

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABDELHAMID BEN BADIS DE MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
FILIERE : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES



Thèse Présentée par :

Souad BOUGUessa

Pour l'Obtention du Diplôme de :

Doctorat LMD

Filière : Mathématiques Appliquées

Spécialité : Recherche Opérationnelle et Aide à la décision

Analyse de la Stabilité d'une Certaine Classe de Systèmes Singuliers Fractionnaires

Date de soutenance : 30 Juin 2022

Devant le jury composé de :

Président :	Lakehal BELARBI	Professeur	UMAB
Examineur :	Zoubir DAHMANI	Professeur	UMAB
Examineur :	Abdelkrim MERZOUGUI	Professeur	Univ M'sila
Examineur :	Mohamed BENCHARRAT	Professeur	ENPO Oran
Encadreur :	Djillali BOUAGADA	Professeur	UMAB
Co-Encadreur :	Mohammed Amine GHEZZAR	MCA	UMAB

Année Universitaire : 2021 / 2022

D
O
C
T
O
R
A
T

Dédicaces

*Je dédie cette thèse à mes chers parents et mes frères
pour leurs encouragements et leur patience,
Spécialement à mes neveux que dieu les protège, et à
tous mes amies.*

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à exprimer ma gratitude à Allah tout-puissant pour nous avoir donné la santé, le courage et la volonté de pouvoir terminer ce travail.

Je tiens à remercier mon directeur de thèse Docteur Djillali BOUAGADA, Professeur à l'Université Abdelhamid Ibn Badis-Mostaganem, qui est à l'origine de ce travail, de m'avoir intégré dans son équipe et pour son encadrement exceptionnel, pour sa patience, sa rigueur et sa disponibilité durant la préparation de cette thèse ainsi que pour les efforts considérables qu'il a déployés pour le bon déroulement de ce travail de recherche et aussi pour ses qualités pédagogiques et scientifiques ainsi que pour son honnêteté, sa sympathie et sa gentillesse, c'est un honneur pour moi d'avoir travaillé avec lui. Un grand merci pour tout mon Professeur Monsieur Djillali BOUAGADA.

Je tiens également à exprimer ma plus profonde gratitude à mon co-encadreur Docteur Mohammed Amine GHEZZAR, Maître de conférences classe "A" à l'Université Abdelhamid Ibn Badis-Mostaganem, pour son soutien continu durant toutes les étapes de mon travail, pour ses précieux conseils, ses efforts qui ont contribué à la réussite de cette thèse, dont je n'oublierai jamais la sincérité et les encouragements qui ont été une source d'inspiration, je le remercie pour son aide pratique, son soutien et ses encouragements, je suis ravie d'avoir travaillé avec lui.

L'expression de ma gratitude ne saurait être complète sans adresser mes remerciements à mon collègue Kamel BENYETTOU pour son aide tout au long de ma thèse. Je n'oublierai pas de remercier tout particulièrement Docteur Zineb KAISSERLI Maître de Conférences classe "A" à l'Université Abdelhamid Ibn Badis-Mostaganem, pour ses conseils, son soutien et sa collaboration continue.

Mes remerciements s'adressent également à tous mes Professeurs qui ont contribué à ma formation depuis mon premier jour d'école, sans oublier le personnel administratif de l'Université Abdelhamid Ibn Badis-Mostaganem.

Mes remerciements s'adressent également à tous les membres du Laboratoire de Recherche des Mathématiques Pures et Appliquées (LMPA) de l'université de Mostaganem, en particulier l'équipe d'Analyse et Contrôle des systèmes (ACSY-Team).

Par ailleurs, je tiens à remercier les membres de jury, à commencer par Mr. BELARBI Lakehal, Professeur à l'Université Abdelhamid Ibn Badis-Mostaganem d'avoir accepté de présider le jury. Mes remerciements vont également aux Professeurs Zoubir DAHMANI, Abdelkrim MERZOUGUI et Mohamed BENHARRAT, qui m'ont fait l'honneur d'accepter d'expertiser ma thèse. Enfin, je ne peux en aucun cas oublier de remercier ma famille, qui m'a toujours soutenu inconditionnellement par tous les moyens possibles au cours de ma vie. En aucun mot ne peut

exprimer à quel point je suis reconnaissante envers mes parents ; ainsi, je tiens à remercier mes parents pour le soutien qu'ils m'ont apporté durant toutes ces années d'études. Je leur suis très reconnaissante de m'avoir toujours encourager dans la voie que j'ai choisie, et de m'avoir fourni les meilleures conditions d'étude. Je remercie tout particulièrement mes frères qui m'ont toujours soutenu.

