

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

*MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE*

UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS – MOSTAGANEM

Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique

Département de Mathématiques et Informatique

MEMOIRE DE MASTER

==--==--==--==--==--o ○ o--==--==--==--==--==

Option : Analyse Fonctionnelle

Intitulée

INTRODUCTION A LA THEORIE DES INEGALITES
ET LEURS APPLICATIONS

Présentée par : Becherif Boumediene

Soutenue le : 22-05-2017 devant le jury composé de :

Président : Mohammedi Mustapha

Examineur : Fettouch Houari

Encadreur : Zinelaabidine Latreuch

Remerciements

Pour commencer, je veux adresser mes remerciements à mon encadreur de mémoire, Zinelaabidine Latreuch, pour sa grande disponibilité et ses encouragements tout au long de la rédaction de ce mémoire.

Je remercie également mes jury Mr Mohammedi Mustapha et Mr Fettouch Houari.

Je tenais également à remercier tous mes professeurs de la faculté des sciences exactes et l'informatique spécialement le chef département Mr Mohamed Amine Ghazar.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à ma famille : ma mère et mon père, mes sœurs, mon frère hamada et tous mes amis omar, mohammed, abdelkader, brahim, youcef, abdenour, yacine, sidahmed, tarek, et , qui m'ont accompagné, aidé, soutenu et encouragé tout au long de la réalisation de ce mémoire.

Table des matières

Introduction	3
1 Quelques inégalités classiques	4
1.1 Fonctions convexes	4
1.2 Inégalité de Jensen	6
1.2.1 Le cas discret :	7
1.2.2 Le cas Intégrale (continue) :	8
1.2.3 Applications	9
1.3 Inégalité de Hermite-Hadamard	10
1.4 Inégalité de Fejér	11
1.5 Inégalité de Hölder	13
1.5.1 Le cas décrit	13
1.5.2 Le cas Intégrale (continue)	14
1.6 Inégalité de Minkovsky	15
1.6.1 Le cas discret	16
1.6.2 Le cas Intégrale(continue)	16
1.7 Inégalité de Chybechev	17
1.7.1 Le cas discret :	17
1.7.2 Le cas Intégrale (continue)	18
1.8 Inégalité de Grüss	19
1.8.1 Le cas discret	19
1.8.2 Le cas Intégrale (continue)	20
2 Sur les inégalités de Chebychev pour les fonctions convexes	22
2.1 Introduction et Résultats	22
2.2 Lemmes Préliminaires	24
2.3 Preuve du Théorèmes	25
3 Sur les inégalités de Grüss pour les fonctions convexes	29
3.1 Introduction et Résultats	29
3.2 Lemmes Préliminaires	31
3.3 Preuve du Théorèmes	32
Bibliographie	35

Introduction

La théorie des inégalités jouent un rôle très important dans presque tous les domaines des mathématiques. Plusieurs applications des inégalités se retrouvent dans divers domaines des sciences (Physique, Sciences de l'ingénieur..etc).

Ce travail se compose d'une introduction et trois chapitres.

Dans le premier chapitre, on va présenter certaines inégalités classiques et leurs applications, on va aussi étudier quelques propriétés des fonctions convexes.

Dans le deuxième chapitre, on va prouver une nouvelle version de l'inégalité de Chebychev pour certaines classes des fonctions qui n'ont pas nécessairement la même direction de variation.

Dans le troisième chapitre, on va montrer une nouvelle type de l'inégalité de Grüss pour les fonctions convexes, on va aussi comparer entre nos résultats et celle de l'inégalité classique de Grüss.

Chapitre 1

Quelques inégalités classiques

Dans ce chapitre, on va présenter quelques inégalités nécessaires et donner quelques définitions, résultats et applications dont on aura besoin tout au long de ce travail.

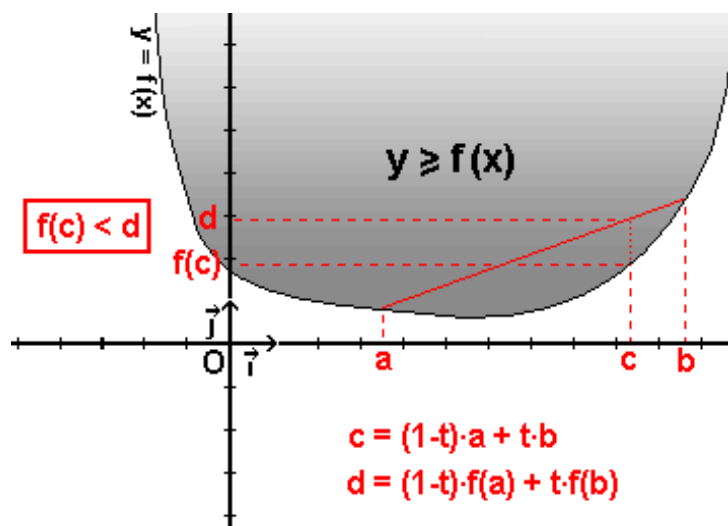
1.1 Fonctions convexes

Définition 1.1 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Alors $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dite convexe si pour tout $x, y \in I$ et $\lambda \in [0, 1]$ on a :

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y). \quad (1.1.1)$$

Si l'inégalité (1.1.1) est stricte pour tout $x \neq y$ et $\lambda \in]0, 1[$, alors f est dite strictement convexe. f sera dite concave si $-f$ est convexe.

Interprétation géométrique



Une fonction réelle d'une variable réelle est dite convexe si :

(i) Quels que soient deux points a et b du graphe de la fonction, le segment $[ab]$ est entièrement situé au-dessus du graphe.

Remarque 1.1 *L' inégalité (1.1.1) est équivalente à :*

$$f\left(\frac{px + qy}{p + q}\right) \leq \frac{pf(x) + qf(y)}{p + q}.$$

Pour $x, y \in I$, $p + q > 0$.

Remarque 1.2 [7] *Si $x_1 < x_2 < x_3$ sont des points dans I , alors l' inégalité (1.1.1) est équivalente à :*

$$\begin{vmatrix} x_1 & f(x_1) & 1 \\ x_2 & f(x_2) & 1 \\ x_3 & f(x_3) & 1 \end{vmatrix} = (x_3 - x_2)f(x_1) + (x_1 - x_3)f(x_2) + (x_2 - x_1)f(x_3) \geq 0.$$

où

$$f(x_2) \leq \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}f(x_3).$$

et sans la condition de la monotonie sur x_1, x_2, x_3 on a :

$$\frac{f(x_1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + \frac{f(x_3)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} \geq 0. \quad (1.1.2)$$

Remarque 1.3 [7] *f est à la fois convexe et concave si et seulement si $f(x) = \lambda x + c$ pour certains $\lambda, c \in \mathbb{R}$.*

Remarque 1.4 [7] *L' inégalité (1.1.2) peut être réécrit sous la forme*

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq \frac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_3} \quad (x_1 < x_2 < x_3).$$

Remarque 1.5 [7] *Si f une fonction convexe dans I et si $x_1 \leq y_1$, $x_2 \leq y_2$, $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$, alors*

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(y_2) - f(y_1)}{y_2 - y_1}$$

pour $x \leq y$, et $z \geq 0$, on obtient :

$$f(x + z) - f(x) \leq f(y + z) - f(y).$$

Proposition 1.1 [7] *Soit f une fonction convexe définie sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Si x, y, z sont trois points de I tels que $x < y < z$, on a*

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$

Preuve. Posons $t = \frac{y-x}{z-x}$; alors $0 < t < 1$ et

$$y = x + (y - x) = x + t(z - x) = (1 - t)x + tz,$$

donc par la convexité de f on a

$$f(y) = f((1 - t)x + tz) \leq (1 - t)f(x) + tf(z) = f(x) + t(f(z) - f(x)), \quad (1.1.3)$$

d'où

$$f(y) - f(x) \leq t(f(z) - f(x))$$

et

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

et pour l'autre inégalité, on transforme (1.1.3) en

$$(1 - t)(f(z) - f(x)) \leq f(z) - f(y)$$

donc

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$

■

Notation 1.1 Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ on note par $f'_+(x_0)$ (resp. $f'_-(x_0)$) la dérivée de f à droite (à gauche) au point x_0 .

