

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS
DE MOSTAGANEM
FACULTE DES SCIENCES EXACTES
ET D'INFORMATIQUE



Département de mathématiques
et d'informatique



MEMOIRE DE FIN D'ETUDES



Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques :

Option : Analyse fonctionnelle

THEME :

Etude d'un problème de Bitzadse-Samarski généralisé dans les
espaces L^p : cadre non commutatif.

❖ Présenté par : *Beddani Khaled*

Soutenu le 13/06/2021 devant le Jury

Mr. Menad Abdallah	Président	MCA	U. Mostaganem
Mr. Haoua Rabah	Examineur	MCB	U. Mostaganem
Mr. Ahmed Medeghri	Encadreur	Pr	U. Mostaganem

Année universitaire : 2020/ 2021

Remerciements

Je tiens à exprimer ma gratitude à mon encadreur, **Ahmed Medeghri**. Je le remercie de m'avoir guidé, de m'avoir aidé et de m'avoir conseillé. Je tiens également à le remercier pour toutes les heures qu'il a passées à relire mes écrits et à répondre à mes questions.

Je remercie vivement Mr **Menad Abdallah** d'avoir accepté de présider mon jury.

Un grand merci à Mr **Haoua Rabah**, examinateur, pour tous ses conseils et ses recommandations.

Je remercie sincèrement tous les professeurs du département de mathématique, qui ont dirigé mes pensées à travers leurs paroles, écrits, conseils et critiques, et ont accepté de me rencontrer et de répondre à mes questions au cours de mes recherches.

Je remercie mes chers parents, qui ont toujours été là pour moi.

Enfin, je remercie mes amis Bennour Abdelaziz, Lamouri Nabil Qui ont toujours été là pour moi. Leur soutien incondtionnel et leurs encouragements ont été d'une grande aide.

Je remercie tous ceux qui ont contribué à ce travail de près ou de loin.

Abstract

The aim of this work is to find results of existence, uniqueness and maximum regularity of the solution of a generalized of Bitzadse-Samarski problem in spaces L^p in non commutative Cases. The method is based mainly on the use of the theory of operator sums, the Semi-groups and interpolation spaces.

This work completes the article [1] which has dealt in the spaces L^p in commutative framework.

key - words : Bitzadse-Samarski problem in spaces; non commutative Cases; Analytic semi-groups; maximum regularity; UMD space; Interpolation spaces.

Résumé

Le but est de trouver des résultats d'existence, d'unicité et de régularité maximale de la solution d'un problème de Bitzadse-Samarski généralisé dans les espaces L^p : cadre non commutatif. La méthode est basée essentiellement sur l'utilisation de la théorie des sommes d'opérateurs, les semigroupes et les espaces d'interpolation.

Ce travail complète l'article [1] qui a traité dans les espaces L^p le cadre commutatif.

Mots clés : Problème de Bitzadse-Samarski généralisé Cadre non commutatif; Semigroupes analytiques; régularité maximale; espaces UMD ; Espaces d'interpolation.

Table des Matières

Introduction	1
0.1 Position du problème	1
0.2 Aperçu historique	1
0.3 Description des chapitres et résultats principaux	2
1 Rappels	3
1.1 Les opérateurs:	3
1.1.1 Opérateurs linéaires bornés	3
1.1.2 Opérateurs linéaires fermés	4
1.1.3 Opérateurs sectoriels	5
1.2 Les semi-groupes d'opérateurs linéaires	5
1.2.1 Semi-groupes fortement continus	5
1.2.2 Générateur infinitésimal d'un semi-groupe	5
1.2.3 Semi-groupes analytiques	6
1.3 Les espaces d'interpolation	7
1.3.1 Quelques espaces d'interpolation particuliers	7
1.3.2 Propriété fondamentale d'interpolation	9
1.4 Les espaces U M D	9
1.5 Espaces de Sobolev à valeurs vectorielles	10
1.6 Puissances fractionnaires d'opérateurs	11
1.7 Calcul fonctionnel	11
2 Représentation de la solution et régularité	13
2.1 Les hypothèses	13
2.2 Conséquences des hypothèses	14
2.3 Représentation de la solution	15
2.4 Régularité	16
2.5 Cas particulier du problème	20
3 Problème avec un paramètre spectral	22
3.0.1 Étude du problème	22
4 Application	25
Bibliographie	29

Introduction

0.1 Position du problème

On considère, dans un espace de Banach complexe X , un problème de Bitsadse-Samarski généralisé dans les espaces L^p : cadre non commutatif.

Soit $0 \leq x_0 < 1$; le problème aux limites que l'on se propose d'étudier ici, consiste en l'équation différentielle

$$-u''(x) + Au(x) + \omega u(x) = f(x); x \in (0; 1), \quad (0.1.1)$$

avec les conditions aux limites non locales généralisées :

$$\begin{cases} u(0) = u_0, \\ u'(x_0) \in D(H) \text{ et } u(1) - Hu'(x_0) = u_{1,x_0}. \end{cases} \quad (0.1.2)$$

Ici, A et H sont deux opérateurs linéaires fermés dans un espace de Banach complexe X , de domaines respectifs $D(A) \subset X$ et $D(H) \subset X$, u_0 et $u_{1;x_0}$ sont des éléments donnés dans X et ω est un paramètre spectral positif. Notre étude se fera, lorsque le second membre f appartient à $L^p(0, 1; X)$ avec $1 < p < +\infty$.

On s'intéresse à l'existence, l'unicité et la régularité maximale de la solution classique pour les problèmes (0.1.1)-(0.1.2) sous des conditions nécessaires et suffisantes de compatibilité des données $u_0, u_{1;x_0}$ et f . Pour des raisons de commodité, on va traiter l'équation (0.1.1) avec la notation

$$A_\omega = A + \omega I, \omega \geq 0$$

La principale difficulté et originalité de ce travail réside dans le fait que :

1. les opérateurs A et H ne commutent pas.
2. les conditions aux limites contiennent des opérateurs non bornés.

0.2 Aperçu historique

Le travail, que je présente dans ce mémoire, fait suite à celui de Hamdi Brahim pour le cadre commutatif dans les espaces UMD [1].

Ici, je considère le cadre non commutatif dans les espaces UMD .

Des résultats originaux sont démontrés complétant ainsi ceux obtenus dans le travail cité ci-dessus.

0.3 Description des chapitres et résultats principaux

Ce travail comporte quatre chapitres.

- Le premier chapitre est dédié aux rappels d'usage sur les outils mathématiques utilisés dans ce travail tels que des notions d'analyse fonctionnelle, certains résultats classiques sur la théorie des semi-groupes, les espaces d'interpolation, les puissances fractionnaires d'opérateurs et les intégrales de Dunford.
- Le deuxième chapitre traite les problèmes (0.1.1)-(0.1.2) lorsque $f \in L^p(0, 1; X)$; $1 < p < +\infty$ et pour $\omega = 0$.

Après avoir construit une formule de représentation de la solution, on donne les conditions nécessaires et suffisantes d'existence, d'unicité et de régularité optimale d'une solution classique du problèmes (0.1.1)-(0.1.2) , c'est-à-dire une fonction u vérifiant

$$\begin{cases} i) & u \in W^{2,p}(0, 1; X) \cap L^p(0, 1; D(A)), \\ ii) & u'(x_0) \in D(H), x_0 \in [0, 1[, \\ iii) & u \text{ satisfait; (0.1.1) - (0.1.2) et pour } \omega = 0. \end{cases}$$

Une solution semi-classique du problème (0.1.1)-(0.1.2), c'est-à-dire une fonction u vérifiant, pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$

$$\begin{cases} i) & u \in W^{2,p}(0, 1 - \varepsilon; X) \cap L^p(0, 1 - \varepsilon; D(A)) \cap W^{1,p}(0, 1; X), \\ ii) & u'(x_0) \in D(H), x_0 \in [0, 1[, \\ iii) & u \text{ satisfait (0.1.1) - (0.1.2) et pour } \omega = 0. \end{cases}$$

Plus précisément, et faisant des hypothèses, nous obtenons les résultats suivants:

Théorème 0.3.1 *On suppose (2.1.1)~(2.1.7). Soient $u_0, u_{1,x_0} \in X$ et $f \in L^p(0, 1; X)$, $1 < p < +\infty$. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. (a) *Le problème (2.0.1)-(2.0.2) admet une unique solution semi-classique.*

(b)

$$\begin{cases} u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}, \\ Q(e^{x_0 Q}(u_0 - J_0) + I_{x_0} - J_{x_0}) \in D(H) \text{ et}, \\ \Lambda^{-1}(u_{1,x_0} + HQ(e^{x_0 Q}(u_0 - J_0) + I_{x_0} - J_{x_0})) \in (D(A), X)_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2p}, p}. \end{cases}$$

2. (a) *Le problème (2.0.1)-(2.0.2) admet une unique solution classique.*

(b)

$$\begin{cases} u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}, \\ Q(e^{x_0 Q}(u_0 - J_0) + I_{x_0} - J_{x_0}) \in D(H) \text{ et}, \\ \Lambda^{-1}(u_{1,x_0} + HQ(e^{x_0 Q}(u_0 - J_0) + I_{x_0} - J_{x_0})) \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}. \end{cases}$$

- Dans le troisième chapitre, on considère cette fois-ci, pour $\omega \geq \omega_0$, le problème (0.1.1)-(0.1.2). On s'intéresse à l'existence, l'unicité et la régularité maximale des deux types de solutions du problème (0.1.1)-(0.1.2).
- Dans le quatrième chapitre, On adapte l'exemple donné dans [2] pour illustrer nos résultats.

Chapitre 1

Rappels

1.1 Les opérateurs:

1.1.1 Opérateurs linéaires bornés

Soient X , Y et Z des espaces de Banach.

Définition 1.1.1 On dit qu'un opérateur A , défini de X dans Y est borné si

$$D(A) = X \text{ et } \sup_{\|\xi\| \leq 1} \|A\xi\| < +\infty$$

Définition 1.1.2 On note $\mathcal{L}(X;Y)$ la collection de tous les opérateurs linéaires bornés de l'espace vectoriel normé X dans l'espace vectoriel normé Y , $\mathcal{L}(X;Y)$ est un espace normé et sa norme est définie par

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X;Y)} = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_Y = \sup_{\|x\|_X = 1} \|Ax\|_Y, \quad \forall A \in \mathcal{L}(X;Y).$$

On note $\mathcal{L}(X;X) := \mathcal{L}(X)$

Proposition 1.1.1 $\mathcal{L}(X;Y)$ est un espace de Banach si et seulement si Y est un espace de Banach.

