République Algérienne Démocratique et Populaire

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE ABDELHAMID BNI BADIS MOSTAGANEM

FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

THESE

Pour l'obtention du Diplôme Docteur en Sciences
Option : CALCUL FRACTIONNAIRE

Intitulée

=−=−=−=−=−=−=−=−o ◯ o−=−=−=−=−=−=−=−=

CONTRIBUTION AUX INEGALITES FRACTIONNAIRES ET APPLICATIONS AUX EQUATIONS NON LINEAIRES

=−=−=−=−=−=−=−=−o ◯ o−=−=−=−=−=−=−=−=

Présentée par : BENZIDANE Abdelkader

Thèse soutenue, le , devant le Jury composé de :

Président	:	BOUAGADA Djilali	Prof. Université de Mostaganem
Examinateur	:	CHEGGAG Mustapha	Prof. Ecole Nationale Polytechnique d'Oran
Examinateur	:	SENOUCI Abdelkader	Prof. Université de Tiaret
Encadreur	:	DAHMANI Zoubir	Prof. Université de Mostaganem

Année Universitaire : **2018 − 2019**

Liste des Travaux de Recherche et des Publications

1. A. Benzidane, Z. Dahmani : New Integral Results on Holder Type Inequalities. Mathematika, Math Cluj, Accepted 2018.

2. Z. Dahmani, A. Benzidane : New Inequalities Using Fractional q-Integrals Theory. Bulletin of Mathematical Analysis and Applications. Vol. 4, Issue 1 (2012), Pages 190-196. ISSN 1821-1291.

3. A. Benzidane, Z. Dahmani : On a Class of Non Linear Singular Fractional Differential Equations. Under Review, 2018.

Dedicaces

Ce travail est dédié à :

Ma très chère mère, à mon cher père qui cherche toujours mon bien.

Ma femme et mes enfants.

Mes frères et soeurs.

Toute ma famille.

Toute personne qui m'a soutenue, aidé ou contribué de près ou de loin, dans ce projet de thèse.

Remerciements

Au Nom d'ALLAH Clément et Miséricordieux.

Je tiens en premier lieu, à exprimer ma reconnaissance et ma gratitude envers mon directeur de cette thèse Zoubir DAHMANI, Professeur à l'université de Mostaganem, pour avoir encadré ce travail et pour la confiance qu'il m'a accordée. Ses conseils et ses encouragements m'ont beaucoup aidé à progresser. Je le remercie aussi pour toutes les relectures, suggestions et commentaires qui m'ont permis d'améliorer la qualité de ce projet.

Je tiens également à exprimer mes remerciements à Djilali BOUAGADA, Professeur à l'université de Mostaganem, qui m'a honoré en acceptant d'être président du jury.

J'exprime ma reconnaissance aux examinateurs : Mustapha CHEGGAG (Professeur à l'école Nationale Polytechnique d'Oran), Abdelkader SENOUCI (Professeur à l'université de Tiaret), qui m'ont fait l'honneur d'examiner et de juger ce travail.

Résumé :

Dans cette thèse, on s'intéresse aux inégalités intégrales d'ordre arbitraire et aux applications aux équations différentielles non linéaires d'ordre non entier.

On établit des résultats intégraux à une classe d'inégalités de type Hölder, faisant intervenir trois fonctions positives.

En se basant sur un travail de S.H. Wu publié, en 2007 dans JMAA Journal, on démontre des résultats fractionnaires selon l'approche de Riemann-Liouville.

Aussi, pour notre cas, certains travaux de Z. Dahmani publiés en 2012, dans General Mathematics, peuvent être déduits comme un cas particulier pour notre contribution fractionnaire aux inegalites de Holder.

Dans cette thèse, on sera aussi concerné par l'étude d'une classe d'équations différentielles singulières fractionnaires au sens de Caputo. Cette classe d'équations peut être interprétée comme un modèle général incluant le système de Lane-Emden, qui a beaucoup d'applications en physique et en particulier en Astrophysique. La stabilité des solution de cette classe sera aussi étudiée dans cette thèse.

Abstract :

In this thesis, we are concerned with fractional integral inequalities and non linear differential equations of arbitrary order.

We begin by generalizing some Hölder type inequalities involving three positive functions, by using the well know theory of fractional integration in the sense of Riemann-Liouville.

This project deals also with non linear singular differential equations of non integer order in the sense of Caputo. Some existence and uniqueness theorems are proved for a more general Lane-Emden problem. Other notions of stability are also discussed.

Table des matières

INTRODUCTION

Le calcul fractionnaire est une généralisation du calcul différentiel. L'histoire de cette théorie remonte au $19^{éme}$ siècle, lorsque l'Hôpital se pose la question à Leibniz sur le résultat de la dérivée d'ordre un demi. Ensuite plusieurs chercheurs se sont intéressés à ce sujet.

L'objectif principal de cette thèse est de présenter une contribution intégrale au calcul fractionnaire dans le domaine intégral ainsi que dans sa dimension différentielle.

Cette thèse se compose d'une Introduction et quatre Chapitres :

Dans le premier chapitre, on rappelle quelques définitions et résultats relatifs au calcul fractionnaire dont on aura besoin dans les autres chapitres.

Le deuxième chapitre porte sur une contribution aux inégalités de type Hölder dans le cas fractionnaires au sens de Riemann-Liouville. On généralise certains résultats de S. Wu. [45].

Dans le troisième chapitre, on aborde les inégalités intégrales au sens de q-calcul. On donne une contribution intégrale via cette théorie et on généralise des résultats de W.J. Liu et al. [32] ainsi que de F. Qi [38].

Le quatrième chapitre porte sur l'existence et l'unicité des solutions des systèmes différentiels fractionnaires singuliers à l'origine, On démontre des résultats assurant l'existence et l'unicité. D'autres résultats assurant l'existence d'une solution au moins seront discutés.
La stabilité au sens de ULAM-HYERS des solutions de notre système sera aussi étudiée dans cette chpitre.

On termine cette contribution par une Conclusion Générale et des perspectives.

Chapitre 1

RAPPELS

Ce chapitre contient des définitions, des rappels des théorèmes classiques avec certaines propriétés qui seront à utiliser par la suite.

Dans la première partie, on donne le théorème de Banach et quelque théorèmes des points fixes qui sont fréquemment utilisables dans le chapitre quatre.

1.1 Définitions

On rappelle les définitions suivantes :

Définition 1.1.1 : *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{k}$. Une norme sur E est une application N de E a valeurs dans $[0,\infty[$ qui vérifie les trois propriétés suivantes :*

1. $N(x) = 0$ *si et seulement si* $x = 0$. *(Séparation)*
2. $\forall \lambda \in \mathbb{k}, \forall x \in E,\ N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$. *(Positive Homogénéité)*
3. $\forall x, y \in E,\ N(x+y) \leq N(x) + N(x)$. *(Inégalité triangulaire).*

On note souvent $N(x) = \|x\|$.

Un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ *est un espace vectoriel* E *muni d'une norme* $\|.\|$.

Définition 1.1.2 : *Soit* $\Omega = [a,b]$ *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et* $1 \leq p \leq \infty$.

1. Pour $1 \leq p < \infty$, $L^p(\Omega)$ *est l'espace des fonctions réelles* f *sur* Ω *telles que* f est *mesurable et*

$$\int_a^b |f(x)|^p \, dx < +\infty.$$

On peut munir $L^p(\Omega)$ *de* $\|f\|_p = \left(\int |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$.

2. Pour $p = \infty$, $L^\infty(\Omega)$ *est l'espace des fonctions* f *mesurables bornées prèsque partout sur* Ω.

On peut munir $L^{\infty}(\Omega)$ *de* $\|f\|_{\infty} = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

Définition 1.1.3 : *Soient* E_1 *et* E_2 *deux espaces vectoriels normés, de norme respectives* $\|.\|_{E_1}$ *et* $\|.\|_{E_2}$. *Une application* $f : \left(E_1, \|.\|_{E_1}\right) \longrightarrow \left(E_2, \|.\|_{E_2}\right)$ *est continue en* $x_0 \in E_1$ *lorsque on a :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 / \forall x \in E \text{ tel que } \|x - x_0\|_{E_1} < \eta, \text{ on a } \|f(x) - f(x_0)\|_{E_2} < \varepsilon.$$

De façon équivalente, f *est continue en* x_0 *lorsque pour toute suite* $(x_n)_{n\geq 0}$ *qui converge vers* x_0 *dans* $\left(E_1, \|.\|_{E_1}\right)$, *la suite*$(f(x_n))_{n\geq 0}$ *converge vers* $f(x_0)$ *dans* $\left(E_2, \|.\|_{E_2}\right)$.

Définition 1.1.4 : *Soit* $C(E,F)$ *l'ensemble des applications continues* $f : E \longrightarrow F$. *On dit qu'une partie* $A \subset C(E,F)$ *est équicontinue en un point* $x \in E$ *si la propriété suivante est vérifiée :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(x,\varepsilon) > 0 / \forall y \in E \quad \|x - y\|_E \leq \delta \Longrightarrow \forall f \in A \quad \|f(x) - f(y)\|_F < \varepsilon.$$

Définition 1.1.5 : *Soient* E *un espace vectoriel normé, de norme* $\|.\|_E$ *et* $(u_n)_n$ *une suite de* E. *On dit que* (u_n) *est une suite de Cauchy si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \geq 0, \forall n \geq N, \ \forall p \geq N, \ \|u_{n+p} - u_n\|_E \ \leq \varepsilon.$$

Définition 1.1.6 : *On dit que* E *est complet pour la norme* $\|.\|_E$ *si toute suite de Cauchy (pour cette norme) est convergente (pour cette norme).*

Un tel espace est aussi appelé espace de Banach.

Définition 1.1.7 : *Soient* E *un espace de Banach muni de la norme* $\|.\|_E$ *et* T *une application de* E *dans* E. *Un élément* x *de* E *est dit point fixe de* T *si*

$$Tx = x.$$

Définition 1.1.8 : *Soit* E *un espace vectoriel normé, de norme* $\|.\|_E$. *Une application* f *de* E *dans* E *est dite contractante s'il existe un nombre* $K \in]0,1[$, *tel que pour tout* $x, y \in E$, *on a*

$$\|f(x) - f(y)\|_E \leq K \|x - y\|_E.$$

Définition 1.1.9 : *Soit* A *un opérateur linéaire d'un espace de Banach* E *dans un autre espace de Banach* F.

A *est compact s'il transforme tout ensemble borné de* E *dans un ensemble relativement compact de* F.

Définition 1.1.10 : *Un opérateur est dit complètement continu, s'il est compact et continu.*

1.2 Un peu de Théorie de Point Fixe

Dans cette partie, on donne quelque théorèmes de points fixes qui sont à utiliser dans la suite de cette thèse.

Principe de Contraction de Banach

Théorème 1.2.1 : *Soient E un espace de Banach muni de la norme $\|.\|_E$ et $T : E \to E$ une application contractante.*

Alors, T admet un point fixe unique.

Théorème d'Ascoli-Arzela

Théorème 1.2.2 : *[11] Soit K un compact* de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$. *Alors un ensemble $S \subset C(K)$ est relativement compact dans $C(K)$ si et seulement si les fonctions dans S* s*ont uniformément bornées et équicontinues sur K.*

Théorème de Point Fixe de Schaeffer

Théorème 1.2.3 : [40] *Soient E un espace de Banach et $T : E \to E$ un opérateur complètement continu.*

Si l'ensemble $\Omega := \{y \in E : \ y = \lambda T\ y$ tel que $\lambda \in]0,1[\}$ est borné, alors T possède au moins un point fixe dans E.

1.3 Intégrales Fractionnaires

Dans ce qui suit, on présente des définitions et des propriétés essentielles correspondantes à la notion de la dérivation et de l'intégration d'ordre fractionnaire dont on aura besoin dans les autres chapitres. Pour plus de détails, on se réfère à ([34, 36, 37, 39]).

Définition 1.3.1 *Les fonctions d'Euler Gamma et Béta sont définies réspectivement par*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{\alpha-1} du, \quad \alpha > 0 \tag{1.1}$$

et

$$\beta(p,q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt, \quad p,q > 0. \tag{1.2}$$

Propriétés :

Proposition 1.3.1 :
On a :

(1) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$,

(2) $\Gamma(n+1) = n!, \;\; n \in \mathbb{N}$,

(3) $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)\,, \; z > 0$,

(4) $\beta(p,q) = \beta(q,p)\,, \; p > 0, q > 0$,

(5) $\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \; p > 0, \; q > 0.$

1.4 Intégration Selon Riemann-Liouville :

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Une primitive de f est donnée par :

$$F_1(t) = \int_a^t f(\tau)\,d\tau.$$

Une seconde primitive de f est :

$$F_2(t) = \int_a^t F_1(x)\,dx = \int_a^t \left(\int_a^x f(\tau)\,d\tau\right) dx$$

$$= \int_a^t (t-x)\,f(x)\,dx.$$

Puis par récurrence sur n, on aura :

$$F_n(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t (t-x)^{n-1} f(x)\,dx.$$

Si on note $J^n(f(t)) = F_n(t)$, on a donc :

$$J^n(f(t)) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau)\,d\tau. \tag{1.3}$$

Selon l'approche de Riemann-Liouville, la notion d'intégrale fractionnaire sera donc une généralisation de la formule (1.3) pour $\alpha \geq 0$. On donne alors :

Définition 1.4.1 *L'opérateur intégral fractionnaire de Rieman-Liouville d'ordre* $\alpha \geq 0$, *pour une fonction* $f \in C([a,b])$, *est défini par :*

$$J_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)\, d\tau \quad ; \alpha > 0, \tag{1.4}$$

$$J_a^0 f(t) = f(t) \quad ; \alpha = 0.$$

Exemples et Propriétés (Semi-Groupe, Commutativité) :

Exemple 1.4.1 Soit $f(x) = x^\delta$, où $\delta > 0$ et $x > 0$.

Alors, on a :

$$J_0^\alpha x^\delta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-\tau)^{\alpha-1} \tau^\delta d\tau.$$

Par le changement de variable : $\tau = xy$, on aura :

$$J_0^\alpha x^\delta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x-xy)^{\alpha-1} (xy)^\delta x dy$$

$$= \frac{x^{\alpha+\delta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-y)^{\alpha-1} (y)^\delta dy$$

$$= \frac{x^{\alpha+\delta}}{\Gamma(\alpha)} \beta(\alpha, \delta+1).$$

Comme les fonctions Gamma et Béta sont reliées par la fameuse relation :

$$\beta(\alpha,\delta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\delta)}{\Gamma(\alpha+\delta)}, \tag{1.5}$$

alors, on trouve

$$J_0^\alpha x^\delta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\delta+1)}{\Gamma(\alpha+\delta+1)} x^{\alpha+\delta} = \frac{\Gamma(\delta+1)}{\Gamma(\alpha+\delta+1)} x^{\alpha+\delta}. \tag{1.6}$$

Par exemple, pour $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\delta = 1$, on applique la formule (1.6), on obtient :

$$J_0^\alpha x = \frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+1+1\right)} x^{\frac{1}{2}+1} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} x^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} x\sqrt{x}. \tag{1.7}$$

Et pour $\alpha = 1$, on obtient

$$J_0^1 x^\delta = \frac{\Gamma(\delta+1)}{\Gamma(\delta+2)} x^{1+\delta} = \frac{\Gamma(\delta+1)}{(\delta+1)\Gamma(\delta+1)} x^{1+\delta} = \frac{1}{\delta+1} x^{\delta+1}.$$

Exemple 1.4.2 Considérons la fonction $f(x) = (x-a)^\gamma$, $x \geq a$. Alors

$$J_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-\tau)^{\alpha-1} (\tau - a)^\gamma \, d\tau \; = \frac{\beta(\alpha,\gamma+1)}{\Gamma(\alpha)} (x-a)^{\gamma+\alpha}.$$

Cela implique :

$$J_a^\alpha (x-a)^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+\alpha+1)} (x-a)^{\gamma+\alpha}. \tag{1.8}$$

Proposition 1.4.1 (Propriétés S-G-C :)

Soit f une fonction de $C([a,b],\mathbb{R})$. Alors, on a

$$\begin{array}{c} 1)\ J_a^\alpha J_a^\beta f(x) = J_a^{\alpha+\beta}(f(x)), \\ 2)\ J_a^\alpha J_a^\beta f(x) = J_a^\beta J_a^\alpha f(x) \end{array} \tag{1.9}$$

pour tout $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

Démonstration : Elle est basée sur la fonction Bêta d'Euler $\beta(\alpha,\beta)$.

1.5 Dérivation Fractionnaires :

L'approche dérivative de Riemann-Liouville se base sur les fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. Elle est considérée comme une intégrale au sens de Riemann-Liouville à l'ordre $n-\alpha$, $n \geq \alpha$, suivie d'une opération classique de type dérivée n^{ieme} de cette même intégrale.

En revanche, l'approche des dérivées au sens de Caputo est l'opération inverse sur la classe des fonctions $f \in C^n([a,b])$; $n-1 < \alpha \leq n$.

En effet, on peut voir que n'importe quelle dérivée en ce sens est considérée comme une opération de dérivée n^{ieme} de f suivie d'une intégrale de R-L à l'ordre $n-\alpha$.

1.6 Dérivation Fractionnaire au Sens Riemann-Liouville :

Définition 1.6.1 *On définit la dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ au sens de Riemann-Liouville d'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ par la formule :*

$${}^*D_a^\alpha f(x) = \begin{cases} \frac{d^m}{dx^m}\left[\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_a^x \frac{f(\tau)}{(x-\tau)^{\alpha+1-m}} d\tau\right] & , \quad m-1 < \alpha < m, m \in \mathbb{N}^* \\ \frac{d^m}{dx^m} f(x), & , \quad \alpha = m. \end{cases} \tag{1.10}$$

Remarque 1.6.1 On peut écrire la relation (1.10) sous la forme équivalente suivante :

$$^{*}D_a^{\alpha} f(x) = \begin{cases} \frac{d^m}{dx^m}\left[\left(J_a^{m-\alpha}\right)(f(x))\right], & m-1<\alpha<m, m\in\mathbb{N}^* \\ \frac{d^m}{dx^m} f(x), & \alpha = m. \end{cases}$$

Remarque 1.5.2 *La dérivée de Riemann-Liouville d'une constante n'est pas nulle. On a*

$$^{*}D_a^{\alpha}(1) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha} \ .$$

En effet,

$$\begin{aligned} ^{*}D_a^{\alpha}(c) &= \frac{d^m}{dx^m}\left[\frac{c}{\Gamma(m-\alpha)}\int_a^x (x-\tau)^{m-\alpha-1}\,d\tau\right] \\ &= \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha}. \end{aligned}$$

Propriétés :

Proposition 1.6.1

(1) *Pour tout $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ et pour deux fonctions continues $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, on a*

$$^{*}D_a^{\alpha}(\mu f(x) + \lambda g(x)) = \mu\, ^{*}D_a^{\alpha}(f(x)) + \lambda\, ^{*}D_a^{\alpha}(g(x)),$$

(2) *La propriété :*

$$^{*}D_a^{\alpha}\, ^{*}D_a^{\beta} f(t) = \, ^{*}D_a^{\alpha+\beta} f(t)$$

n'est pas toujours vérifiée lorsque $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

(3) *Il en est de même de la propriété de commutativité : $\exists\ \alpha > 0$, $\beta > 0$, tels que :*

$$^{*}D_a^{\alpha}\, ^{*}D_a^{\beta} f(t) \neq \, ^{*}D_a^{\beta}\, ^{*}D_a^{\alpha}\, f(t)$$

Démonstration

Dans (2), on prend $f(t) = t^{-\frac{1}{2}}$ et $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$. On a alors :

$$^{*}D_0^{\frac{1}{2}} f(t) = 0 \ \ , \ \ ^{*}D_0^{\frac{1}{2}}\, ^{*}D_0^{\frac{1}{2}} f(t) = 0.$$

On remarque au passage que :

$$^{*}D_0^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} f(t) = -\frac{1}{2} t^{-\frac{3}{2}}$$

Dans (3), on pose $f(t) = t^{\frac{1}{2}}$ et $\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{3}{2}$. Donc

$$^{*}D_0^{\frac{1}{2}} f(t) = \tfrac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad ^{*}D_0^{\frac{3}{2}} f(t) = \, ^{*}D_0^{\frac{3}{2}} \left(t^{\frac{1}{2}}\right) = 0.$$

Tandis que

$$^{*}D_0^{\frac{1}{2}} \, ^{*}D_0^{\frac{3}{2}} f(t) = 0, \quad ^{*}D_0^{\frac{3}{2}} \, ^{*}D_0^{\frac{1}{2}} f(t) = -\tfrac{1}{4} t^{\frac{3}{2}}.$$

1.7 Dérivation Fractionnaire au Sens de Caputo :

Définition 1.7.1 *Soient* $\alpha \geq 0; m-1 < \alpha < m$, et $f \in C^m([a,b]), m \in \mathbb{N}^*$. *On définit la dérivée fractionnaire d'ordre* α *au sens de Caputo par :*

$$D_a^{\alpha} f(x) = J_a^{m-\alpha} f^{(m)}(x), \; x \in [a,b] \; . \tag{1.11}$$

Remarque 1.7.1 On peut facilement déduire que l'opérateur de la dérivation fractionnaire de Caputo est un opérateur linéaire.

