

UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET SCIENCES DE LA NATURE ET
DE LAVIE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire de Master

Spécialité : Modélisation, Contrôle et Optimisation

Thème

Problème de postier chinois

Présenté par

kermane fatima zahra

Soutenu le 24 /05/2016

Devant le jury

Mr	Président	U. MOSTAGANEM.
Mr	Examineur	U. MOSTAGANEM.
Mr ablaoui	Encadreur	U. MOSTAGANEM.

Table des matières

Introduction	i
1 PARTIE THEORIQUE DU PROBLEME	1
1.1 NOTIONS SUR LES GRAPHS	1
1.1.1 Graphes non orientés	1
1.1.2 Graphes orientés	3
1.1.3 RESEAUX	4
1.2 Problème du postier chinois	6
1.2.1 Position du problème	6
1.3 Généralisation du problème du postier chinois	7
1.3.1 Formulation mathématique	9
2 PARTIE APPLICATION DU PROBLEME	11
2.1 Applications pratiques	11
2.1.1 RESOLUTION DU PROBLEME (PS) GENERALISE	12
2.2 EXECUTION SUR DES EXEMPLES	13
Conclusion	17
Bibliographie	18

INTRODUCTION

Le problème du postier chinois (en anglais : chinese postman problem) a été étudié et modélisé par le mathématicien chinois Meigu Guan en 1962 .Ce problème qui a beaucoup d'applications pratiques (ramassage des ordures ménagères, ramassage scolaire,...etc.) a connu plusieurs évolutions au fil du temps par l'adjonction de nouvelles contraintes ce qui le rend de plus en plus réaliste et complexe en même temps. Pour simplifier l'introduction de ce problème, supposons que dans une ville constitué d'un ensemble de quartiers on veuille organiser la collecte des ordures ménagères. le problème qui se pose est de déterminer un itinéraire qui passe par tous les quartiers une et une seule fois . Plusieurs questions se posent :

- Un tel itinéraire existe-t-il ? quelles sont les conditions qu'il faut réunir ?
- Comment le construire ?
- S'il n'existe pas ? Quels sont les quartiers que l'on doit parcourir plus d'une fois (et de combien) ?

C'est pour répondre à ces questions et à tant d'autres que nous avons entamé ce travail.

Mathématiquement, le problème du postier chinois consiste à :

Etant donné un graphe, il sagit de trouver une chaine (cycle) Eulérienne dans G si une telle chaine existe. Dans le cas où la chaine n'existe pas et si les arêtes sont pondérées le problème revient à trouver un ensemble d'arêtes du graphe qu'il faut parcourir plus d'une fois de manière à rendre notre graphe Eulérien et rendre le cout total de la tournée minimum.

Nous avons organisé notre travail comme suit :

Après une introduction du problème,Nous donnons au premier chapitre, quelques rappels et définitions sur les graphes.Le deuxième chapitre sera consacré à l'introduction du problème du postier chinois en donnant une formulation mathématique et quelques applications pratiques.

Dans le troisième chapitre nous donnons quelques méthodes de résolution du problème puis au dernier chapitre nous présentons le test numérique pour enfin terminer par une conclusion.

PARTIE THEORIQUE DU PROBLEME

1.1 NOTIONS SUR LES GRAPHS

1.1.1 Graphes non orientés

Un graphe $G = (X; U)$ est défini par la donnée :

- d'un ensemble fini $X = \{x_1; x_2; \dots; x\}$ ces éléments sont appelés sommets .
- un ensemble fini $U = \{u_1; u_2; \dots; u_n\}$ ces éléments sont appelés arêtes .
- une application e qui associe à toute arête u ses extrémités x et y .

Si l'arête u relie les sommets x et y , on dira que ces sommets sont adjacents, ou bien que l'arête u est incidente avec les sommets x et y .

On appelle ordre d'un graphe G le nombre de sommets n de ce graphe.

