

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abdelhamid Ben Badis de Mostaganem
Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique
Département de Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques



MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques
délivré par

Université de Mostaganem

Spécialité "Analyse Fonctionnelle"

présenté par :

Melle ARROUCHE FATIMA ZOHRA

Introduction aux Semi-groupes

Le jury composé de :

Président:	MEDEGHRI AHMED	Professeur	Université UMAB
Examineur:	ANDASMAS MAAMAR	M.C.A.	Université UMAB
Encadreur:	BOUZIT HAMID	M.C.A.	Université UMAB

Année Universitaire : 2020 / 2021

Remerciements

Louange à dieu qui m'a donné le courage, la puissance, et la patience pour terminer ce modeste travail.

Je tiens à remercier particulièrement Monsieur : BOUZIT Hamid maitre de conférences à l'université de Mostaganem, mon encadreur de m'avoir bien suivi durant la réalisation de mon travail, ainsi que ses conseils, et pour tout son aide, les remarques constructives qui m'ont permis d'améliorer et réaliser l'objectif de ce travail.

Je suis également très honorée que Monsieur : MEDEGHRI Ahmed professeur à l'université de Mostaganem soit le président de jury de mon mémoire.

Mes remerciements s'adressent également à Monsieur: ANDASMAS Maamar maitre de conférence à l'université de Mostaganem soit l'examineur de jury de mon mémoire.

Mes vifs remerciements aussi s'adressent à mes parents et ma belle amie HAJ LARBI Ahlem.

Table des matières

1	Rappels	2
2	Semi-groupes fortement continus	8
1	Semi-groupes uniformément continus	8
2	Semi-groupes fortement continus.	15
3	Le théorème de Hille-Yosida.	26
4	Le théorème de Lumer-Phillips.	38
3	Semi-groupes analytiques.	48
1	Différentiabilité.	48
2	Semi-groupes analytiques.	52

Introduction

Ce manuscrit est extrait des deux premiers chapitres du livre de A. Pazy, intitulé "Semigroups of Linear Operators and Application to Partial Differential Equations". Nous avons traité ici les semi-groupes uniformément bornés, les semi-groupes fortement continus (ou $\mathcal{C}_0$ semi-groupes), les semi-groupes différentiables et les semi-groupes analytiques.

Le but est de bien comprendre la notion des semi-groupes et de suivre, dans les détails, toutes les démonstrations des résultats des notions citées plus haut, tout en donnant, dans le but de rendre la lecture ce manuscrit moins difficile et accessible aux étudiants de master, des détails de démonstrations où l'auteur estime connues les notions de topologie, des opérateurs non bornés et de l'analyse fonctionnelle en général.

Ce mémoire est composé de trois chapitres. Dans le premier, nous donnons des rappels des résultats utiles et utilisés dans la suite à qui nous nous référons pour le confort du lecteur.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude des semi-groupes uniformément bornés et beaucoup plus aux semi-groupes fortement continus. Dans ce chapitre, on trouve les relations reliant les semi-groupes et leurs générateurs infinitésimaux, comme le théorème de Hille-Yosida et le théorème de Lumer-Phillips.

Dans le troisième, on donne des résultats sur les semi-groupes différentiables et les semi-groupes analytiques, et le résultat de prolongement analytique.

Chapitre 1

Rappels

Soient E et F deux espaces de Banach et $A : E \rightarrow F$ un opérateur linéaire.

Définition 1.1 On dit que A est borné s'il existe $c > 0$ tel que

$$\sup_{\|x\|_E \leq 1} \|Ax\|_F \leq c. \quad (1.1)$$

L'inégalité (1.1) est équivalente à

$$\|Ax\|_F \leq c\|x\|_E.$$

On dit aussi que A est continu.

L'ensemble:

$$\{A : E \rightarrow F, A \text{ est continu}\},$$

est un espace vectoriel, noté $\mathcal{L}(E, F)$.

L'application: $A \mapsto \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|Ax\|_F$ est une norme sur $\mathcal{L}(E, F)$. De plus, si F est un espace de Banach alors $\mathcal{L}(E, F)$ l'est aussi.

Si $E = F$ on note $\mathcal{L}(E)$.

Définition 1.2 Un opérateur non borné sur un espace de Banach E est un couple $(D(A), A)$ où $D(A)$ est un sous espace vectoriel de E et A est un opérateur linéaire défini de $D(A)$ dans F . On dit que A un opérateur non borné de domaine $D(A)$. Dans la suite, on suppose que $D(A)$ est dense dans E .

1. Rappels.

Définition 1.3 Soit A et B des opérateurs de domaines respectifs $D(A)$ et $D(B)$. Si $D(A) \subset D(B)$ et $Bx = Ax, \forall x \in D(A)$ on dit que B prolonge A et on note: $B \supseteq A$.

Définition 1.4 Soit $A : D(A) \subset E \rightarrow F$ un opérateur linéaire dans E . On dit que A est fermé si pour toute suite $(x_n)_n \subset D(A)$ vérifiant

$$x_n \rightarrow x \text{ et } Ax_n \rightarrow y,$$

alors:

$$x \in D(A) \text{ et } Ax = y.$$

Définition 1.5 (*les opérateurs fermables*).

On dit qu'un opérateur A est fermable s'il possède une extension fermée. A est dit fermable s'il existe $\overline{A}$, un opérateur linéaire sur E , tel que

$$\overline{G(A)} = G(\overline{A}),$$

dans ce cas $\overline{A}$ est uniquement déterminé, c'est un opérateur fermé appelé la fermeture de A .

Théorème 1.6 (*Graphe fermé*).

Soient E et F deux espaces de Banach et $A : E \rightarrow F$ un opérateur linéaire. Si le graphe de A ,

$$G(A) = \{(x, Ax) \in E \times F : x \in D(A)\}$$

est fermé dans $E \times F$, alors A est continu.

Notation On note par $R(A)$, l'image de A .

Théorème 1.7 Soient E et F deux espaces de Banach, et $A \in \mathcal{L}(E, F)$. S'il existe $\alpha > 0$ tel que:

$$\|Ax\| \geq \alpha\|x\|,$$

alors A est injectif et à une image fermée. De plus: $A : E \rightarrow R(A)$ est un isomorphisme et

$$\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{\alpha}.$$

1. Rappels.

Définition 1.8 (*convergence faible*).

Soit E un espace de Banach et E^* son dual. On dit qu'une suite $(x_n)_n \subset E$ converge faiblement vers x dans E si,

$$\langle f, x_n \rangle_{E^* \times E} \rightarrow \langle f, x \rangle_{E^* \times E}, \quad \forall f \in E^*. \quad (1.2)$$

On note: $x_n \rightharpoonup x$.

Définition 1.9 (*convergence forte*).

Si

$$\|x_n - x\|_E \rightarrow 0,$$

on dit que (x_n) converge fortement dans E et on note $x_n \rightarrow x$.

Proposition 1.10 *Si $x_n \rightarrow x$ alors $x_n \rightharpoonup x$.*

Définition 1.11 Soit (f_n) une suite dans E^* . On dit que (f_n) converge vers f pour la topologie faible étoile si:

$$\langle f_n, x \rangle_{E^* \times E} \rightarrow \langle f, x \rangle_{E^* \times E}, \quad \forall x \in E. \quad (1.3)$$

Théorème 1.12 (*Brezis.*)

La boule unité fermée de tout espace vectoriel est compacte pour la topologie faible étoile.

En particulier, toute suite (f_n) bornée dans E^ , admet une sous-suite qui converge pour la topologie faible étoile.*

Théorème 1.13 *Soit $A : D(A) \subset E \rightarrow F$ un opérateur linéaire. Si $A^{-1} : F \rightarrow D(A)$ est un opérateur borné, alors A est fermé.*

Preuve : Soit $x_n \in D(A)$: $x_n \rightarrow x$ et $y_n = Ax_n \rightarrow y$. Alors

$$x_n = A^{-1}y_n \rightarrow A^{-1}y,$$

car A^{-1} est borné.

Comme $x_n \rightarrow x$ on aura

$$x = A^{-1}y \quad \Rightarrow \quad x \in D(A) \text{ et } Ax = y.$$

1. Rappels.

Théorème 1.14 *Soit $A : D(A) \subset E \rightarrow F$ un opérateur linéaire fermé et Soit $B : E \rightarrow F$ un opérateur linéaire borné alors l'opérateur $A+B : D(A) \rightarrow F$ est fermé.*

Preuve : Soit $x_n \in D(A)$: $x_n \rightarrow x$ et $(A+B)x_n \rightarrow y$. Comme B est borné alors $Bx_n \rightarrow Bx$ et A est fermé alors $x \in D(A)$ et $Ax_n \rightarrow Ax$ alors $x \in D(A+B) = D(A)$ et $y = (A+B)x$.

Théorème 1.15 *(théorème de Hahn-Banach).*

Soit E un espace Banach et F un sous espace vectoriel de E . On a l'équivalence des deux propositions suivantes :

i) $\overline{F} = E$.

ii) $\forall x^* \in E^*$ on a : $x^* = 0$ sur $F \Rightarrow x^* = 0$.

Théorème 1.16 *(théorème de Hahn-Banach, forme analytique. Brezis, [1]).*

Soit $h : E \rightarrow \mathbb{R}$ une application vérifiant :

1. $h(\lambda x) = \lambda h(x), \forall x \in E$ et $\forall \lambda > 0$.

2. $h(x+y) \leq h(x) + h(y), \forall x, y \in E$.

Soit d'autre part, $F \subset E$ un sous-espace vectoriel et soit $g : F \rightarrow \mathbb{R}$ une application linéaire telle que:

$$g(x) \leq h(x), \quad \forall x \in F.$$

Alors il existe une forme linéaire f définie sur E qui prolonge g , c'est-à-dire.

$$g(x) = f(x), \quad \forall x \in F,$$

et telle que

$$f(x) \leq h(x), \quad \forall x \in E.$$

Théorème 1.17 *(L'injection canonique de E dans E^{**} . Brezis, P. 39.*

Soit E un espace de Banach, E^ son dual et E^{**} son bidual. Il existe une*

1. Rappels.

isométrie: $J : E \rightarrow E^{**}$. En particulier, $J(E)$ est un sous espace fermé de E^{**} et $J : E \rightarrow J(E)$ est un isomorphisme isométrique.

Définition 1.18 (*espaces réflexifs. Brezis, page 43.*)

Soit E un espace de Banach et soit J l'injection canonique de E dans E^{**} .

On dit que E est réflexif si $J(E) = E^{**}$. (J est surjectif).

Lorsque E est réflexif on identifie E et E^{**} . (à l'aide de l'isomorphisme J).

Remarque 1.19 Si E est réflexif et (f_n) une suite bornée dans E^* alors elle admet une sous-suite qui converge faiblement dans E^* . i.e,

$$\forall \psi \in E^{**}; \langle \psi, f_n \rangle_{E^{**} \times E^*} \rightarrow \langle \psi, f \rangle_{E^{**} \times E^*}.$$

Définition 1.20 (*L'opérateur adjoint d'un opérateur linéaire non borné. Brezis, page 27.*)

Soit $A : D(A) \subset E \rightarrow F$ un opérateur non borné à domaine $D(A)$ dense dans E . On va définir un opérateur non borné $A^* : D(A^*) \subset F^* \rightarrow E^*$ comme suit. On pose:

$$D(A^*) = \{y^* \in F^*, \exists c > 0 : |\langle y^*, Ax \rangle| \leq c \|x\|_E, \forall x \in D(A)\}.$$

Il est clair que $D(A^*)$ est un sous-espace vectoriel de F^* . On va maintenant définir A^*y^* pour $y^* \in D(A^*)$. Etant donné $y^* \in D(A^*)$ on considère l'application $f : D(A) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par:

$$f(x) = \langle y^*, Ax \rangle_{F^* \times F}, \quad \forall x \in D(A),$$

On a:

$$|f(x)| \leq C \|x\|_E, \quad \forall x \in D(A).$$

Grâce au théorème ?? on sait que f peut être prolongée en une application linéaire: $\tilde{f} : E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\exists c > 0 : |\tilde{f}(x)| \leq c \|x\|_E, \quad \forall x \in E.$$

Par suite $\tilde{f} \in E^*$. On remarquera que le prolongement de f est unique

1. Rappels.

puisque f est continue sur E et que $D(A)$ est dense.

On pose:

$$\begin{aligned} A^* : F^* &\rightarrow E^* \\ y^* &\mapsto \tilde{f} = A^* y^* \end{aligned}$$

Il est clair que A^* est linéaire. L'opérateur $A^* : D(A^*) \subset F^* \rightarrow E^*$ est appelé l'adjoint de A . On a par conséquent la relation fondamentale suivante qui relie A et A^* :

$$\langle y^*, Ax \rangle_{F^* \times F} = \langle A^* y^*, x \rangle_{E^* \times E}, \quad \forall x \in D(A), \quad \forall y^* \in D(A^*).$$

Définition 1.21 (*les fonctions complexes analytiques*).

Une fonction f est dite analytique dans un domaine $\mathfrak{D}$, si

$$\forall z_0 \in \mathfrak{D}, \exists r > 0; \mathfrak{D}_r(z_0) \subset \mathfrak{D}, \exists (a_n)_n \subset \mathbb{C} : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \forall z \in \mathfrak{D}_r(z_0).$$

Chapitre 2

Semi-groupes fortement continus

1 Semi-groupes uniformément continus

Définition 2.1 Soit X un espace de Banach. Une famille $G(t)$, $0 \leq t < \infty$, d'opérateurs linéaires bornés de X dans X est un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur X si

1. $G(0) = I$, (I est l'opérateur identité sur X).
2. $G(t + s) = G(t)G(s)$ pour tous $t, s \geq 0$.