Liste des Publications

Revues Internationales

1. Souad BOUGUESSA, Djillali BOUAGADA and Mohammed Amine GHEZZAR. *Influence of discretization step on asymptotic stability of a certain class of two-dimensional continuous-discrete fractional linear systems*. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series, 38, pages 68–77 (2022), <https://doi.org/10.1007/s10255-022-1060-1>. **Catégorie (A)**.

Conférences Nationales et Internationale

1. Souad BOUGUESSA, Djillali BOUAGADA et Mohammed Amine GHEZZAR. "*Analyse de la Stabilité des Systèmes Bidimensionnels Fractionnaires Linéaires*". International Workshop on Functional Analysis, Control systems and Decision support, Mostaganem 25-27 Mai , 2021.
2. Souad BOUGUESSA, Djillali BOUAGADA et Mohamed Amine GHEZZAR. "*Analyse de la Stabilité des Systèmes Bidimensionnels par l'approche LMI*". 3^{ème} Workshop sur la Modélisation Mathématique et Contrôle, WMMC2019, 04 et 05 Novembre 2019, Université de Annaba, Algérie.
3. Souad BOUGUESSA, Djillali BOUAGADA et Mohammed Amine GHEZZAR. "Sur la discrétisation d'une certaine classe de systèmes hybrides", 1^{ier} Séminaire de la formation doctoral RO et aide a la décision, Mostaganem 06 mars 2018.

Notations

\mathbb{Z}_+	: Corps des entiers non négatifs.
\mathbb{R}	: Corps des nombres réels.
\mathbb{R}_+	: Corps des nombres réels non négatifs.
\mathbb{R}^n	: Espace des vecteurs à n entrées réelles.
$\mathbb{R}^{n \times m}$: Espace des matrices réelles de dimensions $n \times m$.
\mathbb{C}	: Corps des nombres complexes.
\mathcal{M}_n	: Ensemble des matrices de Metzler de dimensions $n \times n$.
A^T	: Transposée d'une matrice A .
A^{-1}	: Inverse d'une matrice A .
I_n	: Matrice identité de dimension n .
$X(s)$: Transformée de Laplace.
$X(z)$: Z-Transformée.
$\Re(s)$: Partie réelle du nombre complexe s .
IML	: Inégalité matricielle linéaire.
$\rho(A)$: le rayon spectral de la matrice A .
e^{At}	: L'exponentielle d'une matrice A .
$\det(A)$: Le déterminant d'une matrice A .
$A > 0$: A une matrice positive.
$A \gg 0$: A une matrice strictement positive.
A^*	: Adjointe d'une matrice A .
$\Re(z)$: Partie réelle du nombre complexe z .
$Im(z)$: Partie imaginaire du nombre complexe z .

Table des matières

Dédicaces	2
Remerciments	3
Liste des Publications	5
Notations	6
Introduction	10
1 Notions fondamentales	13
1 Matrices particulières	13
2 Positivité des Systèmes 1D standards	14
3 Quelques notions fondamentales sur le calcul fractionnaire	16
3.1 Fonction Gamma	16
3.2 Fonction de Mittag-Leffler	17
3.3 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville	17
3.4 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo	17
3.5 Dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov	17
3.6 La relation entre les dérivées fractionnaires :	23
4 Systèmes bidimensionnels	24
4.1 Applications des modèles bidimensionnels	25
2 Positivité des systèmes bidimensionnels linéaires	29
1 Positivité du modèle de Roesser	29
2 Positivité du modèle général	31
3 Positivité du modèle de Fornasini - Marchesini	32
4 Modèles continu-discret positifs	33

4.1	Modèle général continu-discret positif	33
4.2	Modèles de Fornasini Marchesini positif à temps continu-discret	34
3	Stabilité des systèmes bidimensionnels par l'approche LMIs	35
1	Inégalités Matricielles Linéaires IMLs (LMIs en anglais)	35
1.1	Exemple 1	39
1.2	Exemple 2	39
2	Conditions de stabilité par les LMIs	39
2.1	Système général bidimensionnel à temps discret	40
2.2	Système bidimensionnel à temps continu-discret	40
2.3	Système bidimensionnel à temps continu	41
3	Test de stabilité	41
4	Approche LMIs pour les tests de stabilité	42
5	Stabilité des systèmes bidimensionnels fractionnaires	43
4	Discrétisation et Influence	48
1	Positivité et stabilité asymptotique d'un système 2D fractionnaire linéaire à temps continu-discret	49
1.1	Solution du système	49
1.2	Positivité d'un système à temps continu-discret linéaire fractionnaire 2D.	49
1.3	Stabilité asymptotique d'un système temporel continu-discret linéaire fractionnaire 2D	50
2	Positivité et stabilité asymptotique d'un système 2D fractionnaire linéaire à temps discret	51
2.1	Discrétisation du système 2D linéaire fractionnaire hybride	52
2.2	Solvabilité du système bidimensionnel fractionnaire discret	52
2.3	Positivité d'un système 2D fractionnaire linéaire à temps discret	53
2.4	Stabilité asymptotique du système à temps discret 2D	53
2.5	Positivité du système 1D fractionnaire linéaire à temps discret	55
3	Influence du pas de discrétisation sur la stabilité asymptotique	56
4	Exemple numérique	57
	Conclusion	60
	Annexe	61
	Résumé	68

