RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem
Faculté des Sciences Exactes et d'Informatique
Département de Mathématiques et d'Informatique

O *THÈSE DE DOCTORAT* O

Spécialité : Analyse fonctionnelle

Intitulé :

Extensions de certaines classes d'opérateurs symétriques

Présentée par :

BENDAHMANE-SENOUSSAOUI Hafida

Soutenu le

Devant le jury composé de

M.	**DAHMANI Zoubir**	**Président**	**Prof,**	**Université de Mostaganem**
M.	**BENDOUKHA Berrabah**	**Rapporteur**	**Prof,**	**Centre Universitaire de Naama**
M.	**TERBECHE Mekki**	**Examinateur**	**Prof,**	**Université Oran 1**
M.	**BAHRI Sidi Mohamed**	**Examinateur**	**MCA,**	**Université de Mostaganem**
M.	**SEGRES Abdelkader**	**Examinateur**	**MCA,**	**Université de Mascara**

Année Universitaire 2015 -2016

" *Il faut avoir beaucoup étudié pour savoir peu* "

De Montesquieu / Pensées diverses

Remerciements

La réussite, aussi personnelle soit elle ne peut l'être tout à fait car elle ne pourrait avoir lieu sans un environnement propice.

Je remercie infiniment mon directeur de thèse, Monsieur Berrabah Bendoukha qui après avoir été mon enseignant puis mon encadreur en magistère, à bien voulu réitérer sa confiance en moi, mais aussi pour ses conseils et sa patience à mon égard.

Je remercie aussi Monsieur Dahmani Zoubir d'avoir accepté de présider le jury et pour sa disponibilité et ses encouragements continuels, comme je remercie Monsieur Sidi Mohammed Bahri qui lui aussi m'a enrichi par ses enseignements le long de mon cursus.

Un grand merci à messieurs Terbeche Mekki et Segres Abdelkader pour avoir accepté de lire ce manuscrit et siéger en tant que rapporteurs parmi les jurés.

Je salue l'ensemble des membres du département de mathématiques de l'université Abdelhamid Ibnbadis de Mostaganem ainsi que tous mes enseignants.

Sur le plan personnel, je remercie mes parents, mon mari, toute ma famille et mes proches pour leur présence et leur soutient infaillibles, les mots ne seront jamais assez forts pour exprimer ma gratitude envers vous. Encore merci, j'aurais aimé en dire tellement plus........

A mes enfants.

Résumé

Le présent manuscrit traite de deux grands volets de l'analyse fonctionnelle. Le premier concerne les extensions de certaines classes d'opérateurs symétriques, nottament les opérateurs de Caleman. Les méthode utilisée est entre autres, celle des triplets limites ; chose qui permet d'étudier le spectre des extensions obtenues. Le second lui, s'interesse aux inégalités entre les opérateurs autoadjoints bornés et leurs exponentielles en un premier temps, puis les inégalités entre opérateurs non-bornés et leurs semi-groupes fortement continus asoociés. Il est alors question d'établir un analogue au cas borné moyennant certaines conditions.

Abstract

This manuscript deals with two main areas of functional analysis. First of them concerns extensions of certain symmetric operator classes, specially the Caleman ones. The method used for this aim, is that of boundary triplets thing that allows to study the spectrum for obtained extensions. The second part is interested by inequalities between self-adjoint bounded operators and their exponential and then, inequalities between unbounded operators and their associated strongly continuous semi-groups. The question is then to establish similar results than for bounded operators under some conditions.

Cette page contient dans la version papier le résumé en arabe

Table des matières

Introduction

Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert complexe et A un opérateur symétrique, défini dans $\mathcal{H}$

$$\prec Ax, y \succ = \prec x,\ Ay \succ; \quad \forall x, y \in Dom\,(A)\,; \quad \left(\overline{Dom\,(A)} = \mathcal{H}\right).$$

Si de plus, $Dom\,(A) = Dom\,(A^*)$, l'opérateur A est dit auto-adjoint. Un opérateur $\widetilde{A}$, défini dans $\mathcal{H}$, est dit extension propre de A si, $A \subset \widetilde{A} \subseteq A^*$:

$$Dom\,(A) \subset Dom\left(\widetilde{A}\right) \subseteq Dom\,(A^*) \quad \text{ et } \quad \forall x \in Dom\,(A)\,; \;\; A\,(x) = \widetilde{A}\,(x) = A^*\,(x)\,.$$

Définition 0.0.1 *L'opérateur est dit extension symétrique (resp. autoadjointe) de A si, c'est un opérateur symétrique (resp. auto-adjoint).*

La théorie d'extension des opérateurs symétriques (et plus généralement hermiciens) est une branche très importante de l'analyse fonctionelle qui a toujours été étroitement liée avec beaucoup de domaines des mathématiques modernes. Parmi ces domaines, on peut citer, le problème des moments, la théorie des fonctions à variable complexe, les problèmes aux limites pour les équations différentielles linéaires, la théorie quantique des champs,....Les premiers concepts de cette branche, remontent aux travaux de H. Weyl (1909, 1910) pour le cas particulier des équations différentielles ordinaires du second ordre sur la demi-droite réelle. V. Neumann (1929), établit les premiers résultats fondamentaux de cette théorie (formule de V. Neumann, extension de V. Neumann,...). Le mathématicien soviétique M. G. Kreïn, consacra une bonne partie de sa vie à cette théorie (du début des années 40 à la la fin des années 80 du siècle passé, [20]). C'est grâce à ses innombrables travaux que c'est devenu une branche indépendante de l'analyse fonctionnelle. A ce sujet, il déclarera "C'est un objet excitant caché dans les coulisses des autres branches". Durant les deux dernières décennies, cette théorie a connu un nouvel essort grâce à la méthode des triplets limites largement développée et utilisée dans les travaux de V. A. Derkach et ses co-auteurs.

La présente thèse de doctorat se compose de quatre chapitres et d'une bibliogphie de 34 citations. Elle se propose en particulier de :

1. Exposer la technique des triplets limites dans la construction des extensions auto-adjointes des opérateurs symétriques,
2. Appliquer cette méthode à une certaine classe d'opérateurs de Carleman,
3. Etablir des inégalités entre les opérateurs symétriques positifs, fermés et les semi-groupes fortement continus qu'ils génèrent.

Comme cité plus haut, le premier chapitre est consacré à l'exposé de la méthode des triples limites. Au préalable, le concept de relation linéaire dans un espace de Hilbert est introduit et les différentes opérations définies. La méthode de construction des triplets limites est ensuite donnée et la fonction de Weyl associée, définie. Une description de toutes les extensions possibles (symétriques, auto-adjointes et dissipatives,...) est donnée en termes de relations linéaires et triplets limites. Les différents concepts, introduits dans ce paragraphe sont illustrés par des exemples illustratifs.

Dans le second chapitre, on considère les opérateurs intégraux de Carleman à noyau de la forme :

$$K(x,y) = \sum_{p=1}^{+\infty} a_p \Psi_p(x) \overline{\Psi_p(y)}, \qquad \sum_{p=1}^{+\infty} a_p^2 |\Psi_p(x)|^2$$

où $\{a_p\}_{p=1}^{+\infty}$ est une suite de nombres réels, $\{\Psi_p\}_{p=1}^{+\infty}$ est une famille orthonormée de l'epace $L^2(\Omega,\mu)$ dans lequel est défini l'opérateur de Carleman et telles que presque partout :

$$\sum_{p=1}^{+\infty}|\Psi_p(x)|^2 \prec +\infty \qquad \text{et} \qquad \sum_{p=1}^{+\infty}a_p^2|\Psi_p(x)|^2 \prec +\infty.$$

Pour ces opérateurs est donnée grâce à la méthode des triplets :

1. Une description de toutes les extensions propres,
2. Une description du spectre de chaque extension,
3. La forme explicite de la résolvante de chaque extension.

A la fin de ce chapitre, est utilisée la formule de Krein-Naimark pour donner la forme explicite des résolvantes généralisées (avec sortie de l'espace de l'extension) en termes de familles et paires de Nevanlinna.

Dans le troisième chapitre, sont considérées des familles commutatives et finies $\{A_i\}_{=1}^{n}$ d'opérateurs auto-adjoints, positifs, bornés. Le résultat principal est :

$$\forall p = 1,2,.... : \qquad \frac{e^p}{p^p}\sum_{p=1}^{+\infty} A_i^P \leq \exp(A_i)$$

où la constante $\frac{e^p}{p^p}$ est la plus grande possible. D'autres inégalités interéssantes, sont aussi obtenues.

Dans le quatrième et dernier chapitre, sont considérés des opérateurs symétriques (non bornés), positifs qui sont générateurs de semi-groupe fortement continus $\left\{T_t^{(A)}\right\}_{t\geq 0}$. En utilisant le résultat du chapitre précédent, on obtient :

1. Si A est auto-adjoint et inversible alors,
$$\forall t \geq 0, \quad \forall p = 1,2,.... : \qquad T_t^{(A)} \leq \frac{e^p}{t^p p^p}A^{-p}.$$
2. Si A est symétrique, inversible et semi-borné inférieurement alors, il existe une extension auto-adjointe $\widetilde{A}$ de A telle que :
$$\forall t \geq 0, \quad \forall p = 1,2,.... : \qquad T_t^{(A)} \leq \frac{e^p}{t^p p^p}\widetilde{A}^{-p}.$$

3. Si A vérifie les conditions précédentes et B est un opérateur positif, autoadjoint et borné (défini partout) alors,

$$\forall t \geq 0, \quad \forall p = 1, 2, ... : \qquad T_t^{(A+B)} \leq \frac{e^p}{t^p p^p} \left(\widetilde{A}^{-p} + B^{-p} \right).$$

Notons enfin que les résultats des deuxième et troisième chapitres, ont fait l'objet de deux publications internationales dont l'une dans la revue "Archivum Mathematicum", indexée dans la base "Scopus".

Chapitre 1

Relations linéaires

1.1 Introduction sur les relations linéaires

Dans tout ce qui suit, $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert complexe et $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ désigne l'algèbre des opérateurs bornés dans $\mathcal{H}$.

Définition 1.1.1 *On appelle* relation linéaire *sur $\mathcal{H}$ tout sous-espace (ou variété linéaire) de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$.*

Définition 1.1.2 *Une relation linéaire est dite* fermée *si elle represente un sous-espace fermé de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ .On note l'ensemble de toutes les relations linéaires fermées par $\widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$.*

Si Θ_1 et Θ_2 sont deux éléments de $\widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ et λ un nombre complexe, on peut alors définir les nouvelles relations linéaires suivantes [8, 9, 17],

a. Somme usuelle de sous espaces :

$$\Theta_1 + \Theta_2 = \{(x_1 + x_2, y_1 + y_2) : (x_1, y_1) \in \Theta_1 \text{ et } (x_2, y_2) \in \Theta_2\},$$

b. Somme opératorielle de deux relations linéaires :

$$\Theta_1 \widehat{+} \Theta_2 = \{(x, y_1 + y_2) : (x, y_1) \in \Theta_1 \text{ et } (x, y_2) \in \Theta_2\},$$

c. Multiplication opératorielle d'une relation linéaire par un scalaire :

$$\lambda\Theta_1 = \{(x_1, \lambda y_1) : (x_1, y_1) \in \Theta_1\}.$$

d.

$$\Theta - \lambda = \{(x, y - \lambda x) ; (x, y) \in \Theta\}$$

Par ailleurs, à toute relation linéaire Θ correspond les sous espaces $dom\Theta$, $ran\Theta$, $\ker\Theta$, $mul\Theta$ de $\mathcal{H}$, définis comme suit :

$$x \in dom\Theta \Leftrightarrow \exists y \in \mathcal{H} : \ (x, y) \in \Theta \tag{1.1.1}$$

$$y \in ran\Theta \Leftrightarrow \exists x \in \mathcal{H} : \ (x, y) \in \Theta \tag{1.1.2}$$

$$x \in \ker\Theta \Leftrightarrow \ \ (x, 0) \in \Theta \tag{1.1.3}$$

$$y \in mul\Theta \Leftrightarrow \ \ (0, y) \in \Theta \tag{1.1.4}$$

Exemple 1.1.3 *Considérons dans $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ le sous ensemble ;*

$$E = \{((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = 0\}$$

Il est evident que E est un sous espace de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ et donc une relation linéaire. De plus, l'application f, définie de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par la relation,

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 + x_2 + y_1 + y_2$$

est continue et $E = f^{(-1)}(\{o\})$. Donc c'est une relation fermée sur $\mathbb{R}^2$. Il est facile de vérifier que :

$$domE = ranE = \mathbb{R}^2, \quad \ker E = mulE = \ \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$$

Exemple 1.1.4 *Considèrons dans $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ le sous ensemble ;*

$$F = \left\{((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : \left\{ \begin{array}{c} x_1 - x_2 + 2y_1 = 0 \\ x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = 0 \end{array} \right. \right\}$$

De la même manière que dans l'exemple précédent, on peut montrer que F est une relation fermée sur $\mathbb{R}^2$. Par ailleurs,

$$domF = ranF = \mathbb{R}^2$$

$$\ker F = mulF = \{(0,0)\}.$$

Exemple 1.1.5 *Soit $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ un opérateur linéaire de domaine $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{H}$. Il est connu de la théorie générale des opérateurs linéaires [1, 32] que l'ensemble :*

$$gr(A) = \{(x, A(x)) / x \in \mathcal{D}(A)\},$$

appelé graphe de A, est un sous espace vectoriel de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$. Donc $gr(A)$ est une relation linéaire sur $\mathcal{H}$. De plus, $gr(A)$ est fermé si et seulement si, A est fermé. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} dom(gr(A)) &= \mathcal{D}(A), \quad ran(gr(A)) = \operatorname{Im} A, \\ \ker(gr(A)) &= \ker A, \quad mul(gr(A)) = \{o\}. \end{aligned}$$

Remarque 1.1.6 *L'identification de chaque opérateur linéaire borné avec son graphe [1, 32] permet de considerer l'ensemble $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ comme un sous espace $\widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$.*

Proposition 1.1.7 *Soit Θ une relation linéaire.Θ est le graphe d'un opérateur linéaire si et seulement si $mul\Theta = \{0\}$.*

Preuve. Supposons que Θ est le graphe d'un opérateur linéaire A et soit $y \in mul\Theta$. Alors $(0, y) \in gr\Theta$ et dans ce cas $y = A(0) = 0$.

Inversement, supposons que $mul\Theta = \{0\}$. Montrons tout d'abord qu'a tout élement x de $dom\Theta$ correspond un seul élément y tel que $(x, y) \in \Theta$. En effet, si $y_1, y_2 \in \mathcal{H}$. Alors,

$$\begin{aligned} [(x, y_1) \in \Theta \text{ et } (x, y_2) \in \Theta] &\Longrightarrow (0, y_1 - y_2) \in \Theta \\ &\Longrightarrow y_1 - y_2 \in mul\Theta = \{0\} \\ &\Longrightarrow y_1 = y_2. \end{aligned}$$

Ce raisonnement, permet de définir un opérateur $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ de domaine $\mathcal{D}(A) = dom\Theta$. La linéarité de A, découle de la linéarité de Θ. □

Remarque 1.1.8 *Ainsi donc, la relation linéaire E n'est pas le graphe d'un opérateur linéaire. Par contre, la relation linéaire F est le graphe de l'opérateur linéaire, défini dans $\mathbb{R}^2$ par :*

$$A(x_1, x_2) = \left(\frac{-x_1 + x_2}{2}, \frac{-x_1 - 3x_2}{2}\right).$$

Définition 1.1.9 *Soit Θ une relation linéaire. L' inverse et adjoint de Θ sont des relations linéaires définies respectivement comme suit ;*

$$(y, x) \in \Theta^{-1} \Longleftrightarrow (x, y) \in \Theta \tag{1.1.5}$$

$$(y^*, x^*) \in \Theta^* \Longleftrightarrow \langle y, y^* \rangle = \langle x, x^* \rangle ; \forall (x, y) \in \Theta \tag{1.1.6}$$

Soit à present J un opérateur de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ verifiant $J(x, y) = (y, -x)$. Alors $\Theta^* = J\Theta^{\perp}$ où $\Theta^{\perp}$ designe l'orthogonal de Θ dans $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$.

Remarque 1.1.10 *Il est clair que si Θ est le graphe d'un opérateur linéaire A, Θ^* est le graphe de l'opérateur linéaire A^*. De plus, si A est inversible alors, Θ^{-1} est le graphe de l'opérateur inverse A^{-1}.*

Exemple 1.1.11 *Pour les relations E et F, définies ci-dessus, on a :*

$$E^{-1} = \left\{((y_1, y_2), (x_1, x_2)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : y_1 + y_2 + x_1 + x_2 = 0\right\} = E$$

$$E^* = \{\alpha((1, 1), (-1, -1)) : \alpha \in \mathbb{C}\}$$

et,

$$F^{-1} = \left\{\left((x_1, x_2), \left(\frac{-3x_1 - x_2}{2}, \frac{x_1 - x_2}{2}\right)\right) : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

$$F^* = \left\{\left((x_1, x_2), \left(\frac{-x_1 - x_2}{2}, \frac{x_1 - 3x_2}{2}\right)\right) : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Définition 1.1.12 *Soint* Θ *et* $\tilde{\Theta}$ *deux élements de* $\widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$. *On dit que* $\tilde{\Theta}$ *est une* extension *de* Θ *si* $\Theta \subseteq \tilde{\Theta}$. *Une extension* $\tilde{\Theta}$ *de* Θ *est dite* propre *si* $\Theta \subset \tilde{\Theta}$.

Définition 1.1.13 *Un élement* Θ *de* $\widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ *est dit,*

a) symétrique si $\Theta \subseteq \Theta^*$,

b) autoadjoint si $\Theta = \Theta^*$,

c) dissipatif si $\operatorname{Im}\langle y, x\rangle$ *est non négatif pour tout* $(x, y) \in \Theta$ $(\operatorname{Im}\langle y, x\rangle \geq 0)$,

d) dissipatif maximal s'il est dissipatif n'admettant aucune extension propre dissipative.

Définition 1.1.14 *Soient* $\Theta \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ *et* $\lambda \in \mathbb{C}$. *On dit que* λ *appartient à l'ensemble resolvent* $\rho(\Theta)$ *de* Θ *si* $(\Theta - \lambda)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. *Autrement dit,*

$$\rho(\Theta) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(\Theta - \lambda) = \{0\}\,;\, ran\,(\Theta - \lambda) = \mathcal{H}\}\,.$$

Dans le cas contraire, on dit que λ *appartient au spectre (noté* $\sigma(\Theta)$*) de* Θ.

Remarque 1.1.15 *Comme dans le cas d'un opérateur linéaire, le spectre d'une relation linéaire est la réunion disjointe des trois sous-ensembles*

$$\sigma_p(\Theta) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(\Theta - \lambda) \neq \{0\}\}\,, \text{ le spectre ponctuel (les valeurs propres),}$$

$$\sigma_c(\Theta) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(\Theta - \lambda) = \{0\}\,;\, \overline{ran\,(\Theta - \lambda)} = \mathcal{H}\right\}, \text{ le spectre continu}$$

$$\sigma_r(\Theta) = \sigma(\Theta) \setminus (\sigma_p(\Theta) \cup \sigma_c(\Theta))\,, \text{ le spectre residuel}$$

Enfin on dira par convention que $\infty \in \rho(\Theta)$ *si* $mul\Theta = \{0\}$. *Si* $mul\Theta \neq \{0\}$, ∞ *sera considérée comme une valeur propre de* Θ.