Dans tout ce qui suit on notera un graphe G par : $G = (X; U)$

Quelques définition sur les graphes

Graphe complet

Un graphe complet est un graphe ou chaque sommet est relié à tous les autres.
si ce graphe est d'ordre n , alors on le note par K_n

.

Chaines et Cycles Une chaîne C reliant deux sommets x et y est une séquence d'arêtes $\{u_1; u_2; \dots u_m\}$ telle que : x est adjacent à u_1 , les arêtes u_i et u_{i+1} sont adjacentes et enfin y est une extrémité de u_m : Une chaîne est simple si elle ne passe qu'une seule fois par chacune de ses arêtes.

Un cycle est une chaîne qui relie un sommet à lui même.

Longueur La longueur d'une chaîne correspond au nombre d'arêtes qui la constituent ou à la somme des poids de ces dernières.

Graphe connexe

Un graphe est connexe si entre deux sommets quelconque x et y il existe une chaîne dans le graphe qui les relie

Graphe simple

Une boucle est une arête dont les extrémités sont confondues.

Un graphe est simple si pour toute paire de sommets il existe au plus une arête qui les relie

Graphe partiel et sous-graphe Soit F un sous ensemble de E . Le graphe partiel de G construit sur V est le graphe $I = (V; F)$.

Soit A un sous ensemble de V . Le sous-graphe de G engendré par A est le graphe $H = (A, W)$ où $W = \{u, u \in E / \text{les deux extrémités de } u \text{ sont dans } A\}$

Degré On définit le degré d'un sommet x , $d_G(x)$, par $d_G(x) = \text{card}(\{u, u \in E / u \text{ adjacent à } x\})$

Graphes eulériens

- Un cycle passant une et une seule fois par chacune des arêtes de G est appelé cycle eulérien.
- Un graphe est dit eulérien s'il possède un cycle eulérien.

- Une chaîne passant une et une seule fois par chacun des arêtes de G est appelé chaîne eulérienne.

Matrice d'adjacence

Soit G un graphe non-orienté d'ordre n numérotés de 1 à n . On appelle matrice d'adjacence du graphe la matrice $A = (a_{i,j})$ où $a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si les sommets } i \text{ et } j \text{ sont adjacents} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1.1.2 Graphes orientés

Un graphe orienté $G = (X; U, I, T)$ est défini par la donnée de :

- D'un ensemble fini $X = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ dont les éléments sont appelés sommets.
- D'un ensemble fini $\{u_1; u_2; \dots; u_m\}$ dont les éléments sont appelés arcs.
- D'une application $I : U \rightarrow X$

$u \rightarrow I(u)$ (extrémité initiale de u).

- D'une application $T : U \rightarrow X$

$u \rightarrow T(u)$ (extrémité terminale de u).

Par abus d'écriture on notera un graphe $G = (X; U, I, T)$ par : $G = (X; U)$

Chemin et circuit

Un chemin C du sommet x vers le sommet y est une séquence ordonnée d'arêtes

$\{u_1; u_2; \dots; u_m\}$ telle que

pour tout $i = 1 \dots p-1$; $T(u_i) = I(u_{i+1})$; $I(u_1) = x$ et $T(u_m) = y$

Un circuit est un chemin qui relie un sommet à lui même.

Circuit eulérien

Un circuit eulérien est un circuit qui passe exactement une fois par tous les arêtes du graphe.

La longueur d'un circuit est le nombre d'arcs qui le composent.

Distance

On appelle distance entre deux sommets d'un graphe, la longueur d'un plus court chemin les reliant. .

Arbre

Tout graphe connexe et sans cycles est appelé arbre.

forêt

Une forêt est un graphe dont les composantes connexes sont des arbres.

