b \neq 0$, $a = cb$ $(0 < c < 1)$ *et* $|z_0| = 1$. *Si* $B(z)$ *est analytique au point* z_0 *et* $\max\{\sigma_{z_0}(A), \sigma_{z_0}(F)\} < \mu$, *alors chaque solution* $f(z) \not\equiv 0$ *de (3.4) est d'ordre infini et* $\sigma_2(f) \geq \mu$.

Remarque 3.1.1 *Il est clair que le théorème 3.1.4-3.1.6 est une généralisation du théorème 3.1.1-3.1.3.*

En combinant les résultats ci-dessus, on peut généraliser aux équations différentielles linéaires d'ordre supérieur comme suivant.

Corollaire 3.1.1 *[17] Soit l'équation différentielle linéaire*

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + ... + A_1(z) f' + B(z) e^{\frac{b}{(z_0 - z)^\mu}} f = F(z), \tag{3.5}$$

où $\mu > 1$ *est une constante réelle,* b *et* z_0 *deux nombres complexes tels que* $b \neq 0$, $|z_0| = 1$, $B(z) \not\equiv 0$, $F(z)$, $A_0(z), ..., A_{k-1}(z)$ *des fonctions analytiques dans le disque unité* D *telle que* $\sigma_{z_0}(F) < \mu$, $B(z)$ *est analytique au point* z_0 *et soit* $\sigma_{z_0}(A_j) < \mu$ *ou* $A_j(z) = B_j(z) e^{\frac{b_j}{(z_0 - z)^\mu}}$ *avec* $\sigma_{z_0}(B_j) < \mu$ *et* $b_j = c_j b$ $(0 < c_j < 1)$ *ou* $\arg b_j \neq \arg b$ *pour au plus une possibilité. Alors chaque solution* $f(z) \not\equiv 0$ *de* (3.5) *est d'ordre infini avec* $\sigma_2(f) \geq \mu$.

3.2 lemmes préliminaires

Lemme 3.2.1 *[15] Soit* f *une fonction méromorphe dans le disque unité* D *telle que* $f^{(j)}$ *n'est pas identiquement nulle. Soient* $\varepsilon > 0$ *une constante strictement positif;*

k, j deux entiers vérifiant $k > j \geq 0$ et $d \in (0,1)$. Alors, il existe un ensemble $E \subset [0,1)$ vérifiant $\int\limits_{E} \frac{1}{1-r} dr < \infty$, tel que pour tout $z \in D$ satisfaisant $|z| \notin E$, on a

$$\left| \frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)} \right| \leq \left(\left(\frac{1}{1-|z|} \right)^{(2+\varepsilon)} \max \left\{ \log \frac{1}{1-|z|}, T(s(|z|), f) \right\} \right)^{k-j},$$

où $s(|z|) = 1 - d(1-|z|)$. Dans le cas particulier: $\sigma_T(f) = \sigma_1 < \infty$, on a

$$\left| \frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)} \right| \leq \left(\frac{1}{1-|z|} \right)^{(k-j)(\sigma_1 + 2 + \varepsilon)}, \ |z| \notin E.$$

Lemme 3.2.2 *[25] Soit $A(z)$ une fonction analytique dans le disque unité D, $\mu > 1$ est une constante réelle, a et z_0 deux nombres complexes tels que $a \neq 0$, $|z_0| = 1$. Soit $g(z) = A(z) e^{\frac{a}{(z_0 - z)^{\mu}}}$, $a = \alpha + i\beta \neq 0$, $z_0 - z = Re^{i\varphi}$, $\delta_a(\varphi) = \alpha \cos(\mu\varphi) + \beta \sin(\mu\varphi)$, et $H = \{\varphi \in [0, 2\pi) : \delta_a(\varphi) = 0\}$, (évidemment, H est de mesure linéaire nulle).*

Si $A(z)$ est analytique au point z_0, alors pour tout $\varepsilon > 0$ donné et pour tout $\varphi \in [0, 2\pi) \setminus H$, il existe $R_0 > 0$ tel que pour $z \in D$ avec $0 < R < R_0$, on a
(i) si $\delta_a(\varphi) > 0$, alors

$$\exp\left\{ (1-\varepsilon) \delta_a(\varphi) \frac{1}{R^{\mu}} \right\} \leq |g(z)| \leq \exp\left\{ (1+\varepsilon) \delta_a(\varphi) \frac{1}{R^{\mu}} \right\}, \tag{3.6}$$

(ii) si $\delta_a(\varphi) < 0$, alors

$$\exp\left\{ (1+\varepsilon) \delta_a(\varphi) \frac{1}{R^{\mu}} \right\} \leq |g(z)| \leq \exp\left\{ (1-\varepsilon) \delta_a(\varphi) \frac{1}{R^{\mu}} \right\}. \tag{3.7}$$

Remarque 3.2.1 *En général, nous pouvons écrire $\delta_a(\varphi) = c \cos(\mu\varphi + \varphi_0)$, où $c = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$. Par cette formule, il est facile de prouver que si $\mu > 1$, $\delta_a(\varphi)$ change de signe dans chaque intervalle (φ_1, φ_2) de mesure linéaire est égale à π.*

Lemme 3.2.3 *[17] Soit g une fonction analytique dans le disque unité D d'ordre*

$\sigma(g) > \beta$. Alors, il existe un ensemble $F \subset (0,1)$ de mesure logarithmique infinie $\int\limits_F \frac{dr}{1-r} = +\infty$ telle que pour tout $r \in F$ on a

$$M(r,g) > \exp\left\{\frac{1}{(1-r)^{\beta}}\right\}.$$

Preuve 3.2.1 *Par définition de $\sigma(g)$, il existe une suite croissante $\{r_m\} \to 1^-$ satisfaisant $1-\left(1-\frac{1}{m}\right)(1-r_m) < r_{m+1}$ et*

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\log^+ \log^+ M(r_m,g)}{-\log(1-r_m)} > \beta.$$

Alors, il existe m_0 telle que pour toutes $m \geq m_0$ et pour ε donné, on a

$$M(r_m,g) > \exp\left\{\frac{1}{(1-r_m)^{\beta+\frac{\varepsilon}{2}}}\right\}. \tag{3.8}$$

Il existe m_1 tel que pour tout $m \geq m_1$, on a

$$\left(1-\frac{1}{m}\right)^{\beta+\frac{\varepsilon}{2}} > (1-r)^{\frac{\varepsilon}{2}}. \tag{3.9}$$

Alors

$$r < 1-\left(1-\frac{1}{m}\right)(1-r_m) \Longleftrightarrow \frac{1}{1-r_m} \geq \frac{1}{1-r}\left(1-\frac{1}{m}\right). \tag{3.10}$$

D'après (3.8)-(3.10), pour tous $m \geq \max\{m_0,m_1\}$ et pour $r \in \left[r_m, 1-\left(1-\frac{1}{m}\right)(1-r_m)\right]$, on a

$$\begin{aligned} M(r,g) &\geq M(r_m,g) > \exp\left\{\frac{1}{(1-r_m)^{\beta+\frac{\varepsilon}{2}}}\right\} \geq \\ &\geq \exp\left\{\frac{1}{(1-r)^{\beta+\frac{\varepsilon}{2}}}\left(1-\frac{1}{m}\right)^{\beta+\frac{\varepsilon}{2}}\right\} \geq \exp\left\{\frac{1}{(1-r)^{\beta}}\right\}. \end{aligned}$$

Soit $F = \bigcup\limits_{m=m_2}^{\infty} I_m$ *où* $I_m = \left[r_m, 1-\left(1-\frac{1}{m}\right)(1-r_m)\right]$. *Alors*

$$m_l(F) = \sum_{m=m_2}^{\infty} \int\limits_{I_m} \frac{dr}{1-r} = \sum_{m=m_2}^{\infty} \log\left(\frac{m}{m-1}\right) = \infty.$$

En utilisant le lemme 3.2.2, il est facile d'obtenir le lemme suivant.

