2

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE ABDELHAMIDE IBN BADIS DE MOSTAGANEM

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET D'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHMÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

MEMOIRE

Présenté par
Melle Anissa MESSAFA

Pour obtenir le
DIPLÔME DE MASTER

Spécialité: Mathématiques
Option : Analyse Harmonique et EDP

Intitulé :

Calcul Fractionnaire et L'ondelette de Shannon

Soutenu le 13/06/2013

Devant les membres du jury:

Président:	Sadek GALA	MC	UMAB
Examinateur:	Mansouria SAIDANI	MA	UMAB
Encadreur:	Sidi Mohamed BAHRI	MCA	UMAB

Promotation :2012-2013

Table des matières

Remerciement

Avant tout, je remercie Dieu, le tout puissant, de m'avoir donné le courage pour réaliser ce travail.

Je tiens, tout d'abord, à adresser mes plus vifs remerciements à Monsieur Sidi Mohamed BAHRI, mon encadreur, qui m'a guidé dans cette étude, pour son aide continue, ses encouragements et ses conseils précieux.

Je n'oublierai pas de remercier également le Président Monsieur Sadek GAlA et l'examinatrice Madame Mansouria SAIDANI membres du jury, pour avoir lu et evalué mon travail.

Je remercie l'ensemble des enseignants du département de Mathématiques et Informatique de l'université Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem.

Introduction

La théorie de dérivation fractionnaire est un sujet presque aussi ancien que le calcul classique tel que nous le connaissons aujourd'hui, ces origines remontent [19] à la fin du $17^{ième}$

siècle, l'époque où Newton et Leibniz ont développé les fondements du calcul différentiel et intégral. En particulier, Leibniz a présenté le symbole $\frac{d^n}{dt^n}$ pour désigner la $n^{ième}$ dérivée d'une fonction f. Quand il l'a annoncé dans une lettre à l'Hôpital, ce dernier a répondu :

Que signifie $\frac{d^n}{dt^n} f(t)$, si $n = \frac{1}{2}$?

Cette lettre de l'Hôpital, écrite en 1695, est aujourd'hui admise comme le premier incident de ce que nous appelons la dérivation fractionnaire, et le fait que l'Hôpital a demandé spécifiquement pour $n = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire une fraction a en fait donné lieu au nom de cette partie des mathématiques.

Cependant, cette théorie peut être considérée comme un sujet nouveau aussi, depuis seulement un peu plus de trente années elle a été objet de conférences spécialisées.

Pour la première conférence, le mérite est attribué à B. Ross qui a organisé la première conférence sur le calcul fractionnaire et ses applications à l'université de New Haven en juin 1974, où il a édité les débats. Pour la première monographie le mérite est attribué à K.B. Oldham et J. Spanier, qui ont publié un livre consacré au calcul fractionnaire en 1974 après une collaboration commune, commencée en 1968.

Une autre théorie se développe en parallèle avec la dérivation fractionnaire c'est la théorie d'ondelettes de Shannon [1, 2] qu'est basée sur une famille de fonctions orthogonales ayant de nombreuses propriétés intéressantes. les ondelettes bénéficient de nombreux avantages [3, 4] , d'ailleurs, ce sont des fonctions analytiques indéfiniment différentiables. Ceci nous permet de définir les coefficients de connexion pour tout d'ordre de dérivation [5, 7]. Les coefficients de connexion sont un outil utile pour la projection des opérateurs différentiels, utiles aussi pour calculer la solution ondelette des équations intégro-différentielles [8, 13] . Les ondelettes sont des fonctions localisées dans le temps et / ou fréquence, elles constituent une base de l'espace de fonctions $L_2(\mathbb{R})$. En outre, l'ondelette permet la décomposition multi-échelle des problèmes, soulignant ainsi la contribution de chaque échelle. En définissant un produit scalaire approprié sur la famille orthogonale des fonctions échelles / ondeletteles, chaque fonction $L_2(\mathbb{R})$ peut être approximée à une échelle fixe, par une série tronquée ayant, comme base, les fonctions d'échelle et les fonctions d'ondelette. Les coefficients d'ondelette de ces séries représentent la contribution de chaque échelle. L'ondelette de Shannon sont liées aux ondelettes harmoniques [3, 5, 8], étant la partie réelle de celle-ci, et de la fonction sinc bien connu, qui est la fonction de base dans analyse de signal. Il convient également de remarquer que, par rapport à d'autres familles d'ondelettes, le principal avantage des ondelettes de Shannon est qu'elles sont des fonctions analytiques indéfiniment différentiables. De plus, elles sont nettement bornées dans le domaine des fréquences, de sorte que, en tenant compte de l'identité de Parseval, aucun calcul nous peut être effectué facilement par leur transformeés de Fourier.

Ce mémoire a pour objet l'étude du Calcul Fractionnaire et des Ondelettes de Shannon. Il est constitué de trois chapitres.

Dans le premier chapitre, on introduit quelques fonctions essentielles pour le calcul fractionnaire, puis nous abordons l'intégration fractionnaire (au sens de Riemann-Liouville), ensuite nous donnons la dérivé fractionnaire sous forme de trois approches différentes célèbres.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de la théorie d'ondelette de Shannon, nous donnons leur définitions et leurs propriétés ainsi que la reconstruction de leurs dérivés.

Enfin au **troisième chapitre,** nous présentons la dérivé fractionnaire des fonctions d'échelle φ, l'ondelette ψ et de toute fonction $L_2(\mathbb{R})$.

Chapitre 1

Calcul fractionnaire

La méthode la plus simple pour définir la dérivée fractionnaire est basée sur l'hypothèse que le dérivé non entière de la fonction exponentielle coïncide avec la dérivé formelle

d'ordre entier de telle sorte que :

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}e^{ax} = a^\alpha e^{ax} \qquad \alpha \in \mathbb{Q}.$$

Pour les valeurs négatives de α, cette formule est toujours valable et représente l' intégration.

Il est clair que la dérivée fractionnaire ne peut pas être calculée analytiquement, sauf pour certaines fonctions spéciales, à savoir,

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}e^{ax} = a^\alpha e^{ax}, \qquad \frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\cos ax = a^\alpha \cos\left(ax + \frac{\pi}{2}\alpha\right).$$

1.1 Outils de base

1.1.1 La fonction Gamma d'Euler

L'une des fonctions de base utilisée dans le calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler qui prolonge le factoriel aux valeurs réelles.

Définition 1 *La forme intégrale de la fonction Gamma est donnée par [19] :*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt, \qquad z > 0. \tag{1.1}$$

L'intégration par partie de (1.1) *conduit à la relation de récurrence suivante :*

Pour tout $z \in \mathbb{R} \setminus \{0, \ -1, \ -2, \ \ldots\}$, *et* $m \in \mathbb{N}$, *on a :*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

et

$$\Gamma(z+m) = z(z+1)\ldots(z+m-1)\Gamma(Z).$$

$$\Gamma(n+1) = n!.$$

Au - dessus le graphe de la fonction Gamma d'Euler

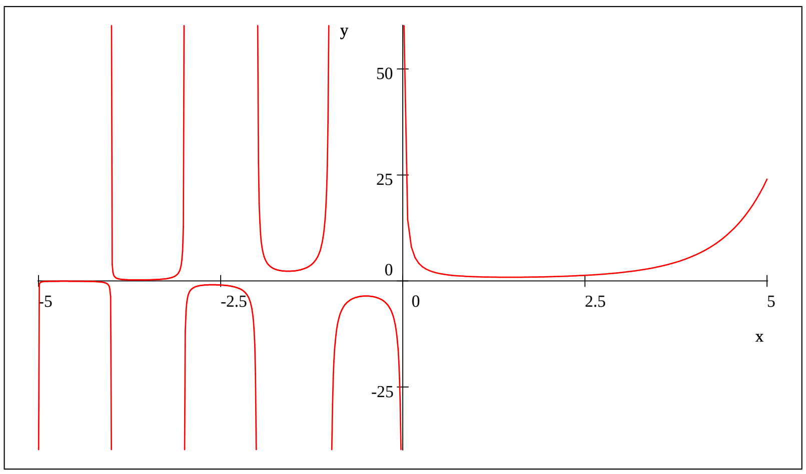

Figure1.1: Graphe de la fonction Gamma d'Euler

1.1.2 La fonction Bêta

Définition 2 *On définit la fonction Bêta par [19] :*

$$B(\alpha, \ \beta) := \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^{\beta-1} du, \qquad \alpha > 0, \ \beta > 0. \tag{1.2}$$

Les fonctions Gamma et Bêta sont reliées par la relation :

$$B(\alpha, \ \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \tag{1.3}$$

1.2 Intégration non entière

1.2.1 Définitions

Dans ce paragraphe, on donne les définitions de base liées aux intégrales au sens de Riemann-Liouville.

Définition 3 *Soit f une fonction continue sur $[0, \infty[$. On définit l'opérateur intégrale fractionnaire d'ordre α au sens de Riemann-Liouville par la formule [20] :*

$$\begin{aligned} J^{\alpha} f(t) &:= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)\, d\tau; \qquad \alpha > 0,\ t > 0 \\ J^0 f(t) &:= f(t). \end{aligned} \tag{1.4}$$

1.2.2 Propriétés

Dans ce paragraphe, on donne quelques propriétés liées aux intégrales fractionnaires.

Proposition 1 *Soit J^{α} l'opérateur intégrale fractionnaire d'ordre α de Riemann-Liouville. On a :*

$$J^{\alpha} t^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} t^{\alpha+\beta},\ \alpha > 0,\ \beta > -1,\ t > 0, \tag{1.5}$$

Preuve. Par définition, on a :

$$J^{\alpha} t^{\beta} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \tau^{\beta} d\tau$$

ce qui est équivalent à :

$$J^{\alpha} t^{\beta} = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \left(1 - \frac{\tau}{t}\right)^{\alpha-1} \tau^{\beta} d\tau$$

On pose $\frac{\tau}{t}=y$, on obtient alors :

$$\begin{aligned}
J^{\alpha}t^{\beta} &= \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{t}(1-y)^{\alpha-1}t^{\beta+1}y^{\beta}d\tau \\
&= \frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{1}(1-y)^{\alpha-1}y^{\beta}d\tau \\
&= \frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)}B(\alpha,\ \beta+1)
\end{aligned}$$

Puis, en utilisant la relation (1.3) entre les deux fonctions Γet B, on a :

$$J^{\alpha}t^{\beta}=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}t^{\alpha+\beta},\ \alpha>0,\ \beta>-1,\ t>0,$$

Ainsi la propriété (1.5) est démontrée. □

Proposition 2 *Soient $\alpha>0$, $\beta>0$, on a la propriété du semi -groupe suivante :*

$$\left(J^{\alpha}\circ J^{\beta}\right)f(t)=\left(J^{\beta}\circ J^{\alpha}\right)f(t)=J^{\alpha+\beta}f(t)\,. \tag{1.6}$$

Preuve. Par définition, on a :

$$\begin{aligned}
J^{\alpha}J^{\beta}f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_{0}^{t}(t-\tau)^{\alpha-1}\left[\int_{0}^{\tau}(\tau-\rho)^{\beta-1}f(\rho)\,d\rho\right]d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_{0}^{t}\left[\int_{0}^{\tau}(t-\tau)^{\alpha-1}(\tau-\rho)^{\beta-1}f(\rho)\,d\rho\right]d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_{0}^{\tau}\int_{0}^{t}(t-\tau)^{\alpha-1}(\tau-\rho)^{\beta-1}f(\rho)\,d\tau
\end{aligned}$$