Exemples et Propriétès :

Exemple 1.7.1 Dérivée au sens de Caputo de la fonction $f(x) = (x-a)^{\beta}$ telle que $x \geq a$:

$$D_a^{\alpha} f(x) = \left(J_a^{m-\alpha}\right)\left(\tfrac{d^m}{dx^m} f(x)\right)$$

$$= J_a^{m-\alpha}\left(\tfrac{\Gamma(\beta+m-\alpha+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (x-a)^{\beta-m}\right)$$

$$= \tfrac{\Gamma(\beta+m-\alpha+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} \left(J_a^{m-\alpha}\right)(x-a)^{\beta-m}$$

$$= \tfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (x-a)^{\beta-\alpha}.$$

Remarque 1.7.2

La dérivée de Caputo d'une fonction constante est nulle, tandis que celle de R-L ne l'est pas.

Proposition 1.7.1

Soient $m-1 < \alpha < m$, $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$, et $f \in C^m([a,b]), m \in \mathbb{N}^*$.

(1) On a :

$$D_a^{\alpha}\left(J_a^{\alpha} f\right) = f\ .$$

(2) *En général, la propriété :*

$$J_a^{\alpha}\left(D_a^{\alpha} f\right) = f\ .$$

n'est pas vérifiée.

1.8 Passage de Riemann-Liouville á Caputo

La relation assurant le passage entre la dérivée de Riemann-Liouville et celle de Caputo est donnée par la formule ci dessous. Il rentre en considération le reste du développement de Taylor de la fonction f considérée. On a alors la proposition suivante :

Proposition
Soient $\alpha \in \left]m-1, m\right]$ *et* $f \in C^m\left([a,b]\right) m \in \mathbb{N}^*$. *Alors, on a :*

$$^*D_a^{\alpha}\left[f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)\right] = D_a^{\alpha} f(t).$$

Cette dernière relation peut aussi s'écrire

$$D_a^{\alpha} f(t) = {}^*D_a^{\alpha} f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \tfrac{(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(a).$$

1.9 Un peu de q-Calcul :

Dans cette section, on va exposer un résumé des notations mathématiques et des définitions sur q-intégrales fractionnaires qui seront utilisés dans le chapitre 3. Pour plus de détails, on peut consulter [1, 3].
Soit $t_0 \in R$. On définit

$$T_{t_0} := \{t : t = t_0 q^n, n \in N\} \cup \{0\}, 0 < q < 1. \tag{1.13}$$

Pour une fonction $f : T_{t_0} \to R$, le ∇ q-dérivé de f est :

$$\nabla_q f(t) = \frac{f(qt) - f(t)}{(q-1)t}. \tag{1.14}$$

Pour tout $t \in T \backslash \{0\}$ la q-l'intégrale d'une fonction f définie sur un intervalle $[0, t]$ (l'intégrale de Jackson), est définie par :

$$\int_0^t f(\tau)\nabla\tau = (1-q)t\sum_{i=0}^{\infty} q^i f(tq^i). \tag{1.15}$$

Le ∇_q-dérivé de q-intégrale d'une fonction f :

$$\nabla_q \int_0^t f(\tau)\nabla\tau = f(t). \tag{1.16}$$

Si f est continue au point 0, alors

$$\int_0^t \nabla_q f(\tau)\nabla\tau = f(t) - f(0). \tag{1.17}$$

Soient $f : T_{t_1} \to R$ une fonction continue et $g : T_{t_1} \to T_{t_2}$ une fonction q-différentiable, strictement croissante, et $g(0) = 0$. Alors pour $b \in T_{t_1}$, on a :

$$\int_0^b f(t)\nabla_q g(t)\nabla t = \int_0^{g(b)} (f \circ g^{-1})(s)\nabla s. \tag{1.18}$$

Si n est un nombre entier positif, alors la fonction q-factorielle est définie comme suit :

$$(t-s)^{\underline{(n)}} = (t-s)(t-qs)(t-q^2s)...(t-q^{n-1}s). \tag{1.19}$$

Si n n'est pas un nombre entier positif, alors

$$(t-s)^{\underline{(n)}} = t^n \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1-(\frac{s}{t})q^k}{1-(\frac{s}{t})q^{n+k}}. \tag{1.20}$$

La q-dérivée de la fonction factorielle par rapport t est

$$\nabla_q (t-s)^{\underline{(n)}} = \frac{1-q^n}{1-q}(t-s)^{\underline{(n-1)}}, \tag{1.21}$$

et la q-dérivée de la fonction factorielle par rapport s est

$$\nabla_q (t-s)^{\underline{(n)}} = -\frac{1-q^n}{1-q}(t-qs)^{\underline{(n-1)}}. \tag{1.22}$$

La fonction q-exponentielle est définie par

$$e_q(t) = \prod_{k=0}^{\infty}(1-q^k t), e_q(0) = 1. \tag{1.23}$$

L'opérateur q- intégral fractional d'ordre $\alpha \geq 0$, pour une fonction f est définie par

$$\nabla_q^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma_q(\alpha)} \int_0^t \underline{(t - q\tau)^{\alpha-1}} f(\tau) \nabla\tau; \quad \alpha > 0, t > 0, \tag{1.24}$$

avec $\Gamma_q(\alpha) := \frac{1}{1-q} \int_0^1 (\frac{u}{1-q})^{\alpha-1} e_q(qu) \nabla u$.

Chapitre 2

INEGALITES INTEGRALES FRACTIONNAIRES AU SENS RIEMANN-LIOUVILLE

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on établit des nouveaux résultats sur des inégalités de type Hölder, et ceci en utilisant les intégrales fractionnaires au sens de Riemann-Liouville. Le cadre idéal pour cette étude est de prendre trois fonctions positives sans que les résultats soient de type Holder avec poids. Certes ! on utilisera en particulier les techniques de Holder avec poids. On sait qu'en analyse mathématique, l'inégalité de Hölder est une inégalité fondamentale relative aux espaces de fonctions L_p, cette inégalité est une généralisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Le cas classique est donné par l'énoncé suivante :

Si f et g sont deux fonctions définies sur $[a, b]$, telles que $f(x) \geq 0, g(x) \geq 0, f \in L^p([a, b]), g \in L^q([a, b])$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \Big(\int_a^b f^p(x)dx\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_a^b g^q(x)dx\Big)^{\frac{1}{q}}. \tag{2.1}$$

En d'autres termes sans tenir compte de la positivité :

Si $f \in L^p([a, b])$ avec $1 < p < +\infty$, $g \in L^q([a, b])$ avec $1 < q < +\infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors $fg \in L^1([a, b])$ et on a :

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q .$$

Plus généralement, pour $0 < p$, $q \leq +\infty$ et r défini par $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, si $f \in L^p([a, b])$ et $g \in L^q([a, b])$ alors $fg \in L^r([a, b])$ et

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q .$$

L'inégalité de Hölder avec $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}$ se généralise immédiatement à n fonctions, par récurrence :

Soient $0<r,\ p_1,\dots,p_n\leq+\infty$ tels que $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{p_k}=\dfrac{1}{r}$ et $f_k\in L^{p_k}([a,b]),k=\overline{1,n}$. Alors,

$$\left\|\prod_{k=1}^{n}f_k\right\|_r\leq\prod_{k=1}^{n}\|f_k\|_{p_k}.$$

Passons maintenant à citer quelques travaux liés à nos résultats.

En 2007, Wu [45] a établit le résultat suivant :

Théorème 2.1.1 *Soient f, g et e des fonctions intégrables définies sur $[a,b]$ et $f(x)\geq 0, g(x)>0, 1-e(x)+e(y)\geq 0$, pour tous $x,y\in[a,b]$ et soit $p\geq q>0$ telles que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\leq 1$. Alors*

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)dx \quad &\leq \quad (b-a)^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\Big(\int_a^b g^q(x)dx\Big)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\Big[\Big(\int_a^b g^q(x)dx\int_a^b f^p(x)dx\Big)^2 \\ &-\Big(\int_a^b g^q(x)e(x)dx\int_a^b f^p(x)dx-\int_a^b g^q(x)dx\int_a^b f^p(x)e(x)dx\Big)^2\Big]^{\frac{1}{2p}}.\end{aligned} \tag{2.2}$$

En 2012, Z. Dahmani a établit le résultat suivant (dans un espace C_μ approprié) [12] :

Théorème 2.1.2 *Soient $p\geq 1, q\geq 1$, tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, si $|f|^p$* et *$|g|^q; t>0$ deux fonctions dans $C_\mu, (\mu\geq -1)$. Alors pour tout $\alpha>0, t\in]a,b]$, on a :*

$$J^\alpha|fg|(t)\leq\Big(J^\alpha|f|^p(t)\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(J^\alpha|g|^q(t)\Big)^{\frac{1}{q}}. \tag{2.3}$$

2.2 Résultats Principaux

Dans cette section, on prouve les résultats suivants :

Théorème 2.2.1 [6] *Soient f, g et e des fonctions définies sur $[a,b]$ telles que $f(x)\geq 0, g(x)>0, 1-e(x)+e(y)\geq 0$, pour tous $x,y\in[a,t]$, tels que $f^p,g^q,e\in L^1([a,b]), p\geq q>0, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}\leq 1$. Alors pour tous $\alpha>0, t\in]a,b]$, on a :*

$$\begin{aligned}J^\alpha[f(t)g(t)] \quad &\leq \quad (t-a)^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\Big(J^\alpha g^q(t)\Big)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\Big[\Big(J^\alpha g^q(t)J^\alpha f^p(t)\Big)^2 \\ &-\Big(J^\alpha[g^q(t)e(t)]J^\alpha f^p(t)-J^\alpha g^q(t)J^\alpha[f^p(t)e(t)]\Big)^2\Big]^{\frac{1}{2p}}.\end{aligned} \tag{2.4}$$

Pour prouver le théorème ci-dessus, on utilise les lemmes suivants.

Lemmes Préliminaires

Lemme 2.2.1 [25] *Si $f(x)$ et $fg(x)$ sont des fonctions intégrables définies sur $[a,b]$, $f(x) \geq 0, g(x) > 0$ et $0 < p < 1$, alors, on a*

$$\int_a^t f(x)g^p(x)dx \leq \Big(\int_a^t f(x)dx\Big)^{1-p}\Big(\int_a^t f(x)g(x)dx\Big)^p. \tag{2.5}$$

Preuve : Supposons $u = (fg)^p$ et $v = f^{1-p}$ et $p + q = 1$. Par l'inégalité (2.1), on a

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g^p(x)dx &= \int_a^b u(x)v(x)dx \\ &\leq \Big(\int_a^b u^{\frac{1}{p}}(x)dx\Big)^p\Big(\int_a^b v^{\frac{1}{q}}(x)dx\Big)^q \\ &= \Big(\int_a^t f(x)g(x)dx\Big)^p\Big(\int_a^t f(x)dx\Big)^{1-p}.\end{aligned}$$

L'inégalité suivante est une généralisation de l'inégalité de Hölder ([25],p.140).

Lemme 2.2.2 *Soient $f_i, (i = 1, 2, ..., m)$, des fonctions p_i-intégrables définies sur $[a,b]$ et $f_i \geq 0, p_i > 0, (i = 1, 2, ..., m)$, tels que $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + ... + \frac{1}{p_m} = 1$. Alors*

$$\int_a^t \prod_{i=1}^m f_i(x)dx \leq \prod_{i=1}^m \Big(\int_a^t f_i^{p_i}(x)dx\Big)^{\frac{1}{p_i}}. \tag{2.6}$$

Preuve de Théorème 2.2.1 : On va procéder en deux étapes.

Étape 1 : Quand $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Des techniques fastidieuses de calcul nous donnent.

$$\begin{aligned}&\left(\int_a^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\tau)g(\tau)d\tau\right)\left(\int_a^t \frac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\rho)g(\rho)\left(1 - e(\tau) + e(\rho)\right)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} d\rho\right) \\ = &\left(\int_a^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\tau)g(\tau)d\tau\right)\left(\int_a^t \frac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\rho)g(\rho)\left(1 - e(\tau) + e(\rho)\right) d\rho\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\int_a^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\tau)g(\tau)d\tau\right)\left(\int_a^t \frac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\rho)g(\rho)d\rho\right)\\
&- \int_a^t\int_a^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\frac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\tau)g(\tau)f(\rho)g(\rho)e\left(\tau\right)d\tau d\rho\\
&+ \int_a^t\int_a^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\frac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\tau)g(\tau)f(\rho)g(\rho)e\left(\rho\right)d\tau d\rho\\
&= \left(\int_a^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\tau)g(\tau)d\tau\right)\left(\int_a^t \frac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\rho)g(\rho)d\rho\right)\\
&= \left(\int_a^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\tau)g(\tau)\right)^2. \qquad (2.7)
\end{aligned}
$$

Donc, on peut écrire

$$
\begin{aligned}
\Big(J^{\alpha}\left(f(t)g(t)\right)\Big)^2 &= \left(\int_a^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\tau)g(\tau)d\tau\right)^2\\
&= \int_a^t \tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\tau)g(\tau)d\tau \qquad (2.8)\\
&\quad\times \int_a^t \tfrac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\rho)g(\rho)\left(1-e(\tau)+e(\rho)\right)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} d\rho.
\end{aligned}
$$

D'une part, on a $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. En utilisant l'inégalité de Hölder avec poids, on aura donc :

$$
\begin{aligned}
&\int_a^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\tau)g(\tau)d\tau \int_a^t \frac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\rho)g(\rho)\left(1-e(\tau)+e(\rho)\right)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} d\rho\\
&\quad\le \int_a^t \tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{(\Gamma(\alpha))} f(\tau)g(\tau)d\tau \left(\int_a^t \tfrac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f^p(\rho)\left(1-e(\tau)+e(\rho)\right)d\rho\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\quad\times\left(\int_a^t \tfrac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g^q(\rho)\left(1-e(\tau)+e(\rho)\right)d\rho\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}
$$

On remarque au passage que :

$$\int_a^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{(\Gamma(\alpha))} f(\tau)g(\tau)d\tau \left(\int_a^t \frac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f^p(\rho)\left(1-e(\tau)+e(\rho)\right)d\rho\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\times \left(\int_a^t \frac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g^q(\rho)\left(1-e(\tau)+e(\rho)\right)d\rho\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$= \int_a^t \left(\frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{(\Gamma(\alpha))}\right)\left[\left(\int_a^t \frac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g^q(\tau)f^p(\rho)\left(1-e(\tau)+e(\rho)\right)d\rho\right)^{\frac{1}{p}}\right.$$
$$\times \left(\int_a^t \frac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g^q(\tau)g^q(\rho)\left(1-e(\tau)+e(\rho)\right)d\rho\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}$$
$$\left.\times \left(\int_a^t \frac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f^p(\tau)g^q(\rho)\left(1-e(\tau)+e(\rho)\right)d\rho\right)^{\frac{1}{p}}\right]d\tau.$$

Comme $\left(\dfrac{1}{q}-\dfrac{1}{p}\right)+\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p}=1$, on déduit du lemme 2.2.2 que :

$$\int_a^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{(\Gamma(\alpha))} f(\tau)g(\tau)d\tau \left(\int_a^t \frac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f^p(\rho)\left(1-e(\tau)+e(\rho)\right)d\rho\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\times \left(\int_a^t \frac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g^q(\rho)\left(1-e(\tau)+e(\rho)\right)d\rho\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\leq \left(\int_a^t\int_a^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\frac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g^q(\tau)f^p(\rho)\left(1-e(\tau)+e(\rho)\right)d\rho d\tau\right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.9}$$
$$\times \left(\int_a^t\int_a^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\frac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g^q(\tau)g^q(\rho)\left(1-e(\tau)+e(\rho)\right)d\rho d\tau\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}$$
$$\times \left(\int_a^t\int_a^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\frac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f^p(\tau)g^q(\rho)\left(1-e(\tau)+e(\rho)\right)d\rho d\tau\right)^{\frac{1}{p}}.$$

On développe (2.9) comme suit :

$$\begin{aligned}
&\left(\int_a^t\int_a^t \tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tfrac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g^q(\tau)g^q(\rho)\left(1-e(\tau)+e(\rho)\right)d\rho d\tau\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\\
&=\left(\int_a^t \tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g^q(\tau)d\tau \int_a^t \tfrac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g^q(\rho)d\rho\right.\\
&-\int_a^t \tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g^q(\tau)e\left(\tau\right)d\tau \int_a^t \tfrac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g^q(\rho)d\rho\\
&\left.+\int_a^t \tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g^q(\tau)d\tau \int_a^t \tfrac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g^q(\rho)e(\rho)d\rho\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\\
&=\left(\int_a^t \tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g^q(\tau)d\tau\right)^{\frac{2}{q}-\frac{2}{p}}.
\end{aligned}\tag{2.10}$$

On a aussi :

$$\begin{aligned}
&\left(\int_a^t\int_a^t \tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tfrac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g^q(\tau)f^p(\rho)\left(1-e(\tau)+e(\rho)\right)d\rho d\tau\right)^{\frac{1}{p}}\\
&=\left(\int_a^t \tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g^q(\tau)d\tau \int_a^t \tfrac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f^p(\rho)d\rho\right.\\
&-\int_a^t \tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g^q(\tau)e(\tau)d\tau \int_a^t \tfrac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f^p(\rho)d\rho\\
&\left.+\int_a^t \tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g^q(\tau)d\tau \int_a^t \tfrac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f^p(\rho)e(\rho)d\rho\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}\tag{2.11}$$

Et enfin, on a :

$$\begin{aligned}
&\left(\int_a^t\int_a^t \tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tfrac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f^p(\tau)g^q(\rho)\left(1-e(\tau)+e(\rho)\right)d\rho d\tau\right)^{\frac{1}{p}}\\
&=\left(\int_a^t \tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f^p(\tau)d\tau \int_a^t \tfrac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g^q(\rho)d\rho\right.\\
&-\int_a^t \tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f^p(\tau)e(\tau)d\tau \int_a^t \tfrac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g^q(\rho)d\rho\\
&\left.+\int_a^t \tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f^p(\tau)d\tau \int_a^t \tfrac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g^q(\rho)e(\rho)d\rho\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}\tag{2.12}$$

De (2.10) , (2.11) et (2.12) , on a

$$\left(\int_a^t\int_a^t \tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tfrac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g^q(\tau)g^q(\rho)\left(1-e(\tau)+e(\rho)\right)d\rho d\tau\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}$$
$$\times\left(\int_a^t\int_a^t \tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tfrac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g^q(\tau)f^p(\rho)\left(1-e(\tau)+e(\rho)\right)d\rho d\tau\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\times\left(\int_a^t\int_a^t \tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tfrac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f^p(\tau)g^q(\rho)\left(1-e(\tau)+e(\rho)\right)d\rho d\tau\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$=\left(\int_a^t \tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g^q(\tau)d\tau\right)^{\frac{2}{q}-\frac{2}{p}}$$
$$\times\Bigg\{\left[\left(\int_a^t \tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f^p(\tau)d\tau\right)\left(\int_a^t \tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g^q(\tau)d\tau\right)\right]^2$$
$$-\Bigg[\left(\int_a^t \tfrac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g^q(\rho)e(\rho)d\rho\right)\left(\int_a^t \tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f^p(\tau)d\tau\right)$$
$$-\left(\int_a^t \tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g^q(\tau)d\tau\right)\left(\int_a^t \tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f^p(\tau)e(\tau)d\tau\right)\Bigg]^2\Bigg\}^{\frac{1}{p}}.$$