Terminons ce paragraphe en examinant de plus près le cas $\dim \mathcal{H} = 1$. Si Θ est une relation linéaire de $\mathcal{H}$, alors trois cas de figures se presentent ;

1. $\dim \Theta = 0 \Longleftrightarrow \Theta = \{(0,0)\}$,
2. $\dim \Theta = 2 \Longleftrightarrow \Theta = \mathcal{H} \times \mathcal{H}$,
3. $\dim \Theta = 1 \Longleftrightarrow \exists\, (a,b) \in (\mathbb{C}^2)^* : \;\; \Theta = \Theta_{(a,b)} = \{(x,y) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H} : ax + by = 0\}$

On en déduit que dans le premier cas, Θ est symétrique, dissipative mais non autoadjointe. Dans le second cas, Θ n'est ni symétrique, ni autoadjointe, ni dissipative. Pour le troisième et dernier cas, on a le résultat suivant :

Proposition 1.1.16 *Supposons que* $\dim \mathcal{H} = 1$ *et soit* Θ *la relation linéaire de* $\mathcal{H}$ *définie par,*

$$\Theta_{(a,b)} = \{(x,y) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H} : ax + by = 0\}\,; (a,b) \in \left(\mathbb{C}^2\right)^*$$

alors,

1. $\Theta_{(a,0)}$ *(respectivement* $\Theta_{(0,b)}$ *) est autoadjointe* $\forall b \in \mathbb{C}^*$ *(respectivement* $\forall a \in \mathbb{C}^*$*)*
2. *Si* $ab \neq 0$ *alors* $\Theta_{(a,b)}$ *est autoadjointe si et seulement si* $\operatorname{Im}\left(\dfrac{a}{b}\right) = 0$
3. *Si* $ab \neq 0$ *alors* $\Theta_{(a,b)}$ *est dissipative si et seulement si* $\operatorname{Im}\left(\dfrac{a}{b}\right) \leq 0$
4. $\forall a \in \mathbb{C}^*, \sigma\left(\Theta_{(a,0)}\right) = \{\infty\}$ *et* $\forall b, \in \mathbb{C}^*, \sigma\left(\Theta_{(0,b)}\right) = \{0\}$
5. *Si* $ab \neq 0$ *alors* $\sigma\left(\Theta_{(a,b)}\right) = \left\{-\dfrac{a}{b}\right\}$

Preuve.

1

$$\Theta_{(a,0)} = \{(x,y) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H} : ax = 0\} = \{(0,y) \;\; / \; y \in \mathcal{H}\}.$$

Soit à présent $(x^*, y^*) \in \left(\Theta_{(a,0)}\right)^*$. Alors $\forall y \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned} \langle y, x^* \rangle = \langle 0, y^* \rangle = 0 \quad &\Longrightarrow x^* \in \mathcal{H}^\perp \\ &\Longrightarrow x^* = 0 \end{aligned}$$

et donc,

$$\left(\Theta_{(a,0)}\right)^* = \{(0, y^*) \;\; / \; y^* \in \mathcal{H}\} = \Theta_{(a,0)}$$

Même preuve pour $\Theta_{(0,b)}$.

2 Pour $ab \neq 0$,

$$\begin{aligned} \Theta_{(a,b)} &= \{(x,y) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H} : ax + by = 0\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H} : y = -\frac{a}{b}x\right\} \end{aligned}$$

Soient $(x^*, y^*) \in \left(\Theta_{(a,b)}\right)^*$,

$$\begin{aligned} \langle y, x^* \rangle &= \left\langle -\frac{a}{b}x, x^* \right\rangle = \left\langle x, -\frac{\bar{a}}{\bar{b}}x^* \right\rangle \\ &= \langle x, y^* \rangle, \forall (x,y) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H} \\ &\Longrightarrow y^* = -\frac{\bar{a}}{\bar{b}}x^*, \end{aligned}$$

d'où ;

$$\begin{aligned} \left(\Theta_{(a,b)}\right)^* &= \left\{(x,y) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H} : y = -\frac{\bar{a}}{\bar{b}}x\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H} : \bar{a}x + \bar{b}y = 0\right\} \end{aligned}$$

et donc,

$$\Theta_{(a,b)} = \left(\Theta_{(a,b)}\right)^* \Longleftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{\bar{a}}{\bar{b}} \Longleftrightarrow \operatorname{Im}\left(\frac{a}{b}\right) = 0$$

3 Soit $(x,y) \in \Theta_{(a,b)}$. On sait que $\Theta_{(a,b)}$ est dissipative si et seulement si, $\operatorname{Im}\langle y, x \rangle \geq 0$

Alors,

$$\operatorname{Im}\langle y, x \rangle = \operatorname{Im}\left\langle -\frac{a}{b}x, x \right\rangle = \operatorname{Im}\left(-\frac{a}{b}\|x\|\right) = \|x\| \operatorname{Im}\left(-\frac{a}{b}\right)$$

Donc,

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\langle y, x \rangle = \|x\| \operatorname{Im}\left(-\frac{a}{b}\right) \geq 0 \quad &\Longleftrightarrow \operatorname{Im}\left(-\frac{a}{b}\right) \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow \operatorname{Im}\left(\frac{a}{b}\right) \leq 0 \end{aligned}$$

4 Pour $\Theta_{(a,0)}$. On a pour tout $\lambda \in \mathbb{C} : \Theta_{(a,0)} - \lambda = \Theta_{(a,0)}$, il suffit alors de vérifier que

$$\left(\Theta_{(a,0)}\right)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

$$\left(\Theta_{(a,0)}\right)^{-1} = \{(y,0)\,/y \in \mathcal{H}\} = \Theta_{(b,0)} = \mathbb{C} \times \{0\}$$

C'est le graphe de l'opérateur nul. D'autre part,

$$\begin{aligned} mul\Theta_{(a,0)} &= \left\{y \in \mathcal{H}/\,(0,y) \in \Theta_{(a,0)}\right\} = \mathcal{H} \neq \{0\} \\ &\Longrightarrow \infty \in \sigma\left(\Theta_{(a,0)}\right) \end{aligned}$$

D'où finalement,

$$\sigma\left(\Theta_{(a,0)}\right) = \{\infty\}$$

Pour $\Theta_{(0,b)}$

$$\Theta_{(0,b)} = \{(x,0)\,/x \in \mathcal{H}\}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in \mathbb{C} : \quad & \Theta_{(0,b)} - \lambda = \{(x,-\lambda x)\,/x \in \mathcal{H}\} \\ & \Longrightarrow \left(\Theta_{(0,b)} - \lambda\right)^{-1} = \{(-\lambda x, x)\,/x \in \mathcal{H}\} \end{aligned}.$$

Pour $\lambda = 0$

$$\left(\Theta_{(0,b)}\right)^{-1} = \Theta_{(a,0)}$$

n'est pas le graphe d'un opérateur linéaire borné.

Pour $\lambda \neq 0$:

$$\left(\Theta_{(0,b)} - \lambda\right)^{-1} = \left\{\left(x', -\frac{1}{\lambda}x'\right)/x' \in \mathcal{H}\right\}$$

C'est le graphe de l'opérateur,

$$B : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}; x \longmapsto B(x) = -\frac{1}{\lambda}x$$

Par ailleurs,

$$mul\Theta_{(0,b)} = \left\{y \in \mathcal{H}/\,(0,y) \in \Theta_{(0,b)}\right\} = \{y \in \mathcal{H}/\,(0,y) = (x,0)\} = \{0\}$$

D'où enfin, $\sigma\left(\Theta_{(0,b)}\right) = \{0\}$.

5 Pour $ab \neq 0$,

$$\begin{aligned} \Theta_{(a,b)} &= \{(x,y) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H} : ax + by = 0\} \\ &= \left\{\left(x, -\frac{a}{b}x\right) : x \in \mathcal{H}\right\} \end{aligned}$$

Et donc,

$$\forall\lambda\in\mathbb{C}:\Theta_{(a,b)}-\lambda=\left\{\left(x,-\left(\lambda+\frac{a}{b}\right)x\right):x\in\mathcal{H}\right\}.$$

D'où,

$$\begin{aligned}\left(\Theta_{(a,b)}-\lambda\right)^{-1} &= \left\{\left(-\left(\lambda+\frac{a}{b}\right)x,x\right):x\in\mathcal{H}\right\}\\ &= \left\{\left(x',-\frac{1}{\lambda+\dfrac{a}{b}}x'\right):x'=-\left(\lambda+\frac{a}{b}\right)x\in\mathcal{H}\right\}\\ &= \left\{\left(x,-\frac{b}{\lambda b+a}x\right):x'\in\mathcal{H}\right\}.\end{aligned}$$

Ainsi donc,

$$\sigma\left(\Theta_{(a,b)}\right)=\left\{-\frac{a}{b}\right\}$$

□

1.2 Les triplets limites

Soient A un opérateur symétrique fermé densement défini de domaine $\mathcal{D}(A)\subseteq\mathcal{H}$ dont les indices de défaut sont finis et égaux (càd.$n_{\pm}(A)$=$\dim\ker\left(A^{*}\pm iI_{\mathcal{H}}\right)\ <+\infty$) et A^{*} son adjoint.

Définition 1.2.1 *On appelle* tripet limite pour A^{*} *tout triplet noté* $\Pi=(\mathcal{X},\Gamma_0,\Gamma_1)$ *constitué d'un espace de Hilbert auxilière* $\mathcal{X}$ *et d'opérateurs linéaires*
$\Gamma_0,\Gamma_1:\mathcal{D}(A^{*})\longrightarrow\mathcal{X}$ *vérifiant ;*

1. La seconde formule abstraite de Green

$$\langle A^{*}(x),y\rangle-\langle x,A^{*}(y)\rangle=\langle\Gamma_1(x),\Gamma_0(y)\rangle-\langle\Gamma_0(x),\Gamma_1(y)\rangle,$$

pour tout $x,y\in\mathcal{D}(A^{*})$.

2. $\Gamma(x) = (\Gamma_0(x), \Gamma_1(x))$ est un opérateur linéaire surjectif de $\mathcal{D}(A^*)$ sur $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$,

Remarque 1.2.2 *1. La condition necessaire et suffisante pour que le triplet limite pour A^* existe est que $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{H}$ et que les indices de défaut coïncident.*

2. Si $\Pi = (\mathcal{X}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ est un triplet limite pour A^*; alors $\Pi' = (\mathcal{X}, -\Gamma_1, \Gamma_0)$ est aussi un triplet limite pour A^*.

3. Soit $\Pi = (\mathcal{X}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ un triplet limite pour A^*. Si $\mathcal{X}'$ est un espace de Hilbert tel que $\dim \mathcal{X}' = \dim \mathcal{X}$ alors pour tout opérateur linéaire unitaire $U : \mathcal{X}' \longrightarrow \mathcal{X}$, $\Pi' = (\mathcal{X}, U\Gamma_0, U\Gamma_1)$ est aussi un triplet limite pour A^*.

Proposition 1.2.3 *[11] Soient $\Pi = (\mathcal{X}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ et $\Pi' = (\mathcal{X}', \Gamma_0', \Gamma_1')$ deux triplets limites pour A^* alors il existe un opérateur linéaire borné inversible $W = (W_{ij})_{i,j=1}^2$: $\mathcal{X} \times \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}' \times \mathcal{X}'$ tel que ;*

$$W^* \begin{pmatrix} 0 & -iI_{\mathcal{X}'} \\ iI_{\mathcal{X}'} & 0 \end{pmatrix} W = \begin{pmatrix} 0 & -iI_{\mathcal{X}} \\ iI_{\mathcal{X}} & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} \Gamma_0' \\ \Gamma_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_0 \\ \Gamma_1 \end{pmatrix}$$

Définition 1.2.4 *Soient A et $\widetilde{A}$ deux opérateurs linéaires dans $\mathcal{H}$. Supposons de plus que A soit symétirque, densement défini et fermé. Alors $\widetilde{A}$ est une* extension propre de *A si $A \subset \widetilde{A} \subset A^*$*

Théorème 1.2.5 *Soient A un opérateur linéaire symétrique densement défini fermé dont les indices de défaut sont égaux et $\Pi = (\mathcal{X}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ un triplet limite pour A^*. alors $\widetilde{A}$ est une extension propre de A si et seulement s'il existe $\Theta \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ telle que*

$$\mathcal{D}(\widetilde{A}) = \Gamma^{-1}(\Theta) = \{x \in \mathcal{D}(A^*) : (\Gamma_0(x), \Gamma_1(x)) \in \Theta\}$$

de plus,

a) $\widetilde{A}$ est autoadjoint (resp. symétrique)$\Longleftrightarrow \Theta$ est autoadjointe (resp. symétrique), *b)* $\widetilde{A}$ *est dissipatif (resp. maximal dissipatif)*$\Longleftrightarrow$ Θ *est dissipative(resp. maximal dissipative).*

Remarque 1.2.6

a) *Une extension* $\widetilde{A}$ *générée par la relation linéaire* $\Theta \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ *sera notée* A_Θ,

b) *Si* $\Theta \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ *alors,* $\mathcal{D}(A_\Theta) = \ker(\Gamma_1 - \Theta\Gamma_0)$,

c) *Les opérateurs* A_0 *et* A_∞ *dont les domaines de définition sont ;*

$\mathcal{D}(A_0) = \{x \in \mathcal{D}(A^*) : \Gamma_1(x) = 0\}$ *et* $\mathcal{D}(A_\infty) = \{x \in \mathcal{D}(A^*) : \Gamma_0(x) = 0\}$ *respectivement sont des extensions autoadjointes de* A*. de plus si* $n_\pm(A) = 1$ *alors* $A_0 = A_{\Theta_{(0,b)}}$ *et* $A_\infty = A_{\Theta_{(a,0)}}$.

Définition 1.2.7 *Soient* A *un opérateur linéaire symétrique densement défini fermé dont les indices de défaut sont finis et égaux à* n *et* $\Pi = (\mathcal{X}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ *un triplet limite pour* A^**. Suivant [21],* Γ_0 *establi une bijection de* $\ker(A^* - zI_\mathcal{H})$ *sur* $\mathbb{C}^n$ $(n = n_\pm(A))$ *pour tout nombre complexe* $z \in \rho(A_\infty)$ *d'où l'on peut définir les deux fonctions suivantes ;*

$$\gamma(z) = \left[\Gamma_0\big|_{\ker(A^* - zI_\mathcal{H})}\right]^{-1}, M(z) = \Gamma_1\gamma(z) ; z \in \rho(A_\infty), \tag{1.2.1}$$

appelées $\gamma-$field *et* la fonction de Weyl *associées à* $\Pi = (\mathcal{X}, \Gamma_0, \Gamma_1)$*. Il est possible de vérifier que*

$$M(z)\Gamma_0(x_z) = \Gamma_1(x_z) ; \forall x_z \in \ker(A^* - zI_\mathcal{H}).$$

Le théorème suivant résume les principales propriétés de la fonction de Weyl [10, 12]

Théorème 1.2.8 *Soient* A *un opérateur linéaire symétrique fermé dont les indices de défaut sont finis et égaux à* n*,* $\Pi = (\mathcal{X}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ *un triplet limite pour* A^**. Alors,*

a) $M(z)$ *est analytique pour* $z \in \rho(A_\infty)$,

b) $\operatorname{Im} M(z) \operatorname{Im} z > 0, z \in \rho(A_\infty)$,

c) $[M(z)]^* = M(\bar{z}), z \in \rho(A_\infty)$, *d)* $M(z) - M(\xi) = (z-\xi)\,\gamma^*\left(\bar{\xi}\right)\gamma(z)\,;z,\xi \in \rho(A_\infty)\,,$

e) $z \in \rho(A_\Theta) \Longleftrightarrow (\Theta - M(z))^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{X})\,, z \in \rho(A_\infty)\,,$

f) *Si* $\dim \mathcal{X}$ =1, *alors z appartient au spectre ponctuel (resp. continu ou residuel) de* A_Θ *si et seulement si* $M(z)$ *appartient au spectre ponctuel (resp. continu ou residuel) de* Θ,

g) $(A_\Theta - zI_\mathcal{H})^{-1} - (A_\infty - zI_\mathcal{H})^{-1} = \gamma(z)\,(\Theta - M(z))^{-1}\,\gamma^*(\bar{z})\,;$
$z \in \rho(A_\Theta) \cap \rho(A_\infty)\,.$

Chapitre 2

Application aux opérateurs de Carleman

2.1 Les opérateurs de Carleman

Soient Ω un ensemble quelconque, μ une mesure -$\sigma-$finie sur Ω (μ est définie sur une σ-algèbre de sous-ensembles de Ω) et $L^2(\Omega,\mu)$ l'espace de Hilbert des fonctions définies sur Ω à carrés integrables selon la mesure μ.

Définition 2.1.1 *[1, 7, 22, 32], Un opérateur de Carleman A dans $L^2(\Omega,\mu)$ est un opérateur linéaire fermé densement défini s'écrivant sous la forme suivante;*

$$Af(x)=\int_\Omega K(x,y)\,f(y)\,d\mu(y)\,, \tag{2.1.1}$$

avec;

$$\mathcal{D}(A)=\left\{f\in L^2(\Omega,\mu):\int_\Omega |f(x)|\,k(x)\,dx<+\infty\right\},k^2(x)=\int_\Omega |K(x,y)|^2\,dy$$

Où $K:\Omega\times\Omega\longrightarrow\mathbb{C}$ est une fonction mesurable appeée "noyau de Carleman", elle vérifie;

$$\int_\Omega |K(x,y)|^2\,d\mu(y)<+\infty\ p.p \tag{2.1.2}$$

Remarque 2.1.2 *Les opérateurs de Hilbert-Schmidt sont une classe importante d'opérateurs de Carleman*

Définition 2.1.3 *Un opérateur de Carleman autoadjoint est dit " de première classe" alors qu'il est de "seconde classe" dans le cas contraire*

Exemple 2.1.4

1. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et K une fonction de $I \times I$ à valeurs complexes, mesurables et à carrés intégrables pour la mesure de Lesbegue. On suppose que K est hermitienne c'est à dire que $K(x, y) = \overline{K(y, x)}$ et on définit l'opérateur intégral A de noyau K pour f dans $L^2(I)$ par*

$$Af(x) = \int_I K(x, y) f(y) \, dy,$$

   Alors A est un opérateur de Carleman (même de Hilbert-Schmidt) de première classe.

2. *Considèrons dans l'espace $L^2(\Omega, \mu)$ l'opérateur défini par la formule 2.1.1 et induit par le noyau*

$$K(x, y) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p \Psi_p(x) \overline{\Psi_p(y)}, \tag{2.1.3}$$

   où $\{\Psi_p\}_{p=0}^{+\infty}$ est une suite orthonormée dans $L^2(\Omega, \mu)$ telle que

$$\sum_{p=0}^{+\infty} |\Psi_p(x)|^2 < +\infty \ p.p \ dans \ \Omega, \tag{2.1.4}$$

   et $\{a_p\}_{p=0}^{+\infty}$ une suite réelle vérifiant,

$$\sum_{p=0}^{+\infty} a_p^2 |\Psi_p(x)|^2 < +\infty \ p.p \ dans \ \Omega. \tag{2.1.5}$$

   Si la suite $\{\Psi_p\}_{p=0}^{+\infty}$ n'est pas totale et si $\sum_{p=0}^{+\infty} a_p^2 = +\infty$.Alors A est un opérateur de Carleman symétrique de seconde classe (voir [2]).

Théorème 2.1.5 *[2]Les deux formules suivantes ;*

$$R_{\lambda}f = \mathring{R}_{\lambda}f + \frac{1-\omega(\lambda)}{\omega(\lambda)s(\lambda)-1}.\frac{\langle f,\varphi_{\bar{\lambda}}\rangle}{(\lambda+i)\langle\varphi_{\lambda},\varphi_{i}\rangle}\varphi_{\lambda} \quad (Im\lambda>0), \tag{2.1.6}$$

$$R_{\bar{\lambda}}f = \mathring{R}_{\bar{\lambda}}f + \frac{1-\overline{\omega(\lambda)}}{\overline{\omega(\lambda)s(\lambda)}-1}.\frac{\langle f,\varphi_{\lambda}\rangle}{\left(\bar{\lambda}-i\right)\left\langle\varphi_{\bar{\lambda}},\varphi_{-i}\right\rangle}\varphi_{\bar{\lambda}} \quad (Im\lambda>0), \tag{2.1.7}$$

établissent une bijection entre l'ensemble des résolvantes généralisées de l'opérateur A, défini dans la partie 2 de l'exemple 2.1.4, et l'ensemble des fonctions analytiques $\omega(\lambda)$ $(|\omega(\lambda)|\leq 1, Im\lambda>0)$. $\mathring{R}_{\lambda}$ represente la résolvante d'une extension autoadjointe de A et;

$$s(\lambda) = \frac{\lambda-i}{\lambda+i}\times\frac{\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{|\delta_{p}(\lambda)|^{2}}{(a_{p}-\lambda)(a_{p}-i)}}{\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{|\delta_{p}(\lambda)|^{2}}{(a_{p}-\lambda)(a_{p}+i)}}. \tag{2.1.8}$$

2.2 Principaux résultats

2.2.1 La fonction de Weyl d'une extension propre

Dans tout ce qui suit,nous supposerons que les indices de défaut de l'opérateur A sont égaux à 1.