En utilisant (1.5), on obtient :

$$\begin{aligned}
J^{\alpha}J^{\beta}f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int\limits_{0}^{\tau}\left(J^{\alpha}(\tau-\rho)^{\beta-1}f(\rho)\right)dp \\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int\limits_{0}^{\tau}\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(\tau-\rho)^{\alpha+\beta-1}f(\rho)\,d\rho \\
&= J^{\alpha+\beta}f(t) \\
&= J^{\beta+\alpha}f(t).
\end{aligned}$$

□

Proposition 3 *Soient $c>0$, $\alpha>0$, on a alors :*

$$J_{-\infty}^{\alpha}e^{ct}=c^{-\alpha}e^{ct}. \tag{1.7}$$

Preuve. Avec les mêmes arguments que précédemment, on obtient :

$$J_{-\infty}^{\alpha}e^{ct}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{-\infty}^{t}(t-\tau)^{\alpha-1}e^{c\tau}d\tau,$$

Si on pose $(t-\tau)=y$, on obtient alors :

$$\begin{aligned}
J_{-\infty}^{\alpha}e^{ct} &= -\frac{e^{ct}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{+\infty}^{0}y^{\alpha-1}e^{-cy}dy \\
&= \frac{e^{ct}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{0}^{+\infty}y^{\alpha-1}e^{-cy}dy
\end{aligned}$$

Le changement de variable $t=cy$ transforme cette dernière intégrale en :

$$J_{-\infty}^{\alpha}e^{ct}=\frac{e^{ct}}{c^{\alpha}\Gamma(\alpha)}\int\limits_{0}^{+\infty}t^{\alpha-1}e^{-t}dt,$$

Donc si on pose $(t-\tau)=y$, on obtient :

$$\begin{aligned} J_{-\infty}^{\alpha} e^{ct} &= -\frac{e^{ct}}{\Gamma(\alpha)} \int_{+\infty}^{0} y^{\alpha-1} e^{-cy} dy \\ &= \frac{e^{ct}}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{+\infty} y^{\alpha-1} e^{-cy} dy \end{aligned}$$

Le changement de variable $t=cy$ transforme cette dernière intégrale en :

$$J_{-\infty}^{\alpha} e^{ct} = \frac{e^{ct}}{c^{\alpha}\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt,$$

D'où

$$J_{-\infty}^{\alpha} e^{ct} = \frac{e^{ct}\Gamma(\alpha)}{c^{\alpha}\Gamma(\alpha)} = \frac{e^{ct}}{c^{\alpha}},$$

ce qui achève la démonstration de la proposition. □

Exemple 1 *Considérons la fonction $f(x)=(t-a)^{\beta}$. Alors*

$$J^{\alpha}(t-a)^{\beta} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{t} (t-\tau)^{\alpha-1} (\tau-a)^{\beta} d\tau$$

Pour évaluer cette intégrale on pose le changement $\tau = a+(t-a)s$, d'où

$$\begin{aligned} J^{\alpha}(t-a)^{\beta} &= \frac{(t-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{1} (1-s)^{\alpha-1} s^{\beta} ds \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+\alpha)} (t-a)^{\beta+\alpha} \end{aligned}$$

après utilisation de la relation (1.3).

On voit bien que c'est une généralisation du cas $\alpha=1$ où on a :

$$J^{1}(t-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+2)} (t-a)^{\beta+1} = \frac{(t-a)^{\beta+1}}{\beta+1}$$

à cause de la relation $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$

1.3 Dérivation non entière

Dans cette section on présentera les trois célèbres approches de la dérivation d'ordre non entier : l'approche de Grïnwald-Letnikov, de Riemann-Liouville et celle de Caputo.

1.3.1 Opérateur de dérivée n^{ième}

Définition 4 *La dérivation entière d'ordre n d'une fonction f est donnée par :*

$$D^n f(t) = \frac{d^n}{dx^n} f(t).$$

1.3.2 Approche de Grïnwald-Letnikov

Elle est basée sur la généralisation de la dérivée classique d'une fonction f d'ordre $n \in \mathbb{N}$.

Pour $f'(t)$ on a :

$$f'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h},$$

et

$$\begin{aligned} f''(t) &= \lim_{h \to 0} \frac{f'(t) - f'(t-h)}{h}, \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left[\frac{f(t) - f(t-h)}{h} - \frac{f(t-h) - f(t-2h)}{h} \right], \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^2} \left[f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h) \right] \end{aligned}$$

Puis,

$$f^{(3)}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^3} \left[f(t) - 3f(t-h) + 3f(t-2h) - f(t-3h) \right]$$

Par induction, on a :

$$f^{(n)}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_k^n \, f(t-kh),$$

avec

$$C_k^n = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Ainsi la généralisation de l'expression de $f^{(n)}(t)$ est :

$$f^{(\alpha)}(t)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{\alpha}}\sum_{k=0}^{n}\frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-\alpha)}f(t-kh).$$

D'où la définition suivante :

Définition 5 *[19] Soit $f\in C^{n}([a,\ b])$, $n-1<\alpha<n$, $n\in\mathbb{N}$, la dérivée d'ordre α de f au sens de Grïnwald-Letnikov est définie par :*

$$\begin{aligned} G^{\alpha}f(t) &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(t-a)^{k-\alpha} \\ &\quad+\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{n-\alpha-1}f^{(n)}(\tau)\,d\tau. \end{aligned}\tag{1.8}$$

Propriétés

1. Sous les conditions $f^{(k)}(a)=0 \quad (K=0,\ 1,\ 2,\ldots\ldots p-1)$, on a :

   $$G^{\alpha}\left[G^{\beta}f(t)\right]=G^{\beta}\left[G^{\alpha}f(t)\right]=G^{\alpha+\beta}f(t),$$

   où $p=\max(m,\ n)$ avec $0\leq m<\alpha<m+1$ et $0\leq n<\beta<n+1$.

2. Pour $f\,(k=0,1,\ 2,\ldots\ldots n-1)$, on trouve :

   $$G^{\alpha}G^{n}f(t)=G^{n}G^{\alpha}f(t)=G^{n+\alpha}f(t).$$

Exemples

1. La dérivée d'une fonction constante au sens de Grïnwald-Letnikov.

   En général, la dérivée d'une fonction constante au sens de Grïnwald-Letnikov n'est pas nulle ni constante.

Si $f(t)=C$ et α non entier on a :$f^{(k)}(t)=0$ pour $k=1,\,2,\,\ldots,\,n$

$$\begin{aligned}G^{\alpha}f(t) &= \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}+\underbrace{\sum_{K=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(t-a)^{k-\alpha}}_{\substack{\Downarrow\\0}}\\ &\quad \underbrace{+.\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t(t-\tau)^{n-\alpha-1}f^{(n)}(\tau)\,d\tau}_{\substack{\Downarrow\\0}}\\ &= \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-p}.\end{aligned}$$

2. La dérivée de $f(t)=(t-a)^{\beta}$ au sens de Grïnwald-Letnikov.

   Soit α non entier et $0\leq n-1<\alpha<n$ avec $\alpha>n-1$ alors on a :

$$f^{(k)}(a)=0.$$

   pour $k=0,\,1,\,\ldots,\,n-1$.

   et

$$f^{(n)}(\tau)=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)}(\tau-a)^{\beta-n}$$

   d'où:

$$G^{\alpha}(t-\alpha)^{\beta}=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}\int_a^t(t-\tau)^{n-\alpha-1}(\tau-a)^{\beta-n}\,d\tau.$$

   En faisant le changement de variable $\tau=a+s(t-a)$ on aura :

$$\begin{aligned}G^{\alpha}(t-a)^{\beta} &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}\int_a^t(t-\tau)^{n-\alpha-1}(\tau-a)^{\beta-n}\,d\tau\\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}\int_0^1(1-s)^{n-\alpha-1}s^{\beta-n}ds\\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)B(n-\alpha,\;\beta-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}\\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}\\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}.\end{aligned}$$

Par exemple

$$
\begin{aligned}
G^{\frac{1}{2}}t &= \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1.5)}\sqrt{t} \\
&= \frac{\sqrt{t}}{\Gamma(1.5)}.
\end{aligned}
$$

1.3.3 Approche de Riemann-Liouville

Définition 6 1. *Soit $f \in C^1([a,\ b])$, la dérivée fractionnaire d'ordre α $(0 < \alpha < 1)$ au sens de Riemann-Liouville est*

$$
D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} f(\tau)\, d\tau. \tag{1.9}
$$

2. *Soit $f \in C^n([a,\ b])$, on définit la dérivée d'ordre α $(0 \leq n-1 < \alpha < n)$ au sens de Riemann-Liouville par*

$$
\begin{aligned}
D^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau)\, d\tau, \\
&= D^n J^{n-\alpha} f(t)
\end{aligned} \tag{1.10}
$$

3. *Soit $f \in C([a,\ b])$, la dérivée fractionnaire d'ordre α $(\alpha < 0)$ au sens de Riemann-Liouville est*

$$
\begin{aligned}
D^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha-1} f(\tau)\, d\tau, \\
&= J^{-\alpha} f(t).
\end{aligned} \tag{1.11}
$$

Propriétés Soient α, β deux paramètres réels et $f : [a,\ b[\to \mathbb{R}$.Alors, on a :

1. $D^\alpha J^\alpha f(x) = f(x)$, $\alpha > 0$.
2. $D^\beta J^\alpha f(x) = D^{\beta-\alpha} f(x)$, $\beta < 0$, $\alpha > 0$.
3. $J^\alpha D^\alpha f(x) \neq f(x)$, $\alpha > 0$.
4. $D^n D^\alpha f(x) = D^{n+\alpha} f(x)$, $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}$.
5. $D^\alpha D^\beta f(x) \neq D^\beta D^\alpha f(x)$.
6. $D^\beta D^\alpha f(x) \neq D^{\alpha+\beta} f(x)$.

Exemples

1. En général, la dérivée non entière d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville n'est pas nulle ni constante mais on a :

$$D^{\alpha}C = \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}.$$

2. La dérivée de $f(t) = (t-a)^{B}$ au sens de Riemann-Liouville.

   Soit α non entier et $0 \leq n-1 < \alpha < n$ alors on a :

$$D^{\alpha}(t-a)^{B} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^{n}}{dt^{n}}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{n-\alpha-1}(\tau-a)^{p}\,d\tau$$

En faisant le changement de variable $\tau = a + s(t-a)$ on aura :

$$\begin{aligned} D^{\alpha}(t-a)^{\beta} &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^{n}}{dt^{n}}(t-a)^{n+\beta-\alpha}\int_{0}^{1}(1-s)^{n-\alpha-1}s^{\alpha}ds \\ &= \frac{\Gamma(n+\beta-\alpha+1)\,\beta(n-\alpha,\,\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\,\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(n+\beta-\alpha+1)\,\Gamma(n-\alpha)\,\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-\alpha)\,\Gamma(\beta-\alpha+1)\,\Gamma(n+\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}. \end{aligned}$$

1.3.4 Approche de Caputo

Définition 7 *Soit $f \in C^{n}([a,\ b])$, on définit la dérivée fractionnaire au sens de Caputo de la fonction f comme suit [19] :*

$$\begin{aligned} D_{*}^{\alpha}f(t) &= \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{n-\alpha-1}f^{(n)}(\tau)\,d\tau; & n-1<\alpha<n,\ n\in\mathbb{N}^{*} \\ \dfrac{d^{n}}{dt^{n}}f(t); & \alpha=n,\ a<t\leq b \end{cases} \\ &= J^{n-\alpha}D^{n}f(t). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Propriétés :

1. $D_{*}^{\alpha}C = 0$; C est une constante.

2. $D_*^\alpha t^\beta = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(-\alpha+\beta+1)} t^{\beta-\alpha}; & \beta > \alpha - 1 \\ 0; & \beta \leq \alpha - 1. \end{cases}$.

