

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS DE MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE



MÉMOIRE

Master Académique

pour obtenir le diplôme de Master délivré par

Université de Mostaganem

Spécialité "Modélisation, Contrôle et Optimisation"

présenté et soutenu publiquement par

Rekia BOUHENNI

le Mercredi 13 Juin 2018

Généralisation d'une nouvelle méthode de décomposition des fonctions unidimensionnelles basée sur une approche semi-classique

Encadeur : **Zineb KAISERLI (MCB, UMAB)**

Jury

Djillali BOUAGADA

Professeur

Président (UMAB)

Mohammed Amine GHEZZAR

MCB

Examineur (UMAB)

**LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE (FSEI)
Chemin des Crêtes (Ex-INES), 27000 Mostaganem, Algérie**

**M
A
S
T
E
R**

Dédicaces

Je dédie ce travail à

Mes parents

Mes frères et sœurs

Mes neveux & nièces

Mes amies

Rekia

Remerciements

*J*e tiens à remercier tous d'abord **ALLAH** de m' avoir donné le courage, la volonté et la santé pour réaliser ce travail.

*J*e remercie très chaleureusement mon encadreuse Mademoiselle Zineb Kaiserli, MCB à l'université de Mostaganem, pour ces précieuses orientations.

*J*e tiens à remercier Monsieur Djillali Bouagada, Professeur à l'Université de Mostaganem et Monsieur Mohamed Amine Ghezzar, MCB à l'université de Mostaganem de m'avoir fait l'honneur de participer au Jury de soutenance et pour l'intérêt qu'ils ont apporté à mon sujet de Master.

*M*es vifs remerciements vont également à tous les enseignants de l'Université Mostaganem que j'ai rencontré ou côtoyé durant tout mon cursus universitaire dans oublier tout le personnel administratif.

Un très spécial remerciement à tous mes connaissances et mes amies en particulier à *K*heira, *N*ora, *N*adia et *T*awes.

*E*n dernier un très grand et énorme merci à ma famille *B*ouhenni, plus particulièrement à :

*C*elui qui m'a éclairé le sentir de ma réussite et de mon bonheur en se dévouant sans avarice pour m'aider à défier les obstacles, pour la gentillesse elle même ... pour mon très chère père *Q*uadah.

*L*a source de tendresse infinie, pour la plus généreuse femme qui a su m'aider avec son profond amour, pour l'âme de ma vie ... ma très chère mère *A*rbia.

*M*es très chers frères et sœurs pour leurs soutien moral et leurs profonde affection.

*Q*u'ils reçoive ici l'expression de tous mon amour.

*R*ekia

Table des matières

| | |
|--|-----------|
| Table des figures | iv |
| Liste des abréviations | v |
| Index des notations | vi |
| Introduction | 1 |
| 1 État de l'art | 3 |
| 1 Introduction | 3 |
| 2 Méthodes de décomposition de Fourier | 3 |
| 3 Méthode de décomposition modale empirique | 5 |
| 4 Analyse spectrale semi-classique : SCSA | 7 |
| 5 Méthode de décomposition SCSA : Une nouvelle formule | 8 |
| 6 Conclusion | 10 |
| 2 Extension de la SCSA en dimension n | 11 |
| 1 Introduction | 11 |
| 2 Définition de la SCSA en dimension n | 11 |
| 3 Étude de la convergence lorsque h tend vers 0 | 12 |
| 4 Comportement du spectre discret en fonction de h | 16 |
| 5 Conclusion | 18 |
| 3 SCSA en dimension n et décomposition des fonctions | 19 |
| 1 Introduction | 19 |
| 2 Discrétisation de la SCSA en dimension n | 19 |
| 3 Application à des fonctions académiques | 21 |
| 4 Conclusion | 26 |
| Conclusion | 27 |
| Annexe | 28 |
| Bibliographie | 31 |

Table des figures

| | | |
|-----|--|----|
| 3.1 | Algorithme de reconstruction d'une fonction de dimension n par la SCSA. | 21 |
| 3.2 | (a). Variation de l'erreur moyenne quadratique en fonction de h ; (b). Variation du nombre des valeurs propres négatives K_h^0 en fonction de h | 22 |
| 3.3 | Variation de quelques valeurs propres en fonction de h | 23 |
| 3.4 | (a). Reconstruction de la fonction $f_1(x) = x^2 - 25$ sur $[-5, 5]$ pour $h = 0.2$ ($K_h^0 = 45$); (b). Erreur relative correspondante. | 23 |
| 3.5 | Les valeurs propres négatives $\mu_{k,h}$, $k = 1, \dots, K_h^0$ de $H_1(f_1)$ sont toutes comprises entre $(-\max f_1)$ et 0. | 24 |
| 3.6 | (a). Reconstruction de la fonction $f_2(x)$ pour $h = 0.13$; (b). Erreur relative correspondante. | 24 |
| 3.7 | Allure de la, (a). première fonction propre; (b). deuxième fonction propre; (c). dernière fonction propre; L^2 -normalisée dans le cas où $h = 0.13$, $\gamma = 4$, et $\lambda = 0$ | 25 |
| 3.8 | (a) Fonction originale $f_3(x, y, z)$; (b). Reconstruction de la fonction $f_3(x, y, z)$ pour $h = 0.09$, $\gamma = 9$ et $\lambda = 0$; (c). Erreur relative correspondante. | 26 |

Liste des abréviations

- ECG** : Électro-Cardio-Gramme.
- EMD** : Décomposition modale empirique (Empirical Mode Decomposition).
- IMF** : Fonction modale intrinsèque (Intrinsic Mode Function).
- IST** : Transformée de diffusion inverse (Inverse Scattering Transform).
- SCSA** : Analyse spectrale semi-classique (Semi-Classical Signal Analysis).

Index des notations

| | |
|---------------------------------------|---|
| \mathbb{R} | : Espace Euclidien. |
| x | : Élément de \mathbb{R} |
| \mathbb{R}^n | : Espace Euclidien de dimension n . |
| $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ | : Vecteur de \mathbb{R}^n . |
| \mathbb{C}^+ | : Demi plan complexe supérieur. |
| $\overline{\mathbb{C}^+}$ | : $\overline{\mathbb{C}^+} = \mathbb{C}^+ \cup \mathbb{R}$. |
| \mathcal{C}^∞ | : Espace des fonctions infiniment continûment différentiables. |
| \mathbf{H}^2 | : Espace de Sobolev d'ordre 2. |
| $L^p(\mathbb{R})$ | : $\left\{ f \text{ mesurable sur } \mathbb{R} \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) ^p dx < \infty \right\}, 1 \leq p < \infty$. |
| $L^p_{loc}(\mathbb{R})$ | : $\left\{ f \in L^p(\Lambda) \text{ pour tout compact } \Lambda \subset \mathbb{R} \right\}, 1 \leq p < \infty$. |
| $L^1_1(\mathbb{R})$ | : $\left\{ f \text{ mesurable sur } \mathbb{R} \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) (1 + x) dx < \infty \right\}$. |
| Δ | : Opérateur Laplacien. |
| $W(w_1, w_2)$ | : Wronskien de w_1 et w_2 . |
| $L^c_{n,\gamma}$ | : Constante universelle semi-classique de dimension n . |
| h | : Paramètre semi-classique en lien avec la constante de Planck. |
| $\Im(s)$ | : Partie imaginaire de s . |
| $\Re(s)$ | : Partie réelle de s . |
| σ | : spectre de $H_n(f_n)$. |
| σ_c | : spectre continue de $H_n(f_n)$. |
| σ_d | : spectre discret de $H_n(f_n)$. |
| $S_\gamma(h, \lambda)$ | : Moyenne de Riesz. |
| $\mathcal{H}_n(f_n)$ | : Opérateur de Schrödinger associé à la fonction f_n de dimension $n, n \in \mathbb{N}^*$. |
| $\mathbf{D}(\mathcal{H}_n)$ | : Domaine de définition de $\mathcal{H}_n(f_n)$. |
| \mathbf{K} | : Nombre de valeurs propres négatives de $\mathcal{H}_n(f_n)$. |
| μ_k | : Valeurs propres négatives de $\mathcal{H}_n(f_n)$ avec $k = 1, \dots, K$ |
| Ψ_k | : Fonctions propres L^2 -normalisées associées à μ_k de $H_n(f_n)$. |
| $f_+(s, x)$ | : Fonction de Jost par la gauche associée à $\mathcal{H}_1(f_1)$. |
| $f_-(s, x)$ | : Fonction de Jost par la droite associée à $\mathcal{H}_1(f_1)$. |
| $\mathcal{R}_r(s)$ | : Coefficient de réflexion par la droite associée à $\mathcal{H}_1(f_1)$. |
| $\mathcal{R}_l(s)$ | : Coefficient de réflexion par la gauche associée à $\mathcal{H}_1(f_1)$. |
| $\mathbf{T}(s)$ | : Coefficient de transmission associée à $\mathcal{H}_1(f_1)$. |
| $\mathbf{S}(s)$ | : Matrice de diffusion. |
| γ | : Paramètre appartenant à \mathbb{R}^* . |
| λ | : Paramètre appartenant à \mathbb{R}_- . |

| | |
|--|---|
| $\mathcal{H}_{n,h}(f_n)$ | : Opérateur de Schrödinger semi-classique associé à la fonction f_n de dimension n . |
| $\mathbf{D}(\mathcal{H}_{n,h})$ | : Domaine de définition de $\mathcal{H}_{n,h}(f_n)$ |
| K_h | : Nombre de valeurs propres négatives de $\mathcal{H}_{n,h}(f_n)$. |
| K_h^λ | : Nombre de valeurs propres négatives de $\mathcal{H}_{n,h}(f_n)$ inférieures à $\lambda, \lambda \in \mathbb{R}_-$. |
| $\mu_{k,h}$ ou $k = 1 \dots, K_h^\lambda$. | : Valeurs propres négatives de $\mathcal{H}_{n,h}(f_n)$ avec $k = 1 \dots, K_h$ |
| $\Psi_{k,h}$ | : Fonctions propres L^2 -normalisées associées à $\mu_{k,h}$ de $H_n(f_n)$. |
| Ω_n | : Ouvert borné de \mathbb{R}^n . |
| Γ | : Fonction Gamma standard. |
| $(\cdot)_+$ | : Partie positive |
| $e_h^Y(\lambda, \mathbf{x}, \mathbf{x}')$ | : Fonction spectrale. |
| Ω_n | : Compact de \mathbb{R}^n . |

Introduction

La théorie du signal a suscité depuis plusieurs décennies un très grand intérêt chez les mathématiciens en raison de la spécialisation croissante des chercheurs. Le signal apparaît dans plusieurs disciplines, c'est le cas, par exemple, de l'électrocardiogramme (ECG) lequel est largement utilisé comme l'un des outils les plus importants dans la pratique clinique. Le signal ECG représente les variations de l'activité électrique du cœur en fonction du temps. Or, dans certains cas, le signal peut dépendre de plusieurs paramètres et variables. Plus que cela, ce dernier est parfois incompréhensible et indéchiffrable.

En effet, le signal est une quantité mesurable qui dépend du temps, de l'espace, de la fréquence, \dots . L'un des objectifs principaux de la théorie du signal est l'étude du signal et des systèmes qui les transmettent. Étudier un signal revient à produire une version très simple de ce dernier, autrement dit, le déchiffrer et le rendre plus exploitable.

Mathématiquement :

- La notion du signal correspond à la notion d'une fonction d'une ou de plusieurs variables.
- Produire une version simplifiée du signal revient à le décomposer.

Décomposer une fonction revient à l'écrire sous la forme d'une somme finie de fonctions élémentaires pondérée par des coefficients. Toutefois, la théorie mathématique de l'approximation suggère que l'ensemble des fonctions élémentaires soit adaptative, c'est-à-dire, extraire les fonctions élémentaires à partir de la fonction originale.

Pour toutes ces raisons, l'objectif de ce manuscrit est de faire une comparaison entre les méthodes, les plus reconnues, de la décomposition des fonctions unidimensionnelles et de généraliser, par la suite, en dimension n la méthode qui respecte bien la suggestion de la théorie d'approximation mathématique.

Ce manuscrit, où une étude théorique suivie par des résultats numériques est traitée, est organisé comme suit :

- Le premier chapitre introduit le problème auquel on s'intéresse à savoir représenter une fonction de dimension n par le biais d'une décomposition selon un ensemble de fonctions élémentaires adaptatives. On présente, également, les différentes méthodes de décomposition des fonctions unidimensionnelles tout en précisant leurs différences et limites.
- Quant au second chapitre, on y présente les principaux résultats théoriques obtenus lors de la généralisation en dimension n . Dans un premier temps la définition de cette nouvelle approche dans le cas n dimensionnel est formalisée. Ensuite, sous certaines conditions, sa convergence est prouvée. En dernier, ses différentes propriétés sont présentées.
- Le troisième et dernier chapitre est consacré aux aspects numériques de cette nouvelle méthode en nD . On y décrit le schéma numérique, ensuite, procède à l'étude de l'influence des paramètres dont elle dépend et on termine par la représentation

de quelques fonctions académiques, pour de différentes dimensions, en utilisant le logiciel MATLAB. Ce chapitre peut aussi être vu comme une validation numérique de notre approche ainsi que de ses propriétés.

Enfin, la dernière partie de ce manuscrit présente tout d'abord une conclusion générale suivie par quelques perspectives.

Ce manuscrit comprend également un annexe qui étaye certains résultats présentés brièvement dans le texte. Les différents articles et ouvrages utilisés pour l'élaboration de ce travail sont présentés dans la bibliographie qui clôture ce manuscrit.

Chapitre 1

État de l'art

1 Introduction

La problématique traitée dans ce manuscrit est : décomposer une fonction, de dimension n , $n \in \mathbb{N}^*$ finie, en une somme finie de fonctions élémentaires dépendant de la fonction elle-même pondérée par des coefficients comme le suggère la théorie de l'approximation [7].