Introduction

Actuellement un grand développement dans le domaine des sciences technologiques et de l'ingénierie que le monde industriel a connu les plus grands succès sous l'effet de la concurrence et des besoins de plus en plus exigeant en matière de qualité et performance. Ce projet de thèse est dû au développement qu'a connu la recherche fondamentale dans divers domaines tels que ceux de l'analyse numérique et de la théorie des systèmes. Cela nous a conduit à mettre en oeuvre des méthodes et approches très complexes et le contrôle des systèmes pour l'identification et la commande des systèmes.

Dans toutes les applications, un système en évolution est la donnée d'un système et d'une loi décrivant l'évolution de ce système. Cela peut être l'évolution d'une réaction chimique au cours du temps, le mouvement des planètes dans les systèmes solaires ou encore l'évolution de la mémoire d'un ordinateur sous l'action d'un programme informatique, des modèles à compartiments pour la biologie, la médecine et les circuits électriques; dans toutes ces cas les variables sont par nature positives, or les modèles usuels en particulier linéaires n'intègrent pas ces contraintes.

Récemment une nouvelle classe de systèmes à deux dynamiques a été introduite par de nombreux chercheurs [6, 10, 20]. On en parle d'une modélisation rigoureuse de processus réels qui conduit souvent à écrire des équations aux dérivées partielles. Lorsque celles-ci sont linéaires, une description par des modèles à plusieurs dynamiques est toujours possible et cela mène à des modèles singuliers. Notons dans ce cadre que la modélisation est a priori continue mais les approximations sont plutôt discrètes. On peut aussi envisager des cas hybrides continus/discrets. Ces systèmes (2D) ont été étudiés pour la première fois dans les années 1970, afin de traiter certains problèmes importants dans les applications de filtrage de données (dans les articles fondateurs de Fornasini Marchisini [2, 3]). Leur utilité fut rapidement appréciée, en trouvant rapidement des applications dans le traitement d'images numériques [40], dans la modélisation d'équations différentielles [41] comme l'équation de Darboux utilisée dans la modélisation des gaz, absorption, chauffage par jet d'eau, séchage à l'air, etc [41, 42]. La littérature sur les systèmes (2-D) (et les systèmes multidimensionnels en général) est aujourd'hui assez riche. Cependant plusieurs classes de systèmes ont été négligés dans la littérature en raison de leur difficulté inhérente, en particulier les systèmes avec contraintes sur les variables, avec des retards, ou avec des non-linéarités.

Dans les dernières décennies; un intérêt croissant pour les systèmes bidimensionnels fractionnaires est vite observé, ce sont des sujets à contraintes de positivité sur les variables dynamiques. Ces systèmes positifs doivent avoir pour des conditions initiales non négatives, des variables d'états non-négatifs. Ils ont été étudiés par plusieurs auteurs [36, 8, 23] dans différentes ap-

plications, et apparaissent naturellement et à titre d'exemples dans les réacteurs industriels chimiques, les échangeurs de chaleurs, l'épidémiologie, les circuits, les systèmes de stockages de mémoires ...etc. Dans les trois dernières décennies, plusieurs efforts ont été entrepris pour développer des systèmes fractionnaires, dans les différents champs de recherche, où le calcul fractionnaire est mis à l'avant comme outils puissant pour la modélisation des phénomènes.

L'analyse de la stabilité asymptotique des systèmes linéaires bidimensionnels est un sujet qui est étudié depuis plus de deux décennies, elle englobe plusieurs domaines relatifs aux sciences expérimentales comme le traitement d'images, la biotechnologie, la géophysique ainsi que l'économie, leurs applications se trouve dans la théorie de la commande et l'automatique. Parmi les théories qu'on considère bien ancienne et qui connait une grande popularité parmi les chercheurs dans les sciences fondamentales est le calcul fractionnaire qui étant la dérivation et l'intégration aux ordres fractionnaires. Dans ce travail, on considère une nouvelles classe de systèmes fractionnaires bidimensionnels. Les systèmes bidimensionnels sont des systèmes qui se propagent en deux directions, et qui trouvent leurs applications en électronique, imagerie et traitement du signal, en automatique, ainsi qu'en économie.