Proposition 1.1.2 Soit $A \in \mathcal{L}(X)$. Si $\|A\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$ alors $(I - A)$ est inversible dans $\mathcal{L}(X)$ et $(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$.

Définition 1.1.3 Soient $(A, D(A)), (B, D(B))$ deux opérateurs linéaires de X dans Y . On dit que B est une extension ou un prolongement de A et on note $A \subset B$ si

$$\begin{cases} D(A) \subset D(B), \\ \forall x \in D(A), Ax = Bx. \end{cases}$$

Définition 1.1.4 Soient $A : D(A) \subset X \longrightarrow Y$ et $B : D(B) \subset Y \longrightarrow Z$ deux opérateurs linéaires . On peut définir l'opérateur BA par

$$\begin{cases} D(BA) = \{x \in D(A) : Ax \in D(B)\}, \\ (BA)x = B(Ax), x \in D(BA). \end{cases}$$

Définition 1.1.5 On appelle ensemble résolvant de A , l'ensemble

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda I) \text{ est inversible et à inverse borné dans } \mathcal{L}(X)\}.$$

Un élément de $\rho(A)$ est appelé valeur résolvante de A .

1. Si $\lambda \in \rho(A)$ on définit $R_\lambda(A)$ la résolvante de A au point λ par

$$R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}.$$

2. $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ est appelé le spectre de A et un élément de $\sigma(A)$ est appelé valeur spectrale de A .

1.1.2 Opérateurs linéaires fermés

Définition 1.1.6 Un opérateur linéaire $A : D(A) \subset X \longrightarrow Y$ est dit fermé si et seulement si pour toute suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A)$ telle que

$$\begin{cases} x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x, \text{ dans } X \\ Ax_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} y, \text{ dans } Y. \end{cases}$$

on a $x \in D(A)$ et $Ax = y$.

Proposition 1.1.3 Soit A un opérateur linéaire fermé sur X . Alors l'application

$$R_\lambda : \lambda \in \rho(A) \longrightarrow R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$$

est analytique sur $\rho(A)$.

Proposition 1.1.4 Soit $A : D(A) \subset X \rightarrow Y$ un opérateur linéaire .

1. Si A est un opérateur fermé, alors pour tout $B \in \mathcal{L}(X; Y)$ l'opérateur $A + B : D(A) \rightarrow X \subset Y$ est fermé.
2. Si A est un opérateur fermé et injectif alors A^{-1} est fermé.
3. Si A est un opérateur fermé à valeurs dans X et $D(A)$ est fermé dans X alors A est continu de $D(A)$ dans X .
4. Si A est un opérateur continu sur $D(A) \subset X$, alors A est fermé si et seulement si, son domaine est fermé.
5. Si $\rho(A) \neq \emptyset$ alors A est fermé.

Proposition 1.1.5 Soient $A \in \mathcal{L}(X)$ et $B : D(B) \subset X \rightarrow X$ un opérateur linéaire fermé tels que $Im(A) \subset D(B)$ Alors $BA \in \mathcal{L}(X)$.

1.1.3 Opérateurs sectoriels

Définition 1.1.7 Soit $0 < \omega \leq \pi$ On définit le secteur suivant

$$S_\omega = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg z| < \pi - \omega\}.$$

Un opérateur linéaire fermé A sur X est dit sectoriel d'angle ω si $S_\omega \subset \rho(A)$, et

$$\sup_{\lambda \in S_\omega} \|\lambda(A - \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < +\infty$$

1.2 Les semi-groupes d'opérateurs linéaires

1.2.1 Semi-groupes fortement continus

Définition 1.2.1 Soit $\{G(t)\}_{t \geq 0}$ une famille d'opérateurs linéaires dans X . On dit que cette famille forme un semi-groupe dans X si elle vérifie les propriétés suivantes:

1. $G(0) = I_X$,
2. $\forall s, t \in \mathbb{R}^+, G(t + s) = G(t)G(s)$.

Lorsque la famille $\{G(t)\}_t$ est définie pour $t \in \mathbb{R}$, et que la deuxième propriété est vérifiée pour tout s, t de \mathbb{R} on dira qu'on a un groupe.

Définition 1.2.2 On dit qu'un semi-groupe $\{G(t)\}_{t \geq 0}$ est fortement continu si et seulement si pour tout $x \in X$, l'application $t \rightarrow G(t)x$ de \mathbb{R}^+ dans X est continue, c'est-à-dire pour tout $x \in X$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|G(t)x - x\|_X = 0$$

On dit aussi que $\{G(t)\}_{t \geq 0}$ est un C_0 semi - groupe.

Définition 1.2.3 Un semi-groupe $\{G(t)\}_{t \geq 0}$ est appelé semi-groupe uniformément continu d'opérateurs linéaires bornés si

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|G(t) - I\|_{\mathcal{L}(X)} = 0.$$

Proposition 1.2.1 Si $\{G(t)\}_{t \geq 0}$ un semi-groupe fortement continu alors il existe deux constantes $M \geq 1$ e $\omega \geq 0$ telles que

$$\|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t}, \quad \forall t \geq 0.$$

1.2.2 Générateur infinitésimal d'un semi-groupe

Définition 1.2.4 On appelle générateur infinitésimal d'un semi-groupe $\{G(t)\}_{t \geq 0}$, l'opérateur A défini par

$$\begin{cases} D(A) = \left\{ \varphi \in X : \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{G(h)\varphi - \varphi}{h} \text{ existe} \right\} \\ A\varphi = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{G(h)\varphi - \varphi}{h}, \quad \varphi \in D(A). \end{cases}$$

$D(A)$ est non vide ($0 \in D(A)$) et est bien un sous espace vectoriel de X , A est linéaire de $D(A)$ dans X .

Proposition 1.2.2 Soit $(A, D(A))$ est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $\{G(t)\}_{t \geq 0}$, alors

1. A est linéaire fermé de domaine $D(A)$ dense dans X .
2. $]0, +\infty[\subset \rho(A)$ et $\forall \lambda \in]0, +\infty[$, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$\|(A - \lambda I)^n\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n},$$

où $M \geq 1$ et $\omega \geq 0$.

1.2.3 Semi-groupes analytiques

On définit, pour tout $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, le secteur $\Sigma_\alpha := \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg z| < \alpha\}$.

Définition 1.2.5 Soit $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. Une famille $\{G(z)\}_{z \in \Sigma_\alpha}$ d'éléments de $\mathcal{L}(X)$ forme un semi-groupe analytique de type α dans X , un espace de Banach complexe, si elle vérifie les conditions suivantes :

1. $G(0) = I$,
2. $\forall z_1, z_2 \in \Sigma_\alpha$ tel que $z_1 + z_2 \in \Sigma_\alpha$, $G(z_1 + z_2) = G(z_1)G(z_2)$,
3. $\forall x \in X$, $\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \in \Sigma_\alpha}} G(z)x = x$,
4. l'application $z \rightarrow G(z)$ est holomorphe sur Σ_α .

Théorème 1.2.1 Soit A un opérateur linéaire fermé à domaine dense $D(A)$ dans X tel que

$$]0, +\infty[\subset \rho(A) \text{ et } \exists M > 0 : \forall \lambda > 0, \|(A - \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{\lambda}.$$

Alors, il existe un secteur Σ_δ , $0 < \delta \leq \frac{\pi}{2}$, tel que

$$\Sigma_\delta \subset \rho(A) \text{ et } \forall \lambda \in \Sigma_\delta, \|(A - \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{|\lambda|}.$$

De plus, l'opérateur $(-A)^{\frac{1}{2}}$ est bien défini et il existe un secteur $\Sigma_{\alpha+\pi/2}$ avec $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, tel que

$$\Sigma_{\alpha+\pi/2} \subset \rho\left((-A)^{\frac{1}{2}}\right),$$

et $(-A)^{\frac{1}{2}}$ génère un semi-groupe analytique.

1.3 Les espaces d'interpolation

Définition 1.3.1 Soit X un espace de Banach. On désigne par $L_*^p(\mathbb{R}_+; X)$ avec $p \in [1; +\infty]$, l'espace de Banach des fonctions f fortement mesurables définies pour presque tout $t \in \mathbb{R}_+$ et telles que

$$\left(\int_0^{+\infty} \|f(t)\|_X^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p} = \|f\|_{L_*^p(\mathbb{R}_+; X)} < +\infty$$

avec la modification habituelle pour $p = +\infty$.

Définition 1.3.2 Soient $(X_0; \|\cdot\|_0)$ et $(X_1; \|\cdot\|_1)$ deux espaces de Banach s'injectant continuellement dans un espace topologique séparé X .

pour $p \in [1; +\infty]$ et $\theta \in]0; 1[$, on dit que $x \in (X_0; X_1)_{\theta, p}$ si et seulement si

$$\begin{cases} i) \forall t > 0, \exists x_0(t) \in X_0, \exists x_1(t) \in X_1 \text{ tel que } x = x_0(t) + x_1(t), \\ ii) t^{-\theta} x_0 \in L_*^p(\mathbb{R}_+; X_0), t^{1-\theta} x_1 \in L_*^p(\mathbb{R}_+; X_1). \end{cases}$$

Proposition 1.3.1 $(X_0 \cap X_1; \|\cdot\|_{X_0 \cap X_1})$, $(X_0 + X_1; \|\cdot\|_{X_0 + X_1})$ et $((X_0, X_1)_{\theta, p}; \|\cdot\|_{\theta, p})$ sont des espaces de Banach pour les normes respectives

$$\begin{cases} \|x\|_{X_0 \cap X_1} = \|x\|_{X_0} + \|x\|_{X_1} \text{ si } x \in X_0 \cap X_1, \\ \|x\|_{X_0 + X_1} = \inf_{x_i \in X_i, x_0 + x_1 = x} (\|x_0\|_{X_0} + \|x_1\|_{X_1}) \text{ si } x \in X_0 + X_1, \\ \|x\|_{\theta, p} = \inf_{\substack{x_i: \mathbb{R}_+ \rightarrow X_i, i=0,1 \\ \forall t > 0, x = x_0(t) + x_1(t)}} (\|t^{-\theta} x_0\|_{L_*^p(\mathbb{R}_+; X_0)} + \|t^{1-\theta} x_1\|_{L_*^p(\mathbb{R}_+; X_1)}) \text{ si } x \in (X_0, X_1)_{\theta, p}. \end{cases}$$

de plus

$$X_0 \cap X_1 \subset (X_0, X_1)_{\theta, p} \subset X_0 + X_1$$

avec injections continues.

Notons que $(X_0, X_1)_{\theta, p} = (X_1, X_0)_{1-\theta, p}$.