1.1.3 RESEAUX

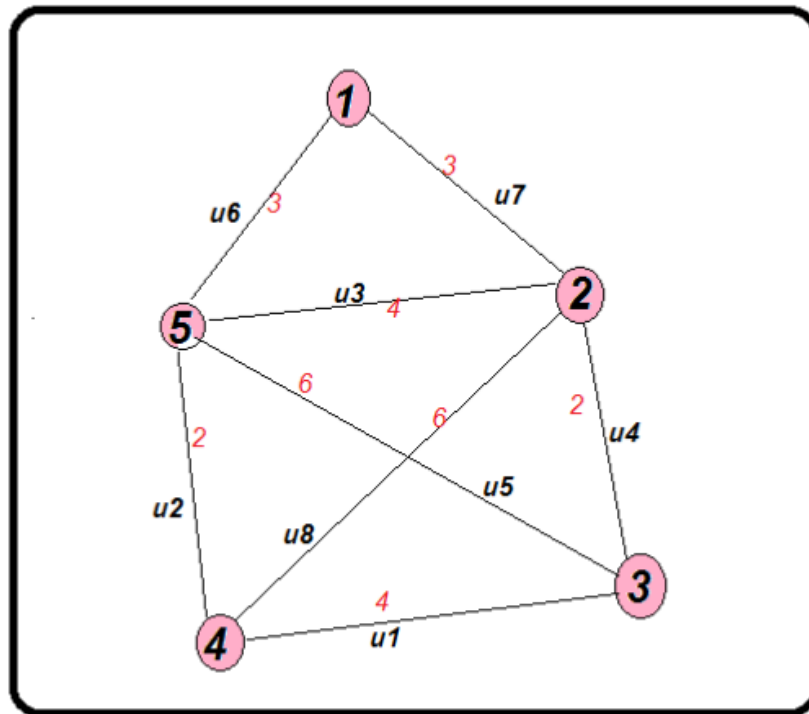
On définit une application W de U dans IR ($c : U \rightarrow IR$) appelée fonction poids (ou cout).

A toute arête u on lui associe son poids $W(u)$.

Un réseau R est un graphe où les arêtes sont associés à des poids et on note $R = (X, U, W)$.

Exemple 1.1.1

Ci-dessous est donné la représentation graphique d'un graphe $G = (X, U)$ (les sommets sont représentés par des ronds et les arêtes par des arcs).



Où

- L'ensemble des sommets est : $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
- L'ensemble des arêtes est : $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8\}$.
- Les nombres qui sont portés à côté des arêtes représentent les poids de ces dernières (par exemple l'arête u_1 est de poids 4 i.e. $W(u_1) = 4$)
- Les sommets 4 et 5 sont adjacents et les sommets 3 et 1 ne sont pas adjacents.
- Le sommet 1 est adjacent à l'arête u_1 , par contre, le sommet 2 n'est pas adjacent à l'arête u_5

Degré d'un sommet : $d_G(1) = 2$; $d_G(3) = 3$; $d_G(5) = 4$

$C = (u_1, u_6, u_7, u_3, u_5, u_4, u_8, u_1)$, est une chaîne Eulérienne dans G .

Matrice d'adjacence

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1.2 Problème du postier chinois

1.2.1 Position du problème

Soit $G = (X; U)$ un graphe que l'on suppose connexe et d'ordre n .

Le problème du postier chinois consiste à déterminer une chaîne (ou cycle) Eulérienne dans G .

Ce problème est réputé pour être facile à résoudre : il existe un algorithme polynomial pour le résoudre

Ci-dessous nous donnons quelques théorèmes :

Théorème 1.2.1 d'Euler :

Un graphe connexe contient une chaîne eulérienne si et seulement si il possède 0 ou 2 sommets de degré impair.

Un graphe connexe contient un cycle eulérien si et seulement si il ne possède aucun sommet de degré impair (autrement dit tous ses sommets sont de degré pair).

