

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE MOSTAGANEM
Abdelhamid Ibn Badis



Faculté des Sciences Exactes et d'Informatique
Département de Mathématiques-Informatique

Mémoire de fin d'étude pour l'obtention
Du diplôme de master en mathématiques

Option : Analyse fonctionnelle

Intitulé

ETUDE, DANS LE CADRE HÖLDERIEN, DE L'EQUATION
DIFFERENTIELLE ABSTRAITE COMPLETE DE TYPE ELLIPTIQUE DANS
LE CAS NON-COMMUTATIF.

Présenté par
Mimouni fatma

Soutenu le : 10/06/2014.

Devant les membres du jury :

Président: MEDEGHRI Ahmed, professeur, Université de Mostaganem.

Examinatrice: BOUZIANI. Fatima, **MCB**, Université de Mostaganem.

Encadreur : LIMAM. Kheira, **MCB**, Université de Mostaganem.

Année universitaire : 2013-2014

Table des matières

Introduction	i
1 Rappels	1
1.1 Les opérateurs	1
1.1.1 Opérateurs linéaires bornés	2
1.1.2 Opérateurs linéaires fermés	2
1.1.3 Opérateurs sectoriels	3
1.2 Les semi- groupes d'opérateurs linéaires	4
1.2.1 Semi -groupes fortement continu	4
1.2.2 Générateur infénitisémal d'un semi-groupe	5
1.2.3 Semi-groupes analytiques	5
1.3 Quelques espaces fonctionnels	6
1.3.1 Les espaces de Hölder	7
1.3.2 Espace d'interpolation	7
1.3.3 Définition discrète d'un espace d'interpolation	9
1.3.4 Lemme de Schur	9
1.4 Calcul fonctionnel	10
2 Problème de Dirichlet abstrait dans le cadre höldérien : cas non commutatif	11
2.1 Position du problème et hypothèses	11
2.1.1 Hypothèses	11
2.1.2 Conséquences des hypothèses	12
2.2 Lemmes techniques	14
2.3 Représentation de la solution	22
2.3.1 Résolution de l'équation différentielle simple	23
2.3.2 Résolution de l'équation différentielle complète	24
2.3.3 Représentation de la solution dans le cas non commutatif	26
2.4 Régularité maximale	34
3 Application	48
3.1 Position du problème et formulation abstraite	48
3.2 Etude spectrale et application du théorème 2.4.1	49
Résumé	59

Introduction

L'objectif de ce mémoire est de faire une synthèse sur le travail de Angelo Favini, Rabah Labbas, Stéphane Maingot et Maëils Meisner [8] concernant l'étude de l'équation différentielle abstraite complète, du second ordre de type elliptique dans un cadre non commutatif, suivante

$$u''(t) + (L_\omega - M_\omega) u'(t) + \frac{1}{4} ((L_\omega - M_\omega)^2 - (L_\omega + M_\omega)^2) u(t) = f(t), \quad t \in [0, 1] \quad (0.0.1)$$

avec les conditions aux limites de Dirichlet

$$u(0) = u_0, \quad u(1) = u_1$$

où L_ω, M_ω sont deux opérateurs linéaires fermés sur X dépendant du paramètre $\omega > 0$, $(X, \|\cdot\|)$ étant un espace de Banach complexe, f est une fonction définie de $[0, 1]$ à valeurs dans X

$$f \in C^\theta([0, 1], X), \quad 0 < \theta < 1,$$

u_0, u_1 sont donnés dans X .

Pour ω assez grand, on cherche une solution stricte du problème (0.0.1), c'est-à-dire une solution u telle que

$$\begin{cases} u \in C^2([0, 1]; X) \cap C([0, 1]; D(L_\omega - M_\omega)^2 \cap D(L_\omega + M_\omega)^2) \\ u' \in C([0, 1]; D(L_\omega - M_\omega)) \end{cases}$$

et qui satisfait (0.0.1). Puis, on étudiera la régularité maximale de la solution stricte u , c'est-à-dire

$$u'', (L_\omega - M_\omega) u', ((L_\omega - M_\omega)^2 - (L_\omega + M_\omega)^2) u \in C^\theta([0, 1], X) \quad (0.0.2)$$

Ces résultats sont prouvés sous des hypothèses naturelles de non commutativité des coefficients opérateurs, ici on supposera que le commutateur

$$C_{L_\omega, M_\omega} := (L_\omega + M_\omega) [(L_\omega - M_\omega); (L_\omega + M_\omega)^{-1}] (L_\omega + M_\omega)^{-1},$$

est petit pour ω assez grand et

$$[M_\omega, L_\omega] := M_\omega L_\omega - L_\omega M_\omega.$$

Ce mémoire comporte trois chapitres et est organisé comme suit.

Chapitre un est consacré à quelques rappels sur les outils mathématiques nécessaires pour la suite de ce travail. Ils concernent les opérateurs linéaires, les espace fonctionnels, le calcul fonctionnel de Dunford et les semi-groupes.....

Dans le **deuxième chapitre** : On se propose d'étudier le problème de Dirichlet régis par une équation différentielle abstraite du second ordre dans le cadre non commutatif.

Cette étude se base sur la formule explicite de la solution, afin de construire cette représentation, on résout par la méthode de la réduction de l'ordre de Krein les deux équations différentielles auxiliaires suivantes

1. équation simple $L_\omega = M_\omega$ ici on cherche la solution de l'équation

$$u''(t) - M_\omega^2 u(t) = f(t), \quad t \in [0, 1]$$

sous l'hypothèse d'ellipticité de l'opérateur $A := -M_\omega^2$.

2. équation complète dans le cas commutatif, ici on va trouver la solution de l'équation

$$u''(t) + 2Bu'(t) + Au(t) = f(t)$$

où A, B sont deux opérateurs linéaires fermés dans X vérifiant certaines hypothèses, puis on introduit les deux opérateurs

$$\begin{aligned} L_\omega & : = B - (A - B^2)^{\frac{1}{2}} \\ M_\omega & : = -B - (A - B^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

pour revenir au problème (0.0.1) dans le cas commutatif, ensuite on utilise quelques considérations heuristiques pour obtenir une équation intégrale vérifiée par

$$u := (L_\omega + M_\omega)^{-2} v,$$

écrite sous la forme

$$v + R_\omega(v) = F_\omega(f) + D_\omega.$$

On analyse ensuite chaque terme de cette représentation sous les hypothèses suivantes : Soient ω_0 un réel positif fixé et

$$S_\delta := \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, |\arg z| \leq \frac{\pi}{2} + \delta \right\},$$

tels que

$$(H.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \exists \delta > 0, \exists C > 0 : \forall \omega \geq \omega_0, \quad \rho(L_\omega) \supset S_\delta, \quad \rho(M_\omega) \supset S_\delta, \\ \|(L_\omega - z)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C}{|z|}, \quad \|(M_\omega - z)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C}{|z|}, \quad \forall z \in S_\delta \end{array} \right.$$

De plus, pour tout $\omega \geq \omega_0$ on suppose

$$(H.2) \quad D(L_\omega) = D(M_\omega),$$

$$(H.3) \quad D((L_\omega + M_\omega)^2) \subset D((L_\omega - M_\omega)^2)$$

$$(H.4) \quad L_\omega \text{ et } M_\omega \text{ sont inversible dans } \mathcal{L}(X)$$

$$(H.5) \quad L_\omega + M_\omega \text{ est inversible dans } \mathcal{L}(X)$$

$$(H.6) \quad I - e^{L_\omega} e^{M_\omega} \text{ ou } I - e^{M_\omega} e^{L_\omega} \text{ est inversible dans } \mathcal{L}(X)$$

$$(H.7) \quad (X, D(L_\omega))_{1+\theta, \infty} = (X, D(M_\omega))_{1+\theta, \infty}$$

$$(H.8) \quad \|C_{L_\omega, M_\omega}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \chi(\omega), \quad \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \chi(\omega) = 0$$

où

$$C_{L_\omega, M_\omega} := (L_\omega + M_\omega) [(L_\omega - M_\omega); (L_\omega + M_\omega)^{-1}] (L_\omega + M_\omega)^{-1},$$

afin d'obtenir le théorème fondamental suivant :

Théorème 0.0.1 *On suppose (H.1) $\sim$ (H.8). Soit $\theta \in]0, 1[$. Alors, il existe $\omega^* \geq \omega_0$ tel que pour tout $\omega \geq \omega^*$, les deux assertions suivantes sont équivalentes.*

1. Le problème (0.0.1) admet une unique solution stricte u satisfaisant

$$u'', (L_\omega - M_\omega) u', ((L_\omega - M_\omega)^2 - (L_\omega + M_\omega)^2) u \in C^\theta([0, 1]; X)$$

$$(L_\omega + M_\omega)^2 u \in C_{L_\omega, M_\omega}^\theta([0, 1]; X)$$

2. $f \in C^\theta([0, 1]; X)$ et

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0, u_1 \in D(L_\omega M_\omega) \cap D(M_\omega L_\omega), \\ M_\omega (L_\omega + M_\omega) u_0 + (L_\omega + M_\omega) L_\omega^{-1} f(0) \in (X, D(L_\omega))_{\theta, \infty}, \\ L_\omega (L_\omega + M_\omega) u_1 + (L_\omega + M_\omega) M_\omega^{-1} f(1) \in (X, D(L_\omega))_{\theta, \infty}, \\ (L_\omega - M_\omega) L_\omega^{-1} C_{L, M} (L_\omega + M_\omega)^2 u_0 \in (X, D(L_\omega))_{\theta, \infty}, \\ (L_\omega - M_\omega) M_\omega^{-1} C_{L, M} (L_\omega + M_\omega)^2 u_1 \in (X, D(L_\omega))_{\theta, \infty}. \end{array} \right.$$

Chapitre 3 : On donne ici un exemple modèle auquel cette théorie s'applique.

Chapitre 1

Rappels

1.1 Les opérateurs

Soient $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ et $(Z, \|\cdot\|_Z)$ trois espaces vectoriels normés complexes.

Définition 1.1.1 *Un opérateur linéaire de X dans Y est une application linéaire A définie d'un sous-espace vectoriel $D(A) \subset X$ à valeurs dans Y , i.e pour tout $x, y \in D(A)$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ on a :*

i) $A(x + y) = Ax + Ay$.

ii) $A(\lambda x) = \lambda Ax$.

On appelle domaine de A , et on le note $D(A)$ le sous espace vectoriel des éléments x de E tels que Ax ait un sens.

On appelle image de A notée $R(A)$, le sous espace vectoriel $A(D(A))$.

Remarque. On écrit par abus $A(x) = Ax$ pour tout $x \in D(A)$.

Définition 1.1.2 *Soient $A : D(A) \subset X \rightarrow Y$ et $B : D(B) \rightarrow Z$ deux opérateurs linéaires. On peut définir l'opérateur BA par*

$$\begin{cases} D(BA) = \{x \in D(A), Ax \in D(B)\} \\ (BA)x = B(Ax), & x \in D(BA) \end{cases}$$

Si A est injectif, on peut définir l'inverse de A , noté A^{-1} , par :

$$\begin{array}{ccc} A^{-1} : D(A) & \rightarrow & D(A) \\ y & \rightarrow & A^{-1}y = x. \end{array}$$

Définition 1.1.3 *Soient $(A, D(A))$, $(B, D(B))$ deux opérateurs linéaires de X dans Y . On dit que B est une extension ou un prolongement de A et on note $A \subset B$ si*

$$\begin{cases} D(A) \subset D(B) \\ \forall x \in D(A), Ax = Bx. \end{cases}$$

Définition 1.1.4 *On définit le commutateur de deux opérateurs A et B sur X par*

$$\begin{cases} D([A, B]) = \{\varphi \in D(A) \cap D(B) : A\varphi \in D(B) \text{ et } B\varphi \in D(A)\} \\ [A, B]\varphi = AB\varphi - BA\varphi, \varphi \in D([A, B]). \end{cases}$$

1.1.1 Opérateurs linéaires bornés

Définition 1.1.5 On dit qu'un opérateur A défini de X dans Y est borné si

$$D(A) = X \quad \text{et} \quad \sup_{\|\xi\| \leq 1} \|A\xi\| < \infty$$

et on écrit $A \in \mathcal{L}(X)$.

Définition 1.1.6 On note $\mathcal{L}(X, Y)$ la collection de tous les opérateurs linéaires bornés de l'espace vectoriel normé X dans l'espace vectoriel normé Y . $\mathcal{L}(X, Y)$ est un espace normé et sa norme est définie par

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X, Y)} = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_Y = \sup_{\|x\|_X = 1} \|Ax\|_Y, \quad \forall A \in \mathcal{L}(X, Y).$$

On note $\mathcal{L}(X, X) := \mathcal{L}(X)$.

Proposition 1.1.1 Si Y est un espace de Banach, alors $\mathcal{L}(X, Y)$ est un espace de Banach.

Proposition 1.1.2 Soit $A \in \mathcal{L}(X)$. Si $\|A\| < 1$ alors $(I - A)$ est inversible dans $\mathcal{L}(X)$ et $(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$.

1.1.2 Opérateurs linéaires fermés

Définition 1.1.7 Un opérateur linéaire $A : D(A) \subset X \rightarrow Y$ est dit fermé si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n \in D(A)$ telle que

$$\begin{cases} x_n \rightarrow x \\ Ax_n \rightarrow y \end{cases}$$

on a $x \in D(A)$ et $Ax = y$.

Définition 1.1.8 On appelle ensemble résolvant de A l'ensemble

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda I) \text{ est inversible dans } \mathcal{L}(X)\}$$

Un élément de $\rho(A)$ est appelé valeur résolvante de A .

1. Si $\lambda \in \rho(A)$ on définit $R_\lambda(A)$ la résolvante de A au point λ par

$$R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}.$$

2. $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ est appelé le spectre de A et un élément de $\sigma(A)$ est appelé valeur spectrale de A .

Proposition 1.1.3 Soit A un opérateur linéaire fermé sur X . Alors l'application $R_\lambda : \lambda \in \rho(A) \rightarrow R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$ est analytique sur $\rho(A)$.

Proposition 1.1.4 *Soit $A : D(A) \subset X \rightarrow Y$ un opérateur linéaire.*

1. Si A est un opérateur fermé alors pour tout $B \in \mathcal{L}(X, Y)$ l'opérateur $A + B : D(A) \subset X \rightarrow Y$ est fermé.
2. Si A est un opérateur fermé et injectif alors A^{-1} est fermé.
3. Si A est un opérateur fermé à valeurs dans X et $D(A)$ est fermé dans X alors A est continu de $D(A)$ dans X .
4. Si A est un opérateur continu de $D(A) \subset X$, alors A est fermé si et seulement si son domaine est fermé.
5. Si $\rho(A) \neq \emptyset$ alors A est fermé.

La proposition suivante est un résultat utilisé dans le chapitre suivant pour montrer que certains opérateurs sont bornés.

Proposition 1.1.5 *Soit $A \in \mathcal{L}(X)$ et $B : D(B) \subset X \rightarrow X$ un opérateur linéaire fermé tels que $\text{Im}(A) \subset D(B)$. Alors $BA \in \mathcal{L}(X)$.*

Preuve. Il est clair que BA est défini sur X . Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de X telle que

$$\begin{cases} x_n \rightarrow x \\ (BA)x_n \rightarrow y \end{cases} \quad \text{dans } X.$$

Alors, comme $\text{Im}(A) \subset D(B)$, $(Ax_n)_{n \geq 0}$ est une suite d'éléments de $D(B)$ et comme $A \in \mathcal{L}(X)$, on a :

$$\begin{cases} Ax_n \rightarrow Ax & \text{dans } X \\ B(Ax_n) \rightarrow y & \text{dans } X \end{cases}$$

B étant fermé on a donc

$$Ax \in D(B) \quad \text{et} \quad B(Ax) = y$$

d'où

$$x \in D(BA) \quad \text{et} \quad (BA)x = y,$$

par la définition 1.1.7, on déduit que BA est un opérateur fermé et défini sur X , par conséquent BA est borné (continu) sur X selon le point 3. de la proposition 1.1.4, i.e. $BA \in \mathcal{L}(X)$.

1.1.3 Opérateurs sectoriels

Définition 1.1.9 *Soit $0 < \omega \leq \pi$. On définit le secteur suivant*

$$S_\omega = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg z| < \pi - \omega\}.$$

– Un opérateur linéaire fermé A sur X est dit sectoriel d'angle ω si

$$\rho(A) \supset S_\omega,$$

et

$$\sup_{\lambda \in S_\omega} \|\lambda(A - \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty.$$

Définition 1.1.10 Soit $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ un opérateur linéaire dans l'espace de Banach X . L'opérateur $B : D(B) \rightarrow X$ est dit A -borné si $D(A) \subseteq D(B)$ et il existe deux constantes $a, b \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\|Bx\| \leq a \|Ax\| + b \|x\|, \quad \forall x \in D(A).$$

Exemple. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle; on considère dans l'espace $X = L^p(I)$, $1 \leq p \leq \infty$, les opérateurs

$$A = \frac{d^2}{dx^2} \quad D(A) = W^{2,p}(I)$$

$$B = \frac{d}{dx} \quad D(B) = W^{1,p}(I)$$

alors, l'opérateur B est A -borné. Pour plus de détails, voir [5].

Lemme 1.1.1 Si $(A, D(A))$ est un opérateur fermé et $(B, D(B))$ est A -borné, alors

$$(A + B, D(A)) \text{ est un opérateur fermé.}$$

1.2 Les semi- groupes d'opérateurs linéaires

1.2.1 Semi -groupes fortement continu

Définition 1.2.1 Soit $\{G(t)\}_{t \geq 0}$ une famille d'opérateurs linéaires dans X . On dit que cette famille forme un semi-groupe dans X si elle vérifie les propriétés suivantes :

1. $G(0) = I = I_X$
2. $\forall s, t \in \mathbb{R}^+, G(t+s) = G(t)G(s)$.

Lorsque la famille $\{G(t)\}_{t \geq 0}$ est défini pour $t \in \mathbb{R}$, et que la deuxième propriété est vérifié pour tout s, t de $\mathbb{R}$ on dira qu'on a un groupe.

Définition 1.2.2 On dit qu'un semi-groupe $\{G(t)\}_{t \geq 0}$ est fortement continu si et seulement si pour tout $x \in X$, l'application $t \rightarrow G(t)x$ de $\mathbb{R}^+$ dans X est continue, c'est-à-dire pour tout $x \in X$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|G(t)x - x\|_{\mathcal{L}(X)} = 0.$$

On dit aussi que $\{G(t)\}_{t \geq 0}$ est un C_0 semi-groupe.

Définition 1.2.3 Un semi-groupe $(G(t))_{t \geq 0}$ est appelé semi-groupe uniformément continu d'opérateurs linéaires bornés si

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|G(t) - I\|_{\mathcal{L}(X)} = 0.$$

Proposition 1.2.1 Si $\{G(t)\}_{t \geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu alors il existe deux constantes $M \geq 1$ et $\omega \geq 0$ telles que

$$\|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t} \quad \forall t \geq 0.$$

1.2.2 Générateur infénitisémal d'un semi-groupe

Définition 1.2.4 On appelle *générateur infinitésimal* d'un semi-groupe $\{G(t)\}_{t \geq 0}$, l'opérateur A définit par

$$\begin{cases} D(A) = \left\{ \varphi \in X : \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{G(h)\varphi - \varphi}{h} \text{ existe} \right\} \\ A\varphi = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{G(h)\varphi - \varphi}{h}, \quad \varphi \in D(A). \end{cases}$$

$D(A)$ est non vide ($0 \in D(A)$) et est bien un sous espace vectoriel de X . A est linéaire de $D(A)$ dans X .

Corollaire 1.2.1 Soit $(A, D(A))$ le générateur infinitésimal du C_0 semi-groupe $(G(t))_{t \geq 0}$. Alors $D(A)$ est dense dans X et A est un opérateur linéaire fermé.

Proposition 1.2.2 Si A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $\{G(t)\}_{t \geq 0}$, alors

1. A est linéaire fermé de domaine $D(A)$ dense dans X .
2. $]\omega, +\infty[\subset \rho(A)$ et $\forall \lambda \in]\omega, +\infty[$, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$\|(A - \lambda I)^{-n}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}$$

où $M > 1$ et $\omega \geq 0$.

1.2.3 Semi-groupes analytiques

On définit, pour tout $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, le secteur

$$\Sigma_\alpha := \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg z| < \alpha\}$$

Définition 1.2.5 Soit $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. Une famille $\{G(z)\}_{z \in \Sigma_\alpha}$ d'éléments de $\mathcal{L}(X)$ forme un *semi-groupe analytique de type α* dans X si elle vérifie les conditions suivantes :

1. $G(0) = I$,
2. $\forall z_1, z_2 \in \Sigma_\alpha$, tel que $z_1 + z_2 \in \Sigma_\alpha$, $G(z_1 + z_2) = G(z_1)G(z_2)$,
3. $\forall \varepsilon > 0$, $\forall x \in X$, $\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \in \Sigma_\alpha}} G(z)x = x$,
4. l'application $z \rightarrow G(z)$ est holomorphe sur Σ_α .

Le théorème suivant est un résultat de Balakrishnan [1]. Il donne une propriété importante utilisée par la suite.