Lemme 3.2.4 *[17] Soient f et g deux fonctions analytiques dans le disque unité D. Si $\sigma(f) < \beta < \sigma(g)$, Alors, il existe un ensemble $F \subset (0,1)$ de mesure logarithmique infinie $\int\limits_F \frac{dr}{1-r} = +\infty$ telle que pour tout $|z| = r \in F$ on a*

$$\frac{|f(z)|}{M(r,g)} \leq \exp\left\{\frac{-1}{(1-r)^{\beta}}\right\}.$$

Remarque 3.2.2 *[17] Les mêmes résultats sont obtenus si on fait le changement σ par σ_{z_0} et $M(r,g)$ par $M(r,z_0,g)$ lorsque $z \to z_0$ dans le lemme 3.2.3 et 3.2.4*

3.3 Preuve du Théorème 3.1.4

Primo, on montre que $\sigma(f) \geq \mu$. Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant que $\sigma(f) < \mu$. Pour $z \in D$, soit $\arg(z_0 - z) = \varphi$ et $|z_0 - z| = R$. Par le Lemme 3.2.2 et la Remarque 3.2.1, puisque $\mu > 1$, il existe un intervalle $(\varphi_1, \varphi_2) \subset \left(\arg z_0 - \frac{\pi}{2}, \arg z_0 + \frac{\pi}{2}\right)$, telle que pour toutes $\varphi \in (\varphi_1, \varphi_2)$ on a $\delta_b(\varphi) > 0$. on a

$$\left| e^{\dfrac{b}{(z_0 - z)^{\mu}}} \right| = \exp\left\{\delta_b(\varphi) \frac{1}{R^{\mu}}\right\}.$$

Puisque $B(z)$ est analytique à z_0, $\sigma_{z_0}(A) < \mu$ et $\sigma(f'') = \sigma(f') = \sigma(f) < \mu$, et pour z assez voisin de z_0, on peut écrire

$$\left| f'' + A(z) f' + B(z) e^{\frac{b}{(z_0 - z)^{\mu}}} f \right| = \exp\left\{ \delta_b(\varphi) \frac{1}{R^{\mu}} \right\} (1 + o(1)). \qquad (3.11)$$

D'un autre coté, on a $\sigma_{z_0}(F) < \mu$. Alors

$$|F(z)| \leq \exp\left\{ \frac{1}{(1 - |z|)^{\beta}} \right\} \qquad (3.12)$$

avec $\beta < \mu$, et puisque z est assez voisin de z_0, alors, par application des relations métriques dans le triangle oz_0z, on a

$$|z|^2 = 1 + R^2 - 2R\cos\varphi^* \quad \left(\varphi^* = (\overrightarrow{oz_0}, \overrightarrow{oz}) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \right),$$

on déduit que

$$1 - |z| = R\left(\frac{2\cos\varphi^* - R}{1 + |z|} \right). \qquad (3.13)$$

Pour z assez voisin de z_0, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que

$$\frac{2\cos\varphi^* - R}{1 + |z|} > \varepsilon_0. \qquad (3.14)$$

En combinant (3.13) et (3.14), on peut obtenir

$$\frac{1}{1 - |z|} < \frac{1}{\varepsilon_0 R}. \qquad (3.15)$$

Donc, (3.12) prend la forme

$$|F(z)| \leq \exp\left\{ \frac{1}{(\varepsilon_0 R)^{\beta}} \right\}. \qquad (3.16)$$

Une contradiction dans (3.3) avec (3.11) et (3.16); donc $\sigma(f) \geq \mu$, et comme $z \to z_0$ alors on a aussi $\sigma_{z_0}(f) \geq \mu$.

Maintenant, on montre que $\sigma_2(f) \geq \mu$. D'après (3.3), on déduit que

$$\left| B(z) e^{\dfrac{b}{(z_0 - z)^{\mu}}} \right| \leq \left| \frac{f''}{f} \right| + |A(z)| \left| \frac{f'}{f} \right| + \left| \frac{F}{f} \right|. \tag{3.17}$$

D'après le Lemme 3.2.1, pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe un ensemble $E \subset [0,1)$ de mesure logarithmique finie $\int\limits_E \frac{1}{1-r} dr < \infty$, tel que pour tout $z \in D$ satisfaisant $|z| = r \notin E$, on a

$$\left| \frac{f^{(k)}(z)}{f(z)} \right| \leq \left(\frac{1}{1-r} \right)^{c} (T(s(r), f))^{k}, \quad (k = 1, 2), \tag{3.18}$$

où $c > 0$ est une constante réelle. De Lemme 3.2.2, pour toute donnée $0 < \varepsilon < 1$, il existe $R_0 > 0$ tel que pour $0 < R < R_0$ et $\varphi \in (\varphi_1, \varphi_2)$, on a

$$\exp\left\{ (1-\varepsilon) \delta_b(\varphi) \frac{1}{R^{\mu}} \right\} \leq \left| B(z) e^{\dfrac{b}{(z_0 - z)^{\mu}}} \right|; \tag{3.19}$$

et en utilisant (3.15) on déduit

$$\exp\left\{ (1-\varepsilon) \delta_b(\varphi) \frac{\varepsilon_0}{(1-r)^{\mu}} \right\} \leq \left| B(z) e^{\dfrac{b}{(z_0 - z)^{\mu}}} \right|. \tag{3.20}$$

De $\max\{\sigma_{z_0}(A), \sigma_{z_0}(F)\} < \mu \leq \sigma_{z_0}(f)$, par le Lemme 3.2.4 et la Remarque 3.2.2, on a

$$\max\left\{ |A(z)|, \left| \frac{F(z)}{M(r, z_0, f)} \right| \right\} \leq \exp\left\{ \frac{1}{(1-r)^{\beta}} \right\}, \tag{3.21}$$

où $\max\{\sigma_{z_0}(A), \sigma_{z_0}(F)\} < \beta < \mu$. En utilisant (3.18)-(3.21) dans (3.17), on obtient

$$\exp\left\{ (1-\varepsilon) \delta_b(\varphi) \frac{\varepsilon_0}{(1-r)^{\mu}} \right\} \leq c \exp\left\{ \frac{1}{(1-r)^{\beta}} \right\} (T(s(r), f))^{2}. \tag{3.22}$$

En notant $s(r)=r'$, on obtient $1-r=\frac{1}{d}(1-r')$ et (3.22) prend la forme:

$$\exp\left\{(1-\varepsilon)\,\delta_b(\varphi)\,\frac{d^\beta\varepsilon_0}{(1-r')^\mu}\right\}\leq c\exp\left\{\frac{d^\beta}{(1-r')^\beta}\right\}(T(r',f))^2,$$

ce qui implique que $\sigma_2(f)\geq\mu$.

3.4 Preuve du Théorème 3.1.5

On commence par prouver que $\sigma(f)\geq\mu$. Pour cela, on suppose au contraire que $\sigma(f)<\mu$. Pour $z\in D$, soit $\arg(z_0-z)=\varphi$ et $|z_0-z|=R$. Par le Lemme 3.2.2 et la Remarque 3.2.1, puisque $\mu>1$ et $\arg a\neq\arg b$, il existe un intervalle $(\varphi_1,\varphi_2)\subset\left(\arg z_0-\frac{\pi}{2},\arg z_0+\frac{\pi}{2}\right)$, tel que pour tout $\varphi\in(\varphi_1,\varphi_2)$ on a $\delta_b(\varphi)>0$ et $\delta_a(\varphi)<0$. Alors en utilisant le même raisonnement que dans (3.11), pour $\varphi\in(\varphi_1,\varphi_2)$ et $R>0$ assez petit, on peut écrire

$$\left|f''+A(z)\,e^{\frac{a}{(z_0-z)^\mu}}f'+B(z)\,e^{\frac{b}{(z_0-z)^\mu}}f\right|=\exp\left\{\delta_b(\varphi)\,\frac{1}{R^\mu}\right\}(1+o(1)). \tag{3.23}$$

Une contradiction subsiste entre (3.16) et (3.23) dans l'équation (3.4); donc $\sigma(f)\geq\mu$ et de plus $\sigma_{z_0}(f)\geq\mu$.

Maintenant, on procède de prouver que $\sigma_2(f)\geq\mu$. D'après (3.4), on peut écrire

$$\left|B(z)\,e^{\frac{b}{(z_0-z)^\mu}}\right|\leq\left|\frac{f''}{f}\right|+\left|A(z)\,e^{\frac{a}{(z_0-z)^\mu}}\right|\left|\frac{f'}{f}\right|+\left|\frac{F}{f}\right|. \tag{3.24}$$

De $\delta_a(\varphi)<0$ et $\max\{\sigma_{z_0}(A),\sigma_{z_0}(F)\}<\beta<\mu\leq\sigma_{z_0}(f)$, puis par le Lemme 3.2.4 et la Remarque 3.2.2 on obtient

$$\max\left\{|A(z)|\,e^{\frac{a}{(z_0-z)^\mu}},\left|\frac{F(z)}{M(r,z_0,f)}\right|\right\}\leq\exp\left\{\frac{1}{(1-r)^\beta}\right\}. \tag{3.25}$$

En utilisant (3.18), (3.20) et (3.25) dans (3.24), on obtient la même inégalité (3.22) et donc on déduit le résultat $\sigma_2(f) \geq \mu$..