1.3.1 Quelques espaces d'interpolation particuliers

Définition 1.3.3 Soit A un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A) \subset X$, muni de sa norme du graphe:

$$\forall x \in D(A), \|x\|_{D(A)} = \|x\|_X + \|Ax\|_X.$$

En suivant les notations de Da Prato-Grisvard [7], pour $p \in [1, +\infty]$ et $0 < \theta < 1$, on pose alors

$$D_A(\theta, p) = (D(A), X)_{1-\theta, p}.$$

Quand l'opérateur A vérifie certaines hypothèses supplémentaires, il est alors possible de donner des caractérisations explicites de $D_A(\theta, p)$ comme suit:

Proposition 1.3.2 Soient $p \in [1, +\infty]$, $0 < \theta < 1$ et A un opérateur linéaire fermé sur X de domaine $D(A)$.

1. Supposons que $\rho(A) \supset \mathbb{R}_+^*$ et qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall t > 0, \|(A - tI)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C}{t},$$

alors

$$D_A(\theta, p) = \{x \in X : t^\theta A(A - tI)^{-1}x \in L_*^p(\mathbb{R}_+; X)\},$$

(voir G.Da Prato et P.Grisvard [7]).

2. Si A génère un semi-groupe fortement continu et borné dans X

$$D_A(\theta, p) = \{x \in X : t^{-\theta}(e^{tA} - I)x \in L_*^p(\mathbb{R}_+; X)\},$$

(voir Lions [16]).

3. Si maintenant A génère un semi-groupe analytique borné dans X , alors

$$D_A(\theta, p) = \{x \in X : t^{1-\theta}Ae^{tA}x \in L_*^p(\mathbb{R}_+; X)\}.$$

Notons que, d'après G.Da Prato et P.Grisvard (voir [7], page 383), on a

$$D_{A^m}(\theta, p) = D_A(m\theta, p),$$

avec $m \in \mathbb{N}^*$, $p \in [1, +\infty]$ et $0 < \theta < 1$.

Remarque 1.3.1 Soit A un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A) \subset X$. Quand l'opérateur A vérifie certaines hypothèses supplémentaires, il est alors possible de donner, pour $m \geq 1$, des caractérisations explicites de $(D(A^m), X)_{1/mp, p}$. On a

$$(D(A^m), X)_{1/mp, p} = D_{A^m}(1 - 1/mp, p),$$

(voir P.Grisvard [10]) et grâce à la propriété de réitération (voir Lions -Peetre [15]), il s'ensuit pour $m \geq 1$

$$\begin{aligned} D_{A^m}(1 - 1/mp, p) &= D_A(m - 1/p, p) \\ &= D_A(m - 1 + (1 - 1/p), p) \\ &= \left\{ \varphi \in D(A^{m-1}) : A^{m-1}\varphi \in (D(A), X)_{1/p, p} \right\} \\ &= (D(A), X)_{(m-1)+1/p, p}. \end{aligned}$$

En particulier, on pose alors $m = 2$, en suivant les notations de P.Grisvard [10]

$$\begin{aligned} (D(A^2), X)_{1/2p, p} &= D_{A^2}(1 - 1/2p, p) \\ &= (D(A), X)_{1+1/p, p} \\ &= \left\{ \varphi \in D(A) : A\varphi \in (D(A), X)_{1/p, p} \right\} \subset D(A). \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

1.3.2 Propriété fondamentale d'interpolation

On se donne deux triplet d'espace d'interpolation (X_0, X_1, X) et (Y_0, Y_1, Y) et un opérateur linéaire T de X dans Y . Alors on a le théorème suivant:

Théorème 1.3.1 *On suppose que les restrictions de T aux espaces X_i à valeurs dans Y_i sont linéaires continues. Alors, pour tout $0 < \theta < 1$ et $p \in [1, +\infty]$, l'opérateur T est linéaire continu de $(X_0, X_1)_{\theta, p}$ dans $(Y_0, Y_1)_{\theta, p}$ et*

$$\|T\|_{\mathcal{L}((X_0, X_1)_{\theta, p}, (Y_0, Y_1)_{\theta, p})} \leq C \|T\|_{\mathcal{L}(X_0, Y_0)}^{1-\theta} \|T\|_{\mathcal{L}(X_1, Y_1)}^{\theta}.$$

1.4 Les espaces U M D

on considère un espace de Banach X .

Définition 1.4.1 *Pour $\varepsilon \in]0, 1[$ et $p \in]1, +\infty[$, on définit l'opérateur*

$$\mathcal{H}_\varepsilon \in \mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}; X)),$$

par

$$\forall f \in L^p(\mathbb{R}; X), (\mathcal{H}_\varepsilon f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon < |s| < \frac{1}{\varepsilon}} \frac{f(1-s)}{s} ds, \quad p.p. x \in \mathbb{R}.$$

Définition 1.4.2 *X est appelé espace UMD, s'il existe $p \in]1, +\infty[$ tel que*

$$\forall f \in \mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}; X)), \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{H}_\varepsilon f, \text{ existe dans } \mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}; X)). \quad (1.4.1)$$

dans ce cas, l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{H} : L^p(\mathbb{R}; X) &\rightarrow L^p(\mathbb{R}; X) \\ f &\longrightarrow \mathcal{H}f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{H}_\varepsilon f \end{aligned}$$

est un élément de $\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}; X))$ appelé la transformée de Hilbert sur $L^p(\mathbb{R}; X)$. Notons que si X est un espace UMD alors (1.4.1) est vraie pour tout $p \in]1, +\infty[$.

Corollaire 1.4.1 *Un espace de Banach X est un espace UMD si et seulement si pour tout $p(1 < p < +\infty)$, la transformation de Hilbert est continue de $L^p(\mathbb{R}; X)$ dans lui-même.*

Exemple 1.4.1 *Il est possible de donner de nombreux exemples d'espaces de Banach classiques qui ont la propriété UMD :*

1. *Tout espace de Hilbert est UMD.*
2. *Tout espace isomorphe à un espace UMD est UMD.*
3. *Tout sous-espace fermé d'un espace UMD est UMD.*
4. *Si les espaces X et Y sont UMD alors les espace interpolés (cas réel $(X; Y)_{\theta, p}$ ou complexe $[X; Y]_{\theta, p}$) sont des espaces de type UMD avec $1 < p < 1$.*
5. *Tous les espaces construits sur $L^p(\mathbb{R}; X)$, ($1 < p < +\infty$), telque X est un espace de type UMD sont de type UMD.*

1.5 Espaces de Sobolev à valeurs vectorielles

Soient I un intervalle de \mathbb{R} et X, E, F trois espaces de Banach.

Les espaces de Sobolev à valeurs vectorielles sont construits à partir des espaces L^p avec $p \in [1, +\infty[$, dont on donne ici la définition.

Définition 1.5.1 Soit $f : I \longrightarrow X$. Pour $1 \leq p < +\infty$, on définit

$$L^p(I; X) := \left\{ f \text{ est Bochner-mesurable telle que } \int_I \|f\|^p d\mu < +\infty \right\}$$

que l'on munit de la norme

$$\|f\|_{L^p(I; X)} = \left(\int_I \|f\|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

Définition 1.5.2 Soient $p \in [1, +\infty[$ et A un opérateur linéaire sur X de domaine $D(A)$. On définit

$$L^p(I, D(A)) := \{ \varphi \in L^p(I, X) : \varphi(x) \in D(A) \text{ p.p. } x \in I \text{ et } A\varphi(x) \in L^p(I, X) \text{ p.p. } x \in I \}.$$

Définition 1.5.3 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, +\infty]$. On définit l'espace de Sobolev $W^{n,p}$ de la façon suivante :

$$W^{n,p}(I; X) := \{ u \in L^p(I; X), [u]^{(j)} \in L^p(I; X), \text{ pour tout } j \in \mathbb{N} \text{ tel que } j \leq n \}.$$

Notons que pour $j = 0, 1, \dots, k$, $[u]^{(j)}$ est la dérivée j^{me} au sens des distributions de u et $[u]^{(j)} \in L^p(I; X)$ signifie que

$$\exists g_j \in L^p(I; X) \text{ tel que } [u]^{(j)} = [g_j].$$

Théorème 1.5.1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in [1, +\infty]$, l'espace de Sobolev $W^{n,p}(I; X)$ est un espace de Banach.

Théorème 1.5.2 Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et tout $p \in [1, +\infty]$, l'espace de Sobolev $W^{n,p}(I; X)$ s'injecte continûment dans $C^{n-1}(I; X)$.

Remarque 1.5.1 $W^{n,p}(I; X)$ s'injecte continûment dans $C^{n-1}(I; X)$, signifie que toute fonction de $W^{n,p}(I; X)$ est (presque partout) égale à une fonction de $C^{n-1}(I; X)$ et qu'il existe $C > 0$ tel que, pour tout $u \in W^{n,p}(I; X)$, on a

$$\|u\|_{C^{n-1}(I; X)} \leq \|u\|_{W^{n,p}(I; X)}.$$

Cela signifie que l'identité $I : W^{n,p}(I; X) \longrightarrow C^{n-1}(I; X)$ est continue. On note alors

$$W^{n,p}(I; X) \hookrightarrow C^{n-1}(I; X).$$

1.6 Puissances fractionnaires d'opérateurs

On utilisera dans ce travail les puissances fractionnaires d'opérateurs, en particulier la racine carrée d'un opérateur.

Soit A un opérateur linéaire fermé dans X , tel que $\rho(A)$ contient $]0, +\infty[$. S'il existe $C \geq 0$ tel que pour tout $\lambda > 0$,

$$\|\lambda(A - \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C < +\infty,$$

alors, on définit pour $0 < \operatorname{Re} \alpha < 1$ et $x \in D(A)$, l'opérateur J^α par

$$J^\alpha x = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \int_0^{+\infty} \lambda^{\alpha-1} (A - \lambda I)^{-1} (-A)x d\lambda$$

et pour $0 < \operatorname{Re} \alpha < 2$ et $x \in D(A^2)$ par

$$J^\alpha x = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \lambda^{\alpha-1} \left((A - \lambda I)^{-1} - \frac{\lambda}{1+\lambda^2} \right) (-A)x d\lambda + (-A)x \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right),$$

avec

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt.$$

(voir Balakrishnan [3])

Lemme 1.6.1 *Les opérateurs J^α admettent des extensions fermées et $(-A)^\alpha$ est la plus petite extension fermée de J^α . (voir [3], p.423).*

Lemme 1.6.2 *Soit A un opérateur linéaire fermé à domaine dense dans X tel que*

$$\begin{cases} \exists C > 0 \quad \mathbb{R}_+ \subset \rho(A) \text{ et pour } \lambda \geq 0, \\ \|(A - \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C}{1+\lambda}, \end{cases} \quad (1.6.1)$$

alors pour $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$, $-(-A)^\alpha$ défini précédemment génère un semi-groupe analytique $S_\alpha(t)$ défini par

$$S_\alpha(t) = \int_0^{+\infty} (A - \lambda I)^{-1} g(\lambda, t; \alpha) d\lambda \text{ si } 0 < \alpha \leq \frac{1}{2},$$

où $g(\lambda, t; \alpha) = \frac{1}{\pi} \sin(t\lambda^\alpha \sin \pi\alpha) \exp(-t\lambda^\alpha \cos \pi\alpha)$ est analytique pour tout $t > 0$. (voir [3], p.423)

Remarque 1.6.1 *Pour $\alpha = \frac{1}{2}$ on obtient $S_{\frac{1}{2}}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} (A - \lambda I)^{-1} \sin t\sqrt{\lambda} d\lambda$.*

1.7 Calcul fonctionnel

Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach complexe. Pour U un ouvert de \mathbb{C} , on désigne par $H(U)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur U .