Théorème 1.2.1 Soit A un opérateur linéaire fermé à domaine dense $D(A)$ dans X tel que

$$]0, +\infty[\subset \rho(A) \text{ et } \exists M > 0, \forall \lambda > 0 : \|(A - \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{\lambda}.$$

Alors il existe un secteur Σ_δ , $0 \leq \delta \leq \frac{\pi}{2}$, tel que

$$\Sigma_\delta \subset \rho(A) \text{ et } \forall \lambda \in \Sigma_\delta : \|(A - \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{|\lambda|}$$

De plus, l'opérateur $(-A)^{\frac{1}{2}}$ est bien défini et il existe un secteur $\Sigma_{\alpha+\pi \setminus 2}$ avec $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, tel que

$$\Sigma_{\alpha+\pi \setminus 2} \subset \rho\left(-(-A)^{\frac{1}{2}}\right)$$

et $-(-A)^{\frac{1}{2}}$ génère un semi-groupe analytique.

1.3 Quelques espaces fonctionnels

Définition 1.3.1 On dit que l'espace normé $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach si l'espace métrique correspondant muni de la distance $d(x, y) = \|x - y\|$ est complet.

Définition 1.3.2 Un espace Préhilbertien sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est un couple (E, B) où E est un espace vectoriel et B est un produit scalaire réel (resp complexe) et on écrit

$$B(x; y) = (x, y) = \langle x; y \rangle.$$

La norme dans un espace préhilbertien est

$$\|x\| = B(x; x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\langle x; x \rangle}$$

Définition 1.3.3 L'espace topologique (E, τ) est dit séparé si :

$$\forall x \in E, \forall y \in E : x \neq y \implies \exists v \in V(x), \exists w \in V(y) : v \cap w = \emptyset$$

tel que $V(x)$ est l'ensemble des voisinages de x .

Définition 1.3.4 Un espace Hilbertien sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est un espace préhilbertien séparé et complet pour la distance

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

1.3.1 Les espaces de Hölder

Définition 1.3.5 Soient X un espace de Banach complexe et $C([0, 1]; X)$ l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans X muni de la norme

$$\|f\|_{C([0,1];X)} = \max_{t \in [0,1]} \|f(t)\|_X.$$

On considère pour $0 < \alpha < 1$, l'espace

$$C^\alpha([0, 1], X) = \left\{ f \in C([0, 1], X) : \sup_{\substack{t, s \in [0, 1] \\ t \neq s}} \frac{\|f(t) - f(s)\|_X}{|t - s|^\alpha} < \infty \right\}$$

muni de la norme

$$\|f\|_{C^\alpha([0,1],X)} = \|f\|_{C([0,1],X)} + \sup_{\substack{t, s \in [0, 1] \\ t \neq s}} \frac{\|f(t) - f(s)\|_X}{|t - s|^\alpha}.$$

Cet espace est un espace de Banach appelé espace Höldérien d'exposant α .

1.3.2 Espace d'interpolation

Soient $(X_0, \|\cdot\|_0)$ et $(X_1, \|\cdot\|_1)$ deux espaces de Banach s'injectant continument dans un espace vectoriel topologique séparé F .

En posant

$$\begin{aligned} \|x\|_{X_0 \cap X_1} &: = \max \{ \|x\|_{X_0}, \|x\|_{X_1} \} & \text{si } x \in X_0 \cap X_1 \\ \|x\|_{X_0 + X_1} &: = \inf_{\substack{x_0 \in X_0, x_1 \in X_1 \\ x_0 + x_1 = x}} (\|x_0\|_{X_0} + \|x_1\|_{X_1}) & \text{si } x \in X_0 + X_1. \end{aligned}$$

Il est connu que les espaces $(X_0 \cap X_1, \|\cdot\|_{X_0 \cap X_1})$ et $(X_0 + X_1, \|\cdot\|_{X_0 + X_1})$ sont des espaces de Banach. De plus on a

$$X_0 \cap X_1 \subset X_0, X_1 \subset X_0 + X_1$$

avec des injections continues. Pour plus de détails voir J. L. Lions et J. Peetre [13].

Définition 1.3.6 Pour $p \in [1, +\infty[$ et $\theta \in]0, 1[$, on définit l'espace intermédiaire noté $(X_0, X_1)_{\theta, p}$ entre $X_0 \cap X_1$ et $X_0 + X_1$ par

$$x \in (X_0, X_1)_{\theta, p} \iff \begin{cases} \forall t > 0, \exists u_0(t) \in X_0, \exists u_1(t) \in X_1 \text{ tel que} \\ x = u_0(t) + u_1(t) \\ t^{-\theta} u_0 \in L_*^p(\mathbb{R}_+, X_0), \quad t^{1-\theta} u_1 \in L_*^p(\mathbb{R}_+, X_1) \end{cases}$$

où $L_*^p(\mathbb{R}_+, X_i)$ est l'espace des fonctions fortement mesurables $u_i : \mathbb{R}_+ \longrightarrow X_i$ telles que

$$\|u_i\|_{L_*^p(\mathbb{R}_+, X_i)} = \left(\int_0^{+\infty} \|u_i(t)\|_{X_i}^p \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

pour $p \in [1, +\infty[$ et par

$$\|u_i\|_{L_*^\infty(\mathbb{R}_+, X_i)} = \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \text{ess} \|u_i(t)\|_{X_i},$$

si $p = \infty$.

Alors, $(X_0, X_1)_{\theta, p}$ est un espace de Banach muni de la norme

$$\|x\|_{\theta, p} = \inf_{\substack{u_i \in X_i, i=0,1 \\ x=u_0(t)+u_1(t), \forall t>0}} \left(\|t^{-\theta} u_0\|_{L_*^p(\mathbb{R}_+, X_0)} + \|t^{1-\theta} u_1\|_{L_*^p(\mathbb{R}_+, X_1)} \right)$$

De plus, on a

$$X_0 \cap X_1 \subset (X_0, X_1)_{\theta, p} \subset X_0 + X_1$$

avec des injections continues.

Remarque 1.3.1 Soit A un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A) \subset X$. On note

$$D_A(\theta, p) = (D(A), X)_{1-\theta; p}$$

où $p \in [1, +\infty]$, $\theta \in]0, 1[$. De plus, on a

$$(X, D(A))_{1+\theta, \infty} = \left\{ \varphi \in D(A) : A\varphi \in (X, D(A))_{\theta, \infty} \right\}$$

(voir Triebel [18], p 25. et 76).

Lorsque A vérifie certaines propriétés spectrales, on peut caractériser explicitement l'espace $D_A(\theta, p)$, par exemple ;

- Supposons que $\mathbb{R}_+ \subset \rho(A)$ et qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall \lambda > 0, \|(A - \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C}{\lambda}$$

alors

$$D_A(\theta, p) = \left\{ \varphi \in X : t^\theta A(A - tI)^{-1} \varphi \in L_*^p(\mathbb{R}_+, X) \right\}$$

si $p \in [1, +\infty]$, $\theta \in]0, 1[$ (voir Grisvard [10]), et si $p = \infty$, on a

$$D_A(\theta, \infty) = \left\{ x \in X : \sup_{t>0} \|t^\theta A(A - tI)^{-1} x\|_X < \infty \right\}$$

- Si A génère un semi-groupe fortement continu borné dans X , alors

$$D_A(\theta, p) = \left\{ \varphi \in X, t^{-\theta} (e^{tA} - I) \varphi \in L_*^p(\mathbb{R}_+, X) \right\}$$

(voir Lions [14]).

- Si A génère un semi-groupe analytique borné dans X alors

$$D_A(\theta, p) = \left\{ \varphi \in X, t^{1-\theta} A e^{tA} \varphi \in L_*^p(\mathbb{R}_+, X) \right\}$$

(voir Butzer-Berens [2]).

1.3.3 Définition discrète d'un espace d'interpolation

Définition 1.3.7 On dit que x est dans l'espace d'interpolation $(X_0, X_1)_{\theta, p}$ si et seulement si,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \forall n \in \mathbb{Z}, \quad x := v_n + w_n, & v_n \in X_0, w_n \in X_1 \\ \sum_{n \in \mathbb{Z}} \|e^{-\theta n} v_n\|_{X_0}^p < \infty & \text{i.e. } e^{-\theta n} v_n \in l^p(X_0) \\ \sum_{n \in \mathbb{Z}} \|e^{(1-\theta)n} w_n\|_{X_1}^p < \infty & \text{i.e. } e^{(1-\theta)n} w_n \in l^p(X_1) \end{array} \right.$$

Proposition 1.3.1 Soit A un opérateur linéaire fermé sur X , alors

$$D_{A^2}(\theta, p) = D_A(2\theta, p)$$

si $\theta \neq \frac{1}{2}$ et plus généralement

$$D_{A^m}(\theta, p) = D_A(m\theta, p)$$

si $m\theta \in \mathbb{N}$, $p \in [1, +\infty]$ et $\theta \in]0, 1[$.

1.3.4 Lemme de Schur

Théorème 1.3.1 (Marcel-Riesz) Soit $K : L^{p_0}(\Omega_0) + L^{p_1}(\Omega_0) \rightarrow L^{q_0}(\Omega_1) + L^{q_1}(\Omega_1)$ un opérateur linéaire, $p_i, q_i \in [1, +\infty]$, Ω_i des ouverts de $\mathbb{R}^n$, $i = 0, 1$ telle que

$$K \setminus_{L^{p_0}(\Omega_0)} \in \mathcal{L}(L^{p_0}, L^{q_0}) \text{ et } K \setminus_{L^{p_1}(\Omega_0)} \in \mathcal{L}(L^{p_1}, L^{q_1})$$

alors

$$K \setminus_{L^{p_\theta}(\Omega_0)} \in \mathcal{L}(L^{p_\theta}, L^{q_\theta})$$

avec $0 \leq \theta \leq 1$ et

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Lemme 1.3.1 (De Schur) Soit $k : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que

1. il existe un $a > 0$, p.p. $x_2 \in \Omega_2$, $\int_{\Omega_1} |k(x_1, x_2)| dx_1 \leq a$,
2. il existe un $b > 0$, p.p. $x_1 \in \Omega_1$, $\int_{\Omega_2} |k(x_1, x_2)| dx_2 \leq b$

On définit l'opérateur K par

$$(Kf)(x_2) = \int_{\Omega_1} k(x_1, x_2) f(x_1) dx_1$$

p.p. $x_2 \in \Omega_2$. Alors pour tout $p \in [1, +\infty]$

$$K \in \mathcal{L}(L^p(\Omega_1), L^p(\Omega_2))$$

1.4 Calcul fonctionnel

Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach complexe. Pour U un ouvert de $\mathbb{C}$, on désigne par $H(U)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur U .

Définition 1.4.1 (formule de Cauchy intégrale). Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, K un compact de U de bord γ orienté positivement. Soient $f \in H(U)$ et $z_0 \in K$. On a

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)} dz.$$

Définition 1.4.2 (Intégrale de Dunford). Soient $A \in \mathcal{L}(X)$, U un ouvert de $\mathbb{C}$, K un compact de U contenant $\sigma(A)$, γ le bord de K orienté positivement (γ est donc finie et entoure le spectre de A) et $f \in H(U)$. Alors

$$f(A) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f(z) (zI - A)^{-1} dz$$

L'opérateur $f(A) \in \mathcal{L}(X)$ et ne dépend pas du choix de γ .

Chapitre 2

Problème de Dirichlet abstrait dans le cadre höldérien : cas non commutatif

2.1 Position du problème et hypothèses

Dans ce chapitre, on étudiera le problème de Dirichlet régi par une équation opérationnelle elliptique complète du second ordre suivante

$$\begin{cases} u''(t) + (L_\omega - M_\omega) u'(t) + \frac{1}{4} ((L_\omega - M_\omega)^2 - (L_\omega + M_\omega)^2) u(t) = f(t), & t \in [0, 1] \\ u(0) = u_0 \\ u(1) = u_1 \end{cases} \quad (2.1.1)$$

où L_ω, M_ω sont deux opérateurs linéaires fermés sur X , dépendant du paramètre $\omega > 0$ et vérifiant certaines hypothèses lorsque le second membre

$$f \in C^\theta([0, 1]; X), \theta \in]0, 1[.$$

2.1.1 Hypothèses

Soit ω_0 un réel positif fixé et

$$S_\delta := \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, |\arg z| \leq \frac{\pi}{2} + \delta \right\}.$$

Les hypothèses sur les opérateurs L_ω et M_ω sont les suivantes :

$$\begin{cases} \exists \delta > 0, \exists C > 0 : \forall \omega \geq \omega_0, \quad \rho(L_\omega) \supset S_\delta, \quad \rho(M_\omega) \supset S_\delta, \\ \|(L_\omega - z)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C}{|z|}, \quad \|(M_\omega - z)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C}{|z|}, \quad \forall z \in S_\delta \end{cases} \quad (2.1.2)$$

Pour tout $\omega \geq \omega_0$, on suppose également

$$D(L_\omega) = D(M_\omega) \quad (2.1.3)$$

$$D((L_\omega + M_\omega)^2) \subset D((L_\omega - M_\omega)^2) \quad (2.1.4)$$

$$L_\omega \text{ et } M_\omega \text{ sont inversible dans } \mathcal{L}(X) \quad (2.1.5)$$

$$L_\omega + M_\omega \text{ est inversible dans } \mathcal{L}(X) \quad (2.1.6)$$

$$I - e^{L_\omega} e^{M_\omega} \text{ ou } I - e^{M_\omega} e^{L_\omega} \text{ est inversible dans } \mathcal{L}(X) \quad (2.1.7)$$

$$(X, D(L_\omega))_{1+\theta, \infty} = (X, D(M_\omega))_{1+\theta, \infty} \quad (2.1.8)$$

et l'hypothèse de non commutativité suivante

$$\forall \omega \geq \omega_0, \|C_{L_\omega, M_\omega}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \chi(\omega) \quad (2.1.9)$$

où

$$C_{L_\omega, M_\omega} := (L_\omega + M_\omega) [(L_\omega - M_\omega); (L_\omega + M_\omega)^{-1}] (L_\omega + M_\omega)^{-1},$$

$$\chi : [\omega_0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+ \text{ avec } \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \chi(\omega) = 0.$$

Dans de nombreux cas concrets $\chi(\omega) = \frac{C}{\omega^\alpha}$, où $C, \alpha > 0$.

Remarque. Sous ces hypothèses, le problème est équivalent au

$$\begin{cases} u''(t) + (L_\omega - M_\omega) u'(t) - \frac{1}{2}(L_\omega M_\omega + M_\omega L_\omega) u(t) = f(t) \\ u(0) = u_0, \\ u(1) = u_1. \end{cases} \quad (2.1.10)$$

On cherche une solution stricte de (2.1.1), c'est à dire une fonction u telle que

$$\begin{cases} u \in C^2([0, 1]; X) \cap C([0, 1]; D((L_\omega + M_\omega)^2) \cap D((L_\omega - M_\omega)^2)) \\ u' \in C([0, 1]; D(L_\omega - M_\omega)) \end{cases}$$

et qui satisfaisant (2.1.1). On veut montrer également la propriété de régularité maximale de la solution stricte u , c'est -à-dire

$$u'', (L_\omega - M_\omega) u', ((L_\omega - M_\omega)^2 - (L_\omega + M_\omega)^2) u \in C^\theta([0, 1]; X) \quad (2.1.11)$$

2.1.2 Conséquences des hypothèses

Sous l'hypothèse (2.1.2), les opérateurs :

1. L_ω et M_ω génèrent des semi-groupes analytiques dans X notés $(e^{\xi L_\omega})_{\xi > 0}, (e^{\xi M_\omega})_{\xi > 0}$ non nécessairement continus en 0.
2. $I - e^{L_\omega} e^{M_\omega}$ est inversible dans $\mathcal{L}(X)$ si et seulement si $I - e^{M_\omega} e^{L_\omega}$ l'est (voir Haak et al [12], lemme 3.1 page 209)
3. L'hypothèse (2.1.7) peut être déduite de l'une des hypothèses suivantes

$$\exists C > 0, \exists \alpha > 0, \forall \omega \geq \omega_0, \forall z \in S_\delta, \|(M_\omega - zI)^{-1}\| \leq \frac{C}{|\omega^\alpha + z|}, \quad (2.1.12)$$

$$\exists C > 0, \exists \alpha > 0, \forall \omega \geq \omega_0, \forall z \in S_\delta, \|(L_\omega - zI)^{-1}\| \leq \frac{C}{|\omega^\alpha + z|}, \quad (2.1.13)$$

Par exemple, si on suppose (2.1.12), alors

$$e^{M_\omega} = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma e^z (M_\omega - zI)^{-1} dz$$

où γ est la courbe orientée positivement du secteur de $\rho(M_\omega)$ suivant

$$S = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \arg(z) \leq \frac{\pi}{2} + \delta_1 \right\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \delta_2\}$$

où $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ sont donnés. Pour tout $z \in \gamma$, il existe $a > 0$ tel que

$$|e^z| = e^{\operatorname{Re} z} \leq e^{-a|z|}$$

ainsi

$$\|e^{M_\omega}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq K \int_\gamma e^{\operatorname{Re} z} \frac{C}{|\omega^\alpha + z|} d|z|$$

comme

$$\frac{1}{|\omega^\alpha + z|} \leq \frac{C}{\omega^\alpha}; \quad \forall z \in \gamma$$

d'où

$$\|e^{M_\omega}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C}{\omega^\alpha} \int_\gamma e^{-a|z|} d|z| \leq \frac{C}{\omega^\alpha},$$

et on peut supposer ω_0 assez grand tel que pour tout $\omega \geq \omega_0$

$$\|e^{M_\omega}\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$$

et grâce à (2.1.2) on a

$$\|e^{M_\omega} e^{L_\omega}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C}{\omega^\alpha} < 1, \quad \|e^{L_\omega} e^{M_\omega}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C}{\omega^\alpha} < 1.$$

On en déduit que

$$I - e^{L_\omega} e^{M_\omega} \quad \text{et} \quad I - e^{M_\omega} e^{L_\omega}$$

sont inversibles dans $\mathcal{L}(X)$.

On note que, ici, C désigne différentes constantes indépendantes de ω .

4. Sous l'hypothèse (2.1.3) on a

$$(X; D(L_\omega))_{\theta, \infty} = (X; D(M_\omega))_{\theta, \infty}.$$

5. Si on suppose (2.1.3) et de plus

$$D(L_\omega M_\omega) = D(M_\omega L_\omega)$$

alors (2.1.8) est satisfaite. En effet, on a

$$D(L_\omega M_\omega) = D(M_\omega^2) = D(M_\omega L_\omega) = D(L_\omega^2)$$

(voir lemme 2.2.1 ci-dessous) donc pour tout $\theta \in]0, 1[$, on obtient

$$(X; D(L_\omega^2))_{\theta, \infty} = (X; D(M_\omega^2))_{\theta, \infty}$$

et par la propriété de réitération (voir Lions-Peetre [13]), il s'ensuit

$$(X; D(L_\omega))_{1+\theta, \infty} = (X; D(L_\omega^2))_{\frac{1+\theta}{2}, \infty} = (X; D(M_\omega^2))_{\frac{1+\theta}{2}, \infty} = (X; D(M_\omega))_{1+\theta, \infty}.$$

Remarque. Dans le cas commutatif, si on suppose (2.1.2), (2.1.3), (2.1.5) et (2.1.6). Alors les hypothèses (2.1.4), (2.1.7) et (2.1.8) sont vérifiées.

1. Soit $\varphi \in D((L_\omega + M_\omega)^2)$, alors $\varphi \in D((L_\omega + M_\omega)) = D((L_\omega - M_\omega))$ et

$$(L_\omega + M_\omega) \varphi \in D((L_\omega + M_\omega)) = D((L_\omega - M_\omega)),$$

de plus

$$\begin{aligned} (L_\omega - M_\omega) \varphi &= (L_\omega - M_\omega) (L_\omega + M_\omega)^{-1} (L_\omega + M_\omega) \varphi \\ &= (L_\omega + M_\omega)^{-1} (L_\omega - M_\omega) (L_\omega + M_\omega) \varphi \in D((L_\omega + M_\omega)) \\ &= D((L_\omega - M_\omega)) \end{aligned}$$

ainsi $\varphi \in D((L_\omega - M_\omega)^2)$ et (2.1.4) est satisfaite.

2. $L_\omega + M_\omega$ génère un semi-groupe analytique sur X , noté $(e^{\xi(L_\omega + M_\omega)})_{\xi > 0}$ et $I - e^{L_\omega + M_\omega}$ admet un inverse borné en vertu de Lunardi [15] page 60, de plus on a

$$e^{L_\omega + M_\omega} = e^{L_\omega} e^{M_\omega} = e^{M_\omega} e^{L_\omega}$$

ainsi l'hypothèse (2.1.7) est satisfaite.

3. On a $D(L_\omega M_\omega) = D(M_\omega L_\omega)$, donc d'après la conséquence 5, l'hypothèse (2.1.8) est satisfaite.

2.2 Lemmes techniques

On donne, ici quelques lemmes techniques sur les opérateurs L et M justifiant les calculs algébriques utilisés dans ce travail.

Lemme 2.2.1 *Sous les hypothèses (2.1.3), (2.1.4) et (2.1.6), on a*

1. $D(LM) = D(M^2)$ et $D(ML) = D(L^2)$.
2. $D((L + M)^2) = D(L^2) \cap D(M^2) = D(LM) \cap D(ML)$.
3. $D((L - M)^2 - (L + M)^2) = D(LM) \cap D(ML)$.