3. $D^\alpha f\ (t) = D_*^\alpha f\ (t) + \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0) \dfrac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}$, $a = 0$, $t > 0$, $n-1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Exemple 2 *La dérivée de $f(t) = (t-a)^\beta$ au sens de Caputo. Soit α un nombre non entier $0 \leq n-1 < \alpha < n$ avec $\alpha > n-1$ alors on a :*

$$f^{(n)}(\tau) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)} (\tau-a)^{\beta-n}$$

d'où

$$D_*^\alpha (t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} \int\limits_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} (\tau-a)^{\beta-n} \, d\tau$$

En faisant le changement de variable $\tau = a + s(t-a)$ on aura :

$$\begin{aligned} D_*^\alpha (t-a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} (\tau-a)^{\beta-n} \, d\tau \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} (t-a)^{\beta-\alpha} \int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1} s^{\beta-n} ds \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1) B(n-\alpha,\ \beta-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} (t-a)^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha}. \end{aligned}$$

Chapitre 2

Ondelette de Shannon

Les ondelettes sont des fonctions mathématiques qui coupent les données en différents composantes fréquentielles et étudient chaque composante avec une résolution assortie à son échelle.

L'avantage qu'elles ont sur a transformée de Fourier traditionnelle réside dans l'analyse physique de situations dans les quelles le signal contient des discontinuités et des fluctuations(changements rapide). Les ondelettes ont été développées différemment dans les champs de mathématique, de la physique quantique, l'électrotechnique et géologie séismique. Dans ce chapitre on étudie les ondelettes d'une manière générale, ensuite on prend comme exemple les ondelettes de Shannon.

2.1 Définition des ondelettes

Les ondelettes constituent une famille de fonctions générées par translation et par dilatation d'une seule fonction appelée "Ondelette-Mère".

Quand paramètre de dilatation a et celui de translation b varient continûement, l'expression générale de ces ondelettes, générées par l'ondelette-mère ψ est :

$$\psi_{a,\,b}(t) \;=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)\;;a,b\in\mathbb{R},a\neq 0.$$

Si $|a|<1$ alors on dit que l'ondelette est contractée, c'est à dire qu'elle s'adapte aux discontinuités du signal (phénomènes de petites tailles) et donc aux hautes fréquences.

Si $|a|>1$ l'ondelette est dilatée, elle analyse les grandes échelles donc les petites fréquences.

Si nous choisissons les paramètres a et b alors des valeurs discrètes $a=a_0^{-k}$, $b=nb_0a_0^{-k}$, $a_0>1$, $b_0>1$ et n et k sont entiers positifs, alors on aura la famille suivante des ondelettes discrètes

$$\psi_{k,n}(t) = |a_0|^{\frac{k}{2}} \psi\left(a_0^k t - nb_0\right)$$

où $\psi_{k,n}(t)$ forment une base d'ondelettes dans $L^2(\mathbb{R})$. En particulier, lorsque $a_0 = 2$, $b_0 = 1$ alors $\psi_{k,n}$ forment une base orthonormée.

Condition pour qu'une fonction soit une ondelette-mère : Il suffit qu'elle vérifie la condition d'admissibilité :

$$C_\psi = \int_{\mathbb{R}} |\psi(\xi)|^2 \frac{d\xi}{|\xi|} < \infty$$

Pour les fonctions de $L^2(\mathbb{R})$, il suffit simplement que ψ soit de moyenne nulle.

On peut aussi imposer des conditions de régularité telles que la décroissance et la convergence vers 0, à l'infini.

Quelques exemples d'ondelettes :

1. Chapeau Mexicain

$$\psi(t) = \left(1 - t^2\right) e^{-\frac{t^2}{2}}$$

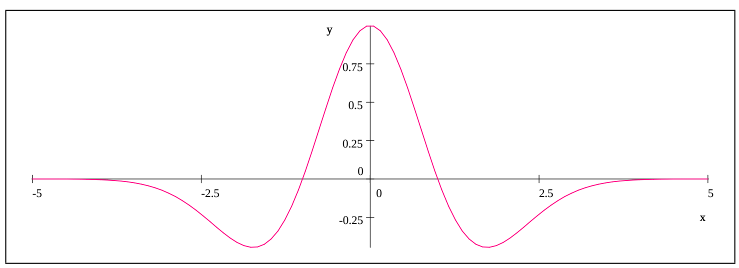

Figure2.1 :Graphe de l'ondelette de Chapeau Mexicain

2. Ondelette de Morlet

$$\psi(t) = e^{iw_0 t} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

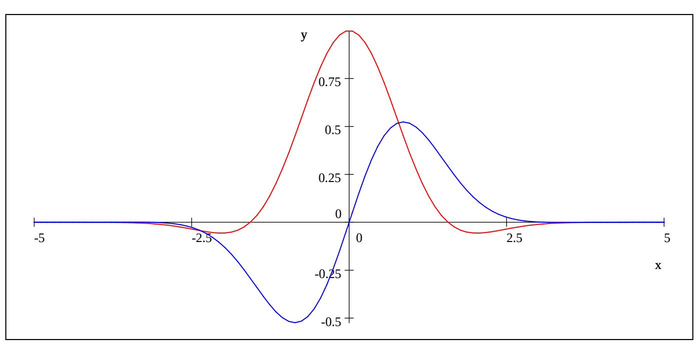

Figure2.2 :Graphe de l'ondelette de Morlet

3. Ondelette de Haar

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

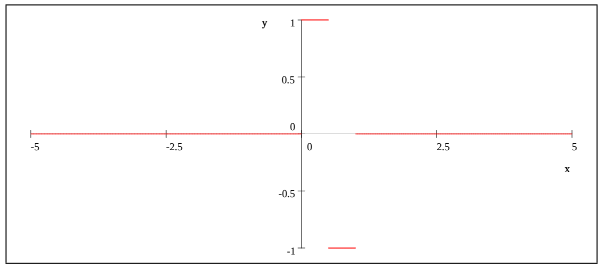

Figure2.3 :Graphe de ondelette de Haar

Remarque : l'idée de base consiste à "jouer de l'accordéon" avec l'ondelette-mère pour lui faire prendre toutes les "tailles" (échelles) possibles à chaque instant t.

2.2 Ondelettes de Shannon

La théorie d'ondelettes de Shannon (voir par exemple [1, 2, 6, 7, 9]) est basée sur la fonction d'échelle $\varphi(x)$, également connue sous le nom de fonction sinc, et la fonction d'ondelette $\psi(x)$, respectivement, définies comme suit :

$$\begin{cases} \varphi(x) = & \sin c\ x = \dfrac{\sin \pi x}{\pi x} = \dfrac{e^{\pi i x} - e^{-\pi i x}}{2\pi i x}, \\ \psi(x) = & \dfrac{\sin 2\pi \left(x - \left(\frac{1}{2}\right)\right) - \sin \pi \left(x - \left(\frac{1}{2}\right)\right)}{\pi \left(x - \left(\frac{1}{2}\right)\right)}. \end{cases} \tag{2.1}$$

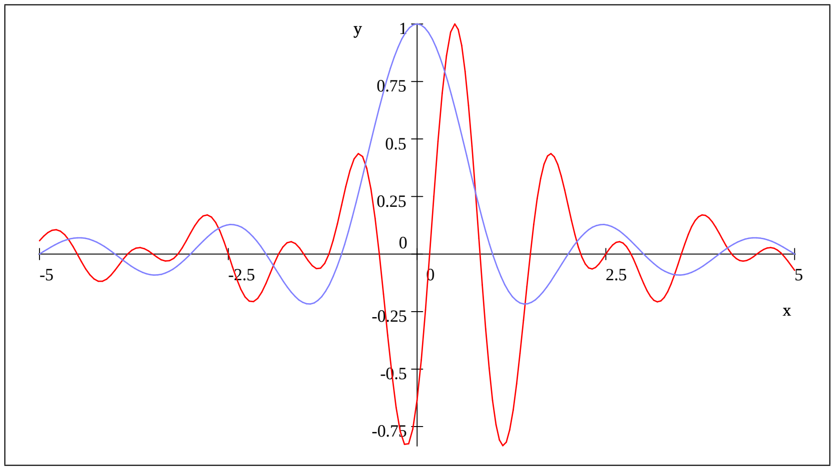

Figure2.4 : $\varphi(x)$ (rouge)et $\psi(x)$ (bleu)

La famille correspondante de translatées et dilatées d'ondelettes [1, 2, 6, 7, 9], sur laquelle est basée l'analyse multi-échelle [4], est donnée par les fonctions échelles de base et les fonctions ondelettes de base.

Fonctions échelles de base

$$\varphi_k^n(x) = 2^{\frac{n}{2}}\varphi(2^n x - k) = 2^{\frac{n}{2}}\frac{\sin\pi(2^n x - k)}{\pi(2^n x - k)}. \tag{2.2}$$

1. Pour $k = 0$,

   (a) si $n = 0$, $\varphi_0^0(x) = 2^0\varphi(2^0 x - 0) = \varphi(x) = \mathrm{sinc}x = \dfrac{\sin\pi x}{\pi x}$.

   (b) si $n = 1$, $\varphi_0^1(x) = 2^{\frac{1}{2}}\varphi(2x) = \sqrt{2}\dfrac{\sin\pi 2x}{\pi 2x} = \sqrt{2}\mathrm{sinc}2x$.

2. Pour $n = 0$,

   (a) si $k = 0$, $\varphi_0^0(x) = \varphi(x)$.

   (b) si $k = 1$, $\varphi_1^0(x) = \varphi(x-1) = \dfrac{\sin\pi(x-1)}{\pi(x-1)} = \mathrm{sinc}(x-1)$.

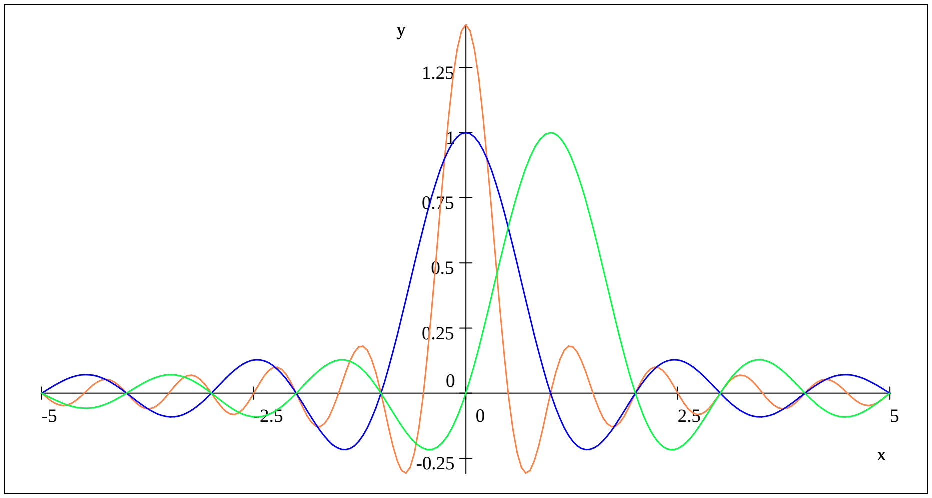

Figure2.5 : $\varphi_0^0(x)$(bleu), $\varphi_0^1(x)$(rouge) et $\varphi_1^0(x)$(vert)

Fonctions Ondelettes de base

$$\psi_k^n(x) = 2^{\frac{n}{2}} \frac{\sin 2\pi\left(2^n x - k - \left(\frac{1}{2}\right)\right) - \sin\pi\left(2^n x - k - \left(\frac{1}{2}\right)\right)}{\pi\left(2^n x - k - \left(\frac{1}{2}\right)\right)}. \tag{2.3}$$

1. Pour $k = 0$,

   (a) si $n = 0$, $\psi_0^0(x) = \psi(x) = \dfrac{\sin 2\pi\left(x - \left(\frac{1}{2}\right)\right) - \sin\pi\left(x - \left(\frac{1}{2}\right)\right)}{\pi\left(x - \left(\frac{1}{2}\right)\right)}$.