3.5 Preuve du Théorème 3.1.6

De la même manière que précédement, on commene à prouver que $\sigma(f) \geq \mu$. Pour cela, on suppose au contraire que $\sigma(f) < \mu$. Par le Lemme 3.2.2 et la Remarque 3.2.1, puisque $\mu > 1$, il existe un intervalle $(\varphi_1, \varphi_2) \subset \left(\arg z_0 - \frac{\pi}{2}, \arg z_0 + \frac{\pi}{2}\right)$, tel que pour tout $\varphi \in (\varphi_1, \varphi_2)$ on a $\delta_b(\varphi) > 0$. De $a = cb$ $(0 < c < 1)$ et $\delta_a(\varphi) = c\delta_b(\varphi)$ on déduit (3.23), ce qui est contradictoire avec (3.16) dans l'équation (3.4). Donc, on a $\sigma(f) \geq \mu$. Maintenant, on montre que $\sigma_2(f) \geq \mu$. De $\sigma_{z_0}(A) < \mu$, par le Lemme 3.2.2 et pour $\varphi \in (\varphi_1, \varphi_2)$ on obtient

$$\left| A(z)\, e^{\frac{a}{(z_0 - z)^{\mu}}} \right| \leq \exp\left\{ (1+\varepsilon)\, \delta_a(\varphi) \frac{1}{R^{\mu}} \right\}. \tag{3.26}$$

En utilisant (3.18), (3.19) et (3.26) dans (3.24), on déduit que

$$\exp\left\{ (1-\varepsilon)\, \delta_b(\varphi) \frac{1}{R^{\mu}} \right\} \leq c \exp\left\{ (1+\varepsilon)\, \delta_a(\varphi) \frac{1}{R^{\mu}} \right\} \left(T(s(r), f)\right)^2. \tag{3.27}$$

En prenant $0 < \varepsilon < \frac{1-c}{1+c}$ dans (3.27), et par le même raisonnement que ci-dessus, on obtient $\sigma_2(f) \geq \mu$.

Chapitre 4

La croissance locale des solutions d'une classe d'équations différentielle linéaire autour d'un point singulier essentiel isolé

4.1 Introduction et présentation des résultats

L'importance et l'élégance de la théorie de Nevanlinna sur la distribution des valeurs des fonctions méromorphes dans le plan complexe, a inspiré de nombreux chercheurs à trouver des modifications et à apporter des généralisations dans des domaines différents. L'extension de la théorie Nevanlinna aux anneaux a été appliquée dans plusieurs travaux; voir [5, 33, 34, 35, 39]. Dans cet chapitre, nous allons essayer d'étudier la croissance des solutions des équations différentielles linéaires au voisinage d'un point singulier isolé. Pour celà, on commence à donner les définitions appropriées. On note $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ et soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans $\overline{\mathbb{C}} - \{z_0\}$, où $z_0 \in \mathbb{C}$. Au préalable, nous définissons la fonction de comptage de f

par

$$N_{z_0}(r,f) = -\int_{\infty}^{r} \frac{n(t,f) - n(\infty,f)}{t} dt - n(\infty,f)\log r, \tag{4.1}$$

où $n(t,f)$ est le nombre de pôles de $f(z)$ dans la région $\{z \in \mathbb{C} : t \leq |z - z_0|\} \cup \{\infty\}$, chaque pôle étant compté avec son ordre de multiplicité. De même, nous définissons la fonction de proximité par

$$m_{z_0}(r,f) = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \ln^+ \left| f\left(z_0 - re^{i\varphi}\right) \right| d\varphi. \tag{4.2}$$

La fonction caractéristique de f est définie de la manière habituelle par

$$T_{z_0}(r,f) = m_{z_0}(r,f) + N_{z_0}(r,f). \tag{4.3}$$

En outre, l'ordre de la fonction méromorphe $f(z)$ près de z_0 est définie par

$$\sigma_T(f,z_0) = \limsup_{r \to 0} \frac{\log^+ T_{z_0}(r,f)}{-\log r}. \tag{4.4}$$

Si f est une fonction analytique dans $\overline{\mathbb{C}} - \{z_0\}$, alors l'ordre de f est défini par

$$\sigma_M(f,z_0) = \limsup_{r \to 0} \frac{\log^+ \log^+ M_{z_0}(r,f)}{-\log r}, \tag{4.5}$$

où $M_{z_0}(r,f) = \max\{|f(z)| : |z - z_0| = r\}$.

A titre d'exemple, pour la fonction $f(z) = \exp\left\{\frac{1}{(z_0 - z)^n}\right\}$, où $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, on a

$M_{z_0}(r,f) = \exp\left\{\frac{1}{r^n}\right\}$, puis $\sigma_M(f,z_0) = n$ et

$$T_{z_0}(r,f) = m_{z_0}(r,f) = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \ln^+ \left| f\left(z_0 - re^{i\varphi}\right) \right| d\varphi = \frac{1}{r^n}.$$

Ainsi $\sigma_T(f,z_0) = n$.

Pour la fonction $f(z) = \exp\left\{\dfrac{-1}{(1-z)}\right\}$, on a $\sigma(f,1) = 1$, alors que dans le disque unité on a $\sigma_T(f) = \sigma_M(f) = 0$.

On sait que dans le disque unité, on a $\sigma_T(f) \leq \sigma_M(f) \leq \sigma_T(f) + 1$ et dans le plan complexe, on a $\sigma_T(f) = \sigma_M(f)$. Maintenant, qu'en est-il entre $\sigma_T(f, z_0)$ et $\sigma_M(f, z_0)$?. Ci-dessous, dans le lemme 4.2.2, nous allons montrer que si $f(z)$ est une fonction méromorphe dans $\overline{\mathbb{C}} - \{z_0\}$ et $g(w) = f\left(z_0 - \frac{1}{w}\right)$, alors $g(w)$ est une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$ et nous avons $T(R, g) = T_{z_0}(r, f)$; où $R = \frac{1}{r}$; ce qui implique que $\sigma_T(f, z_0) = \sigma_M(f, z_0)$. Ainsi, nous pouvons utiliser la notation $\sigma(f, z_0)$ sans aucune ambiguïté.

En outre, nous définissons l'hyper-ordre de f près z_0 par:

$$\sigma_{2,T}(f, z_0) = \limsup_{r \to 0} \frac{\log^+ \log^+ T_{z_0}(r, f)}{-\log r}, \tag{4.6}$$

$$\sigma_{2,M}(f, z_0) = \limsup_{r \to 0} \frac{\log^+ \log^+ \log^+ M_{z_0}(r, f)}{-\log r}. \tag{4.7}$$

L'équation différentielle linéaire

$$f'' + A(z)\, e^{az} f' + B(z)\, e^{bz} f = 0, \tag{4.8}$$

où $A(z)$ et $B(z)$ sont des fonctions entières, a été étudié par de nombreux auteurs; voir par exemple [1, 10, 11, 21]. Dans [10], Chen a prouvé que si $ab \neq 0$ et $\arg a \neq \arg b$ ou $a = cb$ $(0 < c < 1$ ou $c > 1)$, alors chaque solution $f(z) \not\equiv 0$ de (4.8) est d'ordre infini. Récemment, Hamouda a prouvé des résultats similaires à (4.8) dans le disque unité sur l'équation différentielle

$$f'' + A(z)\, e^{\frac{a}{(z_0 - z)^\mu}} f' + B(z)\, e^{\frac{b}{(z_0 - z)^\mu}} f = 0, \tag{4.9}$$

où $A(z)$ et $B(z)$ sont analytiques dans le disque unité, $\mu > 1$ et $\arg a \neq \arg b$ ou $a = cb$ $(0 < c < 1)$, voir [24]. Cependant, la méthode de [24] ne fonctionne pas en général pour le cas $0 < \mu \leq 1$: voir [24, Remark 3.1]. Le théorème suivant traite le cas $\mu = 1$ avec certaines modifications sur $A(z)$ et $B(z)$.

Théorème 4.1.1 *[16] Soient z_0, a, b des constantes complexes tels que* $\arg a \neq \arg b$ *ou $a = cb$ $(0 < c < 1)$ et n un entier positif. Soit $A(z), B(z) \not\equiv 0$ deux fonctions analytiques dans $\overline{\mathbb{C}} - \{z_0\}$ avec* $\max\{\sigma(A, z_0), \sigma(B, z_0)\} < n$. *Alors, chaque solution $f(z) \not\equiv 0$ de l'équation différentielle:*

$$f'' + A(z) e^{\frac{a}{(z_0 - z)^n}} f' + B(z) e^{\frac{b}{(z_0 - z)^n}} f = 0. \tag{4.10}$$

satisfait $\sigma(f, z_0) = \infty$ avec $\sigma_2(f, z_0) = n$.

Exemple 4.1.1 *Considérons l'équation différentielle:*

$$f'' + e^{\frac{1}{z^2}} f' + e^{\frac{2}{z^2}} f = 0.$$

les conditions du Théorème 4.1.1 sont vérifiées. Alors chaque solution $f \neq 0$ de cette équation différentielle satisfait $\sigma(f, 0) = \infty$ avec $\sigma_2(f, 0) = 2$.