Proposition 1.2 [7, 9] Soit I est un intervalle dans $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe. Alors f'_+ et f'_- existe et sont croissantes sur I , et $f'_- \leq f'_+$; si f est strictement convexe, alors ces dérivées sont strictement croissantes.

Proposition 1.3 [7] Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ on a les assertions suivantes :

(i) f est (strictement) convexe si et seulement si elle existe une fonction croissante $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est $c \in [a, b]$ un nombre réel tel que, pour tout $x \in [a, b]$

$$f(x) = f(c) + \int_c^x g(t) dt.$$

(ii) Si f est dérivable, alors f est (strictement) convexe si et seulement si f' est (strictement) croissante.

(iii) Si f'' existe sur $[a, b]$, alors f est convexe si et seulement si $f''(x) \geq 0$.

(iii) Si $f''(x) > 0$, alors f est strictement convexe.

Notation 1.2 Pour $n > 0$, un n -uplet est une collection de n objets (par exemple $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ est un n -uplet).

1.2 Inégalité de Jensen

L'**inégalité de Jensen** a été découverte à la fin du XIX ème siècle et il donna la preuve en 1906 par le mathématicien Danois *Johan Jensen*, cette inégalité est une généralisation de l'inégalité de la convexité à plusieurs nombres, comme, par exemple, la comparaison entre la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique de plusieurs nombres. On peut l'écrire de deux manières :

1.2.1 Le cas discret :

Théorème 1.1 [6, 7, 8] Soit f une fonction convexe sur $I \subset \mathbb{R}$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in I^n$, ($n \geq 2$) et $p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{R}_+^n$, alors :

$$f\left(\frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^n p_i x_i\right) \leq \frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^n p_i f(x_i). \quad (1.2.1)$$

avec $P_n = \sum_{i=1}^n p_i$

Preuve. On va démontrer par récurrence. Pour $n = 2$:

$$f\left(\frac{1}{p_1 + p_2} \sum_{i=1}^2 p_i x_i\right) = f\left(\frac{1}{p_1 + p_2} (p_1 x_1 + p_2 x_2)\right),$$

comme f est une fonction convexe, alors :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{p_1 + p_2} (p_1 x_1 + p_2 x_2)\right) &\leq \frac{p_1}{p_1 + p_2} f(x_1) + \frac{p_2}{p_1 + p_2} f(x_2) \\ &\leq \frac{1}{p_1 + p_2} (p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2)) \\ &\leq \frac{1}{p_1 + p_2} \left(\sum_{i=1}^2 p_i f(x_i)\right) \\ &\leq \frac{1}{P_2} \left(\sum_{i=1}^2 p_i f(x_i)\right). \end{aligned}$$

Donc l'inégalité (1.2.1) est vraie pour $n = 2$. On suppose que l'inégalité (1.2.1) est vraie pour n et on montre quel est vrai pour $n + 1$,

$$f\left(\frac{1}{P_{n+1}} \sum_{i=1}^{n+1} p_i x_i\right) = f\left(\frac{p_{n+1}}{P_{n+1}} x_{n+1} + \frac{P_n}{P_{n+1}} \frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^n p_i x_i\right),$$

comme f est une fonction convexe, alors :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{p_{n+1}}{P_{n+1}} x_{n+1} + \frac{P_n}{P_{n+1}} \frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^n p_i x_i\right) &\leq \frac{p_{n+1}}{P_{n+1}} f(x_{n+1}) + \frac{P_n}{P_{n+1}} f\left(\frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^n p_i x_i\right) \\ &\leq \frac{1}{P_{n+1}} \left(\sum_{i=1}^{n+1} p_i f(x_i)\right). \end{aligned}$$

Comme l'inégalité (1.2.1) est vraie pour $n + 1$, alors elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$f\left(\frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^n p_i x_i\right) \leq \frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^n p_i f(x_i).$$

■

1.2.2 Le cas Intégrale (continue) :

La forme intégrale de l'inégalité de **Jensen** à la forme suivante.

Théorème 1.2 [6, 7, 8] Soit f une fonction convexe sur l'intervalle I , $u : [a, b] \longrightarrow I$ une fonction continue. Alors,

$$f\left(\frac{\int_a^b p(x)u(x)dx}{\int_a^b p(x)dx}\right) \leq \frac{\int_a^b p(x)f(u(x))dx}{\int_a^b p(x)dx}, \quad (1.2.2)$$

où p est positif continue sur $[a, b]$.

Preuve. Comme f est une fonction convexe sur l'intervalle $[a, b]$, alors pour tout $t_0 \in [a, b]$, il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(t) - f(t_0) \geq \beta(t - t_0), \quad t \in [a, b].$$

d'où

$$p(t)f(u(t)) \geq \beta(u(t) - t_0)p(t) + f(t_0)p(t). \quad (1.2.3)$$

Posons

$$t_0 = \frac{\int_a^b p(t)u(t)dt}{\int_a^b p(t)dt}$$

et on intègre l'inégalité (1.2.3) on obtient

$$\begin{aligned} \int_a^b p(t)f(u(t))dt &\geq \beta \int_a^b p(t) \left(u(t) - \frac{\int_a^b p(t)u(t)dt}{\int_a^b p(t)dt} \right) dt + f\left(\frac{\int_a^b p(t)u(t)dt}{\int_a^b p(t)dt}\right) \int_a^b p(t)dt \\ &= \beta \left(\int_a^b p(t)u(t)dt - \int_a^b p(t)u(t)dt \right) + f\left(\frac{\int_a^b p(t)u(t)dt}{\int_a^b p(t)dt}\right) \int_a^b p(t)dt. \end{aligned}$$

Ce qu'implique

$$\frac{\int_a^b p(t) f(u(t)) dt}{\int_a^b p(t) dt} \geq f \left(\frac{\int_a^b p(t) u(t) dt}{\int_a^b p(t) dt} \right).$$

■

1.2.3 Applications

Dans ce qui suit on donne quelques application direct de l'inégalité de Jensen

Proposition 1.4 (*Comparaison entre moyenne géométrique et moyenne arithmétique*) Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$, on a

$$\left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Preuve. Considérons la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) = -\ln(x)$$

on a alors

$$f''(x) = \frac{1}{x^2}$$

on en déduit que f est convexe. En appliquant l'inégalité de Jensen, on obtient :

$$-\ln \left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n} \right) \leq \sum_{i=1}^n \frac{-\ln(x_i)}{n},$$

donc

$$\sum_{i=1}^n \frac{\ln(x_i)}{n} \leq \ln \left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n} \right).$$