Preuve. on a :

1. Soit $\phi \in D(LM)$, alors $\phi \in D(M)$ et

$$M\phi \in D(L) = D(M) \Rightarrow \phi \in D(M^2)$$

donc

$$D(LM) \subset D(M^2).$$

Inversement, si $\phi \in D(M^2)$ alors $\phi \in D(M)$ et

$$M\phi \in D(M) = D(L)$$

donc $\phi \in D(LM)$ et par conséquent

$$D(LM) = D(M^2).$$

De même, on obtient $D(ML) = D(L^2)$.

2. Soit $\phi \in D((L+M)^2)$, alors il existe $\xi \in X$ tel que

$$\phi = (L+M)^{-2} \xi$$

de plus on a $\phi \in D(L+M) = D(M)$ et

$$\begin{aligned} M\phi &= M(L+M)^{-2} \xi = \frac{1}{2} (2M(L+M)^{-1}) (L+M)^{-1} \xi \\ &= \frac{1}{2} (I - (L+M-2M)(L+M)^{-1}) (L+M)^{-1} \xi \\ &= \frac{1}{2} (I - (L-M)(L+M)^{-1}) (L+M)^{-1} \xi \\ &= \frac{1}{2} (L+M)^{-1} \xi - \frac{1}{2} (L-M)(L+M)^{-2} \xi \\ &: = y - z \end{aligned}$$

alors $y \in D(M)$ et de l'hypothèse (2.1.4) on trouve

$$z \in D(L-M) = D(M)$$

Ainsi

$$M\phi = y - z \in D(M)$$

et donc $\phi \in D(M^2)$. Idem, on montre que $\phi \in D(L^2)$. Donc $\phi \in D(M^2) \cap D(L^2)$. Pour le sens inverse, on suppose que $\phi \in D(M^2) \cap D(L^2)$, c'est à dire

$$L\phi \in D(L) \text{ et } M\phi \in D(M)$$

donc la somme $L\phi + M\phi \in D(L+M)$ et par suite $\phi \in D((L+M)^2)$.

3. Du deuxième point de ce lemme et de l'hypothèse (2.1.4) on déduit que

$$D((L-M)^2 - (L+M)^2) = D((L+M)^2) = D(LM) \cap D(ML).$$

Lemme 2.2.2 *Sous les hypothèses (2.1.2) $\sim$ (2.1.9), on a :*

1. $(L + M) M^{-1}, (L + M) L^{-1}, M (L + M)^{-1}, L (L + M)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$.
2. $L (L - M) (L + M)^{-2}, M (L - M) (L + M)^{-2} \in \mathcal{L}(X)$ et

$$(L - M) M (L + M)^{-2}, (L - M) L (L + M)^{-2} \in \mathcal{L}(X).$$
3. $(L + M) (L - M) (L + M)^{-2}, (L - M)^2 (L + M)^{-2} \in \mathcal{L}(X)$.
4. $C_{L,M} = (L + M) [(L - M); (L + M)^{-1}] (L + M)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$.

Preuve. Pour montrer ce lemme on applique la proposition 1.1.5.

1. Puisque $0 \in \rho(L) \cap \rho(M)$, alors

$$L^{-1}, M^{-1} \in \mathcal{L}(X)$$

de plus on a

$$L^{-1}(X) \subset D(L) = D(M) \text{ et } M^{-1}(X) \subset D(M) = D(L)$$

Alors $ML^{-1}, LM^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. On en déduit que

$$(L + M) M^{-1}, (L + M) L^{-1}, (L - M) M^{-1}, (L - M) L^{-1} \in \mathcal{L}(X).$$

D'autre part, on sait que $0 \in \rho(L + M)$ alors $L + M$ est un opérateur linéaire fermé sur X et comme

$$L^{-1}(X) \subset D(L) = D(L + M) \text{ et } M^{-1}(X) \subset D(M) = D(L + M)$$

donc $(L + M) L^{-1}, (L + M) M^{-1} \in \mathcal{L}(X)$.

Comme M est un opérateur linéaire fermé sur X , $(L + M)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ et

$$(L + M)^{-1}(X) \subset D(L + M) = D(M) = D(L)$$

alors $M (L + M)^{-1}, L (L + M)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$.

2. Puisque $M (L + M)^{-1}, L (L + M)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, alors

$$(L - M) (L + M)^{-2} = [L (L + M)^{-1} - M (L + M)^{-1}] (L + M)^{-1} \in \mathcal{L}(X).$$

et de l'hypothèse (2.1.4) on déduit

$$(L - M) (L + M)^{-2}(X) \subset D(L - M) = D(L) = D(M),$$

en appliquant une autre fois la proposition 1.1.5 (pour les opérateurs fermés L et M) on obtient

$$L (L - M) (L + M)^{-2} \in \mathcal{L}(X) \tag{2.2.1}$$

$$M (L - M) (L + M)^{-2} \in \mathcal{L}(X). \tag{2.2.2}$$

Ensuite, on a

$$\begin{aligned} & (L - M) M (L + M)^{-2} \\ &= \frac{1}{2} (L (L + M) (L + M)^{-2} - L (L - M) (L + M)^{-2} - M^2 (L + M)^{-2}) \in \mathcal{L}(X). \end{aligned}$$

De même $(L - M) L (L + M)^{-2} \in \mathcal{L}(X)$.

3. La somme de (2.2.1) et (2.2.2) donne

$$(L + M)(L - M)(L + M)^{-2} \in \mathcal{L}(X).$$

et la différence donne

$$(L - M)^2(L + M)^{-2} \in \mathcal{L}(X).$$

4. En utilisant les points 1. et 3., on trouve

$$C_{L,M} = (L + M)(L - M)(L + M)^{-2} - (L - M)(L + M)^{-1} \in \mathcal{L}(X).$$

Lemme 2.2.3 *Sous les hypothèses (2.1.2) $\sim$ (2.1.9), on a*

$$1. \quad \frac{1}{4}((L - M)^2 - (L + M)^2) = -\frac{1}{2}(LM + ML).$$

$$2. \quad [(L - M); (L + M)^{-1}] = -2[M; (L + M)^{-1}] = 2[L; (L + M)^{-1}].$$

$$3. \quad S_{L,M} := (L - M)(L + M)^{-1}(L - M)(L + M)^{-1} \text{ et}$$

$$S_{L,M} = I - 4M(L + M)^{-1}L(L + M)^{-1} = I - 4L(L + M)^{-1}M(L + M)^{-1}.$$

$$4. \quad C_{L,M} = 2[M, L](L + M)^{-2}.$$

$$5. \quad T_{L,M} := (L - M)[(L - M); (L + M)^{-1}](L + M)^{-1} \text{ et}$$

$$S_{L,M} + T_{L,M} = (L - M)^2(L + M)^{-2}$$

$$M[L; (L + M)^{-1}](L + M)^{-1} + \frac{1}{4}T_{L,M} = \frac{1}{4}C_{L,M}$$

$$L[M; (L + M)^{-1}](L + M)^{-1} + \frac{1}{4}T_{L,M} = -\frac{1}{4}C_{L,M}.$$

$$6. \quad (4ML + (L - M)^2 - (L + M)^2)(L + M)^{-2} = C_{L,M},$$

$$(4LM + (L - M)^2 - (L + M)^2)(L + M)^{-2} = -C_{L,M}.$$

$$7. \quad (L + M)^{-1}M - \frac{1}{2}(L + M)^{-1}C_{L,M}(L + M) = M(L + M)^{-1}$$

$$- (L + M)^{-1}L - \frac{1}{2}(L + M)^{-1}C_{L,M}(L + M) = -L(L + M)^{-1}.$$

$$8. \quad M(L + M)^{-1}M + \frac{1}{4}(L - M)(L + M)^{-1}C_{L,M}(L + M) = \frac{1}{2}M - \frac{1}{2}(L - M)M(L + M)^{-1}.$$

$$L(L + M)^{-1}L + \frac{1}{4}(L - M)(L + M)^{-1}C_{L,M}(L + M) = \frac{1}{2}L + \frac{1}{2}(L - M)L(L + M)^{-1}.$$

$$9. \quad M + (L - M)M(L + M)^{-1} + \frac{1}{2}((L - M)^2 - (L + M)^2)(L + M)^{-1} = 0$$

$$L - (L - M)L(L + M)^{-1} + \frac{1}{2}((L - M)^2 - (L + M)^2)(L + M)^{-1} = 0$$

Preuve.

1. Pour tout $\phi \in D((L+M)^2)$, on a

$$\begin{cases} (L+M)^2 \phi = L^2 \phi + LM\phi + ML\phi + M^2 \phi \\ (L-M)^2 \phi = L^2 \phi - LM\phi - ML\phi + M^2 \phi \end{cases}$$

d'où

$$\frac{1}{4} ((L-M)^2 - (L+M)^2) \phi = \frac{1}{4} (-2LM - 2ML) \phi = -\frac{1}{2} (LM + ML) \phi$$

2. Puisque $D(L) = D(M) = D(L+M) = D(L-M)$, alors

$$\begin{cases} [(L-M); (L+M)^{-1}] \phi = [L, (L+M)^{-1}] \phi - [M, (L+M)^{-1}] \phi \\ [(L+M); (L+M)^{-1}] \phi = [L, (L+M)^{-1}] \phi + [M, (L+M)^{-1}] \phi = 0 \end{cases}$$

donc

$$[L, (L+M)^{-1}] \phi = -[M, (L+M)^{-1}] \phi$$

et

$$[(L-M); (L+M)^{-1}] \phi = -2[M, (L+M)^{-1}] \phi = 2[L, (L+M)^{-1}] \phi.$$

3. On a

$$\begin{aligned} S_{L,M} &: = (L-M)(L+M)^{-1}(L-M)(L+M)^{-1} \\ &= (L+M-2M)(L+M)^{-1}(L-M)(L+M)^{-1}, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} S_{L,M} &= [(L+M)(L+M)^{-1} - 2M(L+M)^{-1}](L-M)(L+M)^{-1} \\ &= (L-M)(L+M)^{-1} + 2M(L+M)^{-1}(M-L)(L+M)^{-1} \\ &= (L-M)(L+M)^{-1} + 2M(L+M)^{-1}(M+L-2L)(L+M)^{-1} \\ &= (L-M)(L+M)^{-1} + 2M(L+M)^{-1} - 4M(L+M)^{-1}L(L+M)^{-1} \\ &= [(L-M) + 2M](L+M)^{-1} - 4M(L+M)^{-1}L(L+M)^{-1} \\ &= I - 4M(L+M)^{-1}L(L+M)^{-1}. \end{aligned}$$

De même, on obtient

$$\begin{aligned} S_{L,M} &: = (L-M)(L+M)^{-1}(L-M)(L+M)^{-1} \\ &= -(M-L)(L+M)^{-1}(L-M)(L+M)^{-1} \\ &= -(M+L-2L)(L+M)^{-1}(L+M-2M)(L+M)^{-1} \\ &= -I + 2M(L+M)^{-1} + 2L(L+M)^{-1} - 4L(L+M)^{-1}M(L+M)^{-1} \\ &= -I + 2I - 4L(L+M)^{-1}M(L+M)^{-1} \\ &= I - 4L(L+M)^{-1}M(L+M)^{-1}. \end{aligned}$$

4. On a, grâce au deuxième point du lemme 2.2.1, pour tout $\phi \in D((L+M)^2)$

$$\begin{cases} (L+M)(L-M)\phi = L^2\phi - LM\phi + ML\phi - M^2\phi \\ (L-M)(L+M)\phi = L^2\phi + LM\phi - ML\phi - M^2\phi \end{cases}$$

et ainsi

$$((L+M)(L-M) - (L-M)(L+M))\phi = 2(ML - LM)\phi = 2[M, L]\phi$$

d'où

$$\begin{aligned} C_{L,M} &= ((L+M)(L-M) - (L-M)(L+M))(L+M)^{-2} \\ &= 2[M, L](L+M)^{-2}. \end{aligned}$$

5. On a

$$\begin{aligned} S_{L,M} + T_{L,M} &= (L-M)(L+M)^{-1}(L-M)(L+M) \\ &\quad + (L-M)[(L-M); (L+M)^{-1}](L+M)^{-1} \\ &= (L-M)(L+M)^{-1}(L-M)(L+M)^{-1} + (L-M)^2(L+M)^{-2} \\ &\quad - (L-M)(L+M)^{-1}(L-M)(L+M)^{-1} \\ &= (L-M)^2(L+M)^{-2}. \end{aligned}$$

De plus, d'après le point 2. on a

$$\begin{aligned} &M[L; (L+M)^{-1}](L+M)^{-1} + \frac{1}{4}T_{L,M} \\ &= \frac{1}{2}M[(L-M); (L+M)^{-1}](L+M)^{-1} \\ &\quad + \frac{1}{4}(L-M)[(L-M); (L+M)^{-1}](L+M)^{-1} \\ &= \left(\frac{1}{2}M + \frac{1}{4}(L-M)\right)[(L-M); (L+M)^{-1}](L+M)^{-1} \\ &= \frac{1}{4}(L+M)[(L-M); (L+M)^{-1}](L+M)^{-1} \end{aligned}$$

donc

$$M[L; (L+M)^{-1}](L+M)^{-1} + \frac{1}{4}T_{L,M} = \frac{1}{4}C_{L,M}.$$

De même, on a

$$\begin{aligned} &L[M; (L+M)^{-1}](L+M)^{-1} + \frac{1}{4}T_{L,M} \\ &= -\frac{1}{2}L[(L-M); (L+M)^{-1}](L+M)^{-1} \\ &\quad + \frac{1}{4}(L-M)[(L-M); (L+M)^{-1}](L+M)^{-1} \\ &= \left(-\frac{1}{2}L + \frac{1}{4}(L-M)\right)[(L-M); (L+M)^{-1}](L+M)^{-1} \\ &= -\frac{1}{4}(L+M)[(L-M); (L+M)^{-1}](L+M)^{-1} \\ &= -\frac{1}{4}C_{L,M}. \end{aligned}$$

6. En utilisant le point 1. on trouve

$$\begin{aligned}
& (4ML + (L - M)^2 - (L + M)^2) (L + M)^{-2} \\
&= (4ML - 2(LM + ML)) (L + M)^{-2} \\
&= (2ML - 2LM) (L + M)^{-2} \\
&= 2[M, L] (L + M)^{-2}
\end{aligned}$$

et du point 4., il vient

$$(4ML + (L - M)^2 - (L + M)^2) (L + M)^{-2} = C_{L,M}.$$

De même, on a

$$\begin{aligned}
(4LM + (L - M)^2 - (L + M)^2) (L + M)^{-2} &= (4LM - 2(LM + ML)) (L + M)^{-2} \\
&= -(2ML - 2LM) (L + M)^{-2} \\
&= -2[M, L] (L + M)^{-2} \\
&= -C_{L,M}.
\end{aligned}$$

7. En utilisant le point 2., on obtient

$$\begin{aligned}
(L + M)^{-1} M - \frac{1}{2} (L + M)^{-1} C_{L,M} (L + M) &= (L + M)^{-1} M + [M, (L + M)^{-1}] \\
&= M (L + M)^{-1}
\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}
-(L + M)^{-1} L - \frac{1}{2} (L + M)^{-1} C_{L,M} (L + M) &= -(L + M)^{-1} L - [L, (L + M)^{-1}] \\
&= -L (L + M)^{-1}.
\end{aligned}$$

8. En utilisant le point 2., on a

$$\begin{aligned}
& M (L + M)^{-1} M + \frac{1}{4} (L - M) (L + M)^{-1} C_{L,M} (L + M) \\
&= M (L + M)^{-1} M - \frac{1}{2} (L - M) [M, (L + M)^{-1}] \\
&= M (L + M)^{-1} M - \frac{1}{2} (L - M) M (L + M)^{-1} + \frac{1}{2} (L - M) (L + M)^{-1} M \\
&= \frac{1}{2} M - \frac{1}{2} (L - M) M (L + M)^{-1}
\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}
& L (L + M)^{-1} L + \frac{1}{4} (L - M) (L + M)^{-1} C_{L,M} (L + M) \\
&= L (L + M)^{-1} L + \frac{1}{2} (L - M) [L, (L + M)^{-1}] \\
&= L (L + M)^{-1} L + \frac{1}{2} (L - M) L (L + M)^{-1} - \frac{1}{2} (L - M) (L + M)^{-1} L \\
&= \frac{1}{2} L + \frac{1}{2} (L - M) L (L + M)^{-1}.
\end{aligned}$$

9. On a

$$\begin{aligned}
& M + (L - M) M (L + M)^{-1} + \frac{1}{2} ((L - M)^2 - (L + M)^2) (L + M)^{-1} \\
&= (L - M) M (L + M)^{-1} + \frac{1}{2} (L - M)^2 (L + M)^{-1} + M - \frac{1}{2} (L + M) \\
&= \frac{1}{2} (L - M) ((L - M) + 2M) (L + M)^{-1} - \frac{1}{2} (L - M) \\
&= \frac{1}{2} (L - M) - \frac{1}{2} (L - M) = 0.
\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}
& L - (L - M) L (L + M)^{-1} + \frac{1}{2} ((L - M)^2 - (L + M)^2) (L + M)^{-1} \\
&= -(L - M) L (L + M)^{-1} + \frac{1}{2} (L - M)^2 (L + M)^{-1} + L - \frac{1}{2} (L + M) \\
&= \frac{1}{2} (L - M) ((L - M) - 2L) (L + M)^{-1} + \frac{1}{2} (L - M) \\
&= -\frac{1}{2} (L - M) + \frac{1}{2} (L - M) = 0.
\end{aligned}$$

Remarque 2.2.1 Le point 4. permet d'écrire l'hypothèse sur le commutateur (2.1.9) sous la forme

$$\forall \omega \geq \omega^*, \quad \|[M_\omega, L_\omega] (L_\omega + M_\omega)^{-2}\|_{L(X)} \leq \chi(\omega)$$

Lemme 2.2.4 Sous les hypothèses (2.1.2) $\sim$ (2.1.9), on a

$$\begin{cases} (I - e^L e^M)^{-1} = I + e^L e^M (I - e^L e^M)^{-1} \\ (I - e^M e^L)^{-1} = I + e^M e^L (I - e^M e^L)^{-1} \end{cases}$$

et

$$M (I - e^L e^M)^{-1} L^{-1}, L (I - e^M e^L)^{-1} M^{-1} \in \mathcal{L}(X).$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}
& (I - e^L e^M) \left(I + e^L e^M (I - e^L e^M)^{-1} \right) \\
&= I - e^L e^M + e^L e^M (I - e^L e^M)^{-1} - e^L e^M e^L e^M (I - e^L e^M)^{-1} \\
&= I - e^L e^M + e^L e^M \left((I - e^L e^M)^{-1} - e^L e^M (I - e^L e^M)^{-1} \right) \\
&= I - e^L e^M + e^L e^M (I - e^L e^M) (I - e^L e^M)^{-1} \\
&= I,
\end{aligned}$$

de même, on obtient

$$(I + e^L e^M (I - e^L e^M)^{-1}) (I - e^L e^M) = I$$

d'où

$$(I - e^L e^M)^{-1} = I + e^L e^M (I - e^L e^M)^{-1}.$$

En inversant les rôles de L et M on obtient

$$(I - e^M e^L)^{-1} = I + e^M e^L (I - e^M e^L)^{-1},$$

ensuite on a

$$\begin{cases} M (I - e^L e^M)^{-1} L^{-1} = ML^{-1} + ML^{-1} L e^L e^M (I - e^L e^M)^{-1} L^{-1} \in \mathcal{L}(X) \\ L (I - e^M e^L)^{-1} M^{-1} = LM^{-1} + LM^{-1} M e^M e^L (I - e^M e^L)^{-1} M^{-1} \in \mathcal{L}(X). \end{cases}$$

Lemme 2.2.5 *Sous les hypothèses (2.1.2) $\sim$ (2.1.6). L'hypothèse (2.1.8) est équivalente à*

$$ML^{-1}(X, D(L))_{\theta, \infty} \subset (X, D(L))_{\theta, \infty}, \quad (2.2.3)$$

$$LM^{-1}(X, D(M))_{\theta, \infty} \subset (X, D(M))_{\theta, \infty}. \quad (2.2.4)$$

Preuve. On suppose (2.1.8). On a

$$(X, D(L))_{1+\theta, \infty} = \left\{ \varphi \in D(L) : L\varphi \in (X, D(L))_{\theta, \infty} \right\},$$

alors

$$\varphi \in (X, D(L))_{1+\theta, \infty} \text{ si et seulement si } L\varphi \in (X, D(L))_{\theta, \infty}$$

Donc si $\varphi \in (X, D(L))_{\theta, \infty}$ alors $L(L^{-1}\varphi) \in (X, D(L))_{\theta, \infty}$ et donc

$$L^{-1}\varphi \in (X, D(L))_{1+\theta, \infty} = (X, D(M))_{1+\theta, \infty}.$$

Ainsi $ML^{-1}\varphi \in (X, D(M))_{\theta, \infty} = (X, D(L))_{\theta, \infty}$, ce qui prouve (2.2.3). Pour la seconde inclusion, il suffit d'échanger les rôles de L et M .