Définition 1.7.1 (formule intégrale de Cauchy) *Soient U un ouvert de \mathbb{C} , K un compact de U de bord γ orienté positivement. Soient $f \in \mathcal{H}(U)$, et $z_0 \in K$. On a*

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Définition 1.7.2 (Intégrale de Dunford). Soient $A \in \mathcal{L}(X)$, U un ouvert de \mathbb{C} , K un compact de U contenant $\sigma(A)$, γ le bord de K orienté positivement (γ est donc finie et entoure le spectre de A) et $f \in \mathcal{H}(U)$. Alors

$$f(A) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f(z)(zI - A)^{-1} dz.$$

L'opérateur $f(A) \in \mathcal{L}(X)$ et ne dépend pas du choix de γ .

Définition 1.7.3 Soient A un opérateur linéaire fermé et $\mathcal{H}(A)$ est l'espace des fonctions à variable complexe qui sont holomorphes dans un ensemble fermé contenant le spectre de A . Alors

$$f(A) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f(\lambda)(A - \lambda I)^{-1} d\lambda,$$

où γ est une courbe sectorielle de Jordan entourant le spectre de l'opérateur A et $f \in \mathcal{H}(A)$.

Chapitre 2

Représentation de la solution et régularité

Dans ce chapitre, on s'intéresse la représentation de la solution d'un problème de Bitsadse-Samarski généralisé. Plus précisément, on considère sur l'intervalle borné $[0, 1]$, l'équation

$$-u''(x) + Au(x) = f(x), \quad (2.0.1)$$

avec les conditions non locales généralisées :

$$\begin{cases} u(0) = u_0, \\ u'(x_0) \in D(H) \text{ et } u(1) - Hu'(x_0) = u_{1,x_0}, \end{cases} \quad (2.0.2)$$

ou $0 \leq x_0 < 1$, A et H sont des opérateurs linéaires fermés dans X , un espace de Banach complexe, $f \in L^p(0, 1; X)$ avec $1 < p < +\infty$ et u_0, u_{1,x_0} , sont des éléments donnés dans X .

2.1 Les hypothèses

On suppose que

$$X \text{ est un espace de type } UMD, \quad (2.1.1)$$

$$\begin{cases} A \text{ est un opérateur linéaire fermé dans } X \text{ : }]-\infty, 0] \subset \rho(A) \text{ et} \\ \exists C > 0 : \forall \lambda \geq 0, \|\lambda(A + \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < \frac{C}{1 + \lambda}. \end{cases} \quad (2.1.2)$$

Cette hypothèse implique que $Q := -(A)^{\frac{1}{2}}$ existe et génère un semi-groupe analytique généralisé (non fortement continu en zéro) $(e^{xQ})_{x>0}$. (voir Balakrishnan [3])

$$\begin{cases} \forall s \in \mathbb{R}, A^{is} \in \mathcal{L}(X) \text{ et} \\ \exists C > 1 : \theta_A \in]0; \pi[: \forall s \in \mathbb{R}, \|A^{is}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C e^{\theta_A |s|} \end{cases} \quad (2.1.3)$$

$$H \text{ est un opérateur linéaire fermé dans } X, \quad (2.1.4)$$

$$\bigcap_{K=1}^{+\infty} D(A^K) \subset D(H), \quad (2.1.5)$$

$$0 \in \rho(\Lambda), \quad (2.1.6)$$

avec

$$\Lambda = HQ(e^{(1+x_0)Q} + e^{(1-x_0)Q}) + I - e^{2Q}$$

défini sur X et $\Lambda \in \mathcal{L}(X)$. Ce travail est une généralisation de l'article de [1], cadre commutatif:

- ① Nous avons changé la condition $D(Q) \subset D(H)$ par (2.1.5) .
- ② Nous ne supposons pas l'hypothèse de commutativité .
- ③ Nous construisons une formule de représentation adaptée pour la solution classique .
- ④ Nous supposons

$$\Lambda^{-1}((D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}) \subset (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}, \quad (2.1.7)$$

ou

$$\forall \varphi \in \bigcap_{K=1}^{+\infty} D(A^K); H\varphi \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}, \quad (2.1.8)$$

pour l'optimalité des solutions semi-classiques ou classique du problème (2.0.1)-(2.0.2)

2.2 Conséquences des hypothèses

Dans la remarque suivante, nous précisons certaines conséquences de nos hypothèses.

Remarque 2.2.1 1. Les hypothèses (2.1.2)-(2.1.3) signifient que $A \in BIP(X, \theta_A)$ avec $0 \in \rho(A)$ (voir [9]), plus

$$Q = -(A)^{\frac{1}{2}} \in BIP(X, \theta_A)$$

(voir [5], remarque, (6).p 984).

2. Sous l'hypothèse (2.1.2), puisque Q génère un semigroupe analytique borné nous avons, pour tous $\varphi \in X, x > 0$, et $n \in \mathbb{N}$

$$e^{xQ}\varphi \in \bigcap_{K=1}^{+\infty} D(Q^K) = \bigcap_{K=1}^{+\infty} D(A^K) \text{ et } Q^n e^{xQ} \in \mathcal{L}(X). \quad (2.2.1)$$

3. Sous l'hypothèse (2.1.2)~ (2.1.5), puisque H est fermé et $Qe^Q \in \mathcal{L}(X)$, on déduit $HQ(e^{(1+x_0)Q} + e^{(1-x_0)Q})$ est fermé.

Et de (2.2.1), on a $D(HQ(e^{(1+x_0)Q} + e^{(1-x_0)Q})) = X$, alors d'après théorème du graphe on obtient $HQ(e^{(1+x_0)Q} + e^{(1-x_0)Q}) \in \mathcal{L}(X)$. Enfin $\Lambda \in \mathcal{L}(X)$.

4. Il est difficile de vérifier (2.1.7), mais

$$\Lambda^{-1} = I - e^{2Q}\Lambda^{-1} + HQ(e^{(1+x_0)Q} + e^{(1-x_0)Q})\Lambda^{-1}, \quad (2.2.2)$$

alors, (2.2.1), (2.1.8) implique (2.1.7).

2.3 Représentation de la solution

On utilise la représentation de la solution trouvée dans [1], cadre L^p qui est donnée par:

$$u(x) = e^{xQ}\zeta_0 + e^{(1-x)Q}\zeta_1 + I_x + J_x, \quad x \in [0, 1], \quad (2.3.1)$$

avec

$$I_x = -\frac{1}{2}Q^{-1} \int_0^x e^{(x-s)Q} f(s) ds, \quad \text{et} \quad J_x = -\frac{1}{2}Q^{-1} \int_x^1 e^{(s-x)Q} f(s) ds$$

$$u'(x) = Qe^{xQ}\zeta_0 - Qe^{(1-x)Q}\zeta_1 + QI_x - QJ_x, \quad x \in [0, 1],$$

alors

$$u'(x_0) = Qe^{x_0Q}\zeta_0 - Qe^{(1-x_0)Q}\zeta_1 + QI_{x_0} - QJ_{x_0} \in D(H)$$

$$\begin{cases} u(1) = e^Q\zeta_0 + \zeta_1 + I_1, \\ u(0) = \zeta_0 + e^Q\zeta_1 + J_0, \end{cases}$$

on utilise les conditions (2.0.2)

$$\begin{cases} e^Q\zeta_0 + \zeta_1 + I_1 - H(Qe^{x_0Q}\zeta_0 - Qe^{(1-x_0)Q}\zeta_1 + QI_{x_0} - QJ_{x_0}) = u_{1,x_0}, \\ \zeta_0 + e^Q\zeta_1 + J_0 = u_0, \end{cases}$$

alors $\zeta_0 = u_0 - e^Q\zeta_1 - J_0$ et

$$e^Q(u_0 - e^Q\zeta_1 - J_0) + \zeta_1 - H(Qe^{x_0Q}\zeta_0 - Qe^{(1-x_0)Q}\zeta_1 + QI_{x_0} - QJ_{x_0}) = u_{1,x_0} - I_1$$

implique

$$(I - e^{2Q})\zeta_1 - H[Qe^{x_0Q}(u_0 - J_0) - Q(e^{(1+x_0)Q} + e^{(1-x_0)Q})\zeta_1 + QI_{x_0} - QJ_{x_0}] = u_{1,x_0} - I_1 - e^Q(u_0 - J_0) \quad (2.3.2)$$

on remarque

$$Qe^{x_0Q}(u_0 - J_0) - Q(e^{(1+x_0)Q} + e^{(1-x_0)Q})\zeta_1 + QI_{x_0} - QJ_{x_0} \in D(H),$$

et de (2.1.5), $Qe^{x_0Q}\varphi \in D(H)$ obtenu

$$Qe^{x_0Q}(u_0 - J_0) + QI_{x_0} - QJ_{x_0} \in D(H),$$

alors (2.3.2) devient

$$\begin{aligned} \left[I - e^{2Q} + HQ(e^{(1+x_0)Q} + e^{(1-x_0)Q}) \right] \zeta_1 = & u_{1,x_0} - I_1 - e^Q(u_0 - J_0) \\ & - HQ \left[e^{x_0Q}(u_0 - J_0) + I_{x_0} - J_{x_0} \right] \end{aligned}$$

de (2.1.6) on déduit

$$\zeta_1 = \Lambda^{-1} \left[u_{1,x_0} - I_1 - e^Q(u_0 - J_0) - HQ \left[e^{x_0Q}(u_0 - J_0) + I_{x_0} - J_{x_0} \right] \right], \quad (2.3.3)$$

et

$$\zeta_0 = u_0 - J_0 - e^Q\zeta_1. \quad (2.3.4)$$

Finalement, en insérant (2.3.3)-(2.3.4) dans (2.3.1) on déduit que, la solution du problème (2.0.1)-(2.0.2) u est représentée formellement, pour tout $x \in [0, 1]$, par

$$\begin{aligned} u(x) = & e^{xQ}u_0 - e^{xQ}J_0 - e^{(1+x)Q}\Lambda^{-1} \left[u_{1,x_0} - I_1 - e^Q(u_0 - J_0) + HQ(e^{x_0Q}(u_0 - J_0) + I_{x_0} - J_{x_0}) \right] \\ & + e^{(1-x)Q}\Lambda^{-1} \left[u_{1,x_0} - I_1 - e^Q(u_0 - J_0) + HQ(e^{x_0Q}(u_0 - J_0) + I_{x_0} - J_{x_0}) \right] + I_x + J_x, \end{aligned}$$

alors

$$u(x) = e^{xQ}u_0 + R(x) + S(x) + e^{(1-x)Q}\Lambda^{-1}\left[u_{1,x_0} + HQ(e^{x_0Q}(u_0 - J_0) + I_{x_0} - J_{x_0})\right].$$