Nous nous intéressons à la classe des modèles bidimensionnels généralisé, nous utilisons dans ce cas la formulation LMI pour le test de stabilité de ces modèles.

La positivité et la stabilité asymptotique sont des notions importantes en théorie des systèmes et de contrôle. Le problème de la positivité et de la stabilité asymptotique d'une classe de systèmes fractionnaires bidimensionnels sont importantes et difficile. Nous nous s'attaqueront à la classe des systèmes de type fractionnaires où nous améliorons les conditions de la stabilité asymptotique de ces modèles par des approches IML's. La notion de la discrétisation est aussi regardée.

L'objectif du chapitre 1 est de rappeler quelques propriétés de la théorie des systèmes positifs (1-D), et des notions fondamentales sur le calcul fractionnaire introduite et on termine par considérer les systèmes bidimensionnels; nous abordons trois modèles(Giovane-Roesser, S.Attasi, Fornasini Marchisini [2, 3]), de systèmes bidimensionnels linéaires par la formulation d'espace d'état, cette méthodologie est appliquée par rapport à trois type de dynamiques discret-discret, continu-discret et continu-continu.

Les IML's jouent un rôle important dans l'analyse de la stabilité des systèmes linéaires, plusieurs résultats trouvent leurs formulations en terme d'LMIs, qui se permet de résoudre quelques problèmes qui n'avait pas encore trouver de solutions LMIs pour la commande des systèmes linéaires. Les LMIs sont des outils efficaces pour la résolution du problème automatique, moyennant des logiciels conviviaux tel que Matlab via son tool box par le solveur Yalmip.

Dans la deuxième partie de notre travail, nous introduisons une nouvelle classe de systèmes bidimensionnels fractionnaires introduites dans [14], et nous dérivons des conditions sur la sta-

bilité de cette classe par l'approche LMI.

Finalement, nous étudions le problème de l'influence du pas de discrétisation sur la stabilité asymptotique des systèmes où nous dérivons des conditions nécessaires et suffisantes de la stabilité asymptotique de ces systèmes. Cherchons dans notre but principal quelles sont les conditions imposées sur le pas de discrétisation pour préserver la stabilité.

Notions fondamentales

Dans ce chapitre, nous présentons quelques notions de bases concernant la théorie des matrices, comme les matrices non-négatives, positives ainsi que les matrices de Metzler introduites dans [13, 36]. En se basant sur la littérature (voir [7, 13]), nous donnons les définitions et quelques propriétés sur ces matrices particulières qui caractérisent la positivité et la stabilité asymptotique des systèmes linéaires 1D et 2D.

Dans la partie suivante, nous introduisons les notions générales qui régissent le calcul fractionnaire, nous exposons les différentes formulations des systèmes bidimensionnels, nous nous basons pour se faire sur les références [1, 2, 3].

1 Matrices particulières

Soit $\mathbb{R}^{n \times m}$ l'ensemble des $n \times m$ matrices avec des entrées réelles.

Définition 1.1. [13] *On dit qu'une matrice A est une matrice non-négative si toutes ses entrées sont non-négatives, autrement dit : $\forall i = 1, \dots, n, \forall j = 1, \dots, m : a_{ij} \geq 0$.*

Une telle matrice est notée $A \geq 0$ ou $A \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$.

Définition 1.2. [13] *On dit qu'une matrice A est une matrice positive si toutes ses entrées sont non-négatives avec au moins une entrée strictement positive i.e., A est une matrice non-négative et $\exists k = 1, \dots, n, \exists l = 1, \dots, m$ telle que : $a_{kl} > 0$.*

On note par $A > 0$.

Définition 1.3. [13] *On dit qu'une matrice A est une matrice strictement positive si toutes ses entrées sont strictement positives, i.e., $\forall i = 1, \dots, n, \forall j = 1, \dots, m : a_{ij} > 0$.*

Une telle matrice est notée par $A >> 0$.

Définition 1.4. [7] On dit qu'une matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice de Metzler si toutes ses entrées hors diagonales sont non-négatives i.e., $\forall i, j = 1, \dots, n : a_{ij} \geq 0$, pour $i \neq j$.

L'ensemble des matrices de Metzler de dimension n est noté \mathcal{M}_n .

Exemple 1.1. La matrice A suivante est une matrice de Metzler.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

Les matrices de Metzler trouvent leurs applications majeures dans l'analyse de stabilité et de positivité des systèmes linéaires.

Lemme 1. [13]

A est une matrice de Metzler si et seulement si $\forall t \geq 0 : e^{At} \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ où e^{At} étant l'exponentiel de la matrice At .