On pose,

$$\mathcal{N}_{\lambda} = \ker(A^{*}-\lambda I_{\mathcal{H}}) \text{ et } e_{\lambda}(x) = \frac{\varphi_{\lambda}(x)}{\|\varphi_{\lambda}\|} = \|\varphi_{\lambda}\|^{-1}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\delta_{p}(\lambda)}{a_{p}-\lambda}\Psi_{p}(x) \tag{2.2.1}$$

Avec $\varphi_{\lambda}(x) = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\delta_{p}(\lambda)}{a_{p}-\lambda}\Psi_{p}(x)$ défini dans la partie 2 de l'exemple 2.1.4. On a alors $e_{\lambda}\in\mathcal{N}_{\lambda}$ et $\|e_{\lambda}\|=1$. Pour tout nombre complexe z tel que $\operatorname{Im} z\neq 0$ la formule de Von Neumann permet d'écrire la somme directe ;

$$\mathcal{D}(A^{*}) = \mathcal{D}(A)\dot{+}\mathcal{N}_{z}\dot{+}\mathcal{N}_{\bar{z}} \tag{2.2.2}$$

Considèrons à présent dans $\mathcal{D}(A^{*})\times\mathcal{D}(A^{*})$ la forme sesquilineaire suivante

$$\Phi(f,g) = \langle f,g\rangle + \langle A^{*}(f), A^{*}(g)\rangle \tag{2.2.3}$$

Lemme 2.2.1 Φ *possède les propriétés décrites ci-dessous :*

a) $\forall f \in \mathcal{D}(A) : \Phi(f, e_i) = \Phi(f, e_{-i}) = \Phi(e_i, e_{-i}) = 0$

b) $\Phi(e_i, e_i) = \Phi(e_{-i}, e_{-i}) = 2$

c) $\forall f \in \mathcal{D}(A^*) : f = f_0 + \frac{1}{2}\Phi(f, e_i)\, e_i + \frac{1}{2}\Phi(f, e_{-i})\, e_{-i}$

d) Pour tout complexe z $(\operatorname{Im} z \neq 0) : \Phi(e_z, e_i) + \Phi(e_z, e_{-i}) \neq 0$

Preuve.

a On a,

$$\begin{aligned}\Phi(f, e_i) &= \langle f, e_i\rangle + \langle A^* f, A^* e_i\rangle = \langle f, e_i\rangle + \langle Af, ie_i\rangle \\ &= \langle f, e_i\rangle - i\langle f, A^* e_i\rangle = \langle f, e_i\rangle + i^2\langle f, e_i\rangle = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi(f, e_{-i}) &= \langle f, e_{-i}\rangle + \langle A^* f, A^* e_{-i}\rangle = \langle f, e_{-i}\rangle + \langle Af, -ie_{-i}\rangle \\ &= \langle f, e_{-i}\rangle + i\langle f, A^* e_{-i}\rangle = \langle f, e_{-i}\rangle + i^2\langle f, e_{-i}\rangle = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi(e_i, e_{-i}) &= \langle e_i, e_{-i}\rangle + \langle A^* e_i, A^* e_{-i}\rangle = \langle e_i, e_{-i}\rangle + \langle ie_i, -ie_{-i}\rangle \\ &= \langle e_i, e_{-i}\rangle + i^2\langle e_i, e_{-i}\rangle = 0\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\Phi(e_{\pm i}, e_{\pm i}) &= \langle e_{\pm i}, e_{\pm i}\rangle + \langle A^* e_{\pm i}, A^* e_{\pm i}\rangle = \langle e_{\pm i}, e_{\pm i}\rangle + \langle \pm ie_{\pm i}, \pm ie_{\pm i}\rangle \\ &= \langle e_{\pm i}, e_{\pm i}\rangle - i^2\langle e_{\pm i}, e_{\pm i}\rangle = 2\end{aligned}$$

car $\|e_{\pm i}\| = 1$

c) Soit $f \in \mathcal{D}(A^*)$. De (2.2.2)

$$f = f_0 + \alpha(i)\, e_i + \alpha(-i)\, e_{-i}, f_0 \in \mathcal{D}(A), \alpha(i), \alpha(-i) \in \mathbb{C}$$

d'où, de a)

$$2\alpha(i) = \Phi(f, e_i) \quad ; \quad 2\alpha(-i) = \Phi(f, e_{-i})$$

d) Supposons que,

$$\Phi(e_z, e_i) + \Phi(e_z, e_{-i}) = 0$$

alors de c)

$$\Phi(e_z, e_i) - \Phi(e_z, e_{-i}) = \Phi^2(e_z, e_i) - \Phi^2(e_z, e_{-i}) = 0$$

doù l'on conclut que $e_z \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{N}_z = 0$; c'est à dire

$$e_z = 0$$

ce qui est impossible.

□

Proposition 2.2.2 *Soit f un élement de $\mathcal{D}(A^*)$ et z un nombre complexe vérifiant* $\operatorname{Im} z \neq 0$. *Supposons que ;*

$$f = f_0 + \alpha(z) e_z + \alpha(\bar{z}) e_{\bar{z}}, f_0 \in \mathcal{D}(A), \alpha(z), \alpha(\bar{z}) \in \mathbb{C}.$$

soit la decomposition canonique de f selon (2.2.2). Alors,

$$\begin{aligned} \alpha(z) &= \frac{\Phi(f, e_i)\Phi(e_{\bar{z}}, e_{-i}) - \Phi(f, e_{-i})\Phi(e_{\bar{z}}, e_i)}{\Phi(e_z, e_i)\Phi(e_{\bar{z}}, e_{-i}) - \Phi(e_z, e_{-i})\Phi(e_{\bar{z}}, e_i)} \\ \alpha(\bar{z}) &= \frac{\Phi(f, e_{-i})\Phi(e_z, e_i) - \Phi(f, e_i)\Phi(e_z, e_{-i})}{\Phi(e_z, e_i)\Phi(e_{\bar{z}}, e_{-i}) - \Phi(e_z, e_{-i})\Phi(e_{\bar{z}}, e_i)} \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

Preuve. On a du lemme précedent,

$$f = f_0 + \frac{1}{2}\Phi(f, e_i) e_i + \frac{1}{2}\Phi(f, e_{-i}) e_{-i}$$

avec,

$$\begin{pmatrix} \Phi(f, e_i) \\ \Phi(f, e_{-i}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi(e_z, e_i) & \Phi(e_{\bar{z}}, e_i) \\ \Phi(e_z, e_{-i}) & \Phi(e_{\bar{z}}, e_{-i}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(z) \\ \alpha(\bar{z}) \end{pmatrix}$$

comme $\alpha(z)$ et $\alpha(\bar{z})$ sont uniques, alors la matrice,

$$\begin{pmatrix} \Phi(e_z, e_i) & \Phi(e_{\bar{z}}, e_i) \\ \Phi(e_z, e_{-i}) & \Phi(e_{\bar{z}}, e_{-i}) \end{pmatrix}$$

est inversible et son inverse est la matrice ;

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\alpha(z)\\ \alpha(\bar{z})\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\Phi(e_z,e_i) & \Phi(e_{\bar{z}},e_i)\\ \Phi(e_z,e_{-i}) & \Phi(e_{\bar{z}},e_{-i})\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\Phi(f,e_i)\\ \Phi(f,e_{-i})\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\frac{\Phi(e_{\bar{z}},e_{-i})}{\Phi(e_z,e_i)\Phi(e_{\bar{z}},e_{-i})-\Phi(e_z,e_{-i})\Phi(e_{\bar{z}},e_i)} & \frac{-\Phi(e_{\bar{z}},e_i)}{\Phi(e_z,e_i)\Phi(e_{\bar{z}},e_{-i})-\Phi(e_z,e_{-i})\Phi(e_{\bar{z}},e_i)}\\ \frac{-\Phi(e_z,e_{-i})}{\Phi(e_z,e_i)\Phi(e_{\bar{z}},e_{-i})-\Phi(e_z,e_{-i})\Phi(e_{\bar{z}},e_i)} & \frac{\Phi(e_z,e_i)}{\Phi(e_z,e_i)\Phi(e_{\bar{z}},e_{-i})-\Phi(e_z,e_{-i})\Phi(e_{\bar{z}},e_i)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Phi(f,e_i)\\ \Phi(f,e_{-i})\end{pmatrix}\end{aligned}$$

l'equation (2.2.4) s'en suit. □

Proposition 2.2.3 *Le triplet* $\Pi = (\mathbb{C}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ *défini par,*

$$\Gamma_0(f) = \frac{1}{2}\left[\Phi(f,e_i) + \Phi(f,e_{-i})\right]; \Gamma_1(f) = \frac{i}{2}\left[\Phi(f,e_i) - \Phi(f,e_{-i})\right] \tag{2.2.5}$$

où Γ_0, Γ_1 *sont deux transformations de* $\mathcal{D}(A^*)$ *sur* $\mathbb{C}$*, est un triplet limite pour* A^**.*

Preuve. Cette proposition se déduit à partir de la formule générale des triplets limites canoniques présenté par A. N. Kochubeï [21] pour les opérateurs symmétriques ayant des indices de défaut finis égaux à (n,n) ; $1 \leq n < +\infty$. On se propose ici de faire une démonstration en utilisnt la définition 1.2.1. Soient $f, g \in D(A^*)$.

$$\begin{aligned}\langle A^*f,g\rangle &= \left\langle A^*\left(f_0+\frac{1}{2}\Phi(f,e_i)e_i+\frac{1}{2}\Phi(f,e_{-i})e_{-i}\right), g_0+\frac{1}{2}\Phi(g,e_i)e_i+\frac{1}{2}\Phi(g,e_{-i})e_{-i}\right\rangle\\
&= \langle A^*f_0,g_0\rangle+\frac{i}{2}\Phi(f,e_i)\langle e_i,g_0\rangle-\frac{i}{2}\Phi(f,e_{-i})\langle e_{-i},g_0\rangle+\frac{1}{2}\overline{\Phi(g,e_i)}\langle A^*f_0,e_i\rangle\\
&\quad+\frac{i}{4}\Phi(f,e_i)\overline{\Phi(g,e_i)}\langle e_i,e_i\rangle-\frac{i}{4}\Phi(f,e_{-i})\overline{\Phi(g,e_i)}\langle e_{-i},e_i\rangle+\frac{1}{2}\overline{\Phi(g,e_{-i})}\langle A^*f_0,e_{-i}\rangle\\
&\quad+\frac{i}{4}\Phi(f,e_i)\overline{\Phi(g,e_{-i})}\langle e_i,e_{-i}\rangle-\frac{i}{4}\Phi(f,e_{-i})\overline{\Phi(g,e_{-i})}\langle e_{-i},e_{-i}\rangle\\
&= \langle Af_0,g_0\rangle+\frac{i}{2}\Phi(f,e_i)\langle e_i,g_0\rangle-\frac{i}{2}\Phi(f,e_{-i})\langle e_{-i},g_0\rangle+\frac{1}{2}\overline{\Phi(g,e_i)}\langle f_0,ie_i\rangle\\
&\quad+\frac{i}{4}\Phi(f,e_i)\overline{\Phi(g,e_i)}\langle e_i,e_i\rangle-\frac{i}{4}\Phi(f,e_{-i})\overline{\Phi(g,e_i)}\langle e_{-i},e_i\rangle+\frac{1}{2}\overline{\Phi(g,e_{-i})}\langle f_0,-ie_{-i}\rangle\\
&\quad+\frac{i}{4}\Phi(f,e_i)\overline{\Phi(g,e_{-i})}\langle e_i,e_{-i}\rangle-\frac{i}{4}\Phi(f,e_{-i})\overline{\Phi(g,e_{-i})}\langle e_{-i},e_{-i}\rangle\\
&= \langle Af_0,g_0\rangle+\frac{i}{4}\Phi(f,e_i)\overline{\Phi(g,e_i)}-\frac{i}{4}\Phi(f,e_{-i})\overline{\Phi(g,e_{-i})}\end{aligned}$$

de même ;

$$\begin{aligned}
\langle f, A^*g\rangle &= \left\langle f_0 + \frac{1}{2}\Phi(f,e_i)\,e_i + \frac{1}{2}\Phi(f,e_{-i})\,e_{-i}, A^*\left(g_0 + \frac{1}{2}\Phi(g,e_i)\,e_i + \frac{1}{2}\Phi(g,e_{-i})\,e_{-i}\right)\right\rangle \\
&= \langle f_0, A^*g_0\rangle + \frac{1}{2}\Phi(f,e_i)\langle e_i, A^*g_0\rangle + \frac{1}{2}\Phi(f,e_{-i})\langle e_{-i}, A^*g_0\rangle - \frac{i}{2}\overline{\Phi(g,e_i)}\langle f_0, e_i\rangle \\
&\quad -\frac{i}{4}\Phi(f,e_i)\overline{\Phi(g,e_i)}\langle e_i, e_i\rangle - \frac{i}{4}\Phi(f,e_{-i})\overline{\Phi(g,e_i)}\langle e_{-i}, e_i\rangle + \frac{i}{2}\overline{\Phi(g,e_{-i})}\langle f_0, e_{-i}\rangle \\
&\quad +\frac{i}{4}\Phi(f,e_i)\overline{\Phi(g,e_{-i})}\langle e_i, e_{-i}\rangle + \frac{i}{4}\Phi(f,e_{-i})\overline{\Phi(g,e_{-i})}\langle e_{-i}, e_{-i}\rangle \\
&= \langle f_0, Ag_0\rangle + \frac{1}{2}\Phi(f,e_i)\langle ie_i, g_0\rangle + \frac{1}{2}\Phi(f,e_{-i})\langle -ie_{-i}, g_0\rangle - \frac{i}{2}\overline{\Phi(g,e_i)}\langle f_0, e_i\rangle \\
&\quad -\frac{i}{4}\Phi(f,e_i)\overline{\Phi(g,e_i)}\langle e_i, e_i\rangle - \frac{i}{4}\Phi(f,e_{-i})\overline{\Phi(g,e_i)}\langle e_{-i}, e_i\rangle + \frac{i}{2}\overline{\Phi(g,e_{-i})}\langle f_0, e_{-i}\rangle \\
&\quad +\frac{i}{4}\Phi(f,e_i)\overline{\Phi(g,e_{-i})}\langle e_i, e_{-i}\rangle + \frac{i}{4}\Phi(f,e_{-i})\overline{\Phi(g,e_{-i})}\langle e_{-i}, e_{-i}\rangle \\
&= \langle f_0, Ag_0\rangle - \frac{i}{4}\Phi(f,e_i)\overline{\Phi(g,e_i)} + \frac{i}{4}\Phi(f,e_{-i})\overline{\Phi(g,e_{-i})}
\end{aligned}$$

Alors ;

$$\begin{aligned}
&\langle A^*f, g\rangle - \langle f, A^*g\rangle \\
&= \left(\langle Af_0, g_0\rangle + \frac{i}{4}\Phi(f,e_i)\overline{\Phi(g,e_i)} - \frac{i}{4}\Phi(f,e_{-i})\overline{\Phi(g,e_{-i})}\right) \\
&\quad - \left(\langle f_0, Ag_0\rangle - \frac{i}{4}\Phi(f,e_i)\overline{\Phi(g,e_i)} + \frac{i}{4}\Phi(f,e_{-i})\overline{\Phi(g,e_{-i})}\right)
\end{aligned}$$

C'est à dire,

$$\begin{aligned}
& \langle A^* f, g\rangle - \langle f, A^* g\rangle \\
= \; & \frac{i}{2}\Phi\left(f, e_i\right)\overline{\Phi\left(g, e_i\right)} - \frac{i}{2}\Phi\left(f, e_{-i}\right)\overline{\Phi\left(g, e_{-i}\right)} \\
= \; & \frac{i}{4}\left(\Phi\left(f, e_i\right)\overline{\Phi\left(g, e_i\right)} - \Phi\left(f, e_{-i}\right)\overline{\Phi\left(g, e_i\right)} + \Phi\left(f, e_i\right)\overline{\Phi\left(g, e_{-i}\right)} - \Phi\left(f, e_{-i}\right)\overline{\Phi\left(g, e_{-i}\right)}\right) \\
& + \frac{i}{4}\left(\Phi\left(f, e_i\right)\overline{\Phi\left(g, e_i\right)} + \Phi\left(f, e_{-i}\right)\overline{\Phi\left(g, e_i\right)} - \Phi\left(f, e_i\right)\overline{\Phi\left(g, e_{-i}\right)} - \Phi\left(f, e_{-i}\right)\overline{\Phi\left(g, e_{-i}\right)}\right) \\
= \; & \frac{i}{4}\left(\Phi\left(f, e_i\right) - \Phi\left(f, e_{-i}\right)\right)\left(\overline{\Phi\left(g, e_i\right)} + \overline{\Phi\left(g, e_{-i}\right)}\right) \\
& + \frac{i}{4}\left(\Phi\left(f, e_i\right) + \Phi\left(f, e_{-i}\right)\right)\left(\overline{\Phi\left(g, e_i\right)} - \overline{\Phi\left(g, e_{-i}\right)}\right) \\
= \; & \left\langle \frac{i}{2}\left(\Phi\left(f, e_i\right) - \Phi\left(f, e_{-i}\right)\right), \frac{1}{2}\left(\Phi\left(g, e_i\right) + \Phi\left(g, e_{-i}\right)\right)\right\rangle \\
& - \left\langle \frac{1}{2}\left(\Phi\left(f, e_i\right) + \Phi\left(f, e_{-i}\right)\right), \frac{i}{2}\left(\Phi\left(g, e_i\right) - \Phi\left(g, e_{-i}\right)\right)\right\rangle \\
= \; & \left\langle \Gamma_1\left(f\right), \Gamma_0\left(g\right)\right\rangle - \left\langle \Gamma_0\left(f\right), \Gamma_1\left(g\right)\right\rangle
\end{aligned}$$

La formule de Green est vérifiée. Soient à présent $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ et l'application ;

$$\Gamma : D\left(A^*\right) \longrightarrow \mathbb{C}^2; \Gamma\left(f\right) = \left(\Gamma_0\left(f\right), \Gamma_1\left(f\right)\right)$$

Alors pour $f = f_0 + \frac{1}{2}\left(x - iy\right)e_i + \frac{1}{2}\left(x + iy\right)e_{-i}/f_0 \in D\left(A\right)$ on a,

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(f\right) &= \left(\Gamma_0\left(f\right), \Gamma_1\left(f\right)\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}\left[\Phi\left(f, e_i\right) + \Phi\left(f, e_{-i}\right)\right], \frac{i}{2}\left[\Phi\left(f, e_i\right) - \Phi\left(f, e_{-i}\right)\right]\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}\left[\left(x - iy\right) + \left(x + iy\right)\right], \frac{i}{2}\left[\left(x - iy\right) - \left(x + iy\right)\right]\right) \\
&= \left(x, y\right)
\end{aligned}$$

Donc, $\Pi = \left(\mathbb{C}, \Gamma_0, \Gamma_1\right)$ est un triplet limite. $\square$

Soient $\widetilde{A}$ une extension propre de A et $\Pi = (\mathbb{C}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ le triplet défini dans le théorème précedent.On a déjà vu qu'il existe $(a, b) \in (\mathbb{C}^2)^*$ tel que

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\widetilde{A}) &= \{f \in \mathcal{D}(A^*) : a\Gamma_0(f) + b\Gamma_1(f) = 0\} \\ &= \{f \in \mathcal{D}(A^*) : (a+ib)\,\Phi(f, e_i) + (a-ib)\,\Phi(f, e_{-i}) = 0\}. \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

Pour $a = b = 0$ l'extension induite est A^*, c'est pourquoi dans tout ce qui suit on supposera que $(a, b) \neq (0, 0)$.