   (b) si $n = 1$, $\psi_0^1(x) = \sqrt{2}\dfrac{\sin 2\pi\left(2x - \left(\frac{1}{2}\right)\right) - \sin\pi\left(2x - \left(\frac{1}{2}\right)\right)}{\pi\left(2x - \left(\frac{1}{2}\right)\right)}$.

2. Pour $n = 0$,

   (a) si $k = 0$, $\psi_0^0(x) = \psi(x) = \dfrac{\sin 2\pi\left(x - \left(\frac{1}{2}\right)\right) - \sin\pi\left(x - \left(\frac{1}{2}\right)\right)}{\pi\left(x - \left(\frac{1}{2}\right)\right)}$.

(b) si $k=1$, $\psi_1^0(x)=\dfrac{\sin 2\pi\left(x-1-\left(\frac{1}{2}\right)\right)-\sin\pi\left(x-1-\left(\frac{1}{2}\right)\right)}{\pi\left(x-1-\left(\frac{1}{2}\right)\right)}$.

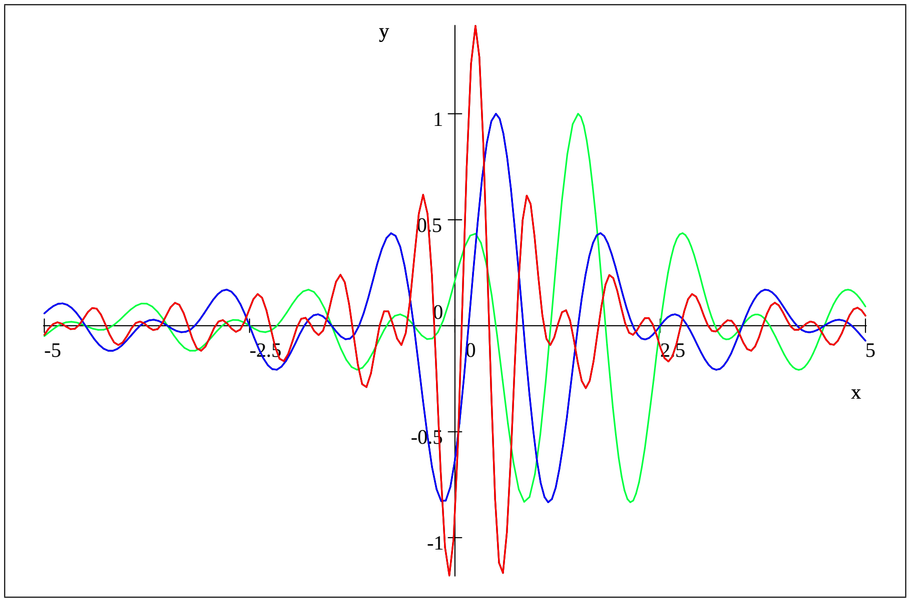

Figure2.6 : $\psi_0^0(x)$(bleu), $\psi_0^1(x)$(rouge),et $\psi_1^0(x)$(vert).

Soit

$$\hat{f}(w)=f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,e^{-iwx}dx,\qquad f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(w)\,e^{iwx}dw. \tag{2.4}$$

la transformée de Fourier de la fonction $f(x)\in L_2(\mathbb{R})$, et sa transformée inverse, respectivement.

La transformée de Fourier de (2.1) nous donnent [7] :

$$\begin{cases}\hat{\varphi}(w) &= \dfrac{1}{2\pi}\chi(w+3\pi) \qquad\qquad = \begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}, & \text{si } -\pi\leq w<\pi\\ 0, & \text{ailleurs.}\end{cases}\\ \hat{\psi}(w) &= \dfrac{1}{2\pi}e^{-iw/2}\left[\chi(2w)+\chi(-2w)\right],\end{cases} \tag{2.5}$$

avec

$$\chi(w)=\begin{cases}1, & \text{si } 2\pi\leq w<4\pi\\ 0, & \text{ailleurs.}\end{cases} \tag{2.6}$$

Par analogie, les transformeés de Fourier des translateés et dilateés des fonctions échelles et ondelletes sont donneés par :

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}_k^n(w) &= \frac{2^{-n/2}}{2\pi} e^{-iwk/2^n} \chi\left(\frac{w}{2^n} + 3\pi\right) \\
\hat{\psi}_k^n(w) &= \frac{2^{-n/2}}{2\pi} e^{-iw(k+1/2)/2^n} \left[\chi\left(\frac{w}{2^{n-1}}\right) + \chi\left(-\frac{w}{2^{n-1}}\right)\right].
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Les deux familles des fonctions échelles de Shannon et des fonctions ondelettes sont des fonctions $L_2(\mathbb{R})$, par conséquent, pour chaque $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$ et $g(x) \in L_2(\mathbb{R})$, le produit scalaire est défini par :

$$\langle f, g \rangle \overset{déf}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{g(x)} dx = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(w) \overline{\hat{g}(w)} dw = 2\pi \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle, \tag{2.8}$$

où la barre représente le conjugué complexe.

Les ondelettes de Shannon vérifies les propriétés d'orthogonalités suivantes :

$$\langle \psi_k^n,\ \psi_h^m \rangle = \delta^{nm} \delta_{hk}, \quad \langle \varphi_k^0,\ \varphi_h^0 \rangle = \delta_{kh}, \quad \langle \varphi_k^0,\ \psi_h^m \rangle = 0, m \geq 0, \tag{2.9}$$

δ^{nm}, δ_{hk} étant les symboles de Kronecker.

Preuve.

$$\begin{aligned}
\langle \psi_k^n, \psi_h^m \rangle &= 2\pi \langle \hat{\psi}_k^n, \hat{\psi}_h^m \rangle \\
&= 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2^{-n/2}}{2\pi} e^{-iw(k+1/2)/2^n} \left[\chi\left(\frac{w}{2^{n-1}}\right) + \chi\left(-\frac{w}{2^{n-1}}\right)\right] \\
&\quad \times \frac{2^{-m/2}}{2\pi} e^{iw(h+1/2)/2^m} \left[\chi\left(\frac{w}{2^{m-1}}\right) + \chi\left(-\frac{w}{2^{m-1}}\right)\right] dw \\
&= \frac{2^{-(n+m)/2}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iw(k+1/2)/2^n + iw(h+1/2)/2^m} \left[\chi\left(\frac{w}{2^{n-1}}\right) + \chi\left(-\frac{w}{2^{n-1}}\right)\right] \\
&\quad \times \left[\chi\left(\frac{w}{2^{m-1}}\right) + \chi\left(-\frac{w}{2^{m-1}}\right)\right] dw
\end{aligned}$$

pour $(n \neq m)$, il est :

$$\langle \psi_k^n, \psi_h^m \rangle = 0.$$

et pour $(n = m)$, il est :

$$\langle \psi_k^n, \psi_h^n \rangle = \frac{2^{-n}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iw(h-k)/2^n} \left[\chi\left(\frac{w}{2^{n-1}}\right) + \chi\left(-\frac{w}{2^{n-1}}\right)\right] dw$$

En faisant le changement de variable $\xi = w/2^{n-1}$ on aura :

$$\langle \psi_k^n, \psi_h^m \rangle = \frac{1}{4\pi} \left[\int_{-4\pi}^{-2\pi} e^{-2i(h-k)\xi} d\xi + \int_{2\pi}^{4\pi} e^{-2i(h-k)\xi} d\xi\right]$$

pour $h = k$ et $(n = m)$, il est

$$\langle \psi_k^n, \psi_k^n \rangle = 1.$$

pour $h \neq k$, il est

$$\int_{2\pi}^{4\pi} e^{-2i(h-k)\zeta} d\zeta = \frac{i}{2(h-k)} \left(e^{-4i\pi(h-k)} - e^{-8i\pi(h-k)} \right) = 0,$$

de façon analogue

$$\int_{-4\pi}^{-2\pi} e^{-2i(h-k)\xi} d\xi = 0.$$

$\square$

De la même manière on montre les autres propriétés d'orthogonalités.

2.3 Propriétés

Selon (2.2 et 2.3), les ondelettes de Shannon peuvent être facilement calculés pour certains points particuliers, en particulier :

$$\varphi_k(h) = \varphi_h(k) = \varphi(h-k) = \varphi(k-h) = \delta_{kh}, \quad (h,\ k \in \mathbb{Z}), \tag{2.10}$$

de sorte que :

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} 0, & x = h \neq k, \quad (h,\ k \in \mathbb{Z}) \\ 1, & x = h = k, \quad (h,\ k \in \mathbb{Z}). \end{cases} \tag{2.11}$$

On a également [7] :

$$\begin{aligned} \psi_k^n(h) &= (-1)^{2^n h - k} \frac{2^{1+n/2}}{(2^{n+1}h - 2k - 1)\pi}, \quad \left(2^{n+1}h - 2k - 1 \neq 0\right) \\ \psi_k^n(x) &= 0, \quad x = 2^{-n}\left(k + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{3}\right), \quad (n \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{Z}) \end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\lim_{x \to 2^{-n}\left(h + \left(\frac{1}{2}\right)\right)} \psi_k^n(x) = -2^{-n/2}\delta_{hk}.$$

Dans ce qui suit, nous allons nous intéresser aux valeurs maximales de ces fonctions qui peuvent être facilement calculées. La valeur maximale de la fonction d'échelle $\varphi_k(x)$ peut être trouvée sur les nombres entiers $x = k$

$$\max\left[\varphi_k(x_M)\right] = 1, \qquad x_M = k, \tag{2.13}$$

et les valeurs maximales de $\psi_k^n(x)$ sont :

$$\max\left[\psi_k^n(x_M)\right] = 2^{\frac{n}{2}}\frac{3\sqrt{3}}{\pi}, x_M = \begin{cases} -2^{-n}\left(k+\frac{1}{6}\right) \\ \frac{2^{-n-1}}{3}\left(18k+7\right) \end{cases} \tag{2.14}$$

Les deux familles des fonctions échelles et les fonctions d'ondelettes appartiennent à $L_2(\mathbb{R})$, donc elles ont des supports borné et une décroissance lente vers zéro.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\varphi_k^n(x) = 0, \qquad \lim_{x\to\pm\infty}\psi_k^n(x) \ = 0 \tag{2.15}$$

Soit $\beta \subset L_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $f(x)$ en $L_2(\mathbb{R})$ telles que les intégrales :

$$\begin{cases} \alpha_k & \overset{déf}{=} \langle f, \varphi_k^0\rangle & = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\overline{\varphi_k^0(x)}dx. \\ \beta_k^n & \overset{déf}{=} \langle f, \psi_k^n\rangle & = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\overline{\psi_k^n(x)}dx. \end{cases} \tag{2.16}$$

existent avec des valeurs finies, alors on peut montrer[2, 4, 7] que la série :

$$\sum_{h=-\infty}^{\infty}\alpha_h\varphi_h(x) + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\beta_k^n\psi_k^n(x). \tag{2.17}$$

converge vers $f(x)$.