Qui s'écrit

$$\ln \left(\sum_{i=1}^n x_i^{\frac{1}{n}} \right) \leq \ln \left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n} \right),$$

donc

$$\ln \left(\prod_{i=1}^n x_i^{\frac{1}{n}} \right) \leq \ln \left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n} \right),$$

alors

$$\left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

■

Proposition 1.5 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall p \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right) \leq \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Preuve. Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = x^p$$

on a alors

$$f''(x) = p(p-1)x^{p-2}.$$

Par conséquent f est convexe. En appliquant l'inégalité de Jensen, on obtient :

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)^p \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^p,$$

et en élevant les deux membres à la puissance $\frac{1}{p}$ on obtient

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right) \leq \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

■

Remarque 1.6 Si l'on pose $n = 2$ dans la formule précédente on obtient

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \leq \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Par conséquent,

$$\left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \leq \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2}$$

1.3 Inégalité de Hermite-Hadamard

L'inégalité classique de **Hermite-Hadamard** nous donne une estimation, d'en bas et d'en haut, de la valeur moyenne d'une fonction convexe a été publiée pour la première fois dans [1]

Théorème 1.3 [1, 8, 12] Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction convexe. Alors

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}. \quad (1.3.1)$$

Pour la démonstration, on a besoin du Lemme suivant

Lemme 1.1 [1, 12] *Soit f une fonction intégrable dans I . Alors on a*

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx &= \int_0^1 f(\lambda b + (1-\lambda)a) d\lambda \\ &= \int_0^1 f(\lambda a + (1-\lambda)b) d\lambda. \end{aligned}$$

Preuve du Théorème 1.3 Soit f est une fonction convexe on a pour tout $\lambda \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= f\left(\frac{\lambda b + (1-\lambda)a + \lambda a + (1-\lambda)b}{2}\right) \\ &\leq \frac{f(\lambda b + (1-\lambda)a) + f(\lambda a + (1-\lambda)b)}{2} \\ &\leq \frac{\lambda f(b) + (1-\lambda)f(a) + \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)}{2} \\ &\leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \end{aligned}$$

alors en peut écrire :

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(\lambda b + (1-\lambda)a) + f(\lambda a + (1-\lambda)b)}{2} \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}. \quad (1.3.2)$$

En intègre l'inégalité (1.3.2) sur $[0, 1]$ par rapport à λ et on utilise le Lemme 1.1 on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^1 f\left(\frac{a+b}{2}\right) d\lambda &\leq \frac{1}{2} \left(\int_0^1 f(\lambda b + (1-\lambda)a) d\lambda + \int_0^1 f(\lambda a + (1-\lambda)b) d\lambda \right) \\ &\leq \int_0^1 \frac{f(a) + f(b)}{2} d\lambda, \end{aligned}$$

alors

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

1.4 Inégalité de Fejér

L'inégalité de **Fejér** est une généralisation de l'inégalité de Hermite-Hadamard.

Théorème 1.4 [11] *Soit f une fonction convexe sur $[a, b]$, et soit $p : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction intégrable et symétrique par rapport à $x = \frac{a+b}{2}$ (i.e $p(x) = p(a+b-x)$). Alors*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b p(t) dt \leq \int_a^b p(t) f(t) dt \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b p(t) dt. \quad (1.4.1)$$

Pour la démonstration on besoin du lemme suivant

Lemme 1.2 [5] *Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe, alors*

$$2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq f(x) + f(a+b-x) \leq f(a) + f(b).$$

Preuve du Théorème 1.4 Comme f une fonction convexe sur $[a, b]$, et soit $p : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction intégrable et symétrique par rapport à $x = \frac{a+b}{2}$. On a

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b p(t)dt = \int_a^{\frac{a+b}{2}} f\left(\frac{a+b}{2}\right) p(t)dt + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f\left(\frac{a+b}{2}\right) p(t)dt.$$

Comme p est symétrique par rapport à $x = \frac{a+b}{2}$ on obtient

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b p(t)dt &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} f\left(\frac{a+b}{2}\right) p(t)dt + \int_a^{\frac{a+b}{2}} f\left(\frac{a+b}{2}\right) p(a+b-t)dt \\ &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left[f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] p(t)dt, \end{aligned}$$

on utilise le Lemme 1.2, on obtient

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b p(t)dt &\leq \int_a^{\frac{a+b}{2}} [f(t) + f(a+b-t)] p(t)dt \\ &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(t) p(t)dt + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(t) p(t)dt \\ &= \int_a^b p(t)f(t)dt. \end{aligned} \tag{1.4.2}$$

Et

$$\begin{aligned} \frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b p(t)dt &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{f(a) + f(b)}{2} p(t)dt + \int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{f(a) + f(b)}{2} p(a+b-t)dt \\ &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} [f(a) + f(b)] p(t)dt, \end{aligned}$$

d'après le Lemme 1.2 on obtient

$$\begin{aligned}
 \frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b p(t) dt &\geq \int_a^{\frac{a+b}{2}} [f(t) + f(a+b-t)] p(t) dt \\
 &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(t) p(t) dt + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(t) p(t) dt \\
 &= \int_a^b p(t) f(t) dt.
 \end{aligned} \tag{1.4.3}$$

Alors de (1.4.2) et (1.4.3) on obtient

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b p(t) dt \leq \int_a^b p(t) f(t) dt \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b p(t) dt$$

1.5 Inégalité de Hölder

l'inégalité de **Hölder** est une inégalité fondamentale relative aux espaces de fonctions L^p

1.5.1 Le cas décrit

Théorème 1.5 [8] Soient $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}_+^n$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}_+^n$ et $p, q \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ on a

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.2.4}$$

Preuve. On applique l'inégalité de Jensen avec $n = 2$, $p_1 = \frac{1}{p}$, $p_2 = \frac{1}{q}$, $f(x) = -\ln(x)$ et $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ on obtient

$$\begin{aligned}
 -\ln\left(\frac{x_1}{p} + \frac{x_2}{q}\right) &\leq -\frac{\ln(x_1)}{p} - \frac{\ln(x_2)}{q} \\
 &\leq -\ln\left(x_1^{\frac{1}{p}}\right) - \ln\left(x_2^{\frac{1}{q}}\right),
 \end{aligned}$$

par la fonction exponentielle on obtient

$$x_1^{\frac{1}{p}} * x_2^{\frac{1}{q}} \leq \frac{x_1}{p} + \frac{x_2}{q}.$$

Posons

$$x_1 = \frac{a_i^p}{\sum_{i=1}^n a_i^p} \text{ et } x_2 = \frac{b_i^q}{\sum_{i=1}^n b_i^q}.$$

On obtient

$$\left(\frac{a_i^p}{\sum_{i=0}^n a_i^p} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{b_i^q}{\sum_{i=0}^n b_i^q} \right)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a_i^p}{p \sum_{i=0}^n a_i^p} + \frac{b_i^q}{q \sum_{i=0}^n b_i^q}.$$

C'est-à-dire

$$\frac{a_i b_i}{\left(\sum_{i=0}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=0}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{a_i^p}{p \sum_{i=0}^n a_i^p} + \frac{b_i^q}{q \sum_{i=0}^n b_i^q},$$

sommons

$$\sum_{i=0}^n \frac{a_i b_i}{\left(\sum_{i=0}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=0}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}} \leq \sum_{i=0}^n \frac{a_i^p}{p \sum_{i=0}^n a_i^p} + \frac{b_i^q}{q \sum_{i=0}^n b_i^q}$$

d'où

$$\frac{\sum_{i=0}^n a_i b_i}{\left(\sum_{i=0}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=0}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{\sum_{i=0}^n a_i^p}{p \sum_{i=0}^n a_i^p} + \frac{\sum_{i=0}^n b_i^q}{q \sum_{i=0}^n b_i^q}$$

qui se simplifie

$$\frac{\sum_{i=0}^n a_i b_i}{\left(\sum_{i=0}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=0}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

et finalement :

$$\sum_{i=0}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=0}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=0}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