Par conséquent, on obtient :

$$\int_a^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\tau)g(\tau)d\tau\int_a^t \frac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\rho)g(\rho)\left(1-e(\tau)+e(\rho)\right)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}d\rho$$
$$\leq\left(\int_a^t \tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g^q(\tau)d\tau\right)^{\frac{2}{q}-\frac{2}{p}}$$
$$\times\Bigg\{\left[\left(\int_a^t \tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f^p(\tau)d\tau\right)\left(\int_a^t \tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g^q(\tau)d\tau\right)\right]^2$$
$$-\Bigg[\left(\int_a^t \tfrac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g^q(\rho)e(\rho)d\rho\right)\left(\int_a^t \tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f^p(\tau)d\tau\right)$$
$$-\left(\int_a^t \tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g^q(\tau)d\tau\right)\left(\int_a^t \tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f^p(\tau)e(\tau)d\tau\right)\Bigg]^2\Bigg\}^{\frac{1}{p}}.$$

Donc, on peut écrire

$$\left(\int_a^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g^q(\tau)d\tau\right)^{\frac{2}{q}-\frac{2}{p}}$$
$$\times\Bigg\{\Bigg[\left(\int_a^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f^p(\tau)d\tau\right)\left(\int_a^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g^q(\tau)d\tau\right)\Bigg]^2$$
$$-\Bigg[\left(\int_a^t \frac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g^q(\rho)e(\rho)d\rho\right)\left(\int_a^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f^p(\tau)d\tau\right)$$
$$-\left(\int_a^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g^q(\tau)d\tau\right)\left(\int_a^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f^p(\tau)e(\tau)d\tau\right)\Bigg]^2\Bigg\}^{\frac{1}{p}}$$
$$= \left(J^\alpha g^q(t)\right)^{\frac{2}{q}-\frac{2}{p}}\Bigg\{\Bigg[\left(J^\alpha f^p(t)\right)\left(J^\alpha g^q(t)\right)\Bigg]^2$$
$$-\Bigg[\left(J^\alpha\left(g^q(t)e(t)\right)\right)\left(J^\alpha f^p(t)\right) - \left(J^\alpha g^q(t)\right)\left(J^\alpha\left(f^p(t)e(t)\right)\right)\Bigg]^2\Bigg\}^{\frac{1}{p}}.$$

D'où, on a :

$$\begin{aligned}
&\int_a^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\tau)g(\tau)d\tau \int_a^t \frac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\rho)g(\rho)\left(1-e(\tau)+e(\rho)\right)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} d\rho \\
&\quad\le \left(J^\alpha g^q(t)\right)^{\frac{2}{q}-\frac{2}{p}}\Bigg\{\Bigg[\left(J^\alpha f^p(t)\right)\left(J^\alpha g^q(t)\right)\Bigg]^2 \\
&\quad -\Bigg[\left(J^\alpha\left(g^q(t)e(t)\right)\right)\left(J^\alpha f^p(t)\right) - \left(J^\alpha g^q(t)\right)\left(J^\alpha\left(f^p(t)e(t)\right)\right)\Bigg]^2\Bigg\}^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Grâce à (2.8) et (2.13) on a (2.4).
Le théorème est démontré dans le premier cas.

Passons maintenant à la 2^{eme} étape.

Étape 2 : On prend $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} < 1$. On choisit $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = r$ $(0 < r < 1)$, ce qui implique $\frac{1}{pr}+\frac{1}{qr} = 1$.
Dans ce cas, on observe que :

$$\int_a^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\tau)g(\tau)d\tau \int_a^t \frac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\rho)g(\rho)\left(1-e(\tau)+e(\rho)\right)d\rho$$
$$= \int_a^t\int_a^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\tau)g(\tau)\frac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\rho)g(\rho)d\tau d\rho$$

$$
\begin{aligned}
&-\int_a^t\int_a^t \tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\tau)g(\tau)\tfrac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\rho)g(\rho)e(\tau)d\tau d\rho\\
&+\int_a^t\int_a^t \tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\tau)g(\tau)\tfrac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\rho)g(\rho)e(\rho)d\tau d\rho \qquad (2.14)\\
&=\left(\int_a^t \tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\tau)g(\tau)\right)^2 .
\end{aligned}
$$

D'une part, appliquant l'inégalité de Hölder, on aura

$$
\begin{aligned}
&\int_a^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\tau)g(\tau)d\tau \int_a^t \frac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\rho)g(\rho)\left(1-e(\tau)+e(\rho)\right)d\rho\\
&=\int_a^t \tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\tau)g(\tau)d\tau \int_a^t \left(\tfrac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\frac{1}{pr}+\frac{1}{qr}} f(\rho)g(\rho)\left(1-e(\tau)+e(\rho)\right)^{\frac{1}{pr}+\frac{1}{qr}} d\rho\\
&\leq \int_a^t \tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\tau)g(\tau)d\tau \left[\left(\int_a^t \tfrac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left(f(\rho)\right)^{pr}\left(1-e(\tau)+e(\rho)\right)d\rho\right)^{\frac{1}{pr}}\right.\\
&\quad\times\left.\left(\int_a^t \tfrac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left(g(\rho)\right)^{qr}\left(1-e(\tau)+e(\rho)\right)d\rho\right)^{\frac{1}{qr}}\right].
\end{aligned}
$$

On remarque aussi que :

$$
\begin{aligned}
&\int_a^t \tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\tau)g(\tau)d\tau \left[\left(\int_a^t \tfrac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left(f(\rho)\right)^{pr}\left(1-e(\tau)+e(\rho)\right)d\rho\right)^{\frac{1}{pr}}\right.\\
&\quad\times\left.\left(\int_a^t \tfrac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left(g(\rho)\right)^{qr}\left(1-e(\tau)+e(\rho)\right)d\rho\right)^{\frac{1}{qr}}\right]\\
&=\int_a^t \left[\left(\int_a^t \tfrac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left(g(\tau)g(\rho)\right)^{qr}\left(1-e(\tau)+e(\rho)\right)d\rho\right)^{\frac{1}{qr}-\frac{1}{pr}}\right.\\
&\quad\times\left(\int_a^t \tfrac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left(f(\tau)\right)^{pr}\left(g(\rho)\right)^{qr}\left(1-e(\tau)+e(\rho)\right)d\rho\right)^{\frac{1}{pr}}\\
&\quad\times\left.\left(\int_a^t \tfrac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left(f(\rho)\right)^{pr}\left(g(\tau)\right)^{qr}\left(1-e(\tau)+e(\rho)\right)d\rho\right)^{\frac{1}{pr}}\right]d\tau.
\end{aligned}
$$

D'où

$$
\int_a^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\tau)g(\tau)d\tau \int_a^t \frac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\rho)g(\rho)\left(1-e(\tau)+e(\rho)\right)d\rho
$$

$$\leq \int_a^t \left[\left(\int_a^t \tfrac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left(g(\tau)g(\rho)\right)^{qr} \left(1-e(\tau)+e(\rho)\right) d\rho \right)^{\frac{1}{qr}-\frac{1}{pr}} \right.$$
$$\times \left(\int_a^t \tfrac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left(f(\tau)\right)^{pr} \left(g(\rho)\right)^{qr} \left(1-e(\tau)+e(\rho)\right) d\rho \right)^{\frac{1}{pr}} \tag{2.15}$$
$$\left. \times \left(\int_a^t \tfrac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left(f(\rho)\right)^{pr} \left(g(\tau)\right)^{qr} \left(1-e(\tau)+e(\rho)\right) d\rho \right)^{\frac{1}{pr}} \right] d\tau$$

On a $\left(\dfrac{1}{qr}-\dfrac{1}{pr}\right)+\dfrac{1}{pr}+\dfrac{1}{pr}=1$. En appliquant le Lemme 2.2.2, on va avoir :

$$\int_a^t \left[\left(\int_a^t \tfrac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left(g(\tau)g(\rho)\right)^{qr} \left(1-e(\tau)+e(\rho)\right) d\rho \right)^{\frac{1}{qr}-\frac{1}{pr}} \right.$$
$$\times \left(\int_a^t \tfrac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left(f(\tau)\right)^{pr} \left(g(\rho)\right)^{qr} \left(1-e(\tau)+e(\rho)\right) d\rho \right)^{\frac{1}{pr}}$$
$$\left. \times \left(\int_a^t \tfrac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left(f(\rho)\right)^{pr} \left(g(\tau)\right)^{qr} \left(1-e(\tau)+e(\rho)\right) d\rho \right)^{\frac{1}{pr}} \right] d\tau$$
$$\leq \left(\int_a^t \int_a^t \tfrac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left(g(\tau)\right)^{qr} \left(g(\rho)\right)^{qr} \left(1-e(\tau)+e(\rho)\right) d\rho d\tau \right)^{\frac{1}{qr}-\frac{1}{pr}}$$
$$\times \left(\int_a^t \int_a^t \tfrac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left(f(\tau)\right)^{pr} \left(g(\rho)\right)^{qr} \left(1-e(\tau)+e(\rho)\right) d\rho d\tau \right)^{\frac{1}{pr}}$$
$$\times \left(\int_a^t \int_a^t \tfrac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left(f(\rho)\right)^{pr} \left(g(\tau)\right)^{qr} \left(1-e(\tau)+e(\rho)\right) d\rho d\tau \right)^{\frac{1}{pr}}.$$

La formule (2.15) nous donne :

$$\int_a^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\tau)g(\tau)d\tau \int_a^t \frac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\rho)g(\rho)\left(1-e(\tau)+e(\rho)\right) d\rho$$
$$\leq \left(\int_a^t \int_a^t \tfrac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left(g(\tau)\right)^{qr} \left(g(\rho)\right)^{qr} \left(1-e(\tau)+e(\rho)\right) d\rho d\tau \right)^{\frac{1}{qr}-\frac{1}{pr}}$$

$$\times\left(\int_a^t\int_a^t \tfrac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(f(\tau)\right)^{pr}\left(g(\rho)\right)^{qr}\left(1-e(\tau)+e(\rho)\right)d\rho d\tau\right)^{\frac{1}{pr}}$$
$$\times\left(\int_a^t\int_a^t \tfrac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(f(\rho)\right)^{pr}\left(g(\tau)\right)^{qr}\left(1-e(\tau)+e(\rho)\right)d\rho d\tau\right)^{\frac{1}{pr}}. \tag{2.16}$$

En appliquant le lemme 2.2.1 en tenant compte de $0 < r < 1$, on obtient :

$$\begin{aligned}&\left(\int_a^t\int_a^t \frac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(g(\tau)\right)^{qr}\left(g(\rho)\right)^{qr}\left(1-e(\tau)+e(\rho)\right)d\rho d\tau\right)^{\frac{1}{qr}-\frac{1}{pr}}\\ &\leq\left(\int_a^t\int_a^t\left(1-e(\tau)+e(\rho)\right)d\rho d\tau\right)^{(1-r)\left(\frac{1}{qr}-\frac{1}{pr}\right)}\\ &\times\left(\int_a^t\int_a^t \tfrac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(g(\tau)\right)^{q}\left(g(\rho)\right)^{q}\left(1-e(\tau)+e(\rho)\right)d\rho d\tau\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}.\end{aligned} \tag{2.17}$$

On a aussi :

$$\begin{aligned}&\left(\int_a^t\int_a^t \tfrac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(f(\tau)\right)^{pr}\left(g(\rho)\right)^{qr}\left(1-e\left(\tau\right)+e\left(\rho\right)\right)d\rho d\tau\right)^{\frac{1}{pr}}\\ &\leq\left(\int_a^t\int_a^t\left(1-e(\tau)+e(\rho)\right)d\rho d\tau\right)^{(1-r)\frac{1}{pr}}\\ &\times\left(\int_a^t\int_a^t \tfrac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(f(\tau)\right)^{p}\left(g(\rho)\right)^{q}\left(1-e(\tau)+e(\rho)\right)d\rho d\tau\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned} \tag{2.18}$$

De (2.17) et (2.18), on a

$$\begin{aligned}&\left(\int_a^t\int_a^t \frac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(g(\tau)\right)^{qr}\left(g(\rho)\right)^{qr}\left(1-e(\tau)+e(\rho)\right)d\rho d\tau\right)^{\frac{1}{qr}-\frac{1}{pr}}\\ &\times\left(\int_a^t\int_a^t \tfrac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(f(\tau)\right)^{pr}\left(g(\rho)\right)^{qr}\left(1-e\left(\tau\right)+e\left(\rho\right)\right)d\rho d\tau\right)^{\frac{1}{pr}}\\ &\times\left(\int_a^t\int_a^t \tfrac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(f(\rho)\right)^{pr}\left(g(\tau)\right)^{qr}\left(1-e(\tau)+e(\rho)\right)d\rho d\tau\right)^{\frac{1}{pr}}\\ &\leq\left(\int_a^t\int_a^t\left(1-e(\tau)+e(\rho)\right)d\rho d\tau\right)^{(1-r)\left(\frac{1}{qr}-\frac{1}{pr}\right)+(1-r)\frac{1}{pr}+(1-r)\frac{1}{pr}}\end{aligned}$$

$$\times\left(\int_a^t\int_a^t \tfrac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(g(\tau)\right)^q\left(g(\rho)\right)^q\left(1-e(\tau)+e(\rho)\right)d\rho d\tau\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}$$

$$\times\left(\int_a^t\int_a^t \tfrac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(f(\tau)\right)^p\left(g(\rho)\right)^q\left(1-e(\tau)+e(\rho)\right)d\rho d\tau\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times\left(\int_a^t\int_a^t \tfrac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(f(\rho)\right)^p\left(g(\tau)\right)^q\left(1-e(\tau)+e(\rho)\right)d\rho d\tau\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}
&\left(\int_a^t\int_a^t \frac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(g(\tau)\right)^{qr}\left(g(\rho)\right)^{qr}\left(1-e(\tau)+e(\rho)\right)d\rho d\tau\right)^{\frac{1}{qr}-\frac{1}{pr}}\\
&\quad\times\left(\int_a^t\int_a^t \tfrac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(f(\tau)\right)^{pr}\left(g(\rho)\right)^{qr}\left(1-e\left(\tau\right)+e\left(\rho\right)\right)d\rho d\tau\right)^{\frac{1}{pr}}\\
&\quad\times\left(\int_a^t\int_a^t \tfrac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(f(\rho)\right)^{pr}\left(g(\tau)\right)^{qr}\left(1-e(\tau)+e(\rho)\right)d\rho d\tau\right)^{\frac{1}{pr}}\\
&\leq\left(\int_a^t\int_a^t\left(1-e(\tau)+e(\rho)\right)d\rho d\tau\right)^{(1-r)}\\
&\quad\times\left(\int_a^t\int_a^t \tfrac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(g(\tau)\right)^q\left(g(\rho)\right)^q\left(1-e(\tau)+e(\rho)\right)d\rho d\tau\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\\
&\quad\times\left(\int_a^t\int_a^t \tfrac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(f(\tau)\right)^p\left(g(\rho)\right)^q\left(1-e(\tau)+e(\rho)\right)d\rho d\tau\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\quad\times\left(\int_a^t\int_a^t \tfrac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(f(\rho)\right)^p\left(g(\tau)\right)^q\left(1-e(\tau)+e(\rho)\right)d\rho d\tau\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&=(t-a)^{2-2r}\Bigg[\Bigg(\int_a^t \tfrac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(g(\rho)\right)^q d\rho\int_a^t \tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(g(\tau)\right)^q d\tau\\
&\quad-\int_a^t \tfrac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(g(\rho)\right)^q d\rho\int_a^t \tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(g(\tau)\right)^q e(\tau)d\tau\\
&\quad+\int_a^t \tfrac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(g(\rho)\right)^q e\left(\rho\right)d\rho\int_a^t \tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(g(\tau)\right)^q d\tau\Bigg)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

$$\times\left(\int_a^t \tfrac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(g(\rho)\right)^q d\rho \int_a^t \tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(f(\tau)\right)^p d\tau\right.$$
$$-\int_a^t \tfrac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(g(\rho)\right)^q d\rho \int_a^t \tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(f(\tau)\right)^p e(\tau) d\tau$$
$$\left.+\int_a^t \tfrac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(g(\rho)\right)^q e(\rho) d\rho \int_a^t \tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(f(\tau)\right)^p d\tau\right)^{\frac{1}{p}}.$$

$$\times\left(\int_a^t \tfrac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(f(\rho)\right)^p d\rho \int_a^t \tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(g(\tau)\right)^q d\tau\right.$$
$$-\int_a^t \tfrac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(f(\rho)\right)^p d\rho \int_a^t \tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(g(\tau)\right)^q e(\tau) d\tau$$
$$\left.+\int_a^t \tfrac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(f(\rho)\right)^p e(\rho) d\rho \int_a^t \tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(g(\tau)\right)^q d\tau\right)^{\frac{1}{p}}\Bigg].$$

Donc,

$$\begin{aligned}
&\left(\int_a^t\int_a^t \frac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(g(\tau)\right)^{qr}\left(g(\rho)\right)^{qr}\left(1-e(\tau)+e(\rho)\right)d\rho d\tau\right)^{\frac{1}{qr}-\frac{1}{pr}} \\
&\quad\times\left(\int_a^t\int_a^t \tfrac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(f(\tau)\right)^{pr}\left(g(\rho)\right)^{qr}\left(1-e\left(\tau\right)+e\left(\rho\right)\right)d\rho d\tau\right)^{\frac{1}{pr}} \\
&\quad\times\left(\int_a^t\int_a^t \tfrac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(f(\rho)\right)^{pr}\left(g(\tau)\right)^{qr}\left(1-e(\tau)+e(\rho)\right)d\rho d\tau\right)^{\frac{1}{pr}} \\
&\quad\leq (t-a)^{2\left(1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\left(\int_a^t \tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g^q(\tau)d\tau\right)^{\frac{2}{q}-\frac{2}{p}} \qquad (2.19)\\
&\quad\times\Bigg\{\left[\left(\int_a^t \tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f^p(\tau)d\tau\right)\left(\int_a^t \tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g^q(\tau)d\tau\right)\right]^2 \\
&\quad-\Bigg[\left(\int_a^t \tfrac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g^q(\rho)e(\rho)d\rho\right)\left(\int_a^t \tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f^p(\tau)d\tau\right) \\
&\quad-\left(\int_a^t \tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g^q(\tau)d\tau\right)\left(\int_a^t \tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f^p(\tau)e(\tau)d\tau\right)\Bigg]^2\Bigg\}.
\end{aligned}$$

Des formules (2.16) et (2.19), on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_a^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\tau)g(\tau)d\tau \int_a^t \frac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\rho)g(\rho)\left(1-e(\tau)+e(\rho)\right)d\rho \\
&\quad\le (t-a)^{2\left(1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \left(\int_a^t \tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g^q(\tau)d\tau\right)^{\frac{2}{q}-\frac{2}{p}} \\
&\quad\times\Bigg\{\left[\left(\int_a^t \tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f^p(\tau)d\tau\right)\left(\int_a^t \tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g^q(\tau)d\tau\right)\right]^2 \\
&\quad-\Bigg[\left(\int_a^t \tfrac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g^q(\rho)e(\rho)d\rho\right)\left(\int_a^t \tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f^p(\tau)d\tau\right) \\
&\quad-\left(\int_a^t \tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g^q(\tau)d\tau\right)\left(\int_a^t \tfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f^p(\tau)e(\tau)d\tau\right)\Bigg]^2\Bigg\} \\
&= (t-a)^{2\left(1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \left(J^\alpha g^q(t)\right)^{\frac{2}{q}-\frac{2}{p}} \\
&\times\left\{\left[\left(J^\alpha f^p(t)\right)\left(J^\alpha g^q(t)\right)\right]^2 - \left[\left(J^\alpha\left(g^q(t)e(t)\right)\right)\left(J^\alpha f^p(t)\right) - \left(J^\alpha g^q(t)\right)\left(J^\alpha\left(f^p(t)e(t)\right)\right)\right]^2\right\}^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Grâce aux inégalités (2.14) et (2.20), on obtient l'inégalité (2.4). Le théorème 2.2.1 est ainsi prouvé.

Remarque 2.2.1 Il est clair que le résultat du théorème 2.1.1 est un cas particulier de celui du théorème 2.2.1 quand $\alpha = 1, t = b$.