Algorithme de détermination d'une chaîne eulérienne

Ici on suppose que notre graphe G admet uniquement deux sommets x_1 et x_2 qui sont de degré impair. le principe de l'algorithme consiste à parcourir toutes les arêtes en commençant par un sommet de degré impair et en terminant par un sommet de degré impair. Soit la procédure de manière formelle :

début

démarrer à partir du sommet x_1

Choisir une arête e incidente à x_1 et soit v_1 l'autre extrémité de e (on choisira en priorité une arête in-

on continue le processus jusqu'à épuisement de toutes les arêtes du graphe.

fin

Les chaînes et les cycles sont encodés par des listes de sommets.

Algorithme de détermination d'un cycle eulérien

Ici on suppose que tous les sommets sont de degrés paires et que notre graphe est connexe.

Le principe est simple : il suffit de démarrer à partir de n'importe quel sommet et de parcourir toutes les arêtes.

soit l'algorithme :

début

démarrer à partir du sommet x_1

Choisir une arête e incidente à x_1 et soit v_1 l'autre extrémité de e

Parcourir le graphe de sommet en sommet en les choisissant arbitrairement.

on continue le processus jusqu'à épuisement de toutes les arêtes du graphe et revenir au sommet d'ori-

fin

1.3 Généralisation du problème du postier chinois

Si notre graphe n'admet pas de chaîne eulérienne, autrement dit si le nombre de sommets de degré impair est strictement supérieur à 2, le problème revient à déterminer quelles sont les arêtes que l'on doit dédoubler (sachant que chaque arête est associée à un coût) de manière à rendre le graphe eulérien et rendre minimum la longueur du cycle obtenu.

– **Couplage** : $G(X, U)$

Soit $A \subset U$. A est dit couplage :

si $\forall e_1 \in A, \forall e_2 \in A, e_1 \text{ et } e_2 \text{ ne sont pas adjacents.}$

– **Plus court chemin :**

Soit $G = (X, U)$ un graphe.

On définit une fonction poids C de $U \rightarrow \mathbb{R}$; à toute arête e on lui associe son poids.

On définit la longueur d'une chaîne L par : $C(L) = \sum_{e \in L} C(e)$

Pour déterminer un plus court chemin d'un sommet a à b Nous avons plusieurs algorithmes tels que : L'algorithme de **Bellman** (quand le graphe ne possède pas de circuits) ou l'algorithme de **Dijkstra** (si les poids sont tous positifs)

Algorithme du Dijkstra

P un arbre couvrant de G

debut

$P := \emptyset$

$d[a] := \infty$ pour chaque sommet a

$d(s_{debut}) = 0$

tant qu'il existe un sommet hors de P

choisir un sommet a hors de P de plus petite distance

Mettre a dans P

pour chaque sommet b hors de P voisin de a

$d[b] = \min(d[b], d[a] + \text{poids}(a, b))$

fin pour

fin tant que

fin

– **Graphe biparti**

Un graphe biparti est dit biparti complet si chaque sommet de U est relié à chaque sommet de V .

– **Les problèmes d'affectation**

Le problème d'affectation consiste à : étant donné n ouvriers à affecter à n tâches. Si l'on suppose que l'affectation d'un ouvrier i à une tâche j est accompagné d'un coût C_{ij} alors on doit trouver une affectation de chaque ouvrier à une tâche en rendant le coût total minimum.

Pour résoudre ce problème on utilise la méthode hongroise (méthode simple et efficace)

Algorithme Méthode de Hongroise (d'affectation)

1 Trouver l'élément minimum L_i dans chaque ligne de la matrice des coûts C .

- 2 Construire une nouvelle matrice C' comme suit : $C'_{ij} = C_{ij} - L_i$ pour tout i et j .
- 3 On détermine le minimum n_j de chaque colonne .
- 4 On calcule la matrice C'' où : $C''_{ij} = C'_{ij} - n_j$ pour tout i et j .
- 5 On essaie de procéder à une affectation avec des couts nuls . si cela est possible alors Stop
(la solution obtenue est optimale) sinon on continue.
- 6 Barrer tous les zéros de la matrice C'' Avec un nombre minimum de lignes (horizontales ou verticales) . Déterminer le minimum k des éléments non barrés , retrancher ce minimum de tous les éléments non barrés et le rajouter à tous les éléments doublement barrés.
Aller 5

Algorithme de Fleury

Pour trouver un chemin Eulérien dans G il suffit de parcourir les arcs/arête en prenant prioritairement ceux qui ne sont pas des ponts de G .