Exemple 4.1.2 *Considérons l'équation différentielle:*

$$f'' + e^{\frac{1}{1-z}} f' + e^{\frac{2}{1-z}} f = 0.$$

les conditions du Théorème 4.1.1 sont vérifiées. Alors chaque solution $f \neq 0$ de cette équation différentielle satisfait $\sigma(f, 1) = \infty$ avec $\sigma_2(f, 1) = 1$. (le cas $\mu = 1$)

Dans [18], Frei a prouvé le résultat suivant dans le plan complexe ..

Théorème 4.1.2 *[18] Si l'équation différentielle*

$$g'' + e^{-w} g' + cg = 0 \tag{4.11}$$

où $c \neq 0$ est une constante complexe, possède une solution d'ordre fini $g \not\equiv 0$ alors, $c = -k^2$ où k est un nombre entier positif. Récpproquement, pour chaque entier *positif k, l'équation (4.11) avec $c = -k^2$, possède une solution g qui est un polynôme en e^w de degré k.*

L'analogue de ce resultat, au voisinage d'un point singulier z_0, est le théorème suivant.

Théorème 4.1.3 *[16] Soient $c \neq 0, z_0$ deux nombres complexes. Si l'équation différentielle*

$$f'' + \left(\frac{1}{(z_0 - z)^2} e^{\frac{-1}{(z_0 - z)}} - \frac{2}{(z_0 - z)} \right) f' + \frac{c}{(z_0 - z)^4} f = 0 \tag{4.12}$$

possède une solution $f(z) \not\equiv 0$ d'ordre fini $\sigma(f, z_0) < \infty$ alors $c = -k^2$, où k est un nombre entier positif. Réciproquement, pour chaque entier positif k, l'équation (4.12) avec $c = -k^2$ possède une solution f polynômiale en $e^{\frac{1}{(z_0 - z)}}$ de degré k.

Exemple 4.1.3 $f_1(z) = 1 + e^{\frac{1}{(z_0 - z)}}$ *est une solution de l'équation différentielle:*

$$f'' + \left(\frac{1}{(z_0 - z)^2} e^{\frac{-1}{(z_0 - z)}} - \frac{2}{(z_0 - z)} \right) f' - \frac{1}{(z_0 - z)^4} f = 0.$$

Exemple 4.1.4 $f_2(z) = 1 + 4e^{\frac{1}{(z_0 - z)}} + 6e^{\frac{2}{(z_0 - z)}}$ *est une solution de l'équation différentielle:*

$$f'' + \left(\frac{1}{(z_0 - z)^2} e^{\frac{-1}{(z_0 - z)}} - \frac{2}{(z_0 - z)} \right) f' - \frac{4}{(z_0 - z)^4} f = 0.$$

Théorème 4.1.4 *[16] Soient $A_0(z) \not\equiv 0, A_1(z), ..., A_{k-1}(z)$ des fonctions méro-*

morphes dans $\overline{\mathbb{C}}-\{z_0\}$ *satisfaisant*

$$|A_0(z)| \geq \exp\left\{\frac{\alpha}{r^{\mu}}\right\}, \tag{4.13}$$

$$|A_j(z)| \leq \exp\left\{\frac{\beta}{r^{\mu}}\right\}, \ j \neq 0, \tag{4.14}$$

où $\alpha > \beta \geq 0,\ \mu > 0,\ \arg(z_0 - z) = \theta \in (\theta_1, \theta_2) \subset [0, 2\pi)$ *et* $|z_0 - z| = r \to 0.$ *Alors, chaque solution* $f(z) \not\equiv 0$ *analytique dans* $\overline{\mathbb{C}}-\{z_0\}$ *de l'équation différentielle:*

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + ... + A_1(z) f' + A_0(z) f = 0, \tag{4.15}$$

qui est analytique dans $\overline{\mathbb{C}}-\{z_0\}$, *satisfait* $\sigma_2(f, z_0) \geq \mu$.

Des résultats similaires au Théorème 4.1.4 dans le plan complexe sont donnés dans [3, 22].

Théorème 4.1.5 *[16] Soient* $A_0(z) \not\equiv 0, A_1(z), ..., A_{k-1}(z)$ *des fonctions analytiques dans* $\overline{\mathbb{C}}-\{z_0\}$ *satisfaisant* $\max\{\sigma(A_j, z_0) : j \neq 0\} < \sigma(A_0, z_0)$. *Alors, chaque solution* $f(z) \not\equiv 0$ *de (4.15), qui est analytique dans* $\overline{\mathbb{C}}-\{z_0\}$, *satisfait* $\sigma_2(f, z_0) = \sigma(A_0, z_0)$.

4.2 Lemmes préliminaires

Dans la suite de ce chapitre, nous utiliserons les notations suivantes qui ne sont pas nécessairement les mêmes à chaque occurrence:

$r_0 > 0,\ \varepsilon > 0,\ \gamma > 1,\ \lambda > 0$ sont des constantes réelles.

$E_1^* \subset (0, r_0]$ de mesure logarithmique finie $\int_0^{r_0} \frac{\chi_{E_1^*}}{t} dt < \infty$.

$E_2^* \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle $\int_0^{2\pi} \chi_{E_2^*} dt = 0$.

Lemme 4.2.1 *[20] Soient* g *une fonction méromorphe transcendante dans* $\mathbb{C}$, $\gamma > 1$ $\varepsilon > 0$ *deux constantes réelles; alors* *i) Il existe un ensemble $E_1 \subset (1,\infty)$ de mesure logarithmique finie et une constante $\lambda > 0$ qui ne dépend que de γ telles que pour tout $R = |w|$ vérifiant $R \notin E_1$, on a*

$$\left|\frac{g^{(k)}(w)}{g(w)}\right| \leq \lambda \left[T(\gamma R, g)\log T(\gamma R, g)\right]^k; \tag{4.16}$$

ii) Il existe un ensemble $E_2 \subset [0,2\pi)$ de mesure linéaire nulle et une constante $\lambda > 0$ qui ne dépend que de γ telles que pour tout $\theta \in [0,2\pi)\backslash E_2$ il existe une constante $R_0 = R_0(\theta) > 0$ tel que pour tout z vérifiant $\arg z \in [0,2\pi)\backslash E_2$ et $R = |z| > R_0$, on a

$$\left|\frac{g^{(k)}(w)}{g(w)}\right| \leq \lambda \left[T(\gamma R, g) R^{\varepsilon}\log T(\gamma R, g)\right]^k. \tag{4.17}$$

Lemme 4.2.2 *[16] Soit f une fonction méromorphe non constante dans $\overline{\mathbb{C}} - \{z_0\}$ et soit $g(w) = f\left(z_0 - \frac{1}{w}\right)$. Alors, $g(w)$ est méromorphe dans $\mathbb{C}$ et on a*

$$T(R,g) = T_{z_0}\left(\frac{1}{R}, f\right).$$

Preuve 4.2.1 *Pour la preuve, on a besoin des assertions suivantes faciles à prouver.*
i) $w_0 \neq 0$ est un pôle de g d'ordre n si et seulement si $\frac{1}{w_0} - z_0$ est un pôle de f d'ordre n.
ii) 0 est un pôle de g d'ordre n si et seulement si ∞ est un pôle de f d'ordre n.
iii) Le changement de variable $w = \frac{1}{z_0 - z}$ applique la région $\{z \in \mathbb{C} : t \leq |z - z_0|\} \cup \{\infty\}$ sur la région $\left\{w \in \mathbb{C} : |w| \leq \frac{1}{t}\right\}$.
A partir de ces assertions, $g(w)$ est méromorphe dans $\mathbb{C}$ et par le changement de

variable $T=\frac{1}{t}$, *on obtient*

$$\begin{aligned}
N(R,g) &= \int_0^R \frac{n(T,g)-n(0,g)}{T}dT+n(0,g)\ln R \\
&= -\int_{\infty}^{\frac{1}{R}} \frac{n(t,f)-n(\infty,f)}{t}dt+n(\infty,f)\ln R \\
&= -\int_{\infty}^{\frac{1}{R}} \frac{n(t,f)-n(\infty,f)}{t}dt-n(\infty,f)\ln\frac{1}{R}=N_{z_0}\left(\frac{1}{R},f\right).
\end{aligned}$$

Ce qui donne $N(R,g)=N_{z_0}\left(\frac{1}{R},f\right)$. *On a*

$$\begin{aligned}
m(R,g) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^+\left|g\left(Re^{i\varphi}\right)\right|d\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^+\left|f\left(z_0-\frac{1}{R}e^{-i\varphi}\right)\right|d\varphi \quad (4.18)\\
&= \frac{-1}{2\pi}\int_0^{-2\pi}\ln^+\left|f\left(z_0-\frac{1}{R}e^{i\varphi}\right)\right|d\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi}^{0}\ln^+\left|f\left(z_0-\frac{1}{R}e^{i\varphi}\right)\right|d\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^+\left|f\left(z_0-\frac{1}{R}e^{i\varphi}\right)\right|d\varphi=m_{z_0}\left(\frac{1}{R},f\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, on peut conclure que $T(R,g)=T_{z_0}\left(\frac{1}{R},f\right)$.