Définition 2.2 Un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés, $G(t)$ est uniformément continu si

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|G(t) - I\| = 0, \quad (2.1)$$

où $\|\cdot\|$ est la norme de $\mathcal{L}(X)$.

On considère l'opérateur linéaire A défini par

$$D(A) = \left\{ x \in X; \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{G(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}, \quad (2.2)$$

et

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{G(t)x - x}{t} \text{ pour } x \in D(A).$$

L'opérateur A est appelé le générateur infinitésimal du semi-groupe $G(t)$, $D(A)$ est le domaine de A .

2. Semigroupes uniformément continus.

Remarque 2.3 Cette section est consacrée à l'étude de semi-groupes uniformément continus d'opérateurs linéaires bornés.

D'après la définition, si $G(t)$ est un semi-groupe uniformément continu d'opérateurs linéaires alors

$$\lim_{s \rightarrow t} \|G(s) - G(t)\| = 0.$$

En effet, soit $h > 0$.

i) Si $s > t$ alors $s = t + h$, on a:

$$\begin{aligned} \|G(s) - G(t)\| &= \|G(t + h) - G(t)\| \\ &\leq \|G(t)\| \|G(h) - I\| \\ &\leq M \|G(h) - I\| \rightarrow 0 \text{ lorsque } h \rightarrow 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

ii) Si $t > s$ alors $t = s + h$, on a:

$$\begin{aligned} \|G(s) - G(t)\| &= \|G(s) - G(s + h)\| \\ &\leq \|G(s)\| \|I - G(h)\| \\ &\leq M \|G(h) - I\| \rightarrow 0 \text{ lorsque } h \rightarrow 0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Conséquence,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} G(s) ds = G(t), \quad \forall t \geq 0. \tag{2.5}$$

En effet,

$$\begin{aligned} \left\| \int_t^{t+h} (G(s) - G(t)) ds \right\| &\leq \int_t^{t+h} \|G(s) - G(t)\| ds \\ &\leq h^{-1} \|G(t)\| \int_0^h \|G(h) - I\| \\ &\leq M\varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Théorème 2.4 *un opérateur linéaire A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu, si et seulement si, A est un opérateur linéaire borné.*

2. Semigroupes uniformément continus.

Preuve : Soit A un opérateur linéaire borné sur X et posons:

$$G(t) = e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}. \quad (2.6)$$

Le membre de droite converge en norme pour tout $t \geq 0$ et définit pour chaque $t \geq 0$, un opérateur linéaire borné $G(t)$.

Il est clair que $G(0) = I$ et avec un simple calcul avec la série des puissances montre que $G(t+s) = G(t).G(s)$. L'estimation des séries des puissances donne:

$$\|G(t) - I\| \leq t\|A\|e^{t\|A\|} \quad \text{et} \quad \left\| \frac{G(t) - I}{t} - A \right\| \leq t\|A\|e^{t\|A\|}.$$

En effet, pour la première on a:

$$\begin{aligned} \|G(t) - I\| &= \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} - I \right\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} \right\| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left\| \frac{(tA)^n}{n!} \right\| \\ &\leq t\|A\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(t\|A\|)^{n-1}}{(n-1)!} \\ &\leq t\|A\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\|A\|)^n}{n!} \\ &\leq t\|A\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\|A\|)^n}{n!} \\ &\leq t\|A\|e^{t\|A\|}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

La deuxième se montre de la même manière.

Ce qui implique que $G(t)$ est un semi-groupe uniformément continu d'opérateurs linéaires bornés sur X . De plus, A est le générateur infinitésimal de $G(t)$.

Réciproquement, soit $G(t)$ un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur X . Fixons $\rho > 0$, assez petit, de sorte que $\|I - \rho^{-1} \int_0^\rho G(s)ds\| < 1$. Ceci

2. Semigroupes uniformément continus.

est possible car:

$$\left\| I - \rho^{-1} \int_0^\rho G(s) ds \right\| \leq \rho^{-1} \int_0^\rho \|I - G(s)\| ds. \quad (2.8)$$

Mais, d'après (??),

$$\exists \rho_0 > 0 \text{ tq : } \|I - G(s)\| < 1, \forall 0 < s < \rho_0.$$

Cela implique que $\rho^{-1} \int_0^\rho G(s) ds$ est inversible, en effet,

$$\rho^{-1} \int_0^\rho G(s) ds = I - \left(I - \rho^{-1} \int_0^\rho G(s) ds \right) \text{ et } \left\| I - \rho^{-1} \int_0^\rho G(s) ds \right\| < 1,$$

et donc $\int_0^\rho G(s) ds$ est inversible. Maintenant,

$$\begin{aligned} h^{-1} (G(h) - I) \int_0^\rho G(s) ds &= h^{-1} \int_0^\rho (G(h) - I) G(s) ds \\ &= h^{-1} \int_0^\rho [G(s+h) - G(s)] ds \\ &= h^{-1} \left(\int_0^\rho G(s+h) ds - \int_0^\rho G(s) ds \right) \\ &= h^{-1} \left(\int_\rho^{\rho+h} G(s) ds - \int_0^h G(s) ds \right). \end{aligned}$$

et donc

$$h^{-1} (G(h) - I) = \left(h^{-1} \int_\rho^{\rho+h} G(s) ds - h^{-1} \int_0^h G(s) ds \right) \left(\int_0^\rho G(s) ds \right)^{-1} \quad (2.9)$$

Lorsque $h \rightarrow 0$, d'après (??), le membre de droite de (??) tend vers l'opérateur linéaire borné

$$(G(\rho) - I) \left(\int_0^\rho G(s) ds \right)^{-1},$$

et donc $h^{-1} (G(h) - I)$ converge en norme et donc fortement vers l'opérateur linéaire borné

$$(G(\rho) - I) \left(\int_0^\rho G(s) ds \right)^{-1},$$

2. Semigroupes uniformément continus.

qui est le générateur infinitésimal de $G(t)$. □

D'après la définition 1.1 il est clair qu'un semi-groupe $G(t)$ a un générateur infinitésimal unique. Si $G(t)$ est uniformément continue, son générateur infinitésimal est un opérateur linéaire borné. D'autre part, tout opérateur linéaire borné A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $G(t)$ uniformément continu. Ce semi-groupe est-il unique? La réponse affirmative à cette question est donnée par le théorème suivant.

Théorème 2.5 *Soit $G(t)$ et $S(t)$ des semi-groupes uniformément continus d'opérateurs linéaires bornés. Si*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{G(t) - I}{t} = A = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t) - I}{t} \quad (2.10)$$

alors $G(t) = S(t)$ pour $t \geq 0$

Preuve : Nous montrerons que, pour $T > 0$ fixé, $G(t) = S(t)$ pour $0 \leq t \leq T$. Puisque les fonctions $t \mapsto \|G(t)\|$ et $t \mapsto \|S(t)\|$ sont continues il existe une constante $C > 0$ telle que $\|G(t)\| \cdot \|S(s)\| \leq C$ pour tous $0 \leq s, t \leq T$. Etant donné $\varepsilon > 0$, il résulte de (??) qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour

$$h^{-1} \|G(h) - S(h)\| < \frac{\varepsilon}{TC} \text{ pour } 0 \leq h \leq \delta, \quad (2.11)$$

car

$$\begin{aligned} h^{-1} \|G(h) - S(h)\| &= \left\| \left[\frac{G(h) - I}{h} - A \right] - \left[\frac{S(h) - I}{h} - A \right] \right\| \\ &\leq \left\| \frac{G(h) - I}{h} - A \right\| + \left\| \frac{S(h) - I}{h} - A \right\|. \end{aligned}$$

2. Semigroupes uniformément continus.

Soit $0 \leq t \leq T$ et choisissons $n \geq 1$ tel que $\frac{t}{n} < \delta$. De la propriété des semi-groupes et de (??) il résulte que

$$\begin{aligned}
\|G(t) - S(t)\| &= \left\| G\left(n\frac{t}{n}\right) - S\left(n\frac{t}{n}\right) \right\| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left\| G\left((n-k)\frac{t}{n}\right) S\left(\frac{kt}{n}\right) - G\left((n-k-1)\frac{t}{n}\right) S\left(\frac{(k+1)t}{n}\right) \right\| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left\| G\left((n-k-1)\frac{t}{n} + \frac{t}{n}\right) S\left(\frac{kt}{n}\right) - G\left((n-k-1)\frac{t}{n}\right) S\left(\frac{kt}{n} + \frac{t}{n}\right) \right\| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left\| G\left((n-k-1)\frac{t}{n}\right) G\left(\frac{t}{n}\right) S\left(\frac{kt}{n}\right) - \right. \\
&\quad \left. G\left((n-k-1)\frac{t}{n}\right) S\left(\frac{kt}{n}\right) S\left(\frac{t}{n}\right) \right\| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left\| G\left((n-k-1)\frac{t}{n}\right) \right\| \left\| G\left(\frac{t}{n}\right) - S\left(\frac{t}{n}\right) \right\| \left\| S\left(\frac{kt}{n}\right) \right\| \\
&\leq C \sum_{k=0}^{n-1} \left\| G\left(\frac{t}{n}\right) - S\left(\frac{t}{n}\right) \right\| \\
&\leq Cn \frac{\varepsilon}{TC} \frac{t}{n} \\
&\leq \varepsilon,
\end{aligned}$$

car $\frac{t}{T} \leq 1$.

Puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire alors $G(t) = S(t)$ pour $0 \leq t \leq T$. $\square$

Corollaire 2.6 *Soit $G(t)$ un semi-groupe uniformément continu d'opérateurs linéaires bornés. Alors:*

1. *Il existe une constante $\omega \geq 0$ telle que $\|G(t)\| \leq e^{\omega t}$.*
2. *Il existe un unique opérateur linéaire borné A tel que $G(t) = e^{tA}$.*
3. *L'opérateur linéaire borné A du point (2) est le générateur infinitésimal de $G(t)$.*

2. Semigroupes uniformément continus.

4. La fonction $t \mapsto G(t)$ est différentiable en norme pour tout $t > 0$ et

$$\frac{dG(t)}{dt} = AG(t) = G(t)A. \quad (2.12)$$

Preuve : Toutes les assertions du corollaire ?? découlent facilement du point (2). Pour la preuve de (2) notons que le générateur infinitésimal de $G(t)$ est un opérateur linéaire borné A . L'opérateur A est aussi le générateur infinitésimal de e^{tA} défini par (??) et donc par le théorème ?? $G(t) = e^{tA}$.

On montre que (2) $\Rightarrow$ (1), on a:

$$\|G(t)\| = \|e^{tA}\| = \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \|A\|^n}{n!} \leq e^{t\|A\|}.$$

(car $\|A^n\| \leq \|A\|^n$). Donc, $\omega = \|A\|$.

On montre que (2) $\Rightarrow$ (3), on a d'après le théorème ?? : A est le générateur infinitésimal de $G(t)$.

On montre que (2) $\Rightarrow$ (4),

$$\frac{dG(t)}{dt} = \frac{d(e^{tA})}{dt} = Ae^{tA} = AG(t) = G(t)A.$$

□

3. Semigroupes fortement continus.

2 Semi-groupes fortement continus.

Tout au long de cette section, X est un espace Banach.

Définition 2.7 Un semi-groupe $G(t)$, $0 \leq t < \infty$, d'opérateurs linéaires bornés sur X est un semi-groupe fortement continu d'opérateurs linéaires bornés si

$$\lim_{t \searrow 0} G(t)x = x \quad \text{pour tout } x \in X. \quad (2.13)$$

Un semi-groupe fortement continu d'opérateurs linéaires bornés sur X sera appelé un semi-groupe de classe C_0 ou simplement un C_0 -semi-groupe.

Théorème 2.8 Soit $G(t)$ un C_0 -semi-groupe. Il existe des constantes $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$ telles que

$$\|G(t)\| \leq Me^{\omega t} \quad \text{pour } 0 \leq t < \infty. \quad (2.14)$$

Preuve : Nous montrons d'abord qu'il existe $\eta > 0$ tel que $\|G(t)\|$ est borné pour $0 \leq t \leq \eta$. Si c'est faux, alors il y a une suite (t_n) satisfaisant

$$t_n \geq 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0 \quad \text{et} \quad \|G(t_n)\| \geq n.$$

Du théorème de la majoration uniforme de Banach Steinhaus, il découle que pour un certain $x \in X$, $\|G(t_n)x\| \geq n$ donc $G(t)x$ n'est pas borné au voisinage de 0, ce qui est contraire à (??). Ainsi, $\|G(t)\| \leq M$ pour $0 \leq t \leq \eta$. De plus, comme $\|G(0)\| = 1$ alors $M \geq 1$.