En langage de description ça donne à peu près ça :

Algorithme $C = \text{Fleury}(G)$

si G est un graphe Eulérien

alors partir de n'importe quel sommet x de G

sinon partir de x un des deux sommets ne vérifiant pas le critère d'Euler

initialiser le chemin à $C = (x)$

tant que G possède au moins un arc/arête

pour chaque y successeur de x dans G

si (x, y) n'est pas un pont **alors** sortir

en sortie (x, y) est donc un arc/arête de G

qui n'est un pont que s'il n'y a pas d'autre choix

ajouter y à la fin du chemin C

détruire l'arc/arête (x, y) de G

1.3.1 Formulation mathématique

En 1973 Edmonds et Johnson ont montré que le problème peut se formuler par le programme linéaire suivant :

- La variable x_{ij} est le nombre de copies de l'arête $(i; j)$.
- La fonction objective représente le coût total de la tournée.

$$\min \sum_{(v_i, v_j) \in A} P_{ij} X_{ij}$$

sous réserve de :

$$\sum_{(v_i, v_j) \in \sigma(i)} X_{ij} = \begin{cases} 1(\text{mod } 2) & \text{si } v_i \in T \\ 0(\text{mod } 2) & \text{sinon} \end{cases}$$

$$X_{ij} \in \{0; 1\}$$

$$(v_i, v_j) \in A$$

P_{ij} = le poids de l'arête $(i; j)$.

k_{ij} = nombre de copies de l'arête $(i; j)$.

A = ensemble des arêtes de G^* .

X_i = sommet i et X_j = sommet j .

(i) = ensemble des arêtes incidentes au sommet X_i .

X = ensemble de nœuds du graphe G .

$\partial(i)$ = ensemble des arêtes incidentes au sommet X_i .

T = ensemble des nœuds de degré impair appartenant à X_i .

PARTIE APPLICATION DU PROBLEME

2.1 Applications pratiques

Les différentes versions du problème du postier chinois et plus généralement des problèmes connus sous la forme de tournées de véhicule modélisent un nombre important de problèmes réelles que l'on rencontre dans les domaines publics et privés. Dans ce qui suit nous citerons une liste de problèmes qui est loin d'être exhaustive.

- **la distribution de courriers.(problème qui porte son nom)**
- **Calendrier aérien (Airline Scheduling)**

Le problème consiste à définir l'affectation de chaque avion qui doit desservir un ensemble de destinations et de définir l'itinéraire qu'il doit prendre : c'est un problème qui se modélise par le problème du postier chinois. Bien sûr le problème peut se compliquer si l'on doit optimiser le nombre d'avions et le nombre d'équipages à affecter sur un ensemble de destinations : on a ce que l'on appelle le problème de tournées de véhicules

- **Relevé des compteurs électriques (Electric Meter Reading) :**

Un agent des services de la sonelgaz doit périodiquement effectuer des relevés des compteurs d'électricité et de gaz : Il doit visiter des abonnés qui se trouvent dans son quartier d'affectation. Avant de démarrer sa tournée il doit déterminer son itinéraire : il résout un problème du postier chinois

- **le ramassage des ordures ménagères (la collecte des ordures).**

- le déneigement des rues.
- La surveillance de la patrouille de police.
- l'ordinateur qui dessine le traçage d'un réseau (ou ploter mécanique).
- le nettoyage des rues.