Une autre résultat qu'on peut récupérer, et qui est déjà établit pour un autre espace dans [12], est donné par le corollaire suivant.

Corollaire 2.2.1 *Soient* f, g *deux fonctions définies sur* $[a, b]$ *et* $f \geq 0, g \geq 0$, telles que $f^p, g^q \in L^1([a, b]), p \geq q > 0, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Alors pour tout* $\alpha > 0, t \in]a, b]$, *on a :*

$$J^\alpha[f(t)g(t)] \leq \left(J^\alpha g^q(t)\right)^{\frac{1}{q}} \left(J^\alpha f^p(t)\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.21}$$

Démonstration : En appliquant le théorème 2.2.1 pour $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $e(t) = 1$, on obtient

$$\begin{aligned}
J^\alpha[f(t)g(t)] &\leq \left(J^\alpha g^q(t)\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left[\left(J^\alpha g^q(t) J^\alpha f^p(t)\right)^2\right]^{\frac{1}{2p}} \\
&= \left(J^\alpha g^q(t)\right)^{\frac{1}{q}} \left(J^\alpha f^p(t)\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Remarque 2.2.2 Appliquant le corollaire 2.2.1 pour $\alpha = 1$, on obtient l'inégalité classique de Hölder.

Chapitre 3

INEGALITES INTEGRALES FRACTIONNAIRES AU SENS DE Q-CALCUL

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on présente quelques résultats sur les inégalités q-intégrales. Pour plus de détails, on cite [14].

3.2 Résultats Préliminaires Sur Les Inégalités q-Intégrales

Dans [35], Ngo et al. ont démontré que

$$\int_0^1 f^{\delta+1}(\tau)\, d\tau \geq \int_0^1 \tau^{\delta} f(\tau)\, d\tau \tag{3.1}$$

et

$$\int_0^1 f^{\delta+1}(\tau)\, d\tau \geq \int_0^1 \tau f^{\delta}(\tau)\, d\tau \ , \tag{3.2}$$

tels que $\delta > 0$ et f soit une fonction continue et positive sur l'intervalle $[0,1]$, vérifiant :

$$\int_x^1 f(\tau)\, d\tau \geq \int_x^1 \tau d\tau \quad , \quad x \in [0,1]\,. \tag{3.3}$$

Dans [29], W.J. Liu et al. ont généralisé le résultat de Ngo (avec ses co auteurs) en démontrant que

$$\int_a^b f^{\alpha+\beta}(\tau)\, d\tau \geq \int_a^b (\tau-a)^{\alpha} f^{\beta}(\tau)\, d\tau \ , \tag{3.4}$$

où $\alpha > 0, \beta > 0$ et f est une fonction continue et positive sur l'intervalle $[a, b]$, telle que :

$$\int_x^b f^{\gamma}(\tau)\, d\tau \geq \int_x^b (\tau - a)^{\gamma}\, d\tau \quad , \quad \gamma = \min(1, \beta), \ x \in [a, b]. \tag{3.5}$$

Dans [32], Liu et al. ont démontré que pour toute fonction f positive, continue et décroissante sur $[a, b]$, alors le résultat suivant :

$$\frac{\int_a^b f^{\beta}(\tau) d\tau}{\int_a^b f^{\gamma}(\tau) d\tau} \geq \frac{\int_a^b (\tau - a)^{\delta} f^{\beta}(\tau) d\tau}{\int_a^b (\tau - a)^{\delta} f^{\gamma}(\tau) d\tau}, \beta \geq \gamma > 0, \delta > 0 \tag{3.6}$$

est valide.

Ce résultat a été généralisé dans [32] comme suit :

Théorème 3.1.1 *Soient $f > 0$ et $g > 0$ deux fonctions continues sur $[a, b]$, telles que f soit décroissante et g croissante. Alors pour tout $\beta \geq \gamma > 0, \delta > 0$, on a*

$$\frac{\int_a^b f^{\beta}(\tau) d\tau}{\int_a^b f^{\gamma}(\tau) d\tau} \geq \frac{\int_a^b g^{\delta}(\tau) f^{\beta}(\tau) d\tau}{\int_a^b g^{\delta}(\tau) f^{\gamma}(\tau) d\tau} . \tag{3.7}$$

Les mêmes auteurs ont établit le résultat suivant :

Théorème 3.1.2 *Soient $f > 0$ et $g > 0$ deux fonctions continues sur $[a, b]$, telles que*

$$\left(f^{\delta}(\tau) g^{\delta}(\rho) - f^{\delta}(\rho) g^{\delta}(\tau)\right) \left(f^{\beta-\gamma}(\tau) - f^{\beta-\gamma}(\rho)\right) \geq 0; \tau, \rho \in [a, b].$$

Alors pour tout $\beta \geq \gamma > 0, \delta > 0$, on a

$$\frac{\int_a^b f^{\delta+\beta}(\tau) d\tau}{\int_a^b f^{\delta+\gamma}(\tau) d\tau} \geq \frac{\int_a^b g^{\delta}(\tau) f^{\beta}(\tau) d\tau}{\int_a^b g^{\delta}(\tau) f^{\gamma}(\tau) d\tau}. \tag{3.8}$$

Dans [13, 16], Z. Dahmani et ses co auteurs ont établit des généralisations pour certains résultats de [32], en utilisant la théorie d'intégrale fractionnaire.
Beaucoup de chercheurs ont étudié et généralisé les inégalités (3.1),(3.4) et (3.6) et un certain nombre de prolongements et de généralisations sont apparus dans la littérature (e.g. [8, 9, 13, 16, 31, 30, 38]).

3.3 Résultats Principaux

On commence par le théorème suivant :

Théorème 3.2.1 [14] *Soit f une fonction positive décroissante et continue sur T_{t_0}. Alors pour tout $\alpha > 0, \beta \geq \gamma > 0, \delta > 0$, on a*

$$\frac{\nabla_q^{-\alpha}[f^{\beta}(t)]}{\nabla_q^{-\alpha}[f^{\gamma}(t)]} \geq \frac{\nabla_q^{-\alpha}[t^{\delta} f^{\beta}(t)]}{\nabla_q^{-\alpha}[t^{\delta} f^{\gamma}(t)]}, t > 0. \tag{3.9}$$

Démonstration
La fonction f est positive décroissante et continue sur T_{t_0}.

Alors pour $t \in T_{t_0}$ et pour tout $\beta \geq \gamma > 0, \delta > 0, \tau, \rho \in (0, t)$, on a

$$\left(\rho^{\delta} - \tau^{\delta}\right)\left(f^{\beta-\gamma}(\tau) - f^{\beta-\gamma}(\rho)\right) \geq 0. \tag{3.10}$$

Considérons

$$H(\tau, \rho) := f^{\gamma}(\tau) f^{\gamma}(\rho)\left(\rho^{\delta} - \tau^{\delta}\right)\left(f^{\beta-\gamma}(\tau) - f^{\beta-\gamma}(\rho)\right). \tag{3.11}$$

On multiplie les deux membre de (3.11) par $\frac{(t-q\tau)^{\underline{(\alpha-1)}}}{\Gamma_q(\alpha)} \frac{(t-q\rho)^{\underline{(\alpha-1)}}}{\Gamma_q(\alpha)}$, et par double intégration par rapport à τ et ρ sur $[0, t]$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} 2^{-1} \int_0^t \int_0^t \frac{(t-q\tau)^{\underline{(\alpha-1)}}}{\Gamma_q(\alpha)} \frac{(t-q\rho)^{\underline{(\alpha-1)}}}{\Gamma_q(\alpha)} H(\tau, \rho) \nabla\tau \nabla\rho &= \nabla_q^{-\alpha}[f^{\beta}(t)] \nabla_q^{-\alpha}[t^{\delta} f^{\gamma}(t)] \\ &\quad -\nabla_q^{-\alpha}[f^{\gamma}(t)] \nabla_q^{-\alpha}[t^{\delta} f^{\beta}(t)] \geq 0. \end{aligned} \tag{3.12}$$

La preuve du théorème 3.2.1 est achevée.

On donne aussi le théorème suivant :

Théorème 3.2.2 [14] *Soient f, g et h des fonctions positives et continues sur T_{t_0}, telles que :*

$$\left(g(\tau) - g(\rho)\right)\left(\frac{f(\rho)}{h(\rho)} - \frac{f(\tau)}{h(\tau)}\right) \geq 0; \tau, \rho \in (0, t), t > 0. \tag{3.13}$$

Alors, on a

$$\frac{\nabla_q^{-\alpha}(f(t))}{\nabla_q^{-\alpha}(h(t))} \geq \frac{\nabla_q^{-\alpha}(gf(t))}{\nabla_q^{-\alpha}(gh(t))}, \tag{3.14}$$

pour tous $\alpha > 0, t > 0$.

Démonstration
Soient f, g et h des fonctions positives et continues sur T_{t_0}. Par (3.13), on peut écrire

$$g(\tau)\frac{f(\rho)}{h(\rho)} + g(\rho)\frac{f(\tau)}{h(\tau)} - g(\rho)\frac{f(\rho)}{h(\rho)} - g(\tau)\frac{f(\tau)}{h(\tau)} \geq 0, \tag{3.15}$$

où $\tau, \rho \in (0, t), t > 0$.

Par conséquent,

$$g(\tau)f(\rho)h(\tau) + g(\rho)f(\tau)h(\rho) - g(\rho)f(\rho)h(\tau) - g(\tau)f(\tau)h(\rho) \geq 0, \tau, \rho \in (0,t), t > 0. \tag{3.16}$$

On multiplie les deux membres de (3.16) par $\frac{(t-q\tau)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)}$, et par une intégration par rapport à τ sur $[0,t]$, on obtient

$$f(\rho)\nabla_q^{-\alpha}gh(t) + g(\rho)h(\rho)\nabla_q^{-\alpha}f(t) - g(\rho)f(\rho)\nabla_q^{-\alpha}h(t) - h(\rho)\nabla_q^{-\alpha}gf(t) \geq 0. \tag{3.17}$$

Donc,

$$\nabla_q^{-\alpha}f(t)\nabla_q^{-\alpha}gh(t) - \nabla_q^{-\alpha}h(t)\nabla_q^{-\alpha}gf(t) \geq 0. \tag{3.18}$$

Ceci achève la preuve du théorème 3.2.2.

On a aussi le résultat suivant :

Théorème 3.2.3 [14] *Soient f, g et h des fonctions positives et continues sur T_{t_0}, telles que :*

$$\Big(g(\tau) - g(\rho)\Big)\Big(\frac{f(\rho)}{h(\rho)} - \frac{f(\tau)}{h(\tau)}\Big) \geq 0; \tau, \rho \in (0,t), t > 0. \tag{3.19}$$

Alors on a :

$$\frac{\nabla_q^{-\alpha}(f(t))\nabla_q^{-\omega}(gh(t)) + \nabla_q^{-\omega}(f(t))\nabla_q^{-\alpha}(gh(t))}{\nabla_q^{-\alpha}(h(t))\nabla_q^{-\omega}(gf(t)) + \nabla_q^{-\omega}(h(t))\nabla_q^{-\alpha}(gf(t))} \geq 1 \tag{3.20}$$

pour tous $\alpha > 0, \omega, t > 0$.

Démonstration
De l'inégalité (3.17), on peut écrire

$$\begin{aligned} &\frac{(t-q\rho)^{\underline{\omega-1}}}{\Gamma_q(\omega)}\Big(f(\rho)\nabla_q^{-\alpha}gh(t) + g(\rho)h(\rho)\nabla_q^{-\alpha}f(t) \\ &-g(\rho)f(\rho)\nabla_q^{-\alpha}h(t) - h(\rho)\nabla_q^{-\alpha}gf(t)\Big) \geq 0. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Ce qui implique :

$$\begin{aligned} &\nabla_q^{-\omega}(f(t))\nabla_q^{-\alpha}(gh(t)) + \nabla_q^{-\alpha}(f(t))\nabla_q^{-\omega}(gh(t)) \\ &\geq \nabla_q^{-\alpha}(h(t))\nabla_q^{-\omega}(gf(t)) + \nabla_q^{-\omega}(h(t))\nabla_q^{-\alpha}(gf(t)). \end{aligned} \tag{3.22}$$

le théorème 3.2.3 est ainsi prouvé.

Remarque 3.2.1 Il est clair que le théorème 3.2.2 est un cas particulier du théorème 3.2.3 pour $\alpha = \omega$.

On a à démontrée aussi le théorème suivant :

Théorème 3.2.4 [14] *Soient f et h des fonctions positives et continues telles que $f \leq h$ sur T_{t_0}. Si $\frac{f}{h}$ est décroissante et f est croissante sur T_{t_0}, alors pour tous $p \geq 1, \alpha > 0, t > 0$, l'inégalité*

$$\frac{\nabla_q^{-\alpha}(f(t))}{\nabla_q^{-\alpha}(h(t))} \geq \frac{\nabla_q^{-\alpha}(f^p(t))}{\nabla_q^{-\alpha}(h^p(t))} \tag{3.23}$$

est valide.

Démonstration
Grâce au théorème 3.2.2, on a

$$\frac{\nabla_q^{-\alpha}(f(t))}{\nabla_q^{-\alpha}(h(t))} \geq \frac{\nabla_q^{-\alpha}(ff^{p-1}(t))}{\nabla_q^{-\alpha}(hf^{p-1}(t))}. \tag{3.24}$$

L'hypothèse $f \leq h$ sur T_{t_0} implique :

$$\frac{(t-q\tau)^{\underline{\alpha-1}}}{\Gamma_q(\alpha)} hf^{p-1}(\tau) \leq \frac{(t-q\tau)^{\underline{\alpha-1}}}{\Gamma_q(\alpha)} h^p(\tau), \tau \in (0,t), t > 0. \tag{3.25}$$

Alors par une intégration sur $(0, t)$, on obtient

$$\nabla_q^{-\alpha}(hf^{p-1}(t)) \leq \nabla_q^{-\alpha}(h^p(t)), \tag{3.26}$$

donc,

$$\frac{\nabla_q^{-\alpha}(ff^{p-1}(t))}{\nabla_q^{-\alpha}(hf^{p-1}(t))} \geq \frac{\nabla_q^{-\alpha}(f^p(t))}{\nabla_q^{-\alpha}(h^p(t))}. \tag{3.27}$$

Alors, de (3.24) et (3.27), on obtient (3.23).

Un autre résultat est donné par le théorème suivant :

Théorème 3.2.5 [14] *Soient f* et *h deux fonctions positives et continues telles que $f \leq h$ sur T_{t_0}. Si $\frac{f}{h}$ est décroissante et f est croissante sur T_{t_0}, alors pour tous $p \geq 1, \alpha > 0, \omega > 0, t > 0$, on a*

$$\frac{\nabla_q^{-\alpha}(f(t))\nabla_q^{-\omega}(h^p(t)) + \nabla_q^{-\omega}(f(t))\nabla_q^{-\alpha}(h^p(t))}{\nabla_q^{-\alpha}(h(t))\nabla_q^{-\omega}(f^p(t)) + \nabla_q^{-\omega}(h(t))\nabla_q^{-\alpha}(f^p(t))} \geq 1. \tag{3.28}$$

Démonstration
On prend $g := f^{p-1}$ dans le théorème 3.2.4. Alors on obtient

$$\frac{\nabla_q^{-\alpha}(f(t))\nabla_q^{-\omega}(hf^{p-1}(t)) + \nabla_q^{-\omega}(f(t))\nabla_q^{-\alpha}(hf^{p-1}(t))}{\nabla_q^{-\alpha}(h(t))\nabla_q^{-\omega}(f^p(t)) + \nabla_q^{-\omega}(h(t))\nabla_q^{-\alpha}(f^p(t))} \geq 1. \tag{3.29}$$

L'hypothèse $f \leq h$ sur T_{t_0} implique :

$$\frac{(t-q\rho)^{\underline{\omega-1}}}{\Gamma_q(\omega)} hf^{p-1}(\rho) \leq \frac{(t-q\rho)^{\underline{\omega-1}}}{\Gamma_q(\omega)} h^p(\rho), \rho \in (0,t), t > 0. \tag{3.30}$$

L'intégration des deux membres de (3.30) par rapport à ρ sur $(0,t)$, donne

$$\nabla_q^{-\omega}(hf^{p-1}(t)) \leq \nabla_q^{-\omega}(h^p(t)). \tag{3.31}$$

Par (3.26) et (3.31), on a

$$\begin{aligned} &\nabla_q^{-\alpha} f(t)\nabla_q^{-\omega}(hf^{p-1}(t)) + \nabla_q^{-\omega} f(t)\nabla_q^{-\alpha}(hf^{p-1}(t)) \\ &\leq \nabla_q^{-\alpha} f(t)\nabla_q^{-\omega}(h^p(t)) + \nabla_q^{-\omega} f(t)\nabla_q^{-\alpha}(h^p(t)). \end{aligned} \tag{3.32}$$

Par (3.29) et (3.32), on achève la preuve de théorème.

Remarque 3.2.2 Dans le théorème 3.2.5, si on prend $\alpha = \omega$, on obtient le théorème 3.2.4.

Chapitre 4

EQUATIONS DIFFERENTIELLES FRACTIONNAIRES NON LINEAIRES

4.1 Introduction

Généralement les équations de Lane-Emden sont rencontrées dans quelques modèles de la physique mathématique et de l'astrophysique en particulier [4, 10, 23, 26]. Le modèle type de ces équations a la forme d'une EDO d'ordre 2. Il est donné par :

$$x^{''}(t) + \frac{a}{t} x^{'}(t) + f(t, x(t)) = g(t), \ t \in \left]0, 1\right],$$

avec les conditions :

$$x(0) = A, \ x^{'}(0) = B,$$

telles que A et B soient des constantes et f soit une fonction continue sur $[0,1] \times \mathbb{R}$ et $g \in C([0,1])$.

Dans ce chapitre, on va étudier un système différentiel fractionnaire couplé à singularité à l'origine inspiré "fractionnairement" de l'équation ci dessus. La singularité visée dans ce travail est la non existence de la limite quand t tend vers 0 pour la non linéarité du problème.

On va établir des conditions assurant l'existence et l'unicité des solutions pour des problèmes fractionnaire avec conditions sur $[0,1]$. Puis, on passe à l'étude de la stabilité au sens UH, de Ulam-Hyers.

On commence par rappeler quelques travaux liés à notre système.

En 2011, S. Staněk [41] a étudié l'existence des solutions pour le problème suivant :

$$\begin{cases} D^{\alpha}u(t)+f\left(t,u(t),u^{'}(t),D^{\mu}u(t)\right)=0, \\ \\ u(0)=0,\ u^{'}(0)=u(1)=0, \end{cases}$$

tel que $2<\alpha<3$, $0<\mu<1$, D^{α} dénote la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre α, $f:[0,1]\times D\rightarrow\mathbb{R}_{+}$; $(D\subset\mathbb{R}^{3})$, et $f(t,x,y,z)$ est singulière en "0".

En 2013, [27], R.W. Ibrahim s'est intéressée à la stabilité UH pour :

$$\begin{cases} D^{\beta}\left(D^{\alpha}+\frac{a}{t}\right)u(t)+f(t,u(t))=g(t), \\ \\ u(0)=\mu,\ u(1)=\nu, \\ \\ 0<\alpha,\beta\leq 1,\ 0\leq t\leq 1,\ a\geq 0, \end{cases}$$

où D^{γ} désigne la dérivée fractionnaire au sens de Caputo pour $\gamma>0$, f est une fonction continue $[0,1]\times\mathbb{R}$ et $g\in C([0,1])$.