■

1.5.2 Le cas Intégrale (continue)

Théorème 1.6 Soient f et g deux fonctions continue et intégrable sur $[a, b]$, Soient $1 < p$, $q < +\infty$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors

$$\left(\int_a^b f(x) g(x) dx \right) \leq \left(\int_a^b (f(x))^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b (g(x))^q dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

pour la démonstration on a besoin le Lemme suivant

Lemme 1.3 (Inégalité de Young) Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et $p > 0, q > 0$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Preuve du Théorème 1.6 On suppose que

$$\int_a^b |f(x)|^p dx \neq 0 \text{ et } \int_a^b |g(x)|^q dx \neq 0.$$

On applique l'inégalité de Young avec

$$a = \frac{|f(x)|}{\left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}} \text{ et } b = \frac{|g(x)|}{\left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}}.$$

On obtient

$$\frac{|f(x)|}{\left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}} \frac{|g(x)|}{\left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\int_a^b |f(x)|^p dx} + \frac{1}{q} \frac{|g(x)|^q}{\int_a^b |g(x)|^q dx}.$$

On intègre sur $[a, b]$ par rapport à x on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\int_a^b |f(x)| |g(x)| dx}{\left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}} &\leq \frac{\frac{1}{p} \int_a^b |f(x)|^p dx}{\int_a^b |f(x)|^p dx} + \frac{\frac{1}{q} \int_a^b |g(x)|^q dx}{\int_a^b |g(x)|^q dx} \\ &\leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Alors

$$\left(\int_a^b |f(x)| |g(x)| dx\right) \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

1.6 Inégalité de Minkovsky

l'inégalité de **Minkowski** est l'inégalité triangulaire pour la norme des espaces L^p pour $p \geq 1$

1.6.1 Le cas discret

Théorème 1.7 [8] Soient $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}_+^n$ et $b = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}_+^n$, $p > 1$ et $\alpha \in [0, 1]$. Alors

$$\left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

si $p < 1$ ($p \neq 0$), l'inégalité s'inverse. Dans les deux cas l'égalité est valide si et seulement si a et b sont proportionnel.

Preuve.

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{i=1}^n (\alpha a_i + (1 - \alpha) b_i)^p + \sum_{i=1}^n ((1 - \alpha) a_i + \alpha b_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n (\alpha a_i + (1 - \alpha) b_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n ((1 - \alpha) a_i + \alpha b_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n (\alpha a_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n ((1 - \alpha) b_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} + \\ &\quad + \left(\sum_{i=1}^n ((1 - \alpha) a_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n (\alpha b_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\alpha \left(\sum_{i=1}^n (a_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} + (1 - \alpha) \left(\sum_{i=1}^n (b_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \right) + \\ &\quad + \left((1 - \alpha) \left(\sum_{i=1}^n (a_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} + \alpha \left(\sum_{i=1}^n (b_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

■

1.6.2 Le cas Intégrale(continue)

Théorème 1.8 Soient f et g deux fonctions continue et intégrable sur $[a, b]$, Alors

$$\left(\int_a^b (f(x) + g(x))^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b (f(x))^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b (g(x))^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

où $p > 1$.

Preuve. On utilise l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_a^b |f + g|^p dx &\leq \int_a^b (|f| + |g|) |f + g|^{p-1} dx \\
&= \int_a^b |f| |f + g|^{p-1} dx + \int_a^b |g| |f + g|^{p-1} dx \\
&\leq \left(\left(\int_a^b (f(x))^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b (g(x))^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right) \left(\int_a^b |f + g|^{(p-1)(\frac{p}{p-1})} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&= \left(\left(\int_a^b (f(x))^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b (g(x))^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right) \left(\int_a^b |f + g|^p dx \right)^{\frac{p-1}{p}}
\end{aligned}$$

ce qui est implique

$$\left(\frac{\int_a^b |f + g|^p dx}{\left(\int_a^b |f + g|^p dx \right)^{\frac{p-1}{p}}} \right) \leq \left(\int_a^b (f(x))^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b (g(x))^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

donc

$$\left(\int_a^b |f + g|^p dx \right)^{1 - \frac{p-1}{p}} \leq \left(\int_a^b (f(x))^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b (g(x))^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

alors

$$\left(\int_a^b (f(x) + g(x))^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b (f(x))^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b (g(x))^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

■

1.7 Inégalité de Chybechev

L'inégalité classique de Chebyshev implique la différence entre la moyenne du produit de deux fonctions et le produit du moyen des fonctions individuelles.

1.7.1 Le cas discret :

Théorème 1.9 [2] Soient $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ monotone dans la même direction et $n \in \mathbb{N}^*$ alors :

$$\frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right) \geq \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n b_i \right). \quad (1.5.1)$$

Si a et b sont monotone dans le sens inverse, alors l'inégalité (1.5.1) s'inverse.

Preuve. On suppose que $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ monotone dans la même direction et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$(a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0, \quad 1 \leq i < j \leq n$$

ce qu'implique

$$a_i b_i + a_j b_j \geq a_j b_i + a_i b_j, \quad (1)$$

en somment l'inégalité (1) par rapport à i on obtient

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right) + n a_j b_j \geq a_j \sum_{i=1}^n b_i + b_j \sum_{i=1}^n a_i, \quad (2)$$

en somment l'inégalité (2) par rapport à j on obtient

$$n \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right) + n \left(\sum_{j=1}^n a_j b_j \right) \geq \sum_{j=1}^n a_j \sum_{i=1}^n b_i + \sum_{j=1}^n b_j \sum_{i=1}^n a_i,$$

en fait l'inégalité en même indice i

$$2n \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right) \geq 2 \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i \right).$$

Donc

$$n \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right) \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i \right).$$

Alors

$$\frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right) \geq \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n b_i \right).$$

■

1.7.2 Le cas Intégrale (continue)

Théorème 1.10 [4] Soient $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, et $p : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction intégrable, si f et g sont monotone dans la même direction alors

$$\int_a^b p(x) dx \int_a^b p(x) f(x) g(x) dx \geq \int_a^b p(x) f(x) dx \int_a^b p(x) g(x) dx. \quad (1.5.2)$$

Si f et g sont monotone dans le sens inverse, alors l'inverse de l'inégalité (1.5.2) s'inverse, dans les deux cas, l'égalité dans (1.5.2) reste vrai si et seulement si f ou g est constante.