Théorème 2.2.4 *Soit $\widetilde{A}$ une extension propre de A. Alors, il existe un nombre complexe c pour lequel $\mathcal{D}(\widetilde{A})$ prend l'une des deux formes suivante ;*

$$\mathcal{D}(\widetilde{A}) = \{f_0 + \alpha(i)(ce_i + e_{-i})\,;\, f_0 \in \mathcal{D}(A), \alpha(i) \in \mathbb{C}\}, \tag{2.2.7}$$

avec,

$$\widetilde{A}(f) = A(f_0) + i\alpha(i)(ce_i - e_{-i})$$

ou bien,

$$\mathcal{D}(\widetilde{A}) = \{f_0 + \alpha(i)(e_i + ce_{-i})\,;\, f_0 \in \mathcal{D}(A), \alpha(i) \in \mathbb{C}\}, \tag{2.2.8}$$

avec,

$$\widetilde{A}(f) = A(f_0) + i\alpha(i)(e_i - ce_{-i}) \tag{2.2.9}$$

De plus, $\widetilde{A}$ est autoadjoint si et seulement si $|c| = 1$.

Preuve. On a déja vu que,

$$\forall f \in \mathcal{D}(A^*) : f = f_0 + \frac{1}{2}\Phi(f, e_i)\,e_i + \frac{1}{2}\Phi(f, e_{-i})\,e_{-i}$$

Alors ;

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\widetilde{A}) &= \{f \in \mathcal{D}(A^*) : a\Gamma_0(f) + b\Gamma_1(f) = 0\} \\ &= \{f \in \mathcal{D}(A^*) : (a+ib)\,\Phi(f, e_i) + (a-ib)\,\Phi(f, e_{-i}) = 0\} \\ &= \left\{f \in \mathcal{D}(A^*) : \Phi(f, e_{-i}) = \frac{a+ib}{-a+ib}\Phi(f, e_i)\right\} \end{aligned}$$

On pose, $c = \dfrac{a+ib}{-a+ib}$. Alors, $\Phi(f, e_{-i}) = c\Phi(f, e_i)$ et,

$$\begin{aligned} f &= f_0 + \frac{1}{2}\Phi(f, e_i)\, e_i + \frac{1}{2}c\Phi(f, e_i)\, e_{-i} = f_0 + \alpha(i)(e_i + ce_{-i}) \\ \text{avec, } \alpha(i) &= \frac{1}{2}\Phi(f, e_i) \in \mathbb{C}, f_0 \in \mathcal{D}(A) \end{aligned}$$

D'où le résultat. De même ;

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\widetilde{A}) &= \{f \in \mathcal{D}(A^*) : (a+ib)\,\Phi(f, e_i) + (a-ib)\,\Phi(f, e_{-i}) = 0\} \\ &= \left\{f \in \mathcal{D}(A^*) : \Phi(f, e_i) = \frac{-a+ib}{a+ib}\Phi(f, e_{-i})\right\} \end{aligned}$$

Alors ;

$$\begin{aligned} f &= f_0 + \frac{1}{2c}\Phi(f, e_{-i})\, e_i + \frac{1}{2}\Phi(f, e_{-i})\, e_{-i} = f_0 + \alpha'(i)(c' e_i + e_{-i}) \\ \text{avec, } \alpha'(i) &= \frac{1}{2}\Phi(f, e_{-i}) \in \mathbb{C}, c' = \frac{1}{c} \in \mathbb{C}, f_0 \in \mathcal{D}(A) \end{aligned}$$

Enfin, remarquons que dès lors que $(a, b) \in (\mathbb{C}^2)^*$, alors au moins l'une des deux écritures est toujour possible. On montre à présent que $\widetilde{A}$ est autoadjoint si et seulemement si $|c| = 1$. Remarquons tout d'abord que pour $b \neq 0$ l'on peut aussi écrire ;

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\widetilde{A}) &= \{f \in \mathcal{D}(A^*) : a\Gamma_0(f) + b\Gamma_1(f) = 0\} \\ &= \left\{f \in \mathcal{D}(A^*) : \frac{a}{b}\Gamma_0(f) + \Gamma_1(f) = 0\right\} \\ &= \left\{f \in \mathcal{D}(A^*) : \left(\Gamma_1 + \frac{a}{b}\Gamma_0\right)(f) = 0\right\} \\ &= \{f \in \mathcal{D}(A^*) : (\Gamma_1 - \Gamma_0 B)(f) = 0\} \\ &= \ker(\Gamma_1 - \Gamma_0 B) \end{aligned}$$

Où ;

$$B : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, x \longmapsto -\frac{a}{b}x$$

On déduit que $\widetilde{A} = A_B$ et donc d'après le théorème 1.2.5 et la proposition 1.1.16 ;

$$\widetilde{A} \text{ est autoadjoint} \Longleftrightarrow B \text{ est autoadjoint} \Longleftrightarrow \frac{a}{b} \in \mathbb{R}$$

D'où,

$$|c| = \left|\frac{a+ib}{-a+ib}\right| = \left|\frac{\frac{a}{b}+i}{-\frac{a}{b}+i}\right| = \sqrt{\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^2+1}{\left(-\frac{a}{b}\right)^2+1}} = 1 = \frac{1}{|c|} = |c'|$$

On montre que $\widetilde{A}$ esi dissipatif si et seulement si $|c| \leq 1$ ($|c'| = \frac{1}{|c|} \geq 1$). Toujours d'après le théorème 1.2.5 et la proposition 1.1.16 ;

$$\widetilde{A} \text{ est dissipatif} \Longleftrightarrow \operatorname{Im}\left(-\frac{a}{b}\right) \geq 0 \Longleftrightarrow \operatorname{Im}\frac{a}{b} \leq 0$$

D'où ;

$$\begin{aligned}
|c|^2 &= \left|\frac{\frac{a}{b}+i}{-\frac{a}{b}+i}\right|^2 = \frac{\left(\operatorname{Re}\frac{a}{b}\right)^2+\left(\operatorname{Im}\frac{a}{b}+1\right)^2}{\left(\operatorname{Re}\frac{a}{b}\right)^2+\left(-\operatorname{Im}\frac{a}{b}+1\right)^2} \\
&= \frac{\left(\operatorname{Re}\frac{a}{b}\right)^2+\left(-\operatorname{Im}\frac{a}{b}+1\right)^2+4\operatorname{Im}\frac{a}{b}}{\left(\operatorname{Re}\frac{a}{b}\right)^2+\left(-\operatorname{Im}\frac{a}{b}+1\right)^2} \\
&= 1+4\frac{\operatorname{Im}\frac{a}{b}}{|-a+ib|} \leq 1 \\
&\Longrightarrow |c| \leq 1 \text{ et } |c'| = \frac{1}{|c|} \geq 1
\end{aligned}$$

Pour $b = 0$,

$$\widetilde{A} = A_{\Theta_{(a,0)}} = A_0 \text{ et } \mathcal{D}(\widetilde{A}) = \mathcal{D}(A_{\Theta_{(a,0)}})$$

D'après le théorème 1.2.5 et la proposition 1.1.16 ; $A_{\Theta_{(a,0)}}$ est autoadjoint et,

$$\Gamma_0(f) = \frac{1}{2}\left[\Phi(f,e_i)+\Phi(f,e_{-i})\right] = 0 \Longrightarrow \Phi(f,e_i) = -\Phi(f,e_{-i})$$

et donc,

$$f = f_0 - \frac{1}{2}\Phi(f,e_{-i})\,e_i + \frac{1}{2}\Phi(f,e_{-i})\,e_{-i} = f_0 + \alpha'(i)\left(-e_i+e_{-i}\right)$$

où ;

$$\alpha'(i) = \frac{1}{2}\Phi(f,e_{-i}) \in \mathbb{C},\,,\, f_0 \in \mathcal{D}(A)\,,\, c = -1$$

Enfin, pour $a = 0$

$$\widetilde{A} = A_{\Theta_{(0,b)}} = A_\infty \text{ et } \mathcal{D}(\widetilde{A}) = \mathcal{D}(A_{\Theta_{(0;b)}})$$

D'après le théorème 1.2.5 et la proposition 1.1.16 ; $A_{\Theta_{(0,b)}}$ est autoadjoint et,

$$\Gamma_1(f) = \frac{i}{2}\left[\Phi(f, e_i) - \Phi(f, e_{-i})\right] = 0 \Longrightarrow \Phi(f, e_i) = \Phi(f, e_{-i})$$

et donc,

$$f = f_0 - \frac{1}{2}\Phi(f, e_{-i})\, e_i + \frac{1}{2}\Phi(f, e_{-i})\, e_{-i} = f_0 + \alpha'(i)(e_i + e_{-i})$$

où,

$$\alpha'(i) = \frac{1}{2}\Phi(f, e_{-i}) \in \mathbb{C}, , f_0 \in \mathcal{D}(A), c = 1$$

□

Remarque 2.2.5 *Du théorème 2.2.4 ; il existe une correspondance bijective entre l'ensemble des extensions autoadjointes (resp. dissipatives) de A et celui des nombres réels (resp. du demi-plan supérieur). En particulier, $c = 1$ dans (2.2.8) (resp. $c = -1$ dans (2.2.7))correspond à l'extension autoadjointe A_0 (resp.A_∞)*

Théorème 2.2.6 *Les fonctions $\gamma-$field et les fonctions de Weyl associées au triplet limite défini dans la proposition 2.2.3 sont données par :*

$$[\gamma(z)](\lambda) = \frac{2\lambda}{\Phi(e_z, e_i) + \Phi(e_z, e_{-i})}.e_z; z \in \mathbb{C} \cap \rho(A_\infty), \tag{2.2.10}$$

$$[M(z)](\lambda) = i\lambda\frac{\Phi(e_z, e_i) - \Phi(e_z, e_{-i})}{\Phi(e_z, e_i) + \Phi(e_z, e_{-i})}; z \in \mathbb{C} \cap \rho(A_\infty), \tag{2.2.11}$$

Preuve. Pour la première relation, montrons tout d'abord que,

$$\frac{2\lambda}{\Phi(e_z, e_i) + \Phi(e_z, e_{-i})}.e_z \in \mathcal{N}_z$$

En effet,

$$\begin{aligned} & (A^* - zI_{\mathcal{H}})\left(\frac{2\lambda}{\Phi(e_z, e_i) + \Phi(e_z, e_{-i})}.e_z\right) \\ = \; & \frac{2\lambda}{\Phi(e_z, e_i) + \Phi(e_z, e_{-i})}(A^* - zI_{\mathcal{H}})(e_z) = 0 \end{aligned}$$

car e_z est une base de $\mathcal{N}_z = \ker\left(A^* - zI_{\mathcal{H}}\right)$.

Enfin,

$$\frac{2\lambda}{\Phi\left(e_z, e_i\right) + \Phi\left(e_z, e_{-i}\right)}.e_z \in \mathcal{N}_z$$

Soit à présent $\lambda \in \mathbb{C}$ quelconque. Comme $\Gamma_0 : \mathcal{N}_z \longrightarrow \mathbb{C}$ est bijective, alors

$$\exists! f \in \mathcal{N}_z : \Gamma_0\left(f\right) = \lambda$$

et comme $\dim \mathcal{N}_z = 1$, on déduit que

$$f = \alpha e_z; \alpha \in \mathbb{C}$$

De plus, comme $\gamma\left(z\right)$ et Γ_0 sont inverses l'une de l'autre. Enfin,

$$\begin{aligned}
\lambda &= \Gamma_0\left(f\right) = \Gamma_0\left(\alpha e_z\right) = \alpha\Gamma_0\left(e_z\right) = \frac{\alpha}{2}\left[\Phi\left(e_z, e_i\right) + \Phi\left(e_z, e_{-i}\right)\right] \\
&\Longrightarrow \alpha = \frac{2\lambda}{\Phi\left(e_z, e_i\right) + \Phi\left(e_z, e_{-i}\right)} \\
&\Longrightarrow \gamma\left(z\right)\left(\lambda\right) = f = \alpha e_z = \frac{2\lambda}{\Phi\left(e_z, e_i\right) + \Phi\left(e_z, e_{-i}\right)}.e_z
\end{aligned}$$

Concernant la 2ème relation;

$$\begin{aligned}
\left[M\left(z\right)\right]\left(\lambda\right) = \Gamma_1\left[\gamma\left(z\right)\right]\left(\lambda\right) &= \Gamma_1\left(\frac{2\lambda}{\Phi\left(e_z, e_i\right) + \Phi\left(e_z, e_{-i}\right)}.e_z\right) \\
&= \frac{2\lambda}{\Phi\left(e_z, e_i\right) + \Phi\left(e_z, e_{-i}\right)}\Gamma_1\left(e_z\right) \\
&= \frac{2\lambda}{\Phi\left(e_z, e_i\right) + \Phi\left(e_z, e_{-i}\right)} \times \tfrac{i}{2}\left[\Phi\left(e_z, e_i\right) - \Phi\left(e_z, e_{-i}\right)\right] \\
&= i\lambda\frac{\Phi\left(e_z, e_i\right) - \Phi\left(e_z, e_{-i}\right)}{\Phi\left(e_z, e_i\right) + \Phi\left(e_z, e_{-i}\right)}.
\end{aligned}$$

□

2.2.2 Propriétés spectrales

Dans tout ce qui suit $A_{(a,b)}$ désignera l'extension propre de A correspondant à $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $\mathcal{D}_{(a,b)}$ son domaine de définition associé .

Proposition 2.2.7 *Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$. Alors ;*

a) $0 \in \sigma_p\left(A_{(a,b)}\right)$,

b) $\Psi_k \in \mathcal{D}_{(a,b)}$,

$\Longleftrightarrow b\left[\left\|\varphi_{-i}\right\| \overline{\delta_k(i)} + \|\varphi_i\| \overline{\delta_k(-i)}\right] = ia\left[\left\|\varphi_{-i}\right\| \overline{\delta_k(i)} - \|\varphi_i\| \overline{\delta_k(-i)}\right]$.

Dans ce cas, Ψ_k est un vecteur propre de $A_{(a,b)}$ correspondant à la valeur propre a_k.

c) Si $\Psi_k \notin \mathcal{D}_{(a,b)}$ alors $a_k \in \sigma_r\left(A_{(a,b)}\right)$

Preuve.

a On commence par démontrer que pour tout $f \in \mathcal{D}(A^*)$;

$$\Phi(f, e_i) = -i\,\|\varphi_i\|^{-1} \sum_{p=0}^{+\infty} \overline{\delta_p(i)} \langle f, \Psi_p\rangle, \tag{2.2.12}$$

$$\Phi(f, e_{-i}) = i\left\|\varphi_{-i}\right\|^{-1} \sum_{p=0}^{+\infty} \overline{\delta_p(-i)} \langle f, \Psi_p\rangle, \tag{2.2.13}$$

Soient L_Ψ le sous espace fermé engendré par les vecteurs $\Psi_p, p = 0, 1, 2, ...$ et $L_\Psi^\perp$ son orthogonal. On a ;

$$\begin{aligned}
\Phi(f, e_i) &= \langle f; e_i\rangle + \langle A^* f, A^* e_i\rangle \text{ avec } f = \sum_{p=0}^{+\infty} \langle f, \Psi_p\rangle \Psi_p + f_\Psi^\perp \;;\; f_\Psi^\perp \in L_\Psi^\perp \\
&= \left\langle \sum_{p=0}^{+\infty} \langle f, \Psi_p\rangle \Psi_p + f_\Psi^\perp \,, \|\varphi_i\|^{-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\delta_k(i)}{a_k - i} \Psi_k \right\rangle \\
&\quad + \left\langle A^* \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \langle f, \Psi_p\rangle \Psi_p + f_\Psi^\perp \right), A^* \left(\|\varphi_i\|^{-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\delta_k(i)}{a_k - i} \Psi_k \right) \right\rangle
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Phi\left(f,e_i\right) &= \left\|\varphi_i\right\|^{-1}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\overline{\delta_p\left(i\right)}}{a_p+i}\left\langle f,\Psi_p\right\rangle \\
&\quad+\left\|\varphi_i\right\|^{-1}\left\langle\sum_{p=0}^{+\infty}\left\langle f,\Psi_p\right\rangle A^*\left(\Psi_p\ \right),A^*\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\delta_k\left(i\right)}{a_k-i}\Psi_k\right)\right\rangle \\
&= \left\|\varphi_i\right\|^{-1}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\overline{\delta_p\left(i\right)}}{a_p+i}\left\langle f,\Psi_p\right\rangle+\left\|\varphi_i\right\|^{-1}\left\langle\sum_{p=0}^{+\infty}\left\langle f,\Psi_p\right\rangle a_p, i\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\delta_k\left(i\right)}{a_k-i}\Psi_k\right\rangle \\
&= \left\|\varphi_i\right\|^{-1}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\overline{\delta_p\left(i\right)}}{a_p+i}\left\langle f,\Psi_p\right\rangle-i\left\|\varphi_i\right\|^{-1}\sum_{p=0}^{+\infty}a_p\frac{\overline{\delta_p\left(i\right)}}{a_p+i}\left\langle f,\Psi_p\right\rangle \\
&= \left\|\varphi_i\right\|^{-1}\sum_{p=0}^{+\infty}\left(1-ia_p\right)\frac{\overline{\delta_p\left(i\right)}}{a_p+i}\left\langle f,\Psi_p\right\rangle \\
&= -i\left\|\varphi_i\right\|^{-1}\sum_{p=0}^{+\infty}\left(a_p+i\right)\frac{\overline{\delta_p\left(i\right)}}{a_p+i}\left\langle f,\Psi_p\right\rangle \\
&= -i\left\|\varphi_i\right\|^{-1}\sum_{p=0}^{+\infty}\overline{\delta_p\left(i\right)}\left\langle f,\Psi_p\right\rangle
\end{aligned}
$$

La formule (2.2.13) se démontre de la même manière.