On pose

$$u = \bar{u} + S + R, \tag{2.3.5}$$

avec

$$R(x) = -e^{(1+x)Q}\Lambda^{-1}\left[u_{1,x_0} - I_1 - e^Q(u_0 - J_0) + HQ(e^{x_0Q}(u_0 - J_0) + I_{x_0} - J_{x_0})\right],$$

$$S(x) = -e^{xQ}J_0 - e^{(1-x)Q}\Lambda^{-1}\left[-I_1 - e^Q(u_0 - J_0)\right] + I_x + J_x,$$

$$\bar{u} = e^{xQ}u_0 + e^{(1-x)Q}\Lambda^{-1}\left[u_{1,x_0} + HQ(e^{x_0Q}(u_0 - J_0) + I_{x_0} - J_{x_0})\right].$$

2.4 Régularité

Pour étudier la régularité de la solution nous avons besoin de quelques lemmes techniques.

Lemme 2.4.1 (voir [8]) Soient $f \in L^p(0, 1; X)$, $1 < p < +\infty$ et X un espace de type UMD. Si Q est un opérateur linéaire fermé vérifiant les deux hypothèses suivantes:

$$]-\infty, 0] \subset \rho(Q), \text{ et } \sup_{\lambda \geq 0} \|\lambda(Q + \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < +\infty$$

et

$$\begin{cases} \exists \theta \in]0, \pi[, \exists C \geq 1 : \forall s \in \mathbb{R}, \\ (-Q)^{is} \in \mathcal{L}(X), \text{ et } \|(-Q)^{is}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C e^{\theta|s|}, \end{cases}$$

on dit dans ce cas que $-Q \in BIP(X, \theta)$, alors

1.

$$x \longrightarrow L(x, f) = Q \int_0^x e^{(x-s)Q} f(s) ds \in L^p(0, 1; X).$$

2.

$$x \longrightarrow L(1-x, f(1-\cdot)) = Q \int_x^1 e^{(s-x)Q} f(s) ds \in L^p(0, 1; X).$$

3.

$$x \longrightarrow \mathcal{L}(x, f) = Q \int_0^1 e^{(x+s)Q} f(s) ds \in L^p(0, 1; X).$$

4.

$$\int_0^1 e^{sQ} f(s) ds, \int_0^1 e^{(1-s)Q} f(s) ds \in (D(Q), X)_{\frac{1}{p}, p}.$$

5.

$$Q^{-1} \int_0^1 e^{sQ} f(s) ds, Q^{-1} \int_0^1 e^{(1-s)Q} f(s) ds \in (D(Q^2), X)_{\frac{1}{2p}, p}.$$

Lemme 2.4.2 (voir [17]) Supposons que l'hypothèse (2.1.2) est réalisée et soit Q un générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique $(e^{tQ})_{t \geq 0}$, $\varphi \in X, p \in]1, +\infty[$, on a

1. $e^{Q}\varphi \in L^p(0, 1; X)$,
2. $Q^n e^{Q}\varphi \in L^p(0, 1; X)$ si et seulement si $\varphi \in (D(Q^n), X)_{\frac{1}{np}, p}$.

Proposition 2.4.1 Suppose (2.1.2)~(2.1.4). soit $f \in L^p([0, 1], X), 1 < p < +\infty$, alors

$$J_{x_0}, I_{x_0} \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}.$$

Lemme 2.4.3 (voir [1]) On suppose (2.1.1)~(2.1.6), soient $u_0, u_{1, x_0} \in X$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a

$$Q^k R(\cdot) \in L^p(0, 1; X)$$

Remarque 2.4.1 1. Le fait que $W^{2,p}(0, 1; X) \subset C^1([0, 1]; X)$, les conditions aux limites ont un sens lorsqu'on cherche une solution classique.

2. Si u est une solution semi-classique vérifiant, pour tout $\epsilon \in]0, 1[$, $u \in W^{1,p}(0, 1; X) \cap W^{2,p}(0, 1 - \epsilon; X)$, alors

$$u \in C([0, 1]; X) \cap C^1([0, 1[; X).$$

3. Soit $u \in W^{2,p}(0, 1; X) \cap L^p(0, 1; D(A))$ alors

$$u(0), u(1) \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}.$$

voir [2], remarque 1, assertion 6, p 197 Dans ce cas, on obtient $u(0), u(1) \in D(Q)$ puisque

$$(D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p} = (X, D(Q^2))_{1 - \frac{1}{2p}, p} = (X, D(Q))_{2 - \frac{1}{p}, p} \subset D(Q).$$

Lemme 2.4.4 On suppose (2.1.1)~(2.1.7), soient $u_0, u_{1, x_0} \in X$ et $f \in L^p(0, 1; X)$, $1 < p < +\infty$ alors

$$AS(\cdot) \in L^p(0, 1; X).$$

Preuve 2.4.1 Pour $x \in [0, 1]$ on a

$$\begin{aligned} AS(x) &= Q^2 e^{xQ} J_0 + Q^2 e^{(1-x)Q} \Lambda^{-1} [-I_1 - e^Q(u_0 - J_0)] + Q^2 I_x + Q^2 J_x \\ &= Q^2 e^{xQ} J_0 + Q^2 e^{(1-x)Q} \Lambda^{-1} e^Q(u_0 - J_0) - Q^2 e^{(1-x)Q} \Lambda^{-1} I_1 - \frac{1}{2} L(x, f) - \frac{1}{2} L(1-x, f(1-\cdot)). \end{aligned}$$

D'après de la remarque (2.2.1), assertion 2 nous avons pour tout $\varphi \in X$

$$e^Q \varphi \in D(A) \subset (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}$$

et de l'hypothèse (2.1.7) et de la proposition (2.4.1) on a

$$\Lambda^{-1} I_1, \Lambda^{-1} e^Q(u_0 - J_0) \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}.$$

et donc, du lemme (2.4.2), assertion 1. on a:

$$\begin{cases} Q^2 e^{(1-\cdot)Q} \Lambda^{-1} e^Q (u_0 - J_0) \in L^p([0, 1], X), \\ Q^2 e^{(1-\cdot)Q} \Lambda^{-1} I_1 \in L^p([0, 1], X), \\ Q^2 e^{\cdot Q} J_0 \in L^p([0, 1], X). \end{cases}$$

Théorème 2.4.1 *On suppose (2.1.1)~(2.1.7). Soient $u_0, u_{1,x_0} \in X$ et $f \in L^p(0, 1; X)$, $1 < p < +\infty$. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Le problème (2.0.1)-(2.0.2) admet une unique solution semi-classique.*

2.

$$\begin{cases} u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}, \\ Q(e^{x_0 Q}(u_0 - J_0) + I_{x_0} - J_{x_0}) \in D(H) \text{ et}, \\ \Lambda^{-1}[u_{1,x_0} + HQ(e^{x_0 Q}(u_0 - J_0) + I_{x_0} - J_{x_0})] \in (D(A), X)_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2p}, p}. \end{cases} \quad (2.4.1)$$

Preuve 2.4.2 *Nous montrons d'abord que sous (2.4.1), u donné par la formule de représentation (2.3.5) est la solution semi-classique. Nous devons vérifier, que pour tout $\epsilon \in]0; 1[$:*

$$Au \in L^p(0, 1 - \epsilon; X) \text{ et } Qu \in L^p(0, 1; X).$$

En fait, nous écrivons $u = \bar{u} + S + R$ et vertu de le lemme (2.4.3) et du lemme (2.4.4), il suffit de prouver que

$$A\bar{u} \in L^p(0, 1 - \epsilon; X),$$

et

$$Q\bar{u} \in L^p(0, 1; X) \text{ p.p } x \in [0, 1],$$

alors

$$A\bar{u} = Q^2 e^{xQ} u_0 + Q^2 e^{(1-x)Q} \Lambda^{-1} \left[u_{1,x_0} + HQ(e^{x_0 Q}(u_0 - J_0) + I_{x_0} - J_{x_0}) \right].$$

et

$$Q\bar{u} = Q e^{xQ} u_0 + Q e^{(1-x)Q} \Lambda^{-1} \left[u_{1,x_0} + HQ(e^{x_0 Q}(u_0 - J_0) + I_{x_0} - J_{x_0}) \right]$$

mais de (2.4.1) nous avons

$$u_0 \in (D(Q^2), X)_{\frac{1}{2p}, p} = (D(Q), X)_{\frac{1}{p}, p},$$

et

$$\Lambda^{-1} \left[u_{1,x_0} + HQ(e^{x_0 Q}(u_0 - J_0) + I_{x_0} - J_{x_0}) \right] \in (D(Q), X)_{\frac{1}{p}, p} = (D(A), X)_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2p}, p}.$$

Alors en raison du lemme (2.4.2), énoncés (2.0.1)-(2.0.2) nous concluons que $A\bar{u} \in L^p(0, 1 - \epsilon; X)$ et $Q\bar{u} \in L^p(0, 1; X)$ et donc $Au \in L^p(0, 1 - \epsilon; X)$ et $Qu \in L^p(0, 1; X)$.

Maintenant à partir de (2.3.5), on obtient $u(0) = u_0$ de plus (2.4.1) assure que $u'(x_0) \in D(H)$ et encore une fois à partir de (2.3.5), nous obtenons $u(1) - Hu'(x_0) = u_{1,x_0}$.