Inversement, on suppose (2.2.3) et (2.2.4). Soit $\varphi \in (X, D(L))_{1+\theta, \infty}$ alors $L\varphi \in (X, D(L))_{\theta, \infty}$.

Donc

$$M\varphi = ML^{-1}L\varphi \in ML^{-1}(X, D(L))_{\theta, \infty} \subset (X, D(L))_{\theta, \infty} = (X, D(M))_{\theta, \infty}$$

ainsi

$$\varphi \in (X, D(M))_{1+\theta, \infty}.$$

Idem, si $\varphi \in (X, D(M))_{1+\theta, \infty}$ on trouve que $\varphi \in (X, D(L))_{1+\theta, \infty}$.

2.3 Représentation de la solution

Pour trouver la représentation de la solution, on a besoin de résoudre

1. l'équation lorsque $L_\omega = M_\omega$.

2. l'équation complète dans le cas commutatif c'est à dire $L_\omega M_\omega = M_\omega L_\omega$.

puis on utilise un raisonnement heuristiques pour obtenir une équation intégrale vérifie par l'éventuelle solution classique

$$u(t) = (L_\omega + M_\omega)^{-2} v(t).$$

Cette équation intégrale écrite sous la forme

$$v + R_\omega(v) = F_\omega(f) + D_\omega,$$

où $R_\omega, F_\omega, D_\omega$ dépendent de L_ω et M_ω , R_ω dépendent aussi du commutateur C_{L_ω, M_ω} et D_ω dépend des données u_0, u_1 .

2.3.1 Résolution de l'équation différentielle simple

Dans l'espace de Banach X , on considère l'équation simple suivante

$$U''(t) + AU(t) = f(t), \quad t \in [0, 1] \quad (2.3.1)$$

où A vérifie l'hypothèse principale d'ellipticité suivante

$$\begin{cases} A \text{ est un opérateur linéaire fermé de domaine } D(A) \text{ dans } X : \\ \mathbb{R}_+ \subset \rho(A), \exists C > 0, \forall \lambda \geq 0, \|(A - \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C}{1 + \lambda} \end{cases} \quad (2.3.2)$$

et

$$f \in C^\theta([0, 1]; X), \quad 0 < \theta < 1.$$

Remarque 2.3.1 *L'hypothèse (2.3.2) implique que l'opérateur $-\sqrt{-A}$ génère un semi-groupe analytique noté*

$$e^{-t\sqrt{-A}}, \quad t \geq 0$$

Pour plus de détails voir [1].

Pour des raisons de commodité, on pose

$$Q := -\sqrt{-A}$$

Pour résoudre l'équation (2.3.1) nous utiliserons la méthode de réduction de l'ordre, appelé aussi méthode de réduction de Krein qui est basée sur les transformées suivantes,

$$\begin{cases} V(t) = -Q^{-1}U'(t) \\ y(t) = \frac{1}{2}(U(t) - V(t)) \\ z(t) = \frac{1}{2}(U(t) + V(t)) \end{cases} \quad (2.3.3)$$

pour presque tout $t \in [0, 1]$.

L'avantage de cette méthode est que si le problème (2.3.1) admet une solution, alors cette solution est unique.

On dérive y on trouve

$$y'(t) = \frac{1}{2}(U'(t) - V'(t)) = \frac{1}{2}(-QV(t) + Q^{-1}U''(t))$$

on utilise (2.3.1) et (2.3.3), on obtient

$$\begin{cases} y'(t) = Qy(t) + \frac{1}{2}Q^{-1}f(t) \\ y(0) = \xi_0 \end{cases} \quad (2.3.4)$$

Similairement, nous avons

$$z'(t) = \frac{1}{2}(U'(t) + V'(t)) = \frac{1}{2}(-QV(t) + Q^{-1}U''(t)).$$

On utilise (2.3.1) et (2.3.3), on obtient

$$\begin{cases} z'(t) = -Qz(t) - \frac{1}{2}Q^{-1}f(t) \\ z(1) = \xi_1 \end{cases} \quad (2.3.5)$$

Alors, la résolution de l'équation (2.3.1) est équivalente à celle des deux systèmes (2.3.4) et (2.3.5) qui sont deux problèmes de Cauchy bien posés l'un est direct et l'autre est inverse. Par conséquent, pour presque $t \in [0, 1]$, on trouve

$$y(t) = e^{tQ}\xi_0 + \frac{1}{2} \int_0^t Q^{-1}e^{(t-s)Q}f(s)ds \quad (2.3.6)$$

$$z(t) = e^{(1-t)Q}\xi_1 + \frac{1}{2} \int_t^1 Q^{-1}e^{(s-t)Q}f(s)ds$$

finalemt la solution de (2.3.1) est donnée par

$$\begin{aligned} U(t) &= y(t) + z(t) \\ &= e^{tQ}\xi_0 + e^{(1-t)Q}\xi_1 + \frac{1}{2} \int_0^t Q^{-1}e^{(t-s)Q}f(s)ds + \frac{1}{2} \int_t^1 Q^{-1}e^{(s-t)Q}f(s)ds. \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

2.3.2 Résolution de l'équation différentielle complète

Maintenant, on va chercher, dans le cadre commutatif, la solution de l'équation différentielle abstraite complète du second ordre posée sur un intervalle borné $[0, 1]$

$$u''(t) + 2Bu'(t) + Au(t) = f(t) \quad (2.3.8)$$

lorsque le second membre

$$f \in C^\theta([0, 1]; X),$$

A et B sont deux opérateurs linéaires fermés dans un espace de Banach complexe X , vérifiant les hypothèses suivantes

$$\begin{cases} B^2 - A \text{ est un opérateur linéaire fermé dans } X, \quad \mathbb{R}_- \subset \rho(B^2 - A) \\ \exists C > 0, \quad \forall \lambda \geq 0 : \|\lambda I + B^2 - A\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C}{1 + \lambda} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (B^2 - A) \text{ et } B \text{ commutent au sens des resolvantes, i.e., } \forall \mu \in \rho(B), \\ \forall \lambda \geq 0 : (\lambda I + B^2 - A)^{-1} (B - \mu I)^{-1} = (B - \mu I)^{-1} (\lambda I + B^2 - A)^{-1}, \end{cases}$$

B génère un groupe fortement continue $(e^{tB})_{t \in \mathbb{R}}$ sur X

$$D(A) \subset D(B^2)$$

$$D\left((B^2 - A)^{\frac{1}{2}}\right) \subset D(B)$$

et

$$B + (B^2 - A)^{\frac{1}{2}}, \quad A \text{ sont inversibles dans } \mathcal{L}(X).$$

Pour plus de détails voir le travail de Angelo Favini, Rabah Labbas, Hiroki Tanabe et Atsush Yagi [6]. On pose

$$u(t) := e^{-tB}W(t)$$

donc

$$u'(t) = -Be^{-tB}W(t) + e^{-tB}W'(t)$$

et

$$u''(t) = B^2e^{-tB}W(t) - Be^{-tB}W'(t) - e^{-tB}W''(t) + e^{-tB}W''(t)$$

On remplace ces deux expressions dans l'équation (2.3.8), on obtient

$$B^2e^{-tB}W(t) - 2Be^{-tB}W'(t) + e^{-tB}W''(t) - 2B^2e^{-tB}W(t) + 2Be^{-tB}W'(t) + Ae^{-tB}W(t) = f(t)$$

qui donne

$$W''(t) + (A - B^2)W(t) = e^{tB}f(t).$$

En remplaçant A par $(A - B^2)$ dans (2.3.7), on obtient

$$\begin{aligned} W(t) &= e^{-t(B^2-A)^{\frac{1}{2}}}\xi_0 + e^{-(1-t)(B^2-A)^{\frac{1}{2}}}\xi_1 \\ &\quad - \frac{1}{2}(B^2-A)^{-\frac{1}{2}} \int_0^t e^{-(t-s)(B^2-A)^{\frac{1}{2}}} e^{sB} f(s) ds \\ &\quad - \frac{1}{2}(B^2-A)^{-\frac{1}{2}} \int_t^1 e^{-(s-t)(B^2-A)^{\frac{1}{2}}} e^{sB} f(s) ds \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{-tB}W(t) \\ &= e^{t\left(-B-(B^2-A)^{\frac{1}{2}}\right)}\xi_0 + e^{(1-t)\left(B-(B^2-A)^{\frac{1}{2}}\right)}\xi_1 \\ &\quad - \frac{1}{2}(B^2-A)^{-\frac{1}{2}} \int_0^t e^{(t-s)\left(-B-(B^2-A)^{\frac{1}{2}}\right)} f(s) ds \\ &\quad - \frac{1}{2}(B^2-A)^{-\frac{1}{2}} \int_t^1 e^{(s-t)\left(B-(B^2-A)^{\frac{1}{2}}\right)} f(s) ds \end{aligned}$$

On introduit maintenant les deux opérateurs

$$L := B - (B^2 - A)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad M := -B - (B^2 - A)^{\frac{1}{2}}$$

on a bien

$$L - M = 2B \quad \text{et} \quad \frac{1}{4}((L - M)^2 - (L + M)^2) = A$$

donc, il résulte que

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{tM}\xi_0 + e^{(1-t)L}\xi_1 \\ &\quad + (L + M)^{-1} \int_0^t e^{(t-s)M} f(s) ds + (L + M)^{-1} \int_t^1 e^{(s-t)L} f(s) ds \end{aligned} \tag{2.3.9}$$

En utilisant les conditions de Dirichlet $u(0) = u_0$ et $u(1) = u_1$ et après des simplifications on trouve

$$\begin{aligned} \xi_0 = & (I - e^{L+M})^{-1} \left(u_0 - e^L u_1 - (L + M)^{-1} \int_0^1 e^{sL} f(s) ds \right. \\ & \left. + (L + M)^{-1} e^L \int_0^1 e^{(1-s)M} f(s) ds \right), \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

et

$$\begin{aligned} \xi_1 = & (I - e^{L+M})^{-1} \left(u_1 - e^M u_0 - (L + M)^{-1} \int_0^1 e^{(1-s)M} f(s) ds \right. \\ & \left. + (L + M)^{-1} e^M \int_0^1 e^{sL} f(s) ds \right) \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

Par un calcul on trouve que la solution (2.3.9), (2.3.10) et (2.3.11) est la solution du problème

$$\begin{cases} u''(t) + (L - M) u'(t) + \frac{1}{4} ((L - M)^2 - (L + M)^2) u(t) = f(t) \\ u(0) = u_0 \\ u(1) = u_1. \end{cases}$$

2.3.3 Représentation de la solution dans le cas non commutatif

Dans le cas commutatif, la solution peut s'écrire sous la forme

$$\varphi + \psi + d$$

où, pour tout $t \in [0, 1]$

$$\varphi(t) = (L + M)^{-1} \int_0^t e^{(t-s)M} f(s) ds + (L + M)^{-1} \int_t^1 e^{(s-t)L} f(s) ds \quad (2.3.12)$$

$$\begin{aligned} \psi(t) = & -(L + M)^{-1} e^{tM} (I - e^L e^M)^{-1} \int_0^1 e^{sL} f(s) ds \\ & + (L + M)^{-1} e^{tM} (I - e^L e^M)^{-1} e^L \int_0^1 e^{(1-s)M} f(s) ds \\ & - (L + M)^{-1} e^{(1-t)L} (I - e^M e^L)^{-1} \int_0^1 e^{(1-s)M} f(s) ds \\ & + (L + M)^{-1} e^{(1-t)L} (I - e^M e^L)^{-1} e^M \int_0^1 e^{sL} f(s) ds \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

et

$$\begin{aligned} d(t) = & (I - e^L e^M)^{-1} (e^{tM} - e^{(1-t)L} e^M) u_0 \\ & + (I - e^M e^L)^{-1} (e^{(1-t)L} - e^{tM} e^L) u_1 \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

On fait maintenant le raisonnement heuristique suivant :

1. On suppose qu'il existe une solution stricte u du problème (2.1.1) satisfaisant la propriété de la régularité maximale (2.1.11).
2. On remplace le second membre par l'équation et on effectuera des intégrations par parties afin de déduire l'équation intégrale satisfaite par

$$v := (L + M)^2 u$$

Puisque u est une solution stricte de (2.1.1) satisfaisant (2.1.11), alors tous les calculs seront justifiés.

Dans (2.3.12) on remplace le second membre f par

$$u''(s) + (L - M)u'(s) + \frac{1}{4}((L - M)^2 - (L + M)^2)u(s)$$

on obtient, pour tout $t \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \int_0^t (L + M)^{-1} e^{(t-s)M} \\ &\quad \left(u''(s) + (L - M)u'(s) + \frac{1}{4}((L - M)^2 - (L + M)^2)u(s) \right) ds \\ &\quad + \int_t^1 (L + M)^{-1} e^{(s-t)L} \\ &\quad \left(u''(s) + (L - M)u'(s) + \frac{1}{4}((L - M)^2 - (L + M)^2)u(s) \right) ds \\ &: = u_1(t) + u_2(t) + u_3(t) + u_4(t) + u_5(t) + u_6(t) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \begin{cases} u_1(t) &:= \int_0^t (L + M)^{-1} e^{(t-s)M} u''(s) ds \\ u_2(t) &:= \int_t^1 (L + M)^{-1} e^{(s-t)L} u''(s) ds \end{cases} \\ \begin{cases} u_3(t) &:= \int_0^t (L + M)^{-1} e^{(t-s)M} (L - M) u'(s) ds \\ u_4(t) &:= \int_t^1 (L + M)^{-1} e^{(s-t)L} (L - M) u'(s) ds \end{cases} \\ \begin{cases} u_5(t) &:= \frac{1}{4} \int_0^t (L + M)^{-1} e^{(t-s)M} ((L - M)^2 - (L + M)^2) u(s) ds \\ u_6(t) &:= \frac{1}{4} \int_t^1 (L + M)^{-1} e^{(s-t)L} ((L - M)^2 - (L + M)^2) u(s) ds \end{cases} \end{aligned}$$

Par une double intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned} u_1(t) &= [(L + M)^{-1} e^{(t-s)M} u'(s)]_0^t + \int_0^t (L + M)^{-1} M e^{(t-s)M} u'(s) ds \\ u_1(t) &= [(L + M)^{-1} e^{(t-s)M} u'(s)]_0^t + [(L + M)^{-1} M e^{(t-s)M} u(s)]_0^t \\ &\quad + \int_0^t (L + M)^{-1} M^2 e^{(t-s)M} u(s) ds \end{aligned}$$

On utilise deux fois la continuité du semi-groupe $e^{(t-s)M}$ en $s = t$, et

$$u'(t) \in D(M), \quad u(t) \in D(M^2).$$

on obtient

$$\begin{aligned} u_1(t) &= (L+M)^{-1} u'(t) - (L+M)^{-1} e^{tM} u'(0) + (L+M)^{-1} M u(t) \\ &\quad - (L+M)^{-1} M e^{tM} u_0 + \int_0^t (L+M)^{-1} M^2 e^{(t-s)M} u(s) ds. \end{aligned}$$

De même, on a

$$\begin{aligned} u_2(t) &= (L+M)^{-1} e^{(1-t)L} u'(1) - (L+M)^{-1} u'(t) - \int_t^1 (L+M)^{-1} L e^{(s-t)L} u'(s) ds \\ &= (L+M)^{-1} e^{(1-t)L} u'(1) - (L+M)^{-1} u'(t) + (L+M)^{-1} L u(t) \\ &\quad - (L+M)^{-1} L e^{(1-t)L} u_1 + \int_t^1 (L+M)^{-1} L^2 e^{(s-t)L} u(s) ds \end{aligned}$$

Ici, on a utilisé deux fois la continuité du semi-groupe $e^{(s-t)L}$ en $s = t$ et

$$u'(t) \in D(L), \quad u(t) \in D(L^2).$$

Comme

$$u_0, u_1 \in D((L-M)^2 - (L+M)^2) = D(LM) \cap D(ML),$$

alors, on a

$$\begin{cases} (L+M)^{-1} M e^{tM} u_0 = (L+M)^{-1} e^{tM} M u_0 \\ (L+M)^{-1} L e^{(1-t)L} u_1 = (L+M)^{-1} e^{(1-t)L} L u_1 \end{cases}$$

On applique $(L+M)^2$ à $u_1(t) + u_2(t)$, on obtient

$$\begin{aligned} (L+M)^2 (u_1(t) + u_2(t)) &= - (L+M) e^{tM} (u'(0) + M u_0) \\ &\quad + (L+M) e^{(1-t)L} (u'(1) - L u_1) \\ &\quad + v(t) + (L+M) \int_0^t M^2 e^{(t-s)M} (L+M)^{-2} v(s) ds \\ &\quad + (L+M) \int_t^1 L^2 e^{(s-t)L} (L+M)^{-2} v(s) ds, \end{aligned} \tag{2.3.15}$$

Pour u_3 et u_4 , une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} u_3(t) &= \int_0^t (L+M)^{-1} e^{(t-s)M} (L-M) u'(s) ds \\ &= [(L+M)^{-1} e^{(t-s)M} (L-M) u(s)]_0^t \\ &\quad + \int_0^t (L+M)^{-1} M e^{(t-s)M} (L-M) u(s) ds \\ &= (L+M)^{-1} (L-M) u(t) - (L+M)^{-1} e^{tM} (L-M) u_0 \\ &\quad + \int_0^t (L+M)^{-1} M e^{(t-s)M} (L-M) u(s) ds, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
u_4(t) &= \int_t^1 (L+M)^{-1} e^{(s-t)L} (L-M) u'(s) ds \\
&= \left[(L+M)^{-1} e^{(s-t)L} (L-M) u(s) \right]_t^1 \\
&\quad - \int_t^1 (L+M)^{-1} L e^{(s-t)L} (L-M) u(s) ds \\
&= (L+M)^{-1} e^{(1-t)L} (L-M) u_1 - (L+M)^{-1} (L-M) u(t) \\
&\quad - \int_t^1 (L+M)^{-1} L e^{(s-t)L} (L-M) u(s) ds
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
u_3(t) + u_4(t) &= (L+M)^{-1} (L-M) u(t) - (L+M)^{-1} (L-M) u(t) \\
&\quad - (L+M)^{-1} e^{tM} (L-M) u_0 + (L+M)^{-1} e^{(1-t)L} (L-M) u_1 \\
&\quad + \int_0^t (L+M)^{-1} M e^{(t-s)M} (L-M) u(s) ds \\
&\quad - \int_t^1 (L+M)^{-1} L e^{(s-t)L} (L-M) u(s) ds,
\end{aligned}$$

ici, on a utilisé aussi la continuité des semi-groupes en $s = t$ et

$$(L-M) u(t) \in D(L) \cap D(M).$$

Grâce au point 2. du lemme 2.2.2, on a

$$\begin{aligned}
M(L-M) u(t) &= M(L-M) (L+M)^{-2} (L+M)^2 u(t) \\
L(L-M) u(t) &= L(L-M) (L+M)^{-2} (L+M)^2 u(t).
\end{aligned}$$

En appliquant $(L+M)$ à $(u_3(t) + u_4(t))$, on obtient

$$\begin{aligned}
(L+M)(u_3(t) + u_4(t)) &= -e^{tM} (L-M) u_0 + e^{(1-t)L} (L-M) u_1 \\
&\quad + \int_0^t M e^{(t-s)M} (L-M) (L+M)^{-2} v(s) ds \\
&\quad - \int_t^1 e^{(s-t)L} (L-M) (L+M)^{-2} v(s) ds.
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{cases} M e^{(t-s)M} (L-M) = M e^{(t-s)M} L - M^2 e^{(t-s)M}, \\ L e^{(s-t)L} (L-M) = L^2 e^{(s-t)L} - L e^{(s-t)L} M. \end{cases}$$

On applique encore $(L + M)$, on obtient

$$\begin{aligned}
& (L + M)^2 (u_3(t) + u_4(t)) \\
= & - (L + M) e^{tM} (L - M) u_0 + (L + M) e^{(1-t)L} (L - M) u_1 \\
& + (L + M) \int_0^t M e^{(t-s)M} L (L + M)^{-1} (L + M)^{-1} v(s) ds \\
& + (L + M) \int_t^1 L e^{(s-t)L} M (L + M)^{-1} (L + M)^{-1} v(s) ds \\
& - (L + M) \int_0^t M^2 e^{(t-s)M} (L + M)^{-2} v(s) ds \\
& - (L + M) \int_t^1 L^2 e^{(s-t)L} (L + M)^{-2} v(s) ds
\end{aligned} \tag{2.3.16}$$