On déduit que ;

$$
\Gamma_0\left(f\right)=\frac{i}{2}\sum_{p=0}^{+\infty}\left[-\left\|\varphi_i\right\|^{-1}\overline{\delta_p\left(i\right)}+\left\|\varphi_{-i}\right\|^{-1}\overline{\delta_p\left(-i\right)}\right]\left\langle f,\Psi_p\right\rangle, \tag{2.2.14}
$$

$$
\Gamma_1\left(f\right)=\frac{1}{2}\sum_{p=0}^{+\infty}\left[\left\|\varphi_i\right\|^{-1}\overline{\delta_p\left(i\right)}+\left\|\varphi_{-i}\right\|^{-1}\overline{\delta_p\left(-i\right)}\right]\left\langle f,\Psi_p\right\rangle, \tag{2.2.15}
$$

et donc pour tout $f \in \mathcal{D}(A^*)$;

$$f \in \mathcal{D}_{(a,b)} \Longleftrightarrow a\Gamma_0(f) + b\Gamma_1(f) = 0$$

$$\Longleftrightarrow ia \sum_{p=0}^{+\infty} \left[-\|\varphi_i\|^{-1} \overline{\delta_p(i)} + \left\|\varphi_{-i}\right\|^{-1} \overline{\delta_p(-i)} \right] \langle f, \Psi_p \rangle$$

$$+\, b \sum_{p=0}^{+\infty} \left[\|\varphi_i\|^{-1} \overline{\delta_p(i)} + \left\|\varphi_{-i}\right\|^{-1} \overline{\delta_p(-i)} \right] \langle f, \Psi_p \rangle = 0.$$

On voit que $L_\Psi^\perp \subset \mathcal{D}_{(a,b)}$ pour tout $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et comme $\{\Psi_p, p = 0, 1, 2, ...\}$ n'est pas une suite totale ; Alors $L_\Psi^\perp \neq \{0\}$ .Enfin de la relation,

$$\forall f \in L_\Psi^\perp ; A_{(a,b)}(f) = A^*(f) = 0$$

s'en suit que 0 est une valeur propre de $A_{(a,b)}$.

b) De a) pour $k = 1, 2, ...$

$$\Psi_k \in \mathcal{D}_{(a,b)} \qquad \Longleftrightarrow ia \sum_{p=0}^{+\infty} \left[-\|\varphi_i\|^{-1} \overline{\delta_p(i)} + \left\|\varphi_{-i}\right\|^{-1} \overline{\delta_p(-i)} \right] \langle \Psi_k, \Psi_p \rangle$$

$$+b \sum_{p=0}^{+\infty} \left[\|\varphi_i\|^{-1} \overline{\delta_p(i)} + \left\|\varphi_{-i}\right\|^{-1} \overline{\delta_p(-i)} \right] \langle \Psi_k, \Psi_p \rangle = 0$$

$$\Longleftrightarrow ia \left[-\|\varphi_i\|^{-1} \overline{\delta_k(i)} + \left\|\varphi_{-i}\right\|^{-1} \overline{\delta_k(-i)} \right] \langle \Psi_k, \Psi_k \rangle$$

$$+b \left[\|\varphi_i\|^{-1} \overline{\delta_k(i)} + \left\|\varphi_{-i}\right\|^{-1} \overline{\delta_k(-i)} \right] \langle \Psi_k, \Psi_k \rangle = 0$$

$$\Longleftrightarrow -ia \left[\|\varphi_i\|^{-1} \overline{\delta_k(i)} - \left\|\varphi_{-i}\right\|^{-1} \overline{\delta_k(-i)} \right]$$

$$+b \left[\|\varphi_i\|^{-1} \overline{\delta_k(i)} + \left\|\varphi_{-i}\right\|^{-1} \overline{\delta_k(-i)} \right] = 0$$

Dans ce cas,

$$A_{(a,b)}(\Psi_k) = A^*(\Psi_k) = a_k \Psi_k ; k = 0, 1, 2, ...$$

c) Supposons à présent que $\Psi_k \notin \mathcal{D}_{(a,b)}$. On démontre d'abord que $\left(A_{(a,b)} - a_k\right)$ est un opérateur injectif , pour cela supposons qu'il exite un élement f non nul de $\mathcal{D}_{(a,b)}$ vérifiant $A_{(a,b)}(f) = A^*(f) = a_k f$. On pose,

$$f = \sum_{p=0}^{+\infty} \langle f, \Psi_p \rangle \Psi_p + f_\Psi^\perp \ ; \quad f_\Psi^\perp \perp L_\Psi,$$

Alors,

$$\begin{aligned} A_{(a,b)}(f) &= A^*(f) = A^*\left(\sum_{p=0}^{+\infty} \langle f, \Psi_p \rangle \Psi_p + f_\Psi^\perp\right) \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \langle f, \Psi_p \rangle A^*(\Psi_p) \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} a_p \langle f, \Psi_p \rangle \Psi_p \end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned} \left(A_{(a,b)} - a_k\right)(f) &= \sum_{p=0}^{+\infty} a_p \langle f, \Psi_p \rangle \Psi_p - a_k \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \langle f, \Psi_p \rangle \Psi_p + f_\Psi^\perp\right) \\ &= \sum_{\substack{p=0 \\ p\neq k}}^{+\infty} (a_p - a_k) \langle f, \Psi_p \rangle \Psi_p - a_k f_\Psi^\perp = 0 \end{aligned}$$

Etant donné la somme orthogonale, on déduit que,

$$\left\{ \begin{array}{c} \sum_{\substack{p=0 \\ p\neq k}}^{+\infty} (a_p - a_k) \langle f, \Psi_p \rangle \Psi_p = 0 \\ a_k f_\Psi^\perp = 0 \end{array} \right.$$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} (a_p - a_k) \langle f, \Psi_p \rangle \Psi_p = 0 \\ \\ f_\Psi^\perp = 0 \end{array} \right.$$

comme $\{\Psi_p\}_{p=0}^{+\infty}$ est orthogonale (libre) et $a_p \neq a_k$ pour $p \neq k; k \in \{0, 1, 2, ...\}$ alors ;

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \langle f, \Psi_p \rangle = 0, p \neq k \\ \\ f_\Psi^\perp = 0 \end{array} \right.$$

il s'en suit forcement que $f = \alpha_k \Psi_k; \alpha_k \in \mathbb{C}$ et donc $f \notin \mathcal{D}_{(a,b)}$ ce qui est une contradiction. D'autre part comme décrit ci-dessus,

$$\left(A_{(a,b)} - a_k\right)(f) = \sum_{p \neq k} (a_p - a_k) \langle f, \Psi_p \rangle \Psi_p - a_k f_{\Psi}^{\perp}.$$

Alors pour $k \in \{0, 1, 2, ...\}$,

$$\begin{aligned} \left\langle \left(A_{(a,b)} - a_k\right)(f), \Psi_k \right\rangle &= \left\langle \sum_{p \neq k} (a_p - a_k) \langle f, \Psi_p \rangle \Psi_p - a_k f_{\Psi}^{\perp}, \Psi_k \right\rangle \\ &= \sum_{p \neq k} (a_p - a_k) \langle f, \Psi_p \rangle \langle \Psi_p, \Psi_k \rangle = 0 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \left(A_{(a,b)} - a_k\right)(f) \perp \Psi_k$$

on conclut que $a_k \in \sigma_r\left(A_{(a,b)}\right)$.

$\square$

Lemme 2.2.8 *Soit $z \in \rho(A_\infty)$. Alors pour tout $g \in L^2(\Omega, \mu)$ il existe $g_{\Psi}^{\perp} \in L_{\Psi}^{\perp}$ et des nombres complexes C, C_0, C_1...pour lesquels ;*

$$g = \sum_{p=0}^{+\infty} C_p \Psi_p + C(i - z) e_i + C(i + z) e_{-i} + g_{\Psi}^{\perp}; \sum_{p=0}^{+\infty} |C_p|^2 < +\infty, \tag{2.2.16}$$

$$C_p = \langle g, \Psi_p \rangle - C(i - z) \frac{\delta_p(i)}{\|\varphi_i\| (a_p - i)} - C(i + z) \frac{\delta_p(-i)}{\|\varphi_{-i}\| (a_p + i)}. \tag{2.2.17}$$

Preuve. Soit $z \in \rho(A_\infty)$. On a $L^2(\Omega, \mu) = (A_\infty - z)(\mathcal{D}(A_\infty))$. Alors pour tout $g \in L^2(\Omega, \mu)$ il existent $f_0 \in \mathcal{D}(A)$ et $C \in \mathbb{C}$ tels que,

$$g = (A_\infty - z)(f_0 + Ce_i - Ce_{-i})$$

Comme

$$f_0 = \sum_{p=0}^{+\infty} \langle f_0, \Psi_p \rangle \Psi_p + f_{0\Psi}^{\perp} \ ; \ f_{0\Psi}^{\perp} \in L_{\Psi}^{\perp},$$

Alors,

$$\begin{aligned} g &= (A_\infty - z)(f_0) + C(i-z)e_i + C(i+z)e_{-i} - zf_{0\Psi}^{\perp} \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty}(a_p - z)\langle f_0, \Psi_p\rangle \Psi_p + C(i-z)e_i + C(i+z)e_{-i} - zf_{0\Psi}^{\perp}. \end{aligned}$$

On pose $g_\Psi^{\perp} = -zf_{0\Psi}^{\perp}$ et $C_p = (a_p - z)\langle f_0, \Psi_p\rangle$. il s'en suit que,

$$g_\Psi^{\perp} \in L_\Psi^{\perp}\,;\ \sum_{p=0}^{+\infty}|C_p|^2 < +\infty,$$

et pour tout $p = 0, 1, 2, ...,$

$$\begin{aligned} \langle g, \Psi_p\rangle &= C_p + C(i-z)\langle e_i, \Psi_p\rangle + C(i+z)\langle e_{-i}, \Psi_p\rangle \\ &= C_p + C(i-z)\frac{\delta_p(i)}{\|\varphi_i\|(a_p - i)} + C(i+z)\frac{\delta_p(-i)}{\|\varphi_{-i}\|(a_p+i)}. \end{aligned}$$

$\square$

Corollaire 2.2.9 *Suivant les notations du lemme précedent, l'opérateur* $(A_\infty - z)^{-1}$ *applique* $L^2(\Omega, \mu)$ *sur* $\mathcal{D}(A_\infty)$ *selon la formule suivante,*

$$(A_\infty - z)^{-1}(g) = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{C_p}{a_p - z}\Psi_p + Ce_i - Ce_{-i} - \frac{1}{z}g_\Psi^{\perp}.$$

$\sigma(A_\infty) = \{0, a_0, a_1, a_2, ...\}$

Théorème 2.2.10 *Soient* $(a,b) \in \mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$ *et* $A_{(a,b)}$. *Alors,*

a) $\{0, a_0, a_1, a_2, ...\} \subset \sigma\left(A_{(a,b)}\right)$,

b) $\forall z \in \rho(A_\infty)$,

$$z \in \sigma\left(A_{(a,b)}\right) \Longleftrightarrow ib\left(\Phi(e_z, e_{-i}) - \Phi(e_z, e_i)\right) = a\left(\Phi(e_z, e_i) + \Phi(e_z, e_{-i})\right).$$

Dans ce dernier cas, z *est une valeur propre de* $A_{(a,b)}$.

Preuve. Le point a) a été traité plus haut. Soit à présent $z \in \rho(A_\infty)$. Sachant que $\sigma\left(\Theta_{(a,b)}\right) = \dfrac{-a}{b}$ (voir la proposion 1.1.16) et le théorème 1.2.8, on a ;

$$\begin{array}{rcl} z & \in & \sigma\left(A_{(a,b)}\right) \Longleftrightarrow M(z) \in \sigma\left(\Theta_{(a,b)}\right) \Longleftrightarrow M(z) = \dfrac{-a}{b} \\ & \Longleftrightarrow & i\dfrac{\Phi(e_z, e_i) - \Phi(e_z, e_{-i})}{\Phi(e_z, e_i) + \Phi(e_z, e_{-i})} = \dfrac{-a}{b} \\ & \Longleftrightarrow & ib\left(\Phi(e_z, e_{-i}) - \Phi(e_z, e_i)\right) = a\left(\Phi(e_z, e_i) + \Phi(e_z, e_{-i})\right), \end{array}$$

On montre à présent que z appartient au spectre ponctuel, chose qui se déduit du point e) du théorème 1.2.8 et du fait quele spectre de $\Theta_{(a,b)}$ est ponctuel. $\square$

On termine cette partie en explicitant la forme générale de la résolvante des extensions propres de A.

Lemme 2.2.11 *Soient* $(a, b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ *et* $\Theta_{(a,b)}$ *sa relation linéaire correspondante ; alors pour tout* $z \in \rho(A_\infty) \cap \rho\left(A_{(a,b)}\right)$,

$$\left(\Theta_{(a,b)-}M(z)\right)^{-1} = \frac{-b}{a + bM(z)}.I_{\mathbb{C}} \tag{2.2.18}$$

Preuve. Remarquons d'abord que $z \in \rho(A_\infty) \cap \rho\left(A_{(a,b)}\right) \Longrightarrow M(z) \neq \dfrac{-a}{b}$. de plus,

$$\begin{array}{rcl} \left(\Theta_{(a,b)-}M(z)\right)^{-1} & = & \left\{(x, y - M(z)x) : ax + by = 0; x, y \in \mathbb{C}\right\}^{-1} \\ & = & \left\{(y - M(z)x, x) : ax + by = 0; x, y \in \mathbb{C}\right\} \\ & = & \left\{\left(-\dfrac{a + bM(z)}{b}x, x\right), x \in \mathbb{C}\right\} \\ & = & \left\{\left(x, \dfrac{-b}{a + bM(z)}x\right), x \in \mathbb{C}\right\} \\ & = & \dfrac{-b}{a + bM(z)}.I_{\mathbb{C}} \end{array}$$

$\square$

Proposition 2.2.12 *Soit* $(a,b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$. *Alors pour tout* $z \in \rho(A_\infty) \cap \rho\left(A_{(a,b)}\right)$ *et* $g \in L^2(\Omega, \mu)$,

$$\begin{aligned}\left(A_{(a,b)} - z\right)^{-1}(g) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{C_p}{a_p - z} \Psi_p + C e_i - C e_{-i} - \frac{1}{z} g_\Psi^\perp \\ - \frac{b}{a + bM(z)} \times \frac{4\langle g, e_{\bar z}\rangle}{\left(\Phi(e_i, e_{\bar z}) + \Phi(e_{-i}, e_{\bar z})\right)\left(\Phi(e_z, e_i) + \Phi(e_z, e_{-i})\right)} e_z,\end{aligned}$$

où les constantes $g_\Psi^\perp, C, C_p, p = 0, 1, 2, ...$*sont définies comme dans le lemme 2.2.8.*

Preuve. Remarquons tout d'abord que $\gamma^*(\bar z)$ applique $\ker(A^* - \bar z)$ sur $\mathbb{C}$ suivant la formule,

$$\gamma^*(\bar z)(h) = \frac{2\langle h, e_{\bar z}\rangle}{\Phi(e_i, e_{\bar z}) + \Phi(e_{-i}, e_{\bar z})}$$

D'autre part, du théorème 1.2.8, on a pour tout $g \in L^2(\Omega, \mu)$,

$$\begin{aligned}\left(A_{(a,b)} - z\right)^{-1}(g) &= (A_\infty - z)^{-1}(g) + \gamma(z)\left(\Theta_{(a,b)} - M(z)\right)^{-1} \gamma^*(\bar z)\left(\langle g, e_{\bar z}\rangle e_{\bar z}\right) \\ &= (A_\infty - z)^{-1}(g) + \\ &+ \langle g, e_{\bar z}\rangle \gamma(z)\left(\Theta_{(a,b)} - M(z)\right)^{-1}\left(\frac{2}{\Phi(e_i, e_{\bar z}) + \Phi(e_{-i}, e_{\bar z})}\right) \\ &= (A_\infty - z)^{-1}(g) + \\ &+ \langle g, e_{\bar z}\rangle \gamma(z)\left(\frac{-b}{a + bM(z)} \times \frac{2}{\Phi(e_i, e_{\bar z}) + \Phi(e_{-i}, e_{\bar z})}\right) \\ &= (A_\infty - z)^{-1}(g) + \\ &- \frac{b}{a + bM(z)} \langle g, e_{\bar z}\rangle \gamma(z)\left(\frac{2}{\Phi(e_i, e_{\bar z}) + \Phi(e_{-i}, e_{\bar z})}\right) \\ &= (A_\infty - z)^{-1}(g) + \\ &- \frac{b}{a + bM(z)} \times \frac{4\langle g, e_{\bar z}\rangle}{\left(\Phi(e_i, e_{\bar z}) + \Phi(e_{-i}, e_{\bar z})\right)\left(\Phi(e_z, e_i) + \Phi(e_z, e_{-i})\right)} e_z.\end{aligned}$$

le résultat découle du lemme 2.2.8 et du corollaire 2.2.9 $\square$

2.3 Résolvantes généralisées

2.3.1 Les familles de Nevanlinna et les extensions avec sortie de l'espace

Ce paragraphe porte sur l'étude des extensions autoadjointes avec sortie de l'espace, en d'autres termes des extensions autoadjointes agissant dans des espaces contenant l'espace d'origine. Il est à noter que les définitions et propriétés suivantes, hormis le théorème 2.3.3, sont de [13, 14].

Définition 2.3.1 *Une famille de relations linéaires* $\tau(\lambda), \lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ *définies dans un espace de Hilbert* $\mathcal{H}$ *est appelée* famille de Nevanlinna *si ;*

1. *pour tout* $\lambda \in \mathbb{C}_+(resp.\mathbb{C}_-)$*, la relation* $\tau(\lambda)$ *est maximale dissipative (resp.accumulative),*
2. $\tau(\lambda)^* = \tau(\bar{\lambda})\,; \lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$*,*
3. *pour un certain (et alors tout)* $\mu \in \mathbb{C}_+(resp.\mathbb{C}_-)$*, la famille d'opérateurs* $(\tau(\lambda)+\mu)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ *est holomorphe pour tout* $\lambda \in \mathbb{C}_+(resp;\mathbb{C}_-)$*.*

De 2, la relation $\tau(\lambda)$,$\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ est necessairement fermée.

La classe de famille de Nevanlinna dans $\mathcal{H}$ est notée par $\tilde{R}(\mathcal{H})$.

Définition 2.3.2 *Un couple* $\{\Phi_1, \Phi_2\}$ *fonctions holomorphes sur* $\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-$ *à valeurs dans* $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ *est dit* paire de Nevanlinna *si,*

a) $\dfrac{Im\left(\Phi_1(\lambda), \Phi_2^*(\lambda)\right)}{Im\lambda} \geq 0; \lambda \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-,$

b) $\Phi_2^*(\bar{\lambda})\,\Phi_1(\lambda) - \Phi_1^*(\bar{\lambda})\,\Phi_2(\lambda) = 0; \lambda \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-,$

c) $0 \in \rho\left(\Phi_2(\lambda) \pm i\Phi_1(\lambda)\right), \lambda \in \mathbb{C}_\pm.$

Il est à noter que les familles et paires de Nevanlinna sont liées par la formule ;

$$\tau(\lambda) = \{(\Phi_1(\lambda)(x), \Phi_2(\lambda)(x)) : x \in \mathcal{H}\} \tag{2.3.1}$$

Soient A un opérateur symmétrique sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ ayant des indices de défaut égaux et $\widetilde{A}$ une extension autoadjointe de A définie dans un espace de Hibert $\tilde{\mathcal{H}}$ pour lequel $\mathcal{H}$ est un sous espace fermé. On note $P_{\mathcal{H}}$ l'orthoprojecteur de $\tilde{\mathcal{H}}$ sur $\mathcal{H}$. L'opérateur

$$R_\lambda = P_{\mathcal{H}} \left(\widetilde{A} - \lambda\right)^{-1}|_{\mathcal{H}}$$

représentant la résolvante de $\widetilde{A}$ en $\mathcal{H}$ est dite *résolvante généralisée de A.*

La résolvante généralisée des opérateurs de Carleman étudiés dans ce manuscrit est décrite dans le théorème suivant ;

Théorème 2.3.3 *Soit $\widetilde{A}$ une extension de A avec sortie de l'espace. Alors, il existe une paire de Nevanlinna $\{\Phi_1, \Phi_2\}$ de fonctions scalaires holomorphes pour lesquelles pour tout $\lambda \in \rho(\widetilde{A}) \cap \rho(A_\infty)$; on a*

$$\Phi_2(\lambda) + M(\lambda)\Phi_1(\lambda) \neq 0$$

et

$$R_\lambda = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{C_p}{a_p - z}\Psi_p + C(e_i - e_{-i}) - \frac{1}{z}g_\Psi^\perp$$
$$- \frac{\Phi_1(\lambda)}{\Phi_2(\lambda) + M(\lambda)\Phi_1(\lambda)} \times \frac{4\langle g, e_{\bar{z}}\rangle}{(\Phi(e_i, e_{\bar{z}}) + \Phi(e_{-i}, e_{\bar{z}}))(\Phi(e_z, e_i) + \Phi(e_z, e_{-i}))} e_z,$$

où les constantes $g_\Psi^\perp, C, C_p, p = 0, 1, 2, ...$ sont définies dans le lemme 2.2.8.

Preuve. Supposons tout d'abord que $R_\lambda = (A_\infty - \lambda)^{-1}$. Alors on peut prendre comme paire de Nevanlinna $\{\Phi_1, \Phi_2\} = \{0, \Phi_2\}$; où Φ_2 est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-$ vérifiant $\Phi_2(\lambda) \neq 0$.