Inversement, si le problème (2.0.1)-(2.0.2) admet une solution semi-classique u alors

elle est donnée par (2.3.5). À partir de la remarque (2.4.1), on a $u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}$ et $u'(x_0) \in D(H)$

$$Q(e^{x_0 Q}(u_0 - J_0) + I_{x_0} - J_{x_0}) \in D(H).$$

Enfin Qu et $Q\bar{u} \in L^p(0, 1; X)$ donc

$$Qe^{(1-x)Q}\Lambda^{-1}\left[u_{1,x_0} + HQ(e^{x_0 Q}(u_0 - J_0) + I_{x_0} - J_{x_0})\right],$$

alors grâce à du lemme (2.4.2) assertion 2. on a

$$\Lambda^{-1}\left[u_{1,x_0} + HQ(e^{x_0 Q}(u_0 - J_0) + I_{x_0} - J_{x_0})\right] \in (D(A), X)_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2p}, p}.$$

Théorème 2.4.2 On suppose (2.1.1)~ (2.1.7). Soient $u_0, u_{1,x_0} \in X$ et $f \in L^p(0, 1; X)$, $1 < p < +\infty$. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes.

1. Le problème (2.0.1)-(2.0.2) admet une unique solution classique.

2.

$$\begin{cases} u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}, \\ Q(e^{x_0 Q}(u_0 - J_0) + I_{x_0} - J_{x_0}) \in D(H) \text{ et}, \\ \Lambda^{-1}[u_{1,x_0} + HQ(e^{x_0 Q}(u_0 - J_0) + I_{x_0} - J_{x_0})] \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}. \end{cases}$$

Preuve 2.4.3 u une solution classique du problème (2.0.1)-(2.0.2) si

$$Q^2\bar{u} \in L^p(0, 1; X),$$

du lemme (2.4.2) assertion (2). On a $u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}$, et

$$\Lambda^{-1}[u_{1,x_0} + HQ(e^{x_0 Q}(u_0 - J_0) + I_{x_0} - J_{x_0})] \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}.$$

Si on change (2.1.7) par (2.1.8) on obtient les résultats suivants:

Théorème 2.4.3 On suppose (2.1.1)~ (2.1.5) et (2.1.8). Soient $u_0, u_{1,x_0} \in X$ et $f \in L^p(0, 1; X)$, $1 < p < +\infty$. Alors, le problème (2.0.1)-(2.0.2) admet

1. une unique solution semi-classique u si seulement si

$$\begin{cases} u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}, \\ Q(e^{x_0 Q}(u_0 - J_0) + I_{x_0} - J_{x_0}) \in D(H) \text{ et}, \\ u_{1,x_0} + HQ(e^{x_0 Q}(u_0 - J_0) + I_{x_0} - J_{x_0}) \in (D(A), X)_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2p}, p}. \end{cases}$$

2. une unique solution classique u si seulement si

$$\begin{cases} u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}, \\ Q(e^{x_0 Q}(u_0 - J_0) + I_{x_0} - J_{x_0}) \in D(H) \text{ et}, \\ u_{1,x_0} + HQ(e^{x_0 Q}(u_0 - J_0) + I_{x_0} - J_{x_0}) \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}. \end{cases}$$

Preuve 2.4.4 De la remarque (2.2.1), (2.1.8) implique (2.1.7) alors, on peut applique le théorème (2.4.1). De plus (2.2.2) avec (2.1.7) montre qu'il existe

$$\psi \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p} \subset (D(A), X)_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2p}, p},$$

tel que

$$\Lambda^{-1}(u_{1,x_0} + HQ(e^{x_0Q}(u_0 - J_0) + I_{x_0} - J_{x_0})) = u_{1,x_0} + HQ(e^{x_0Q}(u_0 - J_0) + I_{x_0} - J_{x_0}) + \psi.$$

Alors, pour $E = (D(A), X)_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2p}, p}$ ou $(D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}$ les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\Lambda^{-1}(u_{1,x_0} + HQ(e^{x_0Q}(u_0 - J_0) + I_{x_0} - J_{x_0})) \in E.$
2. $u_{1,x_0} + HQ(e^{x_0Q}(u_0 - J_0) + I_{x_0} - J_{x_0}) \in E.$

2.5 Cas particulier du problème

Dans ce paragraphe on considère un cas particulier de l'opérateur H ou l'hypothèse d'inversibilité est vérifiée. $H = -\alpha I, \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \operatorname{Re} \alpha \geq 0$. Le problème devient:

$$\begin{cases} -u''(x) + Au(x) = f(x), x \in]0; 1[, \\ u(0) = u_0, \\ \alpha u'(x_0) + u(1) = u_{1,x_0}. \end{cases} \quad (2.5.1)$$

Ici, notre hypothèse principale sur A est

$$\begin{cases} A \text{ est un opérateur fermé dans } X, \sigma(A) \subset]0; +\infty[\text{ et} \\ \forall \theta \in]0; \pi[, \sup_{\lambda \in S_\theta} \|\lambda(A + \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < +\infty, \end{cases} \quad (2.5.2)$$

avec $S_\theta = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg z| < \theta\}$ puisque $H = -\alpha I$ alors

$$\Lambda = I - \alpha Q(e^{(1+x_0)Q} + e^{(1-x_0)Q}) - e^{2Q},$$

on considère les fonctions F et G définies par

$$\begin{cases} F(z) = 1 + G(z), \\ G(z) = \alpha z(e^{-(1+x_0)z} + e^{-(1-x_0)z}) - e^{-2z}, z \in \mathbb{C}. \end{cases}$$

D'abord nous fixons $\varepsilon_0 > 0$ telque $B(0, 4\varepsilon_0^2) \subset \rho(A)$.

Lemme 2.5.1 On pose $S = S_{\frac{\pi}{4}}$ on a

1. F, G sont holomorphe sur \bar{S} .
2. $x > 0$ implique $\operatorname{Re} F(z) > 0$.
3. $\lim_{\operatorname{Re} z \rightarrow +\infty, z \in \bar{S}} \alpha z(e^{-(1+x_0)z} + e^{-(1-x_0)z}) - e^{-2z}$ puis,

(a) il existe $x_0 > 0$ tel que \bar{S} et $\text{Re}z \geq x_0$ implique

$$2 \geq |F(z)| \geq \frac{1}{2}.$$

(b) F est borné sur \bar{S} .

4. il existe $\theta_0 \in]0; \frac{\pi}{4}[$ tel que $F(z)$ ne s'annule pas sur

$$\Sigma_0 = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}z \geq \varepsilon_0 \text{ et } |\arg z| \leq \theta_0\},$$

$$\text{et } \min_{z \in \Sigma_0} |F(z)| = r > 0.$$

maintenant nous posons pour $z \in \Sigma_0$,

$$\Psi(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)}$$

Lemme 2.5.2 On suppose (2.5.2) l'opérateur $\Lambda = I - \alpha Q(e^{(1+x_0)Q} + e^{(1-x_0)Q}) - e^{2Q}$ est borné et inversible et $\Lambda^{-1} = I - \Psi(-Q)$.

Proposition 2.5.1 On suppose (2.1.1) ~ (2.1.5) et (2.1.8). Soient $u_0, u_{1,x_0} \in X$ et $f \in L^p(0, 1; X)$, $1 < p < +\infty$ Alors, les assertions suivantes sont équivalentes:

1. Le problème (2.5.1) admet une unique solution semi-classique.

2.

$$\begin{cases} u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}, \\ u_{1,x_0} - \alpha Q(e^{x_0 Q}(u_0 - J_0) + I_{x_0} - J_{x_0}) \in (D(A), X)_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2p}, p}. \end{cases}$$

Proposition 2.5.2 On suppose (2.1.1) ~ (2.1.5) et (2.1.8). Soient $u_0, u_{1,x_0} \in X$ et $f \in L^p(0, 1; X)$, $1 < p < +\infty$ Alors, les assertions suivantes sont équivalentes:

1. Le problème (2.5.1) admet une unique solution classique.

2.

$$\begin{cases} u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}, \\ u_{1,x_0} - \alpha Q(e^{x_0 Q}(u_0 - J_0) + I_{x_0} - J_{x_0}) \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}. \end{cases}$$

Chapitre 3

Problème avec un paramètre spectral

Dans ce chapitre, en vue d'éliminer l'hypothèse d'inversibilité du déterminant, on ajoute un paramètre dans l'équation :

$$-u''(x) + Au(x) + \omega u(x) = f(x) ; x \in [0, 1]. \quad (3.0.1)$$

Soit $0 \leq x_0 < 1$, sous des conditions aux limites non locales

$$\begin{cases} u(0) = u_0, \\ u'(x_0) \in D(H) \text{ et } u(1) - Hu'(x_0) = u_{1,x_0}. \end{cases} \quad (3.0.2)$$

3.0.1 Étude du problème

On considère $\omega_0 \geq 0$ fixé et pour $\omega \geq \omega_0$, on pose

$$A_\omega = A + \omega I$$

alors le problème (2.0.1)-(2.0.2) devient (3.0.1)-(3.0.2) avec A remplacé par A_ω . Nos hypothèse principale sur les opérateurs sont

$$\begin{cases} A_{\omega_0} \text{ est un opérateur linéaire fermé dans } X,] - \infty, 0] \subset \rho(A_{\omega_0}), \text{ et} \\ \sup_{\lambda \geq 0} \|\lambda(A_{\omega_0} + \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < +\infty. \end{cases} \quad (3.0.3)$$

Cette hypothèse implique $Q_{\omega_0} = -(A_{\omega_0})^{\frac{1}{2}}$ est générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique sur X

$$\begin{cases} \forall s \in \mathbb{R}, (A_{\omega_0})^{is} \in \mathcal{L}(X) \text{ et} \\ \exists C \geq 1 : \theta_{A_{\omega_0}} \in]0; \pi[: \|(A_{\omega_0})^{is}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C e^{\theta_{A_{\omega_0}} |s|}, \end{cases} \quad (3.0.4)$$

$$H \text{ est un opérateur fermé,} \quad (3.0.5)$$

$$\bigcap_{K=1}^{+\infty} D(A^K) \subset D(H), \quad (3.0.6)$$

$$((D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}) \subset \Lambda_\omega(D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}, \quad (3.0.7)$$

avec

$$\Lambda_\omega = HQ_\omega(e^{(1+x_0)Q_\omega} + e^{(1-x_0)Q_\omega}) + I - e^{2Q_\omega},$$

lorsque Λ_ω est inversible borné cette hypothèse est équivalente à

$$\Lambda_\omega^{-1}((D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}) \subset (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}. \quad (3.0.8)$$

On donne quelque remarques :

Remarque 3.0.1 pour tout $\omega \geq \omega_0$

1.