En appliquant, aussi $(L + M)$ à $(u_5(t) + u_6(t))$, on trouve

$$\begin{aligned}
& (L + M) (u_5(t) + u_6(t)) \\
= & \frac{1}{4} \int_0^t e^{(t-s)M} (L - M)^2 (L + M)^{-2} v(s) ds - \frac{1}{4} \int_0^t e^{(t-s)M} v(s) ds \\
& + \frac{1}{4} \int_t^1 e^{(s-t)L} (L - M)^2 (L + M)^{-2} v(s) ds - \frac{1}{4} \int_t^1 e^{(s-t)L} v(s) ds
\end{aligned}$$

d'après le lemme 2.2.3, on a

$$\begin{aligned}
& (L + M) (u_5(t) + u_6(t)) \\
= & \frac{1}{4} \int_0^t e^{(t-s)M} \{T_{L,M} + I - 4M (L + M)^{-1} L (L + M)^{-1}\} v(s) ds \\
& + \frac{1}{4} \int_t^1 e^{(s-t)L} \{T_{L,M} + I - 4L (L + M)^{-1} M (L + M)^{-1}\} v(s) ds \\
& - \frac{1}{4} \int_0^t e^{(t-s)M} v(s) ds - \frac{1}{4} \int_t^1 e^{(s-t)L} v(s) ds
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
& (L + M)^2 (u_5(t) + u_6(t)) \\
= & - (L + M) \int_0^t M e^{(t-s)M} (L + M)^{-1} L (L + M)^{-1} v(s) ds \\
& + \frac{1}{4} (L + M) \int_0^t e^{(t-s)M} T_{L,M} v(s) ds \\
& - (L + M) \int_t^1 L e^{(s-t)L} (L + M)^{-1} M (L + M)^{-1} v(s) ds \\
& + \frac{1}{4} (L + M) \int_t^1 e^{(s-t)L} T_{L,M} v(s) ds
\end{aligned} \tag{2.3.17}$$

Ensuite, en utilisant (2.3.15), (2.3.16) et (2.3.17), on a

$$\begin{aligned}
& (L + M)^2 \varphi(t) \\
= & v(t) - (L + M) e^{tM} (u'(0) + Lu_0) + (L + M)^{(1-t)L} (u'(1) - Mu_1) \\
& + (L + M) \int_0^t M e^{(t-s)M} L (L + M)^{-1} (L + M)^{-1} v(s) ds \\
& + (L + M) \int_t^1 L e^{(s-t)L} M (L + M)^{-1} (L + M)^{-1} v(s) ds \\
& - (L + M) \int_0^t M e^{(t-s)M} (L + M)^{-1} L (L + M)^{-1} v(s) ds \\
& - (L + M) \int_t^1 L e^{(s-t)L} (L + M)^{-1} M (L + M)^{-1} v(s) ds \\
& + \frac{1}{4} (L + M) \int_0^t e^{(t-s)M} T_{L,M} v(s) ds + \frac{1}{4} (L + M) \int_t^1 e^{(s-t)L} T_{L,M} v(s) ds
\end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned}
& (L + M)^2 \varphi(t) \\
= & v(t) - (L + M) e^{tM} (u'(0) + Lu_0) + (L + M) e^{(1-t)L} (u'(1) - Mu_1) \\
& + (L + M) \int_0^t M e^{(t-s)M} [L, (L + M)^{-1}] (L + M)^{-1} v(s) ds \\
& + (L + M) \int_t^1 L e^{(s-t)L} [M, (L + M)^{-1}] (L + M)^{-1} v(s) ds \\
& + \frac{1}{4} (L + M) \int_0^t e^{(t-s)M} T_{L,M} v(s) ds + \frac{1}{4} (L + M) \int_t^1 e^{(s-t)L} T_{L,M} v(s) ds
\end{aligned}$$

et d'après le lemme 2.2.3 point 5., on obtient l'équation intégrale suivante

$$\begin{aligned}
& (L + M)^2 \varphi(t) \\
= & v(t) + \frac{1}{4} (L + M) \int_0^t e^{(t-s)M} C_{L,M} v(s) ds - \frac{1}{4} (L + M) \int_t^1 e^{(s-t)L} C_{L,M} v(s) ds \\
& - (L + M) e^{tM} (u'(0) + Lu_0) + (L + M) e^{(1-t)L} (u'(1) - Mu_1)
\end{aligned} \tag{2.3.18}$$

On note que (2.3.18) pour $t = 0$ et $t = 1$ donne

$$\begin{aligned}
\int_0^1 e^{sL} f(s) ds &= -u'(0) + e^L u'(1) + Mu_0 - e^L Mu_1 - \frac{1}{4} \int_0^1 e^{sL} C_{L,M} v(s) ds \\
\int_0^1 e^{(1-s)M} f(s) ds &= u'(1) - e^M u'(0) + Lu_1 - e^M Lu_0 + \frac{1}{4} \int_0^1 e^{(1-s)M} C_{L,M} v(s) ds
\end{aligned}$$

On prend maintenant l'expression de ψ défini par (2.3.13). On obtient l'équation intégrale

suivante :

$$\begin{aligned}
& (L + M)^2 \psi(t) \\
= & - (L + M) e^{tM} (I - e^L e^M)^{-1} (-u'(0) + e^L u'(1) + M u_0 - e^L M u_1) \\
& + (L + M) e^{tM} (I - e^L e^M)^{-1} e^L (u'(1) - e^M u'(0) + L u_1 - e^M L u_0) \\
& - (L + M) e^{(1-t)L} (I - e^M e^L)^{-1} (u'(1) - e^M u'(0) + L u_1 - e^M L u_0) \\
& + (L + M) e^{(1-t)L} (I - e^M e^L)^{-1} e^M (-u'(0) + e^L u'(1) + M u_0 - e^L M u_1) \\
& + \frac{1}{4} (L + M) e^{tM} (I - e^L e^M)^{-1} \int_0^1 e^{sL} C_{L,M} v(s) ds \\
& + \frac{1}{4} (L + M) e^{tM} (I - e^L e^M)^{-1} e^L \int_0^1 e^{(1-s)M} C_{L,M} v(s) ds \\
& - \frac{1}{4} (L + M) e^{(1-t)L} (I - e^M e^L)^{-1} \int_0^1 e^{(1-s)M} C_{L,M} v(s) ds \\
& - \frac{1}{4} (L + M) e^{(1-t)L} (I - e^M e^L)^{-1} e^M \int_0^1 e^{sL} C_{L,M} v(s) ds
\end{aligned}$$

Cette dernière équation avec (2.3.18) permet de poser

$$v + R(v) = F(f) + D$$

où

$$R(v)(t) = \frac{1}{4} (L + M) \int_0^t e^{(t-s)M} C_{L,M} v(s) ds \quad (2.3.19)$$

$$+ \frac{1}{4} (L + M) \int_t^1 e^{(s-t)L} C_{L,M} v(s) ds \quad (2.3.20)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4} (L + M) e^{tM} (I - e^L e^M)^{-1} \int_0^1 e^{sL} C_{L,M} v(s) ds \\
& + \frac{1}{4} (L + M) e^{tM} (I - e^L e^M)^{-1} e^L \int_0^1 e^{(1-s)M} C_{L,M} v(s) ds \\
& - \frac{1}{4} (L + M) e^{(1-t)L} (I - e^M e^L)^{-1} \int_0^1 e^{(1-s)M} C_{L,M} v(s) ds \\
& - \frac{1}{4} (L + M) e^{(1-t)L} (I - e^M e^L)^{-1} e^M \int_0^1 e^{sL} C_{L,M} v(s) ds,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(f)(t) &= (L+M) \int_0^t e^{(t-s)M} f(s) ds + (L+M) \int_t^1 e^{(s-t)L} f(s) ds \\
&\quad - (L+M) e^{tM} (I - e^L e^M)^{-1} \int_0^1 e^{sL} f(s) ds \\
&\quad + (L+M) e^{tM} (I - e^L e^M)^{-1} e^L \int_0^1 e^{(1-s)M} f(s) ds \\
&\quad - (L+M) e^{(1-t)L} (I - e^M e^L)^{-1} \int_0^1 e^{(1-s)M} f(s) ds \\
&\quad + (L+M) e^{(1-t)L} (I - e^M e^L)^{-1} e^M \int_0^1 e^{sL} f(s) ds,
\end{aligned} \tag{2.3.21}$$

et

$$\begin{aligned}
D(t) &= (L+M) e^{tM} (u'(0) + Lu_0) - (L+M) e^{(1-t)L} (u'(1) - Mu_1) \\
&\quad + (L+M) e^{tM} (I - e^L e^M)^{-1} (-u'(0) + e^L u'(1) + Mu_0 - e^L Mu_1) \\
&\quad - (L+M) e^{tM} (I - e^L e^M)^{-1} e^L (u'(1) - e^M u'(0) + Lu_1 - e^M Lu_0) \\
&\quad + (L+M) e^{(1-t)L} (I - e^M e^L)^{-1} (u'(1) - e^M u'(0) + Lu_1 - e^M Lu_0) \\
&\quad - (L+M) e^{(1-t)L} (I - e^M e^L)^{-1} e^M (-u'(0) + e^L u'(1) + Mu_0 - e^L Mu_1).
\end{aligned}$$

pour tout $t \in [0, 1]$.

En factorisant, D peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned}
D(t) &= (L+M) e^{tM} (I - e^L e^M)^{-1} [(I - e^L e^M) (u'(0) + Lu_0) \\
&\quad - u'(0) + Mu_0 + e^L e^M u'(0) + e^L e^M Lu_0 - e^L (L+M) u_1] \\
&\quad + (L+M) e^{(1-t)L} (I - e^M e^L)^{-1} [-(I - e^M e^L) (u'(1) - Mu_1) \\
&\quad + u'(1) + Lu_1 - e^M e^L u'(1) + e^M e^L Mu_1 - e^M (L+M) u_0],
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
D(t) &= (L+M) e^{tM} (I - e^L e^M)^{-1} ((L+M) u_0 - e^L (L+M) u_1) \\
&\quad + (L+M) e^{(1-t)L} (I - e^M e^L)^{-1} ((L+M) u_1 - e^M (L+M) u_0) \\
&= (L+M) \left(e^{tM} (I - e^L e^M)^{-1} - e^{(1-t)L} (I - e^M e^L)^{-1} e^M \right) (L+M) u_0 \\
&\quad + (L+M) \left(e^{(1-t)L} (I - e^M e^L)^{-1} - e^{tM} (I - e^L e^M)^{-1} e^L \right) (L+M) u_1.
\end{aligned} \tag{2.3.22}$$

Finalement, si u est une solution stricte du problème (2.1.1) satisfaisant la propriété (2.1.11)

alors

$$v = (L+M)^2 u$$

vérifie l'équation intégrale

$$v + R(v) = F(f) + D$$

où R , $F(f)$ et D sont données par (2.3.19), (2.3.21) et (2.3.22).

Remarque. Dans ce travail on a supposé que L et M dépend du paramètre spectrale ω alors les opérateurs F , R et D dépendent aussi de ω pour cela on va écrire $F = F_\omega$; $R := R_\omega$ et $D := D_\omega$.

Le but est de trouver pour $\omega \geq \omega^*$ (ω^* donné tel que $\omega^* \geq \omega_0$) un sous-espace Y_ω de $C^\theta([0, 1]; X)$ tel que

1. $F_\omega(f) + D_\omega \in Y_\omega$ sous quelques hypothèses sur les données $u_0, u_1, f(0), f(1)$.
2. $I + R_\omega$ est inversible dans Y_ω .

Dans ce cas, on peut déduire que s'il existe une solution stricte de notre problème satisfaisant la propriété (2.1.11), alors u est uniquement déterminée par la représentation

$$u = (L_\omega + M_\omega)^{-2} \{ (I + R_\omega)^{-1} (F_\omega(f) + D_\omega) \} \quad (2.3.23)$$

2.4 Régularité maximale

L'étude de la solution (2.3.23) nécessite les propositions suivantes.

Proposition 2.4.1 Soit Q un générateur infinitésimal de semi-groupe analytique sur X , ($e^{\xi Q}$), non nécessairement continu en 0.

1. Soient $\theta \in]0, 1[$ et $\varphi \in X$. Alors, les deux assertions suivantes sont équivalentes.
 - a. $e^{\cdot Q} \varphi \in C^\theta([0, 1]; X)$.
 - b. $\varphi \in (X, D(Q))_{\theta, \infty}$.
2. Soient $\theta \in]0, 1[$ et $g \in C^\theta([0, 1]; X)$. On pose

$$w_1(t) = \int_0^t e^{(t-s)Q} g(s) ds, \quad t \in [0, 1]$$

Alors $w_1 \in C^\theta([0, 1]; X)$ et il existe $K > 0$, tel que

$$\|w_1\|_{C^\theta([0, 1]; X)} \leq K \|g\|_{C^\theta([0, 1]; X)}.$$

3. Soient $\theta \in]0, 1[$ et $g \in C^\theta([0, 1]; X)$. On pose

$$w_2(t) = \int_0^t e^{(t-s)Q} (g(s) - g(0)) ds, \quad t \in [0, 1]$$

Alors $w_2 \in C^{1, \theta}([0, 1]; X) \cap C^\theta([0, 1]; D(Q))$.

4. Soient $\theta \in]0, 1[$, $g \in C^\theta([0, 1]; X)$ et $\varphi \in X$. On pose

$$w_3(t) = e^{tQ} \varphi + \int_0^t e^{(t-s)Q} g(s) ds, \quad t \in [0, 1]$$

Alors, les deux assertions suivantes sont équivalentes.

- a. $w_3 \in C^{1,\theta}([0, 1]; X) \cap C^\theta([0, 1]; D(Q))$,
b. $\varphi \in D(Q)$ et $g(0) + Q\varphi \in (X, D(Q))_{\theta, \infty}$.
5. Soient $\theta \in]0, 1[$, $g \in C^\theta([0, 1]; X)$. Alors

$$\begin{cases} Q \int_0^1 e^{sQ} (g(s) - g(0)) ds \in (X, D(Q))_{\theta, \infty}, \\ Q \int_0^1 e^{(1-s)Q} (g(s) - g(1)) ds \in (X, D(Q))_{\theta, \infty} \end{cases}$$

Preuve. Pour le premier et le deuxième points voir Sinestrari [17] (le théorème 3.1 page 39 et le théorème 3.2 page 40). Le point 3. est obtenu en appliquant la théorie des sommes de Da Prato-Grisvard [4].

Remarque 2.4.1 Une preuve simple de ces résultats est donnée par Guidetti [11] (proposition 2.5 p.132, corollaire 2.1 et théorème 2.4, p.136).

On pose pour une fonction g donnée de $[0, 1]$ dans X et pour $t \in [0, 1]$

$$G(g)(t) := \int_0^t e^{(t-s)M_\omega} g(s) ds \quad \text{et} \quad H(g)(t) := \int_t^1 e^{(s-t)L_\omega} g(s) ds.$$

Proposition 2.4.2 On suppose (2.1.2) $\sim$ (2.1.6). Soit $f \in C^\theta([0, 1]; X)$, $\theta \in]0, 1[$. Alors

$$F_\omega(f) + D_\omega \in C^\theta([0, 1]; X),$$

si et seulement si

$$\begin{cases} u_0, u_1 \in D(L_\omega M_\omega) \cap D(M_\omega L_\omega), \\ M_\omega(L_\omega + M_\omega)u_0 + (L_\omega + M_\omega)L_\omega^{-1}f(0) \in (X, D(L_\omega))_{\theta, \infty}, \\ L_\omega(L_\omega + M_\omega)u_1 + (L_\omega + M_\omega)M_\omega^{-1}f(1) \in (X, D(L_\omega))_{\theta, \infty}. \end{cases} \quad (2.4.1)$$

Preuve. En utilisant (2.2.3), (2.2.4), on écrit pour $t \in [0, 1]$

$$F(f)(t) + D(t) = I_1(t) + I_2(t) + I_3(t) + I_4(t) + I_5(t) + I_6(t) + I_7(t) + I_8(t)$$

où

$$\begin{aligned} I_1(t) &= (L + M)G(f)(t) \\ I_2(t) &= (L + M)H(f)(t) \\ I_3(t) &= (L + M)M^{-1}e^{tM}M((L + M)u_0 - H(f)(0)) \\ I_4(t) &= (L + M)M^{-1}e^{tM}Me^L(G(f)(1) - (L + M)u_1) \\ I_5(t) &= (L + M)L^{-1}e^{(1-t)L}L((L + M)u_1 - G(f)(1)) \\ I_6(t) &= (L + M)L^{-1}e^{(1-t)L}Le^M(H(f)(0) - (L + M)u_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_7(t) &= (L + M)M^{-1}e^{tM}Me^Le^M(I - e^Le^M)^{-1} \\ &\quad ((L + M)u_0 - H(f)(0) + e^LG(f)(1) - e^L(L + M)u_1) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} I_8(t) &= (L+M)L^{-1}e^{(1-t)L}Le^Me^L(I-e^Le^M)^{-1} \\ &\quad ((L+M)u_1 - G(f)(1) + e^MH(f)(0) - e^M(L+M)u_0). \end{aligned}$$

On rappelle que

$$(L+M)M^{-1}, (L+M)L^{-1} \in \mathcal{L}(X) \text{ et } f \in C^\theta([0,1];X), \theta \in]0,1[$$

alors pour tout $t \in [0,1]$,

$$G(f)(t) \in D(M), \quad H(f)(t) \in D(L)$$

Donc

$$\begin{aligned} I_1(t) &= (L+M)M^{-1}M \int_0^t e^{(t-s)M}(f(s) - f(t))ds \\ &\quad + (L+M)M^{-1}M \int_0^t e^{(t-s)M}f(t)ds \\ &= (L+M)M^{-1} \int_0^t Me^{(t-s)M}(f(s) - f(t))ds - (L+M)M^{-1}f(t) \\ &\quad + (L+M)M^{-1}e^{tM}(f(t) - f(0)) + (L+M)M^{-1}e^{tM}f(0) \\ &= I_{1,1} + I_{1,2} + I_{1,3} + I_{1,4} \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} I_2(t) &= (L+M)L^{-1}L \int_t^1 e^{(s-t)L}(f(s) - f(t))ds \\ &\quad + (L+M)L^{-1}L \int_t^1 e^{(s-t)L}f(t)ds \\ &= (L+M)L^{-1} \int_t^1 Le^{(s-t)L}(f(s) - f(t))ds - (L+M)L^{-1}f(t) \\ &\quad + (L+M)L^{-1}e^{(1-t)L}(f(t) - f(1)) + (L+M)L^{-1}e^{(1-t)L}f(1) \\ &= I_{2,1} + I_{2,2} + I_{2,3} + I_{2,4}. \end{aligned}$$

Il est clair que

$$I_{1,2}, I_{1,3}, I_{2,2}, I_{2,3} \in C^\theta([0,1];X).$$

D'après la proposition 2.4.1 point 5., on déduit que

$$I_{1,1}, I_{2,1} \in C^\theta([0,1];X)$$

Pour I_3 et I_5 , on utilise

$$\begin{aligned} LH(f)(0) &= \int_0^1 Le^{sL}(f(s) - f(0))ds + e^Lf(0) - f(0) \\ MG(f)(1) &= \int_0^1 Me^{(1-s)M}(f(s) - f(1))ds + e^Mf(1) - f(1) \end{aligned} \tag{2.4.2}$$

ainsi

$$\begin{aligned}
I_3(t) &= -(L+M) M^{-1} e^{tM} M L^{-1} \int_0^1 L e^{sL} (f(s) - f(0)) ds \\
&\quad - (L+M) M^{-1} e^{tM} M L^{-1} e^L f(0) \\
&\quad + (L+M) M^{-1} e^{tM} (M(L+M) u_0 + M L^{-1} f(0)) \\
&= K_1(t) + K_2(t) + K_3(t)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
I_5(t) &= -(L+M) L^{-1} e^{(1-t)L} L M^{-1} \int_0^1 M e^{(1-s)M} (f(s) - f(1)) ds \\
&\quad - (L+M) L^{-1} e^{(1-t)L} L M^{-1} e^M f(1) \\
&\quad + (L+M) L^{-1} e^{(1-t)L} (L(L+M) u_1 + L M^{-1} f(1)) \\
&= K_4(t) + K_5(t) + K_6(t).
\end{aligned}$$

Grâce à (2.2.3), (2.2.4) et la proposition 2.4.1 point 5, on a

$$\begin{aligned}
M L^{-1} \int_0^1 L e^{sL} (f(s) - f(0)) ds &\in (X, D(L))_{\theta, \infty} \\
L M^{-1} \int_0^1 M e^{(1-s)M} (f(s) - f(1)) ds &\in (X, D(M))_{\theta, \infty}
\end{aligned}$$

dont on déduit que K_1 et $K_4 \in C^\theta([0, 1]; X)$ selon la proposition 2.4.1 point 1. En utilisant encore (2.2.3), (2.2.4), on a

$$M L^{-1} e^L f(0) \in (X, D(L))_{\theta, \infty}$$

$$L M^{-1} e^M f(1) \in (X, D(L))_{\theta, \infty}$$

donc K_2 et $K_5 \in C^\theta([0, 1]; X)$.