Selon (2.8), les coefficients peuvent être également calculés dans le domaine de Fourier [7] de sorte que :

$$\begin{aligned} &\alpha_k = \int_{-\pi}^{+\pi}\hat{f}(w)\,e^{iwk}dw, \\ &\beta_k^n = 2^{-n/2}\left[\int_{2^n\pi}^{2^{n+1}\pi}\hat{f}(w)\,e^{-iw(k+1/2)/2^n}dw + \int_{-2^{n+1}\pi}^{-2^n\pi}\hat{f}(w)\,e^{-iw(k+1/2)/2^n}dw\right]. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Preuve. Par définition on a :

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \langle f, \varphi_k^0\rangle \\ &= 2\pi\langle\hat{f}, \hat{\varphi}_k^0\rangle \\ &= 2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(w)\,\overline{\hat{\varphi}_k^0(w)}dw \end{aligned}$$

et

$$\hat{\varphi}_k^n(w) = \frac{2^{-n/2}}{2\pi} e^{-iwk/2^n} \chi\left(\frac{w}{2^n} + 3\pi\right)$$

avec

$$\hat{\varphi}_k^0(w) = \frac{1}{2\pi} e^{-iwk} \chi(w + 3\pi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} e^{-iwk}, & \text{si } -\pi \leq w < \pi \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

donc

$$\overline{\hat{\varphi}_k^0(w)} = \frac{1}{2\pi} e^{iwk} \chi(w + 3\pi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} e^{iwk}, & \text{si } -\pi \leq w < \pi \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

D'où

$$\begin{aligned} \alpha_k &= 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(w) \overline{\hat{\varphi}_k^0(w)} dw \\ &= 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(w) \frac{1}{2\pi} e^{iwk} dw \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(w) e^{iwk} dw. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} \beta_k^n &= \langle f,\ \psi_k^n \rangle \\ &= 2\pi \langle \hat{f},\ \hat{\psi}_k^n \rangle \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(w) \overline{\hat{\psi}_k^n(w)} dw \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(w) \frac{2^{-n/2}}{2\pi} e^{iw(k+1/2)/2^n} \left[\chi\left(\frac{w}{2^{n-1}}\right) + \chi\left(-\frac{w}{2^{n-1}}\right)\right] dw \\ &= 2^{-n/2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(w) e^{iw(k+1/2)/2^n} \chi\left(\frac{w}{2^{n-1}}\right) dw + \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(w) e^{iw(k+1/2)/2^n} \chi\left(-\frac{w}{2^{n-1}}\right) dw\right] \\ &= 2^{-n/2} \left[\int_{2^n\pi}^{2^{n+1}\pi} \hat{f}(w) e^{iw(k+1/2)/2^n} dw + \int_{-2^{n+1}\pi}^{-2^n\pi} \hat{f}(w) e^{iw(k+1/2)/2^n} dw\right]. \end{aligned}$$

□

Dans le domaine fréquentiel, (2.17) donne [7] :

$$\begin{aligned} \hat{f}(w) &= \frac{1}{2\pi}\chi(w+3\pi)\sum_{h=-\infty}^{\infty}\alpha_h e^{-iwh} \\ &+\frac{1}{2\pi}\chi\left(\frac{w}{2^{n-1}}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}2^{-n/2}\beta_k^n e^{-iw(k+1/2)/2^n} \\ &+\frac{1}{2\pi}\chi\left(-\frac{w}{2^{n-1}}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}2^{-n/2}\beta_k^n e^{-iw(k+1/2)/2^n}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Preuve. On a :

$$f(x)=\sum_{h=-\infty}^{\infty}\alpha_h\varphi_h^0(x)+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\beta_k^n\psi_k^n(x)$$

et

$$\begin{aligned} \hat{f}(w) &= \sum_{h=-\infty}^{\infty}\alpha_h\hat{\varphi}_h^0(w)+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\beta_k^n\hat{\psi}_k^n(w) \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{h=-\infty}^{\infty}\alpha_h e^{-iwh}\chi(w+3\pi)+\frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}2^{-n/2}\beta_k^n e^{-iw(k+1/2)/2^n}\left[\chi\left(\frac{w}{2^{n-1}}\right)+\chi\left(-\frac{w}{2^{n-1}}\right)\right], \end{aligned}$$

tel que :

$$\hat{\varphi}_h^0(w)=\frac{1}{2\pi}e^{-iwh}\chi(w+3\pi)$$

avec

$$\hat{\psi}_k^n(w)=\frac{2^{-n/2}}{2\pi}e^{-iw(k+1/2)/2^n}\chi\left[\left(\frac{w}{2^{n-1}}\right)+\chi\left(-\frac{w}{2^{n-1}}\right)\right]$$

D'où

$$\begin{aligned} \hat{f}(w) &= \frac{1}{2\pi}\chi(w+3\pi)\sum_{h=-\infty}^{\infty}\alpha_h e^{-iwh} \\ &+\frac{1}{2\pi}\chi\left(\frac{w}{2^{n-1}}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}2^{-n/2}\beta_k^n e^{-iw(k+1/2)/2^n} \\ &+\frac{1}{2\pi}\chi\left(-\frac{w}{2^{n-1}}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}2^{-n/2}\beta_k^n e^{-iw(k+1/2)/2^n}. \end{aligned}$$

□

Lorsque la borne supérieure de la série de (2.17) est finie, alors nous avons l'approximation :

$$f(x)\cong\sum_{h=-K}^{K}\alpha_h\varphi_h^0(x)+\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=-S}^{S}\beta_k^n\psi_k^n(x). \tag{2.20}$$

L'erreur de l'approximation a été estimée dans [7].

2.4 Reconstruction des dérivés

Afin de représenter les opérateurs différentiels dans des bases d'ondelettes, nous devons calculer la décomposition en ondelettes des produits dérivés. Il peut être montré [2, 7] que les dérivés des ondelettes de Shannon sont des fonctions orthogonales :

$$\begin{aligned} \frac{d^\ell}{dx^\ell}\varphi_h^0(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_{hk}^{(\ell)} \varphi_k^0(x), \\ \frac{d^\ell}{dx^\ell}\psi_h^m(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \gamma^{(\ell)}{}_{hk}^{mn}\, \psi_k^n(x), \end{aligned} \tag{2.21}$$

où

$$\lambda_{hk}^{(\ell)} \stackrel{\text{déf}}{=} \langle \frac{d^\ell}{dx^\ell}\varphi_k^0, \varphi_h^0 \rangle, \quad \gamma^{(\ell)}{}_{hk}^{mn} \stackrel{\text{déf}}{=} \langle \frac{d^\ell}{dx^\ell}\psi_k^n, \varphi_h^m \rangle, \tag{2.22}$$

sont dits coefficients de connexion [2, 5, 6, 8, 13].

Le calcul des coefficients de connexion peut être facilement réalisé dans le domaine de Fourier, grâce à l'égalité (2.8) :

$$\lambda_{hk}^{(\ell)} \stackrel{\text{déf}}{=} 2\pi \langle \widehat{\frac{d^\ell}{dx^\ell}\varphi_k^0}, \widehat{\varphi_h^0} \rangle, \quad \gamma^{(\ell)}{}_{hk}^{mn} \stackrel{\text{déf}}{=} 2\pi \langle \widehat{\frac{d^\ell}{dx^\ell}\psi_k^n}, \widehat{\varphi_h^m} \rangle. \tag{2.23}$$

En fait, dans le domaine de Fourier, le dérivé d'ordre ℓ des fonctions d'ondelettes et d'échelles sont tout simplement

$$\widehat{\frac{d^\ell}{dx^\ell}\varphi_k^n(x)} = (iw)^\ell\, \hat{\varphi}_k^n(w), \quad \widehat{\frac{d^\ell}{dx^\ell}\psi_k^n(x)} = (iw)^\ell\, \hat{\psi}_k^n(w), \tag{2.24}$$

et, selon(2.7),

$$\begin{aligned} \widehat{\frac{d^\ell}{dx^\ell}\varphi_k^n(x)} &= (iw)^\ell \frac{2^{-n/2}}{2\pi} e^{-iwk/2^n} \chi\left(\frac{w}{2^n} + 3\pi\right), \\ \widehat{\frac{d^\ell}{dx^\ell}\psi_k^n(x)} &= (iw)^\ell \frac{2^{-n/2}}{2\pi} e^{-iw(k+1/2)/2^n} \chi\left[\left(\frac{w}{2^{n-1}}\right) + \chi\left(-\frac{w}{2^{n-1}}\right)\right]. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Il a été démontré [2, 6, 7] que les coefficients de connexion (2.22) des fonctions d'échelles de Shannon $\varphi_k(w)$ sont :

$$\lambda_{hk}^{(\ell)} = \begin{cases} (-1)^{k-h} \dfrac{i^{\ell}}{2\pi} \displaystyle\sum_{s=1}^{\ell} \dfrac{\ell! \pi^s}{s! \left[i \left(k-h \right) \right]^{\ell-s+1}} \left[(-1)^s - 1 \right], & k \neq h \\ \dfrac{i^{\ell} \pi^{\ell+1}}{2\pi \left(\ell+1 \right)} \left[1 + (-1)^{\ell} \right], & k = h, \end{cases} \tag{2.26}$$

où, en posant

$$\mu \left(m \right) = \operatorname{sign} \left(m \right) = \begin{cases} 1, & m > 0 \\ -1, & m < 0 \\ 0, & m = 0, \end{cases} \tag{2.27}$$

on aura :

$$\begin{aligned} \lambda_{hk}^{(\ell)} &= \frac{i^{\ell} \pi^{\ell}}{2 \left(\ell+1 \right)} \left[1 + (-1)^{\ell} \right] \left(1 - \left| \mu \left(k-h \right) \right| \right) \\ &\quad + (-1)^{k-h} \left| \mu \left(k-h \right) \right| \frac{i^{\ell}}{2\pi} \sum_{s=1}^{\ell} \frac{\ell! \pi^s}{s! \left[i \left(k-h \right) \right]^{\ell-s+1}} \left[(-1)^s - 1 \right], \end{aligned} \tag{2.28}$$

et si $\ell \geq 1$, et pour $\ell = 0$,

$$\lambda_{kh}^{0} = \delta_{kh}.$$

Preuve. Par définition on a :

$$\begin{aligned} \lambda_{hk}^{(\ell)} \overset{\text{déf}}{=} \langle \frac{d^{\ell}}{dx^{\ell}} \varphi_k^0, \varphi_h^0 \rangle &= 2\pi \langle \widehat{\frac{d^{\ell}}{dx^{\ell}} \varphi_k^0}, \widehat{\varphi_h^0} \rangle \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\frac{d^{\ell}}{dx^{\ell}} \varphi_k^0} \left(w \right) \, \overline{\widehat{\varphi_h^0} \left(w \right)} \, dw \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \left(iw \right)^{\ell} \hat{\varphi}_k^0 \left(w \right) \, \overline{\widehat{\varphi_h^0} \left(w \right)} \, dw \end{aligned}$$

et

$$\hat{\varphi}_h^0 \left(w \right) = \frac{1}{2\pi} e^{-iwh} \chi \left(w + 3\pi \right)$$

avec

$$\overline{\hat{\varphi}_h^0 \left(w \right)} = \frac{1}{2\pi} e^{iwh} \chi \left(w + 3\pi \right)$$

et

$$\chi \left(w + 3\pi \right) = \begin{cases} 1, & \text{si } -\pi \leq w < \pi \\ 0, & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

D'où

$$
\begin{aligned}
\lambda_{hk}^{(\ell)} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(iw)^{\ell}e^{-iwk}\chi(w+3\pi)e^{iwh}\chi(w+3\pi) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(iw)^{\ell}e^{-i(k-h)w}dw. \\
&= \frac{i^{\ell}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}w^{\ell}e^{-i(k-h)w}dw.
\end{aligned}
$$

Donc on peut formuler le corollaire suivant :