Remarque 4.2.1 *[16] D'après Lemme 4.2.2, si* f *est une fonction méromorphe non constante dans* $\overline{\mathbb{C}}-\{z_0\}$ *et* $g(w)=f\left(z_0-\frac{1}{w}\right)$ *alors* $\sigma(f,z_0)=\sigma(g)$.

Lemme 4.2.3 *[16] Soient* f *une fonction méromorphe non constante dans* $\overline{\mathbb{C}}-\{z_0\}$ *et* $\gamma>1,\ \varepsilon>0$ *deux constantes données; alors*
i) Il existe un ensemble $E_1^*\subset(0,r_0]$ *de mesure logarithmique finie* $\int_0^{r_0}\frac{\chi_{E_1^*}}{t}dt<\infty$ *et une constante* $\lambda>0$ *qui ne dépend que de* γ *telles que pour tout* $r=|z-z_0|$

satisfaisant $r \in (0, r_0] \setminus E_1^*$, *on a*

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right| \leq \lambda \left[\frac{1}{r^2} T_{z_0}\left(\frac{r}{\gamma}, f\right) \log T_{z_0}\left(\frac{r}{\gamma}, f\right)\right]^k \ \ (k \in \mathbb{N}); \tag{4.19}$$

ii) Il existe un ensemble $E_2^* \subset [0, 2\pi)$ *de mesure linéaire nulle et une constante* $\lambda > 0$ *qui ne dépend que de* γ *telles que pour tout* $\theta \in [0, 2\pi) \setminus E_2^*$ *il existe une constante* $r_0 = r_0(\theta) > 0$ *tel que pour tout* z *satisfaisant* $\arg(z - z_0) = \theta$ *et* $r = |z - z_0| < r_0$, *on a*

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right| \leq \lambda \left[\frac{1}{r^{2+\varepsilon}} T_{z_0}\left(\frac{r}{\gamma}, f\right) \log T_{z_0}\left(\frac{r}{\gamma}, f\right)\right]^k \ \ (k \in \mathbb{N}). \tag{4.20}$$

Preuve 4.2.2 *Soit* $g(w) = f\left(z_0 - \frac{1}{w}\right)$. $g(w)$ *est méromorphe dans* $\mathbb{C}$ *et par le lemme 4.2.1,on a (4.16) et (4.17). On a* $f(z) = g(w)$ *telle que* $w = \frac{1}{z_0 - z}$; *alors* $f'(z) = \frac{1}{(z_0 - z)^2} g'(w)$ *et*

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{(z_0 - z)^2} \frac{g'(w)}{g(w)}. \tag{4.21}$$

du Lemme 4.2.1, on a

$$\left|\frac{g'(w)}{g(w)}\right| \leq \lambda \left[T(\gamma R, g) \log T(\gamma R, g)\right], \ \ R \notin E_1;$$

et du Lemme 4.2.2 et (4.21), on obtient

$$\begin{aligned}\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| &\leq \lambda \left[\frac{1}{r^2} T_{z_0}\left(\frac{1}{\gamma R}, f\right) \log T_{z_0}\left(\frac{1}{\gamma R}, f\right)\right] \\ &\leq \lambda \left[\frac{1}{r^2} T_{z_0}\left(\frac{r}{\gamma}, f\right) \log T_{z_0}\left(\frac{r}{\gamma}, f\right)\right], \ \ r \notin E_1^*.\end{aligned}$$

où $\frac{1}{r} = R \notin E_1 \Leftrightarrow r \notin E_1^*$ *et* $\int\limits_0^{r_0} \frac{\chi_{E_1^*}}{t} dt = \int\limits_{1/r_0}^{\infty} \frac{\chi_{E_1}}{T} dT < \infty$.
De $f''(z) = \frac{1}{(z_0 - z)^4} g''(w) + \frac{2}{(z_0 - z)^3} g'(w)$; *on obtient*

$$\frac{f''(z)}{f(z)} = \frac{1}{(z_0 - z)^4} \frac{g''(w)}{g(w)} + \frac{2}{(z_0 - z)^3} \frac{g'(w)}{g(w)}.$$

et d'après le lemme 4.2.1 et le lemme 4.2.2, on conclut que

$$\left|\frac{f''(z)}{f(z)}\right| \leq \lambda\left[\frac{1}{r^2}T_{z_0}\left(\frac{r}{\gamma},f\right)\log T_{z_0}\left(\frac{r}{\gamma},f\right)\right]^2 \quad r\notin E_1^*.$$

D'une facon général, on peut obtenir que

$$f^{(k)}(z)=\frac{1}{(z_0-z)^{2k}}g^{(k)}(w)+\frac{a_{k-1}}{(z_0-z)^{2k-1}}g^{(k-1)}(w)+...+\frac{a_1}{(z_0-z)^{k+1}}g'(w),$$

où $a_j \ (j=1,2,...,k-1)$ *sont des nombres entiers; et ainsi*

$$\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}=\frac{1}{(z_0-z)^{2k}}\frac{g^{(k)}(w)}{g(w)}+\frac{a_{k-1}}{(z_0-z)^{2k-1}}\frac{g^{(k-1)}(w)}{g(w)}+...+\frac{a_1}{(z_0-z)^{k+1}}\frac{g'(w)}{g(w)}. \tag{4.22}$$

Aussi en utilisant le lemme 4.2.1 et le lemme 4.2.2 avec (4.22), et pour $r=|z-z_0|<r_0$, *on a*

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right| \leq \lambda\left[\frac{1}{r^2}T_{z_0}\left(\frac{r}{\gamma},f\right)\log T_{z_0}\left(\frac{r}{\gamma},f\right)\right]^k \quad r\notin E_1^*.$$

Maintenant, pour (4.20) nous pouvons utiliser la même méthode que ci-dessus et en utilisant le lemme 4.2.1 et le lemme 4.2.2 avec (4.22), on obtient, pour $r=|z-z_0|<r_0$ *et* $\arg(z-z_0)\in[0,2\pi)\setminus E_2^*$,

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right| \leq \lambda\left[\frac{1}{r^{2+\varepsilon}}T_{z_0}\left(\frac{r}{\gamma},f\right)\log T_{z_0}\left(\frac{r}{\gamma},f\right)\right]^k,$$

où $\theta\in E_2 \Leftrightarrow 2\pi-\theta\in E_2^*$ $(E_2^*\subset[0,2\pi)$ *de mesure linéaire nulle).*

Le lemme suivant est un cas particulier du lemme 4.2.3.

Lemme 4.2.4 *[16] Soit* f *une fonction méromorphe non constante dans* $\overline{\mathbb{C}}-\{z_0\}$ *d'ordre fini*

$\sigma(f,z_0)<\infty$*; soit* $\varepsilon>0$ *une constante donnée. Alors*

i) Il existe un ensemble $E_1^*\subset(0,r_0]$ *de mesure logarithmique finie* $\int\limits_0^{r_0}\frac{\chi_{E_1^*}}{t}dt<\infty$ *telle* *que pour tout* $r = |z - z_0| \in (0, r_0] \setminus E_1^*$, *on a*

$$\left| \frac{f^{(k)}(z)}{f(z)} \right| \leq \frac{1}{r^{k(\sigma+2+\varepsilon)}}, \ (k \in \mathbb{N}). \tag{4.23}$$

ii) Il existe un ensemble $E_2^* \subset [0, 2\pi)$ *de mesure linéaire nulle tel que pour tout* $\theta \in [0, 2\pi) \setminus E_2^*$ *il existe une constante* $r_0 = r_0(\theta) > 0$ *telle que pour tout* z *satisfaisant* $\arg(z - z_0) = \theta$ *et* $r = |z - z_0| < r_0$, *l'inégalité (4.23) est vérifiée.*

La question qui se pose ici est la suivante: peut-on obtenir des estimations similaires sur $\left| \frac{f^{(k)}(z)}{f(z)} \right|$ dans (4.19), (4.20) et (4.23) pour une fonction non constante supposée méromorphe seulement sur une région bornée de la forme $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| \leq r_0\}$?