En vertu de (2.2.3), (2.2.4) et de la proposition 2.4.1 point 1, il est clair que

$$I_4, I_6, I_7, I_8 \in C^\theta([0, 1]; X).$$

On pose

$$\begin{aligned}
\Lambda &:= I_{1,1} + I_{1,2} + I_{1,3} + I_{1,1} + I_{2,2} + I_{2,3} + K_1 \\
&\quad + K_2 + K_4 + K_5 + I_4 + I_6 + I_7 + I_8.
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
F(f)(t) + D(t) &= \Lambda + (I_4 + K_3) + (I_{2,4} + K_6) \\
&= \Lambda + (L+M) M^{-1} e^{tM} (M(L+M) u_0 + (L+M) L^{-1} f(0)) \\
&\quad + (L+M) L^{-1} e^{(1-t)L} (L(L+M) u_1 + (L+M) M^{-1} f(1))
\end{aligned}$$

L'étude précédente montre que $\Lambda \in C^\theta([0, 1]; X)$, de plus

$$\begin{aligned} & (L + M) M^{-1} e^{tM} (M (L + M) u_0 + (L + M) L^{-1} f(0)) \\ & + (L + M) L^{-1} e^{(1-t)L} (L (L + M) u_1 + (L + M) M^{-1} f(1)) \end{aligned}$$

est dans $C^\theta([0, 1]; X)$ si et seulement si (2.4.1) est satisfaite. On obtient ainsi le résultat. On pose pour $\omega \geq \omega_0$

$$\begin{aligned} C_{L_\omega, M_\omega}^\theta([0, 1]; X) & : = \left\{ v \in C^\theta([0, 1]; X) : (L_\omega - M_\omega) L_\omega^{-1} C_{L_\omega, M_\omega} v(0) \in (X, D(L_\omega))_{\theta, \infty} \right. \\ & \left. \text{et } (L_\omega - M_\omega) M_\omega^{-1} C_{L_\omega, M_\omega} v(1) \in (X, D(L_\omega))_{\theta, \infty} \right\}, \end{aligned}$$

Or $(L_\omega - M_\omega) L_\omega^{-1}$, $(L_\omega - M_\omega) M_\omega^{-1}$ et $C_{L_\omega, M_\omega} \in \mathcal{L}(X)$. Ainsi, il est clair que $C_{L, M}^\theta([0, 1]; X)$ est un espace de Banach complexe.

Proposition 2.4.3 *On suppose (2.1.2) $\sim$ (2.1.9). Soit $\theta \in]0, 1[$. Alors*

1. $R_\omega(v) \in C^\theta([0, 1]; X)$ si et seulement si $v \in C_{L_\omega, M_\omega}^\theta([0, 1]; X)$,
2. $R_\omega(v) \in C_{L_\omega, M_\omega}^\theta([0, 1]; X)$ si et seulement si $v \in C_{L_\omega, M_\omega}^\theta([0, 1]; X)$,
3. $R_\omega(v) \in \mathcal{L}(C_{L_\omega, M_\omega}^\theta([0, 1]; X))$,
4. Il existe un $\omega^* \geq \omega_0$ tel que pour tout $\omega \geq \omega^*$

$$\|R_\omega\|_{\mathcal{L}(C_{L_\omega, M_\omega}^\theta([0, 1]; X))} < 1$$

Ainsi $I + R_\omega$ est inversible dans $\mathcal{L}(C_{L_\omega, M_\omega}^\theta([0, 1]; X))$ pour $\omega \geq \omega^*$.

Preuve. On note $L_\omega = L$ et $M_\omega = M$. Soit $v \in C_{L, M}^\theta([0, 1]; X)$. $C_{L, M} \in \mathcal{L}(X)$, donc $C_{L, M} v \in C^\theta([0, 1]; X)$.

On effectue une analyse similaire à celle de la démonstration de la proposition 2.4.2. En utilisant le lemme 2.2.4, on écrit pour $t \in [0, 1]$

$$4R(v)(t) = (I)(t) + (II)(t) + (III)(t) + (IV)(t) + (V)(t) + (VI)(t) + (VII)(t) + (VIII)(t)$$

où

$$\begin{aligned} (I)(t) &= (L + M) M^{-1} M G(C_{L, M} v)(t) \\ (II)(t) &= -(L + M) L^{-1} L H(C_{L, M} v)(t) \\ (III)(t) &= (L + M) M^{-1} e^{tM} M L^{-1} L H(C_{L, M} v)(0) \\ (IV)(t) &= (L + M) M^{-1} e^{tM} M L^{-1} L e^L G(C_{L, M} v)(1) \\ (V)(t) &= -(L + M) L^{-1} e^{(1-t)L} L M^{-1} M G(C_{L, M} v)(1) \\ (VI)(t) &= -(L + M) L^{-1} e^{(1-t)L} L M^{-1} e^M M L^{-1} L H(C_{L, M} v)(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (VII)(t) &= (L + M) M^{-1} e^{tM} M L^{-1} L e^L e^M (I - e^L e^M)^{-1} \\ &\quad (H(C_{L, M} v)(0) + e^L G(C_{L, M} v)(1)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (VIII)(t) &= -(L+M)L^{-1}e^{(1-t)L}LM^{-1}Me^Me^L(I-e^Me^L)^{-1} \\ &\quad (G(C_{L,M}v)(1) + e^MH(C_{L,M}v)(0)) \end{aligned}$$

Alors, pour (I) et (II) on a

$$\begin{aligned} (I)(t) &= (L+M)M^{-1}M \int_0^t e^{(t-s)M}(C_{L,M}v(s) - C_{L,M}v(t))ds \\ &\quad + (L+M)M^{-1}M \int_0^t e^{(t-s)M}C_{L,M}v(t)ds \\ &= (L+M)M^{-1} \int_0^t Me^{(t-s)M}(C_{L,M}v(s) - C_{L,M}v(t))ds - (L+M)M^{-1}C_{L,M}v(t) \\ &\quad + (L+M)M^{-1}e^{tM}(C_{L,M}v(t) - C_{L,M}v(0)) + (L+M)M^{-1}e^{tM}C_{L,M}v(0) \\ &= I_1(t) + I_2(t) + I_3(t) + I_4(t) \end{aligned}$$

de même

$$\begin{aligned} (II)(t) &= -(L+M)L^{-1}L \int_t^1 e^{(s-t)L}(C_{L,M}v(s) - C_{L,M}v(t))ds \\ &\quad - (L+M)L^{-1}L \int_t^1 e^{(s-t)L}C_{L,M}v(t)ds \\ &= -(L+M)L^{-1} \int_t^1 Le^{(s-t)L}(C_{L,M}v(s) - C_{L,M}v(t))ds \\ &\quad + (L+M)L^{-1}C_{L,M}v(t) \\ &\quad - (L+M)L^{-1}e^{(1-t)L}(C_{L,M}v(t) - C_{L,M}v(1)) \\ &\quad - (L+M)L^{-1}e^{(1-t)L}C_{L,M}v(1) \\ &= J_1(t) + J_2(t) + J_3(t) + J_4(t) \end{aligned}$$

Il est clair que

$$I_2, I_3, J_2, J_3 \in C^\theta([0, 1]; X).$$

et $I_1, J_1 \in C^\theta([0, 1]; X)$ par la proposition 2.4.1 point 5.

Pour (III) et (V) on a

$$\begin{aligned} (III)(t) &= (L+M)M^{-1}e^{tM}ML^{-1} \int_0^1 Le^{sL}(C_{L,M}v(s) - C_{L,M}v(0))ds \\ &\quad + (L+M)M^{-1}e^{tM}ML^{-1}e^LC_{L,M}v(0) \\ &\quad - (L+M)M^{-1}e^{tM}ML^{-1}C_{L,M}v(0) \\ &= K_1 + K_2 + K_3 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (V)(t) &= -(L+M)L^{-1}e^{(1-t)L}LM^{-1} \int_0^1 Me^{(1-s)M}(C_{L,M}v(s) - C_{L,M}v(1))ds \\ &\quad - (L+M)L^{-1}e^{(1-t)L}LM^{-1}e^MC_{L,M}v(1) \\ &\quad + (L+M)L^{-1}e^{(1-t)L}LM^{-1}C_{L,M}v(1) \\ &= K_4 + K_5 + K_6 \end{aligned}$$

Grâce à (2.2.3), (2.2.4) et la proposition 2.4.1 point 5, on a

$$ML^{-1} \int_0^1 Le^{sL}(f(s) - f(0))ds \in (X, D(L))_{\theta, \infty}$$

$$LM^{-1} \int_0^1 M e^{(1-s)M} (f(s) - f(1)) ds \in (X, D(M))_{\theta, \infty}$$

dont on déduit K_1 et $K_4 \in C^\theta([0, 1]; X)$ grâce à la proposition 2.4.1 point 1. En utilisant encore (2.2.3), (2.2.4) on a

$$ML^{-1}e^L C_{L,M}v(0), \quad LM^{-1}e^M C_{L,M}v(1) \in (X, D(L))_{\theta, \infty}$$

donc K_2 et $K_5 \in C^\theta([0, 1]; X)$ grâce à la proposition 2.4.1 point 1. En vertu de (2.2.3), (2.2.4) et la proposition 2.4.1 point 1, il est clair que

$$(IV), (VI), (VII), (VIII) \in C^\theta([0, 1]; X).$$

On pose

$$\begin{aligned} \Lambda : &= I_1(t) + I_2(t) + I_3(t) + J_1(t) + J_2(t) + J_3(t) + K_1 \\ &+ K_2 + K_4 + K_5 + (IV) + (VI) + (VII) + (VIII) \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} 4R(v)(t) &= \Lambda + (I_4 + K_3) + (J_4 + K_6) \\ &= \Lambda + (L + M) M^{-1} e^{tM} (L - M) L^{-1} C_{L,M}v(0) \\ &\quad + (L + M) L^{-1} e^{(1-t)L} (L - M) M^{-1} C_{L,M}v(1) \end{aligned}$$

L'étude précédente montre que $\Lambda \in C^\theta([0, 1]; X)$, de plus

$$\begin{aligned} &(L + M) M^{-1} e^{tM} (L - M) L^{-1} C_{L,M}v(0) \\ &+ (L + M) L^{-1} e^{(1-t)L} (L - M) M^{-1} C_{L,M}v(1) \end{aligned}$$

est dans $C^\theta([0, 1]; X)$ si et seulement si

$$\begin{cases} (L - M) L^{-1} C_{L,M}v(0) (X, D(L))_{\theta, \infty} \\ (L - M) M^{-1} C_{L,M}v(1) (X, D(L))_{\theta, \infty} \end{cases}$$

donc si et seulement si $v \in C_{L,M}^\theta([0, 1]; X)$. De plus, on a

$$\begin{aligned} R(v)(0) &= -\frac{1}{4} (L + M) H(C_{L,M}v)(0) + \frac{1}{4} (L + M) (I - e^L e^M)^{-1} H(C_{L,M}v)(0) \\ &\quad + \frac{1}{4} (L + M) (I - e^L e^M)^{-1} e^L G(C_{L,M}v)(1) \\ &\quad - \frac{1}{4} (L + M) e^L (I - e^M e^L)^{-1} G(C_{L,M}v)(1) \\ &\quad - \frac{1}{4} (L + M) e^L (I - e^M e^L)^{-1} e^M H(C_{L,M}v)(0) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} R(v)(0) &= -\frac{1}{4} (L + M) \left(I - (I - e^L e^M)^{-1} + e^L (I - e^M e^L)^{-1} e^M \right) H(C_{L,M}v)(0) \\ &\quad - \frac{1}{4} (L + M) \left(e^L (I - e^M e^L)^{-1} - (I - e^L e^M)^{-1} e^L \right) G(C_{L,M}v)(1), \end{aligned}$$

mais

$$\begin{aligned}
& I - (I - e^L e^M)^{-1} + e^L (I - e^M e^L)^{-1} e^M \\
&= (I - e^L e^M)^{-1} \left((I - e^L e^M) - I - (I - e^L e^M) e^L (I - e^M e^L)^{-1} e^M \right) \\
&= (I - e^L e^M)^{-1} e^L \left(-I + (I - e^M e^L)^{-1} - e^M e^L (I - e^M e^L)^{-1} \right) e^M \\
&= (I - e^L e^M)^{-1} e^L \left(-I + (I - e^M e^L) (I - e^M e^L)^{-1} \right) e^M
\end{aligned}$$

d'où

$$I - (I - e^L e^M)^{-1} + e^L (I - e^M e^L)^{-1} e^M = 0, \quad (2.4.3)$$

et

$$\begin{aligned}
& e^L (I - e^M e^L)^{-1} - (I - e^L e^M)^{-1} e^L \\
&= (I - e^L e^M)^{-1} \left((I - e^L e^M) e^L (I - e^M e^L)^{-1} - e^L \right) \\
&= (I - e^L e^M)^{-1} e^L \left((I - e^M e^L)^{-1} - e^M e^L (I - e^M e^L)^{-1} - I \right) \\
&= (I - e^L e^M)^{-1} e^L \left((I - e^M e^L) (I - e^M e^L)^{-1} - I \right)
\end{aligned}$$

d'où

$$e^L (I - e^M e^L)^{-1} - (I - e^L e^M)^{-1} e^L = 0 \quad (2.4.4)$$

donc

$$R(v)(0) = 0 \quad (2.4.5)$$

De même

$$R(v)(1) = 0. \quad (2.4.6)$$

Ainsi,

$$R(v) \in C_{L,M}^\theta([0,1]; X) \text{ si et seulement si } v \in C_{L,M}^\theta([0,1]; X)$$

et R est un opérateur linéaire de $C_{L,M}^\theta([0,1]; X)$ dans lui même. Par la proposition 2.4.1, point 2 et 4. et par l'hypothèse (2.1.9) on a pour tout $\omega \geq \omega_0$:

$$\begin{aligned}
\|R_\omega(v)\|_{C_{L\omega, M\omega}^\theta([0,1]; X)} &\leq C \|C_{L\omega, M\omega}\|_{\mathcal{L}(X)} \|v\|_{C_{L\omega, M\omega}^\theta([0,1]; X)} \\
&\leq C \chi(\omega) \|v\|_{C_{L\omega, M\omega}^\theta([0,1]; X)}
\end{aligned}$$

or $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \chi(\omega) = 0$, donc il existe un $\omega^* \geq \omega_0$ tel que pour tout $\omega \geq \omega^*$

$$\|R_\omega\|_{\mathcal{L}(C_{L\omega, M\omega}^\theta([0,1]; X))} < 1$$

Ainsi $I + R_\omega$ est inversible dans $\mathcal{L}(C_{L\omega, M\omega}^\theta([0,1]; X))$ pour $\omega \geq \omega^*$.

Remarque. Ici on a considéré R_ω dans $C_{L\omega, M\omega}^\theta([0,1]; X)$ puisque $I + R_\omega$ n'est pas inversible dans $C^\theta([0,1]; X)$ ou dans $C([0,1]; X)$.

Proposition 2.4.4 *On suppose (2.1.2) $\sim$ (2.1.8). Soit $f \in C^\theta([0,1]; X)$, $\theta \in]0,1[$. Alors*

$$F_\omega(f) + D_\omega \in C_{L\omega, M\omega}^\theta([0,1]; X)$$

si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0, u_1 \in D(L_\omega M_\omega) \cap D(M_\omega L_\omega), \\ M_\omega (L_\omega + M_\omega) u_0 + (L_\omega + M_\omega) L_\omega^{-1} f(0) \in (X, D(L_\omega))_{\theta, \infty}, \\ L_\omega (L_\omega + M_\omega) u_1 + (L_\omega + M_\omega) M_\omega^{-1} f(1) \in (X, D(L_\omega))_{\theta, \infty}. \\ (L_\omega - M_\omega) L_\omega^{-1} C_{L, M} (L_\omega + M_\omega)^2 u_0 \in (X, D(L))_{\theta, \infty} \\ (L_\omega - M_\omega) M_\omega^{-1} C_{L, M} (L_\omega + M_\omega)^2 u_1 \in (X, D(L))_{\theta, \infty} \end{array} \right.$$

Preuve. On note $L_\omega = L$, $M_\omega = M$. Par la proposition 2.4.2, il suffit de calculer $F(f) + D$ en 0 et en 1.

$$\begin{aligned} (F(f) + D)(0) &= (L + M) H(f)(0) - (L + M) (I - e^L e^M)^{-1} H(f)(0) \\ &\quad + (L + M) (I - e^L e^M)^{-1} e^L G(f)(1) \\ &\quad - (L + M) e^L (I - e^M e^L)^{-1} G(f)(1) \\ &\quad + (L + M) e^L (I - e^M e^L)^{-1} e^M H(f)(0) \\ &\quad + (L + M) (I - e^L e^M)^{-1} ((L + M) u_0 - e^L (L + M) u_1) \\ &\quad - (L + M) e^L (I - e^M e^L)^{-1} ((L + M) u_1 - e^M (L + M) u_0) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} (F(f) + D)(0) &= (L + M) \left(I - (I - e^L e^M)^{-1} + e^L (I - e^M e^L)^{-1} e^M \right) H(f)(0) \\ &= (L + M) \left((I - e^L e^M)^{-1} e^L - e^L (I - e^M e^L)^{-1} \right) G(f)(1) \\ &\quad + (L + M) \left((I - e^L e^M)^{-1} - e^L (I - e^M e^L)^{-1} e^M \right) (L + M) u_0 \\ &\quad + (L + M) \left(e^L (I - e^M e^L)^{-1} - (I - e^L e^M)^{-1} e^L \right) (L + M) u_1 \end{aligned}$$

en vertu de (2.4.3) et (2.4.4)

$$(F(f) + D)(0) = (L + M) I (L + M) u_0 = (L + M)^2 u_0 \quad (2.4.7)$$

de même

$$(F(f) + D)(1) = (L + M)^2 u_1 \quad (2.4.8)$$

On obtient ainsi le résultat.

On peut alors, énoncer le résultat fondamental suivant.

Théorème 2.4.1 *On suppose (2.1.2) $\sim$ (2.1.9). Soit $\theta \in]0, 1[$. Alors, il existe $\omega^* \geq \omega_0$ tel que pour tout $\omega \geq \omega^*$, les deux assertions suivantes sont équivalentes.*

1. Le problème (2.1.1) admet une unique solution stricte u satisfaisant

$$u'', (L_\omega - M_\omega) u', ((L_\omega - M_\omega)^2 - (L_\omega + M_\omega)^2) u \in C^\theta([0, 1]; X)$$

$$(L_\omega + M_\omega)^2 u \in C_{L_\omega, M_\omega}^\theta([0, 1]; X)$$

2. $f \in C^\theta([0, 1]; X)$ et

$$\begin{cases} u_0, u_1 \in D(L_\omega M_\omega) \cap D(M_\omega L_\omega), \\ M_\omega(L_\omega + M_\omega)u_0 + (L_\omega + M_\omega)L_\omega^{-1}f(0) \in (X, D(L_\omega))_{\theta, \infty}, \\ L_\omega(L_\omega + M_\omega)u_1 + (L_\omega + M_\omega)M_\omega^{-1}f(1) \in (X, D(L_\omega))_{\theta, \infty}. \\ (L_\omega - M_\omega)L_\omega^{-1}C_{L,M}(L_\omega + M_\omega)^2u_0(X, D(L))_{\theta, \infty} \\ (L_\omega - M_\omega)M_\omega^{-1}C_{L,M}(L_\omega + M_\omega)^2u_1(X, D(L))_{\theta, \infty} \end{cases} \quad (2.4.9)$$

Preuve. Soit $\omega > 0$ fixé tel que $\omega \geq \omega^*$. On note $L_\omega = L$, $M_\omega = M$.

Tout d'abord, on prouve que 2 implique 1. Pour cela on suppose (2.4.9) et $f \in C^\theta([0, 1]; X)$, on veut prouver que u défini par (2.3.23) est l'unique solution stricte de (2.1.1).

On pose

$$v := (I + R)^{-1}(F(f) + D),$$

alors

$$v = F(f) + D - R(v),$$

d'où

$$u = (L + M)^{-2}(F(f) + D) - (L + M)^{-2}R(v). \quad (2.4.10)$$

On note que $(L + M)^2 u = v \in C_{L,M}^\theta([0, 1]; X)$.