Etant donné $t > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$, t.q

$$t = n\eta + \delta, \quad \text{avec } 0 \leq \delta < \eta.$$

Par la propriété des semi-groupes on a:

$$\begin{aligned} \|G(t)\| &= \|G(n\eta + \delta)\| = \|G(n\eta).G(\delta)\| \\ &= \|G(\eta)^n G(\delta)\| \leq \|G(\delta)\| \|G(\eta)\|^n \\ &\leq MM^n. \end{aligned}$$

3. Semigroupes fortement continus.

On a:

$$n = \frac{t}{\eta} - \frac{\delta}{\eta} \Rightarrow M^n = M^{\frac{t}{\eta}} M^{-\frac{\delta}{\eta}} \leq M^{\frac{t}{\eta}}. \quad (\text{car } M \geq 1).$$

Alors

$$\begin{aligned} \|G(t)\| &\leq M.M^n \leq M.M^{\frac{t}{\eta}} \\ &\leq M.M^{\frac{t}{\eta} \ln M} \leq M e^{\omega t}, \end{aligned}$$

avec $\omega = \eta^{-1} \ln M \geq 0$ car $M \geq 1$. □

Corollaire 2.9 *Si $G(t)$ est un C_0 -semi-groupe alors pour tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto G(t)x$ est continue de $\mathbb{R}^+$ (la droite réelle non négative) dans X .*

Preuve : Soit $t, h \geq 0$. La continuité de $t \mapsto G(t)x$ découle de

$$\|G(t+h)x - G(t)x\| \leq \|G(t)\| \|G(h)x - x\| \leq M e^{\omega t} \|G(h)x - x\| \rightarrow 0, \text{ lorsque } h \rightarrow 0.$$

et pour $t \geq 0, h \geq 0$

$$\begin{aligned} \|G(t-h)x - G(t)x\| &\leq \|G(t-h)\| \|x - G(h)x\| \\ &\leq M e^{\omega t} \|x - G(h)x\| \rightarrow 0, \text{ lorsque } h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Théorème 2.10 *Soit $G(t)$ un C_0 -semi-groupe et soit A son générateur infinitésimal. Alors*

1. Pour $x \in X$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} G(s)x ds = G(t)x. \quad (2.15)$$

2. Pour $x \in X$, $\int_0^t G(s)x ds \in D(A)$ et

$$A \left(\int_0^t G(s)x ds \right) = G(t)x - x. \quad (2.16)$$

3. Semigroupes fortement continus.

3. Pour $x \in D(A)$ alors $G(t)x \in D(A)$ et

$$\frac{d}{dt}G(t)x = AG(t)x = G(t)Ax. \quad (2.17)$$

4. Pour $x \in D(A)$, on a:

$$G(t)x - G(s)x = \int_s^t G(\tau)Ax d\tau = \int_s^t AG(\tau)x d\tau. \quad (2.18)$$

Preuve : La partie (1) suit de la continuité de la fonction: $t \mapsto G(t)x$. En effet,

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} G(s)x ds - G(t)x &= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} G(s)x ds - \frac{1}{h} \int_0^h G(t)x ds \\ &= \frac{1}{h} \int_0^h G(t+s)x ds - \frac{1}{h} \int_0^h G(t)x ds \\ &= \frac{1}{h} \int_0^h [G(t+s)x - G(t)x] ds \\ &= \frac{1}{h} \int_0^h G(t) [G(s)x - x] ds. \end{aligned}$$

Donc:

$$\left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} G(s)x ds - G(t)x \right\| \leq \frac{1}{h} M \int_0^h [G(s)x - x] ds \rightarrow 0 \text{ lorsque } h \rightarrow 0.$$

Montrons (2). Soit $x \in X$ et $h > 0$. Alors,

$$\begin{aligned} \frac{G(h) - I}{h} \left(\int_0^t G(s)x ds \right) &= \frac{1}{h} \int_0^t [G(s+h)x - G(s)x] ds \\ &= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} G(s)x ds - \frac{1}{h} \int_0^h G(s)x ds, \end{aligned}$$

et comme $h \rightarrow 0$, d'après le premier point, le membre de droite de cette égalité tend vers $G(t)x - G(0)x = G(t)x - x$. Donc:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(h) - I}{h} \left(\int_0^t G(s)x ds \right) = G(t)x - x.$$

3. Semigroupes fortement continus.

On déduit alors que,

$$\int_0^t G(s)x ds \in D(A) \text{ et } A \left(\int_0^t G(s)x ds \right) = G(t)x - x.$$

ce qui prouve (2).

Prouvons (3). Soit $x \in D(A)$ et $h > 0$. On a:

$$\frac{G(h) - I}{h} G(t)x = \frac{G(h)G(t)x - G(t)x}{h} = G(t) \left(\frac{G(h)x - x}{h} \right). \quad (2.19)$$

Comme $x \in D(A)$ alors

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{G(h)x - x}{h} = Ax,$$

et donc

$$\frac{G(h) - I}{h} G(t)x = G(t) \left(\frac{G(h)x - x}{h} \right) \rightarrow G(t)Ax \text{ lorsque } h \rightarrow 0,$$

car $G(t)$ est un opérateur linéaire borné.

Ainsi, $\lim_{h \searrow 0} \frac{G(h) - I}{h} G(t)x$ existe alors:

$$G(t)x \in D(A) \text{ et } AG(t)x = G(t)Ax.$$

L'égalité (??) implique aussi que:

$$\frac{d^+}{dt} G(t)x = AG(t)x = G(t)Ax,$$

i.e., que la dérivée à droite de $G(t)x$ est $G(t)Ax$. Pour prouver (??), nous allons montrer que pour $t > 0$, la dérivée à gauche de $G(t)x$ existe et vaut $AG(t)x = G(t)Ax$.

3. Semigroupes fortement continus.

Soit $t > 0$ et $0 < h < t$. On a:

$$\begin{aligned} \frac{G(t-h)x - G(t)x}{-h} - G(t)Ax &= \frac{G(t)x - G(t-h)x}{h} - G(t)Ax \\ &= G(t-h) \left[\frac{G(h)x - x}{h} - G(h)Ax - Ax + Ax \right] \\ &= G(t-h) \left[\frac{G(h)x - x}{h} - Ax \right] + [G(t-h)Ax - G(t)Ax]. \end{aligned}$$

D'une part, comme $x \in D(A)$ alors

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{G(h)x - x}{h} - Ax \right] = 0,$$

et donc

$$\left\| G(t-h) \left[\frac{G(h)x - x}{h} - Ax \right] \right\| \leq M.e^{\omega t} \cdot \left\| \frac{G(h)x - x}{h} - Ax \right\| \rightarrow 0.$$

D'autre part du fait que la fonction: $t \mapsto G(t)x$ est continue alors,

$$\lim_{h \rightarrow 0} [G(t-h)Ax - G(t)Ax] = 0.$$

Donc les deux termes de droite tend vers 0 et on déduit alors que

$$\frac{d^-}{dt} G(t)x = G(t)Ax = AG(t)x.$$

Prouvons (4). Par intégration de (??) de s à t on obtient:

$$G(t)x - G(s)x = \int_s^t \frac{d}{d\tau} G(\tau)x d\tau = \int_s^t AG(\tau)x d\tau = \int_s^t G(\tau)Ax d\tau.$$

Corollaire 2.11 *Si A est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe $G(t)$, alors $D(A)$, le domaine de A est dense dans X et A est un opérateur linéaire fermé.*

3. Semigroupes fortement continus.

Preuve : Pour tout $x \in X$, posons

$$x_n = n \int_0^{\frac{1}{n}} G(s)x ds.$$

D'après le point (2) du théorème ??, $x_n \in D(A)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et par le point (1) du même théorème $x_n \rightarrow G(0)x = x$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Ainsi, pour tout $x \in X$, il existe une suite d'éléments de $D(A)$ qui converge vers x . On déduit alors que $\overline{D(A)} = X$, où $\overline{D(A)}$ est l'adhérence de $D(A)$. La linéarité de A est évidente.

Prouvons que A un opérateur fermé. Soit $(x_n) \subset D(A)$, telle que

$$x_n \rightarrow x \quad \text{et} \quad Ax_n \rightarrow y \quad \text{lorsque} \quad n \rightarrow \infty.$$

Du point (4) du théorème ?? on a:

$$G(t)x_n - x_n = \int_0^t G(s)Ax_n ds. \quad (2.20)$$

D'une part du fait que $G(t) : X \rightarrow X$ est un opérateur linéaire continu, on a:

$$x_n \rightarrow x \Rightarrow G(t)x_n \rightarrow G(t)x \Rightarrow G(t)x_n - x_n \rightarrow G(t)x - x.$$

D'autre part; $Ax_n \rightarrow y$ alors $\int_0^t G(s)Ax_n ds \rightarrow \int_0^t G(s)y ds$, car,

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t G(s)Ax_n ds - \int_0^t G(s)y ds \right\| &\leq \int_0^t \|G(s)\| \|Ax_n - y\| ds \\ &\leq \|Ax_n - y\| \int_0^t M e^{\omega s} ds \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

On obtient de (??)

$$G(t)x - x = \int_0^t G(s)y ds. \quad (2.21)$$

De (??), on a:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t G(s)y ds = G(0)y = y.$$

3. Semigroupes fortement continus.

Donc

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{G(t)x - x}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t G(s)y ds = G(0)y = y.$$

Donc

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{G(t)x - x}{t} \text{ existe} \Rightarrow x \in D(A).$$

et

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{G(t)x - x}{t} = y.$$

□

Théorème 2.12 Soit $G(t)$ et $S(t)$ deux C_0 -semi-groupes d'opérateurs linéaires bornés avec des générateurs infinitésimaux A et B respectivement. Si $A = B$ alors $G(t) = S(t)$ pour $t \geq 0$.

Preuve : Soit $x \in D(A)$. Du théorème ?? (3) il résulte que la fonction: $s \mapsto G(t-s)S(s)x$ est différentiable et que

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} [G(t-s)S(s)x] &= -AG(t-s)S(s)x + G(t-s) B S(s)x \\ &= -G(t-s)AS(s)x + G(t-s)BS(s)x \\ &= 0. \end{aligned}$$

car $A = B$. Donc la fonction $s \mapsto G(t-s)S(s)x$ est constante et en particulier ses valeurs à $s = 0$ et $s = t$ sont les mêmes, i.e., $G(t)x = S(t)x$. Ceci est vrai pour tout $x \in D(A)$ et puisque par le corollaire ??, $D(A)$ est dense dans X et $G(t)$, $S(t)$ sont bornés, alors $G(t)x = S(t)x$ pour tout $x \in X$, et donc $G(t) = S(t)$. □

Définition 2.13

1. Si $x \in D(A)$ et $Ax \in D(A)$ on dit que $x \in D(A^2)$ et $A^2x = A.(Ax)$.
2. En général, pour $n \geq 2$, si $x \in D(A^{n-1})$ et $A^{n-1}x \in D(A)$ on dit que $x \in D(A^n)$ et $A^n x = A.(A^{n-1}x) = A^{n-1}.(Ax)$.

3. Semigroupes fortement continus.

Si A est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe alors par le corollaire ??, $\overline{D(A)} = X$. En fait, un résultat beaucoup plus fort est vrai. En effet, nous avons.

Théorème 2.14 *Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe $G(t)$. Si $D(A^n)$ est le domain de A^n , alors $\bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n)$ est dense dans X .*

Preuve : Soit $\mathfrak{D}$ l'ensemble des fonctions à valeurs complexes indéfiniment différentiables et à support compact dans $]0; \infty[$. Pour $x \in X$ et $\varphi \in \mathfrak{D}$ posons

$$y = x(\varphi) = \int_0^{\infty} \varphi(s) G(s) x ds. \quad (2.22)$$

Si $h > 0$ alors

$$\begin{aligned} \frac{G(h) - I}{h} y &= \frac{1}{h} \int_0^{\infty} \varphi(s) [G(s+h)x - G(s)x] ds \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{h} [\varphi(s-h) - \varphi(s)] G(s) x ds. \end{aligned} \quad (2.23)$$

On a:

$$\frac{1}{h} [\varphi(s-h) - \varphi(s)] G(s) x \rightarrow -\varphi'(s) G(s) x.$$

L'intégrale du coté droit de (??) converge lorsque $h \rightarrow 0$ vers $-\varphi'(s) G(s) x$ uniformément sur $]0; \infty[$. Alors,

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{h} [\varphi(s-h) - \varphi(s)] G(s) x \rightarrow - \int_0^{\infty} \varphi'(s) G(s) x ds.$$

On déduit alors que $y \in D(A)$ et

$$Ay = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(h) - I}{h} y = - \int_0^{\infty} \varphi'(s) G(s) x ds.$$

Pour $n = 2$.

$$\begin{aligned} \frac{G(h) - I}{h} Ay &= \frac{-1}{h} \int_0^{\infty} \varphi'(s) [G(s+h)x - G(s)x] ds \\ &= - \int_0^{\infty} \frac{\varphi'(s-h) - \varphi'(s)}{h} G(s) x ds \rightarrow \int_0^{\infty} \varphi''(s) G(s) x ds. \end{aligned} \quad (2.24)$$

3. Semigroupes fortement continus.

Alors,

$$Ay \in D(A) \text{ et } A^2y = \int_0^\infty \varphi'' G(s) ds.$$

Clairement, si $\varphi \in \mathfrak{D}$ alors $\varphi^{(n)}$, la n -ième dérivé de φ est également dans $\mathfrak{D}$ $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, en répétant l'argument précédent, nous trouvons que $y \in D(A^n)$ et

$$A^n y = (-1)^n \int_0^\infty \varphi^{(n)} G(s) x ds \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*.$$

Par conséquent $y \in \bigcap_{n=1}^\infty D(A^n)$. Soit

$$Y = \{x(\varphi) : x \in X, \varphi \in \mathfrak{D}\}.$$

C'est un sous espace vectoriel de X .

D'après ce qui précède, on a

$$Y \subseteq \bigcap_{n=1}^\infty D(A^n).$$

Pour conclure la démonstration, nous montrerons que Y est dense dans X . Supposons que $\overline{Y} \subsetneq X$ alors par le théorème de Hahn-Banach ?? il y a une forme linéaire $x^* \in X^*$ et $x^* \neq 0$ telle que $x^*(y) = 0$ pour tout $y \in Y$. Donc

$$\int_0^\infty \varphi(s) \langle x^*, G(s)x \rangle ds = \left\langle x^*, \int_0^\infty \varphi(s) G(s)x \right\rangle ds = 0, \text{ pour tout } x \in X \text{ et } \varphi \in \mathfrak{D}. \quad (2.25)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le crochet de dualité entre X^* et X .

Cela implique que pour tout $x \in X$ la fonction continue $s \mapsto \langle x^*, G(s)x \rangle$ est identiquement nulle sur $]0; \infty[$. Ainsi, en particulier pour $s = 0$, $\langle x^*, x \rangle = 0$ pour tout $x \in X$ et donc $x^* = 0$. contradiction car $x^* \neq 0$.