Pour ces raisons, dans ce chapitre, on va présenter les différentes méthodes de décomposition des fonctions en une dimension. On choisit celle qui respecte bien les suggestions de la théorie de l'approximation et on essaye de la généraliser, dans le second chapitre et dans le cadre du possible, en dimension n .

2 Méthodes de décomposition de Fourier

Dans cette section, un aperçu des méthodes de Fourier et de toutes ses versions [3, 7, 20] est présenté vu qu'elles étaient et sont largement utilisées en théorie de traitement du signal¹.

2.1 Série de Fourier

Les séries de Fourier constituent un outil fondamental d'approximation des fonctions périodiques, qu'il faut commencer par le rappeler.

Définition 1.1 (Fonction périodique) [7] *On appelle période d'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tout nombre réel T tel que :*

$$\forall t \in \mathbb{R} : f(t + T) = f(t). \quad (1.1)$$

On dit que f est périodique si elle admet une période non nulle, et plus précisément qu'elle est T périodique si T est une période strictement positive.

L'inverse de T s'appelle la fréquence fondamentale.

Les multiples de la fréquence fondamentale se nomment fréquences harmoniques.

Définition 1.2 (Série de Fourier) [20] *Sous certaines conditions, une fonction périodique, de période T , se développe en série de Fourier sous la forme :*

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) \exp\left(\frac{2i\pi kt}{T}\right), \quad (1.2)$$

1. Le signal est une quantité mesurable. Mathématiquement, un signal correspond à la notion d'une fonction.

où,

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \exp\left(-\frac{2i\pi kt}{T}\right) dt. \quad (1.3)$$

On remarque que :

$$f(0) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f),$$

et

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt.$$

Les séries de Fourier ont prouvé leurs grande utilisation, dans divers domaines, mais seulement pour des fonctions périodiques ou encore des fonctions suffisamment régulières. Cependant, cette technique ne peut pas être utiliser pour une large classe de fonctions stationnaires non périodiques. C'est pour cette raison, et bien d'autres, une généralisation des séries de Fourier a été introduite par :

2.2 Transformée de Fourier

Définition 1.3 (Fonction localement intégrable) [19] Soit I un intervalle de \mathbb{R} et soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application.

On dit que f est une fonction localement intégrable sur I si f est intégrable sur tout intervalle $[a, b]$ fermé borné contenu dans I .

L'espace des fonctions localement intégrable est noté par : L^1 , où :

$$f \in L^1(I) \Leftrightarrow \forall [a, b] \subset I : \int_a^b f(x) dx \text{ existe.}$$

Définition 1.4 (Transformée de Fourier) [20] Soit f une fonction de $L^1(\mathbb{R})$. On appelle transformée de Fourier de la fonction f , la fonction \hat{f} de la variable $\xi \in \mathbb{R}$, telle que :

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \hat{f}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx.$$

La définition de la transformée de Fourier peut différer d'une constante dans certains ouvrages. Dans un cas discret, la définition de la transformée de Fourier est donnée par :

Définition 1.5 [20] On appelle transformée de Fourier discrète d'une fonction de N termes $f(x_0), f(x_1) \dots, f(x_{N-1})$, la suite $\hat{f}(\xi)$ de N termes :

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{N-1} f(x_n) e^{-i \frac{n\xi}{N}}.$$

Malgré l'immense utilisation de la transformée de Fourier continue et discrète, cette dernière s'avère insuffisante lors d'une analyse d'un phénomène transitoire comme le cas d'un mot prononcé à un certain moment par exemple. C'est pour cela, de nombreuses autres méthodes de décomposition spectrales basée sur les méthodes de décomposition de Fourier ont été proposé dans le but principal est la localisation en temps et en fréquence, cependant elles sont inexploitable pour une grande classe de fonctions vu qu'elles ne prennent pas en compte les caractéristiques de la fonction.

Pour y remédier a cet inconvénient, la théorie des ondelettes, en introduisant la notion d'échelle dans cette décomposition, a été proposée.

2.3 La transformée en ondelettes

L'idée de base de la décomposition d'une fonction en utilisant la transformation en ondelette est : à partir d'une fonction de base ψ , appelée ondelette-mère ou ondelette analysante, on construit une famille de fonctions élémentaires : [3, 20]

$$\Psi_{ab}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad b \in \mathbb{R}, a > 0. \quad (1.4)$$

Les coefficients de la fonction f sont alors les nombres :

$$C_f(a, b) = \langle f, \Psi_{ab} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{\Psi_{ab}(t)} dt. \quad (1.5)$$

Ainsi, sous certaines condition la formule de reconstruction de la fonction f est :

$$f(t) = \frac{1}{K} \int \int \frac{1}{a^2} C_f(a, b) \Psi_{ab}(t) da db. \quad (1.6)$$

La décomposition en ondelette apparait donc comme une version discrète de la transformée en ondelette :

Définition 1.6 [3] *La transformée en ondelette de fenêtre ψ d'une fonction f est donnée par :*

$$\mathcal{W}_\psi f(a, u) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-u}{a}\right)} dt, \quad (1.7)$$

avec $a > 0$ et $u \in \mathbb{R}$.

La décomposition en ondelettes, grâce au paramètre d'échelle a , est une méthode d'analyse fondamentalement multi-échelles. Ainsi, elle permet de traiter des fonctions comportant de fortes singularités. Mais même si les méthodes de décomposition de Fourier ou en ondelette ont permis des avancées dans l'analyse temps-fréquences, aucune de ces méthodes n'est adaptée pour traiter correctement des fonctions non stationnaires et non linéaires dont on ne connaît pas à priori les caractéristiques.

Plus que cela, cette classe de méthodes utilise une base fixe, or la théorie mathématique d'approximation propose de décomposer chaque fonction par un ensemble de fonctions adaptées à elle-même [7].

Partant des limites citées plus haut, récemment, Huang et al [13] ont introduit une méthode qui traite la problématique de la décomposition et l'analyse des fonctions non-stationnaires dite transformée de Huang ou décomposition modale empirique (EMD).

3 Méthode de décomposition modale empirique

La méthode de décomposition modale empirique construit une base optimale, qui dépend de la fonction, et ou les premières composantes contiendront presque toute l'information ; pour cela, la fonction est décomposée à partir d'une base connue, avant de réaliser une analyse en composante principale [13, 23, 24, 27]. La décomposition modale empirique apporte deux nouveautés :

- Elle consiste en une décomposition dans une base non fixée de la fonction ; en ce sens, elle est auto-adaptative.
- Elle est fondamentalement algorithmique, contrairement aux autres méthodes qui nécessitent de calculer des matrices de covariance très coûteuses.

3.1 Définitions

Définition 1.7 [13, 24] *On appelle fonction modale intrinsèque IMF, une fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, vérifiant :*

1. *Les minimas de g sont strictement négatifs, ses maximas sont strictement positifs.*
2. *La somme de l'enveloppe supérieure interpolant les maximas de g , et de l'enveloppe inférieure interpolant les minimas, est nulle.*

Plus simplement, une IMF est une fonction oscillante autour de 0, de moyenne locale nulle, modulée en amplitude et en fréquence. La moyenne locale est définie par :

Définition 1.8 [24] *La moyenne locale d'une fonction g est la demi-somme de ses enveloppes supérieures et inférieures, qui sont obtenues par interpolation des maximas et des minimas respectivement.*

3.2 Principe de l'EMD

Soit f une fonction. Le but de la décomposition modale empirique est de décomposer en une somme finie de modes oscillants d_k tels que :

$$f = \sum_{k=1}^K d_k + r,$$

où r est le résidu de la décomposition. Comme on extrait un à un les modes oscillants, on aimerait bien que le résidu r soit non-oscillant, et le plus faible possible.

La notion duale de mode oscillant est celle de moyenne locale : en fait pour extraire le mode d_1 de f , on construit la moyenne locale du signal $e_1(t)$, encore appelée enveloppe moyenne. Le mode d est alors calculé par la formule :

$$d_1(t) = f(t) - e_1(t).$$

En posant $e_0 = f$, on peut alors écrire :

$$d_k(t) = e_{k-1}(t) - e_k(t), \quad \forall k \in 1, \dots, K. \quad (1.8)$$

La décomposition s'achève quand on ne peut plus calculer une enveloppe moyenne, c'est-à-dire lorsque $e_k = r$ possède trois extréma au plus. Et donc, la décomposition totale de f s'écrit [23] :

$$f(t) = \sum_{k=0}^K d_k(t) + r(t).$$

Cette méthode, relativement jeune, a été largement utilisée. Cependant, l'absence de théorie et la base auto-adaptative qui ne permet pas, parfois, d'extraire l'information utile présente un gros défaut. Pour surmonter cette contrainte on introduit un nouveau type de décomposition des fonctions basée essentiellement sur la transformée de la diffusion inverse [2, 4, 6, 8, 22] ainsi que la théorie d'analyse semi-classique [5, 10, 21]. Les nouveautés qu'apporte cette méthode sont :

- L'utilisation d'un ensemble de fonctions élémentaires adaptatives².
- Exploitable par la machine.

2. Ensemble de fonctions élémentaires dépendant de la fonction, à décomposer, elle-même.

4 Analyse spectrale semi-classique : SCSA

Les méthodes de décomposition basée sur la transformée de la diffusion inverse permettent de décomposer une fonction selon un ensemble de fonctions élémentaires [2, 4, 6, 8, 22] dépendant de la fonction elle-même. L'idée principale de toutes ces méthodes est de :

1. Considérer la fonction à décomposer comme étant un potentiel de l'opérateur de Schrödinger³ lequel est donné par :

$$\mathcal{H}(f) = -\Delta + f.$$

2. Extraire le spectre discret σ_d et continue σ_c de l'opérateur de Schrödinger $\mathcal{H}(f)$ lors de sa résolution spectrale.
3. décomposer la fonction en utilisant uniquement le spectre discret et continue selon une formule bien précise.

Une étude très approfondie a été proposé par Deift et Trubowitz [4]. La formule de décomposition de Deift et Trubowitz est obtenue en somment deux termes, un terme qui se caractérise par le spectre discret σ_d , et un autre qui montre la contribution du spectre continue σ_c dans la décomposition et la reconstruction de la fonction f (plus de détails sont présentés dans l'annexe C). Malgré l'avantage de cette méthode et le grand succès qu'elle a eu, cependant, elle reste inexploitable numériquement et cela à cause de la partie qui dépend du spectre continue σ_c .

Pour y remédier a cet inconvénient, l'idée est d'introduire le paramètre semi-classique [5, 10, 21]⁴ h dans l'opérateur de Schrödinger $\mathcal{H}(f)$ et par suite dans les deux spectres σ_d et σ_c . Le paramètre h permet d'annuler la partie dépendante du spectre continue σ_c , d'où l'apparition d'une nouvelle méthode de décomposition [11, 18].

Avant de présenter cette nouvelle méthode, dite *Semi-Classical Signal Analysis*, on donne un bref aperçu sur l'opérateur de Schrödinger semi-classique ainsi que sa résolution spectrale.

4.1 Opérateur de Schrödinger unidimensionnel semi-classique

Considérons l'opérateur de Schrödinger semi-classique unidimensionnel $\mathcal{H}_{1,h}(f_1)$ défini sur $L^2(\mathbb{R})$ par :

$$\mathcal{H}_{1,h}(f_1) = -h^2 \frac{d^2}{dx^2} - f_1, \quad \mathbf{D}(\mathcal{H}_{1,h}(f_1)) = \mathbf{H}^2(\mathbb{R}), \quad (1.9)$$

tel que :

$$f_1 \in L_1^1(\mathbb{R}), \quad f_1(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{d^m f_1}{dx^m} \in L^1(\mathbb{R}), \quad m = 1, 2, \quad (1.10)$$

où : $L_1^1(\mathbb{R})$ est souvent appelé classe de Faddeev [6], il est donné par :

$$L_1^1(\mathbb{R}) = \left\{ f_1 \mid \int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(x)| (1 + |x|) dx < \infty \right\}. \quad (1.11)$$

3. Dans tous ce qui suit, toute fonction à décomposer est considérée comme un potentiel de l'opérateur de Schrödinger.

4. Passage de la mécanique quantique (une étude micro-locale) vers la mécanique classique.

Il est à noter que sous les hypothèses (1.10), il existe un nombre K_h fini [4] et non nul [17] de valeurs propres négatives de l'opérateur de Schrödinger $\mathcal{H}_{1,h}(f_1)$. Notons $\mu_{k,h}$, $k = 1, \dots, K_h$ les valeurs propres négatives de $\mathcal{H}_{1,h}(f_1)$ avec :

$$\mu_{1,h} < \mu_{2,h} < \dots < \mu_{K_h,h}. \quad (1.12)$$

Soient $\psi_{k,h}$ les fonctions propres L^2 -normalisées associées à $\mu_{k,h}$ tel que :

$$\mathcal{H}_{1,h}(f_1)\psi_{k,h} = \mu_{k,h}\psi_{k,h}, \quad k = 1, \dots, K_h.$$

4.2 Méthode de décomposition SCSA

La définition de la décomposition d'une fonction par la méthode SCSA est donnée par :

Définition 1.9 [18] Soient f_1 une fonction vérifiant les hypothèses (1.10) et h le paramètre semi-classique. L'approximation par la SCSA est définie par :

$$f_{1,h}(x) = 4h \sum_{k=1}^{K_h} \sqrt{-\mu_{k,h}} \psi_{k,h}^2(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.13)$$

où $\mu_{k,h}$ et $\psi_{k,h}$ avec $k = 1, \dots, K_h$ sont respectivement les valeurs propres négatives de $\mathcal{H}_{1,h}(f_1)$ et les fonctions propres L^2 -normalisées associées tel que :

$$\mathcal{H}_{1,h}(f_1)\psi_{k,h} = \mu_{k,h}\psi_{k,h}, \quad k = 1, \dots, K_h. \quad (1.14)$$

Il est clair que d'après cette définition la SCSA résulte d'une écriture à partir d'un ensemble de fonctions élémentaires adaptatives qui dépend de la fonction elle-même et qui consiste en le carré des fonctions propres L^2 -normalisées de l'opérateur de Schrödinger semi-classique.