Corollaire 4 *Pour* $m\in\mathbb{Z}\cup\{0\}$, $\ell\in\mathbb{N}$ *et* $n\in\mathbb{N}$, *il est :*

$$
\begin{aligned}
\int_{-n\pi}^{n\pi}(iw)^{\ell}e^{imw}dw &= i^{\ell}(1-|\mu(m)|)\frac{(n\pi)^{\ell+1}\left[1+(-1)^{\ell}\right]}{\ell+1} \\
&+i\mu(m)(-1)^{mn+1}\sum_{S=1}^{\ell+1}(-1)^{[1+\mu(m)](2\ell-s+1)/2}\frac{\ell!\,(in\pi)^{\ell-s+1}}{(\ell-s+1)!\,|m|^{s}}\left[1-(-1)^{\ell-s+1}\right]
\end{aligned}
$$

avec $(n=1)$ ce qui achève la démonstration de (2.26). $\square$

D'une manière analogue à (2.22) nous avons tous les coefficients de connexion des ondelettes d'échelles de Shannon $\psi_k^n(x)$:

$$
\begin{aligned}
\gamma^{(\ell)}{}_{kh}^{nm} &= \mu(h-k)\delta^{nm}\left\{\sum_{s=1}^{\ell+1}(-1)^{[1+\mu(h-k)](2\ell-s+1)/2}\frac{\ell!i^{\ell-s}\pi^{\ell-s}}{(\ell-s+1)!\,|h-k|^{s}}(-1)^{-s-2(h+k)}2^{n\ell-s-1}\right. \\
&\quad\left.\times\left\{2^{\ell+1}\left[(-1)^{4h+s}+(-1)^{4k+\ell}\right]-2^{s}\left[(-1)^{3k+h+\ell}+(-1)^{3h+k+s}\right]\right\}\right\} \quad , k\neq h \\
\gamma^{(\ell)}{}_{kh}^{nm} &= \delta^{nm}\left[i^{\ell}\frac{\pi^{\ell}2^{n\ell-1}}{\ell+1}\left(2^{\ell+1}-1\right)\left(1+\left((-1)^{\ell}\right)\right],\right. \quad , k=h
\end{aligned}
\tag{2.29}
$$

$$
\begin{aligned}
\gamma^{(\ell)}{}_{kh}^{nm} &= \delta^{nm}\left\{i^{\ell}(1-|\mu(h-k)|)\frac{\pi^{\ell}2^{n\ell-1}}{\ell+1}\left(2^{\ell+1}-1\right)\left(1+\left((-1)^{\ell}\right)\right.\right. \\
&+\mu(h-k)\sum_{s=1}^{\ell+1}(-1)^{[1+\mu(h-k)](2\ell-s+1)/2}\frac{\ell!i^{\ell-s}\pi^{\ell-s}}{(\ell-s+1)!\,|h-k|^{s}}(-1)^{-s-2(h+k)}2^{n\ell-s-1} \\
&\left.\times\left\{2^{\ell+1}\left[(-1)^{4h+s}+(-1)^{4k+\ell}\right]-2^{s}\left[(-1)^{3k+h+\ell}+(-1)^{3h+k+s}\right]\right\}\right\},
\end{aligned}
\tag{2.30}
$$

quand $\ell \geq 1$, et pour $\ell = 0$ on a :

$$\gamma^{(0)}{}_{kh}^{nm} = \delta_{kh}\delta^{nm}, \tag{2.31}$$

Preuve. Par définition, on a :

$$\begin{aligned}
\gamma^{(\ell)}{}_{kh}^{nm} \overset{déf}{=} \langle \frac{d^\ell}{dx^\ell}\psi_k^n, \varphi_h^m\rangle &= 2\pi\langle \widehat{\frac{d^\ell}{dx^\ell}\psi_k^n}, \widehat{\varphi_h^m}\rangle \\
&= 2\pi\langle (iw)^\ell \,\hat{\psi}_k^n, \hat{\varphi}_h^m\rangle \\
&= 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} (iw)^\ell \,\hat{\psi}_k^n(w)\,\overline{\hat{\varphi}_h^m(w)}dw \\
&= 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} (iw)^\ell \,\frac{2^{-n/2}}{2\pi}e^{-iw(k+1/2)/2^n}\left[\chi\left(\frac{w}{2^{n-1}}\right)+\chi\left(-\frac{w}{2^{n-1}}\right)\right] \\
&\quad\times\frac{2^{-m/2}}{2\pi}e^{iw(k+1/2)/2^m}\chi\left[\left(\frac{w}{2^{m-1}}\right)+\chi\left(-\frac{w}{2^{m-1}}\right)\right]dw,
\end{aligned}$$

Selon la définition (2.6), on a :

$$\gamma^{(0)}{}_{kh}^{nm} = 0, \qquad n \neq m$$

et (pour $n = m$)

$$\begin{aligned}
\gamma^{(\ell)}{}_{kh}^{nm} &= \frac{2^{-n}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} (iw)^\ell \,e^{-iw(h-k)/2^n}\left[\chi\left(\frac{w}{2^{n-1}}\right)+\chi\left(-\frac{w}{2^{n-1}}\right)\right]dw \\
&= \frac{2^{-n}}{2\pi}\int_{-2^{n+1}\pi}^{-2^n\pi} (iw)^\ell \,e^{-iw(h-k)/2^n}dw + \int_{2^n\pi}^{2^{n+1}\pi} (iw)^\ell \,e^{-iw(h-k)/2^n}dw
\end{aligned}$$

Donc on peut formuler le corollaire suivant :

Corollaire 5 *pour $m \in \mathbb{Z}$, $\ell \in \mathbb{N}$, et a, $b \in \mathbb{Z}$ $(a < b)$, il est :*

$$\begin{aligned}
\int_{a\pi}^{b\pi} (iw)^\ell e^{imw}dw &= i^\ell\left(1-|\mu(m)|\right)\frac{\pi^{\ell+1}\left[b^{\ell+1}-a^{\ell+1}\right]}{\ell+1} - i\mu(m)\sum_{S=1}^{\ell+1}(-1)^{[1+\mu(m)](2\ell-s+1)/2} \\
&\quad\times\frac{\ell!\,(i\pi)^{\ell-s+1}}{(\ell-s+1)!\,|m|^s}\left[(-1)^{mb}\,b^{\ell-s+1}-(-1)^{ma}\,a^{\ell-s+1}\right].
\end{aligned}$$

pour $m = -(h-k) \in \mathbb{Z}$, $\ell = 0$, et $(-2^{n+1}\pi < -2^n\pi)$, $(2^n\pi < 2^{n+1}\pi)$.

$$\gamma^{(0)}{}_{kh}^{nm} = 1, \qquad n = m.$$

ce qui achève la démonstration de(2.30). □

Chapitre 3

Dérivé fractionnaire des ondelettes de base

Dans cette section, nous pouvons voir que la dérivée fractionnaire peut être interprétée comme une fonction d'interpolation entre les dérivés d'ordre entier, de sorte que :

$$\frac{d^v}{dx^v} f(x) = (1-v)\ f(x) + v\frac{d}{dx} f(x), \qquad 0 \leq v \leq 1.$$

3.1 Dérivé fractionnaire de la fonction d'échelle de Shannon

Supposons que la dérivée d'ordre fractionnaire est définie par une interpolation linéaire des dérivés d'ordre entiers, de telle sorte que la dérivée fractionnaire d'échelle et d'ondelette

$$\frac{d^{\ell+v}}{dx^{\ell+v}}\varphi_h(x), \quad \frac{d^{\ell+v}}{dx^{\ell+v}}\psi_h^m(x). \tag{3.1}$$

avec

$$0 \leq v \leq 1, \tag{3.2}$$

peut être définie comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{d^{\ell+v}}{dx^{\ell+v}}\varphi_h(x) &\overset{\text{déf}}{=} (1-v)\frac{d^{\ell}}{dx^{\ell}}\varphi_h(x) + v\frac{d^{\ell+1}}{dx^{\ell+1}}\varphi_h(x), \\ \frac{d^{\ell+v}}{dx^{\ell+v}}\psi_h^m(x) &\overset{\text{déf}}{=} (1-v)\frac{d^{\ell}}{dx^{\ell}}\psi_h^m(x) + v\frac{d^{\ell+1}}{dx^{\ell+1}}\psi_h^m(x). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Théorème 6 *La dérivée fractionnaire des fonctions d'échelles de Shannon est donnée par :*

$$\frac{d^{\ell+v}}{dx^{\ell+v}}\varphi_h(x) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty}\lambda_{hk}^{(\ell+v)}\varphi_k(x) = \begin{cases} \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\left[(1-v)\lambda_{hk}^{(\ell)} + v\lambda_{hk}^{(\ell+1)}\right]\varphi_k(x), & \ell > 0 \\ \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\left[(1-v)\delta_{hk} + v\lambda_{hk}^{(1)}\right]\varphi_k(x), & \ell = 0. \end{cases} \tag{3.4}$$

Preuve. *Selon*(3.3) *et* (2.21), *on a :*

$$\begin{aligned} \frac{d^{\ell+v}}{dx^{\ell+v}}\varphi_h(x) &= (1-v)\frac{d^{\ell}}{dx^{\ell}}\varphi_h(x) + v\frac{d^{\ell+1}}{dx^{\ell+1}}\varphi_h(x) \\ &= (1-v)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\lambda_{hk}^{(\ell)}\varphi_k(x) + v\sum_{k=-\infty}^{\infty}\lambda_{hk}^{(\ell+1)}\varphi_k(x) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[(1-v)\lambda_{hk}^{(\ell)} + v\ \lambda_{hk}^{(\ell+1)}\right]\varphi_k(x), \end{aligned} \tag{3.5}$$

et, si $\ell = 0$,

$$\frac{d^{v}}{dx^{v}}\varphi_h(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[(1-v)\delta_{hk} + v\lambda_{hk}^{(1)}\right]\varphi_k(x). \tag{3.6}$$

□

Avec cette définition, la dérivée d'ordre fractionnaire des fonctions d'échelles est un opérateur commutatif.

Théorème 7 *L'opérateur*(3.4) *est un semi-groupe, telque :*

$$\frac{d^{\mu}}{dx^{\mu}}\frac{d^{v}}{dx^{v}}\varphi_h(x) = \frac{d^{v}}{dx^{v}}\frac{d^{\mu}}{dx^{\mu}}\varphi_h(x) = \frac{d^{\mu+v}}{dx^{\mu+v}}\varphi_h(x). \tag{3.7}$$

Preuve. Sans perte de généralité, il suffit de montrer que

$$\frac{d^{\mu}}{dx^{\mu}}\frac{d^{v}}{dx^{v}}\varphi(x) = \frac{d^{v}}{dx^{v}}\frac{d^{\mu}}{dx^{\mu}}\varphi(x). \tag{3.8}$$

Selon (3.4), il vient que :

$$\frac{d^{v}}{dx^{v}}\varphi_0(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[(1-v)\delta_{0k} + v\lambda_{0k}^{(1)}\right]\varphi_k(x), \tag{3.9}$$

donc

$$\frac{d^v}{dx^v}\varphi(x) = (1-v)\varphi(x) + v\left[\lambda_{00}^{(1)}\varphi(x) + \sum_{\substack{k\neq 0\\ k=-\infty}}^{\infty}\lambda_{0k}^{(1)}\varphi_k(x)\right], \tag{3.10}$$

et à partir de (2.26),

$$\begin{cases} \lambda_{0k}^{(1)} = \dfrac{(-1)^k}{k}, & k \neq h \\ \lambda_{00}^{(1)} = 0, & K = h = 0 \end{cases}$$

d'où

$$\frac{d^v}{dx^v}\varphi(x) = (1-v)\varphi(x) + v\sum_{\substack{k\neq 0\\ k=-\infty}}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\varphi_k(x). \tag{3.11}$$