Nous concluons cette section par une simple application du théorème ??.

Lemme 2.15 *Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe $G(t)$;*

3. Semigroupes fortement continus.

$\|G(t)\| \leq M$ pour $t \geq 0$. Si $x \in D(A^2)$ alors

$$\|Ax\|^2 \leq 4M^2 \|A^2x\| \|x\|. \quad (2.26)$$

Preuve : En utilisant (??), il est facile de vérifier que pour $x \in D(A^2)$

$$G(t)x - x = tAx + \int_0^t (t-s)G(s)A^2x ds.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \|Ax\| &\leq t^{-1} (\|G(t)x\| + \|x\|) + t^{-1} \int_0^t (t-s)\|G(s)A^2x\| ds \\ &\leq \frac{2M}{t} \|x\| + \frac{Mt}{2} \|A^2x\|. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Ici nous avons utilisé le fait que $M \geq 1$ (puisque $\|G(0)\| = 1$). Si $A^2x = 0$ alors (??) implique $Ax = 0$ et l'inégalité (??) est satisfaite. Si $A^2x \neq 0$ on substitue $2\|x\|^{\frac{1}{2}}\|A^2x\|^{\frac{-1}{2}}$ dans (??) et (??) suit.

Exemple 2.16 Soit X l'espace de Banach des fonctions bornées uniformément continues sur $] -\infty, +\infty[$ avec la norme de la convergence uniforme. Pour $f \in X$ on définit

$$(G(t)f)(s) = f(t+s)$$

Il est facile de vérifier que $G(t)$ est un C_0 -semi-groupe satisfaisant $\|G(t)\| \leq 1$ pour $t \geq 0$. Le générateur infinitésimal de $G(t)$ est défini sur

$$D(A) = \{f : f \in X, f' \text{ existe, } f' \in X\},$$

et

$$(Af)(s) = f'(s) \text{ pour } f \in D(A),$$

car,

$$Af(s) = \lim_{t \searrow 0} \frac{G(t)f(s) - f(s)}{t} = \lim_{t \searrow 0} \frac{f(s+t) - f(s)}{t} = f'(s).$$

3. Semigroupes fortement continus.

A partir de (??) on obtient l'inégalité de Landau

$$\left(\sup |f'(s)|\right)^2 \leq 4 \left(\sup |f''(s)|\right) \left(\sup |f(s)|\right) \quad (2.28)$$

où les sup sont pris sur $] - \infty; \infty[$.

4. Le théorème de Hille-Yosida.

3 Le théorème de Hille-Yosida.

Soit $G(t)$ un- C_0 semi-groupe . Du théorème ??, il suit qu'il existe des constantes $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$ telle que pour $\|G(t)\| \leq Me^{\omega t}$ pour $t \geq 0$. Si $\omega = 0$, $G(t)$ est dit uniformément borné et si de plus $M = 1$ on l'appelle un C_0 -semi-groupe de contraction. Cette section est consacrée à la caractérisation des générateurs infinitésimaux de C_0 -semi-groupes de contractions. Les condition sur le comportement de la résolvante d'un opérateur A , qui sont nécessaires et suffisantes, pour que A soit le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe de contraction. Rappelons que si A est un opérateur linéaire pas nécessairement borné dans X , l'ensemble résolvant $\rho(A)$ est l'ensemble de tous les nombres complexes λ pour lequel $\lambda I - A$ est inversible. i.e., $(\lambda I - A)^{-1}$ est un opérateur linéaire borné dans X . La famille

$$R(\lambda : A) = (\lambda I - A)^{-1}, \lambda \in \rho(A)$$

des opérateurs linéaires bornés est appelé la résolvante de A .

Théorème 2.17 (*Hille-Yosida*) *Un opérateur linéaire (non borné) A est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe de contraction $G(t)$, $t \geq 0$, si et seulement si:*

1. *A est fermé et $\overline{D(A)} = X$,*
2. *l'ensemble résolvant $\rho(A)$ de A contient $\mathbb{R}^+$ et pour tout $\lambda > 0$,*

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\lambda}. \quad (2.29)$$

Preuve : Montrons que ces deux conditions sont nécessaires. Si A est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe alors il est fermé et $\overline{D(A)} = X$ par le corollaire ??. Pour $\lambda > 0$ et $x \in X$ soit:

$$R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} G(t)x dt. \quad (2.30)$$

Puisque la fonction $t \mapsto G(t)$ est continue et uniformément bornée, alors l'intégrale existe en tant qu'intégrale de Riemann impropre et définit un opéra-

4. Le théorème de Hille-Yosida.

teur linéaire borné $R(\lambda)$ satisfaisant

$$\|R(\lambda)x\| \leq \int_0^\infty e^{-\lambda t} \|G(t)x\| dt \leq \frac{1}{\lambda} \|x\|. \quad (2.31)$$

De plus, pour $h > 0$, on a

$$\begin{aligned} \frac{G(h) - I}{h} R(\lambda) x &= \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} G(t+h)x dt - \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} G(t)x dt \\ &= \frac{1}{h} \int_h^\infty e^{-\lambda(t-h)} G(t)x dt - \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} G(t)x dt \\ &= \frac{1}{h} \left[\int_0^\infty e^{-\lambda(t-h)} G(t)x dt - \int_0^h e^{-\lambda(t-h)} G(t)x dt \right] - \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} G(t)x dt \\ &= \frac{1}{h} \int_0^\infty [e^{\lambda h} \cdot e^{-\lambda t} \cdot G(t) \cdot x - e^{-\lambda t} \cdot G(t) \cdot x] dt - \frac{1}{h} \int_0^h e^{-\lambda(t-h)} G(t)x dt \\ &= \frac{e^{\lambda h} - I}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} G(t)x dt - \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^h e^{-\lambda t} G(t)x dt. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Le premier terme tend vers $\lambda R(\lambda)x$.

Pour la deuxième on pose $t = sh$, on a:

$$\frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^h e^{-\lambda t} G(t)x dt = e^{\lambda h} \int_0^1 e^{-\lambda sh} G(sh)x ds \rightarrow x \text{ lorsque } h \rightarrow 0.$$

D'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue.

Donc

$$\frac{G(h) - I}{h} R(\lambda) x \rightarrow \lambda R(\lambda)x - x \text{ lorsque } h \rightarrow 0,$$

on déduit alors que:

$$R(\lambda) \in D(A), \quad \text{et} \quad AR(\lambda)x = \lambda R(\lambda)x - x, \quad \forall x \in X,$$

et donc:

$$(\lambda I - A)R(\lambda) = I. \quad (2.33)$$

4. Le théorème de Hille-Yosida.

De plus, pour $x \in D(A)$, on a :

$$\begin{aligned}
 R(\lambda)Ax &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} G(t)Ax dt \\
 (d'après (??)) &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} AG(t)x dt \\
 &= A \left(\int_0^\infty e^{-\lambda t} G(t)x dt \right) \\
 &= AR(\lambda)x.
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

Ici, nous avons utilisé le théorème ?? et le fait que A soit fermé. De (??) et (??) il s'ensuit que $R(\lambda)$ et $\lambda I - A$ commutent sur $D(A)$. Donc $R(\lambda)$ commute avec $\lambda I - A$ sur $D(A)$, on a alors:

$$(\lambda I - AR(\lambda))x = R(\lambda)(\lambda I - A)x, \quad \forall x \in D(A).$$

Alors,

$$(\lambda I - A)^{-1} = R(\lambda)x, \quad \forall x \in D(A), \tag{2.35}$$

et donc,

$$\|(\lambda I - A)^{-1}x\| = \|R(\lambda)x\| \leq \frac{1}{\lambda}\|x\|, \quad \forall x \in D(A).$$

Donc l'opérateur $(\lambda I - A)^{-1}$ est linéaire et continu sur $D(A)$, il se prolonge en un unique opérateur linéaire continu sur $\overline{D(A)} = X$ et l'équation (??) reste vraie sur X et donc

$$(\lambda I - A)^{-1} = R(\lambda), \quad \forall \lambda > 0,$$

et donc l'inégalité (??) est satisfaite.

Les conditions (1) et (2) sont donc nécessaires.

Afin de prouver que les conditions (1) et (2) sont suffisantes pour que A soit le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe de contractions, nous allons donner quelques lemmes:

Lemme 2.18 *Si A satisfait aux conditions (1) et (2) du théorème ?? et*

$$R(\lambda : I) = (\lambda I - A)^{-1}.$$

4. Le théorème de Hille-Yosida.

Alors:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda : A)x = x \text{ pour tout } x \in X. \quad (2.36)$$

Preuve : Supposons d'abord que $x \in D(A)$:

$$\begin{aligned} \|\lambda R(\lambda : A)x - x\| &= \|\lambda R(\lambda : A)x\| \\ &= \|R(\lambda : A)Ax\| \\ &\leq \frac{1}{\lambda} \|Ax\| \rightarrow 0 \text{ lorsque } \lambda \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Mais $D(A)$ est dense dans X et $\|\lambda R(\lambda : A)\| \leq 1$, alors:

$$\lambda R(\lambda : A)x \rightarrow x \text{ si } \lambda \rightarrow \infty \text{ pour tout } x \in X.$$

Nous définissons maintenant, pour tout $\lambda > 0$, l'approximation de Yosida de A par:

$$A_\lambda = \lambda A R(\lambda : A) = \lambda^2 R(\lambda : A) - \lambda I. \quad (2.37)$$

A_λ est une approximation de A au sens suivant.

Lemme 2.19 *Soit A satisfaisant aux conditions (1) et (2) du théorème ??.*
Si A_λ est l'approximation de Yosida de A , alors:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} A_\lambda x = Ax \text{ pour } x \in D(A). \quad (2.38)$$

Preuve : Pour $x \in D(A)$ nous avons du lemme ?? et la définition de A_λ que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} A_\lambda x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda : A)Ax = Ax.$$

Lemme 2.20 *Soit A satisfaisant les conditions (1) et (2) du théorème ??. Si A_λ est l'approximation de Yosida de A , alors A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu de contractions e^{tA} . De plus, pour tout $x \in X$, $\lambda, \mu > 0$ on a:*

$$\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| \leq t \|A_\lambda x - A_\mu x\|. \quad (2.39)$$

4. Le théorème de Hille-Yosida.

Preuve : Daprès (??), il est clair que A_λ est un opérateur linéaire borné et est donc le générateur infinitésimal du semi-groupe e^{tA_λ} d'opérateurs linéaires bornés (d'après le théorème ??), du fait que $A_\lambda = \lambda^2 R(\lambda : A) - \lambda I$ on a:

$$\begin{aligned} \|e^{tA_\lambda}\| &= e^{-t\lambda} \left\| e^{t\lambda^2 R(\lambda:A)} \right\| \\ &\leq e^{-t\lambda} e^{t\lambda^2 \frac{1}{\lambda}} \\ &\leq 1. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Donc e^{tA_λ} est un semi-groupe de contractions. Il ressort clairement des définitions que les opérateurs $e^{tA_\lambda}, e^{tA_\mu}, A_\lambda, A_\mu$ commutent entre eux. Par conséquent

$$\begin{aligned} \|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| &= \left\| \int_0^1 \frac{d}{ds} (e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} x) ds \right\| \\ &\leq \left\| \int_0^1 (tA_\lambda e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} x - e^{tsA_\lambda} tA_\mu e^{t(1-s)A_\mu} x) ds \right\| \\ &\leq \int_0^1 \|te^{tsA_\lambda} (A_\lambda x - A_\mu x) e^{t(1-s)A_\mu}\| ds \\ &\leq \int_0^1 t \|e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} (A_\lambda x - A_\mu x)\| ds. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Alors,

$$\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| \leq t \|A_\lambda x - A_\mu x\|.$$

□

Preuve : de théorème ?? (suffisance).

Soit $x \in D(A)$. Alors, de (??) on a:

$$\begin{aligned} \|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| &\leq t \|A_\lambda x - A_\mu x\| \\ &\leq t \|A_\lambda x - Ax\| + t \|Ax - A_\mu x\| \rightarrow 0, \text{ lorsque } \lambda, \mu \rightarrow +\infty. \end{aligned} \tag{2.42}$$

De l'inégalité (??) et du lemme ??, il s'ensuit que, pour $x \in D(A)$, $e^{tA_\lambda}x$ converge lorsque $\lambda \rightarrow \infty$ et la convergence est uniforme sur les intervalles bornés.