En 2016, [42], A. Taïeb et Z. Dahmani ont considéré une dimension plus générale pour le système couplé d'équations différentielles fractionnaires. Ils ont établit l'existence et l'unicité d'une solution avec certaines types de stabilité au sens UH pour le problème suivant :

$$\begin{cases} D^{\beta_1}\left(D^{\alpha_1}+\frac{a_1}{t}\right)x_1(t)+f_1(t,x_1(t),x_2(t),...,x_n(t))=g_1(t),\ t\in J, \\ D^{\beta_2}\left(D^{\alpha_2}+\frac{a_2}{t}\right)x_2(t)+f_2(t,x_1(t),x_2(t),...,x_n(t))=g_2(t),\ t\in J, \\ \vdots \\ D^{\beta_n}\left(D^{\alpha_n}+\frac{a_n}{t}\right)x_n(t)+f_n(t,x_1(t),x_2(t),...,x_n(t))=g_n(t),\ t\in J, \\ \sum\limits_{k=1}^{n}|x_k(0)|=\sum\limits_{k=1}^{n}\left|x_k^{'}(0)\right|=...=\sum\limits_{k=1}^{n}\left|x_k^{(l-1)}(0)\right|=0, \\ \sum\limits_{k=1}^{n}|D^{\alpha_k}x_k(0)|=\sum\limits_{k=1}^{n}|D^{\alpha_{k+1}}x_k(0)|=...=\sum\limits_{k=1}^{n}|D^{\alpha_{k+l-2}}x_k(0)|=0, \\ D^{\alpha_{k+l-1}}x_k(1)=0,\ k=1,2,...,n, \end{cases}$$

avec $l-1<\alpha_k,\beta_k<l$, $a_k\geq 0$, $l\in\mathbb{N}-\{0,1\}$, $k=1,2,...,n$, $n\in\mathbb{N}-\{0\}$ et $J:=[0,1]$. D^{β_k} et D^{α_k}, $k=1,2,...,n$, sont les dérivées fractionnaires au sens de Caputo. Pour $k=1,2,...,n$, $f_k:J\times\mathbb{R}^{n}\rightarrow\mathbb{R}$ et $g_k:J\rightarrow\mathbb{R}$ sont des fonctions continues.

Dans, [17], Z. Dahmani et M.Z. Sarikaya ont établit l'existence et l'unicité des solutions et la Delta stabilité d'Ulam pour le problème suivant :

$$\begin{cases} D^{\beta_1}(D^{\alpha_1}+b_1g_1(t))x_1(t)+f_1(t,x_1(t),x_2(t))=h_1(t),\ 0<t<1, \\ \\ D^{\beta_2}(D^{\alpha_2}+b_2g_2(t))x_2(t)+f_2(t,x_1(t),x_2(t))=h_2(t),\ 0<t<1, \\ \\ x_k(0)=0,\ D^{\alpha}x_k(1)+b_kg_k(1)x_k(1)=0,\ k=1,2, \end{cases}$$

avec D^{β_k} et D^{α_k} sont les dérivées fractionnaires au sens de Caputo, avec $0<\alpha_k,\beta_k<1$, $b_k\geq 0$, $k=1,2$. Les fonctions $f_k:[0,1]\times\mathbb{R}^{2}\rightarrow\mathbb{R}$ et $h_k:[0,1]\rightarrow\mathbb{R}$ sont continues, $g_k:(0,1]\rightarrow[0,+\infty)$ sont des fonctions continues, singulières à $t=0$.

En 2018, [5], Z. Bekkouche, Z. Dahmani et G. Zhang ont établit l'existence et l'unicité des solutions et la stabilité d'Ulam de type Delta pour le problème suivant :

$$\begin{cases} D^{\beta_1}\left(D^{\alpha_1}+b_1g_1\left(t\right)\right)x_1\left(t\right)+f_1\left(t,x_1\left(t\right),x_2\left(t\right)\right)=\omega_1S_1\left(t,x_1\left(t\right),x_2\left(t\right)\right),\ 0<t<1, \\ \\ D^{\beta_2}\left(D^{\alpha_2}+b_2g_2\left(t\right)\right)x_2\left(t\right)+f_2\left(t,x_1\left(t\right),x_2\left(t\right)\right)=\omega_2S_2\left(t,x_1\left(t\right),x_2\left(t\right)\right),\ 0<t<1, \\ \\ x_k\left(0\right)=0,\ D^{\alpha}x_k\left(1\right)+b_kg_k\left(1\right)x_k\left(1\right)=0, \end{cases}$$

D^{β_k} et D^{α_k} sont les dérivées fractionnaires au sens de Caputo, avec $0<\alpha_k<1, 0<\beta_k<1,\ b_k\geq 0, 0<\omega_k<\infty,\ k=1,2$. Les fonctions $f_k:[0,1]\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ et $h_k:[0,1]\to\mathbb{R}$ sont continues, $g_k:(0,1]\to[0,+\infty)$ sont des fonctions continues, singulières à $t=0$.

Dans [18, 19, 20, 21, 22, 43], on trouve d'autres résultats assurant l'existence et l'unicité des solutions pour les EDFs et les EDFSs.

4.2 Système Différentiel Singulier

Soit le problème suivant [7] :

$$\begin{cases} D^{\beta_1}\left(D^{\alpha_1}+g_1\left(t\right)\right)x_1\left(t\right)+f_1\big(t,x_1\left(t\right),x_2\left(t\right),D^{\delta_1}x_1\left(t\right),D^{\delta_2}x_2\left(t\right)\big) \\ \qquad =h_1\left(t,x_1\left(t\right),x_2\left(t\right)\right), \\ D^{\beta_2}\left(D^{\alpha_2}+g_2\left(t\right)\right)x_2\left(t\right)+f_2\big(t,x_1\left(t\right),x_2\left(t\right),D^{\delta_1}x_1\left(t\right),D^{\delta_2}x_2\left(t\right)\big) \\ \qquad =h_2\left(t,x_1\left(t\right),x_2\left(t\right)\right), \\ x_k(0)=a_k,\ x_k(1)=b_k,\ t\in J, \end{cases} \tag{4.1}$$

avec $J=[0,1]\,,\ 0<\alpha_k,\beta_k<1,\ 0<\delta_k<\alpha_k<1,\ k=1,2$. Les fonctions $f_k:[0,1]\times\mathbb{R}^4, k=1,2$, sont continues, $g_k:(0,1]\to[0,+\infty)$ sont des fonctions continues, singulières à $t=0$, c'est à dire $\lim_{t\to0^+}g_k\left(t\right)=\infty$. Les opérateurs D^{β_k}, D^{α_k} et $D^{\delta_k}, k=1,2$, sont les dérivés fractionnaires au sens de Caputo.

4.3 Résultats Auxiliaires

On a besoin des lemmes :

Lemme 4.3.1 [28] $\forall\ \alpha,\ n-1<\alpha<n, n\in\mathbb{N}^*$ *et* $f\in C^n\left([0,b]\right)$, alors on a :

$$J^{\alpha}D^{\alpha}f(t)=f(t)+c_0+c_1t+c_2\,t^2+...+c_{n-1}t^{n-1}, c_i\in\mathbb{R}, i=0,1,...,n-1.$$

Lemme 4.3.2 [7] *Pour* $0<\alpha_k,\beta_k<1$, et $\Psi_k\in C\left([0,1],\mathbb{R}\right),\ k=1,2,$ *le problème suivant*

$$D^{\beta_k}\left(D^{\alpha_k}+g_k\left(t\right)\right)x_k\left(t\right)=\Psi_k\left(t\right),\ t\in[0,1], \tag{4.2}$$

avec

$$x_k(0) = a_k,\ x_k(1) = b_k, \tag{4.3}$$

admet une solution (x_1, x_2) *donnée par :*

$$\begin{aligned} x_k(t) &= J^{\alpha_k+\beta_k}\Psi_k(t) - J^{\alpha_k} g_k(t)\, x_k(t) \\ &\quad - \left[\int_0^1 \frac{(1-\tau)^{\alpha_k-1}}{\Gamma(\alpha_k)} \left(J^{\beta_k}\Psi_k(\tau) - g_k(\tau)\, x_k(\tau)\right) d\tau + a_k - b_k\right] t^{\alpha_k} + a_k, k = 1, 2. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Preuve du lemme 4.3.2

On multiplie les deux membres de (4.2) par $\dfrac{(t-\tau)^{\beta_k-1}}{\Gamma(\beta_k)}$, et par une intégration par rapport à τ sur $[0, t]$, on obtient

$$J^{\beta_k}\left[D^{\beta_k}\left(D^{\alpha_k} + g_k(t)\right) x_k(t)\right] = J^{\beta_k}\Psi_k(t),\ t \in \left]0, 1\right]. \tag{4.5}$$

Par le lemme 4.3.1, on a

$$\left(D^{\alpha_k} + g_k(t)\right) x_k(t) + c_k = J^{\beta_k}\Psi_k(t),\ c_k \in \mathbb{R}. \tag{4.6}$$

Donc, on peut écrire

$$D^{\alpha_k} x_k(t) = J^{\beta_k}\Psi_k(t) - g_k(t)\, x_k(t) - c_k. \tag{4.7}$$

On multiplie les deux membres de (4.7) par $\dfrac{(t-\tau)^{\alpha_k-1}}{\Gamma(\alpha_k)}$, et par une intégration par rapport à τ sur $[0, t]$, on obtient

$$J^{\alpha_k} D^{\alpha_k} x_k(t) = J^{\alpha_k}\left(J^{\beta_k}\Psi_k(t) - g_k(t)\, x_k(t) - c_k\right), \tag{4.8}$$

$$x_k(t) + d_k = J^{\alpha_k} J^{\beta_k}\Psi_k(t) - J^{\alpha_k} g_k(t)\, x_k(t) - J^{\alpha_k} c_k,\ d_k \in \mathbb{R}. \tag{4.9}$$

En utilisant la propriétée de semi-groupe sur l'intégrale de R-L, on a :

$$x_k(t) = J^{\alpha_k+\beta_k}\Psi_k(t) - J^{\alpha_k} g_k(t)\, x_k(t) - c_k J^{\alpha_k}(1) - d_k. \tag{4.10}$$

Donc, on a :

$$\begin{aligned} x_k(t) &= \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha_k-1}}{\Gamma(\alpha_k)} \left(\int_0^\tau \frac{(\tau-s)^{\beta_k-1}}{\Gamma(\beta_k)} \Psi_k(s)\, ds - g_k(\tau)\, x_k(\tau)\right) d\tau \\ &\quad - c_k J^{\alpha_k}(1) - d_k, \end{aligned} \tag{4.11}$$

où $c_k, d_k \in \mathbb{R}$.

Par les conditions (4.3), on aura :

$$\begin{aligned} d_k &= -a_k, \\ c_k &= \Gamma(\alpha_k+1)\left[\int_0^1 \frac{(1-\tau)^{\alpha_k-1}}{\Gamma(\alpha_k)}\left(J^{\beta_k}\Psi_k(\tau) - g_k(\tau)\,x_k(\tau)\right)d\tau + a_k - b_k\right]. \end{aligned} \tag{4.12}$$

On remplace (4.12) dans (4.11), on aura (4.4). Ceci accomplit la preuve.

Passons maintenant à considérer l'espace de Banach :

$$B := \left\{(x_1, x_2)\,; x_1, x_2 \in C([0,1], \mathbb{R}),\ D^{\delta_1}x_1, D^{\delta_2}x_2 \in C([0,1], \mathbb{R})\right\},$$

avec la norme :

$$\|(x_1, x_2)\|_B = \max\left(\|x_1\|_\infty, \|x_2\|_\infty, \left\|D^{\delta_1}x_1\right\|_\infty, \left\|D^{\delta_2}x_2\right\|_\infty\right);$$

$$\begin{aligned} \|x_1\|_\infty &= \max_{t\in[0,1]}|x_1(t)|, \|x_2\|_\infty = \max_{t\in[0,1]}|x_2(t)|, \\ \left\|D^{\delta_1}x_1\right\|_\infty &= \max_{t\in[0,1]}\left|D^{\delta_1}x_1(t)\right|, \left\|D^{\delta_2}x_2\right\|_\infty = \max_{t\in[0,1]}\left|D^{\delta_2}x_2(t)\right|. \end{aligned}$$

Cette espace, avec sa norme, va nous permettre d'aborder le problème de l'existence et de l'unicité.

4.4 Existence et Unicité

Dans cette section, on établit des conditions suffisantes pour l'existence et l'unicité des solutions au système (4.1).

Théorème 4.4.1 [7] *Supposons que les hypothèses suivantes sont vérifiées :*

(H_1) : $g_k : (0,1] \to [0,\infty)$, $k = 1,2$, *sont continues, et il existe* $0 < \mu_k < 1; t \longmapsto t^{\mu_k}g_k(t)$ *soit continues sur* $[0,1]$, *et* $M_k = \max_{t\in[0,1]}|t^{\mu_k}g_k(t)|$.

(H_2) : *Il existe des constantes positives* $L_{ki}, k = 1,2,\ i = 1,2,3,4,5,6$ *telles que :*

$$\begin{aligned} &|f_1(t, u_1, u_2, u_3, u_4) - f_1(t, v_1, v_2, v_3, v_4)| \\ \leq\ & L_{11}|u_1 - v_1| + L_{12}|u_2 - v_2| + L_{13}|u_3 - v_3| + L_{14}|u_4 - v_4| \end{aligned} \tag{4.13}$$

et

$$\begin{aligned} & |f_2(t,u_1,u_2,u_3,u_4) - f_2(t,v_1,v_2,v_3,v_4)| \\ \leq \;& L_{21}|u_1-v_1| + L_{22}|u_2-v_2| + L_{23}|u_3-v_3| + L_{24}|u_4-v_4|, \end{aligned} \tag{4.14}$$

pour tout $t \in [0,1]$ *et toutes* $(u_1,u_2,u_3,u_4), (v_1,v_2,v_3,v_4) \in \mathbb{R}^4$. *Supposons aussi que*

$$|h_1(t,u_1,u_2) - h_1(t,v_1,v_2)| \;\leq\; L_{15}|u_1-v_1| + L_{16}|u_2-v_2| \tag{4.15}$$

et

$$|h_2(t,u_1,u_2) - h_2(t,v_1,v_2)| \;\leq\; L_{25}|u_1-v_1| + L_{26}|u_2-v_2|, \tag{4.16}$$

pour tout $t \in [0,1]$ *et toutes* $(u_1,u_2), (v_1,v_2) \in \mathbb{R}^2$.

Alors, le système (4.1) *admet une solution unique sur* $[0,1]$, *pourvu que* :

$$\omega =: \max_{1\leq k\leq 2}\left(A_k\sum_{i=1}^{i=6}L_{ki} + B_k, A_k^*\sum_{i=1}^{i=6}L_{ki} + B_k^*\right) < 1, \tag{4.17}$$

tel que

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{\Gamma(\alpha_k+\beta_k+1)}, \\ B_k &= \frac{2M_k\Gamma(1-\mu_k)}{\Gamma(\alpha_k+1-\mu_k)}, \\ A_k^* &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_k+\beta_k-\delta_k+1)} + \frac{\Gamma(\alpha_k+1)}{\Gamma(\alpha_k+\beta_k+1)\Gamma(\alpha_k-\delta_k+1)}, \\ B_k^* &= \frac{M_k\Gamma(1-\mu_k)}{\Gamma(\alpha_k-\delta_k+1-\mu_k)} + \frac{M_k\Gamma(1-\mu_k)\Gamma(\alpha_k+1)}{\Gamma(\alpha_k+1-\mu_k)\Gamma(\alpha_k-\delta_k+1)}. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Démonstration :
D'abord, on définit l'opérateur $T : B \to B$ par :

$$T(x_1,x_2)(t) := \Big(T_1(x_1,x_2)(t), T_2(x_1,x_2)(t)\Big),$$

tel que

$$\begin{aligned}
T_k(x_1,x_2)(t) \quad : \quad &= J^{\alpha_k+\beta_k} h_k(t, x_1(t), x_2(t)) \\
&-J^{\alpha_k+\beta_k} f_k\left(t, x_1(t), x_2(t), D^{\delta_1} x_1(t), D^{\delta_2} x_2(t)\right) - J^{\alpha_k} g_k(t)\, x_k(t) \\
&-t^{\alpha_k} \int_0^1 \frac{(1-\tau)^{\alpha_k-1}}{\Gamma(\alpha_k)} \left(\begin{array}{c} J^{\beta_k} h_k(t, x_1(t), x_2(t)) \\ -f_k\left(t, x_1(t), x_2(t), D^{\delta_1} x_1(t), D^{\delta_2} x_2(t)\right) \\ -g_k(\tau)\, x_k(\tau) d\tau \end{array} \right) d\tau \\
&-(a_k-b_k)\, t^{\alpha_k} + a_k,
\end{aligned} \tag{4.19}$$

pour tout $t \in [0,1]$ et $k = 1, 2$.

On va prouver que T est contractant sur B.

Soit $(x_1,x_2), (y_1,y_2) \in B$ et $t \in [0,1]$. Alors,

$$\begin{aligned}
&\left\| T(x_1,x_2) - T(y_1,y_2) \right\|_B \\
= \; & \left\| \Big(T_1(x_1,x_2), T_2(x_1,x_2) \Big) - \Big(T_1(y_1,y_2), T_2(y_1,y_2) \Big) \right\|_B \\
= \; & \left\| \Big(T_1(x_1,x_2) - T_1(y_1,y_2), T_2(x_1,x_2) - T_2(y_1,y_2) \Big) \right\| \\
= \; & \max\Big(\left\| T_1(x_1,x_2) - T_1(y_1,y_2) \right\|_\infty, \left\| T_2(x_1,x_2) - T_2(y_1,y_2) \right\|_\infty, \\
& \left\| D^{\delta_1}\left(T_1(x_1,x_2) - T_1(y_1,y_2)\right) \right\|_\infty, \left\| D^{\delta_2}\left(T_2(x_1,x_2) - T_2(y_1,y_2)\right) \right\|_\infty \Big).
\end{aligned} \tag{4.20}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
&\left\|T_k\left(x_1,x_2\right)-T_k\left(y_1,y_2\right)\right\|_\infty \\
\leq\ & \max_{t\in[0,1]}\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_k+\beta_k-1}}{\Gamma\left(\alpha_k+\beta_k\right)}\left|\begin{array}{c} h_k\left(s,x_1\left(s\right),x_2\left(s\right)\right) \\ -h_k\left(s,y_1\left(s\right),y_2\left(s\right)\right)\end{array}\right| ds \\
&+\max_{t\in[0,1]}\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_k+\beta_k-1}}{\Gamma\left(\alpha_k+\beta_k\right)}\left|\begin{array}{c} f_k\left(s,x_1\left(s\right),x_2\left(s\right),D^{\delta_1}x_1\left(s\right),D^{\delta_2}x_2\left(s\right)\right) \\ -f_k\left(s,y_1\left(s\right),y_2\left(s\right),D^{\delta_1}y_1\left(s\right),D^{\delta_2}y_2\left(s\right)\right)\end{array}\right| ds \\
&+\max_{t\in[0,1]}\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_k-1}s^{-\mu_k}}{\Gamma\left(\alpha_k\right)}\left|s^{\mu_k}g_k\left(s\right)\right|\left|x_k(s)-y_k(s)\right| ds \\
&+\int_0^1 \frac{(1-\tau)^{\alpha_k-1}}{\Gamma\left(\alpha_k\right)}\left(\int_0^\tau \frac{(\tau-s)^{\beta_k-1}}{\Gamma\left(\beta_k\right)}\left|\begin{array}{c} h_k\left(s,x_1\left(s\right),x_2\left(s\right)\right) \\ -h_k\left(s,y_1\left(s\right),y_2\left(s\right)\right)\end{array}\right| ds\right)d\tau \\
&\times\max_{t\in[0,1]}t^{\alpha_k} \\
&+\int_0^1 \frac{(1-\tau)^{\alpha_k-1}}{\Gamma\left(\alpha_k\right)}\left(\int_0^\tau \frac{(\tau-s)^{\beta_k-1}}{\Gamma\left(\beta_k\right)}\left|\begin{array}{c} f_k\left(s,x_1\left(s\right),x_2\left(s\right),D^{\delta_1}x_1\left(s\right),D^{\delta_2}x_2\left(s\right)\right) \\ -f_k\left(s,y_1\left(s\right),y_2\left(s\right),D^{\delta_1}y_1\left(s\right),D^{\delta_2}y_2\left(s\right)\right)\end{array}\right| ds\right)d\tau \\
&\times\max_{t\in[0,1]}t^{\alpha_k}+\int_0^1 \frac{(1-\tau)^{\alpha_k-1}\tau^{-\mu_k}}{\Gamma\left(\alpha_k\right)}\left|\tau^{\mu_k}g_k\left(\tau\right)\right|\left|x_k(\tau)-y_k(\tau)\right|\max_{t\in[0,1]}t^{\alpha_k}.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Grâce à l'hypothèse (H_1), on observe que :

$$\begin{aligned}
&\max_{t\in[0,1]}\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_k-1}s^{-\mu_k}}{\Gamma\left(\alpha_k\right)}\left|s^{\mu_k}g_k\left(s\right)\right|\left|x_k(s)-y_k(s)\right| ds \\
\leq\ & \frac{M_k}{\Gamma\left(\alpha_k\right)}\max_{t\in[0,1]}t^{\alpha_k-\mu_k}\left\|x_k-y_k\right\|_\infty\int_0^1 (1-\omega)^{\alpha_k-1}\omega^{-\mu_k}d\omega \\
\leq\ & \frac{M_k\beta\left(\alpha_k,1-\mu_k\right)}{\Gamma\left(\alpha_k\right)}\left\|x_k-y_k\right\|_\infty \\
\leq\ & \frac{M_k\Gamma\left(1-\mu_k\right)}{\Gamma\left(\alpha_k+1-\mu_k\right)}\left\|x_k-y_k\right\|_\infty,
\end{aligned} \tag{4.22}$$

avec $\beta\left(.,.\right)$ est la fonction Bêta d'Euler.