2 Positivité des Systèmes 1D standards

— Systèmes à temps continu

Nous considérerons le système linéaire à temps continu suivant :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0. \quad (1.2)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ sont les vecteurs d'états et d'entrées du système et $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

Définition 2.1. [36]

Le système à temps continu (1.2) est dit positif si $x(t) \in \mathbb{R}_+^n$, $t \geq 0$ pour toutes les conditions initiales $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}_+^n$ et toutes les entrées $u(t) \in \mathbb{R}_+^m$, $t \geq 0$.

Théorème 1. [31]

Le système à temps continu (1.2) est positif si et seulement si :

$$A \in \mathcal{M}_n, \quad B \in \mathbb{R}_+^{n \times m}. \quad (1.3)$$

Définition 2.2. ([8])

Le système à temps continu positif (1.2) est appelé asymptotiquement stable si pour $u(t) = 0$, $t \geq 0$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0, \quad \text{pour tout } x_0 \in \mathbb{R}_+^n.$$

Théorème 2. [36] *Le système positif décrit par l'équation (1.2) est asymptotiquement stable si et seulement si toutes les valeurs propres s_1, s_2, \dots, s_n de la matrice de Metzler A ont des parties réelles négatives.*

— **Systèmes à temps discret**

Nous considérerons maintenant, le système linéaire à temps discret suivant :

$$x_{i+1} = Ax_i + Bu_i, \quad i \in \mathbb{Z}_+. \quad (1.4)$$

où $x_i \in \mathbb{R}^n$, $u_i \in \mathbb{R}^m$ sont les vecteurs d'états et d'entrées du système et $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

On pose alors les définitions suivantes,

Définition 2.3. [36]

Le système à temps discret (1.4) est dit positif si $x_i \in \mathbb{R}_+^n$, $i \in \mathbb{Z}_+$, pour toutes les conditions initiales $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$ et toutes les entrées $u_i \in \mathbb{R}_+^m$, $i \in \mathbb{Z}^+$.

Théorème 3. [8]

Le système à temps discret (1.4) est positif si et seulement si

$$A \in \mathbb{R}_+^{n \times n}, \quad B \in \mathbb{R}_+^{n \times m}. \quad (1.5)$$

Définition 2.4. [8]

Le système à temps discret positif (1.4) est appelé asymptotiquement stable si pour $u_i = 0$ $i \in \mathbb{Z}_+$,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = 0, \quad \text{pour tous } x_0 \in \mathbb{R}_+^n.$$

Théorème 4. [20]

Pour le système positif (1.4) les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *Le système est asymptotiquement stable,*
2. *Les valeurs propres z_1, z_2, \dots, z_n de la matrice A ont des modules inférieurs à 1, c'est-à-dire $|z_k| < 1$ pour $k = 1, \dots, n$.*
3. *$\det[zI_n - A] \neq 0$ pour $|z| \geq 1$,*
4. *$\rho(A) < 1$, où $\rho(A) = \max_{1 \leq k \leq n} \{|z_k|\}$ est le rayon spectral de la matrice A .*
5. *Tous les coefficients $\hat{a}_i, i = 0, 1, \dots, n - 1$ du polynôme caractéristique*

$$P_{\hat{A}}(z) = \det[zI_n - \hat{A}] = z^n + \hat{a}_{n-1}z^{n-1} + \dots + \hat{a}_1z + \hat{a}_0 \quad (1.6)$$

de la matrice $\hat{A} = A - I_n$ sont positifs,

6. Tous les mineurs principaux de la matrice

$$\bar{A} = I_n - A = \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \bar{a}_{1n} \\ \bar{a}_{21} & \cdots & -\bar{a}_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{n1} & \bar{a}_{n2} & \bar{a}_{nn} \end{bmatrix}. \quad (1.7)$$

sont positifs, c'est-à-dire,

$$|\bar{a}_{11}| > 0, \quad \begin{vmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, \det \bar{A} > 0. \quad (1.8)$$

7. Il existe un vecteur strictement positif $\bar{x} > 0$ tel que,

$$[A - I_n]\bar{x} < 0. \quad (1.9)$$

3 Quelques notions fondamentales sur le calcul fractionnaire

Dans cette partie, nous introduisons les notions de base sur le calcul fractionnaire, nous nous basons pour cela sur [10, 29].