4. Le théoreme de Hille-Yosida.

En effet si $t \in (0, b)$, on aura:

$$\sup_{t \in (0, b)} \|e^{tA_\lambda x} - e^{tA_\mu x}\| \leq b (\|A_\lambda x - Ax\| + \|Ax - A_\mu x\|) \rightarrow 0 \text{ lorsque } \lambda, \mu \rightarrow \infty.$$

Puisque $D(A)$ est dense dans X et $\|e^{tA_\lambda}\| \leq 1$, il suit que $e^{tA_\lambda x}$ est converge, pour tout $x \in X$. Posons:

$$G(t)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{tA_\lambda} x \text{ pour tout } x \in X. \quad (2.43)$$

La limite dans (??) est aussi uniforme sur tout intervalle borné. il s'ensuit de (??) que la limite $G(t)$ satisfait la propriété des semi-groupes, que $G(0) = I$ et que $\|G(t)\| \leq 1$ car:

$$\begin{aligned} \|G(t)x\| &= \|e^{tA_\lambda} x + G(t)x - e^{tA_\lambda} x\| \\ &\leq \|e^{tA_\lambda} x\| + \|G(t)x - e^{tA_\lambda} x\| \\ &\leq 1 + \varepsilon, \forall \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Aussi la fonction $t \mapsto G(t)x$ est continue pour $t \geq 0$ en tant que la limite uniforme des fonctions continues: $t \mapsto e^{tA_\lambda} x$. Ainsi $G(t)$ est un C_0 -semi-groupe de contractions sur X . Pour conclure la démonstration, nous montrerons que l'opérateur A est le générateur infinitésimal de $G(t)$. Soit $x \in D(A)$. En utilisant (??) et le théorème ??, on a:

$$\begin{aligned} G(t)x - x &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} (e^{tA_\lambda} x - x) \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^t e^{sA_\lambda} A_\lambda x ds \\ &= \int_0^t G(s) A x ds. \end{aligned} \quad (2.44)$$

4. Le théorème de Hille-Yosida.

La dernière égalité découle de la convergence uniforme de $e^{tA_\lambda} A_\lambda x$ vers $G(t)Ax$ sur des intervalles bornés. En effet, comme e^{tA_λ} et A_λ commutent on a:

$$\begin{aligned} \sup_{t \in (0, b)} \|e^{tA_\lambda} A_\lambda x - G(t)Ax\| &\leq \sup_{t \in (0, b)} \|e^{tA_\lambda} A_\lambda x - G(t)Ax - A_\lambda G(t)x + A_\lambda G(t)x\| \\ &\leq \sup_{t \in (0, b)} \|A_\lambda\| \|e^{tA_\lambda} x - G(t)x\| + \|G(t)\| \|A_\lambda x - Ax\| \\ &\leq \sup_{t \in (0, b)} \|A_\lambda\| \|e^{tA_\lambda} x - G(t)x\| + \|A_\lambda x - Ax\| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Soit B le générateur infinitésimal de $G(t)$ et soit $x \in D(A)$. En divisant (??) par $t > 0$ et en faisant tendre t vers 0 on voit $x \in D(B)$ et que $Bx = Ax$. Ainsi $B \supseteq A$. Puisque B est le générateur infinitésimal de $G(t)$, il résulte des conditions nécessaires que $1 \in \rho(B)$. Mais de l'hypothèse (2) on a $1 \in \rho(A)$. Comme $B \supseteq A$ alors

$$(I - B)D(A) = (I - A)D(A) = X.$$

Comme $X = (I - B)D(B)$ alors

$$D(B) = (I - B)^{-1}X = (I - B)^{-1}(I - B)D(A) = D(A),$$

et donc: $A = B$. Le théorème ?? et ses preuves ont des conséquences simples que nous allons donner.

Corollaire 2.21 *Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe de contraction $G(t)$. Si A_λ est l'approximation de Yosida de A , alors*

$$G(t)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{tA_\lambda} x \quad \text{pour } x \in X. \quad (2.45)$$

Preuve : De la preuve de théorème ??, il s'ensuit que $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{tA_\lambda} x$ définit un C_0 -semi-groupe de contractions, $S(t)$ dont le générateur infinitésimal est A . D'après le théorème ??, il s'ensuit alors que $G(t) = S(t)$.

Corollaire 2.22 *Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe de*

4. Le théorème de Hille-Yosida.

contractions $G(t)$. L'ensemble résolvant de A contient le demi plan ouvert.

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > 0\}$$

Et pour tout $\lambda \in \rho(A)$ on a :

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda}. \quad (2.46)$$

Preuve : L'opérateur

$$R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} G(t)x dt,$$

est bien défini pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re} \lambda > 0$. Dans la démonstration de la partie (nécessaire) du théorème ??, on a montré que

$$R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}.$$

Mais, $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ et $\alpha > 0$ on a :

$$\|R(\lambda)x\| \leq \int_0^\infty |e^{i\beta t}| |e^{-\alpha t} G(t)x| \leq \frac{1}{\alpha} \|x\|.$$

Et donc

$$\rho(A) \supseteq \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda > 0\},$$

et satisfait l'inégalité (??).

L'exemple suivant montre que l'ensemble résolvant du générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe de contractions n'a pas besoin d'en contenir plus que le demi plan droit ouvert.

Exemple 2.23 Soit $X = BU(0, \infty)$, l'espace de toutes les fonctions bornées uniformément continues sur $[0, \infty[$. On définit :

$$(G(t)f)(s) = f(t+s). \quad (2.47)$$

4. Le théoreme de Hille-Yosida.

$G(t)$ est un C_0 -semi-groupe de contractions dans X . Son générateur infinitésimal A est donné par

$$D(A) = \{f : f \text{ et } f' \in X\}. \quad (2.48)$$

et

$$(Af)(s) = f'(s) \text{ pour } f \in D(A). \quad (2.49)$$

D'après le corollaire ??, nous avons que

$$\rho(A) \supseteq \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda > 0\}.$$

Pour tout complexe λ l'équation $(\lambda - A)\varphi_\lambda = 0$ a la solution non triviale $\varphi_\lambda(s) = e^{\lambda s}$. Si $\operatorname{Re}(\lambda) \leq 0$, $\varphi_\lambda \in X$ et donc le demi-plan fermé gauche est dans le spectre $\sigma(A)$ de A .

Soit $G(t)$ un C_0 -semi-groupe satisfaisant $\|G(t)\| \leq e^{\omega t}$ (pour un certain $\omega \geq 0$). $S(t) = e^{-\omega t}G(t)$. $S(t)$ est évidemment un C_0 -semi-groupe de contractions. Si A est le générateur infinitésimal de $G(t)$ alors $A - \omega I$ est le générateur infinitésimal de $S(t)$. D'autre part, si A est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe de contractions $S(t)$, alors $A + \omega I$ est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe de $G(t)$ satisfaisant $\|G(t)\| \leq e^{\omega t}$. En effet, $G(t) = e^{\omega t}S(t)$. Ces remarques nous amènent à caractériser les générateurs infinitésimaux de C_0 -semi-groupes satisfaisant $\|G(t)\| \leq e^{\omega t}$.

Corollaire 2.24 *Un opérateur linéaire A est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe satisfaisant $\|G(t)\| \leq e^{\omega t}$ si et seulement si*

1. A est fermé et $\overline{D(A)} = X$,
2. l'ensemble résolvant $\rho(A)$ de A contient le demi-droite $\{\lambda : \operatorname{Im} \lambda = 0, \lambda > \omega\}$ et pour un tel λ ,

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\lambda - \omega}. \quad (2.50)$$

Nous concluons cette section avec un résultat souvent utile pour prouver qu'un opérateur donné A satisfait les conditions suffisantes du théorème de

4. Le théorème de Hille-Yosida.

Hille-Yosida (théorème ??) et est donc le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe de contractions.

Soit X un espace de Banach et X^* est son dual. On note la valeur de $x^* \in X^*$ en $x \in X$ par $\langle x^*, x \rangle$. Si A est un opérateur linéaire dans X . On note par:

$$S(A) = \{ \langle x^*, Ax \rangle : x \in D(A), \|x\| = 1, x^* \in X^*, \|x^*\| = 1, \langle x^*, x \rangle = 1 \}. \quad (2.51)$$

Théorème 2.25 *Soit A un opérateur linéaire fermé à domain $D(A)$ dense dans X . Soit $S(A)$ défini par (??) et soit Σ le complémentaire de $\overline{S(A)}$ dans $\mathbb{C}$. Si $\lambda \in \Sigma$ alors $\lambda I - A$ est injectif et à image fermée. De plus, si Σ_0 est une composante connexe de Σ satisfaisant $\rho(A) \cap \Sigma_0 \neq \emptyset$, alors le spectre de A est contenu dans S_0 , complémentaire de Σ_0 et on a:*

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{d(\lambda : \overline{S(A)})} \quad \forall \lambda \in \rho(A) \cap \Sigma_0. \quad (2.52)$$

où $d(\lambda : \overline{S(A)})$ est la distance de λ à $\overline{S(A)}$ définie par:

$$d(\lambda : \overline{S(A)}) = d(\lambda : S(A)) = \inf_{y \in S(A)} \|\lambda - y\|.$$

Preuve : Soit $\lambda \in \Sigma = \mathbb{C} \setminus \overline{S(A)}$ qui est ouvert alors:

$$\exists r > 0 : B(\lambda, r) \subset \Sigma \Rightarrow d(\lambda : \overline{S(A)}) > 0.$$

Si $x \in D(A)$, $\|x\| = 1$, $x^* \in X^*$, $\|x^*\| = 1$, $\langle x^*, x \rangle = 1$ alors:

$$\begin{aligned} d(\lambda : \overline{S(A)}) &= d(\lambda : S(A)) \leq |\lambda - \langle x^*, Ax \rangle| \\ &\leq |\lambda \langle x^*, x \rangle - \langle x^*, Ax \rangle| = |\langle x^*, \lambda x - Ax \rangle| \\ &\leq \|x^*\| \|\lambda x - Ax\| \leq \|\lambda x - Ax\|, \end{aligned} \quad (2.53)$$

4. Le théorème de Hille-Yosida.

car $\|x^*\| = 1$. Donc:

$$\|\lambda x - Ax\| \geq d, \forall x \in D(A) \quad \text{et} \quad \|x\| = 1. \quad (2.54)$$

On déduit alors que:

$$\|\lambda x - Ax\| \geq d\|x\|; \forall x \in D(A), \quad (2.55)$$

car, pour $x \in D(A)$, $x \neq 0$, $y = \frac{x}{\|x\|} \in D(A)$ et $\|y\| = 1$.

Utilisant (??) on déduit que:

$$\frac{1}{\|x\|} \cdot \|\lambda x - Ax\| \geq d \Rightarrow \|\lambda x - Ax\| \geq d\|x\|. \quad (2.56)$$

Alors, d'après le théorème ??, l'opérateur $\lambda I - A$ est injectif et à image fermée.

Si, de plus, $\lambda \in \rho(A)$ l'opérateur $\lambda I - A$ est bijectif et l'inégalité (??) implique

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{d},$$

qui est l'inégalité (??).

Il reste à montrer que si Σ_0 est une composante de Σ qui a une intersection non vide avec l'ensemble résolvant $\rho(A)$ alors $\sigma(A) \subseteq S_0$.

Montrons que $\rho(A) \cap \Sigma_0$ est ouvert dans Σ_0 . Comme $\rho(A)$ est un ouvert. (théorème) alors, $\rho(A) \cap \Sigma_0$ est un ouvert dans Σ_0 (topologie induite).

Montrons que $\rho(A) \cap \Sigma_0$ est fermé dans Σ_0 . Soit (λ_n) une suite telle que

$$\lambda_n \in \rho(A) \cap \Sigma_0 \quad \text{et} \quad \lambda_n \rightarrow \lambda \in \Sigma_0.$$

Notons que $\lambda \in \Sigma_0$ parcequ'on est dans Σ_0 . (topologie induite).

Montrons alors que $\lambda \in \rho(A) \cap \Sigma_0$.

On a: $d = d\left(\lambda : \overline{S(A)}\right) > 0$ et $|\lambda_n - \lambda| \rightarrow 0$, alors:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall n; n \geq n_0 \Rightarrow |\lambda_n - \lambda| < \frac{1}{2}d. \quad (2.57)$$

4. Le théorème de Hille-Yosida.

D'autre part,

$$d = d(\lambda, S) \leq |\lambda - \lambda_n| + d(\lambda_n, S) < \frac{1}{2}d + d(\lambda_n, S).$$

On déduit alors que

$$d(\lambda_n, S) > \frac{1}{2}d. \quad (2.58)$$

De (??) et (??) on déduit que

$$|\lambda_n - \lambda| < d(\lambda_n, S). \quad (2.59)$$

Mais on sait que, d'après (??)

$$d(\lambda_n, S) \leq \|R(\lambda_n, A)\|^{-1}, \text{ car } \lambda_n \in \rho(A). \quad (2.60)$$

De (??) et (??) on obtient:

$$|\lambda_n - \lambda| < \|R(\lambda_n, A)\|^{-1} \Rightarrow \lambda \in B(\lambda_n, \|R(\lambda_n, A)\|^{-1}).$$

On déduit alors, d'après le théorème que $\lambda \in \rho(A)$. Alors $\lambda \in \rho(A) \cap \Sigma_0$, et donc $\rho(A) \cap \Sigma_0$ est fermé.

Donc $\rho(A) \cap \Sigma_0$ est ouvert et fermé dans Σ_0 qui est connexe et comme $\rho(A) \cap \Sigma_0 \neq \emptyset$ alors

$$\rho(A) \cap \Sigma_0 = \Sigma_0 \Rightarrow \rho(A) \supseteq \Sigma_0 \Rightarrow \sigma(A) = (\rho(A))^c \subseteq S_0.$$

5. Le théorème de Lumer Phillips.

4 Le théorème de Lumer-Phillips.

Dans la section précédente, nous avons vu la caractérisation de Hille-Yosida d'un générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe de contractions. Dans cette section, nous verrons d'autres caractérisations de ses générateurs infinitésimaux. Pour énoncer et prouver le résultat, nous avons besoin des résultats suivants.

Soit X un espace de Banach et soit X^* son dual. Pour chacun $x \in X$, nous définissons la dualité $F(x) \subseteq X^*$ par

$$F(x) = \{x^* : x^* \in X^* \text{ et } \langle x^*, x \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}.$$

Du théorème de Hahn-Banach il suit que $F(x) \neq \emptyset$ pour chaque $x \in X$.

Définition 2.26 On dit qu'un opérateur linéaire A est dissipatif si pour tout $x \in D(A)$, il existe $x^* \in F(x)$, tel que

$$\operatorname{Re} \langle x^*, Ax \rangle \leq 0.$$

Où $\operatorname{Re}(z)$ est la partie réelle de z .