Dans ce mémoire on a pris la collecte des ordures comme exemple à modéliser .

2.1.1 RESOLUTION DU PROBLEME (PS) GENERALISE

L'algorithme du postier chinois (1967)

- 1 Soit S l'ensemble des sommets de degré impair.
- 2 pour chaque paire de sommets (u, v) dans S .
- 3 Trouver un plus court chemin P , dans G , entre toute paire (u, v) de S (Algorithme de Dijkstra) et Soit $d(u, v)$ sa longueur.
- 4 Construire un graphe complet K avec les sommets de S .
- 5 Pour chaque arête e de K , Assigner à l'arête e la longueur $d(u, v)$ où u et v sont les extrémités de e .
- 6 Trouver le couplage parfait M dans K pour que le poids total soit minimum (Algorithme hongrois).
- 7 Pour chaque arête e dans M
 - Reprendre P correspondant au chemin le plus court entre les extrémités de e .
 - Pour chaque arête f de P , ajouter au graphe G une copie de f avec sa longueur.
- 8 Soit G^* un graphe eulérien formé en ajoutant à G les arêtes dupliquées au point précédent.
- 9 Construire un cycle eulérien W dans G^* (Algorithme de Fleury).
- 10 Le cycle eulérien W correspond au chemin optimal du problème du facteur Chinois du graphe G de départ.

2.2 EXECUTION SUR DES EXEMPLES

Exemple 2.2.1 (*collecte des ordures*)



Description du problème

La ville a décidé de faire des économies. Notre camionneur doit parcourir à partir du dépôt toutes les rues de la ville pour ramasser les poubelles et de manière minimale, pour ne pas gaspiller du mazout ni du temps et revenir au dépôt.

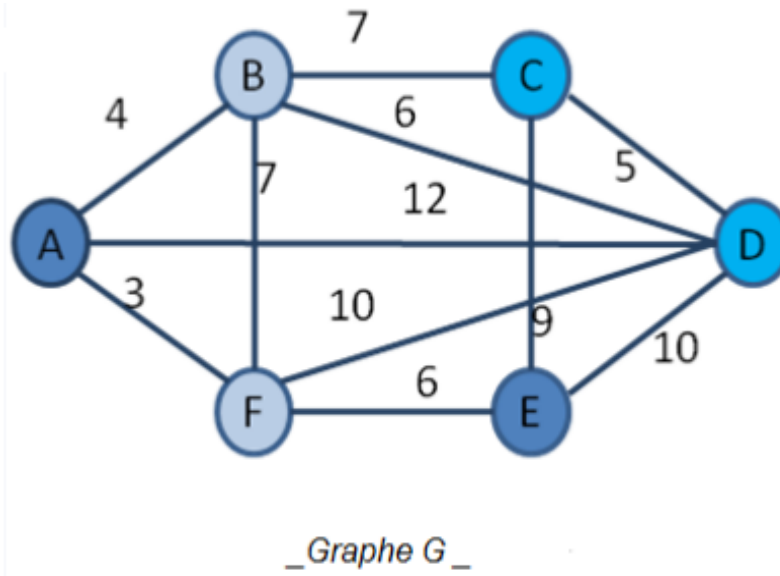
Le problème n'est pas aussi facile qu'on pourrait l'imaginer...

Modélisation d'une ville

Un graphe est une structure de données constituée d'arêtes modélisant les routes et de sommets modélisant les carrefours.

Les arêtes ont un coût représentant la distance entre deux carrefours .

Soit le graphe suivant :



1 Trouver l'ensemble S des sommets impairs.

$S = \{A, C, E, D\}$ où $d^\circ(A) = d^\circ(C) = d^\circ(E) = 3$ et $d^\circ(D) = 5$.