En utilisant encore une fois l'hypothèse (H_1), on va donc avoir :

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{(1-\tau)^{\alpha_k-1}\tau^{-\mu_k}}{\Gamma\left(\alpha_k\right)}\left|\tau^{\mu_k}g_k\left(\tau\right)\right|\left|x_k(\tau)-y_k(\tau)\right|\max_{t\in[0,1]}t^{\alpha_k} \\
\leq\ & \frac{M_k\Gamma\left(1-\mu_k\right)}{\Gamma\left(\alpha_k+1-\mu_k\right)}\left\|x_k-y_k\right\|_\infty.
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Grâce à (H_2), on obtient :

$$\begin{aligned}
&\max_{t\in[0,1]}\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_k+\beta_k-1}}{\Gamma(\alpha_k+\beta_k)}\left|\begin{array}{c} f_k\left(s,x_1(s),x_2(s),D^{\delta_1}x_1(s),D^{\delta_2}x_2(s)\right)\\ -f_k\left(s,y_1(s),y_2(s),D^{\delta_1}y_1(s),D^{\delta_2}y_2(s)\right)\end{array}\right|ds\\
&+\int_0^1 \frac{(1-\tau)^{\alpha_k-1}}{\Gamma(\alpha_k)}\left(\int_0^\tau \frac{(\tau-s)^{\beta_k-1}}{\Gamma(\beta_k)}\left|\begin{array}{c} f_k\left(s,x_1(s),x_2(s),D^{\delta_1}x_1(s),D^{\delta_2}x_2(s)\right)\\ -f_k\left(s,y_1(s),y_2(s),D^{\delta_1}y_1(s),D^{\delta_2}y_2(s)\right)\end{array}\right|ds\right)d\tau\\
\leq\ & \frac{2}{\Gamma(\alpha_k+\beta_k+1)}\\
&\times\left(\begin{array}{c} L_{k1}\left\|x_1-y_1\right\|_\infty+L_{k2}\left\|x_2-y_2\right\|_\infty\\ +L_{k3}\left\|D^{\delta_1}(x_1-y_1)\right\|_\infty+L_{k4}\left\|D^{\delta_2}(x_2-y_2)\right\|_\infty\end{array}\right). \qquad (4.24)
\end{aligned}$$

Encore une fois, par (H_2), on a :

$$\begin{aligned}
&\max_{t\in[0,1]}\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_k+\beta_k-1}}{\Gamma(\alpha_k+\beta_k)}\left|\begin{array}{c} h_k(s,x_1(s),x_2(s))\\ -h_k(s,y_1(s),y_2(s))\end{array}\right|ds\\
&+\int_0^1 \frac{(1-\tau)^{\alpha_k-1}}{\Gamma(\alpha_k)}\left(\int_0^\tau \frac{(\tau-s)^{\beta_k-1}}{\Gamma(\beta_k)}\left|\begin{array}{c} h_k(s,x_1(s),x_2(s))\\ -h_k(s,y_1(s),y_2(s))\end{array}\right|ds\right)d\tau\\
\leq\ & \frac{2}{\Gamma(\alpha_k+\beta_k+1)}\\
&\times\left(L_{k5}\left\|x_1-y_1\right\|_\infty+L_{k6}\left\|x_2-y_2\right\|_\infty\right). \qquad (4.25)
\end{aligned}$$

En remplaçant les inégalités (4.22), (4.23), (4.24), et (4.25) dans (4.21), on déduit que

$$\begin{aligned}
&\left\|T_k(x_1,x_2)-T_k(y_1,y_2)\right\|_\infty\\
\leq\ & \frac{2}{\Gamma(\alpha_k+\beta_k+1)}\\
&\times\left(L_{k5}\left\|x_1-y_1\right\|_\infty+L_{k6}\left\|x_2-y_2\right\|_\infty\right)\\
&+\frac{2}{\Gamma(\alpha_k+\beta_k+1)}\\
&\times\left(\begin{array}{c} L_{k1}\left\|x_1-y_1\right\|_\infty+L_{k2}\left\|x_2-y_2\right\|_\infty\\ +L_{k3}\left\|D^{\delta_1}(x_1-y_1)\right\|_\infty+L_{k4}\left\|D^{\delta_2}(x_2-y_2)\right\|_\infty\end{array}\right)\\
&+\frac{2M_k\Gamma(1-\mu_k)}{\Gamma(\alpha_k+1-\mu_k)}\left\|x_k-y_k\right\|_\infty. \qquad (4.26)
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}
&\left\|T_k\left(x_1, x_2\right)-T_k\left(y_1, y_2\right)\right\|_{\infty} \\
\leq\ &\left[\frac{2}{\Gamma\left(\alpha_k+\beta_k+1\right)} \sum_{i=1}^{i=6} L_{k i}+\frac{2 M_k \Gamma\left(1-\mu_k\right)}{\Gamma\left(\alpha_k+1-\mu_k\right)}\right] \\
&\times\left\|\left(x_1-y_1, x_2-y_2\right)\right\|_B .
\end{aligned}$$

Donc,

$$\left\|T_k\left(x_1, x_2\right)-T_k\left(y_1, y_2\right)\right\|_{\infty} \leq\left(A_k \sum_{i=1}^{i=6} L_{k i}+B_k\right)\left\|\left(x_1-y_1, x_2-y_2\right)\right\|_B . \tag{4.27}$$

D'une part, on a

$$\begin{aligned}
D^{\delta_k} T_k\left(x_1, x_2\right)(t)\ :\ &= J^{\alpha_k+\beta_k-\delta_k} h_k\left(t, x_1(t), x_2(t)\right) \\
&-J^{\alpha_k+\beta_k-\delta_k} f_k\left(t, x_1(t), x_2(t), D^{\delta_1} x_1(t), D^{\delta_2} x_2(t)\right)-J^{\alpha_k-\delta_k} g_k(t) x_k(t) \\
&-\frac{\Gamma\left(\alpha_k+1\right)}{\Gamma\left(\alpha_k-\delta_k+1\right)} t^{\alpha_k-\delta_k} \\
&\times \int_0^1 \frac{(1-\tau)^{\alpha_k-1}}{\Gamma\left(\alpha_k\right)}\left(\begin{array}{c}
J^{\beta_k} h_k\left(\tau, x_1(\tau), x_2(\tau)\right) \\
-J^{\beta_k} f_k\left(\tau, x_1(\tau), x_2(t), D^{\delta_1} x_1(\tau), D^{\delta_2} x_2(\tau)\right) \\
-g_k(\tau) x_k(\tau)
\end{array}\right) d \tau \\
&-\frac{\left(a_k-b_k\right) \Gamma\left(\alpha_k+1\right) t^{\alpha_k-\delta_k}}{\Gamma\left(\alpha_k-\delta_k+1\right)} .
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Donc, on peut écrire

$$
\begin{aligned}
& D^{\delta_k}T_k\left(x_1,x_2\right)-D^{\delta_k}T_k\left(y_1,y_2\right) \\
= \; & \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_k+\beta_k-\delta_k-1}}{\Gamma\left(\alpha_k+\beta_k-\delta_k\right)}\begin{pmatrix} h_k\left(s,x_1\left(s\right),x_2\left(s\right)\right) \\ -h_k\left(s,y_1\left(s\right),y_2\left(s\right)\right)\end{pmatrix} ds \\
& -\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_k+\beta_k-\delta_k-1}}{\Gamma\left(\alpha_k+\beta_k-\delta_k\right)}\begin{pmatrix} f_k\left(s,x_1\left(s\right),x_2\left(s\right),D^{\delta_1}x_1\left(s\right),D^{\delta_2}x_2\left(s\right)\right) \\ -f_k\left(s,y_1\left(s\right),y_2\left(s\right),D^{\delta_1}y_1\left(s\right),D^{\delta_2}y_2\left(s\right)\right)\end{pmatrix} ds \\
& -\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_k-\delta_k-1}\, s^{-\mu_k}}{\Gamma\left(\alpha_k-\delta_k\right)} s^{\mu_k} g_k\left(s\right)\Big(x_k(s)-y_k(s)\Big)ds \\
& -\int_0^1 \frac{(1-\tau)^{\alpha_k-1}}{\Gamma\left(\alpha_k\right)}\left(\int_0^\tau \frac{(\tau-s)^{\beta_k-1}}{\Gamma\left(\beta_k\right)}\begin{pmatrix} h_k\left(s,x_1\left(s\right),x_2\left(s\right)\right) \\ -h_k\left(s,y_1\left(s\right),y_2\left(s\right)\right)\end{pmatrix} ds\right) d\tau \\
& \times\frac{\Gamma\left(\alpha_k+1\right)}{\Gamma\left(\alpha_k-\delta_k+1\right)}t^{\alpha_k-\delta_k} \\
& +\int_0^1 \frac{(1-\tau)^{\alpha_k-1}}{\Gamma\left(\alpha_k\right)}\left(\int_0^\tau \frac{(\tau-s)^{\beta_k-1}}{\Gamma\left(\beta_k\right)}\begin{pmatrix} f_k\left(s,x_1\left(s\right),x_2\left(s\right),D^{\delta_1}x_1\left(s\right),D^{\delta_2}x_2\left(s\right)\right) \\ -f_k\left(s,y_1\left(s\right),y_2\left(s\right),D^{\delta_1}y_1\left(s\right),D^{\delta_2}y_2\left(s\right)\right)\end{pmatrix} ds\right) d\tau \\
& \times\frac{\Gamma\left(\alpha_k+1\right)}{\Gamma\left(\alpha_k-\delta_k+1\right)}t^{\alpha_k-\delta_k} \\
& +\int_0^1 \frac{(1-\tau)^{\alpha_k-1}\,\tau^{-\mu_k}}{\Gamma\left(\alpha_k\right)}\tau^{\mu_k} g_k\left(\tau\right)\Big(x_k(\tau)-y_k(\tau)\Big)\frac{\Gamma\left(\alpha_k+1\right)}{\Gamma\left(\alpha_k-\delta_k+1\right)}t^{\alpha_k-\delta_k}d\tau.
\end{aligned}
\tag{4.29}
$$

Alors,

$$
\begin{aligned}
&\left\|D^{\delta_k}\Big(T_k\left(x_1,x_2\right)-T_k\left(y_1,y_2\right)\Big)\right\|_\infty \\
\leq\ & \max_{t\in[0,1]}\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_k+\beta_k-\delta_k-1}}{\Gamma\left(\alpha_k+\beta_k-\delta_k\right)}\left|\begin{array}{c} h_k\left(s,x_1\left(s\right),x_2\left(s\right)\right) \\ -h_k\left(s,y_1\left(s\right),y_2\left(s\right)\right)\end{array}\right| ds \\
&+\max_{t\in[0,1]}\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_k+\beta_k-\delta_k-1}}{\Gamma\left(\alpha_k+\beta_k-\delta_k\right)}\left|\begin{array}{c} f_k\left(s,x_1\left(s\right),x_2\left(s\right),D^{\delta_1}x_1\left(s\right),D^{\delta_2}x_2\left(s\right)\right) \\ -f_k\left(s,y_1\left(s\right),y_2\left(s\right),D^{\delta_1}y_1\left(s\right),D^{\delta_2}y_2\left(s\right)\right)\end{array}\right| ds \\
&+\max_{t\in[0,1]}\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_k-\delta_k-1}\,s^{-\mu_k}}{\Gamma\left(\alpha_k-\delta_k\right)}\left|s^{\mu_k}g_k\left(s\right)\right|\left|x_k(s)-y_k(s)\right| ds \\
&+\int_0^1 \frac{(1-\tau)^{\alpha_k-1}}{\Gamma\left(\alpha_k\right)}\left(\int_0^\tau \frac{(\tau-s)^{\beta_k-1}}{\Gamma\left(\beta_k\right)}\left|\begin{array}{c} h_k\left(s,x_1\left(s\right),x_2\left(s\right)\right) \\ -h_k\left(s,y_1\left(s\right),y_2\left(s\right)\right)\end{array}\right| ds\right) d\tau \\
&\times\frac{\Gamma\left(\alpha_k+1\right)}{\Gamma\left(\alpha_k-\delta_k+1\right)}\max_{t\in[0,1]}t^{\alpha_k-\delta_k} \\
&+\int_0^1 \frac{(1-\tau)^{\alpha_k-1}}{\Gamma\left(\alpha_k\right)}\left(\int_0^\tau \frac{(\tau-s)^{\beta_k-1}}{\Gamma\left(\beta_k\right)}\left|\begin{array}{c} f_k\left(s,x_1\left(s\right),x_2\left(s\right),D^{\delta_1}x_1\left(s\right),D^{\delta_2}x_2\left(s\right)\right) \\ -f_k\left(s,y_1\left(s\right),y_2\left(s\right),D^{\delta_1}y_1\left(s\right),D^{\delta_2}y_2\left(s\right)\right)\end{array}\right| ds\right) d\tau \\
&\times\frac{\Gamma\left(\alpha_k+1\right)}{\Gamma\left(\alpha_k-\delta_k+1\right)}\max_{t\in[0,1]}t^{\alpha_k-\delta_k} \\
&+\int_0^1 \frac{(1-\tau)^{\alpha_k-1}\,\tau^{-\mu_k}}{\Gamma\left(\alpha_k\right)}\left|\tau^{\mu_k}g_k\left(\tau\right)\right|\left|x_k(\tau)-y_k(\tau)\right|\frac{\Gamma\left(\alpha_k+1\right)}{\Gamma\left(\alpha_k-\delta_k+1\right)}\max_{t\in[0,1]}t^{\alpha_k-\delta_k}d\tau.
\end{aligned} \tag{4.30}
$$

Avec les mêmes arguments, on montre que

$$
\begin{aligned}
&\left\|D^{\delta_k}\Big(T_k\left(x_1,x_2\right)-T_k\left(y_1,y_2\right)\Big)\right\|_\infty \\
\leq &\left[\begin{array}{c}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_k+\beta_k-\delta_k+1)}+\frac{\Gamma(\alpha_k+1)}{\Gamma(\alpha_k+\beta_k+1)\Gamma(\alpha_k-\delta_k+1)}\right)\sum_{i=1}^{i=6}L_{ki} \\ \\ +\frac{M_k\Gamma(1-\mu_k)}{\Gamma(\alpha_k-\delta_k+1-\mu_k)}+\frac{M_k\Gamma(1-\mu_k)\Gamma(\alpha_k+1)}{\Gamma(\alpha_k+1-\mu_k)\Gamma(\alpha_k-\delta_k+1)}\end{array}\right] \\
&\times\left\|\left(x_1-y_1,x_2-y_2\right)\right\|_B.
\end{aligned} \tag{4.31}
$$

Par conséquent,

$$
\left\|D^{\delta_k}\Big(T_k\left(x_1,x_2\right)-T_k\left(y_1,y_2\right)\Big)\right\|_\infty \leq \left(A_k^*\sum_{i=1}^{i=6}L_{ki}+B_k^*\right)\left\|\left(x_1-y_1,x_2-y_2\right)\right\|_B. \tag{4.32}
$$

De (4.20), (4.27) et (4.32), on aura

$$
\left\|T\left(x_1,x_2\right)-T\left(y_1,y_2\right)\right\|_B \leq \max_{1\leq k\leq 2}\left(\begin{array}{c} A_k\sum_{i=1}^{i=6}L_{ki}+B_k, \\ \\ A_k^*\sum_{i=1}^{i=6}L_{ki}+B_k^*\end{array}\right)\left\|\left(x_1-y_1,x_2-y_2\right)\right\|_B. \tag{4.33}
$$

Par (4.17), on déduit que T est contractant. Par application du théorème de point fixe de Banach, on déduit que T possède un unique point fixe qui est la solution du système (4.1). Ceci accomplit la preuve.

4.5 Existence d'une Solution

Dans cette section on présente des résultats qui nous assurent l'existence d'au moins une solution pour le problème (4.1).

On démontre le théorème suivant.

Théorème 4.5.1 [7] *Supposer que les hypothèses* (H_1^*) *et* (H_3) *sont vérifiées telles que :*

(H_1^*) : $g_k : (0,1] \to [0,\infty)$, $k = 1,2$, *sont continues, et il existe* $\mu_k; 0 < \mu_k < \alpha_k - \delta_k$; $t \longmapsto t^{\mu_k} g_k(t)$ *soit continues sur* $[0,1]$, *et* $M_k = \max\limits_{t\in[0,1]} |t^{\mu_k} g_k(t)|$.

(H_3) : $f_k : [0,1] \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $h_k : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *sont continues et il existe des constantes positives* $C_k, k = 1,2,3,4,$ *telles que :*

$$\begin{aligned} |f_1(t,u_1,u_2,u_3,u_4)| &\leq C_1 \\ |f_2(t,u_1,u_2,u_3,u_4)| &\leq C_2 \\ |h_1(t,u_1,u_2)| &\leq C_3 \\ |h_2(t,u_1,u_2)| &\leq C_4, \end{aligned} \tag{4.34}$$

pour tout $t \in [0,1]$ *et tout* $(u_1,u_2,u_3,u_4) \in \mathbb{R}^4$.

Le système (4.1) *admet au moins une solution* (x_1,x_2) *sur* $[0,1]$.

Démonstration :
On utilise le théorème de point fixe de Schaeffer. On va procéder en quatre étapes :

Étape 1 :
On doit prouver que T est continu sur B.

Soit $(x_n,y_n) \in B$, $n \in \mathbb{N}$ tel que $(x_n,y_n) \longrightarrow (x_0,y_0)$ dans B.