En dérivant, par rapport à μ, nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{d^\mu}{dx^\mu}\frac{d^v}{dx^v}\varphi(x) &= (1-v)\frac{d^\mu}{dx^\mu}\varphi(x) + v\sum_{\substack{k\neq 0\\ k=-\infty}}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\frac{d^\mu}{dx^\mu}\varphi_k(x) \\ &= (1-v)\left[(1-\mu)\varphi(x) + \mu\sum_{\substack{k\neq 0\\ k=-\infty}}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\varphi_k(x)\right] \\ &\quad + v\sum_{\substack{k\neq 0\\ k=-\infty}}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\frac{d^\mu}{dx^\mu}\varphi_k(x), \end{aligned} \tag{3.12}$$

qui est, selon (2.26),

$$\begin{aligned} \frac{d^\mu}{dx^\mu}\frac{d^v}{dx^v}\varphi(x) &= (1-v)\left[(1-\mu)\varphi(x) + \mu\sum_{\substack{k\neq 0\\ k=-\infty}}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\varphi_k(x)\right] \\ &\quad + v\sum_{\substack{k\neq 0\\ k=-\infty}}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\sum_{s=-\infty}^{\infty}\left[(1-\mu)\delta_{sk} + \mu\,\lambda_{sk}^{(1)}\right]\varphi_s(x) \\ &= (1-v)\left[(1-\mu)\varphi(x) + \mu\sum_{\substack{k\neq 0\\ k=-\infty}}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\varphi_k(x)\right] \\ &\quad + v(1-\mu)\sum_{\substack{k\neq 0\\ k=-\infty}}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\varphi_k(x) + v\mu\sum_{\substack{k\neq 0\\ k=-\infty}}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\sum_{s=-\infty}^{\infty}\lambda_{sk}^{(1)}\varphi_s(x). \end{aligned} \tag{3.13}$$

D'où,

$$\frac{d^{\mu}}{dx^{\mu}}\frac{d^{v}}{dx^{v}}\varphi\left(x\right) = \left(1-v\right)\left(1-\mu\right)\varphi\left(x\right)+\left[\left(1-v\right)\mu+v\left(1-\mu\right)\right]\sum_{\substack{k\neq 0\\ k=-\infty}}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{k}}{k}\varphi_{k}\left(x\right) \tag{3.14}$$

$$+v\mu\sum_{\substack{k\neq 0\\ k=-\infty}}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{k}}{k}\sum_{s=-\infty}^{\infty}\lambda_{sk}^{(1)}\varphi_{s}\left(x\right),$$

□

Il peut être facilement vu, avec (3.11) qu'on a également les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{d^{v}}{dx^{v}}\varphi_{1}\left(x\right)=\left(1-v\right)\varphi_{1}\left(x\right)+v\sum_{\substack{k\neq 0\\ k=-\infty}}^{\infty}\dfrac{\left(-1\right)^{k}}{k-1}\varphi_{k}\left(x\right) \\ \dfrac{d^{v}}{dx^{v}}\varphi_{-1}\left(x\right)=\left(1-v\right)\varphi_{-1}\left(x\right)+v\sum_{\substack{k\neq 0\\ k=-\infty}}^{\infty}\dfrac{\left(-1\right)^{k}}{1+k}\varphi_{k}\left(x\right), \end{cases} \tag{3.15}$$

Et, en général,

$$\frac{d^{v}}{dx^{v}}\varphi_{h}\left(x\right)=\left(1-v\right)\varphi_{h}\left(x\right)+v\sum_{\substack{k\neq 0\\ k=-\infty}}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{k}}{k-h}\varphi_{k}\left(x\right). \tag{3.16}$$

En outre, lorsque $\mu+v=1$, alors nous pouvons voir que la définition (2.26) se réduit à la dérivée ordinaire.

Théorème 8 *Si* $\mu+v=1$, *alors*

$$\frac{d^{\mu}}{dx^{\mu}}\frac{d^{v}}{dx^{v}}\varphi_{h}\left(x\right)=\frac{d^{\mu+v}}{dx^{\mu+v}}\varphi_{h}\left(x\right)=\frac{d}{dx}\varphi_{h}\left(x\right). \tag{3.17}$$

Preuve. Si on se limite à $\varphi\left(x\right)$, conformément à la définition (2.26), on a :

$$\frac{d^{\mu}}{dx^{\mu}}\frac{d^{v}}{dx^{v}}\varphi\left(x\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\left(1-\left(\mu+v\right)\right)\delta_{0k}+\left(\mu+v\right)\ \lambda_{0k}^{(1)}\right]\varphi_{k}\left(x\right), \tag{3.18}$$

et comme $\left(\mu+v\right)=1$, on a

$$\frac{d^{\mu}}{dx^{\mu}}\frac{d^{v}}{dx^{v}}\varphi\left(x\right)=\frac{d}{dx}\varphi\left(x\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\lambda_{0k}^{(1)}\varphi_{k}\left(x\right), \tag{3.19}$$

□

Selon la définition (3.4), la dérivée fractionnaire est une interpolation entre dérivée d'ordre entier (voir figure3.1).

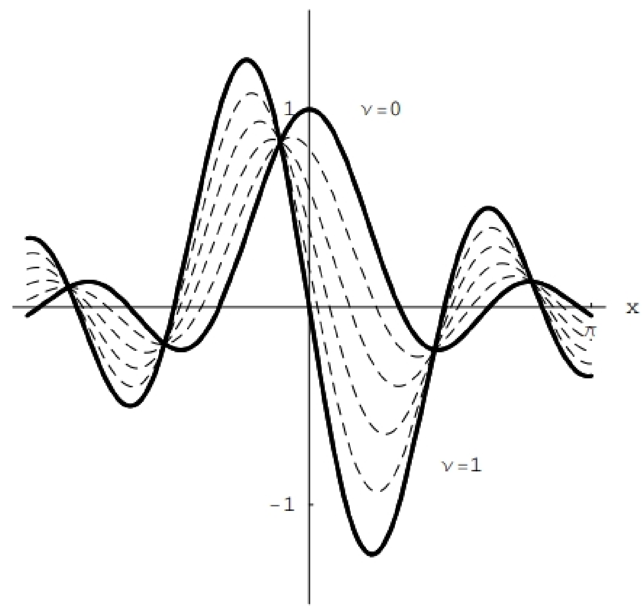

Fig3.1 : Dérivée fractionnaire des fonctions d'échelles$\frac{d^v}{dx^v}\varphi\left(x\right)$ avec limite supérieure $N=4$ pour différentes valeurs de $v=0,\ 1/5,\ 2/5,\ 3/5,\ 4/5,\ 1.$

3.1.1 Erreur d'approximation de La dérivée fractionnaire des fonctions d'échelle de Shannon

Dans la définition(3.4) , la dérivée fractionnaire dépend d'une borne fixe N de la série infinie. Dans cette section, il sera montré que la convergence de la série, du membre droit de (3.4), est assez rapide. Au fait avec de faibles valeurs de N, l'approximation est assez bonne (voir figure3.2 et figure3.3).

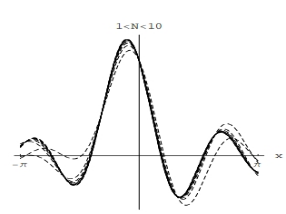

Figure3.2 : Dérivée fractionnaire des fonctions d'échelles$\frac{d^{3/10}}{dx^{3/10}}\varphi\left(x\right)$ avec limite supérieure $N=1,\ \ldots,\ 10.$

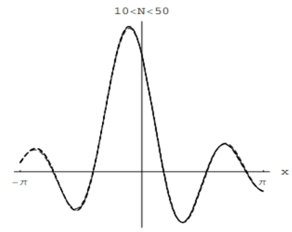

Figure3.3 : Dérivée fractionnaire des fonctions d'échelles$\frac{d^{3/10}}{dx^{3/10}}\varphi(x)$ avec limite supérieure $N = 10, \ \ldots, \ 50$.

Taux de Convergence

Si l'on compare la dérivée fractionnaire$\left(\dfrac{d^v}{dx^v}\right)\varphi_h(x)$ donnée par (3.4) avec la définition de Grünwald 1.8, nous pouvons voir que le rapprochement par des coefficients de connexion est bon (voir figure3.2 et figure3.3), avec un faible nombre de termes. En outre, la définition basée sur les coefficients de connexion peut également être étendue à des valeurs négatives de la variable.

Puisque nous avons défini la dérivée fractionnaire sur une série infinie $N \to \infty$, ainsi que la formule Grünwald, on peut calculer explicitement l'erreur d'approximation de la différence entre la valeur approchée à $N+1$ et la valeur correspondante de la série infinie à N. Par exemple, par rapport à (3.4), on a :

$$\varepsilon_N^v = \max_{x\in\mathbb{R}}\left|\sum_{k=-(N+1)}^{N+1}\lambda_{hk}^{(\ell+v)}\varphi_k(x) - \sum_{k=-N}^{N}\lambda_{hk}^{(\ell+v)}\varphi_k(x)\right|, \tag{3.20}$$

tandis que pour la formule de Grünwald (1.8), nous avons

$$\begin{aligned}\varepsilon_N^v &= \max_{x>0}\frac{1}{\Gamma(-v)}\left(\frac{x}{N+1}\right)^{-v}\sum_{k=0}^{N}\frac{\Gamma(k-v)}{\Gamma(k+1)}f\left[\left(1-\frac{k}{N+1}\right)x\right] \\ &\quad -\frac{1}{\Gamma(-v)}\left(\frac{x}{N}\right)^{-v}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{\Gamma(k-v)}{\Gamma(k+1)}f\left[\left(1-\frac{k}{N}\right)x\right],\end{aligned} \tag{3.21}$$

Théorème 9 *Pour $\ell = 0$, l'erreur d'approximation de (3.4) est donnée par :*

$$\varepsilon_N^v = 2v\left|\frac{(-1)\,h}{(N+1)^2 - h^2}\right|. \tag{3.22}$$

Preuve. Selon (3.16), on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=-(N+1)}^{N+1} \lambda_{hk}^{(\ell+v)} \varphi_k(x) - \sum_{k=-N}^{N} \lambda_{hk}^{(\ell+v)} \varphi_k(x) &= v\left[\frac{(-1)^{N+1}}{-(N+1)-h}\varphi_{-(N+1)}(x)\right. \\ &\quad \left. + \frac{(-1)^{N+1}}{(N+1)-h}\varphi_{(N+1)}(x)\right] \\ &< v\left[\frac{(-1)^{N+1}}{-(N+1)-h} + \frac{(-1)^{N+1}}{(N+1)-h}\right] \\ &= \frac{2v(-1)^{N+1}h}{(N+1)^2-h^2}.\end{aligned} \tag{3.23}$$

□

Théorème 10 *Pour $t > 0$, l'erreur d'approximation de (1.8) est donnée par :*

$$\varepsilon_N^v = \frac{N^v \Gamma(N-v)}{\Gamma(-v)\Gamma(N+1)}. \tag{3.24}$$

Preuve. Si l'entier $t = 1$, on a :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\Gamma(-v)}\left(\frac{1}{N+1}\right)^{-v}\sum_{k=0}^{N}\frac{\Gamma(k-v)}{\Gamma(k+1)}f\left[\left(1-\frac{k}{N+1}\right)\right] \\ &-\frac{1}{\Gamma(-v)}\left(\frac{1}{N}\right)^{-v}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{\Gamma(k-v)}{\Gamma(k+1)}f\left[\left(1-\frac{k}{N}\right)\right] \\ <\ &\frac{1}{\Gamma(-v)}N^v\sum_{k=0}^{N}\frac{\Gamma(k-v)}{\Gamma(k+1)}f\left[\left(1-\frac{k}{N+1}\right)\right]-\frac{1}{\Gamma(-v)}N^v\sum_{k=0}^{N-1}\frac{\Gamma(k-v)}{\Gamma(k+1)}f\left[\left(1-\frac{k}{N}\right)\right]\end{aligned}$$

et selon 2.13,

$$< \frac{N^v}{\Gamma(-v)}\frac{\Gamma(k-v)}{\Gamma(N+1)}. \tag{3.25}$$

□

3.2 Dérivée fractionnaire d'ondelette de Shannon

Théorème 11 *La dérivé fractionnaire des fonctions d' ondelettes de Shannon est donnée par :*

$$\frac{d^{\ell+v}}{dx^{\ell+v}}\psi_h^m(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\gamma^{(\ell+v)mm}_{hk}\,\psi_k^m = \begin{cases} 2^{\ell(m-1)}\left[\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}(1-v)\,\gamma^{(\ell)11}_{hk} + v2^{m-1}\gamma^{(\ell+1)11}_{hk}\right]\psi_k^m(x), & \ell > 0 \\ \left[\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}(1-v)\,\delta_{hk} + v2^{m-1}\gamma^{(1)11}_{hk}\right]\psi_k^m(x), & \ell = 0. \end{cases} \tag{3.26}$$