Preuve. Comme $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions monotones dans la même direction et $p : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ fonction intégrable on a

$$(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0, \quad (1.5.3)$$

en multiplie (1.5.3) par $p(x)p(y)$ on obtient

$$p(x)p(y)(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0, \quad (1.5.4)$$

on intègre l'inégalité (1.5.4) par rapport a x et y on obtient

$$\int_a^b \int_a^b p(x)p(y)(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) dx dy \geq 0, \quad (1.5.5)$$

en multiplie (1.5.5) par $\frac{1}{2}$ on obtient

$$\frac{1}{2} \int_a^b \int_a^b p(x)p(y)(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) dx dy \geq 0, \quad (1.5.6)$$

d'où

$$\begin{aligned} & \int_a^b p(x) dx \int_a^b p(x)f(x)g(x) dx - \int_a^b p(x)f(x) dx \int_a^b p(x)g(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b \int_a^b p(x)p(y)(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) dx dy \geq 0. \end{aligned}$$

Donc

$$\int_a^b p(x) dx \int_a^b p(x)f(x)g(x) dx \geq \int_a^b p(x)f(x) dx \int_a^b p(x)g(x) dx.$$

■

1.8 Inégalité de Grüss

1.8.1 Le cas discret

Dans le cas discét l'inégalité de **Grüss** est une estimation de la déffirence :

$$I(a, b; p) := P_n \sum_{i=1}^n p_i a_i b_i - \sum_{i=1}^n p_i a_i \sum_{i=1}^n p_i b_i, \quad (1.6.1)$$

où $P_n = \sum_{i=1}^n p_i$.

Théorème 1.11 [5] Soient $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $b = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ deux n -uplet de tels que

$$(a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0, \quad 1 \leq i < j \leq n$$

et soit $p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{R}_+^n$. Alors

$$|I(a, b; p)| \leq |a_n - a_1| |b_n - b_1| \max_{1 \leq j \leq n-1} P_j (P_n - P_{j+1}).$$

Où $P_j = \sum_{k=1}^j p_k$.

Une autre version de l'inégalité de Grüss due à M. Biernacki, H. Pidek et C. Ryll-Nardzewski est donné par

Théorème 1.12 [5] Soit $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $r < a_i < R$, et $s < b_i < S$ pour tous $i = 1, \dots, n$. Alors on a

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i b_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n b_i \right| \leq \frac{1}{n} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left(1 - \frac{1}{n} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right) (R - r)(S - s),$$

Où $\lfloor x \rfloor$ est la partie entière de x , $x \in \mathbb{R}$.

1.8.2 Le cas Intégrale (continue)

Dans le cas continue l'inégalité de **Grüss** est donnée une approximation de l'intégrale du produit en termes de produit des intégrales comme suit

Théorème 1.13 [3, 7] Soient f et g deux fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Soient également α , A et β , B des réels tels que $\forall t \in [a, b]$,

$$\alpha \leq f(t) \leq A \text{ et } \beta \leq g(t) \leq B,$$

alors

$$\left| \int_a^b f(t)g(t)dt - \left(\int_a^b f(t)dt \right) \left(\int_a^b g(t)dt \right) \right| \leq \frac{1}{4} (A - \alpha) (B - \beta).$$

Preuve. Comme $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables sur $[a, b]$ et $\forall t \in [a, b]$

$$\alpha \leq f(t) \leq A \text{ et } \beta \leq g(t) \leq B$$

on note que

$$|T(f, g)| = \left| \int_a^b f(t)g(t)dt - \left(\int_a^b f(t)dt \right) \left(\int_a^b g(t)dt \right) \right|$$

Tout d'abord, nous utilisons cette identité prouvée par K.A.Andreiev, qui affirme que $T(f, g)$ peut être écrit comme

$$T(f, g) = \frac{1}{2} \int_a^b \int_a^b (f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) dx dy.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a

$$T^2(f, g) \leq T(f, f) T(g, g).$$

On désigne par $K(f)$ la moyenne intégrale arithmétique

$$K(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx,$$

d'autre part

$$\begin{aligned} T(f, f) &= \int_a^b f(t) f(t) dt - \left(\int_a^b f(t) dt \right) \left(\int_a^b f(t) dt \right) \\ &= \int_a^b f(t)^2 dt - \left(\int_a^b f(t) dt \right)^2 \\ &= K(f^2) - K^2(f) \geq 0. \end{aligned}$$

On peut facilement voir que l'identité suivante est également vraie

$$T(f, f) = (A - K(f)) (K(f) - \alpha) - \frac{1}{b-a} \int_a^b (A - f(x)) (f(x) - \alpha) dx,$$

ce qui implique

$$T(f, f) \leq (A - K(f)) (K(f) - \alpha).$$

De même, on a

$$T(g, g) \leq (B - K(g)) (K(g) - \beta).$$

En combinant les étapes précédentes

$$T^2(f, g) \leq (A - K(f)) (K(f) - \alpha) (B - K(g)) (K(g) - \beta).$$

Enfin, par l'inégalité A-G, il est évident que

$$\begin{aligned} (A - K(f)) (K(f) - \alpha) &\leq \frac{1}{4} (A - \alpha)^2, \\ (B - K(g)) (K(g) - \beta) &\leq \frac{1}{4} (B - \beta)^2. \end{aligned}$$

donc

$$T^2(f, g) \leq \frac{1}{16} (A - \alpha)^2 (B - \beta)^2,$$

d'où

$$|T(f, g)| \leq \frac{1}{4} (A - \alpha) (B - \beta).$$

■

Chapitre 2

Sur les inégalités de Chebyshev pour les fonctions convexes

2.1 Introduction et Résultats

Il existe plusieurs résultats qui montrent que l'inégalité Chebyshev est valide sous les conditions plus faibles, par exemple la condition que les fonctions soient monotones être remplacés par la condition qu'ils soient ordonnés de la même façon. Dans ce cas, le théorème 1.12 est un simple conséquence de l'identité suivante :

$$\begin{aligned} & \int_a^b p(x)dx \int_a^b p(x)f(x)g(x)dx - \int_a^b p(x)f(x)dx \int_a^b p(x)g(x)dx \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b \int_a^b p(x)p(y) (f(x) - f(y)) (g(x) - g(y)) dx dy. \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

Notez que les fonctions $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sont dits être ordonnés de la même façon si

$$(f(x) - f(y)) (g(x) - g(y)) \geq 0 \quad \text{pour toute } x, y \in I.$$

Et on dit qu'ils sont ordonnés d'une façon opposée si l'inégalité ci-dessus est inversée.

Une autre contribution sur les conditions de l'inégalité de Chebyshev a été donnée par Levin et Steckin, et ils ont prouvé le résultat suivant :

Théorème 2.1 [4] *Soit $p(x)$ défini sur $[0, 1]$ et les conditions suivantes sont vérifiées :*

(i) $p(x)$ est croissante pour $x \in [0, \frac{1}{2}]$.

(ii) $p(x) = p(1 - x)$ pour $x \in [0, 1]$.

Alors, pour toute fonction convexe continue f , on a

$$\int_0^1 p(x)f(x)dx \leq \int_0^1 p(x)dx \int_0^1 f(x)dx.$$

En 2011, Z.Latreuch et B.Belaïdi ont montré un nouveau type d'inégalités pour les fonctions convexes

Théorème 2.2 [4] Soit $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions convexe (ou concave) et $p : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction symétrique par rapport à $x = \frac{a+b}{2}$ (c'est-à-dire $p(a+b-x) = p(x)$ pour tout $x \in [a, b]$). Alors

$$\begin{aligned} & \int_a^b p(x)f(x)g(x)dx + \int_a^b p(x)f(x)g(a+b-x)dx \\ & \geq \frac{2}{\int_a^b p(x)dx} \int_a^b p(x)f(x)dx \int_a^b p(x)g(x)dx. \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

Si f est une fonction convexe (ou concave) et g est fonction concave (ou convexe), alors l'inégalité (2.1.3) s'inverse, l'égalité dans (2.1.3) tient si et seulement si g ou f est linéaire.

Théorème 2.3 [4] Soit $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions convexe (ou concave).