On a

$$\begin{aligned} & \|T(x_n,y_n) - T(x_0,y_0)\|_B \\ = \ & \max\Big(\|T_1(x_n,y_n) - T_1(x_0,y_0)\|_\infty, \|T_2(x_n,y_n) - T_2(x_0,y_0)\|_\infty, \\ & \left\|D^{\delta_1}(T_1(x_n,y_n) - T_1(x_0,y_0))\right\|_\infty, \left\|D^{\delta_2}(T_2(x_n,y_n) - T_2(x_0,y_0))\right\|_\infty \Big). \end{aligned} \tag{4.35}$$

On a aussi :

$$\begin{aligned}
T_1(x_n,y_n)(t) \quad : \quad &= J^{\alpha_1+\beta_1}h_1(t,x_n(t),y_n(t)) \\
&-J^{\alpha_1+\beta_1}f_1\left(t,x_n(t),y_n(t),D^{\delta_1}x_n(t),D^{\delta_2}y_n(t)\right)-J^{\alpha_k}g_1(t)\,x_n(t) \\
&-t^{\alpha_1}\int_0^1\frac{(1-\tau)^{\alpha_1-1}}{\Gamma(\alpha_1)}\begin{pmatrix} J^{\beta_1}h_1(t,x_n(t),y_n(t)) \\ -f_1\left(t,x_n(t),y_n(t),D^{\delta_1}x_n(t),D^{\delta_2}y_n(t)\right) \\ -g_1(\tau)\,x_n(\tau)d\tau \end{pmatrix}d\tau \\
&-(a_1-b_1)\,t^{\alpha_1}+a_1.
\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
&\left\|T_1(x_n,y_n)-T_1(x_0,y_0)\right\|_B \\
\leq\ &\int_0^t\frac{(t-s)^{\alpha_1+\beta_1-1}}{\Gamma(\alpha_1+\beta_1)}\left\|\begin{array}{c} h_1(s,x_n(s),y_n(s)) \\ -h_1(s,x_0(s),y_0(s))\end{array}\right\|_B ds \\
&+\int_0^t\frac{(t-s)^{\alpha_1+\beta_1-1}}{\Gamma(\alpha_1+\beta_1)}\left\|\begin{array}{c} f_1\left(s,x_n(s),y_n(s),D^{\delta_1}x_n(s),D^{\delta_2}y_n(s)\right) \\ -f_1\left(s,x_0(s),y_0(s),D^{\delta_1}x_0(s),D^{\delta_2}y_0(s)\right)\end{array}\right\|_B ds \\
&+\int_0^t\frac{(t-s)^{\alpha_1-1}\,s^{-\mu_1}}{\Gamma(\alpha_1)}\left|s^{\mu_1}g_1(s)\right|\left\|x_n(\tau)-x_0(\tau)\right\|_B ds \\
&+\int_0^1\frac{(1-\tau)^{\alpha_1-1}}{\Gamma(\alpha_1)}\left(\int_0^\tau\frac{(\tau-s)^{\beta_1-1}}{\Gamma(\beta_1)}\left\|\begin{array}{c} h_1(s,x_n(s),y_n(s)) \\ -h_1(s,x_0(s),y_0(s))\end{array}\right\|_B ds\right)d\tau \\
&\times\max_{t\in[0,1]}t^{\alpha_1} \\
&+\int_0^1\frac{(1-\tau)^{\alpha_1-1}}{\Gamma(\alpha_1)}\left(\int_0^\tau\frac{(\tau-s)^{\beta_1-1}}{\Gamma(\beta_1)}\left\|\begin{array}{c} f_1\left(s,x_n(s),y_n(s),D^{\delta_1}x_n(s),D^{\delta_2}y_n(s)\right) \\ -f_1\left(s,x_0(s),y_0(s),D^{\delta_1}x_0(s),D^{\delta_2}y_0(s)\right)\end{array}\right\|_B ds\right)d\tau \\
&\times\max_{t\in[0,1]}t^{\alpha_1}+\int_0^1\frac{(1-\tau)^{\alpha_1-1}\,\tau^{-\mu_1}}{\Gamma(\alpha_1)}\left|\tau^{\mu_1}g_1(\tau)\right|\left\|x_n(\tau)-x_0(\tau)\right\|_B\max_{t\in[0,1]}t^{\alpha_1}.
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Si $\left\|(x_n,y_n)-(x_0,y_0)\right\|_B\longrightarrow 0$, la continuité des fonctions $t^{\mu_1}g_1$ et f_1,h_1, implique :

$$\begin{aligned}
\left\|h_1(s,x_n(s),y_n(s))-h_1(s,x_0(s),y_0(s))\right\|_B &\longrightarrow 0, \\
\left\|\begin{array}{c} f_1\left(s,x_n(s),y_n(s),D^{\delta_1}x_n(s),D^{\delta_2}y_n(s)\right) \\ -f_1\left(s,x_0(s),y_0(s),D^{\delta_1}x_0(s),D^{\delta_2}y_0(s)\right)\end{array}\right\|_B &\longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

La formule (4.36) nous donne :

$$\left\| T_1\left(x_n, y_n\right) - T_1\left(x_0, y_0\right) \right\|_{\infty} \longrightarrow 0. \tag{4.37}$$

De la même manière, on obtient **:**

$$\begin{aligned}
\left\| T_2\left(x_n, y_n\right) - T_2\left(x_0, y_0\right) \right\|_B &\longrightarrow 0, \\
\left\| D^{\delta_1}\Big(T_1\left(x_n, y_n\right) - T_1\left(x_0, y_0\right)\Big) \right\|_B &\longrightarrow 0, \\
\left\| D^{\delta_2}\Big(T_2\left(x_n, y_n\right) - T_2\left(x_0, y_0\right)\Big) \right\|_B &\longrightarrow 0.
\end{aligned} \tag{4.38}$$

On remplace (4.37) et (4.38) dans (4.35) on conclut que : $\left\| T\left(x_n, y_n\right) - T\left(x_0, y_0\right) \right\|_B \longrightarrow 0.$ Donc T est continu sur B.

Étape 2 : On montre que l'opérateur T envoie tout ensemble borné de B en un ensemble borné dans B.
On définit l'ensemble $\Omega_r := \left\{ (x_1, x_2) \in B, \ \left\| (x_1, x_2) \right\|_B \leq r \right\}$, où $r > 0$. Pour $(x_1, x_2) \in \Omega_r$, par l'inégalité (4.34) donnée dans (H_3), on obtient :

$$\begin{aligned}
& \left\| T_1\left(x_1, x_2\right) \right\|_{\infty} \\
\leq \ & \left(C_1 + C_3\right) \max_{t \in [0,1]} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_1 + \beta_1 - 1}}{\Gamma\left(\alpha_1 + \beta_1\right)} ds \\
& + \max_{t \in [0,1]} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_1 - 1} s^{-\mu_1}}{\Gamma\left(\alpha_1\right)} \left| s^{\mu_1} g_1(s) \right| \left| x_1(s) \right| ds \\
& + \left(C_1 + C_3\right) \max_{t \in [0,1]} t^{\alpha_1} \times \int_0^1 \frac{(1-\tau)^{\alpha_1 - 1}}{\Gamma\left(\alpha_1\right)} \left(\int_0^{\tau} \frac{(\tau - s)^{\beta_1 - 1}}{\Gamma\left(\beta_1\right)} ds \right) d\tau \\
& + \max_{t \in [0,1]} t^{\alpha_1} \times \int_0^1 \frac{(1-\tau)^{\alpha_1 - 1} \tau^{-\mu_1}}{\Gamma\left(\alpha_1\right)} \left| \tau^{\mu_1} g_1(\tau) \right| \left| x_1(\tau) \right| \\
& + \max_{t \in [0,1]} t^{\alpha_1} \left| a_1 - b_1 \right| + \left| a_1 \right|.
\end{aligned} \tag{4.39}$$

Donc, on peut écrire

$$\left\| T_1\left(x_1, x_2\right) \right\|_{\infty} \leq A_1\left(C_1 + C_3\right) + r B_1 + \left| a_1 - b_1 \right| + \left| a_1 \right|. \tag{4.40}$$

On a aussi

$$\begin{aligned} ||T_2\left(x_1,x_2\right)||_\infty &\leq A_2\left(C_2+C_4\right)+rB_2+|a_2-b_2|+|a_2|, \\ ||T_k\left(x_1,x_2\right)||_\infty &\leq A_k\left(C_k+C_{k+2}\right)+rB_k+|a_k-b_k|+|a_k|. \end{aligned} \tag{4.41}$$

Aussi, on remarque que :

$$\begin{aligned} &||D^{\delta_1}T_1\left(x_1,x_2\right)||_\infty \\ \leq\; & A_1^*\left(C_1+C_3\right)+rB_1^*+|a_1-b_1|\frac{\Gamma\left(\alpha_1+1\right)}{\Gamma\left(\alpha_1-\delta_1+1\right)}, \\ &||D^{\delta_2}T_2\left(x_1,x_2\right)||_\infty \\ \leq\; & A_2^*\left(C_2+C_4\right)+rB_2^*+|a_2-b_2|\frac{\Gamma\left(\alpha_2+1\right)}{\Gamma\left(\alpha_2-\delta_2+1\right)}, \\ &||D^{\delta_k}T_k\left(x_1,x_2\right)||_\infty \\ \leq\; & A_k^*\left(C_k+C_{k+2}\right)+rB_k^*+|a_k-b_k|\frac{\Gamma\left(\alpha_k+1\right)}{\Gamma\left(\alpha_k-\delta_k+1\right)}. \end{aligned} \tag{4.42}$$

Grâce aux inégalités (4.40) (4.41) et (4.42), on obtient

$$\begin{aligned} &||T\left(x_1,x_2\right)||_B \\ \leq\; & \max_{1\leq k\leq 2}\begin{pmatrix} A_k\left(C_k+C_{k+2}\right)+rB_k+|a_k-b_k|+|a_k|, \\ \\ A_k^*\left(C_k+C_{k+2}\right)+rB_k^*+|a_k-b_k|\frac{\Gamma(\alpha_k+1)}{\Gamma(\alpha_k-\delta_k+1)} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.43}$$

Par conséquent, l'opérateur T envoie tout ensemble borné de B en un ensemble borné dans B.

Étape 3 : Equi-continuité de $T(\Omega_r)$:
Pour $t_1,t_2\in[0,1]$; $t_1<t_2$, et $(x_1,x_2)\in\Omega_r$, pour $k=1,2$, on a

$$\begin{aligned} &||T_k\left(x_1,x_2\right)\left(t_2\right)-T_k\left(x_1,x_2\right)\left(t_1\right)||_\infty \\ \leq\; & \frac{\left(C_k+C_{k+2}\right)}{\Gamma\left(\alpha_k+\beta_k+1\right)}\left(t_2^{\alpha_k+\beta_k}-t_1^{\alpha_k+\beta_k}\right)+\frac{\left(C_k+C_{k+2}\right)}{\Gamma\left(\alpha_k+\beta_k+1\right)}\left(t_2^{\alpha_k}-t_1^{\alpha_k}\right) \\ & +\frac{rM_k\Gamma\left(1-\mu_k\right)}{\Gamma\left(\alpha_k+1-\mu_k\right)}\left(t_2^{\alpha_k-\mu_k}-t_1^{\alpha_k-\mu_k}\right)+\frac{rM_k\Gamma\left(1-\mu_k\right)}{\Gamma\left(\alpha_k+1-\mu_k\right)}\left(t_2^{\alpha_k}-t_1^{\alpha_k}\right), \end{aligned} \tag{4.44}$$

et

$$||D^{\delta_k}\Big(T_k(x_1,x_2)(t_2)-T_k(x_1,x_2)(t_1)\Big)||_\infty$$

$$\leq \frac{(C_k+C_{k+2})\left(t_2^{\alpha_k+\beta_k-\delta_k}-t_1^{\alpha_k+\beta_k-\delta_k}\right)}{\Gamma(\alpha_k+\beta_k-\delta_k+1)}+\frac{(C_k+C_{k+2})\Gamma(\alpha_k+1)\left(t_2^{\alpha_k-\delta_k}-t_1^{\alpha_k-\delta_k}\right)}{\Gamma(\alpha_k+\beta_k+1)\Gamma(\alpha_k-\delta_k+1)}$$
$$+\frac{rM_k\Gamma(1-\mu_k)\left(t_2^{\alpha_k-\delta_k-\mu_k}-t_1^{\alpha_k-\delta_k-\mu_k}\right)}{\Gamma(\alpha_k-\delta_k+1-\mu_k)}$$
$$+\frac{rM_k\Gamma(1-\mu_k)\Gamma(\alpha_k+1)\left(t_2^{\alpha_k-\delta_k}-t_1^{\alpha_k-\delta_k}\right)}{\Gamma(\alpha_k+1-\mu_k)\Gamma(\alpha_k-\delta_k+1)}. \tag{4.45}$$

Les second membres de (4.44) et (4.45) sont indépendants des variables x_1, x_2. Alors $\|T_k(x_1,x_2)(t_2)-T_k(x_1,x_2)(t_1)\|_B$ tend vers zéro quand t_1 tend vers t_2.
En raison des résultats obtenus aux étapes $2,3$ et selon le théorème d'Arzela-Ascoli, on voit que T est complètement continu.

Étape 4 : On montre que l'ensemble

$$\theta := \{(x_1,x_2)\in B;\ \ (x_1,x_2)=\eta T(x_1,x_2),0<\eta<1\},$$

est borné :

Soit $(x_1,x_2)\in\theta$, alors $(x_1,x_2)=\eta T(x_1,x_2)$, pour $0<\eta<1$. Par conséquent, pour $t\in[0,1]$, on a :

$$x_k(t)=\eta T_k(x_1,x_2)(t),\ \ k=1,2.$$

Donc,

$$\|(x_1,x_2)\|_B=\eta\,\|T(x_1,x_2)\|_B\,.$$

Par l'inégalité (4.43), on obtient

$$\|(x_1,x_2)\|_B$$
$$\leq \eta\max_{1\leq k\leq 2}\begin{pmatrix} A_k(C_k+C_{k+2})+rB_k+|a_k-b_k|+|a_k|\,, \\ \\ A_k^*(C_k+C_{k+2})+rB_k^*+|a_k-b_k|\,\frac{\Gamma(\alpha_k+1)}{\Gamma(\alpha_k-\delta_k+1)}\end{pmatrix}. \tag{4.46}$$

Par conséquent, θ est borné.

On conclut par le théorème du point fixe de Schaeffer que l'opérateur T admet au moins un point fixe qui est une solution du problème (4.1). Le théorème 4.5.1 est ainsi prouvé.

4.6 Stabilité au Sens UH

Dans notre cas, on introduit la définition suivante :

Définition 4.6.1 : [7] *Le système (4.1) est stable au sens U-H si il existe un nombre réel $m > 0$, tels que pour tous $\epsilon_1,\ \epsilon_2 > 0$, et pour toute solution $(y_1, y_2) \in B$ de l'inégalité suivante :*

$$\begin{aligned} & \left| \begin{array}{c} D^{\beta_k}\left(D^{\alpha_k} + g_k(t)\right) y_k(t) + f_k\left(t, y_1(t), y_2(t), D^{\delta_1} y_1(t), D^{\delta_2} y_2(t)\right) \\ -h_k(t, y_1(t), y_2(t)) \end{array} \right| \\ < & \ \epsilon_k,\ 0 \leq t \leq 1, \\ y_k(0) = & \ a_k,\ y_k(1) = b_k,\ k = 1, 2, \end{aligned} \tag{4.47}$$

alors il existe une solution $(x_1, x_2) \in B$ de (4.1), avec

$$\|(y_1 - x_1, y_2 - x_2)\|_B < m\epsilon,\ \epsilon = \max(\epsilon_1, \epsilon_2). \tag{4.48}$$

Remarque 4.6.1 La fonction $(y_1, y_2) \in B$ est une solution de l'inégalité (4.47) si et seulement si il existe $c_k \in C([0,1], \mathbb{R}),\ k = 1, 2$, tels que :

$$|c_k(t)| < \epsilon_k,\ t \in [0,1],$$

et

$$\begin{aligned} & D^{\beta_k}\left(D^{\alpha_k} + g_k(t)\right) y_k(t) + f_k\left(t, y_1(t), y_2(t), D^{\delta_1} y_1(t), D^{\delta_2} y_2(t)\right) \\ = & \ h_k(t, y_1(t), y_2(t)) + c_k(t),\ t \in [0,1]. \end{aligned}$$

Théorème 4.6.1 [7] *Soient $0 < \alpha_k, \beta_k < 1$ et $0 < \delta_k < \alpha_k$. On suppose que les conditions du théorème 4.4.1 sont vérifiées.*

Alors, le système (4.1) *est stable au sens U-H.*

Démonstration :
Soit $(y_1, y_2) \in B$ une solution de système (4.47). Alors, (y_1, y_2) est une solution de l'inégalité

intégrale suivante :

$$\left|\begin{array}{c} y_k(t)+\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_k-1}s^{-\mu_k}}{\Gamma(\alpha_k)}s^{\mu_k}g_k(s)\,y_k(s)ds \\ -\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_k+\beta_k-1}}{\Gamma(\alpha_k+\beta_k)}\left(\begin{array}{c} h_k(s,y_1(s),y_2(s)) \\ -f_k\left(s,y_1(s),y_2(s),D^{\delta_1}y_1(s),D^{\delta_2}y_2(s)\right)\end{array}\right)ds \\ +t^{\alpha_k}\int_0^1 \frac{(1-\tau)^{\alpha_k-1}}{\Gamma(\alpha_k)}\left(\begin{array}{c} J^{\beta_k}h_k(\tau,y_1(\tau),y_2(\tau)) \\ -J^{\beta_k}f_k\left(\tau,y_1(\tau),y_2(\tau),D^{\delta_1}y_1(\tau),D^{\delta_2}y_2(\tau)\right)\end{array}\right)d\tau \\ -t^{\alpha_k}\int_0^1 \frac{(1-\tau)^{\alpha_k-1}\tau^{-\mu_k}}{\Gamma(\alpha_k)}\tau^{\mu_k}g_k(\tau)\,y_k(\tau)d\tau+(a_k-b_k)\,t^{\alpha_k}-a_k \end{array}\right|$$

$$\begin{aligned} &\leq J^{\alpha_k+\beta_k}\epsilon_k \\ &\leq \frac{t^{\alpha_k+\beta_k}}{\Gamma(\alpha_k+\beta_k+1)}\epsilon_k,\ k=1,2. \end{aligned} \tag{4.49}$$

En utilisant (H_1) et (H_2), il existe une solution $(x_1,x_2)\in B$ de système (4.1) :

$$\begin{aligned} x_k(t) &= -\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_k-1}s^{-\mu_k}}{\Gamma(\alpha_k)}s^{\mu_k}g_k(s)\,x_k(s)ds \\ &\quad+\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_k+\beta_k-1}}{\Gamma(\alpha_k+\beta_k)}\left(\begin{array}{c} h_k(s,x_1(s),x_2(s)) \\ -f_k\left(s,x_1(s),x_2(s),D^{\delta_1}x_1(s),D^{\delta_2}x_2(s)\right)\end{array}\right)ds \\ &\quad-t^{\alpha_k}\int_0^1 \frac{(1-\tau)^{\alpha_k-1}}{\Gamma(\alpha_k)}\left(\begin{array}{c} J^{\beta_k}h_k(\tau,x_1(\tau),x_2(\tau)) \\ -J^{\beta_k}f_k\left(\tau,x_1(\tau),x_2(\tau),D^{\delta_1}x_1(\tau),D^{\delta_2}x_2(\tau)\right)\end{array}\right)d\tau \\ &\quad+t^{\alpha_k}\int_0^1 \frac{(1-\tau)^{\alpha_k-1}\tau^{-\mu_k}}{\Gamma(\alpha_k)}\tau^{\mu_k}g_k(\tau)\,x_k(\tau)d\tau-(a_k-b_k)\,t^{\alpha_k}+a_k. \end{aligned}$$