Preuve. Selon (3.3) et (2.21), on a :

$$\begin{aligned}
\frac{d^{\ell+v}}{dx^{\ell+v}}\psi_h^m(x) &= (1-v)\frac{d^{\ell}}{dx^{\ell}}\psi_h^m(x)+v\frac{d^{\ell+1}}{dx^{\ell+1}}\psi_h^m(x)\\
&= (1-v)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\gamma^{(\ell)mn}_{hk}\psi_k^n(x)+v\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\gamma^{(\ell+1)mn}_{hk}\psi_k^n(x)\\
&= \left[(1-v)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta^{mn}2^{\ell(n-1)}\gamma^{(\ell)11}_{hk}+v\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta^{mn}2^{(\ell+1)(n-1)}\gamma^{(\ell+1)11}_{hk}\right]\psi_k^n(x)\\
&= \left[(1-v)\sum_{k=-\infty}^{\infty}2^{\ell(m-1)}\gamma^{(\ell)11}_{hk}+v\sum_{k=-\infty}^{\infty}2^{(\ell+1)(m-1)}\gamma^{(\ell+1)11}_{hk}\right]\psi_k^m(x)\\
&= 2^{\ell(m-1)}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}(1-v)\gamma^{(\ell)11}_{hk}+v2^{m-1}\gamma^{(\ell+1)11}_{hk}\right]\psi_k^m(x)\,.
\end{aligned}$$

□

De façon analogue à la dérivée fractionnaire de la fonction échelle, pour la fonction ondelette, les dérivées fractionnaires sont enveloppées par les dérivés d'ordre entiers (voir fig3.4).

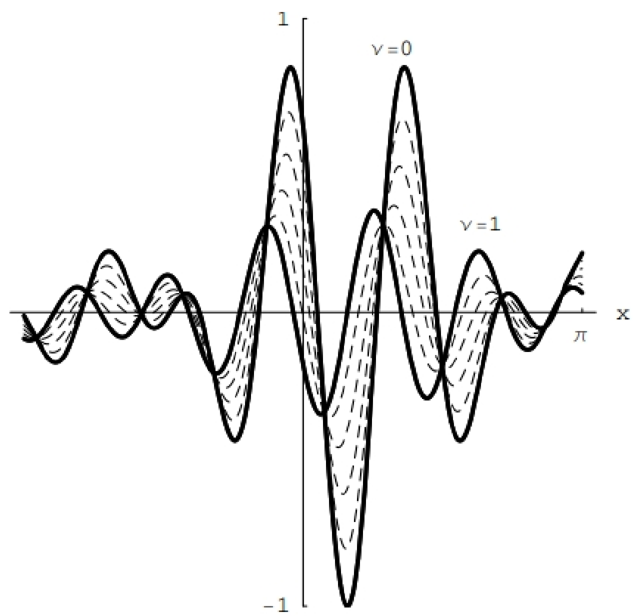

Figure3.4 : Dérivée fractionnaire des fonctions ondelettes $\frac{d^v}{dx^v}\psi_0^0(x)$ avec limite supérieure $N=4$ pour différentes valeurs de $v = 0,\ 1/5,\ 2/5,\ 3/5,\ 4/5,\ 1$.

3.3 Dérivée fractionnaire d'une fonction $L_2(\mathbb{R})$

Soit $f(x) \in B \subset L_2(\mathbb{R})$ une fonction telle que (2.17) est vérifiée, alors la dérivée fractionnaire peut être calculer comme suit :

$$\frac{d^v}{dx^v} f(x) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \alpha_h \frac{d^v}{dx^v} \varphi_h(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \beta_k^n \frac{d^v}{dx^v} \psi_k^n(x), \tag{3.27}$$

où les dérivées fractionnaires des fonctions d'échelle $\varphi_h(x)$ et l'ondelette $\psi_k^n(x)$ sont données par (3.4) et (3.26), respectivement.

Pour l'instant, une bonne approximation de $y = e^{-x^2}$ est donnée par (figure3.5)

$$e^{-x^2} \cong 0.97\varphi(x) + 0.39\left[\varphi_{-1}(x) + \varphi_1(x)\right]. \tag{3.28}$$

La dérivée fractionnaire est :

$$\frac{d^v}{dx^v} e^{-x^2} \cong 0.97 \frac{d^v}{dx^v} \varphi(x) + 0.39 \frac{d^v}{dx^v}\left[\varphi_{-1}(x) + \varphi_1(x)\right], \tag{3.29}$$

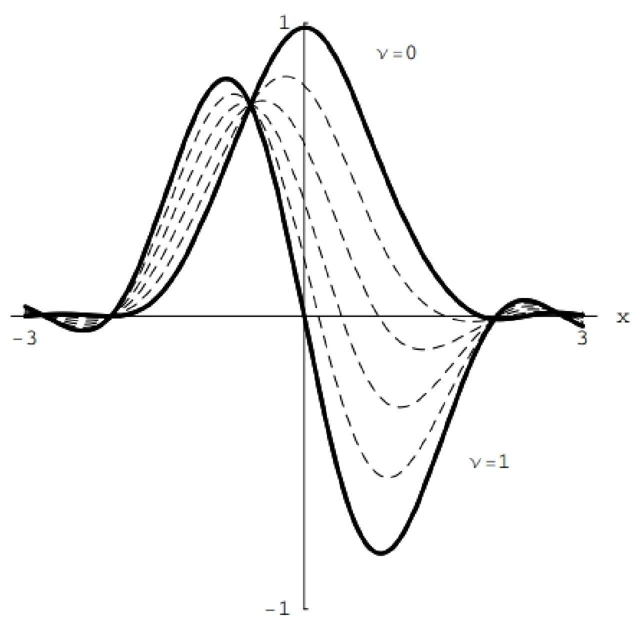

Figure3.5 : Dérivée fractionnaire de fonction $y = e^{-x^2}$avec limite supérieure $N = 4$ pour différentes valeurs de $v = 0,\ 1/5,\ 2/5,\ 3/5,\ 4/5,\ 1.$

En utilisant (3.11) et (3.12), on obtient :

$$
\begin{aligned}
\frac{d^v}{dx^v}e^{-x^2} \cong\, & 0.97\left[(1-v)\,\varphi\,(x)+v\sum_{\substack{k\neq 0\\ k=-\infty}}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\varphi_k\,(x)\right] \\
& +0.39\,(1-v)\quad\left[\varphi_{-1}\,(x)+\varphi_1\,(x)\right] \\
& +0.39v\left[\sum_{\substack{k\neq 0\\ k=-\infty}}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\varphi_k\,(x)+\sum_{\substack{k\neq 0\\ k=-\infty}}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k-1}\varphi_k\,(x)\right].
\end{aligned}
\tag{3.30}
$$

Conclusion

Dans ce mémoire, le calcul fractionnaire a été introduit en utilisant les ondelettes de Shannon. Les dérivées fractionnaires des fonctions d'échelles de Shannon et les fonctions d'ondelettes, sur la base de coefficients de connexion, sont explicitement calculées et l'erreur d'approximation est estimée. En comparaison avec la formule classique de la dérivée fractionnaire de Grünwald , les ondelettes de Shannon et les coefficients de connexion donnent une meilleure approximation de la vitesse de convergence.

Bibliography

[1] **C. Cattani,** "*Shannon wavelet analysis*," in Proceedings of the International Conference on Computational Science (ICCS'07), Y. Shi, G. D. van Albada, J. Dongarra, and P. M. A. Sloot, Eds. Lecture Notes in Computer Science, LNCS 4488, Part II, pp. 982-989, Springer, Beijing, China, May 2007.

[2] **C. Cattani,** "*Shannon wavelets theory,*" Mathematical Problems in Engineering, vol. 2008, Article ID 164808, 24 page, 2008.

[3] **C. Cattani** and **J. Rushchitsky,** *Wavelet and Wave Analysis as applied to Materials with Micro or Nanostructure*, vol. 74 of Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences, World Scientific Publishing, Singapor, 2007.

[4] **I. Daubechies**, *Ten Lectures on Wavelets*, vol. 61 of CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pa, USA, 1992.

[5] **C. Cattani**, "*Harmonic wavelet solutions of the Schrödinger equation,*" International Journal of Fluid Mechanics Research, vol. 30, no. 5, pp. 463-472, 2003.

[6] **C. Cattani**, "*Connection coefficients of Shannon wavelets*," Mathematical Modelling and Analysis, vol. 11, no. 2, pp. 117-132, 2006.

[7] **C. Cattani**, "*Shannon wavelets for the solution of integrodifferential equations*," Mathematical Problems in Engineering, vol. 2010, Article ID 408418, 22 pages, 2010.

[8] **C. Cattani**, "*Harmonic wavelets towards the solution of nonlinear PDE,*" Computers & Mathematics with Applications, vol. 50, no. 8-9, pp.1191-1210, 2005.

[9] **E. Derias**, "*Shannon wavelet approximation of linear differential operators,*" Institute of Mathematics of the Polish Academy of Sciences, no. 676, 2007.

[10] **A. Latto**, **H. L. Resnikoff**, and **E. Tenenbaum**,"*The evaluation of connection coefficients of compactly supported wavelets*," in Proceedings of the French-USA Workshop on Wavelets and Turbulence, Y. Maday, ED., pp. 76-89, Springer, 1992.

[11] **E. B. Lin** and **X. Zhou**, "*Connection coefficients on aun interval and wavelet solutions of Burgers equation*,"Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 135, no. 1, pp. 63-78, 2001.

[12] **J. M. Restrepo** and **G. K. Leaf**, "*Wavelet-Galerkin discretization of hyperbolic equations*," Journal of Computational Physics, vol. 122, no. 1, pp. 118-128, 1995.

[13] **C. H. Romine** and **B. W. Peyton**, "*Computing connection coefficients of compactly supported wavelets on bounded intervals*," Tech. Rep. ORNL/TM-13413, Computer Science and Mathematics Division, Mathematical Sciences Section , Oak RidgeNational Laboratory, Oak Ridge, Tenn, USA, 1997.

[14] **C. Toma**, "*Advanced signal processing and command synthesis for memory-limited complex systems*," Mathematical Problems in Engineering, vol 2012, Article ID 927821, 13 pages, 2012.

[15] **C. Toma**, "*Advanced signal processing and command synthesis for memory-limited complex systems*," Mathematical Problems in Engineering, vol 2012, Article ID 927821, 13 pages, 2012.

[16] **K. B. Oldham** and **J. Spanie**r, *The Fractional Calculus*, Academic Press, London, UK? 1970.

[17] **B. Ross**, *A Brief History and Exposition of the fundamental Theory of Fractional Calculus, Fractional Calculus and Applications*, vol. 457 of Lecture Notes in Mathematics, Springer, Berlin, Germany, 1975.

[18] **L. B. Elderd**, **W. P. Baker**, and **A. N. Palazoteo**,"*Numerical application of fractional derivative model constitutive relations for viscoelastic materials*," Computers and Structures, vol. 60, no. 6, pp. 875-882, 1996.

[19] **I. Podlubny**; *Fractional Differential Equations*, Academic Press, New York, 1999.

[20] **R. Gorenflo**, **F. Mainardi**, *Fractional calculus: integral and differential equations of fractional order*, Springer Verlag, Wien (1997), 223-276.

Bibliographie