Supposons à présent que $R_\lambda \neq (A_\infty - \lambda)^{-1}$. Selon [10, 25], il existe une fonction de Nevanlinna $\tau(.) \in \tilde{R}(\mathcal{X})$ pour laquelle la formule de Krein-Naïmark s'écrit comme suit,

$$R_\lambda = (A_\infty - \lambda)^{-1} - \gamma(\lambda)(\tau(\lambda) + M(\lambda))^{-1}\gamma^*\left(\bar{\lambda}\right) \tag{2.3.2}$$

$M(\lambda)$ et $\gamma(\lambda)$ sont la fonction de Weyl et la $\gamma-$field définies précédement. Soit $\{\Phi_1, \Phi_2\}$ une paire de Nevanlinna vérifiant (2.3.1). Alors,

$$\begin{aligned}(\tau(\lambda) + M(\lambda))^{-1} &= \{(\Phi_1(\lambda)x, (\Phi_2(\lambda) + M(\lambda)\Phi_1(\lambda))x) : x \in \mathbb{C}\}^{-1} \\ &= \{((\Phi_2(\lambda) + M(\lambda)\Phi_1(\lambda))x, \Phi_1(\lambda)x) : x \in \mathbb{C}\}\end{aligned}$$

Montrons à présent que

$$\Phi_2(\lambda) + M(\lambda)\Phi_1(\lambda) \neq 0$$

Supposons le contraire. Il s'en suit que ;

$$\begin{aligned}&\Phi_2(\lambda) + M(\lambda)\Phi_1(\lambda) = 0 \left(\wedge (\tau(\lambda) + M(\lambda))^{-1} \in \mathcal{B}(\mathbb{C})\right) \\ &\qquad \Longrightarrow \Phi_1(\lambda) = 0 \\ &\qquad \Longrightarrow \Phi_2(\lambda) = (\tau(\lambda) + M(\lambda))^{-1} = 0 \\ &\qquad \Longrightarrow R_\lambda = (A_\infty - \lambda)^{-1}\end{aligned}$$

Contradiction. Revenant au calcul de $(\tau(\lambda) + M(\lambda))^{-1}$,

$$\begin{aligned}(\tau(\lambda) + M(\lambda))^{-1} &= \left\{\left(x, \frac{\Phi_1(\lambda)}{\Phi_2(\lambda) + M(\lambda)\Phi_1(\lambda)}x\right) : x \in \mathbb{C}\right\} \\ &= \frac{\Phi_1(\lambda)}{\Phi_2(\lambda) + M(\lambda)\Phi_1(\lambda)}.I_{\mathbb{C}}\end{aligned}$$

Finalement, on obtient le résultat demandé en remplaçant dans (2.3.2) et en reprenant le raisonement utilisé dans la proposition 2.2.12. $\square$

Remarque 2.3.4 *Les extensions autoadjointes de la proposition 2.2.12 sont obtenues du théorème 2.3.3 en prennant* $\{\Phi_1, \Phi_2\} = \{b, a\}$

Chapitre 3

Inégalités entre les opérateurs auto-adjoints bornés et leurs exponentielles

3.1 Introduction

Théorème 3.1.1 *Soit $(x_i)_{i=1}^{n}$ une suite réelle non négative. Alors pour tout réel $p \geq 1$ on a ;*

$$\frac{e^p}{p^p}\sum_{i=1}^{n} x_i^p \leq \exp\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

l'égalité a lieu pour $x_i = p$ pour une valeur $1 \leq i \leq n$ et $x_j = 0$ pour $j \neq i$. La constante $\frac{e^p}{p^p}$ est la meilleur possible.

Ce résultat a été établi par Qi F. dans [29] pour le cas $p = 2$, puis généralisé dans [4] pour p entier naturel quelconque. On se propose dans le présent chapitre d'étendre ce résultat au cas où la famille $(x_i)_{i=1}^{n}$ est remplacée par une famille $(A_i)_{i=1}^{n}$ d'opérateurs auto-adjoints positifs.

Définition 3.1.2 *Un opérateur A de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ est dit* positif *si $\langle Ax, x\rangle \geq 0, \forall x \in \mathcal{H}$. On note $\mathcal{B}^{+}(\mathcal{H})$ l'ensemble des opérateurs linéaires bornés positifs dans $\mathcal{H}$.*

Définition 3.1.3 *Soient $A, B \in \mathcal{B}^+(\mathcal{H})$. On dira que $A \geq B$ si*

$$\langle Ax, x\rangle - \langle Bx, x\rangle \geq 0, \forall x \in \mathcal{H}.$$

Le résultat suivant, regroupe les principales propriétés des opérateurs positifs [1, 32]

Théorème 3.1.4 *1. $\mathcal{B}^+(\mathcal{H})$ est un cône fermé.*

2. Si $A \in \mathcal{B}^+(\mathcal{H})$ est inversible alors, $A^{-1} \in \mathcal{B}^+(\mathcal{H})$

3. Si $A, B \in \mathcal{B}^+(\mathcal{H})$ commutent alors $AB \in \mathcal{B}^+(\mathcal{H})$

4. Si $A, B \in \mathcal{B}^+(\mathcal{H})$ commutent, sont inversibles et vérifient la condition $(A - B) \in \mathcal{B}^+(\mathcal{H})$ alors, $(B^{-1} - A^{-1}) \in \mathcal{B}^+(\mathcal{H})$

5. $A \in \mathcal{B}^+(\mathcal{H})$ si et seulement s'il existe un opérateur $B \in \mathcal{B}^+(\mathcal{H})$ autoadjoint tel que $A = B^2$

6. $A \in \mathcal{B}^+(\mathcal{H})$ est autoadjoint si et seulement si sa representation spéctrale est de la forme

$$A = \int_m^{M+\varepsilon} \lambda dE_\lambda \tag{3.1.1}$$

où, ε est un nombre positif quelconque,

$$0 \leq m = \inf_{\|x\|=1} \langle Ax, x\rangle \leq M = \sup_{\|x\|=1} \langle Ax, x\rangle < +\infty.$$

7. Si $A \in \mathcal{B}^+(\mathcal{H})$ est autoadjoint admet la representation (3.1.1), alors pour toute fonction réelle continue sur $[m, M + \varepsilon]$;

$$f(A) = \int_m^{M+\varepsilon} f(\lambda)\, dE_\lambda \tag{3.1.2}$$

et $f(A) = 0$ (resp. $f(A) \geq 0$) si et seulement si $f(\lambda) = 0$ (resp. $f(\lambda) \geq 0$) sur $[m, M + \varepsilon]$.

Remarque 3.1.5 *m et M representent respectivement la plus petite et plus grande valeur du spectre de A.*

Définition 3.1.6 *Soit $A \in \mathcal{B}^{+}(\mathcal{H})$. On appelle* exponentielle de A *et on note* $\exp(A)$, *l'opérateur de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ défini par ;*

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$$

Proposition 3.1.7 *On a :*

1. $\exp(z.I_{\mathcal{H}}) = \exp(z).I_{\mathcal{H}}, \forall z \in \mathbb{C}$,

Si $A, B \in \mathcal{B}^{+}(\mathcal{H})$ commutent alors,

$$\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B) = \exp(B)\exp(A) = \exp(B+A)$$

3.2 Résultats concernant les inégalités

Théorème 3.2.1 *Soit $A \in \mathcal{B}^{+}(\mathcal{H})$ un opérateur auto-adjoint. Alors, pour tout naturel $p \geq 1$,*

$$\frac{e^p}{p^p} A^p \leq \exp(A). \tag{3.2.1}$$

De plus, si $A = p.I_{\mathcal{H}}$ alors, on a l'égalité dans la formule 3.2.1, et la constante $\frac{e^p}{p^p}$ est la meilleure possible pour tout $A \in \mathcal{B}^{+}(\mathcal{H})$ auto-adjoint.

Preuve. Considérons l'opérateur auto-adjoint

$$B = \exp(A) - \frac{e^p}{p^p} A^p.$$

Il faut montrer que cet opérateur est positif. Soit donc,

$$A = \int_{m}^{M+\varepsilon} \lambda dE_\lambda$$

la représentation spectrale de A. Alors, d'après le théorème 3.2.1,

$$B = \int_{m}^{M+\varepsilon} (e^{\lambda} - \frac{e^p}{p^p}\lambda^p) dE_{\lambda}. \tag{3.2.2}$$

En utilisant [4], on a

$$\lambda \geq 0 \Longrightarrow (e^{\lambda} - \frac{e^p}{p^p}\lambda^p) \geq 0. \tag{3.2.3}$$

Donc l'opérateur B est positif. Par ailleurs, il est très facile de voir que :

$$A = p.I_{\mathcal{H}} \Longrightarrow \frac{e^p}{p^p}A^p = \frac{e^p}{p^p}.p^p.I_{\mathcal{H}} = e^p.I_{\mathcal{H}} = \exp(p.I_{\mathcal{H}}) = \exp(A).$$

Supposons maintenant que α est une constante vérifiant l'inégalité $\alpha A^p \leq \exp(A)$ pour tout élément A auto-adjoint de $\mathcal{B}^+(\mathcal{H})$. En posant $A = p.I_{\mathcal{H}}$, on obtient :

$$\alpha A^p \leq \exp(A) \Longrightarrow \alpha p^p.I_{\mathcal{H}} \leq e^p.I_{\mathcal{H}} \Longrightarrow (\alpha p^p - e^p).I_{\mathcal{H}} \leq 0.$$

Or cette dernière inégalité signifie que $\alpha \leq \frac{e^p}{p^p}$. □

Lemme 3.2.2 *Soient $p \geq 1$ un entier naturel et $(A_i)_{i=1}^n$ une famille d'éléments de $\mathcal{B}^+(\mathcal{H})$ auto-adjoints, deux à deux commutants. Alors,*

$$\sum_{i=1}^{n} A_i^p \leq \left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)^p. \tag{3.2.4}$$

Preuve. Procédons par récurrence. Si $n = 2$. D'après le théorème 3.1.4, l'opérateur $A_1^k A_2^{p-k}$ est positif, auto-adjoint pour tout $0 \leq k \leq p$. Il en est de même pour l'opérateur

$$\sum_{k=1}^{p-1} \frac{p!}{k!(p-k)!} A_1^k A_2^{p-k}.$$

Donc, en utilisant la formule du binôme :

$$(A_1 + A_2)^p = \sum_{k=0}^{p} \frac{p!}{k!(p-k)!} A_1^k A_2^{p-k} = A_1^p + A_2^p + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{p!}{k!(p-k)!} A_1^k A_2^{p-k}$$

on obtient que $A_1^p + A_2^p \leq (A_1 + A_2)^p$.

Supposons maintenant que

$$\sum_{i=1}^{n} A_i^p \leq \left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)^p .$$

Alors,

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{n+1} A_i\right)^p &= \left(\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) + A_{n+1}\right)^p \geq \left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)^p + A_{n+1}^p \\ &\geq \sum_{i=1}^{n} A_i^p + A_{n+1}^p = \sum_{i=1}^{n+1} A_i^p.\end{aligned}$$

□

Théorème 3.2.3 *Soit $(A_i)_{i=1}^n$ une famille d'éléments de $\mathcal{B}^+(\mathcal{H})$ auto-adjoints, deux à deux commutants. Alors, pour tout naturel $p \geq 1$:*

$$\frac{e^p}{p^p} \sum_{i=1}^{n} A_i^p \leq \exp\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right). \tag{3.2.5}$$

De plus, si $A_i = p.I_{\mathcal{H}}$ pour un certain $1 \leq i \leq n$ et $A_j = 0$ pour $i \neq j$ alors, on a égalité dans la formule 3.2.5 et la constante $\frac{e^p}{p^p}$ est la meilleure possible pour tout $A_i \in \mathcal{B}^+(\mathcal{H})$.

Preuve. D'après le lemme et le théorème précédents,

$$\frac{e^p}{p^p} \sum_{i=1}^{n} A_i^p \leq \frac{e^p}{p^p} \left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)^p \leq \exp\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right).$$

D'autre part, si pour un certain $1 \leq i \leq n$, $A_i = p.I_{\mathcal{H}}$ et $A_j = O$ pour $i \neq j$ alors,

$$\begin{aligned}\frac{e^p}{p^p} \sum_{k=1}^{n} A_k^p &= \frac{e^p}{p^p} A_i^P = \frac{e^p}{p^p} (p.I_{\mathcal{H}})^p = \frac{e^p}{p^p} p^p.I_{\mathcal{H}} \\ &= e^p.I_{\mathcal{H}} = \exp(p.I_{\mathcal{H}}) = \exp(A_i).\end{aligned}$$

Supposons maintenant que α est une constante vérifiant l'inégalité

$$\alpha \sum_{i=1}^{n} A_i^p \leq \exp\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right).$$

Alors, pour $A_i = p.I_{\mathcal{H}}$ et $A_j = 0$ pour $i \neq j$,

$$\alpha \sum_{k=1}^{n} A_k^p = \alpha A_i^p = \alpha p^p.I_{\mathcal{H}} \leq \exp(A_i) = e^p.I_{\mathcal{H}}.$$

D'où,

$$\alpha p^p \leq e^p.$$

□

Proposition 3.2.4 *Soit $(A_i)_{i=1}^n$ une famille d'éléments de $\mathcal{B}^+(\mathcal{H})$ auto-adjoints, deux à deux commutants. Supposons que,*

1. *les opérateurs A_i $(i = 1, 2, ..., n)$ sont des solutions de l'équation*

$$X^n + B_{n-1}.X^{n-1} + ... + B_1.X + B_0.I_{\mathcal{H}} = 0, \qquad B_i \in \mathcal{B}(\mathcal{H}). \tag{3.2.6}$$

2. *$\forall i \neq j$, l'opérateur $(A_i - A_j)$ est inversible.*

   Alors,

$$A_1 + A_2 + ... + A_n = -B_{n-1} \tag{3.2.7}$$

Preuve. Posons

$$P_n(X) = X^n + B_{n-1}.X^{n-1} + ... + B_1.X^1 + B_0.I_{\mathcal{H}}.$$

Si $n = 2$, l'équation 3.2.6, devient $P_2(X) = X^2 + B_1.X + B_0.I_{\mathcal{H}} = 0$. En utilisant l'inversibilité de $(A_1 - A_2)$ et la relation

$$0 = P_2(A_1) - P_2(A_2) = A_1^2 - A_2^2 + B_1.(A_1 - A_2) = (A_1 + A_2 + B_1).(A_1 - A_2)$$

on obtient facilement que,

$$(A_1 + A_2 + B_1) = 0. \tag{3.2.8}$$

Or ; ceci est equivalent à

$$A_1 + A_2 = -B_1$$

Supposons maintenant que la formule 3.2.7 est vraie pour n et montrons qu'elle le reste pour $n+1$. Pour tout $1 \leq i \leq n$, on peut vérifier que,

$$\begin{aligned} P_{n+1}(A_{n+1}) - P_{n+1}(A_i) &= \left(A_{n+1}^{n+1} - A_i^{n+1}\right) + B_n\left(A_{n+1}^n - A_i^n\right) \\ &\quad +\ldots\ldots + B_1(A_{n+1} - A_i) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n} A_{n+1}^{n-k}A_i^k + B_n \sum_{k=0}^{n-1} A_{n+1}^{n-k-1}A_i^k + \ldots. + B_1\right)(A_{n+1} - A_i) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Puisque l'opérateur $(A_{n+1} - A_i)$ est inversible, il s'en suit que,

$$\left(\sum_{k=0}^{n} A_{n+1}^{n-k}A_i^k + B_n \sum_{k=0}^{n-1} A_{n+1}^{n-k-1}A_i^k + \ldots. + B_1\right) = 0 \qquad \forall 1 \leq i \leq n. \tag{3.2.9}$$

Par ailleurs, $\forall 1 \leq i \leq n$,

$$\sum_{k=0}^{n} A_{n+1}^{n-k}A_i^k + B_n \sum_{k=0}^{n-1} A_{n+1}^{n-k-1}A_i^k + \ldots. + B_1 = A_i^n + \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-k-1}A_i^{n-k-1}, \tag{3.2.10}$$

où,

$$C_p = A_{n+1}^{n-p} + \sum_{k=0}^{n-p-1} B_{n-k}A_{n+1}^{n-p-k-1}. \tag{3.2.11}$$

Posons

$$Q_n(X) = X^n + C_{n-1}X^{n-1} + \ldots.C_1X + C_0. \tag{3.2.12}$$

D'après (3.2.9) et (3.2.10), les opérateurs A_i, $\quad 1 \leq i \leq n$ sont solutions de l'équation $Q_n(X) = 0$, d'après l'hypothèse de récurrence

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = -C_{n-1} = -(A_{n+1} + B_n). \tag{3.2.13}$$

ce qui équivaut à :

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n + A_{n+1} = -B_n. \tag{3.2.14}$$

□

Remarque 3.2.5 *Puisque tous les opérateurs A_i, sont positifs, alors l'opérateur $(-B_n)$ est lui aussi nécessairement positif.*

Proposition 3.2.6 *Sous les conditions de la proposition 3.2.4, on a pour tout naturel $p \geq 1$*

$$\frac{e^p}{p^p}\sum_{i=1}^{n} A_i^p \leq \frac{e^p}{p^p}\left(-B_{n-1}\right)^p \leq \exp\left(-B_{n-1}\right). \tag{3.2.15}$$

Preuve. D'après le théorème 3.2.1,

$$\frac{e^p}{p^p}\sum_{i=1}^{n} A_i^p \leq \frac{e^p}{p^p}\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)^p = \frac{e^p}{p^p}\left(-B_{n-1}\right)^p. \tag{3.2.16}$$

Comme l'opérateur $(-B_{n-1})$ est positif, il découle du lemme 3.2.2 que :

$$\frac{e^p}{p^p}\sum_{i=1}^{n} A_i^p \leq \frac{e^p}{p^p}\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)^p = \frac{e^p}{p^p}\left(-B_{n-1}\right)^p \leq \exp\left(-B_{n-1}\right)$$

$\square$

Corollaire 3.2.7 *Soit $(A_i)_{i=1}^{n}$ une famille d'éléments de $\mathcal{B}^+(\mathcal{H})$ auto-adjoints, deux à deux commutants.. Supposons que,*

1. *les opérateurs A_i $(i = 1, 2, ..., n)$ sont solutions de l'équation*

$$X^n + b_{n-1}.X^{n-1} + ... + b_1.X + b_0 = 0, \qquad b_i \in \mathbb{C}$$

2. *$\forall i \neq j$, l'opérateur $(A_i - A_j)$ est inversible.*

   Alors, $b_{n-1} \leq 0$ et

$$\frac{e^p}{p^p}\sum_{i=1}^{n} A_i^p \leq \frac{e^p}{p^p}\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)^p = \frac{e^p}{p^p}\left(-b_{n-1}\right)^p \leq \exp\left(-b_{n-1}\right) \tag{3.2.17}$$

Preuve. Il suffit de poser dans la proposition précédente, $B_i = b_i.I_{\mathcal{H}}$, $(i = 1, 2, ..., n)$.