3.1 Fonction Gamma

Définition 3.1. [10] Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(\alpha) > 0$ alors la fonction Gamma notée Γ est définie par la relation suivante :

$$\Gamma : \alpha \rightarrow \Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (1.10)$$

Cette intégrale converge absolument sur le demi-plan complexe où la partie réelle est strictement positive. Par intégration par partie, on obtient ;

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha), \quad \Re(\alpha) > 0 \quad (1.11)$$

En particulier :

$$\Gamma(n) = n! \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+ \quad (1.12)$$

3.2 Fonction de Mittag-Leffler

Définition 3.2. [10] Soit $f \in \mathbf{C}[a, b]$ et $0 < \alpha < 1$. On appelle fonction de Mittag-Leffler notée $E_\alpha(\cdot)$ la fonction suivante :

$$E_\alpha(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^k}{\Gamma(k\alpha + 1)} \quad (1.13)$$

On remarque bien que $E_1(\theta) = e^\theta$ avec $\theta \in \mathbb{R}$.

3.3 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 3.3. [10] Soit f une fonction intégrable sur $[a, t]$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+$ (avec $n-1 < \alpha \leq n, n \in \mathbb{Z}_+^*$), alors la dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Riemann-Liouville de la fonction f est notée ${}^R D^\alpha$ et définie par :

$$\begin{aligned} {}^R D^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) \\ &= \frac{d^n}{dt^n} (I^{n-\alpha} f(t)) \end{aligned} \quad (1.14)$$

3.4 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Définition 3.4. [43] Soit $\alpha > 0$ avec $n-1 < \alpha \leq n, n \in \mathbb{Z}_+^*$ la fonction f vérifiant $\frac{d^n}{dt^n} f \in L^1[a, b]$ alors la dérivée fractionnaire d'ordre α (à gauche) au sens de Caputo de la fonction f notée ${}^C D_t^\alpha$ (ou simplement ${}^C D^\alpha$) est définie par la relation suivante :

$${}^C D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \quad (1.15)$$

$${}^C D^\alpha f(t) = I^{(n-\alpha)} \left(\frac{d^n}{dt^n} f(t) \right) \quad (1.16)$$

3.5 Dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov

Considérons une fonction continue $y = f(t)$. Selon la définition bien connue dans [29], la dérivée du premier ordre de la fonction f est définie par :

$$f'(t) = \frac{df}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h} \quad (1.17)$$

L'application de cette définition deux fois donne la dérivée du second ordre :

$$f''(t) = \frac{d^2 f}{dt^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(t) - f'(t-h)}{h} \quad (1.18)$$

$$f''(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{f(t) - f(t-h)}{h} - \frac{f(t-h) - f(t-2h)}{h} \right] \quad (1.19)$$

$$f''(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2} \quad (1.20)$$

En utilisant (1.17) et (1.20) on obtient

$$f^3(t) = \frac{d^3 f}{dt^3} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 3f(t-h) + 3f(t-2h) - f(t-3h)}{h^3} \quad (1.21)$$

et par récurrence, on obtient la formule suivante :

$$f^{(n)}(t) = \frac{d^n f}{dt^n} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(t - kh) \quad (1.22)$$

où

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} \quad (1.23)$$

est la notation usuelle des coefficients binomiaux (combinaison C_p^n).

Considérons maintenant l'expression suivante généralisant les dérivés en (1.17) et (1.21)

$$f_h^{(p)}(t) = \frac{1}{h^p} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(t - kh) \quad (1.24)$$

où p, n sont deux entiers naturelles arbitraires.

alors, pour $p \leq n$ nous avons :

$$\lim_{h \rightarrow 0} f_h^{(p)}(t) = f^{(p)}(t) = \frac{d^p f}{dt^p} \quad (1.25)$$

Considérons les valeurs négatives de p . Pour plus de commodité, notons,

$$\binom{p}{k} = \frac{p(p+1)\dots(p+k-1)}{k!} \quad (1.26)$$

Ensuite nous avons

$$\binom{-p}{k} = \frac{-p(-p-1)\dots(-p-k+1)}{k!} = (-1)^k \binom{p}{k}. \quad (1.27)$$

et en remplaçant p dans la relation (1.24), on peut écrire,

$$f_h^{(-p)}(t) = \frac{1}{h^p} \sum_{k=0}^n \binom{p}{k} f(t - kh) \quad (1.28)$$

où p est un nombre entier positif.

Si n est fixe, alors $f_h^{(-p)}(t)$ tend vers la limite non intéressante 0 lorsque $h \rightarrow 0$.

Pour arriver à une limite non nulle, nous devons supposer que $n \rightarrow \infty$ lorsque $h \rightarrow 0$.

Nous supposons que $h = \frac{t-a}{n}$, où a est une constante réelle, et considérons la valeur limite, finie ou infinie, de $f_h^{(-p)}(t)$ que nous désignerons par

$$\lim_{h \rightarrow 0, nh=t-a} f_h^{(-p)}(t) = {}_a D_t^{-p} f(t) \quad (1.29)$$

Ici, ${}_a D_t^{-p} f(t)$ désigne en fait une certaine opération effectuée sur la fonction $f(t)$. Les nombres a et t étant les bornes.