De plus, en utilisant (2.3.19), (2.3.21) et (2.3.22) dans (2.4.10), on obtient pour tout $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} u(t) &= (L + M)^{-1}G(f)(t) + (L + M)^{-1}H(f)(t) \\ &\quad - (L + M)^{-1}e^{tM}(I - e^L e^M)^{-1}H(f)(0) \\ &\quad + (L + M)^{-1}e^{tM}(I - e^L e^M)^{-1}e^L G(f)(1) \\ &\quad - (L + M)^{-1}e^{(1-t)L}(I - e^M e^L)^{-1}G(f)(1) \\ &\quad + (L + M)^{-1}e^{(1-t)L}(I - e^M e^L)^{-1}e^M H(f)(0) \\ &\quad + (L + M)^{-1}e^{tM}(I - e^L e^M)^{-1}((L + M)u_0 - e^L(L + M)u_1) \\ &\quad + (L + M)^{-1}e^{(1-t)L}(I - e^M e^L)^{-1}((L + M)u_1 - e^M(L + M)u_0) \\ &\quad - \frac{1}{4}(L + M)^{-1}G(C_{L,M}v)(t) + \frac{1}{4}(L + M)^{-1}H(C_{L,M}v)(t) \\ &\quad - \frac{1}{4}(L + M)^{-1}e^{tM}(I - e^L e^M)^{-1}H(C_{L,M}v)(0) \\ &\quad - \frac{1}{4}(L + M)^{-1}e^{tM}(I - e^L e^M)^{-1}e^L G(C_{L,M}v)(1) \\ &\quad + \frac{1}{4}(L + M)^{-1}e^{(1-t)L}(I - e^M e^L)^{-1}G(C_{L,M}v)(1) \\ &\quad + \frac{1}{4}(L + M)^{-1}e^{(1-t)L}(I - e^M e^L)^{-1}e^M H(C_{L,M}v)(0) \end{aligned}$$

que l'on peut écrire

$$\begin{aligned} u(t) &= (L + M)^{-1}G(f)(t) + (L + M)^{-1}H(f)(t) \\ &\quad - \frac{1}{4}(L + M)^{-1}G(C_{L,M}v)(t) + \frac{1}{4}(L + M)^{-1}H(C_{L,M}v)(t) \\ &\quad + (L + M)^{-1}e^{tM}f_0 + (L + M)^{-1}e^{(1-t)L}f_1, \end{aligned} \quad (2.4.11)$$

où

$$\begin{aligned} f_0 = & (I - e^L e^M)^{-1} (-H(f)(0) + e^L G(f)(1) + (L + M) u_0 \\ & - e^L (L + M) u_1 - \frac{1}{4} H(C_{L,M} v)(0) - \frac{1}{4} e^L G(C_{L,M} v)(1)) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f_1 = & (I - e^M e^L)^{-1} (-G(f)(1) + e^M H(f)(0) + (L + M) u_1 \\ & - e^M (L + M) u_0 + \frac{1}{4} G(C_{L,M} v)(1) + \frac{1}{4} e^M H(C_{L,M} v)(0)) \end{aligned}$$

On a donc pour tout $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} v(t) = & (L + M) G(f)(t) + (L + M) H(f)(t) - \frac{1}{4} (L + M) G(C_{L,M} v)(t) \quad (2.4.12) \\ & + \frac{1}{4} (L + M) H(C_{L,M} v)(t) + (L + M) e^{tM} f_0 + (L + M) e^{(1-t)L} f_1 \end{aligned}$$

D'après la proposition 2.4.1 point 4.,

$$u \in C^{1,\theta}([0, 1], X) \cap C^\theta([0, 1], D(L))$$

si et seulement si

$$\begin{cases} f_0, f_1 \in D(M) = D(L) \\ f(0) - \frac{1}{4} C_{L,M} v(0) + M f_0 \in (X, D(L))_{\theta, \infty} = (X, D(M))_{\theta, \infty} \\ f(1) + \frac{1}{4} C_{L,M} v(1) + L f_1 \in (X, D(L))_{\theta, \infty} \end{cases} \quad (2.4.13)$$

Or, en écrivant

$$\begin{aligned} f_0 = & M^{-1} M (I - e^L e^M)^{-1} L^{-1} L (-H(f)(0) + e^L G(f)(1) + (L + M) u_0 \\ & - e^L (L + M) u_1 - \frac{1}{4} H(C_{L,M} v)(0) - \frac{1}{4} e^L G(C_{L,M} v)(1)) \end{aligned}$$

il est clair que $f_0 \in D(M) = D(L)$, grâce au lemme 2.2.4 et

$$\begin{aligned} & f(0) - \frac{1}{4} C_{L,M} v(0) + M f_0 \\ = & f(0) - \frac{1}{4} C_{L,M} v(0) + M L^{-1} \left(-L H(f)(0) + L (L + M) u_0 - \frac{1}{4} L H(C_{L,M} v)(0) \right) \\ & + M L^{-1} \left(H(f)(0) - (L + M) u_0 + \frac{1}{4} + H(C_{L,M} v)(0) \right) \\ & + M L^{-1} L e^L \left(G(f)(1) - (L + M) u_1 - \frac{1}{4} G(C_{L,M} v)(1) \right) + M L^{-1} L e^L e^M f_0 \end{aligned}$$

En utilisant (2.4.2), on obtient

$$\begin{aligned}
& f(0) - \frac{1}{4}C_{L,M}v(0) + Mf_0 \\
= & M(L+M)u_0 + (L+M)L^{-1}f(0) - \frac{1}{4}(L+M)L^{-1}C_{L,M}v(0) \\
& - L^{-1}\left(f(0) - \frac{1}{4}C_{L,M}v(0)\right) - ML^{-1}\left(\int_0^1 Le^{sL}(f(s) - f(0))ds + e^L f(0)\right) \\
& - \frac{1}{4}ML^{-1}\left(\int_0^1 Le^{sL}(C_{L,M}v(s) - C_{L,M}v(0))ds + e^L C_{L,M}v(s)\right) \\
& + ML^{-1}\left(H(f)(0) - (L+M)u_0 + \frac{1}{4}H(C_{L,M}v)(0)\right) \\
& + ML^{-1}Le^L\left(G(f)(1) - (L+M)u_1 - \frac{1}{4}G(C_{L,M}v)(1)\right) + ML^{-1}Le^L e^M f_0
\end{aligned}$$

D'après la proposition 2.4.1. point 5 et (2.4.9) et (2.2.3), (2.2.4) on a

$$f(0) - \frac{1}{4}C_{L,M}v(0) + Mf_0 \in (X, D(M))_{\theta, \infty}$$

de même

$$f(1) + C_{L,M}v(1) + Lf_1 \in (X, D(L))_{\theta, \infty}$$

Ainsi

$$u \in C^{1, \theta}([0, 1], X) \cap C^\theta([0, 1], D((L+M)^2))$$

Ensuite, on obtient pour tout $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned}
(L+M)u'(t) &= MG(f)(t) - LH(f)(t) - \frac{1}{4}MG(C_{L,M}v)(t) - \frac{1}{4}LH(C_{L,M}v)(t) \\
&\quad - \frac{1}{2}(C_{L,M}v)t + Me^{tM}f_0 - Le^{(1-t)L}f_1
\end{aligned}$$

donc pour tout $t \in [0, 1]$, on a $u'(t) \in D(L+M) = D(L-M)$. De plus, en insérant (2.4.12) dans cette dernière formule, et en utilisant le lemme 2.2.3 point 7., on obtient pour tout $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned}
u'(t) &= M(L+M)^{-1}G(f)(t) - L(L+M)^{-1}H(f)(t) \\
&\quad - \frac{1}{4}M(L+M)^{-1}G(C_{L,M}v)(t) - \frac{1}{4}L(L+M)^{-1}H(C_{L,M}v)(t) \\
&\quad + M(L+M)^{-1}e^{tM}f_0 - L(L+M)^{-1}e^{(1-t)L}f_1
\end{aligned} \tag{2.4.14}$$

en vertu de (2.4.13) et de la proposition 2.4.1, point 4.,

$$u' \in C^{1, \theta}([0, 1], X) \cap C^\theta([0, 1], D(L-M))$$

On a pour tout $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} u''(t) &= f(t) + M(L+M)^{-1}MG(f)(t) + L(L+M)^{-1}LH(f)(t) \\ &\quad - \frac{1}{4}M(L+M)^{-1}MG(C_{L,M}v)(t) + \frac{1}{4}L(L+M)^{-1}LH(C_{L,M}v)(t) \\ &\quad + \frac{1}{4}(L-M)(L+M)^{-1}C_{L,M}v(t) \\ &\quad + M(L+M)^{-1}Me^{tM}f_0 + L(L+M)^{-1}Le^{(1-t)L}f_1 \end{aligned}$$

puis, on injecte (2.4.12) dans cette dernière formule, on a

$$\begin{aligned} u''(t) &= f(t) + S_1G(f)(t) + T_1H(f)(t) - \frac{1}{4}S_1G(C_{L,M}v)(t) \\ &\quad + \frac{1}{4}T_1H(C_{L,M}v)(t) + S_1e^{tM}f_0 + T_1e^{(1-t)L}f_1. \end{aligned} \quad (2.4.15)$$

où

$$\begin{aligned} S_1 &:= M(L+M)^{-1}M + \frac{1}{4}(L-M)(L+M)^{-1}C_{L,M}(L+M) \\ &= \frac{1}{2}M - \frac{1}{2}(L-M)M(L+M)^{-1} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} T_1 &= L(L+M)^{-1}L + \frac{1}{4}(L-M)(L+M)^{-1}C_{L,M}(L+M) \\ &= \frac{1}{2}L + \frac{1}{2}(L-M)L(L+M)^{-1} \end{aligned}$$

d'après le point 8. du lemme 2.2.3.

En utilisant (2.4.11), (2.4.14) et (2.4.15), on obtient pour tout $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} &u''(t) + (L-M)u'(t) + \frac{1}{4}((L-M)^2 - (L+M)^2)u(t) \\ &= f(t) + S_2G(f)(t) + T_2H(f)(t) - \frac{1}{4}S_2G(C_{L,M}v)(t) + \frac{1}{4}T_2H(C_{L,M}v)(t) \\ &\quad + S_2e^{tM}f_0 + T_2e^{(1-t)L}f_1. \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} S_2 &:= \frac{1}{2}M - \frac{1}{2}(L-M)M(L+M)^{-1} + (L-M)M(L+M)^{-1} \\ &\quad + \frac{1}{4}((L-M)^2 - (L+M)^2)(L+M)^{-1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} T_2 &:= \frac{1}{2}L + \frac{1}{2}(L-M)L(L+M)^{-1} - (L-M)L(L+M)^{-1} \\ &\quad + \frac{1}{4}((L-M)^2 - (L+M)^2)(L+M)^{-1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

d'après le point 9 du lemme 2.2.3. On obtient enfin

$$u''(t) + (L - M)u'(t) + \frac{1}{4}((L - M)^2 - (L + M)^2)u(t) = f(t).$$

De plus, par (2.4.6), (2.4.5), (2.4.8) et (2.4.7)

$$u(0) = (L + M)^{-2}(F(f) + D)(0) - (L + M)^{-2}R(v)(0) = u_0$$

$$u(1) = (L + M)^{-2}(F(f) + D)(1) - (L + M)^{-2}R(v)(1) = u_1$$

Donc, u défini par (2.3.23) est une solution stricte du problème (2.1.1) vérifiant la propriété de la régularité maximale (2.1.11) et $(L + M)^2 u \in C_{L,M}^\theta([0, 1]; X)$.

Remarque 2.4.2 *Par les propositions précédentes, on peut dire que s'il existe une solution stricte de (2.1.1) satisfaisant (2.1.11), alors elle s'écrit sous la forme (2.3.23) pour $\omega \geq \omega^*$. On en déduit l'unicité de la solution stricte et pour tout $t \in [0, 1]$,*

$$u(t) \in D((L_\omega + M_\omega)^2),$$

ce qui implique, grâce à l'hypothèse (2.1.4), que $u(t) \in D((L_\omega - M_\omega)^2)$.

Inversement, on suppose le point 1. On a

$$u''(t) + (L - M)u'(t) + \frac{1}{4}((L - M)^2 - (L + M)^2)u(t) = f(t),$$

ce qui donne $f \in C^\theta([0, 1]; X)$. D'autre part, u est uniquement déterminée par la formule (2.3.23) et

$$(L + M)^2 u = (I + R)^{-1}(F(f) + D) \in C_{L,M}^\theta([0, 1]; X),$$

en appliquant $(I + R) \in \mathcal{L}(C_{L,M}^\theta([0, 1]; X))$, voir proposition 2.4.3, il vient

$$F(f) + D \in C_{L,M}^\theta([0, 1]; X),$$

et par la proposition 2.4.4, on déduit que (2.4.9) est satisfaite.

Chapitre 3

Application

3.1 Position du problème et formulation abstraite

On considère le problème aux limites d'ordre quatre suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, y) + a(y) \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t}(t, y) - \omega^\alpha \frac{\partial u}{\partial t}(t, y) - \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(t, y) - a(y) \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(t, y) \\ - a'(y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t, y) - \frac{1}{2} a''(y) \frac{\partial u}{\partial y}(t, y) + \omega^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t, y) = f(t, y), \quad (t, y) \in [0, 1] \times]c, d[\\ u(t, c) = u(t, d) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t, c) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t, d) = 0, \quad t \in [0, 1] \\ u(0, y) = u_0(y), \quad u(1, y) = u_1(y), \quad y \in]c, d[\end{array} \right.$$

pour $\omega > 0$ assez grand, $\alpha > 0$,

$$a \in C^2([c, d]), \quad a(c) = a(d) = 0, \quad (3.1.1)$$

et

$$f \in C^\theta([0, 1]; L^p(c, d)), \quad \text{avec } 0 < \theta < 1 \text{ et } 1 < p < \infty.$$

Posons $X = L^p(c, d)$. On utilise les notations vectorielles usuelles

$$u(t, y) := u(t)(y), \quad f(t, y) := f(t)(y),$$

pour écrire le problème précédent sous la forme abstraite suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} u''(t) + (L_\omega - M_\omega) u'(t) + \frac{1}{4} ((L_\omega - M_\omega)^2 - (L_\omega + M_\omega)^2) u(t) = f(t), \quad t \in [0, 1] \\ u(0) = u_0 \\ u(1) = u_1 \end{array} \right. \quad (3.1.2)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} D(L_\omega) = D(M_\omega) = \{\varphi \in W^{2,p}(c, d), \varphi(c) = \varphi(d) = 0\} \\ L_\omega \varphi(y) = \varphi''(y) + a(y) \varphi'(y) - \omega^\alpha \varphi(y), \quad y \in]c, d[\\ M_\omega \varphi(y) = \varphi''(y), \quad y \in]c, d[. \end{array} \right.$$

On remarque que $L_\omega = L_0 - \omega^\alpha I$ et $M_\omega = M_0$ où

$$\begin{aligned} D(L_0) &= D(M_0) = \{\varphi \in W^{2,p}(c, d), \varphi(c) = \varphi(d) = 0\} \\ L_0 \varphi(y) &= \varphi''(y) + a(y) \varphi'(y), \quad M_0 \varphi(y) = \varphi''(y), \quad y \in]c, d[. \end{aligned}$$

3.2 Etude spectrale et application du théorème 2.4.1

Montrons que les opérateurs L_ω et M_ω vérifient les hypothèses (2.1.2) $\sim$ (2.1.9).

Par un calcul direct on montre que l'opérateur M_w vérifie l'hypothèse (2.1.2). En effet, la résolvante de M_w est la solution de l'équation spectrale suivante

$$M_0\varphi - z\varphi = g$$

c'est à dire la solution du problème suivant

$$\begin{cases} \varphi''(y) - z\varphi(y) = g(y), & y \in [c, d] \\ \varphi(c) = \varphi(d) = 0. \end{cases}$$

La solution de l'équation homogène est de la forme

$$\varphi(y) = C_1 e^{\sqrt{z}y} + C_2 e^{-\sqrt{z}y},$$

ici, on suppose que la racine carrée à la détermination analytique définie par $\operatorname{Re} \sqrt{z} > 0$.

Pour l'équation non homogène, on utilise la méthode de variation des constantes, c'est-à-dire, on cherche des solutions sous la forme

$$\varphi(y) = C_1(y) e^{\sqrt{z}y} + C_2(y) e^{-\sqrt{z}y}$$

tel que

$$\begin{cases} C_1'(y) e^{\sqrt{z}y} + C_2'(y) e^{-\sqrt{z}y} = 0 \\ \sqrt{z}C_1'(y) e^{\sqrt{z}y} - \sqrt{z}C_2'(y) e^{-\sqrt{z}y} = g(y). \end{cases} \quad (3.2.1)$$

Le déterminant de ce système est

$$D = \begin{vmatrix} e^{\sqrt{z}y} & e^{-\sqrt{z}y} \\ \sqrt{z}e^{\sqrt{z}y} & -\sqrt{z}e^{\sqrt{z}y} \end{vmatrix} = -2\sqrt{z} \neq 0$$

Par conséquent, le système (3.2.1) admet une unique solution donnée par

$$C_1'(y) = D^{-1} \begin{vmatrix} 0 & e^{-\sqrt{z}y} \\ g & -\sqrt{z}e^{\sqrt{z}y} \end{vmatrix} = -D^{-1}g(y) e^{-\sqrt{z}y}$$

et

$$C_2'(y) = D^{-1} \begin{vmatrix} e^{\sqrt{z}y} & 0 \\ \sqrt{z}e^{\sqrt{z}y} & g \end{vmatrix} = D^{-1}g(y) e^{\sqrt{z}y}.$$

Ainsi,

$$\begin{cases} C_1(y) = \frac{1}{2\sqrt{z}} \int_c^y e^{-\sqrt{z}s} g(s) ds + \xi_0 \\ C_2(y) = \frac{1}{2\sqrt{z}} \int_y^d e^{\sqrt{z}s} g(s) ds + \xi_1 \end{cases}$$

Par conséquent,

$$\varphi(y) = e^{\sqrt{z}y}\xi_0 + e^{-\sqrt{z}y}\xi_1 + \frac{1}{2\sqrt{z}} \int_c^y e^{\sqrt{z}(y-s)} g(s) ds + \frac{1}{2\sqrt{z}} \int_y^d e^{\sqrt{z}(s-y)} g(s) ds.$$

On utilise maintenant, les conditions aux limites $\varphi(c) = \varphi(d) = 0$, on obtient le système suivant

$$\begin{cases} e^{\sqrt{z}c}\xi_0 + e^{-\sqrt{z}c}\xi_1 = -\frac{1}{2\sqrt{z}} \int_c^d e^{\sqrt{z}(s-c)} g(s) ds \\ e^{\sqrt{z}d}\xi_0 + e^{-\sqrt{z}d}\xi_1 = -\frac{1}{2\sqrt{z}} \int_c^d e^{\sqrt{z}(d-s)} g(s) ds \end{cases}$$

son déterminant est $e^{\sqrt{z}(c-d)} - e^{\sqrt{z}(d-c)} = 2 \sinh \sqrt{z}(c-d)$, alors

$$\begin{cases} C_1 = -\frac{e^{-\sqrt{z}c}}{2 \sinh \sqrt{z}(c-d) \sqrt{z}} \int_c^d \sinh \sqrt{z}(s-d) g(s) ds \\ C_2 = -\frac{e^{\sqrt{z}d}}{2 \sinh \sqrt{z}(c-d) \sqrt{z}} \int_c^d \sinh \sqrt{z}(c-s) g(s) ds \end{cases}$$

donc l'unique solution est

$$\begin{aligned} \varphi(y) &= \frac{1}{2\sqrt{z}} \int_c^y e^{\sqrt{z}(y-s)} g(s) ds + \frac{1}{2\sqrt{z}} \int_y^d e^{\sqrt{z}(s-y)} g(s) ds \\ &\quad - \frac{1}{2 \sinh \sqrt{z}(c-d) \sqrt{z}} \int_c^d \sinh \sqrt{z}(s-d) e^{\sqrt{z}(y-c)} g(s) ds \\ &\quad - \frac{1}{2 \sinh \sqrt{z}(c-d) \sqrt{z}} \int_c^d \sinh \sqrt{z}(c-s) e^{\sqrt{z}(d-y)} g(s) ds \end{aligned}$$

Après des simplifications, on trouve que

$$(M_0 - z)^{-1} g = \varphi(y) = \int_c^d K_{\sqrt{z}}(y, s) g(s) ds,$$

où

$$K_{\sqrt{z}}(y, s) = \begin{cases} \frac{\sinh \sqrt{z}(y-d) \sinh \sqrt{z}(c-s)}{\sqrt{z} \sinh \sqrt{z}(c-d)} & \text{si } c \leq s \leq y \\ \frac{\sinh \sqrt{z}(s-d) \sinh \sqrt{z}(c-y)}{\sqrt{z} \sinh \sqrt{z}(c-d)} & \text{si } y \leq s \leq d \end{cases}$$

avec $\operatorname{Re} \sqrt{z} > 0$ et d'après le lemme de Schur et la symétrie du noyau, on a

$$\|(M_0 - z)^{-1} g\| \leq \left(\sup_{s \in [c, d]} \int_c^d |K_{\sqrt{z}}(y, s)| ds \right) \|g\|$$

où

$$\begin{aligned}
& \int_c^d |K_{\sqrt{z}}(y, s)| ds \\
& \leq \frac{\cosh \operatorname{Re} \sqrt{z}(y-d)}{|z|^{\frac{1}{2}} |\sinh \sqrt{z}(c-d)|} \int_c^d \cosh \operatorname{Re} \sqrt{z}(c-s) ds \\
& \quad + \frac{\cosh \operatorname{Re} \sqrt{z}(c-y)}{|z|^{\frac{1}{2}} |\sinh \sqrt{z}(c-d)|} \int_c^d \cosh \operatorname{Re} \sqrt{z}(s-d) ds \\
& \leq \frac{\cosh \operatorname{Re} \sqrt{z}(y-d) \sinh \operatorname{Re} \sqrt{z}(c-y) + \cosh \operatorname{Re} \sqrt{z}(c-y) \sinh \operatorname{Re} \sqrt{z}(y-d)}{|z|^{\frac{1}{2}} |\sinh \sqrt{z}(c-d)|} \\
& \leq \frac{\sinh \operatorname{Re} \sqrt{z}(c-d)}{|z|^{\frac{1}{2}} |\sinh \sqrt{z}(c-d)|} \leq \frac{1}{|z| |1 - e^{-2\sqrt{z}(c-d)}|} \leq \frac{C}{|z|}.
\end{aligned}$$

De plus, l'opérateur M_0 est inversible. On résout l'équation spectrale $M_0\varphi = g$ qui est équivalente à

$$\begin{cases} \varphi''(y) = g(y), & y \in]c, d[\\ \varphi(c) = \varphi(d) = 0 \end{cases}$$

où $\varphi \in W^{2,p}(c, d)$, on obtient alors que pour presque tout $y \in]c, d[$

$$\begin{aligned}
M_0^{-1}\psi(y) &= M_\omega^{-1}\psi(y) = \varphi(y) \\
&= \frac{y-d}{d-c} \int_c^d t\psi(t) dt + \frac{d(c-y)}{d-c} \int_c^d \psi(t) dt + \int_y^d t\psi(t) dt + y \int_c^d \psi(t) dt.
\end{aligned} \tag{3.2.2}$$

On trouve ainsi que $\rho(M_0) \supset [0, +\infty[$ et

$$\exists C > 0, \forall z \in [0, +\infty[: \|(M_0 - zI)^{-1}\| \leq \frac{C}{1 + |z|}. \tag{3.2.3}$$

– Pour l'opérateur L_ω , en utilisant Lunardi [15], théorème 3.1.3 page 73, on trouve que cet opérateur génère un semi-groupe analytique. De plus, il existe un $\delta > 0$ et $C_0 > 0$ tel que pour tout

$$z \in S_\delta = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg z| \leq \frac{\pi}{2} + \delta \right\}$$

on a

$$\|(L_0 - zI)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C_0}{|z|},$$

dont on déduit que pour tout $\omega > 0$

$$\|(L_\omega - zI)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C_0}{|\omega^\alpha + z|}, \tag{3.2.4}$$

si $|\omega^\alpha + z| \geq |z|$ alors

$$\|(L_\omega - zI)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C_0}{|z|},$$

Sinon $\operatorname{Re} z < 0$ et on a

$$|\omega^\alpha + z| \geq \cos \left(\left| \arg z \right| - \frac{\pi}{2} \right) |z| \geq \cos(\delta) |z|$$

donc il existe $C_1 = \frac{C_0}{\cos \delta} > C_0 > 0$ tel que pour tout $\omega > 0$ et pour tout $z \in S_\delta$

$$\|(L_\omega - zI)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C_1}{|z|}.$$

On introduit les deux opérateurs

$$\begin{cases} D(P) = D(Q) = W^{1,p}(c, d) \\ P\varphi(y) = \varphi'(y), & y \in]c, d[\\ Q\varphi(y) = a(y)\varphi'(y), & y \in]c, d[\end{cases}$$

Ainsi l'opérateur L_ω est écrit sous la forme

$$L_\omega = M_0 + Q - \omega^\alpha I.$$

Selon Engel-Nagel [5], exemple 2.2 page 169, l'opérateur P est M_0 -borné et grâce à (3.1.1), on déduit que Q est M_0 -borné. De plus $\omega^\alpha \in \rho(M_0)$, donc il s'ensuit du lemme 2.6 de [5] p 173, que $\omega^\alpha \in \rho(M_0 + Q)$, autrement dit L_ω est inversible dans $\mathcal{L}(X)$.