Le paramètre semi-classique h joue un rôle principal et important. En effet, plus h diminue, plus l'extraction des valeurs propres négatives de f_1 par rapport à x est meilleure. Intuitivement, il permet de modifier le spectre de $\mathcal{H}_{1,h}(f_1)$ de façon à approcher au mieux f_1 par $f_{1,h}$ et donc la convergence de la fonction estimée vers la fonction originale. Ce résultat est présenté par le théorème ci-dessous.

Théorème 1.1 [15] Soit f_1 une fonction réelle qui vérifie les conditions (1.10). Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f_1(x) = \lim_{h \rightarrow 0} 4h \sum_{k=1}^{K_h} \sqrt{-\mu_{k,h}} \psi_{k,h}^2(x), \quad (1.15)$$

où $\mu_{k,h}$ et $\psi_{k,h}$, $k = 1, \dots, K_h$ sont respectivement les valeurs propres négatives de $\mathcal{H}_{1,h}(f_1)$ et les fonctions propres L^2 -normalisées associées tel que :

$$\mathcal{H}_{1,h}(f_1)\psi_{k,h} = \mu_{k,h}\psi_{k,h}, \quad k = 1, \dots, K_h. \quad (1.16)$$

5 Méthode de décomposition SCSA : Une nouvelle formule

Comme la méthode de décomposition SCSA a été principalement obtenue en combinant la méthode de décomposition de Deift et Trubowitz et l'analyse semi-classique, une reformulation de la SCSA a été proposée dans [11] en s'inspirant des résultats de l'analyse semi-classique [12, 16].

5.1 SCSA : Une définition plus générale

Soit l'opérateur de Schrödinger semi-classique unidimensionnel $\mathcal{H}_{1,h}(f_1)$ défini sur $L^2(\mathbb{R})$ par :

$$\mathcal{H}_{1,h}(f_1) = -h^2 \frac{d^2}{dx^2} - f_1, \quad \mathbf{D}(\mathcal{H}_{1,h}(f_1)) = \mathbf{H}^2(\mathbb{R}) \quad (1.17)$$

tel que :

$$f_1(x) \geq 0, \quad f_1 \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_1) \quad (1.18)$$

où $\Omega_1 =]a, b[$ est un ouvert borné de \mathbb{R} . Ainsi, en s'inspirant des résultats de la théorie de l'analyse semi-classique [12, 16], la nouvelle définition de la SCSA est donnée par :

Définition 1.10 [11] Soient $f_1 \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_1)$ une fonction réelle à valeurs positives et h le paramètre semi-classique. Alors pour tout $x \in \Lambda_1$, on a :

$$f_{1,h,\gamma,\lambda}(x) = -\lambda + \left(\frac{h}{L_{1,\gamma}^{cl}} \sum_{k=1}^{K_h^\lambda} (\lambda - \mu_{k,h})^\gamma \psi_{k,h}^2(x) \right)^{\frac{2}{1+2\gamma}}, \quad (1.19)$$

où $\Lambda_1 \subset \Omega_1$ est un compact, $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$, $\lambda \in \mathbb{R}_-$ et $L_{1,\gamma}^{cl}$ est la constante universelle semi-classique donnée par :

$$L_{1,\gamma}^{cl} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+\frac{3}{2})}, \quad (1.20)$$

avec Γ est la fonction Gamma standard.

Par ailleurs, $\mu_{k,h}$ sont les valeurs propres négatives de $\mathcal{H}_{1,h}(f_1)$ avec $\mu_{1,h} < \dots < \mu_{K_h^\lambda,h} < \lambda$ et $\psi_{k,h}$ sont les fonctions propres L^2 -normalisées associées tel que :

$$\mathcal{H}_{1,h}(f_1)\psi_{k,h} = \mu_{k,h}\psi_{k,h}, \quad k = 1, \dots, K_h^\lambda. \quad (1.21)$$

5.2 Étude de la convergence de la SCSA

L'efficacité de cette formule et l'influence des paramètres λ , h et γ ont été étudiées dans [11]. En effet :

- Le paramètre λ permet de spécifier le domaine de l'estimation, la décomposition et de l'analyse de la fonction.
- Le paramètre γ peut améliorer l'approximation de la fonction pour un nombre de valeurs propres négatives K_h^λ .
- Le paramètre semi-classique h joue un rôle important dans cette méthode, plus h diminue, plus le nombre des valeurs propres négatives K_h^λ augmente et plus l'estimation de la fonction est meilleure.

Ainsi, la converge de cette nouvelle formule de la SCSA est décrite par le théorème suivant :

Théorème 1.2 [11] Soient $f_1 \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_1)$ une fonction réelle à valeurs positives et h le paramètre semi-classique.

Alors pour tout couple (Λ_1, λ) , tel que $\Lambda_1 \subset \Omega_1$ est un compact, et

$$\begin{cases} \lambda < \inf(-f_1(a), -f_1(b)), \\ f_1(\Lambda_1) \subset]-\lambda, +\infty[, \\ \lambda \text{ n'est pas une valeur critique de } -f_1, \end{cases} \quad (1.22)$$

et pour tout $x \in \Lambda_1$, on a :

$$f_1(x) = -\lambda + \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{h}{L_{1,\gamma}^{cl}} \sum_{\mu_{k,h} < \lambda} (\lambda - \mu_{k,h})^\gamma \psi_{k,h}^2(x) \right)^{\frac{2}{1+2\gamma}}, \quad (1.23)$$

où $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$ et $L_{1,\gamma}^{cl}$ est la constante universelle semi-classique donnée par la formule (1.20).

Par ailleurs, $\mu_{k,h}$ sont les valeurs propres négatives de $\mathcal{H}_{1,h}(f_1)$ avec $\mu_{1,h} < \dots < \mu_{K_h^\lambda,h} < \lambda$ et $\psi_{k,h}$ sont les fonctions propres L^2 -normalisées associées tel que :

$$\mathcal{H}_{1,h}(f_1) \psi_{k,h} = \mu_{k,h} \psi_{k,h}, \quad h = 1, \dots, K_h^\lambda. \quad (1.24)$$

6 Conclusion

Dans ce chapitre, on a introduit le problème a traité, a savoir décomposer une fonction sur un ensemble de fonctions élémentaires adaptatives. Ensuite on a exposé les différentes méthodes de décomposition des fonctions chacune avec ces avantages et inconvénients.

Comme le critère suggérer par la théorie de l'approximation est respecté par la SCSA, alors, on propose de la généraliser, dans le chapitre qui suit, en dimension n pour une large utilisation.

Chapitre 2

Extension de la SCSA en dimension n

1 Introduction

La méthode de décomposition SCSA, présentée dans le chapitre précédent, respecte bien la suggestion proposée par la théorie de l'approximation [7] laquelle consiste en l'utilisation d'un ensemble de fonctions élémentaires adaptées à la fonction elle-même pour la décomposer, l'analyser et la représenter [11, 18]. Pour cette raison, dans ce chapitre, on va :

- Introduire quelques notions sur l'opérateur de Schrödinger semi-classique de dimension n .
- Généraliser la SCSA, en dimension n , pour pouvoir l'utiliser pour des fonctions multidimensionnelles.
- Prouver la convergence de cette nouvelle formule en nD en utilisant des résultats de l'analyse semi-classique de l'opérateur de Schrödinger qui existent et d'autres qu'on montre.
- Citer quelques propriétés, très utiles, du comportement du spectre discret de l'opérateur de Schrödinger semi-classique en fonction de h .

2 Définition de la SCSA en dimension n

Soit f_n une fonction réelle vérifiant les conditions suivantes :

$$f_n(\mathbf{x}) \geq 0, \quad f_n \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_n), \quad (2.1)$$

où $\Omega_n = \prod_{i=1}^n]a_i, b_i[$ un ouvert borné de \mathbb{R}^n et $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, alors l'opérateur de Schrödinger semi-classique de dimension n , noté par $\mathcal{H}_{n,h}(f_n)$, est défini sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ par :

$$\mathcal{H}_{n,h}(f_n) = -h^2 \Delta - f_n, \quad \mathbf{D}(\mathcal{H}_{n,h}(f_n)) = \mathbf{H}^2(\mathbb{R}^n), \quad (2.2)$$

où $\mathbf{H}^2(\mathbb{R}^n)$ est l'espace de Sobolev d'ordre 2, Δ est le Laplacien en dimension n et $h \in \mathbb{R}_+^*$ est le paramètre semi-classique.

Il est à noter que sous les conditions (2.1) et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_-$, il existe un nombre K_h^λ fini et non nul [4, 17] de valeurs propres négatives $\mu_{k,h}$ inférieures à λ de l'opérateur $\mathcal{H}_{n,h}(f_n)$ avec $\mu_{1,h} < \mu_{2,h} < \dots < \mu_{K_h^\lambda,h} < \lambda$. Soient $\psi_{k,h}$ les fonctions propres L^2 -normalisées associées à $\mu_{k,h}$ avec $k = 1, \dots, K_h^\lambda$.

Nous définissons la SCSA en dimension n par :

Définition 2.1 Soient f_n une fonction vérifiant les hypothèses (2.1), $\lambda \leq 0$ et h un paramètre semi-classique positif. Alors l'approximation par SCSA est définie par : $\forall \mathbf{x} \in \Lambda_n$

$$f_{n,h,\gamma,\lambda}(\mathbf{x}) = -\lambda + \left(\frac{h^n}{L_{n,\gamma}^{cl}} \sum_{\mu_{k,h} < \lambda} (\lambda - \mu_{k,h})^\gamma \psi_{k,h}^2(\mathbf{x}) \right)^{\frac{2}{2\gamma+n}}, \quad (2.3)$$

où $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$ et $\Lambda_n \subset \Omega_n$ est un compact. $L_{n,\gamma}^{cl}$ est la constante universelle semi-classique donnée par :

$$L_{n,\gamma}^{cl} = \frac{1}{2^n \sqrt[n]{\pi}} \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma + \frac{n}{2} + 1)}, \quad (2.4)$$

et Γ représente la fonction Gamma standard.

Par ailleurs, $\mu_{k,h}$ sont les valeurs propres négatives de $\mathcal{H}_{n,h}(f_n)$ avec $\mu_{1,h} < \dots < \mu_{K_h^\lambda,h} < \lambda$ et $\psi_{k,h}$ sont les fonctions propres L^2 -normalisées associées tel que :

$$\mathcal{H}_{n,h}(f_n) \psi_{k,h} = \mu_{k,h} \psi_{k,h}, \quad k = 1, \dots, K_h^\lambda, \quad (2.5)$$

où K_h^λ représente le nombre des valeurs propres négatives inférieures à λ .

La formule (2.3) dépend de trois paramètres λ , γ et h mais seul le paramètre semi-classique h influe sur le nombre des valeurs propres négatives.

Dans la section qui suit, nous montrons que ce paramètre joue un rôle crucial dans cette approche. En effet, lorsque le paramètre semi-classique h tend vers 0, la fonction estimée converge vers la fonction originale.

3 Étude de la convergence lorsque h tend vers 0

La formule de la SCSA dépend de trois paramètres h , γ et λ . Comme il a été décrit précédemment dans le premier chapitre et aussi montré dans [11] seul le paramètre semi-classique h joue un rôle important. En effet plus h diminue, plus l'extraction des valeurs propres négatives $\mu_{k,h}$ de la fonction f_n par rapport à \mathbf{x} est meilleure, d'où la convergence de la fonction estimée $f_{n,h,\gamma,\lambda}$ vers la fonction originale f_n .

Avant de prouver cette convergence, on présente quelques résultats lesquels nous ont permis de montrer la convergence de cette méthode lorsque le paramètre semi-classique h tend vers 0.

Le premier résultat décrit la moyenne de Riesz liée à la conjoncture de Lieb-Thirring proposé par Helffer et Robert dans [12].

Théorème 2.1 [12] Soit f_n une fonction à valeurs réelles appartenant à $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, avec

$$-\infty < \inf(-f_n) < \liminf_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow +\infty} (-f_n). \quad (2.6)$$

Soit $\lambda \in]\inf(-f_n), \liminf_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow +\infty} (-f_n)[$ et supposons que λ n'est pas une valeur critique pour $(-f_n)$ et h le paramètre semi-classique. Notons par :

$$S_\gamma(h, \lambda) = \sum_{\mu_{k,h} \leq \lambda} (\lambda - \mu_{k,h})^\gamma, \quad \gamma > 0, \quad (2.7)$$

la moyenne de Riesz des valeurs propres négatives $\mu_{k,h}$ décroissantes et inférieures à λ de l'opérateur de Schrödinger $\mathcal{H}_{n,h}(f_n)$. Alors, pour tout $\gamma > 0$, on a :

$$S_\gamma(h, \lambda) = \frac{1}{h^n} \left(L_{n,\gamma}^{cl} \int_{\mathbb{R}^n} (\lambda + f_n(\mathbf{x}))_+^{\frac{2\gamma+n}{2}} d\mathbf{x} + \mathcal{O}(h^{n+\gamma}) \right), \quad h \rightarrow 0, \quad (2.8)$$

où, $(\cdot)_+$ est la partie positive et est donnée par :

$$(\alpha)_+^Y = \begin{cases} \alpha^Y & \text{si } \alpha \geq 0, \\ 0 & \text{si } \alpha < 0, \end{cases} \quad (2.9)$$

et $L_{n,Y}^{cl}$ est la constante universelle semi-classique donnée par la formule (2.4).

Le théorème suivant est une généralisation en dimension n du théorème 4.1 proposé dans [11] lequel est une extension du théorème de Karadzhov sur les fonctions spectrales [16].