2 Pour chaque paire de sommets $(X, U) \in S$, trouver le chemin le plus court entre U et V dans G. (Alg Dijkstra)

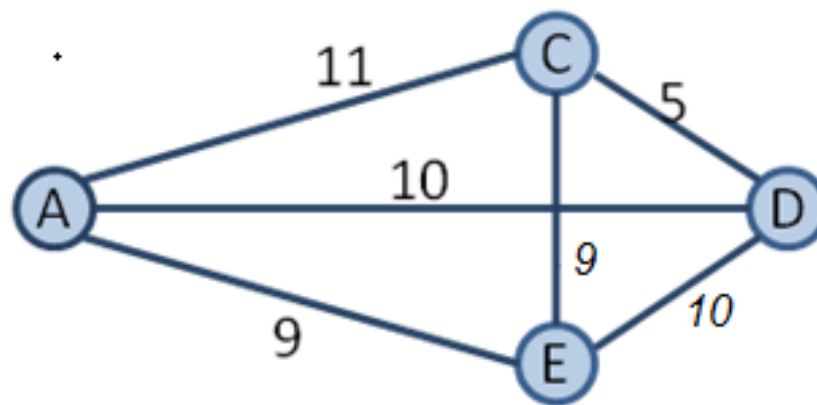
$$d(A, C) = d(A, B) + d(B, C) = 4 + 7 = 11, \quad d(C, E) = 9.$$

$$d(A, D) = d(A, B) + d(B, D) = 4 + 6 = 10, \quad d(C, D) = 5.$$

$$d(A, E) = d(A, F) + d(F, E) = 3 + 6 = 9, \quad d(D, E) = 10.$$

3&4 Construire un graphe complet K avec les sommets appartenant à S.

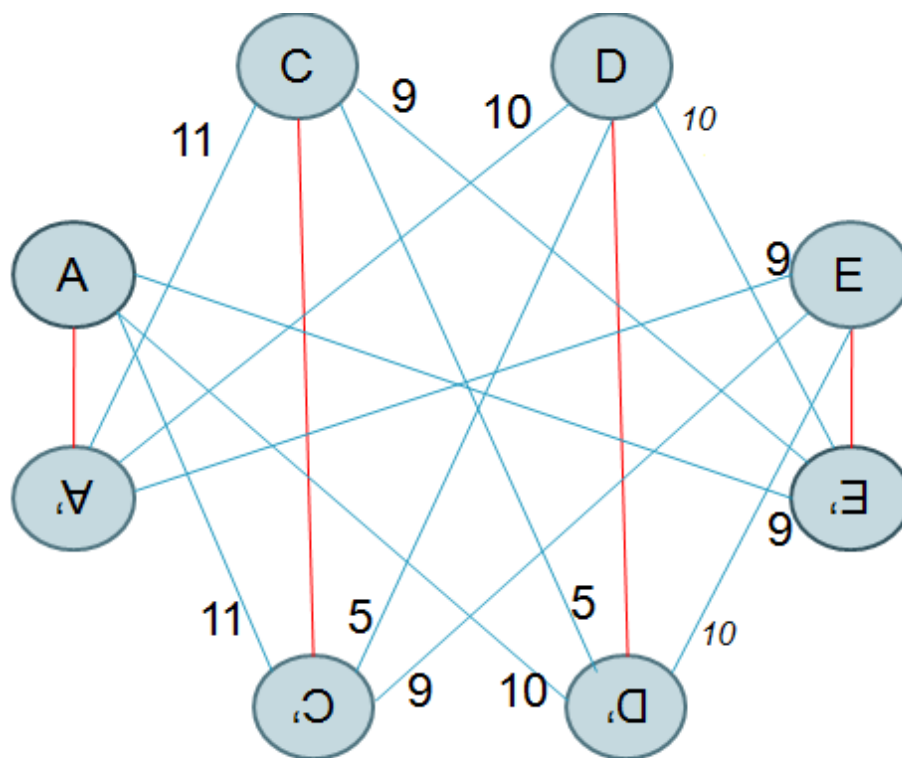
Le poids de l'arête entre chaque sommet est la distance calculée précédemment.