Pour les domaines, et en vertu de (3.1.1), on a

$$\begin{aligned} D(M_\omega L_\omega) &= \{\varphi \in D(L_\omega), L_\omega \varphi \in D(M_\omega)\} \\ &= \{\varphi \in W^{2,p}(c, d) : \varphi(\xi) = 0, \varphi'' + a\varphi' - \omega^\alpha \varphi \in W^{2,p}(c, d) \\ &\quad \text{avec } \varphi''(\xi) + a\varphi'(\xi) - \omega^\alpha \varphi(\xi) = 0, \xi \in \{c, d\}\} \\ &= \{\varphi \in W^{3,p}(c, d), \varphi'' + a\varphi' \in W^{2,p}(c, d), \varphi''(c) = \varphi''(d) = \varphi(c) = \varphi(d) = 0\} \\ &= \{\varphi \in W^{3,p}(c, d), \varphi'' \in W^{2,p}(c, d), \varphi''(c) = \varphi''(d) = \varphi(c) = \varphi(d) = 0\} \\ &= \{\varphi \in W^{4,p}(c, d), \varphi''(c) = \varphi''(d) = \varphi(c) = \varphi(d) = 0\}, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{cases} D(M_\omega L_\omega) = \{\varphi \in W^{4,p}(c, d), \varphi''(c) = \varphi''(d) = \varphi(c) = \varphi(d) = 0\} \\ (M_\omega L_\omega) \varphi(y) = \varphi^{(4)}(y) + a(y)\varphi^{(3)}(y) + 2a'(y)\varphi''(y) + a''(y)\varphi'(y) - \omega^\alpha \varphi''(y), \quad y \in]c, d[\end{cases}$$

De même,

$$\begin{cases} D(L_\omega M_\omega) = \{\varphi \in W^{4,p}(c, d), \varphi''(c) = \varphi''(d) = \varphi(c) = \varphi(d) = 0\} \\ (L_\omega M_\omega) \varphi(y) = \varphi^{(4)}(y) + a(y)\varphi^{(3)}(y) - \omega^\alpha \varphi''(y), \quad y \in (c, d), \end{cases}$$

et comme $D(L_\omega M_\omega) = D(M_\omega L_\omega)$, donc la conséquence 5 donne

$$(X, D(L_\omega))_{1+\theta, \infty} = (X, D(M_\omega))_{1+\theta, \infty}.$$

Idem, on trouve

$$\begin{cases} D([M_\omega, L_\omega]) = \{\varphi \in W^{4,p}(c, d), \varphi''(c) = \varphi''(d) = \varphi(c) = \varphi(d) = 0\} \\ [M_\omega, L_\omega] \varphi(y) = 2a'(y)\varphi''(y) + a''(y)\varphi'(y), \quad y \in (c, d), \end{cases}$$

$$\begin{cases} D(L_\omega - M_\omega) = \{\varphi \in W^{2,p}(c, d), \varphi(c) = \varphi(d) = 0\} \\ (L_\omega - M_\omega)\varphi(y) = a(y)\varphi'(y) - \omega^\alpha\varphi(y), \quad y \in (c, d), \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} D(L_\omega + M_\omega) = \{\varphi \in W^{2,p}(c, d), \varphi(c) = \varphi(d) = 0\} \\ (L_\omega + M_\omega)\varphi(y) = 2\varphi''(y) + a(y)\varphi'(y) - \omega^\alpha\varphi(y), \quad y \in (c, d). \end{cases}$$

Ce qui implique que :

1. $L_\omega - M_\omega$ est fermé,

2. $L_\omega + M_\omega$ est inversible et son inverse est borné (On utilise le même raisonnement que L_ω).

De (3.2.3), (3.2.4), on déduit qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $\omega > 0$

$$\|(L_\omega + M_\omega)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C}{\omega^\alpha}, \quad \|(L_\omega + M_\omega)^{-2}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C}{\omega^{2\alpha}}.$$

– En utilisant (3.1.1), on trouve que

$$\begin{aligned} D((L_\omega + M_\omega)^2) &= \{\varphi \in D((L_\omega + M_\omega)), (L_\omega + M_\omega)\varphi \in D((L_\omega + M_\omega))\} \\ &= \{\varphi \in W^{2,p}(c, d), \varphi(\xi) = 0 \text{ et } 2\varphi'' + a\varphi' - \omega^\alpha\varphi \in W^{2,p}(c, d) \\ &\quad \text{avec } 2\varphi''(\xi) + a(\xi)\varphi'(\xi) - \omega^\alpha\varphi(\xi) = 0, \xi \in \{c, d\}\} \\ &= \{\varphi \in W^{4,p}(c, d), \varphi''(c) = \varphi''(d) = \varphi(c) = \varphi(d) = 0\} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} D((L_\omega - M_\omega)^2) &= \{\varphi \in D((L_\omega - M_\omega)), (L_\omega - M_\omega)\varphi \in D((L_\omega - M_\omega))\} \\ &= \{\varphi \in W^{2,p}(c, d), \varphi(\xi) = 0 \text{ et } a\varphi' - \omega^\alpha\varphi \in W^{2,p}(c, d) \\ &\quad \text{avec } a\varphi'(\xi) - \omega^\alpha\varphi(\xi) = 0, \xi \in \{c, d\}\} \\ &= \{\varphi \in W^{3,p}(c, d), \varphi(c) = \varphi(d) = 0\} \end{aligned}$$

ainsi

$$D((L_\omega + M_\omega)^2) \subset D((L_\omega - M_\omega)^2).$$

– De plus, pour tout $\varphi \in D((L_\omega + M_\omega)^2)$ et pour presque $y \in]c, d[$, on a

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4}((L_\omega - M_\omega)^2 - (L_\omega + M_\omega)^2)\varphi(y) \\ &= \frac{1}{4}((a(y))^2\varphi''(y) - 2\omega^\alpha a(y)\varphi'(y) + a(y)a'(y)\varphi'(y) + \omega^{2\alpha}\varphi(y) \\ &\quad - 4\varphi^{(4)}(y) - 4a(y)\varphi^{(3)}(y) - 4a'(y)\varphi''(y) - 2a''(y)\varphi'(y) + 4\omega^\alpha\varphi''(y) \\ &\quad - (a(y))^2\varphi''(y) + 2\omega^\alpha a(y)\varphi'(y) - a(y)a'(y)\varphi'(y) - \omega^{2\alpha}\varphi(y)) \\ &= -\varphi^{(4)}(y) - a(y)\varphi^{(3)}(y) - a'(y)\varphi''(y) - \frac{1}{2}a''(y)\varphi'(y) + \omega^\alpha\varphi''(y). \end{aligned}$$

– De plus, on a

$$\|(L_0 - zI)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C_0}{|z|},$$

pour tout

$$z \in S_\delta = \left\{z \in \mathbb{C} - \{0\} : |\arg z| \leq \frac{\pi}{2} + \delta\right\},$$

dont on déduit

$$\|(L_\omega - zI)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C_0}{|\omega^\alpha + z|}$$

ainsi la conséquence 3, donne l'inversibilité de $I - e^{L_\omega} e^{M_\omega}$ et $I - e^{M_\omega} e^{L_\omega}$.

– Pour le commutateur, on considère, pour $f \in X = L^p(c, d)$

$$(L_\omega + M_\omega)^{-2} f = g, \quad \text{et} \quad (L_\omega + M_\omega)^{-1} f = \psi$$

alors

$$(L_\omega + M_\omega)^{-1} \psi = g \in D((L_\omega + M_\omega)^2) = D(L_\omega M_\omega) \cap D(M_\omega L_\omega)$$

ainsi

$$\begin{cases} g \in W^{4,p}(c, d) \\ g''(c) = g''(d) = g(c) = g(d) = 0 \\ 2g''(y) + a(y)g'(y) - \omega^\alpha g(y) = \psi(y) \end{cases} \quad (3.2.5)$$

et

$$\{[M_\omega, L_\omega]g\}(y) = 2a'(y)g''(y) + a''(y)g'(y) = 2a'(y)M_0g(y) + a''(y)Pg(y),$$

or P est M_0 -borné et grâce à (3.2.5), on a

$$\begin{aligned} \|[M_\omega, L_\omega]g\| &\leq C(\|M_0g\| + \|Pg\|) \leq C_1(\|M_0g\| + \|g\|) \\ &\leq C_1(\|g''\| + \|g\|) \leq C_2\left(\|\psi\| + \frac{1}{\omega^\alpha}\|\psi\|\right) \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

De plus, $(L_\omega + M_\omega)^{-1} f = \psi$, on déduit

$$\begin{cases} \psi \in W^{2,p}(c, d) \\ \psi(c) = \psi(d) = 0 \\ 2\psi''(y) + a(y)\psi'(y) - \omega^\alpha \psi(y) = f(y) \end{cases}$$

et

$$\|\psi\| \leq \frac{C}{\omega^\alpha} \|f\| \quad (3.2.7)$$

il s'ensuit de (3.2.6) et (3.2.7) que

$$\begin{aligned} \|[M_\omega, L_\omega]g\| &= \|[M_\omega, L_\omega](L_\omega + M_\omega)^{-2} f\| \leq C\left(\frac{1}{\omega^\alpha} + \frac{1}{\omega^{2\alpha}}\right) \|f\| \\ &\leq \frac{2C}{\omega^\gamma} \|f\|. \end{aligned}$$

où

$$\gamma = \begin{cases} 2\alpha & \text{si } 0 < \omega < 1, \\ \alpha & \text{si } \omega \geq 1 \end{cases}.$$

Ainsi, toutes les hypothèses sont satisfaites. On peut alors appliquer le théorème 2.4.1 au problème (3.1.2).

Remarque 3.2.1 Les domaines $D(L_\omega)$ et $D(M_\omega)$ sont obtenus grâce aux conditions aux limites. En effet $u(t) \in D((L_\omega - M_\omega)^2 - (L_\omega + M_\omega)^2)$ pour tout $t \in [0, 1]$ est équivalent à

$$u(t, c) = u(t, d) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t, c) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t, d) = 0, t \in [0, 1] \quad (3.2.8)$$

et $u'(t) \in D(L_\omega - M_\omega)$ pour tout $t \in [0, 1]$ est équivalent à

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, c) = \frac{\partial u}{\partial t}(t, d) = 0, \quad t \in [0, 1]$$

qui découle directement de (3.2.8) puisque pour tout $t \in [0, 1]$ fixé on a :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(t+h, c) - u(t, c)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

de même

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, d) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(t+h, d) - u(t, d)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0.$$

Remarque 3.2.2 On va montrer que l'hypothèse (3.1.1) est nécessaire dans cet exemple. Pour cela, on suppose que $a \in C^2((c, d))$ avec $(a(c), a(d)) \neq (0, 0)$. Alors

$$\begin{aligned} D(M_\omega L_\omega) &= \{\varphi \in D(L_\omega), L_\omega \varphi \in D(M_\omega)\} \\ &= \{\varphi \in W^{2,p}(c, d) : \varphi(\xi) = 0, \varphi'' + a\varphi' - \omega^\alpha \varphi \in W^{2,p}(c, d) \\ &\quad \text{avec } \varphi''(\xi) + a(\xi)\varphi'(\xi) - \omega^\alpha \varphi(\xi) = 0, \xi \in \{c, d\}\} \\ &= \{\varphi \in W^{4,p}(c, d) : \varphi''(c) + a(c)\varphi'(c) = \varphi''(d) + a(d)\varphi'(d) = 0 \\ &\quad \text{et } \varphi(c) = \varphi(d) = 0\} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} D(L_\omega M_\omega) &= \{\varphi \in D(M_\omega), M_\omega \varphi \in D(L_\omega)\} \\ &= \{\varphi \in W^{4,p}(c, d), \varphi''(c) = \varphi''(d) = \varphi(c) = \varphi(d) = 0\} \end{aligned}$$

ainsi $D(M_\omega L_\omega)$ et $D(L_\omega M_\omega)$ sont différents, de plus

$$\begin{aligned} D([M_\omega, L_\omega]) &= \{\varphi \in W^{4,p}(c, d), \varphi''(c) = \varphi''(d) = \varphi(c) = \varphi(d) = 0 \\ &\quad \text{et } a(c)\varphi'(c) = a(d)\varphi'(d) = 0\}. \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} D((L_\omega + M_\omega)^2) &= \{\varphi \in D((L_\omega + M_\omega)), (L_\omega + M_\omega)\varphi \in D((L_\omega + M_\omega))\} \\ &= \{\varphi \in W^{2,p}(c, d), \varphi(\varepsilon) = 0 \text{ et } 2\varphi''(c) + a\varphi' - \omega^\alpha \varphi \in W^{2,p}(c, d) \\ &\quad \text{avec } 2\varphi''(\varepsilon) + a(\varepsilon)\varphi'(\varepsilon) - \omega^\alpha \varphi(\varepsilon) = 0, \varepsilon \in \{c, d\}\} \\ &= \{\varphi \in W^{4,p}(c, d), 2\varphi''(c) + a(c)\varphi'(c) = 2\varphi''(d) + a(d)\varphi'(d) = 0 \\ &\quad \text{et } \varphi(c) = \varphi(d) = 0\} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} D((L_\omega - M_\omega)^2) &= \{\varphi \in D((L_\omega - M_\omega)), (L_\omega - M_\omega)\varphi \in D((L_\omega - M_\omega))\} \\ &= \{\varphi \in W^{2,p}(c, d), \varphi(\varepsilon) = 0 \text{ et } a\varphi' - \omega^\alpha \varphi \in W^{2,p}(c, d) \\ &\quad \text{avec } a(\varepsilon)\varphi'(\varepsilon) - \omega^\alpha \varphi(\varepsilon) = 0, \varepsilon \in \{c, d\}\} \\ &= \{\varphi \in W^{3,p}(c, d), a(c)\varphi'(c) = a(d)\varphi'(d) = \varphi(c) = \varphi(d) = 0\} \end{aligned}$$

ainsi, l'hypothèse (2.1.4) n'est pas satisfaite.

Le domaine d'interpolation $(X, D(L_\omega))_{\theta, \infty}$ est défini dans la proposition suivante.

Proposition 3.2.1 Soient $\theta \in]0, 1[$ et $1 < p < \infty$. Alors

$$\begin{aligned} (L^p(c, d), D(L_\omega))_{\theta, \infty} &= (L^p(c, d), W^{2,p}(c, d))_{\theta, \infty} \\ &= \begin{cases} B_{p, \infty}^{2\theta}([c, d]) & \text{si } 0 < \theta < \frac{1}{2p} \\ B_p^{\frac{1}{2}} & \text{si } \theta = \frac{1}{2p} \\ \{\varphi \in B_{p, \infty}^{2\theta}([c, d]) : \varphi(c) = \varphi(d) = 0\} & \text{si } \frac{1}{2p} < \theta < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Conclusion.

On a vu dans tout ce travail que le paramètre spectral ω joue un rôle très important dans l'étude de la régularité maximale de la solution stricte du problème de Dirichlet non homogène sous l'hypothèse de non commutativité.

Bibliographie

- [1] A.V. Balakrishnan : *Fractional powers of closed operators and the semigroups generated by them. Pacific. J .Math., 19 (1964), pp. 419-437.*
- [2] P.L. Butzer et H. Berners. : *Semisroups of operators and Approximation*, Springer-Verlag, Berlin, 1967.
- [3] G. Da-Prato, Abstarct differenetial equations, maximal regularity and linearization, *Proc. Sympos. Pure Math.*, 45(1)(1986), p.359-370.
- [4] G. Da-Prato and P. Grisvard, Sommes d'opérateurs linéaires et équations différentielles opérationnelles, *J. Math. Pures Appl. (9)*, 54 (1975), 205-387.
- [5] K-J. Engel et R. Nagel, *One parameter semigroups for linear evolution equations*, Grad. Texts Math. 194, Springer, New York, 2000.
- [6] A. Favini, R. Labbas, H. Tanabe and A. Yagi. : *On the solvability of complete abstract differential equations of elliptic type*, *Funkcialaj Ekacioj.* 47 (2004) 205-224.
- [7] A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, H. Tanabe and A. Yagi, *Necessary and sufficient conditions for maximal regularity in the study of elliptic differential equations in Hölder spaces*, *Discrete contin. Dyn. Syst.*, 22(2008), 973-987.
- [8] A. Favini, R. Labbas, S. Maingot and M. Meisner, *Study of complete abstract elliptic differential equations set on the whole line in non commutative cases*, *Appl. Anal.*, 91 (2012), 1495-1510.
- [9] A. Favini, R. Labbas, S. Maingot and M. Meisner, *Boundary Value for Elliptic Differential Equations in Non-Commutative Cases*, *Dix. Contin. Dyn. Sys.* (2012).
- [10] P. Grisvard, *commutativité de deux foncteurs d'interpolation et applications*, *J. Math. Pure Appl. (9)* 45 (1966), p.143-290.
- [11] D. Guidetti, *An introduction to maximal regularity for parabolic problems and interpolation theory with application to an inverse problem*, *International Minicourse-Workshop, Interplay Between C_0 semi-groups and PDEs : theory and application*, Bari\Italy September 22-26, 2003, p.113-146.
- [12] B. H. Haak, M. Haase and P. C. Kunstmann, *Perturbation, interpolation, and maximale regularity*, *Adv. Differential Equations*, 11 (2006), 201-240.
- [13] J. L. Lions and J. Peerte, *Sur une classe d'espaces d'interpolation*, *Inst. Hautes Etude Sci. Publ. Math.*, 19 (1964). 5-68.
- [14] J. L. Lions, *théorèmes de trace et d'interpolation I et II*, *Ann. Sc. Norm super. Pisa, Sci. Fis. Mat. (3)* 13 (1959),p.389'403; et 14 (1960), p. 317-331.

- [15] A. Lunardi, "Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic problems," Birkhäuser Verlag, Basel, 1995.
- [16] Maëils Meisner, Etude unifiée d'équations aux dérivées partielles de type elliptique régis par des équations différentielles à coefficients opérateurs dans un cadre non commutatif : applications concrètes dans les espaces de Hölder et les espaces L_p , thèse de doctorat, université du Havre (2012).
- [17] E. Sinestrari, On the abstract Cauchy problem of parabolic type in spaces of continuous functions, J.Math. Anal. Appl., 107 (1985), 16-66.
- [18] H. Triebel, "Interpolation theory, Functions Spaces, Differential Operators," North-Holland Publishing Co., Amsterdam, New York, 1978.

Résumé

L'objectif de ce travail est l'étude de la régularité maximale de la solution stricte d'une équation différentielle complète du second ordre de type elliptique à coefficients opérateurs dans un cadre non commutatif. Les techniques utilisées reposent sur la théorie du semi-groupe, le calcul fonctionnel de Dunford et principalement sur le travail de Sinestrari.

Mots clés : équation différentielle opérationnelle du second ordre de type elliptique, cadre non commutatif, conditions aux limites, régularité maximale, semi-groupe analytique, calcul fonctionnel de Dunford, espace d'interpolation.