$\square$

Théorème 3.2.8 *Soit* $(A_i)_{i=1}^n$ *une famille d'éléments inversibles de* $\mathcal{B}^+(\mathcal{H})$ *auto-adjoints et deux à deux commutants. On suppose qu'il existe un naturel* $p \geq 1$ *tel que :*

$$\forall i \in \{1, 2, ..., n\}; \quad 0 \prec A_i \leq p.I_{\mathcal{H}} \tag{3.2.18}$$

Alors,

$$\exp\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \frac{p^p}{n} e^{np} \left(\sum_{i=1}^{n} A_i^{-p}\right) \tag{3.2.19}$$

De plus, si $A_i = p.I_{\mathcal{H}}$ *pour tout* $1 \leq i \leq n$ *alors, on a égalité dans la formule 3.2.19 et la constante* $\frac{p^p}{n} e^{np}$ *est la meilleure possible.*

Preuve. Soit

$$A_i = \int_{m_i}^{M_i+\varepsilon} \lambda_i.dE_\lambda; \qquad m_i \succ 0$$

la représentation spectrale de A_i. De l'invertibilité de A_i, découle que :

$$A_i^{-1} = \int_{m_i}^{M_i+\varepsilon} \lambda_i^{-1}.dE_\lambda.$$

Puisque $A_i \leq p.I_{\mathcal{H}}$, alors de la relation

$$A_i - p.I_{\mathcal{H}} = \int_{m_i}^{M_i+\varepsilon} (\lambda_i - p)\,.dE_\lambda \leq 0,$$

découle que pour tout $1 \leq i \leq n$:

$$\lambda \in [m_i,\ M_i] \Longrightarrow \lambda \leq p.$$

Par conséquent, $\forall i, 1 \leq i \leq n$:

$$A_i^{-1} - p^{-1}.I_{\mathcal{H}} = \int_{m_i}^{M_i+\varepsilon} \left(\lambda_i^{-1} - p^{-1}\right).dE_\lambda \geq 0.$$

Et donc,

$$p^{-1}.I_{\mathcal{H}} \leq A_i^{-1}; \quad \forall i, 1 \leq i \leq n.$$

Par conséquent,

$$\sum_{i=1}^{n}\left(A_i^{-p}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(A_i^{-1}\right)^p\geq\sum_{i=1}^{n}\left(p^{-1}.I_{\mathcal{H}}\right)^p=\sum_{i=1}^{n}\left(p^{-1}\right)^p.I_{\mathcal{H}}=\frac{n}{p^p}.I_{\mathcal{H}}.$$

Comme les opérateurs A_i, sont bornés, positifs et deux à deux commutants, il découle de ce qui précéde que,

$$\frac{e^p}{p^p}\sum_{i=1}^{n}A_i^{-p}=\frac{e^p}{p^p}\sum_{i=1}^{n}\left(A_i^{-1}\right)^p\leq\exp\left(\sum_{i=1}^{n}A_i^{-1}\right). \tag{3.2.20}$$

Par ailleurs, comme

$$\exp(A)\leq\exp(B)\ \text{ pour } A\leq B$$

Il découle que :

$$\begin{aligned}\exp\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)&\leq\exp\left(\sum_{i=1}^{n}p.I_{\mathcal{H}}\right)=\exp\left(np.I_{\mathcal{H}}\right)=e^{np}.I_{\mathcal{H}}\\&=\left(e^{np}\frac{p^p}{n}.\frac{n}{p^p}\right).I_{\mathcal{H}}\leq e^{np}\frac{p^p}{n}.\sum_{i=1}^{n}\left(A_i^{-p}\right).\end{aligned} \tag{3.2.21}$$

Supposons maintenant que $A_i=p.I_{\mathcal{H}}$ pour tout $1\leq i\leq n$. En vertu de la formule 3.2.21, on a dans ce cas,

$$\begin{aligned}e^{np}\frac{p^p}{n}.\sum_{i=1}^{n}\left(A_i^{-p}\right)&=e^{np}\frac{p^p}{n}.\sum_{i=1}^{n}\left(p.I_{\mathcal{H}}\right)^{-p}=e^{np}\frac{p^p}{n}\sum_{i=1}^{n}p^{-p}.I_{\mathcal{H}}\\&=e^{np}\frac{p^p}{n}np^{-p}.I_{\mathcal{H}}=e^{np}.I_{\mathcal{H}}=\exp\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right).\end{aligned}$$

Le fait que la constante $\dfrac{p^p}{n}e^{np}$ est la meilleure possible se démontre analogiquement aux cas précédents. $\square$

Corollaire 3.2.9 *Sous les conditions du théorème 3.2.8, on a*

$$\frac{e^p}{p^p}\sum_{i=1}^{n}A_i^p\leq\exp\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)\leq\frac{p^p}{n}e^{np}\left(\sum_{i=1}^{n}A_i^{-p}\right). \tag{3.2.22}$$

Les constantes $\dfrac{e^p}{p^p}$ *et* $\dfrac{p^p}{n}e^{np}$ *sont les meilleures possibles.*

Chapitre 4

Inégalités entre opérateurs non bornés et leurs semi-groupes fortement continus associés

4.1 Introduction

Théorème 4.1.1 *Soit A un élément autoadjoint de $\mathcal{B}^{+}(\mathcal{H})$. On suppose que A est inversible. Alors, pour tout naturel $p \geq 1$ et tout réel $t \geq 0$,*

$$e^{-tA} \leq \frac{p^p}{e^p t^p} A^{-p}. \tag{4.1.1}$$

Preuve. Le cas $t = 0$ étant trivial, soit t un réel strictement positif ($t \succ 0$). Les opérateurs $B_1 = e^{tA}$ et $B_2 = \frac{e^p t^p}{p^p} A^p$ sont positifs, inversibles d'inverses respectifs

$$B_1^{-1} = e^{-tA} \qquad , \qquad B_2^{-1} = \frac{p^p}{e^p t^p} A^{-p}.$$

De plus, d'après le théorème 3.2.1, $(B_1 - B_2) \in \mathcal{B}^{+}(\mathcal{H})$. En utilisant la propriété 4 du théorème 3.1.4, on obtient que $\left(B_2^{-1} - B_1^{-1}\right) \in \mathcal{B}^{+}(\mathcal{H})$, ce qui est exactement le résultat recherché. $\square$

Le but du présent chapitre est d'établir un analogue de la relation 4.1.1 dans le cas d'un opérateur non borné. La première difficulté principale est que dans le cas non borné, la définition de e^{-tA} par la formule classique

$$e^{-tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} t^k A^k$$

ne peut plus être utilisée puisque cette série n'est pas uniformément convergente. De plus pour que la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} t^k A^k (x)$$

converge il faut que x appartienne au domaine de définition de chacun des opérateurs $A^k \;\; k = 0, 1, 2, ...$ Cette dernière condition peut ëtre assurée en supposant par exemple que $A\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(A)$ sans pour cela, assurer la convergence de cette dernière. Pour contourner cette difficulté, nous considérerons au lieu e^{-tA}, la notion naturellement la plus proche, c'est à dire, le semi-groupe fortement continu d'opérateur infinitésimal A et établirons un analogue du théorème 4.1.1. On étudiera dans un second temps le résultat obtenu au cas de deux opérateurs A et B avec B borné.
Rappellons tout d'abord qu'un opérateur A de domaine $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{H}$ est dit fermé si,

$$\left\{ \begin{array}{l} (x_n) \subset \mathcal{D}(A), \\ \\ \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \quad x_n = x \\ \\ \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} A(x_n) = y \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x \in \mathcal{D}(A) \\ A(x) = y \end{array} \right. .$$

Il est connu de la littérature [1, 32] que si A est un opérateur fermé de domaine $\mathcal{D}(A) = \mathcal{H}$ alors, A est borné. De même, tout opérateur autoadjoint est fermé.

Proposition 4.1.2 *Soit A un opérateur fermé densément défini (i.e. $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{H}$). Désignons par $\mathcal{R}(A)$ l'image de A. Alors,*

$$\mathcal{H} = \overline{\mathcal{R}(A)} \oplus \ker(A^*) \tag{4.1.2}$$

Preuve. Voir [1, 32]. □

Proposition 4.1.3 *Soient A un opérateur autoadjoint densément défini et λ un nombre réel. Alors,*

a.

$$\lambda \text{ est une valeur propre de } A \Leftrightarrow \overline{\mathcal{R}\left(A-\lambda I_{\mathcal{H}}\right)} \neq \mathcal{H}. \tag{4.1.3}$$

b.

$$\lambda \text{ est une valeur du spectre de } A \Leftrightarrow \mathcal{R}\left(A-\lambda I_{\mathcal{H}}\right) \neq \mathcal{H}. \tag{4.1.4}$$

Preuve. Voir [1, 32]. □

Définition 4.1.4 *Un opérateur A de domaine $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{H}$ est dit positif si :*

$$\forall x \in \mathcal{D}(A); \qquad \prec A(x), x \succ \geq 0 \tag{4.1.5}$$

Proposition 4.1.5 *Soit A un opérateur fermé de domaine $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{H}$. On Suppose qu'il existe une constante strictement positive $c \succ 0$ telle que :*

$$\forall x \in \mathcal{D}(A); \qquad \|A(x)\| \geq c\|x\|. \tag{4.1.6}$$

Alors, l'opérateur A est injectif et $\mathcal{R}(A)$ est fermé.

Preuve. Voir [1, 32] □

Théorème 4.1.6 *Soit A un opérateur autoadjoint positif. Alors pour tout réel $\lambda \prec 0$, l'opérateur $A-\lambda I_{\mathcal{H}}$ est inversible.*

Preuve. Soit $\lambda \prec 0$. Pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$, on a

$$\begin{aligned}
\left\|\left(A-\lambda I_{\mathcal{H}}\right)(x)\right\|^2 &= \prec \left(A-\lambda I_{\mathcal{H}}\right)(x), \left(A-\lambda I_{\mathcal{H}}\right)(x) \succ \\
&= \|A(x)\|^2+\lambda^2\|x\|^2-2\lambda \prec A(x), x \succ \\
&\geq \lambda^2\|x\|^2.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que,

$$\forall x \in \mathcal{D}(A), \quad \|(A - \lambda I_{\mathcal{H}})(x)\| \geq |\lambda| \|x\|.$$

Donc d'après la proposition 4.1.3, $(A - \lambda I_{\mathcal{H}})$ est injectif et $\mathcal{R}(A - \lambda I_{\mathcal{H}})$ est fermé. Comme $(A - \lambda I_{\mathcal{H}})$ est un opérateur fermé, il découle de la proposition 4.1.2,

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \overline{\mathcal{R}(A - \lambda I_{\mathcal{H}})} \oplus \ker\left(A^* - \overline{\lambda} I_{\mathcal{H}}\right) = \mathcal{R}(A - \lambda I_{\mathcal{H}}) \oplus \ker(A - \lambda I_{\mathcal{H}}) \\ &= \mathcal{R}(A - \lambda I_{\mathcal{H}}). \end{aligned}$$

Donc, d'après la propsition 4.1.3 point b, λ n'est pas dans le spectre de A. Ce qui achève la démonstration. □

Définition 4.1.7 *Un opérateur A de domaine $\mathcal{D}(A)$, est dit inversible, s'il existe un opérateur borné A^{-1}, défini de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{D}(A)$ et tel que :*

$$A^{-1}A = I_{\mathcal{D}(A)} \quad ; \quad AA^{-1} = I_{\mathcal{H}}. \tag{4.1.7}$$

Corollaire 4.1.8 *Soit A un opérateur autoadjoint positif. Alors pour tout réel $\lambda \succ 0$, l'opérateur $A + \lambda I_{\mathcal{H}}$ est inversible et*

$$\left\|(A + \lambda I_{\mathcal{H}})^{-1}\right\| \leq \frac{1}{\lambda}. \tag{4.1.8}$$

Définition 4.1.9 *Un opérateur A de domaine $\mathcal{D}(A)$, est dit semi-borné inferieurement s'il existe une constante $c \succ 0$ telle que,*

$$\forall x \in \mathcal{D}(A); \quad \prec A(x), x \succ \geq c \prec x, x \succ. \tag{4.1.9}$$

Corollaire 4.1.10 *Soit A un opérateur autoadjoint semi-borné inferieurement par la constante positive c. Alors, pour tout réel $\lambda \succ 0$, l'opérateur $A + \lambda I_{\mathcal{H}}$ est inversible et*

$$\left\|(A + \lambda I_{\mathcal{H}})^{-1}\right\| \leq \frac{1}{c + \lambda} \tag{4.1.10}$$

Preuve. On applique le corollaire 4.1.8 à l'opérateur positif $A - cI_{\mathcal{H}}$. $\square$

Remarque 4.1.11 *Il est clair qu'un opérateur semi-borné inférieurement est positif. De plus, on peut facilement établir que comme dans le cas borné, l'inverse d'un opérateur autoadjoint positif (non borné) est aussi positif.*

4.2 Semi-groupes fortement continus

Définition 4.2.1 *Une famille monoparamétrique* $\{T_t : t \in [0, +\infty[\}$ *d'opérateurs bornés définis dans* $\mathcal{H}$ *est appelée semi-groupe fortement continu si :*

1. $T_0 = I_{\mathcal{H}}$ *et* $T_t T_s = T_{t+s}$ $\forall t, s \in [0, +\infty[$
2. $s.\lim\limits_{t \to 0^+} T_t = I_{\mathcal{H}}$, *où le symbole* $s.\lim$ *désigne la convergence forte des opérateurs, i.e.,*

$$\forall x \in \mathcal{H}, \quad \lim_{t \to 0^+} \|T_t(x) - x\| = 0.$$

Définition 4.2.2 *Soit* $\{T_t : t \in [0, +\infty[\}$ *un semi-groupe fortement continu. On appelle opérateur infinitésimal de ce semi-groupe, l'opérateur* A *défini par*

$$A(x) = \lim_{t \to 0^+} \frac{x - T_t(x)}{t} = -\frac{d}{dt}^+ T_t(x)_{|t=0} . \tag{4.2.1}$$

Il est à noter que le domaine $\mathcal{D}(A)$ de A est l'ensemble des $x \in \mathcal{H}$ pour lesquels la limite 4.2.1 existe. Le symbol $\frac{d}{dt}^+$, désigne la dérivée à droite.
Les deux résultats suivants sont très connus et largement utilisés dans la littérature [35]

Théorème 4.2.3 *Soient* $\{T_t : t \in [0, +\infty[\}$ *un semi-groupe fortement continu et* A *son opérateur infinitésimal. Alors,*

1. *Pour tout* $x \in \mathcal{D}(A)$ *, l'application* $t \longmapsto T_t(x)$ *est fortement différentiable sur* $]0, +\infty[$ *et fortement différentiable à droite au point* 0.
2. *Pour tout* $x \in \mathcal{D}(A)$, $T_t(x) \in \mathcal{D}(A)$ $\forall t \succ 0$ *et*

$$AT_t(x) = T_t A(x) = -\frac{d}{dt}^+ T_t(x) . \tag{4.2.2}$$

3. $\mathcal{D}(A)$ est dense dans $\mathcal{H}$.

4. L'opérateur A est fermé.

Théorème 4.2.4 (Hille-Yosida) *Soit A un opérateur fermé densément défini dans $\mathcal{H}$. Alors, les deux assertions suivantes sont équivalentes.*

a. *A est l'opérateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu de contractions.*

b. *A est fermé, l'intervalle $]-\infty, 0[$ est situé dans l'ensermble résolvant de A et,*

$$\left\|(A+\lambda I_{\mathcal{H}})^{-1}\right\| \leq \frac{1}{\lambda} \quad \textit{pour tout réel } \lambda \succ 0. \tag{4.2.3}$$

Corollaire 4.2.5 *Tout opérateur autoadjoint positif est l'opérateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu de contractions.*

Preuve. [théorème de Hille-Yosida] Pour la compréhension de ce qui va suivre, nous proposons ici les principales étapes de l'implication inverse (voir Stefano Meda [26]).Pour tout réel $\lambda \succ 0$, posons

$$A_\lambda = \lambda\left[I_{\mathcal{H}} - \lambda(A+\lambda I_{\mathcal{H}})^{-1}\right] = \lambda A (A+\lambda I_{\mathcal{H}})^{-1}. \tag{4.2.4}$$

a. L'opérateur A_λ est bien défini et est borné sur tout $\mathcal{H}$. De plus,

$$A_\lambda(\mathcal{D}(A)) \subseteq \mathcal{D}(A)$$

b. L'opérateur A_λ converge fortement vers A sur $\mathcal{D}(A)$:

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \left\|\lambda(A+\lambda I_{\mathcal{H}})^{-1}(x) - x\right\| = 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A). \tag{4.2.5}$$

c. Puisque l'opérateur A_λ est borné, l'opérateur e^{-tA_λ} existe pour tout $t \geq 0$. De plus, la famille $\left\{e^{-tA_\lambda} : t \geq 0\right\}$ est un semi-groupe fortement continu de contractions.

d. Il existe un semi-groupe fortement continu $\left\{T_t^{(A)} : t \geq 0\right\}$ d'opérateur infinitésimal A tel que pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$ et $t \geq 0$,

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \left\|e^{-tA_\lambda}(x) - T_t^{(A)}(x)\right\| = 0 \tag{4.2.6}$$

$\square$

Lemme 4.2.6 *Si en plus de la condition b du théorème de Hille-Yosida, l'opérateur A est inversible alors, pour tout $p = 1, 2, ...,$ A_λ^{-p} converge fortement vers A^{-p} sur $\mathcal{H}$:*

$$\forall x \in \mathcal{H}, \qquad \lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \left\| A_\lambda^{-p}(x) - A^{-p}(x) \right\| = 0, \qquad p = 1, 2, ... \tag{4.2.7}$$

Preuve. Puisque les opérateurs A_λ^{-p} et A^{-p} sont bornés, il suffit de montrer que A_λ^{-1} converge fortement vers A^{-1} quand λ tend vers $+\infty$. Soit $x \in \mathcal{H}$. Alors,

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \left\| A_\lambda^{-1}(x) - A^{-1}(x) \right\| &= \lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \left\| \frac{(A + \lambda I_{\mathcal{H}}) A^{-1}(x)}{\lambda} - A^{-1}(x) \right\| \\ &= \lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \left\| \frac{x}{\lambda} \right\| = 0 \end{aligned}$$

$\square$

4.3 Inégalités entre les opérateurs symétriques et les semi-groupes fortement continus associés (cas d'un seul opérateur)

Théorème 4.3.1 *Soit A un opérateur autoadjoint, positif. Si A est inversible alors sur $\mathcal{D}(A)$,*

$$\forall t \succ 0, \quad \forall p = 1, 2, ... \qquad T_t^{(A)} \leq \frac{p^p}{t^p e^p} A^{-p}$$

Preuve. D'après le corollaire 4.2.5, l'opérateur A est l'opérateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu $T_t^{(A)}$ de domaine $\mathcal{D}(A)$. Par ailleurs, l'opérateur borné tA_λ est autoadjoint, inversible. Montrons que tA_λ est positif. Puisque,

$$\left\| (A + \lambda I_{\mathcal{H}})^{-1} \right\| \leq \frac{1}{\lambda} \qquad et \qquad \prec (A + \lambda I_{\mathcal{H}})^{-1}(x), x \succ \geq 0, \qquad x \in \mathcal{H}, \tag{4.3.1}$$

alors, pour tout $x \in \mathcal{H}$,

$$\prec (A + \lambda I_{\mathcal{H}})^{-1}(x), x \succ \leq \left\| (A + \lambda I_{\mathcal{H}})^{-1} \right\| \prec x, x \succ \leq \frac{1}{\lambda} \prec x, x \succ . \tag{4.3.2}$$

Par conséquent, pour tout $x \in \mathcal{H}$,

$$\begin{aligned}
\prec \ tA_\lambda (x), x \succ &= t\lambda \prec \left[I_\mathcal{H} - \lambda (A + \lambda I_\mathcal{H})^{-1} \right] (x), x \succ \\
&= t\lambda \left\{ \prec x, x \succ - \lambda \prec (A + \lambda I_\mathcal{H})^{-1} (x), x \succ \right\} \\
&\geq t\lambda \left\{ \prec x, x \succ - \lambda \frac{1}{\lambda} \prec x, x \succ \right\} = 0.
\end{aligned}$$

Donc, tA_λ est positif. En appliquant le théorème 4.1.1, on obtient que pour tout naturel $p \geq 1$ et tout réel $t \geq 0$,

$$e^{-tA_\lambda} \leq \frac{p^p}{e^p t^p} A_\lambda^{-p}. \tag{4.3.3}$$

Soit maintenant $x \in \mathcal{D}(A)$ alors, pour tout naturel $p \geq 1$ et tout réel $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\prec \ T_t^{(A)} (x), x \succ &= \prec \lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} e^{-tA_\lambda} (x), x \succ = \lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \prec e^{-tA_\lambda} (x), x \succ \\
&\leq \lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \prec \frac{p^p}{e^p t^p} A_\lambda^{-p} (x), x \succ = \frac{p^p}{e^p t^p} \lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \prec A_\lambda^{-p} (x), x \succ \\
&= \frac{p^p}{e^p t^p} \prec \lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} A_\lambda^{-p} (x), x \succ = \frac{p^p}{e^p t^p} \prec A^{-p} (x), x \succ \\
&= \prec \frac{p^p}{e^p t^p} A^{-p} (x), x \succ .
\end{aligned}$$

D'où, le résultat recherché. □

On se propose maintenant d'établir l'analogue du théorème pour un opérateur symétrique semi-borné inférieurement.