Lemme 4.2.5 *[16] Soit* f *une fonction analytique non constante dans* $\overline{\mathbb{C}} - \{z_0\}$ *d'ordre* $\sigma(f, z_0) > \alpha > 0$. *Alors, il existe un ensemble* $F \subset (0, r_0]$ *de mesure logarithmique infinie* $\int_0^{r_0} \frac{\chi_F}{t} dt = \infty$ *tel que pour tout* $r \in F$ *et* $|f(z)| = M_{z_0}(r, f)$, *on a*

$$\log |f(z)| > \frac{1}{r^{\alpha}}.$$

Preuve 4.2.3 *De la définition de* $\sigma(f, z_0)$, *il existe une suite décroissante* $\{r_m\} \to 0$ *satisfaisant* $\frac{m}{m+1} r_m > r_{m+1}$ *et*

$$\lim_{m \to \infty} \frac{\log \log M_{z_0}(r_m, f)}{-\log r_m} > \alpha.$$

Alors, il existe m_0 *tel que pour tout* $m > m_0$ *et pour une donnée* $\varepsilon > 0$ *assez petit, on a*

$$\log M_{z_0}(r_m, f) > \frac{1}{r_m^{\alpha+\varepsilon}}. \tag{4.24}$$

Il existe m_1 *tel que pour tout* $m > m_1$, *et pour tout* $r \in \left[\frac{m}{m+1} r_m, r_m\right]$ *et pour* $\varepsilon > 0$, *donné, on a*

$$\left(\frac{m}{m+1}\right)^{\alpha+\varepsilon} > r^{\varepsilon}. \tag{4.25}$$

Par (4.24) et (4.25), pour tout $m > m_2 = \max\{m_0, m_1\}$ *et pour* $r \in \left[\frac{m}{m+1} r_m, r_m\right]$, *on a*

$$\log M_{z_0}(r,f) > \log M_{z_0}(r_m,f) > \frac{1}{r_m^{\alpha+\varepsilon}} > \frac{1}{r^{\alpha+\varepsilon}}\left(\frac{m}{m+1}\right)^{\alpha+\varepsilon} > \frac{1}{r^{\alpha}}.$$

Soit $F = \bigcup\limits_{m=m_2}^{\infty}\left[\frac{m}{m+1}r_m, r_m\right]$ *; alors*

$$\sum_{m=m_2}^{\infty}\int_{\frac{m}{m+1}r_m}^{r_m}\frac{dt}{t} = \sum_{m>m_2}\log\frac{m+1}{m} = \infty.$$

Nous rappelons un cas particulier d'un résultat important de Chiang et Hayman dans [14]

Lemme 4.2.6 *[14] Soient A_j des fonctions méromorphes dans $\mathbb{C}$ et f une solution de (4.15), en supposant que tous les coefficients A_j ne sont pas constants. Étant donné une constante $\gamma > 1$, et en notant $T(R) := \sum\limits_{j=0}^{k-1} T(R, A_j)$, on a*

$$\log m(R,f) < T(R)\{\log R \log T(R)\}^{\gamma}.$$

Nous pouvons transformer ce résultat au voisinage d'un point singulier par le lemme suivant.

Lemme 4.2.7 *[16] Soient A_j des fonctions méromorphes dans $\overline{\mathbb{C}} - \{z_0\}$ et f une solution de (4.15), en supposant que tous les coefficients A_j ne sont pas constantes. Étant donné une constante $\gamma > 1$, et en notant $T_{z_0}(r) := T_{z_0}(r, A_0) + \sum\limits_{j=1}^{k-1}\sum\limits_{i=j}^{k-1} T_{z_0}(r, A_i) + O\left(\log\frac{1}{r}\right)$, on a*

$$\log m_{z_0}(r,f) < T_{z_0}(r)\left\{\log\frac{1}{r}\log\left(T_{z_0}(r)\right)\right\}^{\gamma}.$$

Preuve 4.2.4 *Soit $g(w) = f\left(z_0 - \frac{1}{w}\right)$; $g(w)$ est méromorphe $\mathbb{C}$. On a $f(z) = g(w)$ telle que $w = \frac{1}{z_0 - z}$; alors $f'(z) = \frac{1}{(z_0-z)^2}g'(w) = w^2 g'(w)$, $f''(z) = w^4 g''(w) +$*

$2w^3 g'(w)$; *En général, nous pouvons obtenir que*

$$f^{(k)}(z) = w^{2k} g^{(k)}(w) + a_{k-1} w^{2k-1} g^{(k-1)}(w) + ... + a_1 w^{k+1} g'(w), \qquad (4.26)$$

où $a_j \ (j = 1, 2, ..., k-1)$ *sont des nombres entiers. Substituant (4.26) dans (4.15), nous obtenons*

$$g^{(k)}(w) + B_{k-1}(w) g^{(k-1)}(w) + ... + B_1(w) g'(w) + B_0(w) g(w) = 0,$$

telle que $B_0(w) = \frac{1}{w^{2k}} A_0\left(z_0 - \frac{1}{w}\right)$ *et pour* $j \neq 0$, $B_j(w) = \sum\limits_{i=j}^{k-1} \frac{c_{ij}}{w^{n_{ij}}} A_i\left(z_0 - \frac{1}{w}\right)$ *où* c_{ij} *et* n_{ij} *sont des nombres entiers avec* $0 < n_{ij} \leq 2k$. *De* $A_j\left(z_0 - \frac{1}{w}\right)$ $(j = 0, 1, ..., k-1)$ *des fonctions méromorphes dans* $\mathbb{C}$, *de plus* $B_j(w)$ *sont des fonctions méromorphes dans* $\mathbb{C}$ *et par le Lemme 4.2.6, on obtient :*

$$\log m(R, g) < T(R, B) \{\log R \log T(R, B)\}^{\gamma}, \qquad (4.27)$$

où $T(R, B) = \sum\limits_{j=0}^{k-1} T(r, B_j)$. *Par (4.18), on a*

$$m(R, g) = m\left(\frac{1}{R}, f\right) = m_{z_0}(r, f) \qquad (4.28)$$

et d'après le Lemme 4.2.2,

$$T(R, B) \leq T\left(R, A_0\left(z_0 + \frac{1}{w}\right)\right) + \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{i=j}^{k-1} T\left(R, A_i\left(z_0 + \frac{1}{w}\right)\right) + O(\log R)$$

$$\leq T_{z_0}(r, A_0) + \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{i=j}^{k-1} T_{z_0}(r, A_i) + O\left(\log \frac{1}{r}\right). \qquad (4.29)$$

De (4.27)-(4.29), on peut conlure que

$$\log m_{z_0}(r, f) < T_{z_0}(r) \left\{\log \frac{1}{r} \log (T_{z_0}(r))\right\}^{\gamma}.$$

Lemme 4.2.8 *[16] Soit* $A(z)$ *une fonction analytique dans* $\overline{\mathbb{C}}-\{z_0\}$ *avec* $\sigma(A,z_0)<n$. *et soit* $g(z)=A(z)\exp\left\{\frac{a}{(z_0-z)^n}\right\}$, *(*$n\geq 1$ *un entier)*, $a=\alpha+i\beta\neq 0$, $z_0-z=re^{i\varphi}$, $\delta_a(\varphi)=\alpha\cos(n\varphi)+\beta\sin(n\varphi)$, *et* $H=\{\varphi\in[0,2\pi):\delta_a(\varphi)=0\}$, *(évidemment,* H *est de mesure linéaire nulle). Alors pour tout* $\varepsilon>0$ *donné et pour tout* $\varphi\in[0,2\pi)\backslash H$, *il existe* $r_0>0$ *tels que pour* $0<r<r_0$, *on a*

(i) Si $\delta_a(\varphi)>0$, *alors*

$$\exp\left\{(1-\varepsilon)\,\delta_a(\varphi)\,\frac{1}{r^n}\right\}\leq|g(z)|\leq\exp\left\{(1+\varepsilon)\,\delta_a(\varphi)\,\frac{1}{r^n}\right\},\tag{4.30}$$

(ii) Si $\delta_a(\varphi)<0$, *alors*

$$\exp\left\{(1+\varepsilon)\,\delta_a(\varphi)\,\frac{1}{r^n}\right\}\leq|g(z)|\leq\exp\left\{(1-\varepsilon)\,\delta_a(\varphi)\,\frac{1}{r^n}\right\}.\tag{4.31}$$

Preuve 4.2.5 *Soit* $h(w):=g\left(z_0-\frac{1}{w}\right)=A\left(z_0-\frac{1}{w}\right)\exp\{aw^n\}$, *où* $A\left(z_0-\frac{1}{w}\right)$ *une fonction analytique dans* $\mathbb{C}$ *d'ordre* $\sigma=\sigma(A,z_0)<n$.*On a*

$$|\exp\{aw^n\}|=\left|\exp\left\{\frac{a}{(z_0-z)^n}\right\}\right|=\exp\left\{\frac{\delta_a(\varphi)}{r^n}\right\}.$$