Considérons plusieurs cas particuliers.

Pour $p = 1$ on a :

$$f_h^{(-1)}(t) = h \sum_{k=0}^n f(t - kh). \quad (1.30)$$

En tenant compte du fait que $t - nh = a$ et que la fonction $f(t)$ est supposée continue, nous concluons que

$$\lim_{h \rightarrow 0, nh=t-a} f_h^{(-1)}(t) = {}_a D_t^{-1} f(t) = \int_0^{t-a} f(t - z) dz = \int_a^t f(\tau) d\tau. \quad (1.31)$$

Prenons $p = 2$.

$$\left[\begin{array}{c} 2 \\ k \end{array} \right] = \frac{2.3 \dots (2 + k - 1)}{k!} = k + 1.$$

et on a

$$f_h^{(-2)}(t) = h \sum_{k=0}^n (kh) f(t - kh). \quad (1.32)$$

En notant $t + h = y$, nous pouvons écrire la relation (1.32)

$$f_h^{(-2)}(t) = h \sum_{k=1}^{n+1} (kh) f(t - kh). \quad (1.33)$$

et en mettant $h \rightarrow 0$ on obtient :

$$\lim_{h \rightarrow 0, nh=t-a} f_h^{(-2)}(t) = {}_a D_t^{-2} f(t) = \int_0^{t-a} z f(t - z) dz = \int_a^t (t - \tau) f(\tau) d\tau. \quad (1.34)$$

Le troisième cas particulier, à savoir $p = 3$, nous donnera l'expression générale de ${}_a D_t^{-p}$.

Tenant compte du fait que

$$\left[\begin{matrix} 3 \\ k \end{matrix} \right] = \frac{3.4\dots(3+k-1)}{k!} = \frac{(k+1)(k+2)}{1.2}.$$

on a,

$$f_h^{(-3)}(t) = \frac{h}{1.2} \sum_{k=0}^n (k+1)(k+2)h^2 f(t-kh). \quad (1.35)$$

en posant $t+h=y$, on trouve :

$$f_h^{(-3)}(t) = \frac{h}{1.2} \sum_{k=1}^{n+1} k(k+1)h^2 f(y-kh). \quad (1.36)$$

L'expression (1.36) peut être réécrite comme suit :

$$f_h^{(3)}(t) = \frac{h}{1.2} \sum_{k=1}^{n+1} (kh)^2 f(y-kh) + \frac{h^2}{1.2} \sum_{k=1}^{n+1} kh f(y-kh). \quad (1.37)$$

Prenant maintenant $h \rightarrow 0$, nous obtenons :

$${}_a D_t^{-3} f(t) = \frac{1}{2!} \int_0^{t-a} z^2 f(t-z) dz = \int_a^t (t-\tau)^2 f(\tau) d\tau. \quad (1.38)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0, nh=t-a} \frac{h^2}{1.2} \sum_{k=1}^{n+1} kh f(y-kh) = \lim_{h \rightarrow 0, nh=t-a} h \int_a^t (t-\tau) f(\tau) d\tau = 0. \quad (1.39)$$

Les relations (1.31) et (1.38) suggèrent la situation suivant :

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0, nh=t-a} h^p \sum_{k=0}^n \left[\begin{matrix} 3 \\ k \end{matrix} \right] f(t-kh) = \frac{1}{(p-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau. \quad (1.40)$$

On démontre la formule (1.40) par récurrence.

Nous introduisons la fonction

$$f_1(t) = \int_a^t f(\tau) d\tau. \quad (1.41)$$

qui a la propriété évidente $f_1(a) = 0$, et considérons

$${}_a D_t^{-p-1} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0, nh=t-a} h^{p+1} \sum_{k=0}^n \left[\begin{matrix} p+1 \\ k \end{matrix} \right] f(t-kh).$$

$${}_a D_t^{-p-1} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0, nh=t-a} h^p \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} p+1 \\ k \end{bmatrix} f_1(t - kh).$$

$${}_a D_t^{-p-1} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0, nh=t-a} h^p \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} p+1 \\ k \end{bmatrix} f(t - (k+1)h). \quad (1.42)$$