Soit A un opérateur symétrique, semi-borné inférieurement. Posons

$$m(A) = \inf_{x \in \mathcal{D}(A) \setminus \{0\}} \frac{\prec A(x), x \succ}{\prec x, x \succ}. \tag{4.3.4}$$

Lemme 4.3.2 *Soit A un opérateur symétrique, semi-borné inférieurement.*

Si $m(A) \succ 0$ alors, A est injectif.

Preuve. Découle directement de la relation évidente, □

$$\prec A(x), x \succ \geq m(A) \prec x, x \succ . \tag{4.3.5}$$

Proposition 4.3.3 *Les indices de défaut d'un opérateur symétrique, semi-borné inférieurement sont égaux. En d'autres termes, un opérateur symétrique, semi-borné admet toujours une extension autoadjointe sans sortie de l'espace.*

Preuve. voir [24]. □

L'un des résultats les plus importants, relatifs aux opérateurs symétriques, semi-bornés inférieurement et densément définis est l'hypothèse de Neumann qui s'énonce comme suit :

Théorème 4.3.4 (Hypothèse de Neumann) *Soit A un opérateur symétrique fermé, semi-borné inférieurement et densément défini. Alors, pour tout $\varepsilon \succ 0$, il existe au moins une extension autoadjointe $\widetilde{A}_\varepsilon$ telle que $m\left(\widetilde{A}_\varepsilon\right) \geq m(A) - \varepsilon$.*

L'hypothèse de Neumann a été établie de différentes manières par M. Stone (1932), K. Fridrichs 1934), G. Freintall (1936), M. G. Krein (1947) et E. Phillips (1959). Cependant, cette alternative admet l'amélioration suivante.

Théorème 4.3.5 *Tout opérateur symétrique fermé, semi-borné inférieurement et densément défini A, admet au moins une extension autoadjointe $\widetilde{A}$ vérifiant la condition $m(A) = m\left(\widetilde{A}\right)$.*

Preuve. voir [24]. □

Nous pouvons maintenant établir l'analogue de la relation 4.3.3 pour une certaine classe d'opérateurs symétriques, semi-bornés inférieurement et densément définis.

Théorème 4.3.6 *Soit A un opérateur symétrique, semi-borné inférieurement. On suppose que A est inversible et $m(A) \succ 0$. Alors, A est l'opérateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu $T_t^{(A)}$, vérifiant :*

$$\forall t \succ 0, \quad \forall p = 1, 2, ... \qquad T_t^{(A)} \leq \frac{p^p}{t^p e^p} A^{-p} \tag{4.3.6}$$

Preuve. Nous allons en fait montrer que sous ces conditions, l'opérateur A est autoadjoint, positif et inversible, ce qui nous raméne au théorème 4.3.5. En vertu du théorème sur l'hypothèse de Neumann, il existe une extension autoadjointe $\widetilde{A}$ de A vérifiant la condition $m(A) = m\left(\widetilde{A}\right)$. Comme $m(A) \succ 0$ alors, en raison du lemme 4.3.2, l'opérateur $\widetilde{A}$ est positif et injectif. Par ailleurs,

$$\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}\left(\widetilde{A}\right) \quad \text{et} \quad \widetilde{A}(\mathcal{D}(A)) = A(\mathcal{D}(A)) = \mathcal{H} \Rightarrow \widetilde{A}\left(\mathcal{D}\left(\widetilde{A}\right)\right) = \mathcal{H}.$$

C'est à dire que l'opérateur est $\widetilde{A}$ est aussi surjectif. Donc, l'application réciproque $\widetilde{A}^{-1}$ existe de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{D}\left(\widetilde{A}\right)$. Comme $\widetilde{A}$ est fermé alors, $\widetilde{A}^{-1}$ est aussi fermé. Par conséquent, d'après le théorème du graphe fermé, $\widetilde{A}^{-1}$ est borné. En d'autres termes, l'opérateur $\widetilde{A}$ est inversible. Soit maintenant $x \in \mathcal{D}\left(\widetilde{A}\right)$. Aors,

$$\begin{aligned} A \text{ inversible} \quad &\Rightarrow \quad \exists y \in \mathcal{D}(A) : \quad \widetilde{A}(x) = A(y) = \widetilde{A}(y) \\ &\Rightarrow \quad x = y \Rightarrow x \in \mathcal{D}(A) \\ &\Rightarrow \quad \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}\left(\widetilde{A}\right) \Rightarrow A = \widetilde{A}. \end{aligned}$$

Le théorème est ainsi démontré. $\square$

Théorème 4.3.7 *Soit A un opérateur symétrique fermé, positif. On suppose que :*

a. *l'intervalle $]-\infty, 0[$ est situé dans l'ensemble résolvant de A et,*

$$\left\|(A + \lambda I_{\mathcal{H}})^{-1}\right\| \leq \frac{1}{\lambda} \quad \textit{pour tout réel } \lambda \succ 0$$

b. *L'opérateur A admet au moins une extension autoadjointe positive et inversible $\widetilde{A}$. Alors, sur $D(A)$;*

$$\forall t \succ 0, \quad \forall p = 1, 2, ... \qquad T_t^{(A)} \leq \frac{p^p}{t^p e^p} \widetilde{A}^{-p}. \tag{4.3.7}$$

Preuve. La fermeture de A et la condition a. signifient (d'après le théorème de Hille-Yosida) que le semi-groupe $\left\{T_t^{(A)},\ t \geq 0\right\}$ existe et est fortement continu. Soit $\widetilde{A}$ une extension autoadjointe positive et inversible de A. **En vertu du corollaire 4.2.5, le semi-groupe $\left\{T_t^{(\widetilde{A})},\ t \geq 0\right\}$ existe aussi et est fortement continu**. Soient maintenant $x \in \mathcal{D}(A)$ et $\lambda \succ 0$.

Alors

$$y = A_\lambda (x) = (A + \lambda I_{\mathcal{H}})^{-1} A(x) = (A + \lambda I_{\mathcal{H}})^{-1} \widetilde{A}(x) \in \mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}\left(\widetilde{A}\right)$$

$$\Rightarrow \widetilde{A}(x) = (A + \lambda I_{\mathcal{H}})(y) = \left(\widetilde{A} + \lambda I_{\mathcal{H}}\right)(y)$$

$$\Rightarrow y = \left(\widetilde{A} + \lambda I_{\mathcal{H}}\right)^{-1} \widetilde{A}(x) = \widetilde{A}_\lambda (x).$$

Il s'ensuit que dans $\mathcal{D}(A)$,

$$\forall t \geq 0, \qquad e^{-tA_\lambda} = e^{-t\widetilde{A}_\lambda}. \tag{4.3.8}$$

Par conséquent, pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$, $t \geq 0$ et $p = 1, 2, ...$,

$$\prec T_t^{(A)} x, x \succ = \prec \lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} e^{-tA_\lambda}(x), x \succ = \lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \prec e^{-tA_\lambda}(x), x \succ$$

$$= \lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \prec e^{-t\widetilde{A}_\lambda}(x), x \succ \leq \lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \prec \frac{p^p}{e^p t^p} \widetilde{A}_\lambda^{-p}(x), x \succ$$

$$= \frac{p^p}{e^p t^p} \prec \lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \widetilde{A}_\lambda^{-p}(x), x \succ = \frac{p^p}{e^p t^p} \prec \widetilde{A}^{-p}(x), x \succ$$

$$= . \prec \frac{p^p}{e^p t^p} \widetilde{A}^{-p}(x), x \succ .$$

La démonstration est ainsi achevée. □

4.4 Inégalités entre les opérateurs symétriques et les semi-groupes fortement continus associés (cas de deux opérateurs)

Proposition 4.4.1 *Soient $C_1,\ C_2$ deux éléments de $\mathcal{B}^+(\mathcal{H})$. Alors,*

$$e^{C_1} + e^{C_2} \geq I_{\mathcal{H}} \tag{4.4.1}$$

Corollaire 4.4.2 *Soient $A_1,\ A_2$ deux éléments commutants de $\mathcal{B}^+(\mathcal{H})$. Alors,*

$$e^{-A_1} + e^{-A_2} \geq e^{-A_1-A_2} \tag{4.4.2}$$

Preuve. On a, en utilisant la proposition précédente et la positivité de $e^{-A_1-A_2}$(inverse de l'opérateur positif $e^{A_1+A_2}$) :

$$\begin{aligned} e^{A_1} + e^{A_2} - I_{\mathcal{H}} &\geq 0 \Rightarrow e^{-A_1-A_2}\left(e^{A_1} + e^{A_2} - I_{\mathcal{H}}\right) \geq 0 \\ &\Rightarrow e^{-A_1} + e^{-A_2} - e^{-A_1-A_2} \geq 0 \\ &\Rightarrow e^{-A_1} + e^{-A_2} \geq e^{-A_1-A_2}. \end{aligned}$$

□

Théorème 4.4.3 *Soient A et B deux opérateurs positifs et inversibles. On suppose que :*

a. *A vérifie les conditions du théorème 4.3.7,*

b. *B est borné (c'est à dire défini sur tout H),*

c. $\forall x \in D(A), \quad BA(x) = AB(x),$ *(condition de commutativité),*

d. *l'intervalle* $]-\infty, 0[$ *est situé dans l'ensemble résolvant de* $(A+B)$ *et,*

$$\left\| (A + B + \lambda I_{\mathcal{H}})^{-1} \right\| \leq \frac{1}{\lambda} \text{ pour tout réel } \lambda \succ 0.$$

Alors sur $D(A)$,

$$\forall t \succ 0, \quad \forall p = 1, 2, ... \qquad T_t^{(A+B)} \leq \frac{p^p}{t^p e^p} \left(\widetilde{A}^{-p} + B^{-p} \right) \tag{4.4.3}$$

Preuve. Notons tout d'abord que sous ces conditions, l'opérateur B est auto-adjoint et

$$x \in \mathcal{D}(A) \Rightarrow B^n(x) \in \mathcal{D}(A), \qquad n = 0, 1, 2, ... \tag{4.4.4}$$

Par ailleurs, il existe d'après le théorème 4.3.7, une extension auto-adjointe, positive et inversible $\widetilde{A}$ de A telle que sur $\mathcal{D}(A)$,

$$\forall t \succ 0, \quad \forall p = 1, 2, ... \qquad T_t^{(A)} \leq \frac{p^p}{t^p e^p} \widetilde{A}^{-p} \quad \text{et} \quad T_t^{(B)} = \exp(-tB) \leq \frac{p^p}{t^p e^p} AB^{-p}. \tag{4.4.5}$$

L'opérateur $A + B$ est symétrique, fermé, positif et densément défini ($\mathcal{D}(A+B) = \mathcal{D}(A)$). D'après la condition $d.$ du théorème, $A + B$ est l'opérateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu $T_t^{(A+B)}$. On a sur $\mathcal{D}(A)$,

$$s. \lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} (A + B)_\lambda = A + B = s. \lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} (A_\lambda + B_\lambda).$$

Il s'ensuit que sur $\mathcal{D}(A)$ et pour tout $t \succ 0$,

$$\begin{aligned} T_t^{(A+B)} &= s. \lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \exp\left(-t(A+B)_\lambda\right) = s. \lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \exp\left(-t(A_\lambda + B_\lambda)\right) \\ &= s. \lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \exp\left(-tA_\lambda - tB_\lambda\right). \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$, $t \succ 0$ et $p = 1, 2, ...$ et en vertu

$$\begin{aligned}
\prec\ & T_t^{(A+B)}(x), x \succ = \lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \prec \exp(-tA_\lambda - tB_\lambda)(x), x \succ \\
\leq\ & \lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \prec (\exp(-tA_\lambda) + \exp(-tB_\lambda))(x), x \succ \\
=\ & \lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \prec \exp(-tA_\lambda)(x), x \succ + \lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \prec \exp(-tB_\lambda)(x), x \succ \\
=\ & \prec T_t^{(A)}(x), x \succ + \prec T_t^{(B)}(x), x \succ \\
\leq\ & \frac{p^p}{e^p t^p} \prec \widetilde{A}^{-p}(x), x \succ + \frac{p^p}{e^p t^p} \prec B^{-p}(x), x \succ \\
=\ & \frac{p^p}{e^p t^p} \prec \left(\widetilde{A}^{-p} + B^{-p}\right)(x), x \succ .
\end{aligned}$$

Le théorème est ainsi démontré. $\square$

Conclusion et perspectives

1. Il ressort à travers la présente thèse que la théorie des triplets limites constitue un outil très puissant dans la description et l'étude des extensions propres des opérateurs symétriques.
2. Les résultats obtenus (bien que intéressants à notre sens) restent très partiels. En effet, il serait intéressant de décrire et d'étudier les extensions propres des opérateurs de Carleman dans le cas où les indices de défaut sont ≥ 2.
3. Pour les inégalités entre opérateurs et semi-groupes générés, il serait intéressant d'envisager au moins le cas (pas facile pour des raisons de commutativité) de deux opérateurs non bornés.
4. Même pour le cas borné, peut envisager certains cas non commutatifs ?

Bibliographie

[1] N. I. Akhiezer, M. Glasman, *Theory of linear operators in Hilbert space*, vol. 1, Vyshcha Shkola, Kharkov, 1977, English transl. Pitman (APP), 1981.

[2] S. M. Bahri, *On the extension of a certain class of Carleman operators*, EMS, ZAA, vol 26, N1 (2007), 57-64.

[3] S. M. Bahri, *Spectral properties of a certain class of Carleman operators*, Archivum Mathematicum (BRNO), Tomus 43 (2007), 163-175.

[4] B. Belaidi, A. Farissi, Z. Latreuch, Inequalities between sum of the powers and the exponential of sum of nonnégative sequence, RGMIA Reasearch Collection, 11 (1), Article 6, 2008.

[5] H. Bendahmane, B. Bendoukha, Proper extensions of a certain class of Carleman operators, Bulletin of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 3, Iss. 2(2011), pp.184-197.

[6] B. Bendoukha, H. Bendahmane, Inequalities between the sum of powers and the exponential of sum of positive and commuting selgfadjoint operators, Archivum Mathematicum, Vol. 47 (2011), N°47 P. 2576262.

[7] T. Carleman, *Sur les equations intégrales singulières à noyau réel et symmetrique* (in French), Uppsala ; Uppsala Almquwist Wiksells Boktryckery, 1923.

[8] E. A. Codington, Extension theory of formally normal and symmetric operators, Mem. Amer. Math. Soc., 134, 1-80 (1973).

[9] E. A. Codington, H. S. V. de Snoo, Positive self-adjoint extensions of positive symmetric subspaces, Math. Zam., 159, 203-214 (1978).

[10] V. A. Derkach, M. M. Malamud, *generalized resolvents and the boundary value problem for hermitian operator with gaps*, J. Funct. Anal. **95** (1991), 1-95.

[11] V. A. Derkach, M. M. Malamud, *Characteristic functions of almost solvable extensions of Hermitian operators*, Ukr. Mat. Zh., **44**, No. 4, 435-459 (1992).

[12] V. A. Derkach, M. M. Malamud, *The extension theory of hermitian operators and the moment problems*, J. Math. Sci. (New-York) **73**, (1995), 141-242.

[13] V. A. Derkach, S. Hassi, M. M. Malamud, H. V. S. de Snoo, *Generalized resolvents of symmetric operators and Admissibility,* Methods Funct. Anal. Topology **6** (3), 24-55, (2000).

[14] V. A. Derkach, S. Hassi, M. M. Malamud, H. V. S. de Snoo, *Boundary relations and generalized resolvents of symmetric operators*, Russian Journal of Mathematical Physics, vol 16, No 1, 2009, pp. 17-60.

[15] V. A. Derkach, S. Hassi, M. M. Malamud, H. V. S. de Snoo, *Boundary relations and their Weyl families*, Trans. Amer. Math. Soc. 358, 5351-5400 (2006).

[16] A. Dijksma, H. V. S. de Snoo, *Symmetric and selfadjoint relations in Krein space 1, Operator Theory : Advances and Applications* **24**, Birkhäuser, Basel (1987), 145-166.

[17] A. Dijksma, H. V. S. de Snoo, Self-adjoint extensions of symmetric subspaces, Pacific J. Math., 54, N°1, 71-100 (1974).

[18] Theorie Nalbbesshraänter Operatoren und Awendungauf die Spectrizerlegungvon Differential Operatoren, Math Ann. 1934, Vol. 109, p. 465-487.

[19] V. I. Gorbachuk, M. L. Gorbachuk, *Boundary value problems for operator differential equations*, Translated and revised from the 1984 Russian original, Mathematics and its Applications (Soviet Series), **48** Kluwer Academic publishers Group, Dordrecht, 1991.

[20] M. L. Gorbachuk, V. I. Gorbachuk, Theory of self-adjoint extension of symmetric operators, entire operators and boundary-value problems, Ukrainian Mathematical Journal, January, 1994, Volume 46, Issue 1, pp. 54-61.

[21] A. N. Kochubeĭ, *On extension of symmetric operators and symmetric binary relations*, Math Zametrki, **17** (1975), N1, 41-48. (In Russian).

[22] V. B. Korotkov, *On characteristic properties of Carleman operators* (in Russian), Sib. Math. J. **11** (1970), 103-127.

[23] M. G. Krein, Selfadjoint extension theory of semi-bounded operators and its application, Math. Sbornik 1947, Tom 20 N°3, p. 431-495.

[24] A. V. Kuzhel, Extension des opérateurs hermitiens, Vyshcha Shkola, Khar'kov, Kiev, 1989. (en russe).

[25] M. G. Krein, H. Langer, *On defect subspaces and generalized resolvents of hermitian operator in Pontryagin space*, Funktsional. Anal.i Prilozhen, **5**, 59-71 (1971)

[26] S. Meda, Operator theory, Université de Milan Bicossa, 2009, Preprint.

[27] V. Mogilevskii, *Nevanlinna type families of linear relations and the dilation theorem*, Methods of functional analysis and topology, vol 12 (2006), N1, 38-56.

[28] V. Mogilevskii, *Boundary triplets and Krein type resolvent formula for symmetric operators with unequal defect numbers*, Methods of Functional Analysis and Topology, vol. 12 (2006), N. 3, pp. 258-280.

[29] F. Qi, Inequalities between sum of the squares and the exponential of sum of nonnégative sequence, J. Inequal. Pure Appl. Math. 8 (3) 2007, 1-5, Art. 78.

[30] A. V. Strauss, *Extensions and generalized resolvents of a non-densely defined symmetric operator*, Math. URSS Isv. **4** (1970), 179-208.

[31] J. V. Neumann, Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren,"Math. Annal., 102, 49-131 (1929).

[32] J. Weidmann, *Linear operators in Hilbert spaces*, New York, Springer 1980.

[33] H. Weyl, Über gewohnliche lineare Differentialgleichungen mit Singularen Stellen und ihre Eigenfunktionen, "Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Göttingen, Math-Phys. Kl., 37-63 (1909).

[34] H. Weyl, Über gewohnliche Differentialgleichungen mit Singulariten Die Zugehorigen Entwicklungen willkurlicher funktionen,"Math. Annal., 68, 220-269 (1910).

[35] K. Yosida, Functionnal Analysis, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 123, Springer Verlag Heindelberg New York, 1985.