(i) Si f et g sont ordonnés de la même façon, alors

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)g(x)dx & \geq \frac{1}{2} \left(\int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g(a+b-x)dx \right) \\ & \geq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \int_a^b g(x)dx. \end{aligned}$$

(ii) Si f et g sont ordonnés d'une façon opposée, alors

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)g(a+b-x)dx & \geq \frac{1}{b-a} \left(\int_a^b f(x)dx \right) \left(\int_a^b g(x)dx \right) \\ & \geq \int_a^b f(x)g(x)dx. \end{aligned}$$

Corollaire 2.1 [4] Soit $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions convexe (ou concave). Si g est fonction symétrique par rapport à $x = \frac{a+b}{2}$, alors

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \geq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \int_a^b g(x)dx. \quad (2.1.4)$$

Si f est fonction convexe (ou concave) et g est fonction concave (ou convexe), alors l'inégalité (2.1.4) est renversé, l'égalité dans (2.1.4) est vérifiée si et seulement si g ou f est linéaire.

2.2 Lemmes Préliminaires

Lemme 2.1 [4] *Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe (ou concave). Alors*

$$F(x) = f(x) + f(a + b - x) \quad (2.1.5)$$

est décroissante (croissante) sur $[a, \frac{a+b}{2}]$ et croissante (ou décroissante) sur $[\frac{a+b}{2}, b]$.

Preuve. Supposons que f soit une fonction convexe. Puisque f est une fonction convexe, alors soit f est monotone sur $]a, b[$, ou il existe un $\zeta \in]a, b[$ tel que f décroissante sur l'intervalle $[a, \zeta]$ et croissante sur l'intervalle $[\zeta, b]$. Comme F est une fonction convexe sur $[a, b]$, et symétrique par rapport à $x = \frac{a+b}{2}$, donc on peut déduire facilement que F doit décroissante sur l'intervalle $[a, \frac{a+b}{2}]$ et croissante sur l'intervalle $[\frac{a+b}{2}, b]$. Maintenant, si f est une fonction concave, alors en utilisant la même preuve comme ci-dessus, nous obtenons le résultat. ■

Lemme 2.2 [4] *Soient $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables. Si f et g sont ordonnés de la même façon, alors*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \geq \int_a^b f(x)g(a + b - x)dx. \quad (2.1.6)$$

Si f et g sont ordonnés de façon opposée, l'inégalité (2.1.6) est inversée.

Preuve. Puisque f et g sont ordonnés de la même façon, on a pour tout $x \in [a, b]$

$$(f(x) - f(a + b - x)) + (g(x) - g(a + b - x)) \geq 0, \quad (2.1.7)$$

Ce qui implique que

$$f(x)g(x) + f(a + b - x)g(a + b - x) \geq f(x)g(a + b - x) + f(a + b - x)g(x), \quad (2.1.8)$$

En intégrant les deux côtés de l'inégalité (2.1.8) par rapport à x sur le segment $[a, b]$, on obtient

$$\int_a^b f(x)g(x) + f(a + b - x)g(a + b - x)dx \geq \int_a^b f(x)g(a + b - x) + f(a + b - x)g(x)dx$$

ce qui implique que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \geq \int_a^b f(x)g(a + b - x)dx + \int_a^b f(a + b - x)g(x)dx - \int_a^b f(a + b - x)g(a + b - x)dx$$

donc

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \geq \int_a^b f(x)g(a + b - x)dx.$$

■

2.3 Preuve du Théorèmes

Preuve du Théorème 2.2 Tout d'abord, on suppose que f et g sont des fonctions convexes (ou concave), et on désigne par F et G

$$F(x) = f(x) + f(a + b - x), \quad G(x) = g(x) + g(a + b - x)$$

Puisque f et g sont des fonctions convexes, alors d'après le Lemme 2.1, on déduit que F et G ont la même variation. En appliquant l'inégalité de Chebyshev sur l'intervalle $[a, \frac{a+b}{2}]$, on obtient

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} p(x) F(x) G(x) dx \geq \frac{1}{\int_a^{\frac{a+b}{2}} p(x) dx} \int_a^{\frac{a+b}{2}} p(x) F(x) dx \int_a^{\frac{a+b}{2}} p(x) G(x) dx \quad (2.1.9)$$

où $p : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction symétrique intégrable. (2.1.9) devient

$$\begin{aligned} & \int_a^b p(x) [f(x)g(x) + f(a+b-x)g(a+b-x)] dx + \int_a^b p(x) [f(a+b-x)g(x) + f(x)g(a+b-x)] dx \\ & \geq \frac{1}{\int_a^{\frac{a+b}{2}} p(x) dx} \left(\int_a^{\frac{a+b}{2}} p(x) [f(a+b-x) + f(x)] dx \right) \left(\int_a^{\frac{a+b}{2}} p(x) [g(a+b-x) + g(x)] dx \right). \end{aligned}$$

En utilisant les identités

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) dx = \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(a+b-x) dx,$$

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} p(x) dx = \frac{1}{2} \int_a^b p(x) dx,$$

et

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)g(a+b-x) dx = \int_{\frac{a+b}{2}}^b g(x)f(a+b-x) dx,$$

on obtient

$$\begin{aligned}
& \int_a^{\frac{a+b}{2}} p(x)f(x)g(x)dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b p(x)f(x)g(x)dx + \\
& + \int_a^{\frac{a+b}{2}} p(x)f(x)g(a+b-x)dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b p(x)f(x)g(a+b-x)dx \\
& \geq \frac{2}{\int_a^b p(x)dx} \left(\int_a^{\frac{a+b}{2}} p(x)f(x)dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b p(x)f(x)dx \right) \left(\int_a^{\frac{a+b}{2}} p(x)g(x)dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b p(x)g(x)dx \right)
\end{aligned} \tag{2.1.10}$$

De (2.1.10), on obtient facilement (2.1.9).

Maintenant, si f est convexe (ou concave) et g est concave (ou convexes), en utilisant la même preuve que ci-dessus, nous obtenons le résultat.

On démontre maintenant que l'égalité dans (2.1.9) est valide si et seulement si f ou g est linéaire. Sans perdre de généralité, on suppose que f est linéaire et g est une fonction convexe (ou concave). alors

$$\begin{aligned}
F(x) &= f(x) + f(a+b-x) \\
&= \alpha x + \beta + \alpha(a+b-x) + \beta \\
&= \alpha(a+b) + 2\beta
\end{aligned}$$

et

$$G(x) = g(x) + g(a+b-x)$$

Comme F est constante, G monotone sur $[a, \frac{a+b}{2}]$ et $[\frac{a+b}{2}, b]$, alors en appliquant le Théorème 1.10, on obtient

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} p(x)F(x)G(x)dx = \left(\frac{1}{\int_a^{\frac{a+b}{2}} p(x)dx} \right) \left(\int_a^{\frac{a+b}{2}} p(x)F(x)dx \int_a^{\frac{a+b}{2}} p(x)G(x)dx \right).$$

Ce qui est équivalent à

$$\begin{aligned} & \int_a^b p(x)f(x)g(x)dx + \int_a^b p(x)f(x)g(a+b-x)dx \\ &= \left(\frac{2}{\int_a^b p(x)dx} \right) \left(\int_a^b p(x)f(x)dx \int_a^b p(x)g(x)dx \right). \end{aligned}$$

Preuve du Théorème 2.3.