Théorème 2.2 Soit f_n une fonction à valeur réelle positive appartenant à $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Soit e_h^Y , la fonction spectrale définie par : $\forall (\mathbf{x}, \mathbf{x}') \in \mathbb{R}^{n \times n}$,

$$e_h^Y(\lambda, \mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sum_{\mu_{k,h} \leq \lambda} (\lambda - \mu_{k,h})^Y \psi_{k,h}(\mathbf{x}) \psi_{k,h}(\mathbf{x}'), \quad (2.10)$$

lorsque $h \rightarrow 0$. $\mu_{k,h}$ et $\psi_{k,h}$ sont les valeurs propres négatives rangées par ordre décroissant et inférieur à λ et les fonctions propres L^2 -normalisées associées de l'opérateur $\mathcal{H}_{n,h}(f_n)$ respectivement.

Alors, pour tout couple (Λ_n, λ) tel que $\Lambda_n \subset \Omega_n$ est un compact, et

$$\begin{cases} \lambda < \inf(-f_n(a_i), -f_n(b_i)), & i = 1, \dots, n \\ f_n(\Lambda_n) \subset]-\lambda, +\infty[, \\ \lambda \text{ n'est pas une valeur critique de } -f_n, \end{cases} \quad (2.11)$$

on a : $\forall \mathbf{x} \in \Lambda_n$,

$$e_h^Y(\lambda, \mathbf{x}, \mathbf{x}) = (2\pi)^{-n} (\lambda + f_n(\mathbf{x}))_+^{\frac{n+2Y}{2}} c_Y h^{-n} + \mathcal{O}(h^Y), \quad h \rightarrow 0, \quad (2.12)$$

uniformément sur Λ_n , où,

$$c_Y = \int_{\Lambda_n} \left(1 - \sum_{i=1}^n \eta_i^2\right)_+^Y d\eta_1 d\eta_2 \cdots d\eta_n,$$

et $(\cdot)_+$ est la partie positive donnée par la formule (2.9).

Preuve. (Théorème 2.2)

Pour démontrer ce théorème on se réfère à la preuve du théorème 3.2 établie par Helffer et Robert dans [12].

Le résultat final est obtenu en sommant deux cas, les quels sont près de λ et loin de λ .

Étape 1. On considère la fonction χ avec $\text{supp} \chi \subset]-\infty, 0[$ et soit $Y_{h,\chi}^Y$ une fonction définie par :

$$Y_{h,\chi}^Y(\lambda, \mathbf{x}, \mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{K_h^\lambda} \chi(\mu_{k,h} - \lambda) |\lambda - \mu_{k,h}|^Y \psi_{k,h}^2(\mathbf{x}). \quad (2.13)$$

Pour tout couple (Λ_n, λ) vérifiant les conditions (2.11), on a :

$$\begin{aligned} Y_{h,\chi}^Y(\lambda, \mathbf{x}, \mathbf{x}) &= (2\pi h)^{-n} \int_{\Lambda_n} \chi \left(\lambda - \sum_{i=1}^n \xi_i^2 + f_n(\mathbf{x}) \right) \times \\ &\quad \left(|\lambda + f_n(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^n \xi_i^2|^Y \right) d\xi_1 d\xi_1 \cdots d\xi_n + \mathcal{O}(h^Y), \quad h \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Étape 2. Pour ce cas, soit $Z_{h,\chi}^Y$ une fonction définie par :

$$Z_{h,\chi}^Y(\lambda, \mathbf{x}, \mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{K_h^\lambda} (1 - \chi(\mu_{k,h} - \lambda)) |\lambda - \mu_{k,h}|^Y \Psi_{k,h}^2(\mathbf{x}). \quad (2.15)$$

Pour tout couple (Λ_n, λ) satisfaisant les conditions (2.11), nous avons :

$$Z_{h,\chi}^Y(\lambda, \mathbf{x}, \mathbf{x}) = (2\pi h)^{-n} \int_{\Lambda_n} \left(1 - \chi \left(\lambda - \sum_{i=1}^n \xi_i^2 + f_n(\mathbf{x}) \right) \right) \times \\ \left(\left| \lambda + f_n(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \right|^Y \right) d\xi_1 d\xi_2 \cdots d\xi_n + \mathcal{O}(h^Y), \quad h \rightarrow 0 \quad (2.16)$$

On revient, maintenant au cas général, pour tout (Λ_n, λ) satisfaisant les conditions (2.11), on a : $\forall \mathbf{x} \in \Lambda_n$,

$$Y_{h,\chi}^Y(\lambda, \mathbf{x}, \mathbf{x}) + Z_{h,\chi}^Y(\lambda, \mathbf{x}, \mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{K_h^\lambda} |\lambda - \mu_{k,h}|^Y \Psi_{k,h}^2(\mathbf{x}) \\ = e_h^\lambda(\lambda, \mathbf{x}, \mathbf{x}), \quad (2.17)$$

d'une part. D'autre part, on a : $\forall \mathbf{x} \in \Lambda_n$,

$$Y_{h,\chi}^Y(\lambda, \mathbf{x}, \mathbf{x}) + Z_{h,\chi}^Y(\lambda, \mathbf{x}, \mathbf{x}) = (2\pi h)^{-n} \int_{\Lambda_n} \left| \lambda + f_n(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \right|^Y d\xi_1 d\xi_2 \cdots d\xi_n + \mathcal{O}(h^Y), \quad h \rightarrow 0.$$

Le changement de variables $\xi_i = \eta_i (\lambda + f_n(\mathbf{x}))_+^{\frac{1}{2}}$ avec $i = 1, \dots, n$, donne : $\forall \mathbf{x} \in \Lambda_n$,

$$h^n \sum_{k=1}^{K_h^\lambda} (\lambda - \mu_{k,h})_+^Y \Psi_{k,h}^2(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-n} (\lambda + f_n(\mathbf{x}))_+^{\frac{n+2Y}{2}} c_Y + \mathcal{O}(h^{Y+n}), \quad h \rightarrow 0, \quad (2.18)$$

uniformément sur Λ_n , où

$$c_Y = \int_{\Lambda_n} \left(1 - \sum_{i=1}^n \eta_i^2 \right)_+^Y d\eta_1 d\eta_2 \cdots d\eta_n,$$

et $(\cdot)_+$ représente la partie positive et est donnée par la formule (2.9).

Ainsi, $\forall \mathbf{x} \in \Lambda_n$,

$$e_h^Y(\gamma, \mathbf{x}, \mathbf{x}) = (2\pi)^{-n} (\lambda + f_n(\mathbf{x}))_+^{\frac{n+2Y}{2}} c_Y h^{-n} + \mathcal{O}(h^Y), \quad h \rightarrow 0, \quad (2.19)$$

uniformément sur Λ_n . ■

La convergence de la SCSA en dimension n est donnée par le théorème suivant :

Théorème 2.3 Soient $f_n \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_n)$ une fonction réelle à valeurs positives et h le paramètre semi-classique. Alors, pour tout couple (Λ_n, λ) satisfaisant les conditions (2.11) et pour tout $\mathbf{x} \in \Lambda_n$, on a :

$$f_n(\mathbf{x}) = -\lambda + \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{h^n}{L_{n,\gamma}^{cl}} \sum_{\mu_{k,h} < \lambda} (\lambda - \mu_{k,h})^Y \Psi_{k,h}^2(\mathbf{x}) \right)^{\frac{2}{2Y+n}}, \quad (2.20)$$

où $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$ et $L_{n,\gamma}^{cl}$ est la constante universelle semi-classique donnée par la formule (2.4).

Par ailleurs, $\mu_{k,h}$ sont les valeurs propres négatives rangées par ordre décroissant de $\mathcal{H}_{n,h}(f_n)$ et $\Psi_{k,h}$ sont les fonctions propres L^2 -normalisées associées tel que :

$$\mathcal{H}_{n,h}(f_n) \Psi_{k,h} = \mu_{k,h} \Psi_{k,h}, \quad k = 1 \cdots K_h^\lambda, \quad (2.21)$$

et K_h^λ est le nombre des valeurs propres négatives inférieures à λ .

Preuve. (Théorème 2.3)

Pour prouver la convergence de la formule SCSSA dans le cas de dimension n , une extension appropriée du théorème de Karadzhov [16] sur les fonctions spectrales (Théorème 2.2) ainsi que la moyenne de Riesz liée à la conjoncture de Lieb-Thirring proposée par Helffer and Robert dans [12] (Théorème 2.1) sont utilisées.

Premièrement, en combinant les formules (2.10) et (2.12), on trouve : $\forall \mathbf{x} \in \Lambda_n$

$$\sum_{\mu_{k,h} \leq \lambda} (\lambda - \mu_{k,h})_+^{\gamma} \Psi_{k,h}^2(\mathbf{x}) = (2\pi h)^{-n} (\lambda + f_n(\mathbf{x}))_+^{\frac{n+2\gamma}{2}} c_{\gamma} + \mathcal{O}(h^{\gamma}), \quad (2.22)$$

où $h \rightarrow 0$ et $(\cdot)_+$ est la partie positive, et

$$c_{\gamma} = \int_{\Lambda_n} \left(1 - \sum_{i=1}^n \eta_i^2 \right)_+^{\gamma} d\eta_1 d\eta_2 \cdots d\eta_n. \quad (2.23)$$

Maintenant, essayons de trouver une expression plus simple de c_{γ} . En intégrant par partie la partie droite de la formule (2.22) pour \mathbf{x} , on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Lambda_n} \left(\sum_{\mu_{k,h} \leq \lambda} (\lambda - \mu_{k,h})_+^{\gamma} \Psi_{k,h}^2(\mathbf{x}) \right) d\mathbf{x} &= \sum_{\mu_{k,h} \leq \lambda} (\lambda - \mu_{k,h})_+^{\gamma}, \quad h \rightarrow 0, \\ &= S_{\gamma}(h, \lambda), \quad h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Lambda_n} h^{-n} (\lambda + f_n(\mathbf{x}))_+^{\frac{n+2\gamma}{2}} (2\pi)^{-n} c_{\gamma} d\mathbf{x} + \mathcal{O}(h^{\gamma}) &= \int_{\Lambda_n} \sum_{\mu_{k,h} \leq \lambda} (\lambda - \mu_{k,h})_+^{\gamma} \Psi_{k,h}^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad h \rightarrow 0, \\ &= S_{\gamma}(h, \lambda), \quad h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Donc, pour $\gamma > 0$ et en utilisant le théorème (2.1), on obtient : $h \rightarrow 0$

$$\int_{\Lambda_n} h^{-n} (\lambda + f_n(\mathbf{x}))_+^{\frac{n+2\gamma}{2}} (2\pi)^{-n} c_{\gamma} d\mathbf{x} + \mathcal{O}(h^{\gamma}) = \frac{L_{n,\gamma}^{cl}}{h^n} \int_{\Lambda_n} (\lambda + f_n(\mathbf{x}))_+^{\frac{n+2\gamma}{2}} d\mathbf{x} + \mathcal{O}(h^{\gamma}).$$

Ce qui implique :

$$\begin{aligned} (2\pi)^{-n} c_{\gamma} &= L_{n,\gamma}^{cl}, \\ &= \frac{1}{2^n \sqrt[n]{\pi}} \frac{\Gamma(\gamma + 1)}{\Gamma(\gamma + \frac{n}{2} + 1)}. \end{aligned}$$

Puisque la fonction f_n est positif, on en déduit : $\forall \mathbf{x} \in \Lambda_n$

$$f_n(\mathbf{x}) = -\lambda + \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{h^n}{L_{n,\gamma}^{cl}} \sum_{\mu_{k=1}}^{K_h^{\lambda}} (\lambda - \mu_{k,h})_+^{\gamma} \Psi_{k,h}^2(\mathbf{x}) \right)^{\frac{2}{n+2\gamma}}.$$

■

4 Comportement du spectre discret en fonction de h

Quelques propriétés du spectre discret de l'opérateur de Schrödinger semi-classique $\mathcal{H}_{n,h}$ associé à la fonction f_n seront présentées dans cette section. Le spectre discret permet d'obtenir une bonne estimation de la fonction f_n . Notre analyse de ce dernier se base essentiellement sur les théorèmes 2.1 et 2.2.

Une propriété du nombre K_h^λ des valeurs propres négatives et inférieures à λ de l'opérateur $\mathcal{H}_{n,h}(f_n)$ est énoncée dans la proposition suivante :

Proposition 2.1 *Soit f_n une fonction réelle à valeurs positives vérifiant les hypothèses du théorème (2.3). Alors, le nombre K_h^λ des valeurs propres négatives inférieures à λ de l'opérateur $\mathcal{H}_{n,h}(f_n)$ est une fonction décroissante de h .*

Preuve. (Proposition 2.1)

Pour montrer la décroissance du nombre des valeurs propres négatives K_h^λ en fonction du paramètre semi-classique h , on utilise le lemme suivant :

Lemme 2.1 [26] *Pour $\lambda \leq 0$, soit K_h^λ le nombre de valeurs propres négatives de $\mathcal{H}_{n,h}(f_n)$ inférieures à λ . Soient W_1 et W_2 deux fonctions associées à l'opérateur de Schrödinger semi-classique (2.2) tel que $W_1 \leq W_2$. Alors :*

$$K_h^\lambda(W_2) \leq K_h^\lambda(W_1), \quad \forall \lambda \leq 0. \quad (2.24)$$

On prend :

$$W_1 = h_1 f_n, \quad W_2 = h_2 f_n \quad \text{avec} \quad h_1 \leq h_2. \quad (2.25)$$

Alors, on a :

$$\begin{aligned} W_1 \leq W_2 &\Rightarrow K_h^\lambda(W_2) \leq K_h^\lambda(W_1), \\ &\Rightarrow K_h^\lambda(h_2 f_n) \leq K_h^\lambda(h_1 f_n). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Or, on a $h_1 \leq h_2$ et $K_h^\lambda(h_j f_n) = K_{h+h_j}^\lambda$ pour $j = 1, 2$, ceci achève la démonstration de la première propriété du nombre des valeurs propres négatives. ■

La proposition suivante montre la relation qui existe entre les valeurs propres négatives $\mu_{k,h}$ pour $k = 1, \dots, K_h^\lambda$ et la fonction f_n .