Théorème 2.27 *Un opérateur linéaire A est dissipatif si et seulement si*

$$\|(\lambda I - A)x\| \geq \lambda \|x\| \text{ pour tous } \lambda > 0 \text{ et } x \in D(A). \quad (2.61)$$

Preuve : Soit A un opérateur dissipatif, $\lambda > 0$ et $x \in D(A)$. Si $x^* \in F(x)$ et $\operatorname{Re} \langle x^*, Ax \rangle \leq 0$ alors

$$\begin{aligned} \|x^*\| \|\lambda x - Ax\| &\geq |\langle x^*, \lambda x - Ax \rangle| \\ &\geq \operatorname{Re} \langle x^*, \lambda x - Ax \rangle \\ &\geq \lambda \operatorname{Re} \langle x^*, x \rangle - \operatorname{Re} \langle x^*, Ax \rangle \\ &\geq \lambda \|x\|^2, \end{aligned} \quad (2.62)$$

5. Le théoreme de Lumer Phillips.

car: $\langle x^*, x \rangle = \|x\|$ et $Re\langle x^*, Ax \rangle \leq 0$.

Inversement, soit $x \in D(A)$ et supposons que

$$\lambda\|x\| \leq \|\lambda x - Ax\| \text{ pour tout } \lambda > 0.$$

Si

$$y_\lambda^* \in F(\lambda x - Ax) \text{ et } z_\lambda^* = y_\lambda^* / \|y_\lambda^*\| \text{ alors } \|z_\lambda^*\| = 1,$$

et on a:

$$\begin{aligned} \lambda\|x\| &\leq \|\lambda x - Ax\| = \langle z_\lambda^*, \lambda x - Ax \rangle \\ &= \lambda Re\langle z_\lambda^*, x \rangle - Re\langle z_\lambda^*, Ax \rangle = \lambda\|x\| - Re\langle z_\lambda^*, Ax \rangle, \end{aligned} \quad (2.63)$$

pour tout $\lambda > 0$. Donc

$$Re\langle z_\lambda^*, Ax \rangle \leq 0 \quad \text{et} \quad Re\langle z_\lambda^*, x \rangle \geq \|x\| - \frac{1}{\lambda}\|Ax\|, \quad (2.64)$$

car, du fait que $Re\langle z_\lambda^*, Ax \rangle \leq 0$ on a:

$$-Re\langle z_\lambda^*, Ax \rangle = |Re\langle z_\lambda^*, Ax \rangle| \leq \|z_\lambda^*\| \|Ax\| = \|Ax\|,$$

donc, de (??) on déduit que

$$Re\langle z_\lambda^*, x \rangle \geq \|x\| - \frac{1}{\lambda}\|Ax\|.$$

Du fait que $\|z_\lambda^*\| = 1$ et que la boule unité de X^* est compacte pour la topologie faible étoile de X^* , l'ensemble z_λ^* , a un point d'accumulation $z^* \in X^*$ pour la topologie faible étoile, lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$, et $\|z^*\| \leq 1$, car $\|z^*\| \leq \liminf \|z_\lambda^*\| \leq 1$. Comme

$$\langle z^*, Ax \rangle = \lim_{\lambda_n \rightarrow \infty} \langle z_{\lambda_n}^*, Ax \rangle \quad \text{et} \quad \langle z^*, x \rangle = \lim_{\lambda_n \rightarrow \infty} \langle z_{\lambda_n}^*, x \rangle.$$

On déduit de (??) que

$$Re\langle z^*, Ax \rangle \leq 0 \quad \text{et} \quad Re\langle z^*, x \rangle \geq \|x\|.$$

5. Le théoreme de Lumer Phillips.

Mais $\operatorname{Re}\langle z^*, x \rangle \leq |\langle z^*, x \rangle| \leq \|x\|$ et donc

$$\langle z^*, x \rangle = \|x\|.$$

En prenant $x^* = \|x\|z^*$ nous avons $x^* \in F(x)$ car

$$\|x^*\| = \|x\| \text{ et } \langle x^*, x \rangle = \|x\| \cdot \langle z^*, x \rangle = \|x\|^2,$$

et

$$\operatorname{Re}\langle x^*, Ax \rangle \leq 0.$$

Ainsi pour tout $x \in D(A)$ il existe $x^* \in F(x)$ tel que

$$\operatorname{Re}\langle x^*, Ax \rangle \leq 0,$$

donc A est dissipatif . □

Théorème 2.28 *Soit A un opérateur linéaire à domaine $D(A)$ dense dans X .*

1. *Si A est dissipatif et il existe $\lambda_0 > 0$ tel que, $R(\lambda_0 I - A) = X$, alors A est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe de contractions sur X .*
2. *Si A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe de contractions sur X alors $R(\lambda I - A) = X$ pour tout $\lambda > 0$ et A est dissipatif. De plus, pour tout $x \in D(A)$ et tout $x^* \in F(x)$, $\operatorname{Re}\langle x^*, Ax \rangle \leq 0$.*

Preuve :

1) Soit $\lambda > 0$, comme A est dissipatif alors, d'après le théorème ??, on a:

$$\|\lambda x - Ax\| \geq \lambda \|x\| \text{ pour tous } \lambda > 0 \text{ et } x \in D(A). \quad (2.65)$$

Puisque $R(\lambda_0 I - A) = X$, il résulte de (??) avec $\lambda = \lambda_0$, que $(\lambda_0 I - A)^{-1}$ est un opérateur linéaire borné. Mais alors d'après le théorème ??, l'opérateur $(\lambda_0 I - A)$ est fermé et donc A est aussi fermé (d'après théorème ??). Si

5. Le théorème de Lumer Phillips.

$R(\lambda I - A) = X$ pour tout $\lambda > 0$ alors, par (??)

$$\rho(A) \supseteq]0, \infty[\text{ et } \|R(\lambda : A)\| \leq \lambda^{-1}.$$

Il découle alors du théorème de Hille-Yosida, que A est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe de contractions sur X .

Pour compléter la démonstration de (1) il reste à montrer que $R(\lambda I - A) = X$ pour tout $\lambda > 0$. Considérons l'ensemble

$$\Lambda = \{\lambda : 0 < \lambda < \infty \text{ et } R(\lambda I - A) = X\} \subset]0, +\infty[.$$

Remarquons que, d'après (??), $\Lambda \subset \rho(A)$. Montrons que $\Lambda =]0, +\infty[$.

i) Montrons que Λ est ouvert dans $]0, +\infty[$.

Soit $\lambda \in \Lambda$, alors $\lambda \in \rho(A)$. Puisque $\rho(A)$ est ouvert, alors $\rho(A)$ contient un voisinage de λ . L'intersection de ce voisinage avec la droite réelle est dans Λ et donc Λ est ouvert.

ii) Montrons que Λ est fermé.

Soit $\lambda_n \in \Lambda$ et $\lambda_n \rightarrow \lambda > 0$. Comme $\lambda_n \in \Lambda$ alors, pour tout $y \in X$ il existe $x_n \in D(A)$ tel que

$$\lambda_n x_n - A x_n = y. \quad (2.66)$$

De (??) il s'ensuit que $\|x_n\| \leq \lambda_n^{-1} \|y\| \leq C$ pour un certain $C > 0$. En effet, comme $\lambda_n \rightarrow \lambda > 0$ alors, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que:

$$\lambda_n > \frac{\lambda}{2}, \quad \forall n_0 \geq 0,$$

et donc

$$\lambda_n^{-1} < 2\lambda^{-1}.$$

Maintenant de l'inégalité (??) on a:

$$\begin{aligned} \lambda_m \|x_n - x_m\| &\leq \|\lambda_m(x_n - x_m) - A(x_n - x_m)\| \\ &= \|\lambda_m x_n - \lambda_n x_n + \lambda_n x_n - A x_n - \lambda_m x_m + A x_m\| \\ &\leq |\lambda_n - \lambda_m| \|x_n\| \\ &\leq C |\lambda_n - \lambda_m|, \end{aligned} \quad (2.67)$$

5. Le théoreme de Lumer Phillips.

car, $\lambda_n x_n - Ax_n = y = \lambda_m x_m - Ax_m$. Alors

$$\|x_n - x_m\| \leq C \cdot \frac{1}{\lambda_m} \cdot |\lambda_n - \lambda_m| \rightarrow 0.$$

Donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans X qui est un espace de Banach, alors il existe $x \in X$ tel que $x_n \rightarrow x$, et donc $\lambda_n x_n \rightarrow \lambda x$. De (??) on obtient:

$$Ax_n \rightarrow \lambda x - y.$$

Puisque A est fermé, alors,

$$x \in D(A) \text{ et } \lambda x - Ax = y.$$

Donc

$$R(\lambda I - A) = X \text{ et donc } \lambda \in \Lambda.$$

Ainsi Λ est également fermé dans $]0, \infty[$ et puisque $\lambda_0 \in \Lambda$ par hypothèse, alors $\Lambda \neq \emptyset$ et donc $\Lambda =]0, \infty[$, car $]0, \infty[$ est connexe. Ce qui termine la preuve du point (1).

2) Si A est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe de contractions $G(t)$ dans X , alors par le théorème de Hille-Yossida $\rho(A) \supseteq]0, \infty[$ et donc $R(\lambda I - A) = X$ pour tout $\lambda > 0$. De plus, si $x \in D(A)$ et $x^* \in F(x)$ alors,

$$Re\langle x^*, G(t)x \rangle \leq |\langle x^*, G(t)x \rangle| \leq \|x^*\| \cdot \|G(t)x\| \leq \|x^*\| \cdot \|G(t)\| \cdot \|x\| \leq \|x\|^2,$$

et donc

$$Re\langle x^*, G(t)x - x \rangle = Re\langle x^*, G(t)x \rangle - \|x\|^2 \leq 0. \quad (2.68)$$

En divisant (??) par $t > 0$ et en faisant tendre t vers 0, du fait que

$$\frac{G(t)x - x}{t} \rightarrow Ax, \text{ car } x \in D(A),$$

on obtient:

$$Re\langle x^*, Ax \rangle \leq 0. \quad (2.69)$$

Ceci est vraie pour tout $x^* \in F(x)$ et la preuve est complète. $\square$

5. Le théorème de Lumer Phillips.

Corollaire 2.29 *Soit A un opérateur linéaire fermé à domaine dense. Si A et A^* sont dissipatifs, alors A est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe de contractions dans X .*

Preuve : Par le théorème ??(1), il suffit de prouver que $R(I - A) = X$. Si A est dissipatif et fermé alors, de (??) et du théorème ??, l'ensemble $R(I - A)$ est un sous-espace fermé de X . Si $R(I - A) \neq X$ alors d'après le théorème de séparation de Hahn-Banach il existe $x^* \in X^*$, $x^* \neq 0$ telle que $\langle x^*, x - Ax \rangle = 0$ pour tout $x \in D(A)$. Mais

$$\langle x^*, Ax \rangle_{X^* \times X} = \langle A^* x^*, x \rangle_{X^* \times X}.$$

On aura

$$\langle x^* - A^* x^*, x \rangle = 0, \quad \forall x \in D(A).$$

Comme $D(A)$ est dense dans X et que l'opérateur $x^* - A^* x^*$ est linéaire et continu sur X . On déduit que

$$\langle x^* - A^* x^*, x \rangle = 0, \quad \forall x \in X,$$

et donc

$$x^* - A^* x^* = 0 \quad \text{dans } X^*.$$

Puisque A^* est également dissipatif alors il découle du théorème ?? que

$$\|x^*\| \leq \|(I - A^*)x^*\| = 0,$$

et donc $x^* = 0$, ce qui contredit la construction de x^* .

Nous concluons cette section avec quelques propriétés de l'opérateur dissipatif.

Théorème 2.30 *Soit A un opérateur dissipatif dans X .*

1. *Si pour un certains $\lambda_0 > 0$, $R(\lambda_0 I - A) = X$ alors $R(\lambda I - A) = X$ pour tout $\lambda > 0$.*
2. *Si A est fermable alors $\overline{A}$, la fermeture de A , est également dissipatif.*
3. *Si $\overline{D(A)} = X$ alors A est fermable.*

5. Le théorème de Lumer Phillips.

Preuve :

(i) L'assertion (1) a été prouvée dans la preuve de la partie (1) du théorème ??.

(ii) Montrons (2). Soit $x \in D(\overline{A})$ et $y = \overline{A}x$. Il existe alors une suite (x_n) , $x_n \in D(A)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et telle que

$$x_n \rightarrow x \text{ et } Ax_n \rightarrow y = \overline{A}x.$$

Du fait que A est dissipatif, alors d'après le théorème ??, on a:

$$\|\lambda x_n - Ax_n\| \geq \lambda \|x_n\| \text{ pour } \lambda > 0.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on a d'après la continuité de la norme:

$$\|\lambda x - \overline{A}x\| \geq \lambda \|x\| \text{ pour } \lambda > 0. \quad (2.70)$$

Puisque (??) est vraie pour tout $x \in D(\overline{A})$, alors $\overline{A}$ est dissipatif par le théorème ??.

(iii) Pour prouver (3) supposons que A n'est pas fermable. Alors il existe une suite (x_n) telle que

$$x_n \in D(A), \quad x_n \rightarrow 0 \text{ et } Ax_n \rightarrow y \text{ avec } \|y\| = 1.$$

D'après le théorème ??, il s'ensuit que pour tout $t > 0$ et $x \in D(A)$ on a: pour $z_n = tx + x_n \in D(A)$ et $\lambda = t^{-1}$;

$$\|(x + t^{-1}x_n) - tA(x + t^{-1}x_n)\| \geq \|x + t^{-1}x_n\|.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ puis t vers 0 on aura:

$$\|x - y\| \geq \|x\| \text{ pour tout } x \in D(A).$$

Mais ceci est impossible si $D(A)$ est dense dans X et donc A est fermable.

□

5. Le théorème de Lumer Phillips.

Théorème 2.31 Soit A dissipatif avec $R(I - A) = X$. Si X est réflexif alors $\overline{D(A)} = X$.