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{\omega_0} \text{ est un opérateur linéaire fermé dans } X, \\] -\infty; \omega - \omega_0] \subset \rho(A_\omega) \text{ et} \\ \sup_{\lambda \geq 0} \|\lambda(A_\omega + \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < +\infty. \end{array} \right. \quad (3.0.9)$$

et pour $c_0 = \sup_{\lambda \geq 0} \|\lambda(A_{\omega_0} + \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}$, qui ne dépend pas de ω , on obtient

$$\sup_{\lambda \geq 0} \|\lambda(A_\omega + \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} = \sup_{\lambda \geq 0} \|\lambda(A_{\omega_0} - (\lambda + \omega - \omega_0)I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \geq c_0.$$

2. $Q_\omega = -(A_\omega)^{\frac{1}{2}}$ génèrent des semi-groupes analytiques sur X .

3. $D(Q_\omega) = D(Q_{\omega_0}) = D(Q)$.

4. $(D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p} = (D(A_\omega), X)_{\frac{1}{2p}, p}$, $p \in]1; +\infty[$.

5. Comme on a $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$D(Q_\omega^{2k}) = D(A_\omega^k) = D(A^k) \subset D(Q_\omega^{2k-1}),$$

on a

$$\bigcap_{K=1}^{+\infty} D(Q_\omega^K) = \bigcap_{K=1}^{+\infty} D(A_\omega^K) = \bigcap_{K=1}^{+\infty} D(A^K)$$

6. A_ω vérifie l'hypothèse (3.0.4).

Lemme 3.0.1 On suppose (3.0.3)~ (3.0.8), il existe $\omega^* \geq \omega_0$ tel que pour tout $\omega \geq \omega^*$, l'opérateur Λ_ω inversible.

Preuve 3.0.1 On pose $T_\omega = -HQ_\omega(e^{(1+x_0)Q_\omega} + e^{(1-x_0)Q_\omega}) + e^{2Q_\omega}$ et d'après le lemme 5 [1].

On

$$\begin{aligned} \|T_\omega\|_{\mathcal{L}(X)} &= \|HQ_\omega(e^{(1+x_0)Q_\omega} + e^{(1-x_0)Q_\omega}) - e^{2Q_\omega}\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &= \|HQ_{\omega_0}^{-2k_0} Q_{\omega_0}^{2k_0} Q_\omega^{-2k_0} Q_\omega^{-2k_0+1} (e^{(1+x_0)Q_\omega} + e^{(1-x_0)Q_\omega}) - e^{2Q_\omega}\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq \|HQ_{\omega_0}^{-2k_0}\|_{\mathcal{L}(X)} \|Q_{\omega_0}^{2k_0} Q_\omega^{-2k_0}\|_{\mathcal{L}(X)} \|Q_\omega^{-2k_0+1} e^{(1+x_0)Q_\omega}\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\quad + \|HQ_{\omega_0}^{-2k_0}\|_{\mathcal{L}(X)} \|Q_{\omega_0}^{2k_0} Q_\omega^{-2k_0}\|_{\mathcal{L}(X)} \|Q_\omega^{-2k_0+1} e^{(1-x_0)Q_\omega}\|_{\mathcal{L}(X)} + \|e^{2Q_\omega}\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq \|HQ_{\omega_0}^{-2k_0}\|_{\mathcal{L}(X)} (1 + c_0) \|Q_\omega^{-2k_0+1} e^{(1+x_0)Q_\omega}\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\quad + \|HQ_{\omega_0}^{-2k_0}\|_{\mathcal{L}(X)} (1 + c_0) \|Q_\omega^{-2k_0+1} e^{(1-x_0)Q_\omega}\|_{\mathcal{L}(X)} + \|e^{2Q_\omega}\|_{\mathcal{L}(X)}, \end{aligned}$$

Alors, il existe $\omega^* \geq \omega_0$ tel que pour tout $\omega \geq \omega^*$, l'opérateur $\Lambda_\omega \in \mathcal{L}(X)$, on obtient

$$\|T_\omega\|_{\mathcal{L}(X)} < 1,$$

donc $\Lambda_\omega = I - T_\omega$ est inversible.

Théorème 3.0.1 *On suppose (3.0.3) ~ (3.0.8) et (2.1.1) et pour $\omega^* \geq \omega_0$. Alors, le problème (3.0.1)-(3.0.2) admet*

1. *une unique solution semi-classique u si seulement si*

$$\begin{cases} u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}, \\ Q_\omega(e^{x_0 Q_\omega}(u_0 - J_0) + I_{x_0} - J_{x_0}) \in D(H) \text{ et}, \\ \Lambda_\omega^{-1}(u_{1,x_0} + HQ_\omega(e^{x_0 Q_\omega}(u_0 - J_0) + I_{x_0} - J_{x_0})) \in (D(A), X)_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2p}, p}. \end{cases}$$

2. *une unique solution classique u si seulement si*

$$\begin{cases} u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}, \\ Q_\omega(e^{x_0 Q_\omega}(u_0 - J_0) + I_{x_0} - J_{x_0}) \in D(H) \text{ et}, \\ \Lambda_\omega^{-1}(u_{1,x_0} + HQ_\omega(e^{x_0 Q_\omega}(u_0 - J_0) + I_{x_0} - J_{x_0})) \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}. \end{cases}$$

Remarque 3.0.2 *On considérons $H = \alpha(Q_{\omega_0})^\beta$ avec $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et $\beta \in]-\infty; 1]$ alors le problème devient*

$$\begin{cases} u''(x) + Au(x) - \omega u(x) = f(x), x \in]0; 1[, \\ u(0) = u_0, \\ u(1) + \alpha(Q_{\omega_0})^\beta u'(x_0) = u_{1,x_0}. \end{cases} \quad (3.0.10)$$

par exemple si $\beta = 0$ devient

$$\begin{cases} u''(x) + Au(x) - \omega u(x) = f(x), x \in]0; 1[, \\ u(0) = u_0, \\ u(1) + \alpha u'(x_0) = u_{1,x_0}. \end{cases} \quad (3.0.11)$$

Alors, nous obtenons les résultats suivants:

Proposition 3.0.1 *On suppose (3.0.3) ~ (3.0.8) et (2.1.1) et pour $\omega^* \geq \omega_0$. Alors, le problème (3.0.11) admet*

1. *une unique solution semi-classique u si seulement si*

$$\begin{cases} u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}, \\ \Lambda_\omega^{-1}(u_{1,x_0} + \alpha Q_\omega(e^{x_0 Q_\omega}(u_0 - J_0) + I_{x_0} - J_{x_0})) \in (D(A), X)_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2p}, p}. \end{cases}$$

2. *une unique solution classique u si seulement si*

$$\begin{cases} u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}, \\ \Lambda_\omega^{-1}(u_{1,x_0} + \alpha Q_\omega(e^{x_0 Q_\omega}(u_0 - J_0) + I_{x_0} - J_{x_0})) \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}. \end{cases}$$

Chapitre 4

Application

Ici on généralise l'exemple dans [2].

Soit $0 \leq x_0 < 1$, on considère le problème suivant:

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y) + \omega u(x, y) = f(x, y), & (x, y) \in \Omega =]0, 1[\times]0, 1[\\ u(0, y) = u_0(y), & y \in]0, 1[\\ u(1, y) - \int_0^y \phi(y, \xi) \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, \xi) d\xi = u_{1, x_0}(y), & y \in]0, 1[\\ u(x, 0) = u(x, 1) = 0, & x \in]0, 1[. \end{cases} \quad (4.0.1)$$

Le Problème s'écrit abstraitement:

$$\begin{cases} -u''(x) + Au(x) + \omega u(x) = f(x), & \text{p.p. } x \in (0, 1) \\ u(0) = u_0. \\ u(1) + Hu'(x_0) = u_{1, x_0}, \end{cases} \quad (4.0.2)$$

avec

$$\begin{cases} D(A) = W^{2,p}(0, 1) \cap W_0^{1,p}(0, 1) \\ (A\varphi)(y) = \varphi''(y). \end{cases}$$

A opérateur linéaire fermé définit dans $X := L^p(0, 1)$, $p \in]1, +\infty[$ par
Ensuite, il n'est pas difficile de voir que pour $\psi \in L^p(0, 1)$ et $y \in (0, 1)$

$$[A^{-1}\psi](y) = (1-y) \int_0^y s\psi(s) ds + y \int_y^1 (1-s)\psi(s) ds,$$

de plus pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $\text{Re}\sqrt{\lambda} > 0$, on a

$$[(A - \lambda I)^{-1}\psi](y) = \int_0^1 N_{\sqrt{\lambda}}(y, s)\psi(s) ds,$$

où

$$N_{\sqrt{\lambda}}(y, s) = \begin{cases} \frac{\sinh \sqrt{\lambda}(1-y) \sinh \sqrt{\lambda}s}{\sqrt{\lambda} \sinh \sqrt{\lambda}} & \text{si } 0 \leq s \leq y, \\ \frac{\sinh \sqrt{\lambda}y \sinh \sqrt{\lambda}(1-s)}{\sqrt{\lambda} \sinh \sqrt{\lambda}} & \text{si } y \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Maintenant, on définit $q \in]1, +\infty[$ par $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ et considérons

$$H(\varphi)(y) = - \int_0^y \phi(y, \xi) \varphi(\xi) d\xi, \quad \varphi \in X, \quad y \in (0, 1),$$

où $\phi(\cdot, \cdot) : (0, 1) \times (0, 1) \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction fixe vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi(y, \cdot) \in L^q(0, 1), \text{ pour p.p. } y \in (0, 1) \\ \frac{\partial \phi}{\partial y}(y, \cdot), \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}(y, \cdot) \in L^q(0, 1), \text{ pour p.p. } y \in (0, 1) \\ \phi_1 : y \longmapsto \phi(y, y), \phi_2 : y \longmapsto \frac{\partial \phi}{\partial y}(y, y) \in L^p(0, 1) \\ \Phi : y \longmapsto \phi(y, \cdot) \in L^q(0, 1; L^q(0, 1)) \\ \phi(1, \cdot) = 0, \end{array} \right. \quad (4.0.3)$$

notez que si $\sup_{y \in [0, 1]} \|\phi(y, \cdot)\|_{L^q(0, 1)} = C_\phi < +\infty$ puis

$$y \longmapsto \phi(y, \cdot) \in L^q(0, 1; L^q(0, 1)),$$

et nous pouvons construire un exemple simple une fonction ϕ satisfaisante (4.0.3), en paramètre, pour un fixe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$\phi(y, \xi) = (1 - y)^n \psi(\xi), \quad \xi, y \in (0, 1),$$

où $\psi \in W^{2, q}(0, 1) \cap W^{1, p}(0, 1)$, Puis $H \in \mathcal{L}(X)$ puisque pour tous $\varphi \in X$

$$\begin{aligned} \|H(\varphi)\|_X &= \left(\int_0^1 \left| \int_0^y \phi(y, \xi) \varphi(\xi) d\xi \right|^p dy \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\int_0^1 \left| \int_0^1 \phi(y, \xi) \varphi(\xi) d\xi \right|^p dy \right)^{1/p} \\ &\leq \int_0^1 \left(\int_0^1 |\phi(y, \xi)|^q d\xi \right)^{1/q} \left(\int_0^1 |\varphi(\xi)|^p d\xi \right)^{1/p} dy \\ &\leq \|\Phi\|_{L^q(0, 1; L^q(0, 1))} \|\varphi\|_X. \end{aligned}$$