En utilisant le lemme analogue dans $\mathbb{C}$ *(voir [11, 39]), on obtient (4.30) et (4.31).*

4.3 Preuve du Théorème 4.1.1

De (4.10), on peut écrire

$$|B(z)|\left|e^{\frac{b}{(z_0-z)^n}}\right|\leq\left|\frac{f''}{f}\right|+|A(z)|\left|e^{\frac{a}{(z_0-z)^n}}\right|\left|\frac{f'}{f}\right|.\tag{4.32}$$

Cas 1. $\arg a\neq\arg b$, il existe $(\varphi_1,\varphi_2)\subset[0,2\pi)$ tel que pour $\arg(z_0-z)=\varphi\in(\varphi_1,\varphi_2)$ on a $\delta_b(\varphi)>0$ et $\delta_a(\varphi)<0$. De plus, on a $\max\{\sigma(A,z_0),\sigma(B,z_0)\}<n$,

puis par le Lemme 4.2.8, (4.20) et (4.32), on déduit

$$\exp\left\{(1-\varepsilon)\,\delta_b\left(\varphi\right)\frac{1}{r^n}\right\} \leq \frac{\lambda}{r^{2(2+\varepsilon)}}\left[T_{z_0}\left(\frac{r}{\gamma},f\right)\right]^4 \exp\left\{(1-\varepsilon)\,\delta_a\left(\varphi\right)\frac{1}{r^n}\right\}. \quad (4.33)$$

De (4.33), il est facile d'obtenir que $\sigma_2\left(f,z_0\right) \geq n$. D'un autre côté, par le Lemme 4.2.7, on peuts obtenir que $\sigma_2\left(f,z_0\right) \leq n$. Ainsi, $\sigma_2\left(f,z_0\right) = n$.

Cas 2. $a = cb$ $(0 < c < 1)$, il existe $(\varphi_1,\varphi_2) \subset [0,2\pi)$ tel que pour $\arg\left(z_0 - z\right) = \varphi \in (\varphi_1,\varphi_2)$ on a $\delta_a\left(\varphi\right) = c\delta_b\left(\varphi\right) > 0$. De plus, on a $\max\left\{\sigma\left(A,z_0\right),\sigma\left(B,z_0\right)\right\} < n$, puis par le Lemme 4.2.8, (4.20) et (4.32), on a

$$\exp\left\{(1-\varepsilon)\,\delta_b\left(\varphi\right)\frac{1}{r^n}\right\} \leq \frac{\lambda}{r^{2(2+\varepsilon)}}\left[T_{z_0}\left(\frac{r}{\gamma},f\right)\right]^4 \exp\left\{(1+\varepsilon)\,c\delta_b\left(\varphi\right)\frac{1}{r^n}\right\}. \quad (4.34)$$

De (4.34) et en prenant $0 < \varepsilon < \frac{1-c}{1+c}$, on obtient que $\sigma_2\left(f,z_0\right) \geq n$ et par le lemme 4.2.7, on a $\sigma_2\left(f,z_0\right) \leq n$. Ainsi, $\sigma_2\left(f,z_0\right) = n$.

4.4 Preuve du Théorème 4.1.3

En utilisant le changement de variable $w = \dfrac{1}{z_0 - z}$ et en posant $g\left(w\right) = f\left(z\right)$, on obtient $f'\left(z\right) = \frac{1}{(z_0-z)^2}g'\left(w\right) = w^2 g'\left(w\right),\ f''\left(z\right) = w^4 g''\left(w\right) + 2w^3 g'\left(w\right)$. Alors, l'équation différentielle (4.12) prend la forme suivante :

$$g''\left(w\right) + e^{-w}g'\left(w\right) + cg\left(w\right) = 0. \quad (4.35)$$

D'après le théorème 4.1.2, si (4.35) possède une solution $g \not\equiv 0$ d'ordre fini, alors $c = -k^2$ où k est un nombre entier positif. Inversement, pour chaque entier positif k, l'équation, (4.11) avec $c = -k^2$, possède une solution polynômiale g en e^w de degré k. Par la Remarque 4.2.1, on a $\sigma\left(f,z_0\right) = \sigma\left(g\right)$. Donc, si l'équation différentielle (4.12) possède une solution $f\left(z\right) \not\equiv 0$ d'ordre fini $\sigma\left(f,z_0\right) < \infty$ alors $c = -k^2$. Réciproquement, pour chaque entier positif k, l'équation (4.12) avec $c = -k^2$, possède une solution polynômiale f en $e^{\frac{1}{(z_0 - z)}}$ de degré k.

4.5 Preuve du Théorème 4.1.4

De (4.15), on peut écrire

$$|A_0(z)| \leq \left|\frac{f^{(k)}}{f}\right| + |A_{k-1}(z)| \left|\frac{f^{(k-1)}}{f}\right| + ... + |A_1(z)| \left|\frac{f'}{f}\right|. \qquad (4.36)$$

En utilisant (4.13), (4.14) et (4.20) dans (4.36), pour $\arg(z_0 - z) = \theta \in (\theta_1, \theta_2) \subset [0, 2\pi)$ et $|z_0 - z| = r$ assez près de 0, on obtient

$$\exp\left\{\frac{\alpha}{r^{\mu}}\right\} \leq \frac{\lambda}{r^{k(2+\varepsilon)}} \left[T_{z_0}\left(\frac{r}{\gamma}, f\right)\right]^{2k} \exp\left\{\frac{\beta}{r^{\mu}}\right\}. \qquad (4.37)$$

De (4.37), on conclut que $\sigma(f, z_0) \geq \mu$.

4.6 Preuve du Théorème 4.1.5

De (4.15), on peut écrire

$$|A_0(z)| \leq \left|\frac{f^{(k)}}{f}\right| + |A_{k-1}(z)| \left|\frac{f^{(k-1)}}{f}\right| + ... + |A_1(z)| \left|\frac{f'}{f}\right|. \qquad (4.38)$$

Soit $\max\{\sigma(A_j, z_0) : j \neq 0\} < \beta < \alpha < \sigma(A_0, z_0)$. Pour une donnée $\varepsilon > 0$, il existe $r_0 > 0$ tel que pour tout r satisfaisant $r_0 \geq r > 0$, on a

$$|A_j(z)| \leq \exp\left\{\frac{1}{r^{\beta+\varepsilon}}\right\}, \ j = 1, 2, ..., k-1. \qquad (4.39)$$

En prenant $\beta + \varepsilon < \alpha < \sigma(A_0, z_0)$, et par le Lemme 4.2.5, il existe un ensemble $F \subset (0, r_0]$ de mesure logarithmique infinie telle que pour tout $r \in F$ et $|A_0(z)| =$

$M_{z_0}(r, A_0)$, on a

$$|A_0(z)| > \exp\left\{\frac{1}{r^{\alpha}}\right\}. \tag{4.40}$$

En utilisant (4.39)-(4.40) et (4.19) dans (4.38), on obtient

$$\exp\left\{\frac{1}{r^{\alpha}}\right\} \leq \frac{\lambda}{r^{2k}}\left[T_{z_0}\left(\frac{r}{\gamma}, f\right)\right]^{2k} \exp\left\{\frac{1}{r^{\beta+\varepsilon}}\right\}. \tag{4.41}$$

De (4.41), on obtient $\sigma(f, z_0) \geq \alpha$.

D'un autre côté, en appliquant le lemme 4.2.7 et (4.15), on obtient $\sigma(f, z_0) \leq \sigma(A_0, z_0)$. De plus $\alpha \leq \sigma(f, z_0) \leq \sigma(A_0, z_0)$ est vraie pour chaque $\alpha < \sigma(A_0, z_0)$, alors on peut conclure que $\sigma(f, z_0) = \sigma(A_0, z_0)$.

Conclusion

Au cours de ces dernières années, une recherche active s'est développée sur l'étude de la croissance et la distribution des valeurs notamment les zéros et les points fixes des solutions et leurs dérivées des équations différentiells dans le disque unité en utilisant la théorie de R. Nevanlinna, et l'un des problèmes qui intéresse les chercheurs c'est de savoir si les résultats obtenus dans le plan complexe restent valable dans le disque unité. Donc, c'est faire, en quelque sorte, une comparaison entre les deux cas. La première partie de ce travail qui correspond au deuxième chapitre de cette thèse contient une contibution dans ce sens. Dans le troisième chapitre, on est resté dans le disque unité mais en se basant sur le comportement des coefficients au voisinage d'un point sur le bord du disque unité. Cette nouvelle idée nous a permet d'étudier des nouvelles classes d'équations différentielles dans le disque unité. Dans le quatrième chapitre, on est sortie carrément du disque unité, en étudiant la croissance des solutions des équations différentielles linéaires au voisinage d'un point singulier isolé en utilisant des nouvelles définitions similaires aux celles de la théorie de Nevanlinna pour le plan complexe. Je pense que celà va ouvrir des nouvelles perspectives dans ce domaine de recherche.