Preuve : Soit $x^* \in X^*$ tel que $\langle x^*, x \rangle = 0$ pour tout $x \in D(A)$. Nous montrerons que $x^* = 0$. Puisque $R(I - A) = X$ il suffit de montrer que $\langle x^*, x - Ax \rangle = 0$ pour tout $x \in D(A)$ qui équivaut à $\langle x^*, Ax \rangle = 0$ pour tout $x \in D(A)$. Soit $x \in D(A)$ alors par le théorème ?? (1) il existe $x_n \in D(A)$ tel que

$$x = x_n - \frac{1}{n}Ax_n. \quad (2.71)$$

En effet,

$$x \in D(A) \Rightarrow nx \in D(A),$$

alors, d'après la théorème ?? (1), il existe $x_n \in D(A)$ tel que:

$$nx = nx_n - Ax_n, \quad (\lambda = n),$$

ce qui donne (??). De cette égalité on a:

$$Ax_n = n(x_n - x) \in D(A), \quad (2.72)$$

alors $x_n \in D(A^2)$ et

$$Ax = Ax_n - \frac{1}{n}A^2x_n \text{ ou } Ax_n = \left(I - \frac{1}{n}A\right)^{-1}Ax.$$

Il ressort du théorème ?? et du théorème ?? que

$$\left\| \left(I - \frac{1}{n}A\right)^{-1} \right\| \leq 1 \text{ et alors } \|Ax_n\| \leq \|Ax\| = C.$$

Aussi, de (??) on a:

$$\|x_n - x\| \leq \frac{1}{n} \|Ax_n\| \leq \|Ax\| \leq \frac{C}{n},$$

5. Le théorème de Lumer Phillips.

et donc, $x_n \rightarrow x$. Puisque $\|Ax_n\| \leq C$ et X est réflexif alors la suite (Ax_n) contient une sous-suite notée encore (Ax_n) telle que

$$Ax_n \rightarrow y \text{ faiblement dans } X.$$

Puie, d'après le théorème ?? (1), A est fermé alors,

$$Ax_n \rightarrow Ax.$$

Du fait que la convergence forte implique la convergence faible (proposition ??) alors:

$$Ax_n \rightarrow Ax \text{ faiblement,}$$

et donc $y = Ax$ car la topologie faible est séparée. Enfin, puisque $\langle x^*, z \rangle = 0$ pour tout $z \in D(A)$, nous avons, d'après (??)

$$\langle x^*, Ax_n \rangle = \langle x^*, n(x_n - x) \rangle = 0. \quad (2.73)$$

Lorsque $n \rightarrow +\infty$ dans (??), du fait que $Ax_n \rightarrow Ax$ faiblement dans X alors par définition:

$$\langle x^*, Ax_n \rangle \rightarrow \langle x^*, Ax \rangle,$$

alors, d'après (??),

$$\langle x^*, Ax \rangle = 0, \quad \forall x \in D(A). \quad (2.74)$$

On déduit alors, comme s'est expliqué au début de la preuve, que

$$\langle x^*, x \rangle_{X^* \times X} = 0, \quad \forall x \in X \Rightarrow x^* = 0.$$

Donc, toute forme linéaire et continue nulle sur $D(A)$ est nulle sur X , on déduit alors, du théorème de Hahn-Banach ?? que $\overline{D(A)} = X$. $\square$

L'exemple suivant montre que le théorème ?? n'est pas vrai pour tous les espaces généraux de Banach, et donc la réflexivité de X est nécessaire.

Exemple 2.32 Soit $X = C([0, 1])$, l'ensemble des fonctions continues sur

5. Le théorème de Lumer Phillips.

$[0, 1]$, muni de la norme sup. Notons que cet espace n'est pas réflexif. Soit

$$D(A) = \{u : u \in C^1([0, 1]) \text{ et } u(0) = 0\},$$

et

$$Au = -u' \text{ pour } u \in D(A).$$

Pour tout $f \in X$ l'équation $\lambda u - Au = f$ a une solution $u \in X$, donnée par

$$u(x) = \int_0^x e^{\lambda(\xi-x)} f(\xi) d\xi. \quad (2.75)$$

Ceci montre que $R(\lambda I - A) = X$. De (??) il s'ensuit que

$$\lambda|u(x)| \leq (1 - e^{-\lambda x}) \|f\| \leq \|\lambda u - Au\|. \quad (2.76)$$

En prenant le sup sur $x \in [0, 1]$ du côté gauche de (??) nous trouvons que

$$\lambda\|u\| \leq \|\lambda u - Au\|,$$

et donc l'opérateur A est dissipatif par le théorème ??. Mais

$$\overline{D(A)} = \{u : u \in X \text{ et } u(0) = 0\} \neq X = C([0, 1]).$$

Chapitre 3

Semi-groupes analytiques.

1 Différentiabilité.

Définition 3.1 Soit $G(t)$ un C_0 -semi-groupe sur un espace de banach X . Le semi-groupe $G(t)$ est dit différentiable pour $t > t_0$ si pour tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto G(t)x$ est différentiable pour $t > t_0$. $G(t)$ est dit différentiable s'il est différentiable pour $t > 0$.

Nous avons vu dans le théorème ??(3) que si $G(t)$ est un C_0 -semi-groupe avec un générateur infinitésimal A et $x \in D(A)$ alors, la fonction $t \mapsto G(t)x$ est différentiable pour tout $t \geq 0$. De plus, si $G(t)$ est différentiable pour tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto G(t)x$ est différentiable pour $t > 0$. Notons que si la fonction $t \mapsto G(t)x$ est différentiable pour tout $x \in X$ et pour tout $t \geq 0$ alors, $D(A) = X$ et puisque A est fermé, il est nécessairement borné.

Lemme 3.2 Soit $G(t)$ un C_0 -semi-groupe qui est dérivable pour $t > t_0$ et soit A son générateur infinitésimal, alors:

1. Pour $t > nt_0$, $n = 1, 2, \dots$, $G(t) : X \rightarrow D(A^n)$ et $G^{(n)}(t) = A^n G(t)$ est un opérateur linéaire borné.
2. Pour $t > nt_0$, $n = 1, 2, \dots$, $G^{(n-1)}(t)$ est continu dans $\mathcal{L}(X)$.

Preuve :

i) On commence par $n = 1$. Par hypothèse, la fonction $t \mapsto G(t)x$ est

6. Différentiabilité.

différentiable pour $t > t_0$ et tout $x \in X$. Donc $G(t)x \in D(A)$ et $G'(t)x = AG(t)x$ pour tout $x \in X$ et $t > t_0$. En effet, pour $t > t_0$ et $x \in X$ on a:

$$\frac{G(h) - I}{h} G(t)x = \frac{G(t+h)x - G(t)x}{h} \rightarrow G'(t)x,$$

donc,

$$G(t)x \in D(A) \quad \text{et} \quad AG(t)x = G'(t)x, \quad \forall x \in X \quad \text{et} \quad t > t_0.$$

De plus, puisque A est fermé et $G(t)$ est borné, alors d'après le théorème ?? $AG(t)$ est fermé. Pour $t > t_0$, $AG(t)$ est bien défini sur tout X donc, par le théorème du graph fermé ??, c'est un opérateur linéaire borné. Ceci conclut la démonstration de (1) pour $n = 1$.

ii) Pouvons (2). Du fait que $G(t)$ est un C_0 -semi-groupe alors, d'après le théorème ??,

$$\exists M \geq 1 \quad \text{et} \quad \omega \geq 0 \quad \text{tq} : \|G(t)\| \leq Me^{\omega t},$$

donc,

$$\|G(t)\| \leq M_1.$$

Pour $0 \leq t \leq 1$, soit $t_0 < t_1 \leq t_2 \leq t_1 + 1$ alors,

$$G(t_2)x - G(t_1)x = \int_{t_1}^{t_2} AG(s)x ds = \int_{t_1}^{t_2} G(s - t_1)AG(t_1)x ds, \quad (3.1)$$

et donc,

$$\|G(t_2)x - G(t_1)x\| \leq (t_2 - t_1)M_1\|AG(t_1)\| \|x\|, \quad \text{car} \quad 0 \leq s - t_1 \leq 1,$$

qui implique la continuité de $G(t)$ pour $t > t_0$ dans $\mathcal{L}(X)$.

Nous précédons maintenant par récurrence sur n . Supposons que (1) et (2) sont vrais jusqu'à n . Soit $t > (n+1)t_0$. Choisissons $s > nt_0$, tel que $t - s > t_0$.

Alors:

$$G^{(n)}(t)x = G(t - s)A^n G(s)x, \quad \text{pour tout} \quad x \in X. \quad (3.2)$$

6. Différentiabilité.

Le membre de droite de (??) est dérivable car $t - s > t_0$ donc $G(t)x$ est $(n + 1)$ -fois dérivable et

$$G^{(n+1)}(t)x = A^{n+1}G(t)x, \text{ pour tout } x \in X \text{ et } t > (n + 1)t_0.$$

Ceci implique que $G(t) : X \rightarrow D(A^{n+1})$ et que par le même argument que précédemment, $A^{n+1}G(t)$ est un opérateur linéaire borné pour $t > (n + 1)t_0$. Ceci conclut la preuve de (1).

La continuité de $G^{(n)}(t)$ pour $t > (n+1)t_0$ dans $\mathcal{L}(E)$ est prouvée exactement comme pour le cas $n = 1$, en utilisant (??) et le fait que $A^n G(t)$ est borné pour $t > (n + 1)t_0$. En effet, pour $nt_0 < t_1 \leq t_2 \leq t_1 + 1$ on a :

$$\begin{aligned} \|G^{(n)}(t_2)x - G^{(n)}(t_1)x\| &= \left\| \int_{t_1}^{t_2} G(s - t_1)A^n G(t_1)x ds \right\| \\ &\leq |t_2 - t_1| \cdot M_1 \cdot \|A^n G(t_1)\| \cdot \|x\|. \end{aligned}$$

□

Corollaire 3.3 *Soit $G(t)$ un C_0 -semi-groupe qui est dérivable pour $t > t_0$. Si $t > (n + 1)t_0$ alors $G(t)$ est n -fois dérivable dans $\mathcal{L}(X)$.*

Preuve : De la partie (2) du lemme ??, il s'ensuit que pour $t > (n + 1)t_0$, $A^k G(t)$, $1 \leq k \leq n$ est continu dans $\mathcal{L}(X)$. Si $t > (n + 1)t_0$, on a :

$$G^{(k-1)}(t + h) - G^{(k-1)}(t) = \int_t^{t+h} A^k G(s) ds, \text{ pour } 1 \leq k \leq n,$$

ce qui implique la différentiabilité de $G^{(k-1)}(t)$ dans $\mathcal{L}(X)$ pour $1 \leq k \leq n$ et $t > (n + 1)t_0$ et donc $G(t)$ est n -fois différentiable $\mathcal{L}(X)$.

Corollaire 3.4 *Soit $G(t)$ un C_0 -semi-groupe dérivable, alors $G(t)$ est dérivable un nombre infini de fois dans $\mathcal{L}(X)$ pour $t > 0$.*

Lemme 3.5 *Soit $G(t)$ un C_0 -semi-groupe dérivable et soit A son générateur infinitésimal. Alors :*

$$G^{(n)}(t) = \left(AG \left(\frac{t}{n} \right) \right)^n = \left(G' \left(\frac{t}{n} \right) \right)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (3.3)$$

6. Différentiabilité.

Preuve : Le lemme est prouvé par récurrence.

1) Pour $n = 1$ le résultat a été prouvé dans le lemme ??.

2) Si l'égalité (??) est vraie pour n et $t \geq s$ alors:

$$G^{(n)}(t) = \left(AG \left(\frac{t}{n} \right) \right)^n = G(t-s) \left(AG \left(\frac{s}{n} \right) \right)^n. \quad (3.4)$$

Dérivant l'équation (??) par rapport à t on obtient:

$$G^{(n+1)}(t) = AG(t-s) \left(AG \left(\frac{s}{n} \right) \right)^n. \quad (3.5)$$

En prenant $s = \frac{nt}{n+1}$ dans (??), du fait que

$$t - s = \frac{s}{n} = \frac{t}{n+1},$$

on aura

$$G^{(n+1)}(t) = AG \left(\frac{t}{n+1} \right) \left(AG \left(\frac{t}{n+1} \right) \right)^n = \left(AG \left(\frac{t}{n+1} \right) \right)^{n+1},$$

et le résultat est vrai pour $n+1$.

2 Semi-groupes analytiques.

Jusqu'à présent, nous avons traité des semi-groupes dont le domaine du paramètre était l'axe réel non négatif. Nous allons maintenant considérer la possibilité d'étendre le domaine du paramètre aux régions du plan complexe qui incluent l'axe réel non négatif. Il est clair que pour préserver la structure du semi-groupe, le domaine dans lequel le paramètre complexe doit varier doit être un semi-groupe additif de nombres complexes. Dans cette section cependant, nous nous limiterons à des domaines complexes très particuliers, à savoir les secteurs autour de l'axe réel positif.

Définition 3.6 Soit

$$\Delta = \{z : \varphi_1 < \arg z < \varphi_2, \varphi_1 < 0 < \varphi_2\},$$

et pour tout $z \in \Delta$ soit $G(z)$ un opérateur linéaire borné. La famille $\{G(z), z \in \Delta\}$ est un semi-groupe analytique dans Δ si:

1. La fonction $z \mapsto G(z)$ est analytique dans Δ .
2. $G(0) = I$ et $\lim_{z \rightarrow 0, z \in \Delta} G(z)x = x$ pour tout $x \in X$.
3. $G(z_1 + z_2) = G(z_1).G(z_2)$ pour tout $z_1, z_2 \in \Delta$.