Maintenant, nous voulons appliquer le Théorème (3.0.1) pour le problème (4.0.2). Tout d'abord, nous indiquons explicitement les conditions apparaissant dans ce théorème :

$$\left\{ \begin{array}{l} (i) u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}, \\ (ii) Q(e^{x_0 Q}(u_0 - J_0) + I_{x_0} - J_{x_0}) \in D(H), \\ (iii) u_{1, x_0} + HQ(e^{x_0 Q}(u_0 - J_0) + I_{x_0} - J_{x_0}) \in (D(A), X)_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2p}, p} \text{ ou } (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}. \end{array} \right.$$

Les espaces d'interpolation $(D(A), X)_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2p}, p}, (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}$ sont décrits par

$$\left\{ \begin{array}{l} (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p} = \{\varphi \in W^{2-1/p, p}(0, 1) : \varphi(0) = \varphi(1) = 0\}, \\ (D(A), X)_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2p}, p} = W^{1-1/p, p}(0, 1) \text{ si } p < 2, \\ (D(A), X)_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2p}, p} = \left\{ \varphi \in W^{1-1/p}(0, 1) : \int_0^1 \frac{|\varphi(t)|^p}{t(1-t)} d\xi < +\infty \right\} \text{ si } p = 2, \\ (D(A), X)_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2p}, p} = \{\varphi \in W^{1-1/p, p}(0, 1) : \varphi(0) = \varphi(1) = 0\} \text{ si } p > 2 \end{array} \right.$$

(voir [7], p. 385.)

nous rappelons que $f \in W^{k+\theta, p}$ où $k \in \mathbb{N}, 0 < \theta < 1$, si $f \in W^{k, p}(0, 1)$ et

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{|f^{(k)}(x) - f^{(k)}(y)|^p}{|x - y|^{1+\theta p}} dx dy < +\infty.$$

Notons que, $u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p} \subset D(Q)$ et $H \in \mathcal{L}(X)$ si (ii) est vérifiée.

On vérifie les hypothèses (avec $\omega_0 = 0$) du Théorème (3.0.1).

- ① L'espace $L^p(0, 1)$ $1 < p < \infty$ est *UMD* et donc (2.1.1) est vérifiée.
- ② Pour (3.0.3), voir [7], p.372, Lemme 8.1.
- ③ La propriété (3.0.4) n'est pas facile à montrer, elle est complètement prouvée dans [14].
- ④ $H \in \mathcal{L}(X)$ et donc les hypothèses (3.0.5) et (3.0.6) sont clairement vérifiées.
- ⑤ Pour l'hypothèse (3.0.8), il suffit de montrer (2.1.8) :

Soit $\varphi \in \bigcap_{k=1}^{+\infty} D(A^k) \subset \mathcal{C}(0, 1)$, puis pour $y \in (0, 1)$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{dH(\varphi)}{dy}(y) = \phi(y, y) \varphi(y) + \int_0^y \frac{\partial \phi}{\partial y}(y, \xi) \varphi(\xi) d\xi \\ \qquad \qquad \qquad = \phi_1(y) \varphi(y) + \int_0^y \frac{\partial \phi}{\partial y}(y, \xi) \varphi(\xi) d\xi \\ -\frac{d^2H(\varphi)}{dy^2}(y) = \frac{d\phi_1}{dy}(y) \varphi(y) + \phi_1(y) \frac{d\varphi}{dy}(y) \\ \qquad \qquad \qquad + \frac{\partial \phi}{\partial y}(y, y) \varphi(y) + \int_0^y \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}(y, \xi) \varphi(\xi) d\xi, \end{array} \right.$$

donc $y \mapsto \phi_1(y) \varphi(y) \in L^p(0, 1)$ car

$$\begin{aligned} \left(\int_0^1 |\phi_1(y) \varphi(y)|^p dy \right)^{1/p} &\leq \sup_{z \in [0,1]} |\varphi(z)| \times \left(\int_0^1 |\phi_1(y)|^p dy \right)^{1/p} \\ &\leq \sup_{z \in [0,1]} |\varphi(z)| \times \|\phi_1\|_X < +\infty, \end{aligned}$$

de même $y \mapsto \int_0^y \frac{\partial \phi}{\partial y}(y, \xi) \varphi(\xi) d\xi \in L^p(0, 1)$ car

$$\begin{aligned} \|H(\varphi)\|_X &= \left(\int_0^1 \left| \int_0^y \frac{\partial \phi}{\partial y}(y, \xi) d\xi \right|^p dy \right)^{1/p} \\ &\leq \int_0^1 \left(\int_0^1 \left| \frac{\partial \phi}{\partial y}(y, \xi) \right|^q d\xi \right)^{1/q} \left(\int_0^1 |\varphi(\xi)|^p d\xi \right)^{1/p} dy \\ &\leq \left\| \frac{\partial \phi}{\partial y}(y, \cdot) \right\|_{L^q(0,1)} \|\varphi\|_X < +\infty. \end{aligned}$$

Alors $\frac{dH(\varphi)}{dy} \in L^p(0, 1)$ et de la même manière, on montre que $\frac{d^2H(\varphi)}{dy^2} \in L^p(0, 1)$.

Finalement, $H(\varphi) \in W^{2,p}(0, 1)$ et on a aussi $H(\varphi)(0) = H(\varphi)(1) = 0$, donc $H(\varphi) \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}$.

En appliquant maintenant le Théorème (3.0.1), on obtient le résultat suivant:

Proposition 4.0.1 *Soient $u_0 \in X$, $u_{1,0} \in X$, $f \in L^p(0, 1, X)$ avec $1 < p < +\infty$. Alors il existe $\omega^* \geq 0$ tel que pour tout $\omega \geq \omega^*$, le Problème (4.0.1) admet une unique*

1. *solution semi-classique u si et seulement si*

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p} \text{ et} \\ u_{1,x_0} + HQ(e^{x_0 Q}(u_0 - J_0) + I_{x_0} - J_{x_0}) \in (D(A), X)_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2p}, p}. \end{array} \right.$$

2. *solution classique u si et seulement si*

$$\begin{cases} u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p} \text{ et} \\ u_{1, x_0} + HQ(e^{x_0 Q}(u_0 - J_0) + I_{x_0} - J_{x_0}) \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}. \end{cases}$$

Bibliographie

Bibliographie principale

- [1] B. Hamdi, S. Maingot, A. Medeghri. : *On general Bitsadze–Samarskii problems of elliptic type in L^p cases*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Series 2 <https://doi.org/10.1007/s12215-020-00579-2>.
- [2] M. Cheggag, M. Kaid, R. Labbas and S. Maingot. : *New Results on Elliptic Equations with Nonlocal Boundary Coefficient-operator Conditions in UMD Spaces :Noncommutative Cases* .Mediterr J Math, 1669–1683, 2015 .

Bibliographie générale

- [3] A. V. Balakrishnan. : *Fractional Powers of Closed Operators and the Semi-groups Generated by them*, Pacif.J.Math.10(1960), 419-437.
- [4] M. Cheggag, A. Favini, R. Labbas, S. Maingot and Kh. Ould Melha. : *New Results on Complete Elliptic Equations with Robin Boundary Coefficient-Operator Conditions in non Commutative Case* , Bulletin of the South Ural State University, Ser.Mathematical Modelling, Programming & Computer Software, 2017, vol.10, no.1, pp.70-96.
- [5] M. Cheggag , A. Favini, R. Labbas, S. Maingot and M. Medeghri. : *Sturm-Liouville Problems for an Abstract Differential Equation of Elliptic Type in UMD Spaces, Differential and Integral Equations* ,volume21 ,numbers 9-10(2008),981-1000.
- [6] G . Da Prato . : *Absract Differential Equations ,Maximal Regularity and Linearisation* , Proc . Symp . Pure Math. 45(1)(1986),p.359-370.
- [7] G. Da Prato, P. Grisvard : *Sommes d’Opérateurs Linéaires et Equations Différentielles Opérationnelles*, J. Math. Pures Appl. IX Ser.54, 305-387 (1975).
- [8] G. Dore, A. Venni : *On the closedness of the sum of two closed operators*. Math. Z. 196, 124–136 (1987).
- [9] G. Dore, S. Yakubov : *Semigroup estimates and noncoercive boundary value problems*. Semigroup Forum 60, 93–121 (2000).
- [10] P. Grisvard. : *Spazi di trace applicazioni (Italian)*,Rend. Mat.(6),5(1972),657-729.
- [11] D. Guidetti. : *A Introduction to Maximal Regularity for Parabolic Problems and Interpolation Theory with Application to an Inverse Problem* ,International Minicourse - Workshop ,Interplay Between (C_0) - Semi groups and PDEs : Theory and Applications, Bari/Italy September 22-26,2003,p.113-146.

-
- [12] M. Haase : *The functional calculus for sectorial operators, operator theory: Advances and Applications*, vol. 169. Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin (2006).
- [13] H. Hammou, R. Labbas, S. Maingot and A. Medeghri. : *On Some Elliptic Problems with Nonlocal Boundary Coefficient-operator Conditions in the Framework of Hölderian Spaces*,EJQTDE,2013No.36,p.1-32.
- [14] R. Labbas and M. Moussaoui. :*On there solution of the heat equation with discontinuous coefficients*, Semi-group Forum, vol.60(2000),187-201.
- [15] J. L. Lionset J. Peetre. : *Sur une classe d'espaces d'interpolation* .Publ.Math.,Inst. Hautes Etud.Sci. 19(1964),p.5-68.
- [16] J. L. Lions. : *Théorèmes de trace et d'interpolation*, I et II . Annali S.N.S.di Pisa,13, (1959),389-403et14,(1960),317-331.
- [17] H. Triebel. : *Interpolation Theory, Functions Spaces, Differential Operators*, North-Holland, Amsterdam,1978.