_ Graphe complet K _

5 le couplage parfait M ?

Construire un graphe bipartie K' avec les sommets de K



_ Graphe bipartie K' _

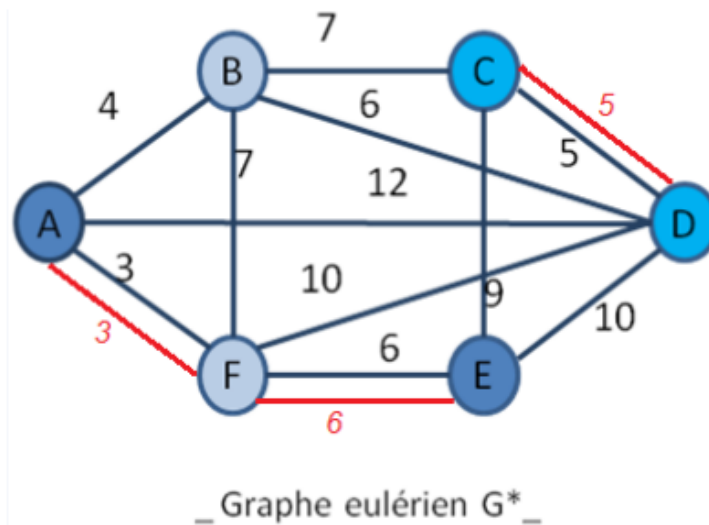
Appliqué l'Algorithme Hongrois :

		A'	C'	D'	E'
⇒	A	Inf	11	10	9
⇒	C	11	inf	5	9
⇒	D	10	9	inf	10
⇒	E	9	9	10	inf

		A'	C'	D'	E'
	A	inf	2	1	0
	C	6	Inf	0	4
	D	5	0	inf	5
	E	0	0	1	inf

* Donc le couplage de poids minimum est le couplage A,E et C,D de poids $9+5=14$.

6&7 Transformer le graphe G en un graphe eulérien G*, en doublant les arêtes du chemin le plus court entre les sommets du couplage réalisé.



8&9 Trouver le chemin eulérien qui parcourt toutes les arêtes de G* en appliquant l'algorithme de Fleury.

Le chemin eulérien parcourt les sommets tel quel :

A, B, C, D, E, F, A, D, B, F, D, C, E, F,A.

CONCLUSION

Dans ce mémoire nous nous sommes restraints à l'étude du problème du postier chinois dans sa version la plus simple : nous avons présenté un algorithme de détermination d'un circuit eulérien (quand il existe) . L'algorithme de détermination des arêtes, qu'il faut dédoubler, pour rendre le graphe eulérien est simple. Sa programmation l'est beaucoup moins.

Nous espérons pouvoir nous intéresser de plus près aux autres versions beaucoup plus compliquées du problème.

Bibliographie

[1] https://fr.wikipedia.org/wiki/Graphe_eul%C3%A9rien

[2] https://www.google.fr/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=14&cad=rja&uact=8&ved=0CCCEQFjAA&url=http%3A%2F%2Frouxph.blogspot.com%2F2013%2F04%2Fchemins-euleriens-et-algorithme-de.html&ei=Z2FYVcDvJsKAU92TgPgK&usg=AFQjCNGNZd_SABA2DnwVzMoBjLkTFsgfiw&bvm=bv.93564037,d.dGc

[3] <https://www.google.fr/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&cad=rja&uact=8&ved=0CHIQFjAN&url=https%3A%2F%2Ffreussirlem1info.files.wordpress.com%2F2012%2F03%2Fprobleme-ccp.pptx&ei=cTBYVafsMe2v7AbtwoCwDw&usg=AFQjCNEdY8GBKVBb1j2-PFX9pdbAgDs3yQ&bvm=bv.93564037,d.d24>