Un semi-groupe $G(t)$ sera appelé analytique s'il est analytique dans un secteur contenant l'axe réel non négatif.

Clairement, la restriction d'un semi-groupe analytique à l'axe réel est un C_0 -semi-groupe. Nous nous intéresserons à la possibilité d'étendre un C_0 -semi-groupe donné à un semi-groupe analytique dans un secteur Δ autour de l'axe réel non négatif.

Puisque la multiplication d'un C_0 -semi-groupe $G(t)$ par $e^{\omega t}$ n'affecte pas la possibilité de l'étendre à un semi-groupe analytique dans un secteur Δ , nous nous limiterons dans de nombreux résultats de cette section au cas de C_0 -semi-groupes uniformément bornés. Les résultats pour les C_0 -semi-groupes généraux découlent des résultats correspondants pour les C_0 -semi-groupes uniformément bornés de manière évidente. Par commodité, nous

7. Semi-groupes analytiques.

supposons aussi souvent que $0 \in \rho(A)$ où A est le générateur infinitésimal du semi-groupe $G(t)$. Ceci encore peut être toujours réalisé en multipliant le semi-groupe $G(t)$ uniformément borné par $e^{-\varepsilon t}$ pour $\varepsilon > 0$.

Théorème 3.7 (*Pazy, page 30, le théorème 1.7.7*). *Soit A un opérateur de domaine dense dans X satisfaisant les conditions suivantes:*

1. *Pour $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$,*

$$\rho(A) \supset \Sigma_0 = \left\{ \lambda : |\arg \lambda| < \frac{\pi}{2} + \delta \right\} \cup \{0\}. \quad (3.6)$$

2. *Il existe une constante M telle que:*

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{M}{|\lambda|} \text{ pour } \lambda \in \Sigma_\delta, \lambda \neq 0. \quad (3.7)$$

Alors, l'opérateur A est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi groupe $G(t)$ satisfaisant

$$\|G(t)\| \leq C, \quad (C > 0).$$

De plus, $G(t)$ est donné par:

$$G(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} R(\lambda : A) d\lambda, \quad (3.8)$$

avec Γ est une courbe lisse dans Σ_0 par courbe de $\infty e^{-i\nu}$ à $\infty e^{i\nu}$ pour $\frac{\pi}{2} < \nu < \frac{\pi}{2} + \delta$. L'intégrale (??) converge pour tout $t > 0$ dans la topologie uniforme d'opérateur.

En fait on a plus que ce résultat. Le semi-groupe $G(t)$ généré par un A densément défini satisfaisant (??) et (??), peut être étendu à un semi-groupe analytique dans le secteur

$$\Delta_\delta = \{z : |\arg z| < \delta\}$$

et dans tout sous-secteur fermé

$$\overline{\Delta_{\delta'}} = \{z : |\arg z| \leq \delta' < \delta\},$$

7. Semi-groupes analytiques.

$\|G(z)\|$ est uniformément borné. Ceci et bien d'autres découlent du prochain théorème

Théorème 3.8 *Soit $G(t)$ un C_0 -semi-groupe uniformément borné. Soit A le générateur infinitésimal de $G(t)$ et supposons que $0 \in \rho(A)$. Les énoncés suivants sont équivalents:*

1. $G(t)$ peut être étendu à un semi-groupe analytique dans un secteur

$$\Delta_\delta = \{z : |\arg z| < \delta\},$$

et $\|G(z)\|$ est uniformément borné dans tout sous-secteur fermé $\overline{\Delta_{\delta'}}$, $\delta' < \delta$, de Δ_δ .

2. Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\sigma > 0$, $\tau \neq 0$

$$\|R(\sigma + i\tau : A)\| \leq \frac{C}{|\tau|}. \quad (3.9)$$

3. Il existe $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ et $M > 0$ tels que:

$$\rho(A) \supset \Sigma = \left\{ \lambda : |\arg \lambda| < \frac{\pi}{2} + \delta \right\} \cup \{0\}, \quad (3.10)$$

et

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{M}{|\lambda|} \text{ pour } \lambda \in \Sigma, \lambda \neq 0. \quad (3.11)$$

4. $G(t)$ est différentiable pour $t > 0$ et il existe une constante C tel que:

$$\|AG(t)\| \leq \frac{C}{t} \text{ pour } t > 0. \quad (3.12)$$

Preuve :

(i) Montrons que (1) $\Rightarrow$ (2):

Soit $0 < \delta' < \delta$ tel que $\|G(z)\| \leq C_1$ pour $z \in \overline{\Delta_{\delta'}} = \{z : |\arg z| \leq \delta' < \delta\}$.

Pour $x \in X$ et $\sigma > 0$ on a:

$$R(\sigma + i\tau : A)x = \int_0^\infty e^{-(\sigma+i\tau)t} G(t)x dt. \quad (3.13)$$

7. Semi-groupes analytiques.

De l'analyticité de $G(z)$ et du fait que $\|G(z)\|$ est uniformément borné dans $\overline{\Delta_\delta}$, il s'ensuit que l'on peut décaler le chemin d'intégration dans (??) de l'axe réel positif à n'importe quel rayon $\rho e^{i\nu}$, $0 < \rho < \infty$ et $|\nu| \leq \delta'$. Pour $\tau > 0$, en décalant le chemin d'intégration vers le rayon $\rho e^{i\delta'}$ et en estimant l'intégrale résultante, on trouve

$$\begin{aligned} \|R(\sigma + i\tau : A)x\| &\leq \int_0^\infty e^{-\rho(\sigma \cos \delta' + \tau \sin \delta')} C_1 \|x\| d\rho \\ &\leq \frac{C_1 \|x\|}{\sigma \cos \delta' + \tau \sin \delta'} \leq \frac{C}{\tau} \|x\|, \end{aligned} \quad (3.14)$$

avec $C = \frac{C_1}{\sin \delta'} > 0$ car $0 < \delta' < \frac{\pi}{2}$ et $\sigma \cos \delta' > 0$.

De même pour $\tau < 0$ on décale le chemin d'intégration vers le rayon $\rho e^{-i\delta'}$ et on obtient:

$$\|R(\lambda : A)\| \leq -\frac{C}{\tau}. \quad (3.15)$$

De (??) et (??) on déduit (??).

(ii) Montrons que (2) $\Rightarrow$ (3).

Par hypothèse, puisque A est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe, nous avons:

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{M_1}{\operatorname{Re} \lambda} \text{ pour } \operatorname{Re} \lambda > 0.$$

De (2) on a pour $\operatorname{Re} \lambda > 0$,

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{C}{|\operatorname{Im} \lambda|}$$

et donc,

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{C_1}{|\lambda|} \text{ pour } \operatorname{Re} \lambda > 0.$$

Pour $\sigma > 0$, écrivons le développement de Taylor pour $R(\lambda : A)$ autour de $\lambda' = \sigma + i\tau$

$$R(\lambda : A) = \sum_{n=0}^{\infty} (R(\sigma + i\tau : A))^{n+1} (\sigma + i\tau - \lambda)^n. \quad (3.16)$$

7. Semi-groupes analytiques.

Cette série converge dans $B(X)$ pour

$$\|R(\sigma + i\tau : A)\| |\sigma + i\tau - \lambda| \leq k < 1.$$

En choisissant

$$\operatorname{Im} \lambda = \tau,$$

dans (??) et en utilisant (??) nous voyons que la série converge uniformément dans $B(X)$ pour

$$\frac{C}{\tau} |\sigma - \operatorname{Re} \lambda| \leq k \Rightarrow |\sigma - \operatorname{Re} \lambda| \leq \frac{k|\tau|}{C}$$

puisque $\sigma > 0$ et $k < 1$ sont arbitraire alors, en faisant tendre σ vers 0 on aura:

$$|\operatorname{Re} \lambda| < \frac{k \cdot \tau}{C},$$

qui implique:

$$\frac{|\operatorname{Re} \lambda|}{|\tau|} < \frac{k}{C},$$

il s'ensuit que $\rho(A)$ contient l'ensemble de tous les λ avec $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$ et satisfaisant

$$\frac{|\operatorname{Re} \lambda|}{|\operatorname{Im} \lambda|} < \frac{k}{C}, \quad (3.17)$$

c'est à dire,

$$\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} \lambda > 0\} \cup \left\{ \lambda \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} \lambda \leq 0 : \frac{|\operatorname{Re} \lambda|}{|\operatorname{Im} \lambda|} < \frac{k}{C} \right\},$$

et en particulier

$$\rho(A) \supset \left\{ \lambda : |\arg \lambda| \leq \frac{\pi}{2} + \delta \right\}. \quad (3.18)$$

En effet,

i) $\{\lambda \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} \lambda > 0\} = \{\lambda \in \mathbb{C}, |\arg \lambda| < \frac{\pi}{2}\}.$

ii) Si $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$ alors

$$|\arg \lambda| = \frac{\pi}{2} + \delta, \quad 0 \leq \delta < \frac{\pi}{2}$$

7. Semi-groupes analytiques.

qui implique:

$$\lambda = r(-\sin \delta + i \cos \delta) \Rightarrow \left| \frac{Re \lambda}{Im \lambda} \right| = \frac{-Re \lambda}{|Im \lambda|} = \frac{\sin \delta}{\cos \delta},$$

donc:

$$(??) \Rightarrow \arctan \delta < \frac{k}{C},$$

en faisant prenant la réunion on obtient (??).

où $\delta = k \arctan \frac{1}{C}$, $0 < k < 1$. De plus, dans cette région

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{C}{1-k} \cdot \frac{1}{|\tau|} \leq \frac{\sqrt{C^2+1}}{(1-k)} \cdot \frac{1}{|\lambda|} = \frac{M}{|\lambda|}. \quad (3.19)$$

Puisque par hypothèse $0 \in \rho(A)$, alors A satisfait (3).

(iii) Montrons que (3) $\Rightarrow$ (4).

Si A satisfait (3), il découle du théorème ?? que

$$G(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} R(\lambda : A) d\lambda, \quad (3.20)$$

où Γ est le chemin composé des deux rayons $\rho e^{i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$, $0 < \rho < \infty$ et $\frac{\pi}{2} < \nu < \frac{\pi}{2} + \delta$. Γ orienté de manière à ce que $Im \lambda$ augmente de long de Γ . L'intégrale (??) converge dans $B(X)$ pour $t > 0$. En dérivant formellement (??) par rapport à t on a:

$$G'(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda e^{\lambda t} R(\lambda : A) d\lambda. \quad (3.21)$$

Mais, l'intégrale (??) converge dans $B(X)$ pour tout $t > 0$ alors:

$$\|G'(t)\| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^\infty M e^{-\rho \cos \theta t} d\rho = \left(\frac{M}{\pi \cos \nu} \right) \frac{1}{t}. \quad (3.22)$$

Donc la dérivation formelle de $G(t)$ est justifiée, et $G(t)$ est dérivable pour $t > 0$ et on a:

$$\|AG(t)\| = \|G'(t)\| \leq \frac{C}{t} \text{ pour } t > 0. \quad (3.23)$$

7. Semi-groupes analytiques.

(iv) Montrons que (4) $\Rightarrow$ (1).

Puisque $G(t)$ est différentiable pour tout $t > 0$, il découle du lemme ?? que

$$\|G^{(n)}(t)\| = \left\| \left(AG \left(\frac{t}{n} \right) \right)^n \right\| = \left\| G' \left(\frac{t}{n} \right)^n \right\| \leq \left\| G' \left(\frac{t}{n} \right) \right\|^n.$$

En utilisant ce fait avec (??) et le fait que $n^n \leq n!.e^n$ on a:

$$\frac{1}{n!} \|G^{(n)}(t)\| \leq \left(\frac{Ce}{t} \right)^n. \quad (3.24)$$

On considère maintenant la série de puissance

$$G(z) = G(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G^{(n)}(t)}{n!} \cdot (z - t)^n \quad \text{où } t = \operatorname{Re} z. \quad (3.25)$$

Utilisant (??), cette série converge uniformément dans $B(X)$ pour

$$|z - t| \leq k \frac{t}{eC},$$

pour tout $k < 1$. Mais

$$\frac{|z - t|}{t} = tg |\arg z|.$$

On déduit que $G(z)$ est analytique dans

$$\Delta = \left\{ z : |\arg z| < \arctan \frac{1}{Ce} \right\}.$$

Puisque évidemment pour les valeurs réelles de z , $G(z) = G(t)$, alors $G(z)$ étend $G(t)$ au secteur Δ . Par l'analyticité de $G(z)$ il s'ensuit que $G(z)$ satisfait la propriété du semi-groupe et de (??) on voit que

$$G(z)x \rightarrow x \quad \text{lorsque } z \rightarrow 0 \text{ dans } \Delta.$$

Enfin, en réduisant le secteur Δ à tout sous-secteur fermé

$$\overline{\Delta_\varepsilon} = \left\{ z : |\arg z| \leq \arctan \left(\frac{1}{Ce} \right) - \varepsilon \right\},$$

7. Semi-groupes analytiques.

on voit que $\|G(z)\|$ est uniformément borné dans $\overline{\Delta}$, et la preuve est complète. $\square$

Conclusion.

Conclusion.

Ce mémoire m'a permis de revoir en détail les notions de semi-groupes et les notions de l'analyse fonctionnelle. Par les démonstrations et explications des passages, que l'auteur du livre a estimé acquit pour les lecteurs, je pense que la lecture de ce mémoire devient agréable à lire, en particulier pour les étudiants de Master, option Analyse Fonctionnelle. J'espère que j'ai réalisé mon objectif.

Références bibliographiques

- [1] H. Brezis; Analyse Fonctionnelle - Théorie et Applications, Masson Paris 1993.
- [2] A. Pazy, Semigroups of Linear Operators and Application to Partial Differential Equations, Applied Mathematical Sciences; V. 44 New York 1983.