Alors, on peut écrire

$$
\begin{aligned}
&\left|y_k(t)-x_k(t)\right| \\
&=\left|y_k(t)-\left(\begin{array}{c}
-\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_k-1}s^{-\mu_k}}{\Gamma(\alpha_k)} s^{\mu_k} g_k(s)\, x_k(s)ds \\
+\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_k+\beta_k-1}}{\Gamma(\alpha_k+\beta_k)}\left(\begin{array}{c} h_k(s,x_1(s),x_2(s)) \\ -f_k\left(s,x_1(s),x_2(s),D^{\delta_1}x_1(s),D^{\delta_2}x_2(s)\right)\end{array}\right)ds \\
-t^{\alpha_k}\int_0^1 \frac{(1-\tau)^{\alpha_k-1}}{\Gamma(\alpha_k)}\left(\begin{array}{c} J^{\beta_k}h_k(\tau,x_1(\tau),x_2(\tau)) \\ -J^{\beta_k}f_k\left(\tau,x_1(\tau),x_2(\tau),D^{\delta_1}x_1(\tau),D^{\delta_2}x_2(\tau)\right)\end{array}\right)d\tau \\
+t^{\alpha_k}\int_0^1 \frac{(1-\tau)^{\alpha_k-1}\tau^{-\mu_k}}{\Gamma(\alpha_k)}\tau^{\mu_k} g_k(\tau)\, x_k(\tau)d\tau-(a_k-b_k)\,t^{\alpha_k}+a_k
\end{array}\right)\right| \\
&=\left|\begin{array}{c}
y_k(t)+(a_k-b_k)\,t^{\alpha_k}-a_k+\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_k-1}s^{-\mu_k}}{\Gamma(\alpha_k)} s^{\mu_k} g_k(s)\, y_k(s)ds \\
-\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_k+\beta_k-1}}{\Gamma(\alpha_k+\beta_k)}\left(\begin{array}{c} h_k(s,y_1(s),y_2(s)) \\ -f_k\left(s,y_1(s),y_2(s),D^{\delta_1}y_1(s),D^{\delta_2}y_2(s)\right)\end{array}\right)ds \\
+t^{\alpha_k}\int_0^1 \frac{(1-\tau)^{\alpha_k-1}}{\Gamma(\alpha_k)}\left(\begin{array}{c} J^{\beta_k}h_k(\tau,y_1(\tau),y_2(\tau)) \\ -J^{\beta_k}f_k\left(\tau,y_1(\tau),y_2(\tau),D^{\delta_1}y_1(\tau),D^{\delta_2}y_2(\tau)\right)\end{array}\right)d\tau \\
-t^{\alpha_k}\int_0^1 \frac{(1-\tau)^{\alpha_k-1}\tau^{-\mu_k}}{\Gamma(\alpha_k)}\tau^{\mu_k} g_k(\tau)\, y_k(\tau)d\tau \\
\\
+\left(\begin{array}{c}
-\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_k-1}s^{-\mu_k}}{\Gamma(\alpha_k)} s^{\mu_k} g_k(s)\left(y_k(s)-x_k(s)\right)ds \\
+\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_k+\beta_k-1}}{\Gamma(\alpha_k+\beta_k)}\left(\begin{array}{c} \left(h_k(s,y_1(s),y_2(s))-h_k(s,x_1(s),x_2(s))\right) \\ \\ -\left(\begin{array}{c} f_k\left(s,y_1(s),y_2(s),D^{\delta_1}y_1(s),D^{\delta_2}y_2(s)\right) \\ -f_k\left(s,x_1(s),x_2(s),D^{\delta_1}x_1(s),D^{\delta_2}x_2(s)\right)\end{array}\right)\end{array}\right)ds \\
+t^{\alpha_k}\int_0^1 \frac{(1-\tau)^{\alpha_k-1}}{\Gamma(\alpha_k)}\left(\begin{array}{c} -J^{\beta_k}\left(h_k(s,y_1(s),y_2(s))-h_k(s,x_1(s),x_2(s))\right) \\ \\ +J^{\beta_k}\left(\begin{array}{c} f_k\left(s,y_1(s),y_2(s),D^{\delta_1}y_1(s),D^{\delta_2}y_2(s)\right) \\ -f_k\left(s,x_1(s),x_2(s),D^{\delta_1}x_1(s),D^{\delta_2}x_2(s)\right)\end{array}\right)\end{array}\right)d\tau \\
+t^{\alpha_k}\int_0^1 \frac{(1-\tau)^{\alpha_k-1}\tau^{-\mu_k}}{\Gamma(\alpha_k)}\tau^{\mu_k} g_k(\tau)\left(y_k(\tau)-x_k(\tau)\right)d\tau
\end{array}\right)
\end{array}\right|. \qquad (4.50)
\end{aligned}
$$

Par l'inégalité (4.49), on obtient

$$\begin{array}{l} \max\limits_{t\in[0,1]} \left|y_k(t) - x_k(t)\right| \\ \leq \quad \dfrac{\epsilon_k}{\Gamma(\alpha_k+\beta_k+1)} \\ + \left(\begin{array}{c} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_k-1}s^{-\mu_k}}{\Gamma(\alpha_k)} \left|s^{\mu_k} g_k(s)\right| \left|y_k(s)-x_k(s)\right| ds \\ +t^{\alpha_k} \int_0^1 \frac{(1-\tau)^{\alpha_k-1}\tau^{-\mu_k}}{\Gamma(\alpha_k)} \left|\tau^{\mu_k} g_k(\tau)\right| \left|y_k(\tau)-x_k(\tau)\right| d\tau \\ + \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_k+\beta_k-1}}{\Gamma(\alpha_k+\beta_k)} \left(\begin{array}{c} \left|h_k(s,y_1(s),y_2(s)) - h_k(s,x_1(s),x_2(s))\right| \\ + \left| \begin{array}{c} f_k\left(s,y_1(s),y_2(s),D^{\delta_1}y_1(s),D^{\delta_2}y_2(s)\right) \\ -f_k\left(s,x_1(s),x_2(s),D^{\delta_1}x_1(s),D^{\delta_2}x_2(s)\right) \end{array} \right| \end{array} \right) ds \\ +t^{\alpha_k} \int_0^1 \frac{(1-\tau)^{\alpha_k-1}}{\Gamma(\alpha_k)} \left(\begin{array}{c} J^{\beta_k} \left|h_k(s,y_1(s),y_2(s)) - h_k(s,x_1(s),x_2(s))\right| \\ +J^{\beta_k} \left| \begin{array}{c} f_k\left(\tau,y_1(\tau),y_2(\tau),D^{\delta_1}y_1(\tau),D^{\delta_2}y_2(\tau)\right) \\ -f_k\left(\tau,x_1(\tau),x_2(\tau),D^{\delta_1}x_1(\tau),D^{\delta_2}x_2(\tau)\right) \end{array} \right| \end{array} \right) d\tau \end{array} \right). \end{array} \tag{4.51}$$

Ce qui implique :

$$\begin{array}{l} \left\|y_k - x_k\right\|_\infty \\ \leq \quad \dfrac{\epsilon_k}{\Gamma(\alpha_k+\beta_k+1)} + \dfrac{2M_k\Gamma(1-\mu_k)}{\Gamma(\alpha_k+1-\mu_k)} \left\|x_k - y_k\right\|_\infty \\ +\dfrac{2}{\Gamma(\alpha_k+\beta_k+1)} \left(L_{k5}\left\|x_1-y_1\right\|_\infty + L_{k6}\left\|x_2-y_2\right\|_\infty\right) \\ +\dfrac{2}{\Gamma(\alpha_k+\beta_k+1)} \\ \times \left(\begin{array}{c} L_{k1}\left\|x_1-y_1\right\|_\infty + L_{k2}\left\|x_2-y_2\right\|_\infty \\ +L_{k3}\left\|D^{\delta_1}(x_1-y_1)\right\|_\infty + L_{k4}\left\|D^{\delta_2}(x_2-y_2)\right\|_\infty \end{array} \right). \end{array} \tag{4.52}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
&\left\|y_k - x_k\right\|_\infty \\
\leq\ & \frac{\epsilon_k}{\Gamma\left(\alpha_k+\beta_k+1\right)} + \left[\frac{2}{\Gamma\left(\alpha_k+\beta_k+1\right)}\sum_{i=1}^{6} L_{ki} + \frac{2M_k\Gamma\left(1-\mu_k\right)}{\Gamma\left(\alpha_k+1-\mu_k\right)}\right] \\
&\times \left\|(x_1-y_1, x_2-y_2)\right\|_B . \\
\leq\ & \frac{\epsilon_k}{\Gamma\left(\alpha_k+\beta_k+1\right)} + \left(A_k\sum_{i=1}^{6} L_{ki} + B_k\right)\left\|(y_1-x_1, y_2-x_2)\right\|_B . \qquad (4.53)
\end{aligned}$$

D'une part, (4.49) donne

$$\begin{aligned}
&\left|\begin{array}{c}
D^{\delta_k}y_k\left(t\right) + \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_k-\delta_k-1}s^{-\mu_k}}{\Gamma(\alpha_k-\delta_k)} s^{\mu_k} g_k\left(s\right) y_k(s)ds \\
-\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_k+\beta_k-\delta_k-1}}{\Gamma(\alpha_k+\beta_k-\delta_k)}\left(\begin{array}{c} h_k\left(s, y_1\left(s\right), y_2\left(s\right)\right) \\ -f_k\left(s, y_1\left(s\right), y_2\left(s\right), D^{\delta_1}y_1\left(s\right), D^{\delta_2}y_2\left(s\right)\right)\end{array}\right)ds \\
+\frac{\Gamma(\alpha_k+1)t^{\alpha_k-\delta_k}}{\Gamma(\alpha_k+1-\delta_k)}\int_0^1 \frac{(1-\tau)^{\alpha_k-1}}{\Gamma(\alpha_k)}\left(\begin{array}{c} J^{\beta_k}h_k\left(\tau, y_1\left(\tau\right), y_2\left(\tau\right)\right) \\ -J^{\beta_k}f_k\left(\tau, y_1\left(\tau\right), y_2\left(\tau\right), D^{\delta_1}y_1\left(\tau\right), D^{\delta_2}y_2\left(\tau\right)\right)\end{array}\right)d\tau \\
-\frac{\Gamma(\alpha_k+1)t^{\alpha_k-\delta_k}}{\Gamma(\alpha_k+1-\delta_k)}\int_0^1 \frac{(1-\tau)^{\alpha_k-1}\tau^{-\mu_k}}{\Gamma(\alpha_k)}\tau^{\mu_k} g_k\left(\tau\right) y_k(\tau)d\tau + \frac{(a_k-b_k)\Gamma(\alpha_k+1)}{\Gamma(\alpha_k+1-\delta_k)}t^{\alpha_k-\delta_k}
\end{array}\right| \\
\leq\ & J^{\alpha_k+\beta_k-\delta_k}\epsilon_k \\
\leq\ & \frac{t^{\alpha_k+\beta_k-\delta_k}}{\Gamma\left(\alpha_k+\beta_k-\delta_k+1\right)}\epsilon_k,\ \ k=1,2. \qquad (4.54)
\end{aligned}$$

De même, on montre que :

$$\left\|D^{\delta_k}\left(y_k-x_k\right)\right\|_\infty \leq \frac{\epsilon_k}{\Gamma\left(\alpha_k+\beta_k-\delta_k+1\right)} + \left(A_k^*\sum_{i=1}^{6} L_{ki} + B_k^*\right)\left\|(y_1-x_1, y_2-x_2)\right\|_B . \qquad (4.55)$$

Par (4.53) et (4.55), on a

$$\begin{aligned}
\left\|(y_1-x_1, y_2-x_2)\right\|_B \ \leq\ & \max_{1\leq k\leq 2}\left(\frac{\epsilon_k}{\Gamma\left(\alpha_k+\beta_k+1\right)}, \frac{\epsilon_k}{\Gamma\left(\alpha_k+\beta_k-\delta_k+1\right)}\right) \\
& +\max_{1\leq k\leq 2}\left(\begin{array}{c} A_k\sum_{i=1}^{6} L_{ki} + B_k, \\ A_k^*\sum_{i=1}^{6} L_{ki} + B_k^*\end{array}\right)\left\|(y_1-x_1, y_2-x_2)\right\|_B \\
\leq\ & \epsilon\Phi + \omega\left\|(y_1-x_1, y_2-x_2)\right\|_B , \qquad (4.56)
\end{aligned}$$

d'où

$$\Phi = \max_{1\leq k\leq 2}\left(\frac{1}{\Gamma\left(\alpha_k+\beta_k+1\right)}, \frac{1}{\Gamma\left(\alpha_k+\beta_k-\delta_k+1\right)}\right).$$

Par conséquent,

$$\|(y_1-x_1, y_2-x_2)\|_B \leq \frac{\epsilon\Phi}{(1-\omega)} := m\epsilon,\ m=\frac{\Phi}{(1-\omega)}. \tag{4.57}$$

De (4.17), on obtient $m>0$. Ainsi, le système (4.1) est stable au sens U-H.

CONCLUSION GENERALE

Dans cette thèse de Doctorat, on a établit des résultats récents sur des inégalités de type Hölder, et ceci en utilisant les intégrales fractionnaires au sens de Riemann-Liouville. On a aussi généralisé un résultat de type Hölder d'un travail publié en 2012 dans General Mathematics sur la même classe d'inégalités.

Dans le chapitre 2, on a généralisé des inégalités de type Q_i d'un travail de Liu et al., en utilisant l'approche des q-intégrales.

Dans le dernier chapitre, on a étudié une classe d'équations différentielles fractionnaires singulières à $t_0 = 0$. En effet, on a obtenu certains résultats d'existence et d'unicité pour un problème fractionnaire "inspiré du modèle classique de Lane-Emden" dans le cas de dérivée au sens Caputo. La technique utilisée est le principe de contraction de Banach. On a étudie ces problèmes en établissant des conditions suffisantes qui nous ont assuré l'existence et l'unicité.
D'autres résultats sur l'existence d'une solution au moins ont été aussi prouvés dans cette thèse. Enfin, la stabilité au sens UH a été aussi étudiée.

Comme perspective de cette thèse, on propose, aux chercheurs intéressés par cet axe, de collaborer avec nous sur la possibilité de proposer un vrai modèle d'ordre arbitraire à la fameuse équation de Lane-Emden. On compte dans le futur in chaa ALLAH explorer le domaine des EDFSs singulières en utilisant l'approche de Hadamard. Voici au moins deux pistes de recherche à suivre.

Bibliographie

[1] R.P. Agarwal : *Certain fractional q-integrals and q-derivatives,* Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, vol. 66, pp. 365–370, 1969.

[2] R.P. Agarwal, D. O'Regan and S. Stanek : *Positive Solutions For Dirichlet Problems Of Singular Nonlinear Fractional Differential Equations,* J. Math. Anal. Appl., 371, (2010), pp. 57–68.

[3] F.M. Atici and P. W. Eloe : *Fractional q-calculus on a time sca*le, Journal of Nonlinear Mathematical Physics, Vol.14, N. 3, pp. 341-352,(2007).

[4] M. Beech : *An approximate solution for the polytrope* $n = 3$*, Astrophys.* Space Sci. 132 (1987) 393–396.

[5] Z. Bekkouche, Z. Dahmani and G. Zhang : *Solutions and Stabilities for a 2D-Non Homogeneous Lane-Emden Fractional System,* Int. J. Open Problems Compt. Math., Vol. 11, No. 2, (2018).

[6] A. Benzidane, Z. Dahmani : *New Integral Results on Holder Type Inequalities.* Mathematika, Math Cluj, Accepted 2018.

[7] A. Benzidane, Z. Dahmani : *On a Class of Non Linear Singular Fractional Differential Equations.* Under Review, 2018.

[8] L. Bougoffa : *An integral inequality similar to Qi ?s inequality,* JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math., 6, 1 (2005), Art. 27.

[9] K. Boukerrioua, A. Guezane Lakoud : *On an open question regarding an integral inequality,* JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math., 8, 3 (2007), Art. 77.

[10] S. Chandrasekhar : *An Introduction to the Study of Stellar Structure*, University of Chicago Press, Chicago, 1939.

[11] C. Corduneanu : *Principles Of Differential And Integral Equations*, Chelsea Publ. Comp., 2nd Edition, (1977).

[12] Z. Dahmani : *About some integral inequalities using Riemann-Liouville integrals*, General Mathematics, 20(4), (2012), 63–69.

[13] Z. Dahmani, N. Bedjaoui : *Some generalized integral inequalities,* to appear in Jaram. International Journal of Nonlinear Science, (2011).

[14] Z. Dahmani, A. Benzidane : *New Inequalities Using Fractional q-Integrals Theory*, Bulletin of Mathematical Analysis and Applications. Vol. 4, Issue 1 (2012), Pages 190-196. ISSN 1821-1291.

[15] Z. Dahmani, A. Benzidane : *On a class of fractional q-Integral inequalities*, MJM. An International Journal of Mathematical Sciences With Computer Applications. 3, No. 1, Pages 1-6 (2013). ISSN 2319-3786.

[16] Z. Dahmani, H. Metakkel El Ard : *Generalizations of some integral inequalities using Riemann-Liouville operator*, to appear in Int. J. Open Problems Compt. Math.

[17] Z. Dahmani and M.Z. Sarikaya : *On A Generalized Lane-Emden Fractional Differential System and its* $\Delta-$*Stability,* Journal of Advanc. Resear. Dynam. Contr. Syst., To Appear in 2016.

[18] Z. Dahmani, A. Taïeb : *New Existence and Uniqueness Results For High Dimensional Fractional Differential Systems,* Facta Nis Ser. Math. Inform., Vol. 30, No. 3, (2015), pp. 281-293.

[19] Z. Dahmani, A. Taïeb : *Solvability For High Dimensional Fractional Differential Systems With High Arbitrary Orders,* Journal of Advanced Scientific Research in Dynamical and Control Systems., Vol. 7, No. 4, (2015), pp. 51-64.

[20] Z. Dahmani, A. Taïeb : *A Coupled System of Fractional Differential Equations Involing Two Fractional Orders,* Romai Journal., Vol. 11, No. 2, (2015), pp. 141-177.

[21] Z. Dahmani, A. Taïeb : *Solvability of A Coupled System of Fractional Differential Equations with Periodic and Antiperiodic Boundary Conditions,* PALM Letters., No. 5, (2015), pp. 29-36.

[22] Z. Dahmani, A. Taïeb and N. Bedjaoui : *Solvability and Stability for Nonlinear Fractional Integro-Differential Systems of High Fractional Orders,* Facta Nis Ser. Math. Inform., Vol. 31, No. 3, (2016), pp. 629-644.

[23] B.K. Datta : *Analytic solution to the Lane–Emden equation*, Nuovo Cimento 111 (1996) 1385–1388.

[24] R. Gorenflo, F. Mainardi : *Fractional calculus integral and differential equations of fractional order*, Springer Verlag, Wien, (1997), pp.223-276.

[25] G. Hardy, J.E. Littlewood, G. Poya : *Inequalities, second ed.*, Cambridge University Press, UK, 1952.

[26] G.P. Horedt : *Exact solutions of the Lane–Emden equation in N-dimensional space*, Astronom. Astrophys. 160 (1986) 148–156.

[27] R.W. Ibrahim : *Stability of A Fractional Differential Equation,* International Journal of Mathematical, Computational, Physical and Quantum Engineering., Vol. 7, No. 3, (2013), pp. 300-305.

[28] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo : *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier B.V., Amsterdam, The Netherlands, (2006).

[29] W.J. Liu, G.S. Cheng, C.C. Li : *Further Development of an Open Problem Concerning an Integral Inequality*, JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math. 9(1), 2008, Art. 14.

[30] W.J. Liu, G.S. Cheng and C.C. Li : *Further development of an open problem concerning an integral inequality,* JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math., 9, 1 (2008), Art. 14.

[31] W.J. Liu, C.C. Li and J.W. Dong : *On an open problem concerning an integral inequality,* JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math., 8, 3 (2007), Art. 74.

[32] W.J. Liu, Q.A. Ngo and V.N. Huy : *Several interesting integral inequalities*, Journal of Math. Inequal. Vol. 3, Iss. 2, (2009), 201-212.

[33] C. Li and S. Sarwar : *Existence and Continuation of Solutions for Caputo Type Fractional Differential Equations,* Electron. J. Differential Equations., Vol. 2016, No. 207, (2016), 14 pp.

[34] K.S. Miller and B. Ross : *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, New York, Wiley, 1993.

[35] Q.A. Ngo, D.D. Thang, T.T. Dat, D.A. Tuan : *Notes on an Integral Inequality*, JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math. 7(4), 2006, Art. 120.

[36] K.B. Oldham and J. Spanier : *The Fractional Calculus : Integrations and Differentiations of Arbitrary Order*, New York : Academic Press, 1974.

[37] I. Podlubny : *Fractional Differential Equations*, Academic Press, San Diego, 1999.

[38] F. Qi, *Several integral inequalities.* RGMIA Res. Rep. Coll. 2(7), Art. 9, 1039-1042 (1999).

[39] G. Samko, A.A. Kilbas, O.I. Marichev : *Fractional Integral and Derivative : Theory and Applications*, Gordon and Breach, London, 1993.

[40] D.R. Smart : *Fixed point Theorems*, Cambridge University Press., (1980).

[41] S. Staněk : *The Existence Of Positive Solutions Of Singular Fractional Boundary Value problems,* Computers & Mathematics With Applications., Vol. 62, No. 3, (2011), pp. 1379–1388.

[42] A. Taïeb, Z. Dahmani : *The High Order Lane-Emden Fractional Differential System : Existence, Uniqueness and Ulam Stabilities,* Kragujevac Journal of Mathematics., Vol. 40, No. 2, (2016), pp. 238–259.

[43] A. Taïeb, Z. Dahmani : *A Coupled System of Nonlinear Differential Equations Involing m Nonlinear Terms,* Georjian Math. Journal., Vol. 23, No. 3, (2016), pp. 447–458.

[44] J. Wang, L. Lv and Y. Zhou : *Ulam Stability And Data Dependence For Fractional Differential Equations With Caputo Derivative,* Electronic J Qualit TH Diff Equat., 63, (2011), pp. 1-10.

[45] S. Wu, *Generalization of a sharp Holder's inequality and its application*, J. Math. Anal. Appl. 332, (2007), 741-750.

[46] H. Young : *A note on Feng Qi type integral inequalities*, Int. Journal of Math. Analysis, Vol.1, N°. 25, (2007), pp.1243-1247.