(i) Puisque f et g sont deux fonctions convexes et ordonnées de la même façon, alors d'après le Lemme 2.2 on a

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \geq \int_a^b f(x)g(a+b-x)dx,$$

d'où

$$2 \int_a^b f(x)g(x)dx \geq \int_a^b f(x)g(a+b-x)dx + \int_a^b f(x)g(x)dx. \quad (2.1.11)$$

D'après le Théorème 2.2 et (2.1.11), on a

$$\begin{aligned} 2 \int_a^b f(x)g(x)dx &\geq \int_a^b [f(x)g(a+b-x) + f(x)g(x)] dx \\ &\geq \frac{2}{b-a} \left(\int_a^b f(x)dx \right) \left(\int_a^b g(x)dx \right). \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)g(x)dx &\geq \frac{1}{2} \left(\int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g(a+b-x)dx \right) \\ &\geq \frac{1}{b-a} \left(\int_a^b f(x)dx \right) \left(\int_a^b g(x)dx \right). \end{aligned}$$

(ii) Puisque f et g sont deux fonctions convexes, alors d'après le théorème 2.3

$$\begin{aligned} & \int_a^b f(x)g(a+b-x)dx - \frac{1}{b-a} \left(\int_a^b f(x)dx \right) \left(\int_a^b g(x)dx \right) \\ &\geq \frac{1}{b-a} \left(\int_a^b f(x)dx \right) \left(\int_a^b g(x)dx \right) - \int_a^b f(x)g(x)dx. \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

D'autre part, on a

$$\frac{1}{b-a} \left(\int_a^b f(x) dx \right) \left(\int_a^b g(x) dx \right) \geq \int_a^b f(x) g(x) dx. \quad (2.1.13)$$

Car f et g sont ordonnées d'une façon opposée, par (2.1.12) et (2.1.13) on obtient

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) g(a+b-x) dx &\geq \frac{1}{b-a} \left(\int_a^b f(x) dx \right) \left(\int_a^b g(x) dx \right) \\ &\geq \int_a^b f(x) g(x) dx. \end{aligned}$$

Chapitre 3

Sur les inégalités de Grüss pour les fonctions convexes

3.1 Introduction et Résultats

Le but de ce chapitre est de donner une nouvelle version de l'inégalité de Grüss pour les fonctions convexes et de trouver une nouvelle classe de fonctions qui satisfait l'inégalité de Grüss, avant l'énoncé de nos résultats, on note par

$$T(f, g) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x)dx + \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(a+b-x)dx - \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x)dx \int_a^b g(x)dx \quad (3.2.1)$$

et

$$\rho_f = \frac{f(a) + f(b)}{2} - f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

En 2013, A. El farissi et Z.latreuch ont montré que

Théorème 3.1 [3] *Soient $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions convexe (concave), alors*

$$0 \leq T(f, g) \leq \frac{1}{2} \rho_f \rho_g, \quad (3.2.2)$$

Si f est convexe (ou concave) et g est concave (ou convexe), l'inégalité (3.2.2) s'inverse.

Corollaire 3.1 [3] *Soient $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions convexe (concave) telles que*

$$\gamma \leq f(x) \leq \Gamma, \quad \Phi \leq g(x) \leq \Psi.$$

pour tout $x \in [a, b]$, où γ, Γ, Φ et Ψ sont des constantes réelles. Alors

$$\begin{aligned} T(f, g) &\leq \frac{1}{2} \rho_f \rho_g \\ &\leq \frac{1}{2} (\Gamma - \gamma) (\Psi - \Phi). \end{aligned}$$

Où la constante $\frac{1}{2}$ est la meilleure dans sens qu'il ne peut pas être remplacé par une autre plus petite.

Preuve. Supposons que f et g sont des fonctions convexes. Par le théorème 1.1, nous avons

$$T(f, g) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right) \left(\frac{g(a) + g(b)}{2} - g\left(\frac{a+b}{2}\right) \right)$$

telle que

$$\gamma \leq f(x) \leq \Gamma, \Phi \leq g(x) \leq \Psi.$$

Pour chaque $x \in [a, b]$, où γ, Γ, Φ et Ψ des constantes réelles. Alors

$$0 \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq (\Gamma - \gamma),$$

et

$$0 \leq \frac{g(a) + g(b)}{2} - g\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq (\Psi - \Phi),$$

Ce qui implique que

$$\frac{1}{2} \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right) \left(\frac{g(a) + g(b)}{2} - g\left(\frac{a+b}{2}\right) \right) \leq \frac{1}{2} (\Gamma - \gamma) (\Psi - \Phi).$$

Alors

$$T(f, g) \leq \frac{1}{2} (\Gamma - \gamma) (\Psi - \Phi).$$

■

Corollaire 3.2 [3] Soient $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions convexes (concave). Si f ou g est une fonction symétrique par rapport à $x = \frac{a+b}{2}$, alors

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x)dx - \frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b f(x)dx \int_a^b g(x)dx \leq \frac{1}{4} \rho_f \rho_g.$$

De plus, si

$$\gamma \leq f(x) \leq \Gamma, \Phi \leq g(x) \leq \Psi.$$

pour tout $x \in [a, b]$, où γ, Γ, Φ et Ψ sont des constantes réelles. Alors

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x)dx - \frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b f(x)dx \int_a^b g(x)dx \leq \frac{1}{4} \rho_f \rho_g \leq \frac{1}{4} (\Gamma - \gamma) (\Psi - \Phi).$$

Corollaire 3.3 [3] Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe (ou concave) et symétrique par rapport à $x = \frac{a+b}{2}$, alors

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f^2(x)dx - \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \right)^2 \leq \frac{1}{4} \rho_f^2.$$

Où la constante $\frac{1}{4}$ est la meilleure possible dans le sens qu'elle ne peut pas être remplacée par une autre plus petite.

3.2 Lemmes Préliminaires

Lemme 3.1 [3] Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction convexe (ou concave), alors la fonction

$$F(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(a + b - x))$$

Satisfaite ce qui suit :

- (1) F est une fonction convexe (ou concave).
- (2) Pour tout $x \in [a, b]$:

$$F\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq F(x) \leq F(a) = F(b).$$

Si F est concave on a

$$F\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq F(x) \geq F(a) = F(b).$$

Preuve. [3] (1) Soit f une fonction convexe. Pour tout $x, y \in [a, b]$ et $\lambda \in [0, 1]$, on a

$$\begin{aligned} F(\lambda x + (1 - \lambda)y) &= \frac{1}{2}(f(\lambda x + (1 - \lambda)y) + f(\lambda(a + b - x) + (1 - \lambda)(a + b - y))) \\ &\leq \frac{1}{2}(\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) + \lambda f(a + b - x) + (1 - \lambda)f(a + b - y)) \\ &= \lambda\left(\frac{1}{2}(f(x) + f(a + b - x))\right) + (1 - \lambda)\left(\frac{1}{2}(f(y) + f(a + b - y))\right) \\ &= \lambda F(x) + (1 - \lambda)F(y). \end{aligned}$$

Par conséquent, F est une fonction convexe.

(2) Soit f une fonction convexe, on a

$$F\left(\frac{a+b}{2}\right) = F\left(\frac{a+b-x+x}{2}\right) \leq \frac{1}{2}F(x) + \frac{1}{2}F(a+b-x),$$

et

$$F(x) = F\left(\frac{x-a}{b-a}b + \frac{x-b}{b-a}a\right) \leq \frac{x-a}{b-a}F(b) + \frac{x-b}{b-a}F(a) = F(a)$$

■

Lemme 3.2 [3] Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction convexe (ou concave), alors

$$F(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(a + b - x))$$

est décroissante (croissante) sur $[a, \frac{a+b}{2}]$ et croissante (décroissante) sur $[\frac{a+b}{2}, b]$.