Proposition 2.2 *Soient f_n une fonction à valeurs réelles vérifiant les hypothèses (2.1) et h le paramètre semi-classique. Soient $\mu_{k,h}$ avec $k = 1, \dots, K_h^\lambda$ les valeurs propres négatives de l'opérateur $\mathcal{H}_{n,h}(f_n)$. Supposons, de plus, que $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$:*

$$0 \leq f_n(\mathbf{x}) \leq \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f_n(\mathbf{x}). \quad (2.27)$$

Alors,

$$-\mu_{k,h} \leq \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f_n(\mathbf{x}). \quad (2.28)$$

pour $k = 1, \dots, K_h^\lambda$.

Preuve. (Proposition 2.2)

Soit le problème spectral de l'opérateur de Schrödinger semi-classique de dimension n :

$$-h^2 \Delta \psi(\mathbf{x}) - f_n(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) = \mu \psi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad (2.29)$$

Soient $\mu_{k,h}$ une valeur propre négative de l'opérateur $\mathcal{H}_{n,h}(f_n)$ et $\psi_{k,h}$ la fonction propre L^2 -normalisée associée :

$$-h^2 \Delta \psi_{k,h}(\mathbf{x}) - f_n(\mathbf{x}) \psi_{k,h}(\mathbf{x}) = \mu_{k,h} \psi_{k,h}(\mathbf{x}), \quad k = 1, \dots, K_h^\lambda. \quad (2.30)$$

Multiplions l'équation précédente par $\psi_{k,h}(\mathbf{x})$

$$-h^2 \Delta \psi_{k,h}^2(\mathbf{x}) - f_n(\mathbf{x}) \psi_{k,h}^2(\mathbf{x}) = \mu_{k,h} \psi_{k,h}^2(\mathbf{x}), \quad k = 1, \dots, K_h^\lambda. \quad (2.31)$$

En intégrant la formule précédente par rapport à \mathbf{x} sur Λ_n et sachant que les fonctions propres $\psi_{k,h}(\mathbf{x})$ sont L^2 -normalisées, on obtient :

$$-h^2 \int_{\Lambda_n} \Delta \psi_{k,h}^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\Lambda_n} f_n(\mathbf{x}) \psi_{k,h}^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \mu_{k,h}, \quad k = 1, \dots, K_h^\lambda. \quad (2.32)$$

En intégrant par partie le terme $\int_{\Lambda_n} \Delta \psi_{k,h}^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ de l'équation (2.32), on obtient :

$$h^2 \sum_{i=1}^n \int_{\Lambda_n} \left(\frac{\partial \psi_{k,h}(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right)^2 d\mathbf{x} - \int_{\Lambda_n} \left(f_n(\mathbf{x}) \psi_{k,h}^2(\mathbf{x}) \right) d\mathbf{x} = \mu_{k,h}. \quad (2.33)$$

Ce qui implique que :

$$h^2 \sum_{i=1}^n \int_{\Lambda_n} \left(\frac{\partial \psi_{k,h}(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right)^2 d\mathbf{x} - \mu_{k,h} = \int_{\Lambda_n} \left(f_n(\mathbf{x}) \psi_{k,h}^2(\mathbf{x}) \right) d\mathbf{x}. \quad (2.34)$$

Comme tous les termes de la formule (2.34) sont positifs, on obtient, donc :

$$-\mu_{k,h} \leq \int_{\Lambda_n} \left(f_n(\mathbf{x}) \psi_{k,h}^2(\mathbf{x}) \right) d\mathbf{x}, \quad (2.35)$$

ce qui achève la démonstration en utilisant (2.27). ■

La proposition suivante montre la convergence des valeurs propres négatives $\mu_{k,h}$ inférieures à λ lorsque le paramètre semi-classique h tend vers 0.

Proposition 2.3 *Pour toute fonction f_n vérifiant les condition du théorème 2.1, on a :*

$$\lim_{h \rightarrow 0} h^n \sum_{\mu_{k,h} < \lambda} (\lambda - \mu_{k,h})^\gamma = L_{n,\gamma}^{cl} \int_{\Lambda_n} (\lambda + f_n(\mathbf{x}))^{\frac{2\gamma+n}{2}} d\mathbf{x}. \quad (2.36)$$

Si de plus, f_n vérifie les conditions du théorème 2.3, alors,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\Lambda_n} (\lambda + f_{n,h,\gamma,\lambda}(\mathbf{x}))^{\frac{2\gamma+n}{2}} d\mathbf{x} = \int_{\Lambda_n} (\lambda + f_n(\mathbf{x}))^{\frac{2\gamma+n}{2}} d\mathbf{x}. \quad (2.37)$$

Preuve. (Proposition 2.3)

1. La formule (2.36) se déduit aisément du théorème 2.1 .

2. Par définition de la SCSA en dimension n , on a : $\forall \mathbf{x} \in \Lambda_n$

$$\begin{aligned} \int_{\Lambda_n} (\lambda + f_{n,h,\gamma,\lambda}(\mathbf{x}))^{\frac{n+2\gamma}{2}} d\mathbf{x} &= \int_{\Lambda_n} \left(\frac{h^n}{L_{n,\gamma}^{cl}} \sum_{k=1}^{K_h^\lambda} (\lambda - \mu_{k,h})^\gamma \Psi_{k,h}^2(\mathbf{x}) \right) d\mathbf{x}, \\ &= \frac{h^n}{L_{n,\gamma}^{cl}} \sum_{k=1}^{K_h^\lambda} (\lambda - \mu_{k,h})^\gamma. \end{aligned} \tag{2.38}$$

En utilisant la formule (2.36), on obtient (2.37).

■

5 Conclusion

Le présent chapitre a été consacré à la présentation de la formule de décomposition SCSA en dimension n . On a commencé par introduire quelques notions sur l'opérateur de Schrödinger semi-classique en dimension n ainsi que sa résolution spectrale. Ensuite la formule de la SCSA en dimension n a été présentée. La convergence de cette nouvelle méthode, lorsque le paramètre demi-classique h tend vers 0 a été établie grâce aux résultats de l'analyse semi-classique. En dernier, quelques propriétés du spectre discret de l'opérateur de Schrödinger en fonction h ont été exposés.

Chapitre 3

SCSA en dimension n et décomposition des fonctions

1 Introduction

Dans ce chapitre, on présente le schéma numérique lequel permet la décomposition et la représentation d'une fonction de dimension n par la SCSA. On teste l'efficacité de cette méthode sur de différents exemples et on valide quelques propriétés du spectre discret σ_d .

2 Discrétisation de la SCSA en dimension n

Le calcul essentiel qui intervient dans la SCSA est la résolution spectrale de l'opérateur de Schrödinger semi-classique de dimension n :

$$-h^2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \psi_{k,h}(\mathbf{x}) - f_1(\mathbf{x}) \psi_{k,h}(\mathbf{x}) = \mu_{k,h} \psi_{k,h}(\mathbf{x}), \quad k = 1, \dots, K_h. \quad (3.1)$$

Pour que ceci soit possible numériquement, on passe par plusieurs étapes qu'on résume ci-dessous. Pour plus de détails on vous recommande de consulter [18].

Étape 1 : Discrétisation de l'opérateur de Schrödinger

Pour cette première étape, il existe de nombreuses méthodes de discrétisation des équations différentielles et aux dérivées partielles, ces dernières peuvent appartenir à l'un des trois groupes suivants [1, 9, 29] :

- Méthodes des différences finies.
- Méthodes des éléments finis.
- Méthodes pseudo-spectrales.

La version discrétisée de l'équation de Schrödinger semi-classique :

$$\mathcal{H}_{n,h}(f_n(\mathbf{x})) = -h^2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f_n(\mathbf{x}), \quad (3.2)$$

est, alors, donnée par :

$$H_{n,h}(I_n) = -h^2 D_n - \text{diag}(I_n), \quad (3.3)$$

où la matrice $\text{diag}(I_n)$ est la matrice diagonale dont les éléments sont les f_n et D_n est la matrice de différenciation du second ordre.

Étape 2 : Valeurs propres et fonctions propres

La discrétisation de l'opérateur de Schrödinger (3.2) nous ramène à un problème de valeurs propres de matrice (3.3) qu'on peut le résoudre par des méthodes de calcul direct. Pour la résolution de ce problème on a utilisé la commande `eig` de MATLAB.

Ainsi, dans ce cas,

- Les valeurs propres négatives sont notées $\mu_{k,h}$ avec $\mu_{1,h} < \dots < \mu_{K_h^\lambda,h} < \lambda$ où K_h^λ est le nombre des valeurs propres négatives inférieures à λ de l'opérateur $H_{n,h}(I_n)$.
- Les vecteurs propres associés l^2 -normalisés, par l'utilisation de la méthode de Simpson [25], sont notés par $\underline{\Psi}_{k,h} = [\underline{\psi}_{1,h}, \dots, \underline{\psi}_{K_h^\lambda,h}]^T$, elles vérifient :

$$\Delta \mathbf{x} \sum_{k=1}^{K_h^\lambda} \underline{\psi}_{k,h}^2 = 1 \iff \|\underline{\Psi}_{k,h}\|_2 = \frac{1}{\sqrt{\Delta \mathbf{x}}}, \text{ pour } k = 1, \dots, K_h^\lambda. \quad (3.4)$$

Ainsi, dans le cas discret la formule de la SCSA (2.3) s'écrit comme suit :

$$I_{n,h,\lambda,\gamma}[j] = -\lambda + \left(\frac{h^n}{L_{n,\gamma}^{cl}} \sum_{\mu_{k,h} < \lambda} (\lambda - \mu_{k,h})^\gamma \underline{\psi}_{k,h}^2 [j] \right)^{\frac{2}{2\gamma+n}}, \quad (3.5)$$

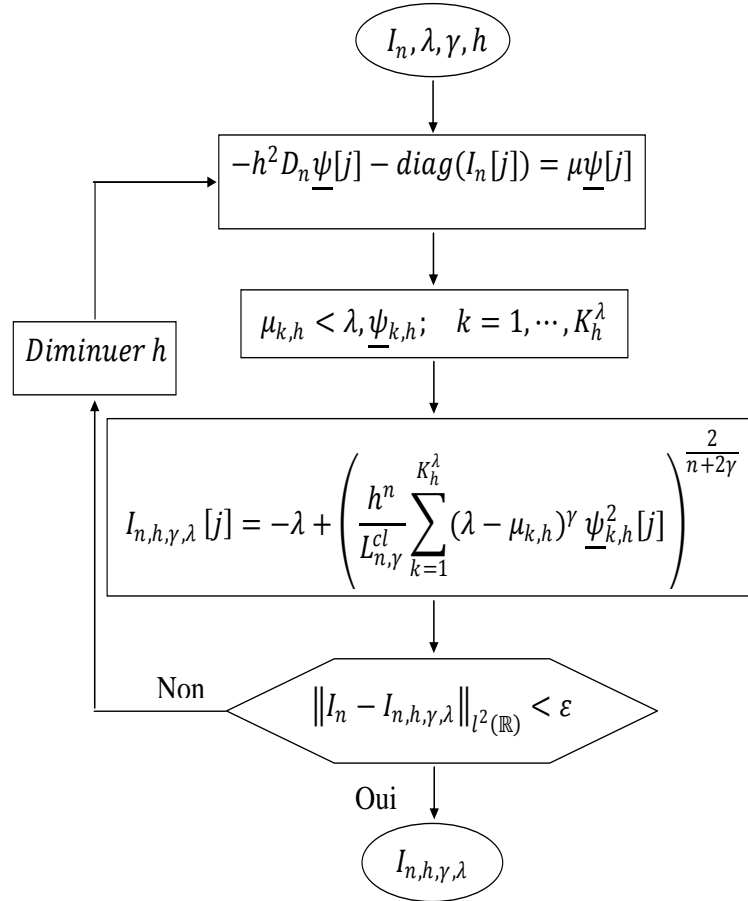
avec $j = (j_1, j_2, \dots, j_n)$ et $j_i = 1, \dots, M$.

Étape 3 : Calcul d'une valeur optimale du paramètre semi-classique h

La proposition 2.1 montre que le nombre K_h^λ des valeurs propres négatives est une fonction à valeurs dans \mathbb{N} décroissante en h . De plus, plus h diminue, et plus l'erreur d'approximation par la SCSA diminue. Néanmoins la diminution de h , devient très lourde à gérer numériquement et on constate en pratique de déterminer une valeur \hat{h} de h qui permet de réaliser une bonne précision avec un minimum de valeurs propres négatives K_h^λ . Pour déterminer \hat{h} , on propose de minimiser la fonctionnelle quadratique suivante qui n'est rien d'autre que l'erreur moyenne quadratique sur un intervalle $[h_1, h_2]$:

$$J(h) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M (I_n[j] - I_{n,h,\lambda,\gamma}[j])^2. \quad (3.6)$$

Ainsi, la figure 3.1 résume la procédure de reconstruction d'une fonction de dimension n par la SCSA.


 FIGURE 3.1 – Algorithme de reconstruction d’une fonction de dimension n par la SCSCA.

3 Application à des fonctions académiques

Dans cette section, on va présenter la décomposition et par la suite reconstruction de quelques fonctions académiques et cela pour différentes dimensions. Toutefois, une discussion sur les différents paramètres dont dépend la formule de la SCSCA (2.3) est présentée dans un premier lieu.

En effet, la formule de la SCSCA en nD (2.3) dépend de trois paramètres : h , λ et γ .

- Le paramètre λ apporte des informations sur la partie de la fonction f_n qui sera estimée, analysée et représentée [12]. Par souci de simplicité, on propose de prendre $\lambda = 0$.
- Le théorème 2.3 montre que seul le paramètre semi-classique h influe sur les valeurs propres et les fonctions propres associées puisque l’opérateur dépend de h . Aussi, il est bien connu que le nombre de valeurs propres négatives K_h^λ dépend du paramètre semi-classique h . Cependant, dans les tests numériques, on va choisir une valeur de h assez grande ($0 < h < 1$) pour avoir une bonne reconstruction avec un nombre réduit de valeurs propres négatives.
- Le paramètre γ peut améliorer l’approximation de la fonction pour un nombre donné de valeurs propres négatives [11]. Cela signifie que pour une valeur donnée de h (resp. K_h^λ), on peut améliorer la représentation de la fonction en changeant uniquement la valeur de γ .