Bibliographie

[1] I. Amemiya and M. Ozawa, *Non-existence of finite order solutions of* $w'' + e^{-z}w' + Q(z)w = 0$, Hokkaido Math. J., **10** (1981), 1-17.

[2] S. Bank and I. Laine, *On the oscilation theory of* $f'' + A(z)f = 0$ *wehre* $A(z)$ *is entire,* Bull. Amer. Math. Soc. 6 (1982), 95-98.

[3] B. Belaidi and S. Hamouda, *Orders of solutions of an n-th order linear differential equation with entire coefficients*, Electron. J. Differential Equations, Vol. 2001(2001), No. 61, pp. 1-5.

[4] N. Berrighi and S. Hamouda, *Exponent of convergence of solutions to linear differential equations in the unit disc,* Electron. J. Differential Equ. Vol. 2015 (2015) No 283, pp 1-11.

[5] L. Bieberbach, *Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen,* Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1965.

[6] R. Bouabdelli and B. Belaïdi, *On the Iterated Exponent of Convergence of Solutions of Linear Differential Equations with Entire and Meromorphic Coefficients,* Journal of Mathematics, Volume 2013, Article ID 429083, 9 pages

[7] T-B. Cao, *The growth, oscillation and fixed points of solutions of complex linear differential equations in the unit disc,* J. Math. Anal. Appl. 352 (2009) 739-748.

[8] T-B. Cao and H-X. Yi , *The growth of solutions of linear complex differential equations with coefficients of iterated order in the unit disc,* J. Math. Anal. Appl. 319 (2006) 278-294.

[9] T. B. Cao and H. X. Yi, *On the complex oscillation theory of linear differential equations with analytic coefficients in the unit disc*, Acta Math. Sci. 28A (6) (2008), 1046-1057.

[10] Z.X. Chen; *The growth of solutions of* $f'' + e^{-z}f' + Q(z)f = 0$, *where the order* $(Q) = 1$, Sci, China Ser. A, **45** (2002), 290-300.

[11] Z.X. Chen and K. H. Shon; *On the growth of solutions of a class of higher order linear differential equations*, Acta. Mathematica Scientia, **24** B (1) (2004), 52-60.

[12] Z.X. Chen and K. H. Shon, *The growth of solutions of differential equations with coefficients of small growth in the disc,* J. Math. Anal. Appl. 297 (2004) 285-304.

[13] Z. X. Chen and C.-C. Yang, *Some further results on the zeros and growths of entire solutions of second order linear differential equations*, Kodai. Math. J., 22 (1999) , $273 - 285$.

[14] Y.-M. Chiang and W.K. Hayman, *Estimates on the growth of meromorphic solutions of linear differential equations*, Comment. math. helv. 79 (2004) 451-470.

[15] I. Chyzhykov, G. Gundersen and J. Heittokangas, *Linear differential equations and logarithmic derivative estimates*, Proc. London Math. Soc., 86 (2003), 735-754.

[16] H. Fettouch and S. Hamouda, *Growth of local solutions of a class of linear differential equations around an isolated essential singularity*, Electron. J. Differential Equations.; Vol. 2016 (2016), No. 226, pp. 1-10.

[17] H. Fettouch and S. Hamouda, *Growth of solutions of a class of nonhomogeneous linear differential equations in the unit disc,* J. Interdiscip. Math,.accepté.

[18] M. Frei, *Über die Subnormalen Lösungen der Differentialgleichung* $w''+e^{-z}w'+(Konst.)\,w=0$, Comment. Math. Helv. 36 (1962), 1-8.

[19] M. Frei, *Sur l'ordre des solutions entières d'une équation différentielle linéaire*, C. R. Acad. Sci. Paris 236 (1953), 38-40.

[20] G. G. Gundersen, *Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function, plus similar estimates*, J. Lond. Math. Soc. (2), 37 (1988), 88-104.

[21] G. G. Gundersen, *On the question of whether* $f''+e^{-z}f'+B(z)\,f=0$ *can admit a solution* $f\not\equiv 0$ *of finite order*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh **102A** (1986), 9-17.

[22] G. Gundersen, *Finite order solutions of second order linear differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc. 305 (1988), pp. 415-429.

[23] G. G. Gundersen, M. Steinbart and S. Wang, *The possible orders of solutions of linear differential equations with polynomial coefficients*, Trans. Amer. Math. Soc. 350 (1998), 1225-1247.

[24] S. Hamouda, *Properties of solutions to linear differential equations with analytic coefficients in the unit disc*, Electron. J. Differential Equations, Vol 2012 (2012), No. 177, pp. 1-9.

[25] S. Hamouda, *Iterated order of solutions of linear differential equations in the unit disc*, Comput. Methods Funct. Theory, 13 (2013) No. 4, 545-555.

[26] W.K. Hayman, *Meromorphic functions*, Clarendon Press, Oxford, 1964.

[27] W.K. Hayman *The local growth of power series: a survey of the Wiman–Valiron method*, Canad. Math. Bull., 17, 317–358 (1974).

[28] J. Heittokangas, *On complex differential equations in the unit disc*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. Diss. 122 (2000), 1-54.

[29] J. Heittokangas, R. Korhonen and J. Rättyä, *Growth estimates for solutions of linear complex differential equations*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 29 (2004), No. 1, 233-246.

[30] J. Heittokangas, R. Korhonen and J. Rättyä, *Fast growing solutions of linear differential equations in the unit disc*, Result. Math. 49 (2006), 265-278.

[31] G. Jank and L. Volkmann, *Einführung in die Theorie der ganzen und Meromorphen Funktionen mit Anwendungen auf Differential gleichungen,* Birkhäuser, Basel-Boston, 1985.

[32] L. Kinnunen, *Linear differential equations with solution of finite iterated order,* Southeast Asian Bull. Math. 22 (4) (1998) 1-8.

[33] A.Y. Khrystiyanyn, A.A. Kondratyuk, *On the Nevanlinna theory for meromorphic functions on annuli*, Matematychni Studii 23 (1) (2005) 19–30.

[34] A.A. Kondratyuk, I. Laine, *Meromorphic functions in multiply connected domains,* in: Fourier Series Methods in Complex Analysis, in: Univ. Joensuu Dept. Math. Rep. Ser., vol. 10, Univ. Joensuu, Joensuu, 2006, pp. 9-111.

[35] R. Korhonen, *Nevanlinna theory in an annulus, in Value Distribution Theory and Related Topics,* in: Adv. Complex Anal. Appl., vol. 3, Kluwer Acad. Publ., Boston, MA, 2004, pp. 167-179.

[36] I. Laine, *Nevanlinna theory and complex differential equations,* W. de Gruyter, Berlin, 1993.

[37] I. Laine and R. Yang, *Finite order solutions of complex linear differential equations,* Electron. J. Differential Equations N 65, Vol. 2004 (2004), 1-8.

[38] I. Laine, *Complex differential equations*, Handbook of Differential Equations: Ordinary Differential Equations, 4(2008), 269-363.

[39] E. L. Mark and Y. Zhuan, *Logarithmic derivatives in annulus,* J. Math. Anal. Appl. 356 (2009) 441-452.

[40] R. Nevanlinna, *Eindeutige analytische Funktionen, Zweite Auflage. Reprint.Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften,* Band 46. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1974.

[41] M. Tsuji, *Potential theory in modern function theory*, Chelsea, New York, 1975, reprint of the 1959 edition.

[42] Shen L. C., *Solution to a problem of S. Bank regarding the exponent of convergence of the solutions of the differential equation* $f'' + Af = 0$, Kexue Tongbao., 30 (1985) 1579-1585.

[43] J. Tu, Z. X. Xuan and H. Y. Xu, *On the hyper exponent of convergence of zeros of* $f^{(i)} - \varphi$ *of higher order linear differential equations,* Advances in Difference Equations, Vol. 2013 (2013), No. 71, 1-16.

[44] H. Wittich, *Neuere Untersuchungen über eindeutige analytishe Funktionen*, 2nd Edition, Springer-Verlag New York. Heidelberg Berlin, 1968.

[45] H. Y. Xu, J. Tu, and X. M. Zheng, *On the hyper exponent of convergence of zeros of* $f^{(i)} - \varphi$ *of higher order linear differential equations,* Advances in Difference Equations, Vol. 2012 (2012), No. 114, 1-16.

[46] L. Yang, *Value distribution theory,* Springer-Verlag Science Press, Berlin-Beijing. 1993.