Preuve. Supposons que f une fonction convexe, Soient $x, y \in [a, \frac{a+b}{2}]$ tels que $x \leq y$, alors il existe $\lambda \in [0, 1]$ de telle sorte que $y = \lambda x + (1 - \lambda)\frac{a+b}{2}$. Comme F est une fonction convexe,

alors

$$\begin{aligned}
F(y) &= F\left(\lambda x + (1 - \lambda)\frac{a+b}{2}\right) \\
&\leq \lambda F(x) + (1 - \lambda)F\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
&= F(x) + (1 - \lambda)\left(F\left(\frac{a+b}{2}\right) - F(x)\right)
\end{aligned}$$

d'après le Lemme 2.1, on obtient que $F(y) \leq F(x)$, alors F est décroissante dans $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$. Maintenant, soient $x, y \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ de telle sorte que $x \geq y$, alors il existe $\lambda \in [0, 1]$ tel que $x = \lambda y + (1 - \lambda)\frac{a+b}{2}$. Comme F est une fonction convexe, alors

$$\begin{aligned}
F(x) &= F\left(\lambda y + (1 - \lambda)\frac{a+b}{2}\right) \\
&\leq \lambda F(y) + (1 - \lambda)F\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
&= F(y) + (1 - \lambda)\left(F\left(\frac{a+b}{2}\right) - F(y)\right),
\end{aligned}$$

d'après le Lemme 2.1, on a $F(x) \leq F(y)$, puis F croissante dans $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ ■

3.3 Preuve du Théorèmes

Preuve du Théorème 3.1 Tout d'abord, on suppose que f et g sont des fonctions convexes et nous désignons par F et G les fonctions suivantes

$$\begin{aligned}
F(x) &= \frac{1}{2}(f(x) + f(a+b-x)), \\
G(x) &= \frac{1}{2}(g(x) + g(a+b-x)).
\end{aligned}$$

Puisque f et g sont des fonctions convexes, et en utilisant Lemma 2.2 et Lemma 2.1, on déduit que F et G ont la même variation et

$$\begin{aligned}
F\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq F(x) \leq F(a) = F(b), \\
G\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq G(x) \leq G(a) = G(b).
\end{aligned}$$

Pour tout $x \in [a, b]$. Ensuite, en appliquant l'inégalité Grüss pour F et G et en utilisant

l'inégalité de Chebychev, on obtient

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b F(x)G(x)dx - \frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b F(x)dx \int_a^b G(x)dx \right| \\
&= \frac{1}{b-a} \int_a^b F(x)G(x)dx - \frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b F(x)dx \int_a^b G(x)dx \\
&\leq \frac{1}{4} \left(F(a) - F\left(\frac{a+b}{2}\right) \right) \left(G(a) - G\left(\frac{a+b}{2}\right) \right)
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{b-a} \int_a^b [f(x)g(x) + f(a+b-x)g(a+b-x)] dx \\
&+ \frac{1}{b-a} \int_a^b [f(x)g(a+b-x) + f(a+b-x)g(x)] dx \\
&- \frac{1}{(b-a)^2} \left(\int_a^b [f(x) + f(a+b-x)] dx \right) \left(\int_a^b [g(x) + g(a+b-x)] dx \right) \\
&\leq \frac{1}{4} \left(F(a) - F\left(\frac{a+b}{2}\right) \right) \left(G(a) - G\left(\frac{a+b}{2}\right) \right).
\end{aligned}$$

En utilisant les identités

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx,$$

et

$$\int_a^b f(x)g(a+b-x)dx = \int_a^b g(x)f(a+b-x)dx.$$

On obtient

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x)g(x)dx + \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x)g(a+b-x)dx - \frac{4}{(b-a)^2} \left(\int_a^b f(x)dx \right) \left(\int_a^b g(x)dx \right) \\
&\leq \frac{1}{4} \left(f(a) + f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right) \left(g(a) + g(b) - 2g\left(\frac{a+b}{2}\right) \right)
\end{aligned}$$

Ce qui est équivalent à

$$T(f, g) \leq \frac{1}{2} \rho_f \rho_g.$$

Maintenant, supposons que f est une fonction convexe et que g est une fonction concave, on en déduit que F et G sont ordonnées d'une façon opposée et d'après le Lemma 2.1, nous avons :

$$\begin{aligned} F\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq F(x) \leq F(a) = F(b), \\ G\left(\frac{a+b}{2}\right) &\geq G(x) \geq G(a) = G(b). \end{aligned}$$

Pour tout $x \in [a, b]$. Ensuite, en appliquant l'inégalité de Grüss pour F et G et en utilisant L'inégalité de Chebychev, on obtient

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b F(x)G(x)dx - \frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b F(x)dx \int_a^b G(x)dx \right| \\ &= \frac{1}{b-a} \int_a^b F(x)G(x)dx - \frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b F(x)dx \int_a^b G(x)dx \\ &\leq \frac{1}{4} \left(F(a) - F\left(\frac{a+b}{2}\right) \right) \left(G(a) - G\left(\frac{a+b}{2}\right) \right) \end{aligned}$$

Par le même raisonnement ci-dessus, on trouve

$$T(f, g) \geq \frac{1}{2} \rho_f \rho_g.$$

Bibliographie

- [1] **J. Hadamard**, *Etude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann*, J. Math Pures Appl, 58 (1893), 171–215.
- [2] **Z.Latreuch, B.Belaïdi**, *New Inequalities For Convex Sequences With Applications*, Int.J.Open Problems Comput. Math, Vol. 5, No. 3, September, 2012.
- [3] **A. El Farissi, Z. Latreuch**, *New type of Chebychev-Grüss inequalities for convex function*.Acta Universitatis Apulensis ISSN : 1582-5329. 34/2013.
- [4] **Z.Latreuch, B.Belaïdi**, *like Chebyshev's inequalities for convex functions and applications*, 2000 Mathematics Subject Classification : 26D15 No 35/2013.
- [5] **S. S. Dragomir et N. T. Diamond**, *A Discret Grüss type inequalities and applications for the moments of random variables and geussing mappings*, po Box 14428, Melborne City, MC 8001 Australia.
- [6] **F.Proschan, J.E.Pečarić, Y.L.Tong**, *Convex function, Partial orderings, and statistical applications*, Mathematics in science and engineering vol 187 1992.
- [7] **D.S.Mitrinović, J.E.Pečarić, A.M.Fink**, *Classical and New Inequalities in Analysis*, Mathematics and its application 1993.
- [8] **O.Bagdasar**, *Inequalities and Applications*, Cluj Napoca, 2006.
- [9] **D.S.Mitrinović**, *Analytic inequalities*,Springer-Verlag Berlin. heidelberg. New york 1970.
- [10] **X.K.Chai, Y.Miao**, *Note on the Grüss Inequality*, Général Mathematics Vol. 19, No. 3 (2011), 93–99.
- [11] **S.S.Dragomir, I.Gomm** , *Some Applicatios of fejér's inequality for convex functions (I)*, , published 2 May, 2013.
- [12] **A El Farissi**, *simple proof and refinement of Hermite–Hadamard inequality*, Journal of Mathematical InequalitiesVol 4, Num 3 (2010), 365–369.