3.1 En dimension 1

On considère l'oscillateur harmonique donné par :

$$f_1(x) = x^2 - 25, \quad (3.7)$$

avec $x \in [-5, 5]$ et un pas de $\delta x = 0.01$. Dans le cas discret, l'oscillateur harmonique devient :

$$I_1[j] = j^2 - 25, \quad j = 1, \dots, 1000. \quad (3.8)$$

Dans un premier temps, on choisit un intervalle de h , $h = [h_1, h_2] = [0.02, 0.4]$ pour montrer l'influence de ce paramètre sur le nombre des valeurs propres négatives K_h^0 et aussi sur la reconstruction de la fonction, ou d'une manière équivalente sur l'erreur moyenne quadratique (formule (3.6)).

La figure 3.2(a) illustre les variations de l'erreur moyenne quadratique $J(h)$ en fonction de h , tandis que la figure 3.2(b) montre la décroissance des valeurs propres négatives en fonction de h , comme indiqué dans la proposition 2.1.

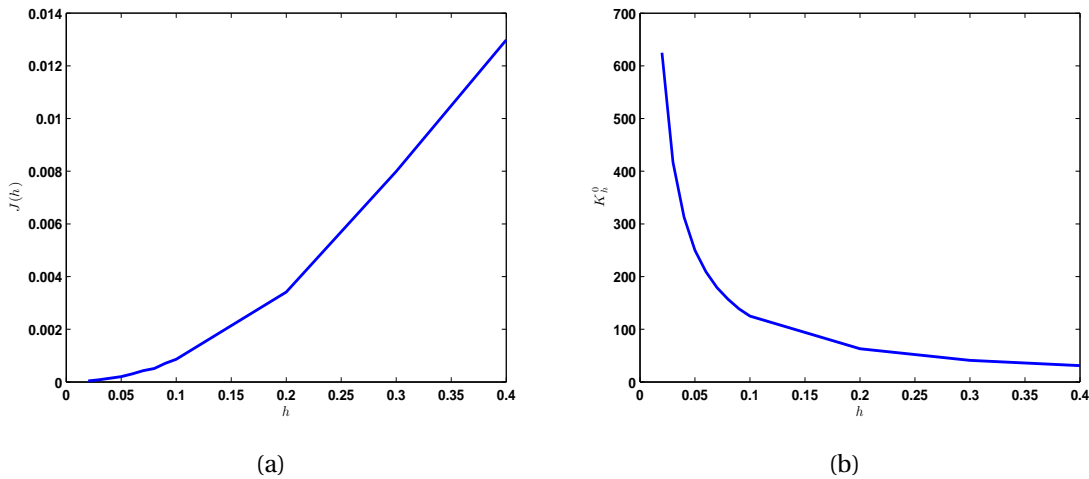


FIGURE 3.2 – (a). Variation de l'erreur moyenne quadratique en fonction de h ; (b). Variation du nombre des valeurs propres négatives K_h^0 en fonction de h .

La figure 3.3 représente les variations de quelques valeurs propres rangées par ordre croissant, de la matrice $-h^2 D_1 - \text{diag}(I_1)$ en fonction de h . On constate que ces valeurs propres, initialement positives, sont des fonctions décroissantes en h et qu'à chaque passage de K_h^0 à $K_h^0 + 1$, une valeur propre positive devient négative, à partir d'un certain rang de h , ce qui explique que pour un h très petit on obtient un K_h^0 très grand.

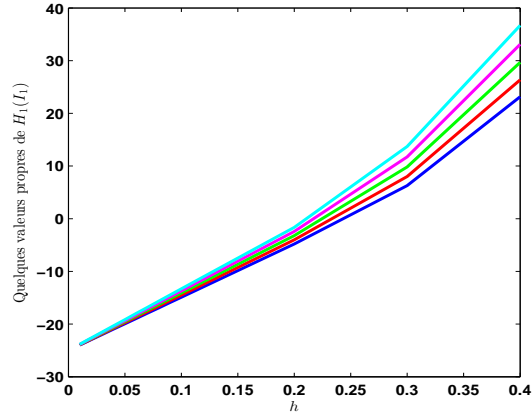


FIGURE 3.3 – Variation de quelques valeurs propres en fonction de h .

La figure 3.4(a) montre une reconstruction satisfaisante de la fonction f_1 , on a remarqué qu'à partir de $h = 0.2$, i. e. ; $K_h^0 = 45$ la reconstruction de l'oscillateur harmonique est satisfaisante comme le montre la figure 3.4(b).

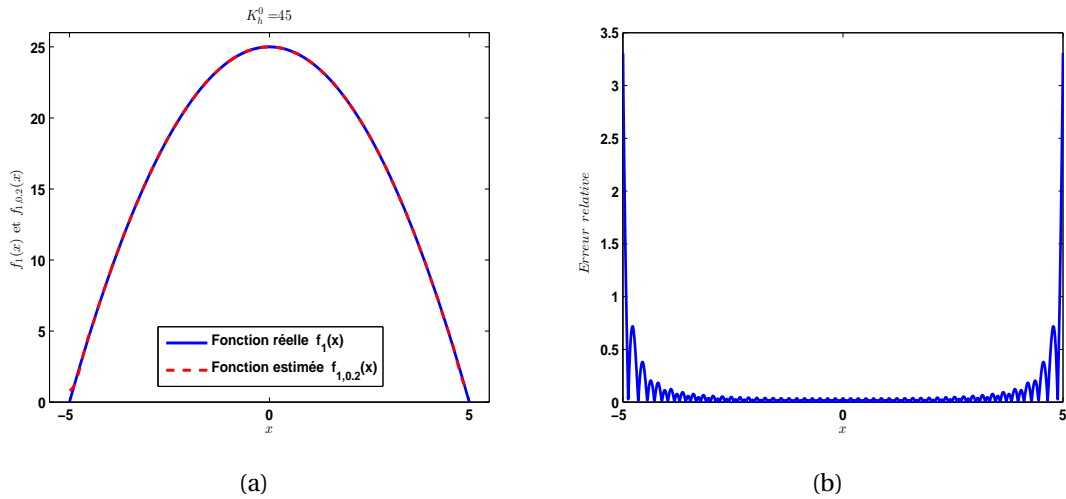


FIGURE 3.4 – (a). Reconstruction de la fonction $f_1(x) = x^2 - 25$ sur $[-5, 5]$ pour $h = 0.2$ ($K_h^0 = 45$) ; (b). Erreur relative correspondante.

La proposition 2.2, montre que sous les conditions (2.1), toutes les valeurs propres négatives $\mu_{k,h}$, $k = 1, \dots, K_h^\lambda$ de l'opérateur de Schrödinger $\mathcal{H}_1, h(f_1)$ associées à la fonction f_1 sont toutes comprises entre $(-\max f_1)$ et 0, c'est ce qu'on montre, dans la figure 3.5, pour l'oscillateur harmonique $f_1(x) = x^2 - 25$ sur $[-5, 5]$.

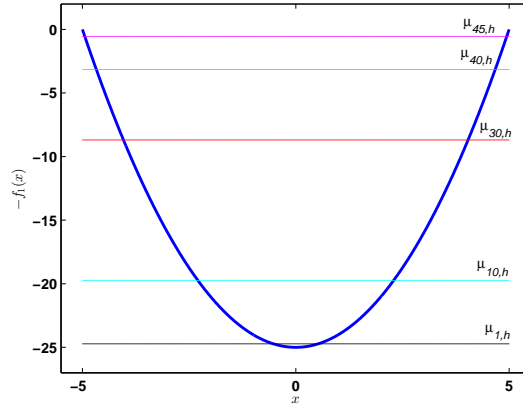


FIGURE 3.5 – Les valeurs propres négatives $\mu_{k,h}$, $k = 1, \dots, K_h^0$ de $H_1(f_1)$ sont toutes comprises entre $(-\max f_1)$ et 0.

3.2 En dimension 2

Soit l'oscillateur harmonique défini par :

$$f_2(x, y) = -4x^2 - 6y^2 + 28, \quad \text{sur } [-1, 1] \times [-2, 2]. \quad (3.9)$$

Dans un cas discret la fonction f_2 est donnée par I_2 comme suit :

$$I_2[i, j] = -4i^2 - 6j^2 + 28, \quad (3.10)$$

pour $i, j = 1, \dots, N$ avec $\delta x = 6.6 \times 10^{-3}$, $\delta y = 1.32 \times 10^{-2}$ où $-1 = x_1 < \dots < 1 = x_N$ et $-2 = y_1 < \dots < 2 = y_N$.

Dans ce cas, on désire décomposer la fonction sur $[-1, 1] \times [-2, 2]$, cela revient à prendre $\lambda = 0$. En se référant à [14], la valeur de γ est égale à 4. Ainsi, la figure 3.6(a) montre une reconstruction satisfaisante de la fonction f_2 pour $h = 0.13$. La valeur de h a été choisie de sorte que l'erreur relative soit acceptable comme le montre la figure 3.6(b).

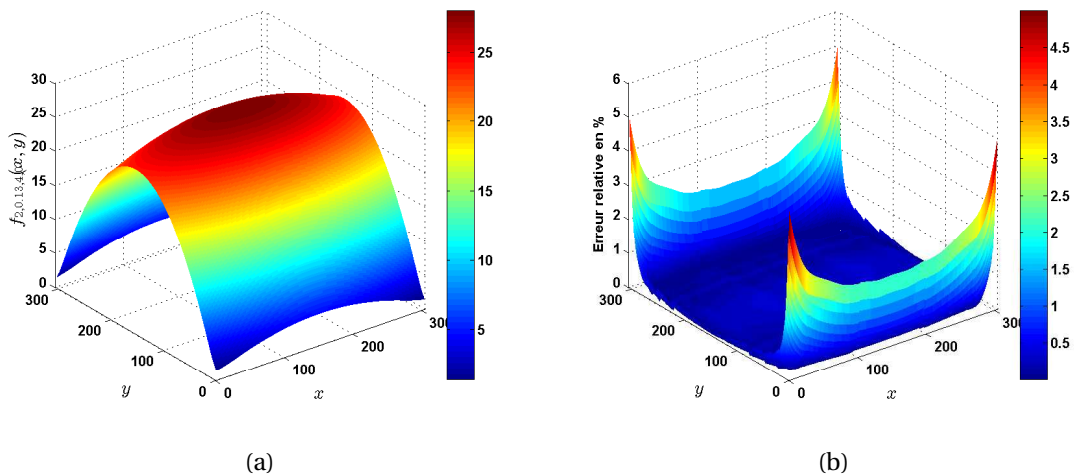


FIGURE 3.6 – (a). Reconstruction de la fonction $f_2(x)$ pour $h = 0.13$; (b). Erreur relative correspondante.

Les figures 3.7(a), 3.7(b) et 3.7(c) représentent l'allure du carré de la première, deuxième et dernière fonction propre L^2 -normalisée dans le cas où $h = 0.13$, $\gamma = 4$ et $\lambda = 0$. On remarque que la première fonction propre localise bien le plus grand pic de la fonction f_2 . La seconde fonction propre (Fig. 3.7(b)) fournit de l'information sur les deux grandes intensités qui suivent la première, et ainsi de suite. Les faibles intensités qui représentent aussi les petits détails de la fonction f_2 sont liés aux valeurs propres moins importantes, ces derniers sont associés aux dernières fonctions propres qui oscillent asymptotiquement comme le montre la figure 3.7(c).

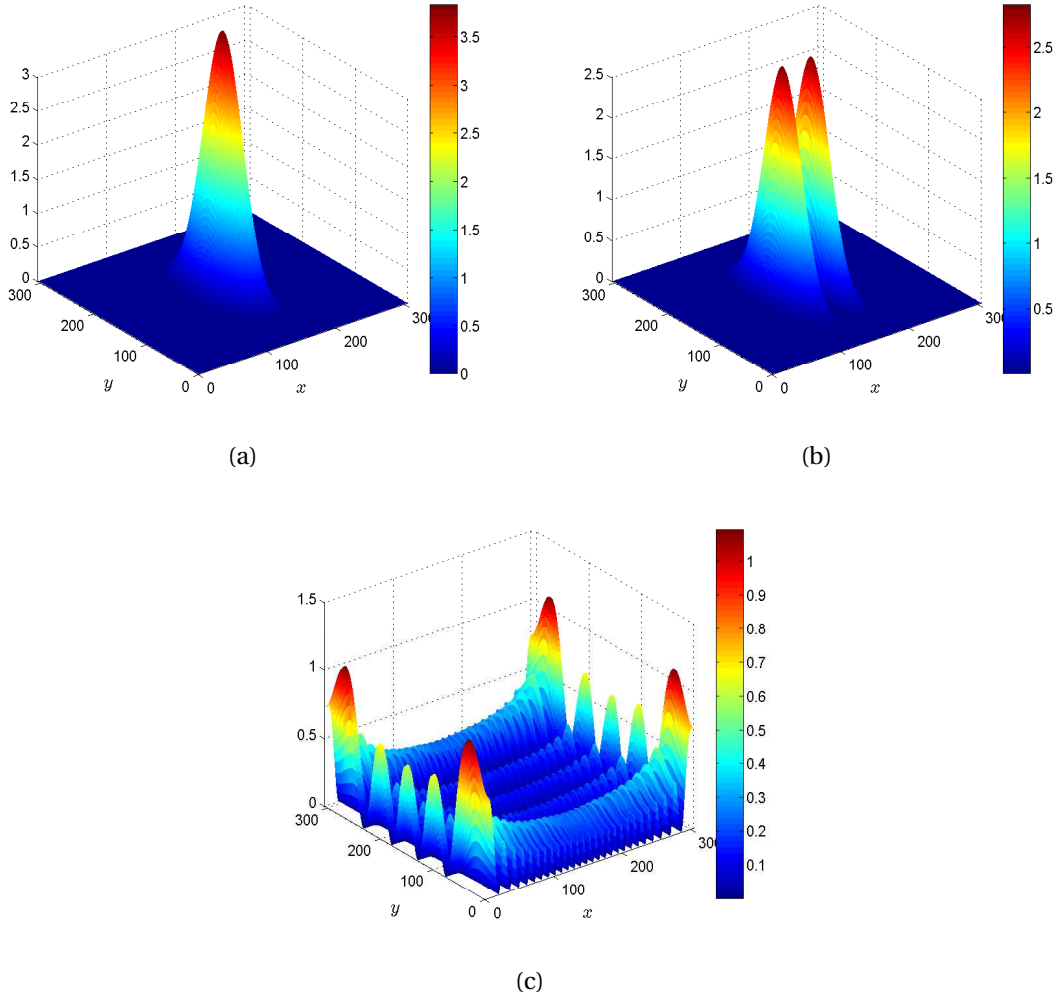


FIGURE 3.7 – Allure de la, (a). première fonction propre ; (b). deuxième fonction propre ; (c). dernière fonction propre ; L^2 -normalisée dans le cas où $h = 0.13$, $\gamma = 4$, et $\lambda = 0$.

3.3 En dimension 3

Soit l'oscillateur harmonique défini par :

$$f_3(x, y, z) = -2x^2 + 3y - z^2 + 6, \quad \text{sur } [-1, 1] \times [-2, 2] \times [-1, 1]. \quad (3.11)$$

Dans un cas discret la fonction f_3 est donnée par I_3 comme suit :

$$I_3[i, j, k] = -2i^2 + 3j - k^2 + 6, \quad (3.12)$$

pour $i, j, k = 1, \dots, N$ avec $\delta x = 0.18$, $\delta y = 0.36$ et $\delta z = 0.18$ où $-1 = x_1 < \dots < 1 = x_N$, $-2 = y_1 < \dots < 2 = y_N$ et $-1 = z_1 < \dots < 1 = z_N$.

Dans ce cas, la décomposition de la fonction f_3 est faite sur le domaine $[-1, 1] \times [-2, 2] \times [-1, 1]$, cela est équivalent à $\lambda = 0$.

En s'inspirant de l'idée du calcul de la variation de l'erreur moyenne quadratique (3.6) pour différent valeur de h et γ [14], on constate que la valeur optimal de γ est 9 et celle de h est 0.09.

La figure 3.8(a) représente la fonction originale. La fonction reconstruite pour $h = 0.09$, $\gamma = 9$ et $\lambda = 0$ est représentée par la figure 3.8(b). Tandis que la figure 3.8(c) montre les variations de l'erreur relative entre la fonction originale et son estimée .

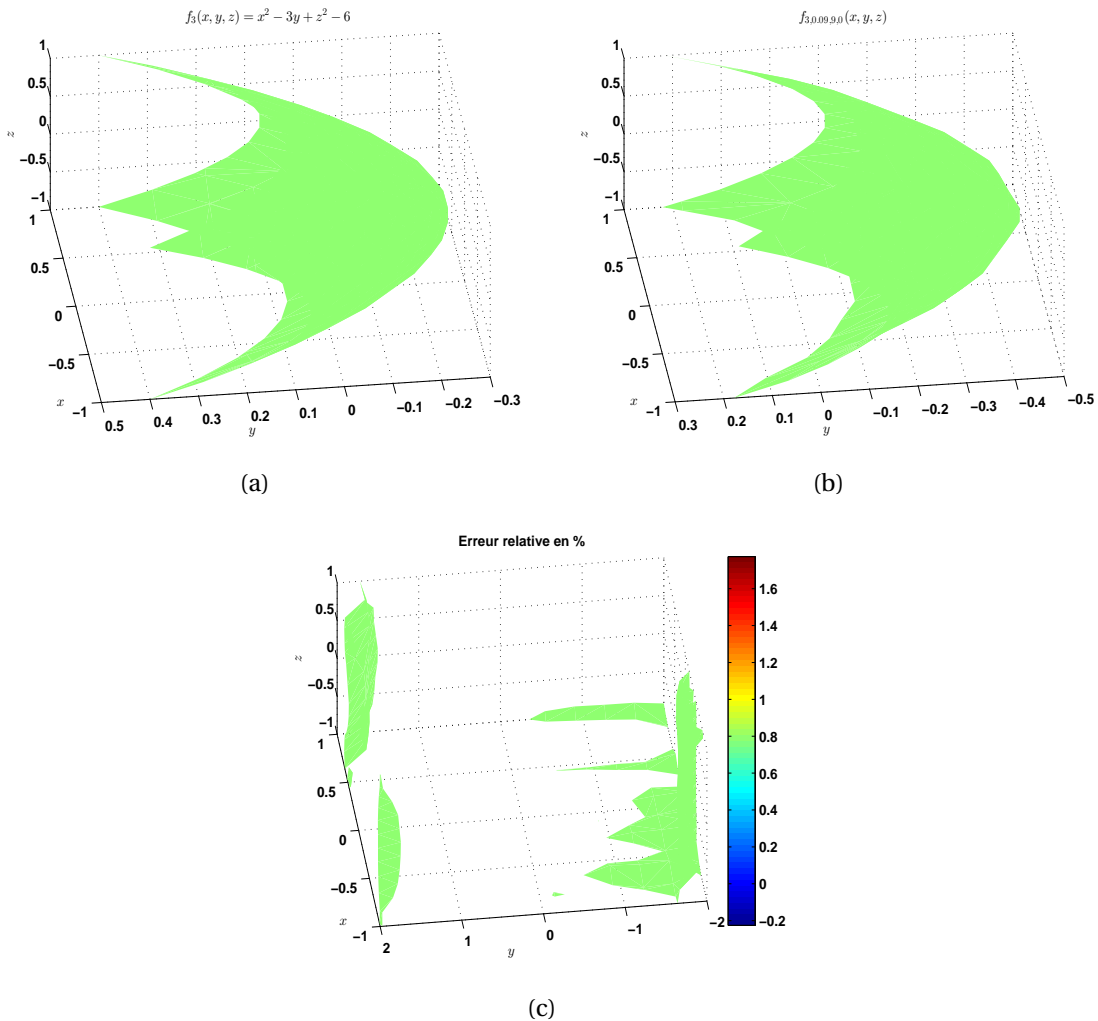


FIGURE 3.8 – (a) Fonction originale $f_3(x, y, z)$; (b). Reconstruction de la fonction $f_3(x, y, z)$ pour $h = 0.09$, $\gamma = 9$ et $\lambda = 0$; (c). Erreur relative correspondante.

4 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à la validation de la SCSA pour la représentation des fonctions et cela pour plusieurs dimensions. La convergence numérique ainsi les propriétés du spectre discret σ_d que ont été établie pour les différentes dimensions.

Conclusion

Une nouvelle méthode de décomposition des fonctions multidimensionnelles laquelle est une généralisation en dimension n , $n \in \mathbb{N}^*$, de l'approche *Semi-Classical Signal Analysis* (SCSA) a été présentée dans ce mémoire de Master.

Contrairement aux méthodes de décomposition existantes, l'approche par SCSA en dimension n , laquelle respecte bien non seulement la suggestion de la théorie mathématique de l'approximation mais aussi les conditions visées par la problématique, consiste à interpréter une fonction à décomposer f_n comme un potentiel de l'opérateur de Schrödinger semi-classique $\mathcal{H}_{n,h}$ (formule 2.2), ensuite à utiliser uniquement un nombre fini K_h^λ de ses données spectrales $\{\psi_{k,h}, \mu_{k,h}\}_{k=1}^{K_h^\lambda}$ lors de la décomposition de la fonction f_n .

Le carré des fonctions propres L^2 -normalisées $\psi_{k,h}$ associées aux valeurs propres négatives $\mu_{k,h}$ de l'opérateur de Schrödinger $\mathcal{H}_{n,h}$ forment un ensemble de fonctions élémentaires adaptatives. Plus que cela, il a été montré que les fonctions propres L^2 -normalisées sont localisées et oscillent graduellement avec une décroissance rapide de leurs amplitudes. Autrement dit, les fonctions propres L^2 -normalisées au carré $\{\psi_{k,h}^2\}_{k=1}^{K_h^\lambda}$, contiennent l'information la plus pertinente de la fonction f_n ainsi que les détails.

Quelques propriétés liées au spectre discret de l'opérateur de Schrödinger semi-classique $\mathcal{H}_{n,h}$ en fonction du paramètre semi-classique h ont été présentées dans ce manuscrit. De plus, une preuve de convergence de l'approche SCSA en dimension n à été établit. En effet, il a été démontré que plus le paramètre semi-classique h diminue et plus l'extraction des données spectrales est meilleure, ce qui aboutie à une décomposition précise de la fonction f_n par l'approche SCSA en nD .

L'efficacité de la SCSA en dimension n ainsi que les propriétés du spectre discret ont été prouvées à travers différents exemples de représentation de fonctions académiques de dimension 1, 2 et 3.

A l'issue de ce travail de nombreuses perspectives prometteuses pourraient s'ouvrir et se réaliser dans de nombreux domaines.

1. Suite aux problèmes de nature géométrique et topologique rencontrés lors de la mise en oeuvre de cette approche, il serait intéressant d'utiliser le produit tensoriel lors de l'écriture des fonctions propres unidimensionnelles. En effet, l'utilisation du produit tensoriel est la deuxième suggestion de la théorie de l'approximation mathématique.
2. D'un point de vue numérique, il manque à notre travail une méthode d'optimisation fiable pour pouvoir estimer la valeur optimale du paramètre semi-classique h selon le contexte d'étude.
3. L'utilisation de l'approche SCSA en nD pour l'analyse et l'estimation des signaux réels dans divers domaines, tels que le domaine médical, industriel, ...

Pour bien clôturer, on peut dire que les mathématiques envahissent tous les domaines de l'activité humaine. Que l'on s'en réjouisse, ou le déplore, c'est un fait non contestable.

Annexe

A Opérateur de Schrödinger unidimensionnel

Soit l'expression différentielle définie par :

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + f_1, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.13)$$

où le potentiel $f_1 \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ représente la fonction à décomposer.

L'opérateur de Schrödinger unidimensionnel \mathcal{H}_1 , dans $L^2(\mathbb{R})$, défini par :

$$\mathcal{H}_1(f_1)v = Lv, \quad v \in \mathbf{D}(\mathcal{H}_1(f_1)), \quad (3.14)$$

avec

$$\mathbf{D}(\mathcal{H}_1(f_1)) = \left\{ g \in L^2(\mathbb{R}) \mid g, \frac{dg}{dx} \in AC_{loc}(\mathbb{R}), Lg \in L^2(\mathbb{R}) \right\}, \quad (3.15)$$

est auto-adjoint [28]. Le spectre de $\mathcal{H}_1(f_1)$ noté par σ est donc réel [28] et est composé d'un :

- spectre continu σ_c , qui comprend les valeurs propres positives de multiplicité 2.
- spectre discret σ_d , qui contient les valeurs propres négatives de multiplicité 1.

On suppose, maintenant, que f_1 est une fonction à valeurs réelles vérifiant :

$$f_1 \in L^1_1(\mathbb{R}), \quad \frac{\partial^m f_1}{\partial x^m} \in L^1_1(\mathbb{R}), \quad m = 1, 2, \quad (3.16)$$

où,

$$L^1_1(\mathbb{R}) = \left\{ f_1 \mid \int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(x)| (1 + |x|) dx < \infty \right\}. \quad (3.17)$$

$L^1_1(\mathbb{R})$ est souvent appelé classe de Faddeev [6]. Avec ces conditions, on est dans le cas point limite et donc nous n'avons pas besoin de conditions aux limites à l'infini. Ainsi, on considère l'opérateur de Schrödinger $\mathcal{H}_1(f_1)$ défini sur $L^2(\mathbb{R})$ par :

$$\mathcal{H}_1(f_1)\psi = -\frac{d^2}{dx^2}\psi + f_1\psi, \quad \psi \in \mathbf{D}(\mathcal{H}_1(f_1)) = \mathbf{H}^2(\mathbb{R}), \quad (3.18)$$

où $\mathbf{H}^2(\mathbb{R})$ est l'espace de Sobolev d'ordre 2.

On s'intéresse maintenant à l'équation aux valeurs propres suivante [4, 17] :

$$\mathcal{H}_1(f_1)\psi = z\psi, \quad (3.19)$$

- Si f_1 est un potentiel nul, alors l'équation (3.19) admet des solutions exponentielles.

- Si f_1 est un potentiel non nul et $z = s^2$ avec $s \in \mathbb{C}^+$ (le demi plan complexe supérieur, $\Im(s) \geq 0$). Alors la solution de l'équation (3.19) est composée d'un spectre continu σ_c et d'un spectre discret σ_d . Ainsi, nous avons $\sigma_c = [0, +\infty)$ et σ_d est composé d'un nombre fini (ou nul) de valeurs propres négatives que l'on note $s^2 = \mu_k$, $k = 1, \dots, K$.
- Si f_1 est un potentiel non nul à support compact. Alors les solutions de l'équation (3.19) se comportent comme des exponentielles pour $x \rightarrow \pm\infty$. En fait, l'hypothèse $f_1 \in L_1^1(\mathbb{R})$ permet de retrouver le comportement exponentiel des solutions de l'équation (3.19) en $\pm\infty$.

La décomposition des fonctions, en utilisant les méthodes de transformée de diffusion inverse, est basé essentiellement sur les données de diffusion. Pour cela, on va présenter, dans ce qui suit, la formulation et quelques notions sur les données de diffusion, ces dernières sont exprimées en fonction de la solution de l'opérateur de Schrödinger en $\pm\infty$.

B Solutions de Jost, états bornés et données de diffusion

Les solutions de Jost, notées J_\pm sont définies comme étant les solutions uniques de l'équation de Schrödinger en $\pm\infty$ [4, 6, 17], elles sont données par :

$$J_\pm(s, x) = e^{\pm i s x} - \int_x^{\pm\infty} \frac{\sin[s(x-x')]}{s} f_1(x') J_\pm(s, x') dx', \quad (3.20)$$

où $\Im(s) \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}$.

Ce sont des fonctions propres de $\mathcal{H}_1(f_1)$ associées aux valeurs propres s^2 vérifiant :

$$\mathcal{H}_1(f_1) J_\pm(s, x) = s^2 J_\pm(s, x) \quad (3.21)$$

avec,

$$\begin{aligned} J_\pm(s, x) &= e^{\pm i s x} + o(1), & x \rightarrow \pm\infty, \\ \frac{dJ_\pm}{dx}(s, x) &= \pm i s e^{\pm i s x} + o(1), & x \rightarrow \pm\infty. \end{aligned} \quad (3.22)$$

A partir de ces fonctions, on définit de nouvelles quantités nommées coefficients de transmission $T(s)$ et coefficients de réflexion par la gauche et par la droite $\mathcal{R}_l(s)$ et $\mathcal{R}_r(s)$ respectivement. Elles sont définies en fonction du Wronskien des solutions de Jost comme suit [4, 17] :

$$\begin{aligned} \frac{1}{T(s)} &= \frac{1}{2is} W(J_-(s, x), J_+(s, x)), & s \in \overline{\mathbb{C}^+} \setminus \{0\}, \\ \frac{\mathcal{R}_l(s)}{T(s)} &= \frac{1}{2is} W(J_+(s, x), J_-(-s, x)), & s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ \frac{\mathcal{R}_r(s)}{T(s)} &= \frac{1}{2is} W(J_+(-s, x), J_-(s, x)), & s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

où $W(w_1, w_2) = w_1(x) \frac{dw_2(x)}{dx} - \frac{dw_1(x)}{dx} w_2(x)$ représente le Wronskien de w_1 et w_2 et $\overline{\mathbb{C}^+} = \mathbb{C}^+ \cup \mathbb{R}$.

Le comportement en $\mp\infty$ de J_\pm se déduit des propriétés de Wronskien et s'écrit en fonction de $T(s)$ et $\mathcal{R}_{r(l)}(s)$:

$$J_\pm(s, x) = \frac{1}{T(s)} e^{\pm i s x} + \frac{\mathcal{R}_{l(r)}(s)}{T(s)} e^{\mp i s x} + o(1), \quad x \rightarrow \mp\infty. \quad (3.24)$$

Une interprétation physique de ces équations consiste à considérer la solution $T(s)J_+(s, x)$ comme décrivant une onde plane $e^{i s x}$ émise de $-\infty$. $T(s)e^{i s x}$ est alors transmise vers $+\infty$ et $\mathcal{R}_l(s)e^{-i s x}$ est réfléchi. De même $T(s)J_-(s, x)$ décrit le phénomène pour une onde émise de $+\infty$. Pour plus de détails sur les solutions de Jost, les états bornés et les données de diffusion, on renvoie le lecteur vers [2, 4, 8, 22].

C Formule de décomposition de Deift et Trubowitz

Deift et Trubowitz [4] ont montré que le potentiel f_1 de l'opérateur de Schrödinger \mathcal{H}_1 peut être décomposé, en utilisant la transformée de la diffusion inverse, par une formule explicite décrite dans le théorème suivant :

Théorème 3.1 [4] *Soit $V_1 \in L^1_1(\mathbb{R})$, alors f_1 peut être reconstruit, de manière unique, par la formule suivante :*

$$f_1(x) = -4 \sum_{k=1}^K \sqrt{-\mu_k} \psi_k^2(x) + \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{b} \int_0^b \left(\frac{2i}{\pi} \int_{-a}^{+a} s \mathcal{R}_{r(l)}(s) J_{\pm}^2(s, x) ds \right) da, \text{ p.p.} \quad (3.25)$$

Si de plus $s \mathcal{R}_{r(l)}(s) \in L^1(\mathbb{R})$, alors :

$$f_1(x) = -4 \sum_{k=1}^K \sqrt{-\mu_k} \psi_k^2(x) + \frac{2i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} s \mathcal{R}_{r(l)}(s) J_{\pm}^2(s, x) ds, \quad x \in \mathbb{R} \quad (3.26)$$

La formule (3.26) est souvent appelée formule de trace de Deift et Trubowitz. Elle se décompose en la somme de deux termes, un terme qui se caractérise par le spectre discret σ_d de l'opérateur de Schrödinger \mathcal{H}_1 , et un autre qui montre la contribution du spectre continu σ_c dans la reconstruction du potentiel V_1 .

On rappelle que le spectre discret σ_d de l'opérateur de Schrödinger \mathcal{H}_1 est composé d'un nombre fini K de fonctions propres L^2 -normalisées ψ_k associées aux valeurs propres négatives rangées par ordre décroissant μ_k , $k = 1, \dots, K$. En effet les fonctions propres ψ_k constituent une base unique pour chaque potentiel, d'où l'obtention d'un ensemble adaptatif, contenant un nombre fini de fonctions propres L^2 -normalisées au carré ψ_k^2 associées aux valeurs propres négatives μ_k , pour la décomposition des fonctions grâce à l'utilisation de la transformée de la diffusion inverse de l'opérateur de Schrödinger \mathcal{H}_1 .

Malgré le grand succès qu'ont eu les formules de décomposition (3.25) et (3.26) de Deift et Trubowitz, cependant, cette représentation n'est pas directement exploitable en raison des difficultés liées au calcul numérique des coefficients de réflexion $\mathcal{R}_{r(l)}$ et des fonctions de Jost J_{\pm}^2 . C'est dans ce sens que les auteurs, dans [18], ont allégé les formules de Deift et Trubowitz pour pouvoir décomposer et représenter une fonction f_1 en utilisant uniquement le spectre discret σ_d , ce dernier peut être facilement calculé numériquement.

Bibliographie

- [1] Allaire, G. (2008), *Analyse numérique et optimisation*. Les Editions de l'Ecole Polytechnique. [19](#)
- [2] Chadan, K. and Sabatier, P.C. (1989), *Inverse problems in quantum scattering theory*. Springer, New York, Second edition. [6](#), [7](#), [30](#)
- [3] Chui, C.K. (1992), *An introduction to Wavelets*. Texas A&M University, College Station, Texas. [3](#), [5](#)
- [4] Deift, P.A. and Trubowitz, E. (1979), *Inverse scattering on the line*. Communications on Pure and applied Mathematics, XXXII, 121-251. [6](#), [7](#), [8](#), [11](#), [28](#), [29](#), [30](#)
- [5] Dimassi, M. and Sjöstrand, J. (1999), *Spectral asymptotics in the semi-classical limit*. Cambridge U Press. [6](#), [7](#)
- [6] Faddeev, L.D. (1964), *Properties of the S-matrix of the one-dimensional Schrödinger equation*. Trudy Math. Inst. Steklov, vol. 73, 314–336. [6](#), [7](#), [28](#), [29](#)
- [7] Gasquet, C. and Witomski, P. (2001), *Analyse de Fourier et applications : Filtrage, calcul numérique et ondelettes*. 2^e cycle universitaire, école d'ingénieurs, Edition Dunod. [3](#), [5](#), [11](#)
- [8] Gesztesy, F. and Holden, H. (1994), *Trace formula and conservation laws for nonlinear evolution equations*. Reviews in Mathematical Physics, vol. 6(1), (1994), 51–95. [6](#), [7](#), [30](#)
- [9] Gottlieb, D. Hussaini, M.Y. and Orszag, S.A. (1984), *Theory and applications of spectral methods*. In Spectral Methods for Partial Differential Equation, R. Voigt, Eds., 1 – 54. [19](#)
- [10] Helffer, B. (1988), *Semi-classical analysis for the Schrödinger operator and application*. Lecture notes in mathematics, Springer. [6](#), [7](#)
- [11] Helffer, B. and Laleg-Kirati, T.M. (2011), *On semi-classical questions related to signal analysis*. Asymptotic Analysis Journal, vol. 75, No. 3-4, 125–144. [7](#), [8](#), [9](#), [11](#), [12](#), [13](#), [21](#)
- [12] Helffer, B. and Robert, D. (1990), *Riesz means of bound states and semi-classical limit connected with a Lieb-Thirring's conjecture I*. Asymptotic Analysis Journal, vol. 3, 91–103. [8](#), [9](#), [12](#), [13](#), [15](#), [21](#)
- [13] Huang, N.E. Shen, Z. Long, S.R. Wu, M.C. Shih, H.H. Yen, N.C. Tung, C.C. and Liu, H. (1998), *The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis*. Proc. R. Soc. Lond. A, vol. 454, 903–995. [5](#), [6](#)
- [14] Kaiserli, Z. Laleg-Kirati, T. M. and Lahmar-Benbernou, A. (2015), *Image reconstruction using squared eigenfunctions of the Schrödinger operator*. Digital Signal Processing Journal, vol. 40, 80–87. [24](#), [26](#)
- [15] Kaiserli, Z. (2015), *Décomposition du potentiel de l'opérateur de Schrödinger semi-classique bidimensionnel : Application à la représentation d'images*. Thèse de Doctorat, Université de Mostaganem Abdelhamid Ibn Badis, Mostaganem, Algérie . [8](#)

- [16] Karadzhov, G.E. (1986), *Semi-classical asymptotic of spectral function for some Schrödinger operator*. Math. Nachr., vol. 128 , 103–114. [8](#), [9](#), [13](#), [15](#)
- [17] Koelink, E. (2008), *Scattering theory*. Lecture notes. [8](#), [11](#), [28](#), [29](#)
- [18] Laleg-Kirati, T.M. Crépeau, E. and Sorine, M. (2013), *Semi-classical signal analysis*. Mathematics of Control, Signals, and Systems (MCSS) Journal, vol. 25, issue 1, 37–61. [7](#), [8](#), [11](#), [19](#), [30](#)
- [19] Lesfari, A. (2012), *Distributions, analyse de Fourier et transformation de Laplace*. Édition Ellipses . [4](#)
- [20] Mallat, S. (2009), *A wavelet tour of signal processing : The sparse way*. Third Edition, Elsevier. [3](#), [4](#), [5](#)
- [21] Martinez, A. (2002), *An introduction to Semiclassical and microlocal analysis*. Springer - Verlag, New York. [6](#), [7](#)
- [22] Newell, A.C. (1980), *The inverse scattering Transform*. Topics in Current Physics, Springer-Verlag, New-York, vol. 17 , 177–242. [6](#), [7](#), [30](#)
- [23] Oberlin, T. (2009), *Approches mathématiques pour la décomposition modale empirique*. Master de Recherche en Mathématiques Appliquées. Université de Joseph Fourier, Grenoble. [5](#), [6](#)
- [24] Oberlin, T. (2009), *Différentes méthodes pour la décomposition modale empirique*. Rapport de TER. [5](#), [6](#)
- [25] Quarteroni, A. Sacco, R. and Saleri, F. (2007), *Méthodes numériques : Algorithmes, analyse et applications*. Springer, Varlag Italia, Milano. [20](#)
- [26] Reed, M. and Simon, B. (1978), *Methods of modern mathematical physics, IV. Analysis of operators theory*. Academic Press, New York. [16](#)
- [27] Rilling, G. (2007), *Décompositions Modales Empiriques. Contributions à la Théorie, l'algorithmie et l'analyse de performances*. Thèse de Doctorat, ENS Lyon. [5](#)
- [28] Simon, B. (2000), *Schrödinger operator in the twentieth century*. Journal of Mathematical Physics, vol. 41(6), 3523–3555. [28](#)
- [29] Trefethen, L.N. (2000), *Spectral methods in Matlab*. Society for Industrial and Applied Mathematics. [19](#)

Généralisation d'une nouvelle méthode de décomposition des fonctions unidimensionnelles basée sur une approche semi-classique

Résumé : Ce manuscrit porte sur la généralisation en dimension n d'une approche semi-classique, dite *Semi-Classical Signal Analysis*, de décomposition de fonctions. L'approche SCSA consiste à interpréter la fonction à analyser comme le potentiel de l'opérateur de Schrödinger semi-classique. La résolution du problème spectral de l'opérateur de Schrödinger semi-classique permet de faire une approximation de la fonction à l'aide des valeurs propres négatives résultantes et des fonctions propres qui y sont associées. Plus précisément, l'approximation est exprimée comme la somme tronquée des carrés des fonctions propres, L^2 -normalisées, pondérée par les valeurs propres négatives associées. La nouveauté qu'apporte cette approche est l'utilisation d'un ensemble de fonctions élémentaires adaptatives contrairement aux méthodes de décomposition existantes. La convergence de cette nouvelle approche ainsi que les propriétés des fonctions propres et des valeurs propres ont été étudiées lorsque le paramètre semi-classique h tend vers 0. En dernier, la performance de la SCSA en dimension n a été validée à l'aide des résultats de simulations sur des fonctions académiques de différentes dimension.

Mots-Clés. Analyse semi-classique ; Décomposition de fonctions ; Opérateur de Schrödinger ; Spectre discret ; Valeurs propres négatives ; Fonctions propres L^2 -normalisées au carré.

Generalization of a new one dimensional function decomposition method based on a semi-classical approach

Abstract : This work emphasizes on the generalization to n dimensions of a new approach of function decomposition based on a semi-classical quantification namely Semi-Classical Signal Analysis. The SCSA approach consists in considering the function, to be analyzed, as a potential of a semi-classical Schrödinger operator. The resolution of the spectral problem of the Schrödinger operator allows to approximate the function using the resulting negative eigenvalues and its corresponding eigenfunctions. Precisely, the approximation is expressed as the truncated sum of the squared L^2 -normalized eigenfunctions weighted by the associated negative eigenvalues. The novelty of this approach is the fact that the underlying basis functions are dependent on the function itself. The relation between the approximation accuracy and the semi-classical parameter together with the eigenfunctions' interesting features are studied. Numerical results on some academic functions of one, two and three variables illustrate the performance of the proposed approach.

Key Words. Semi-classical analysis ; Function decomposition ; Schrödinger operator ; Discrete spectrum ; Negative eigenvalues ; squared L^2 -normalized eigenfunctions.