D'une autre part la relation (1.26) nous donne :

$$\begin{bmatrix} p+1 \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p+1 \\ k-1 \end{bmatrix}. \quad (1.43)$$

où nous devons mettre

$$\begin{bmatrix} p+1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0.$$

Relation (1.43) appliquée à la première somme en (1.42) et le remplacement de k par $k-1$ dans la seconde somme, nous donne :

$$\begin{aligned} {}_a D_t^{-p-1} f(t) &= \lim_{h \rightarrow 0, nh=t-a} h^p \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} p \\ k \end{bmatrix} f_1(t - kh) + \lim_{h \rightarrow 0, nh=t-a} h^p \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} p+1 \\ k-1 \end{bmatrix} f_1(t - kh) \\ &- \lim_{h \rightarrow 0, nh=t-a} h^p \sum_{k=1}^{n+1} \begin{bmatrix} p+1 \\ k-1 \end{bmatrix} f_1(t - kh) \\ &= {}_a D_t^{-p} f_1(t) - \lim_{h \rightarrow 0, nh=t-a} h^p \begin{bmatrix} p+1 \\ n \end{bmatrix} f_1(t - (n+1)h) \\ &= {}_a D_t^{-p} f_1(t) - (t-a)^p \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} p+1 \\ n \end{bmatrix} \frac{1}{n^p} f_1\left(a - \frac{t-a}{n}\right) \end{aligned}$$

Il en découle de la définition (1.41) de la fonction $f_1(t)$ que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_1\left(a - \frac{t-a}{n}\right) = 0.$$

et en prenant en compte la relation (1.25) cela nous donne :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} p+1 \\ n \end{bmatrix} \frac{1}{n^p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(p+1)(p+2)\dots(p+n)}{n^n n!} = \frac{1}{\Gamma(p+1)}$$

donc,

$$\begin{aligned} {}_a D_t^{-p-1} f(t) &= {}_a D_t^{-p} f_1(t) = \frac{1}{(p-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f_1(\tau) d\tau \\ &- \frac{(t-\tau)^p f_1(\tau)}{p!} \Big|_{\tau=a}^{\tau=t} + \frac{1}{p!} \int_a^t (t-\tau)^p f(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (1.44)$$

$$= \frac{1}{p!} \int_a^t (t-\tau)^p f(\tau) d\tau \quad (1.45)$$

Ce qui termine la preuve de la formule (1.40).

$$\frac{d}{dt} ({}_a D_t^{-p} f(t)) = \frac{1}{p-2!} \int_a^t (t-\tau)^{p-2} f(\tau) d\tau = {}_a D_t^{-p+1} f(t)$$

De a à t on obtient :

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \int_a^t ({}_a D_t^{-p+1} f(t)) dt$$

$${}_a D_t^{-p+1} f(t) = \int_a^t ({}_a D_t^{-p+2} f(t)) dt$$

et donc,

$$\begin{aligned} {}_a D_t^{-p} f(t) &= \int_a^t dt \int_a^t ({}_a D_t^{-p+2} f(t)) dt \\ &= \int_a^t dt \int_a^t dt ({}_a D_t^{-p+3} f(t)) dt \\ &= \underbrace{\int_a^t dt \int_a^t dt \dots \int_a^t}_{p \text{ fois}} f(t) dt \end{aligned}$$

On voit que la dérivée d'un ordre entier n (1.22) et l'intégrale p -fois (1.40) de la fonction continue $f(t)$ sont des cas particuliers de l'expression générale.

$${}_a D^p f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-p} \sum_{k=0}^n (-1)^k \begin{bmatrix} p \\ k \end{bmatrix} f(t - kh). \quad (1.46)$$

qui représentent la dérivée d'ordre m si $p = m$ et l'intégrale m fois si $p = -m$. Cette observation conduit naturellement à l'idée d'une généralisation des notions de dérivation et d'intégration en permettant à p en (1.46) d'être un nombre réel arbitraire voir complexe. Nous limiterons notre attention aux valeurs réelles de p .

Définition 3.5. [29] *L'idée principale dans cette approche est de généraliser les grands classiques de la dérivation standard (entière) d'une fonction à des ordres arbitraires, donc on peut exprimer la dérivée d'ordre entier k (si α est positif) et l'intégrale répétée $(-k)$ fois (si k est*

négatif) d'une fonction f par la relation suivante :

$$D^k f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-k} \sum_{p=0}^{k+1} (-1)^p \binom{k}{p} f(t - hp) \quad (1.47)$$

$$\text{avec } \binom{k}{p} = \frac{k(k-1)(k-2)\dots(k-p+1)}{p!}$$

La généralisation de cette formule pour α non entier avec ($0 < n - 1 < \alpha < n, n \in \mathbb{Z}_+^*$) est appelée dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov, notée ${}^{GL}D^\alpha f(t)$ et définie par la relation suivante

$${}^{GL}D^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{p=0}^{k+1} (-1)^p \binom{\alpha}{p} f(t - hp) \quad (1.48)$$

$$\text{avec, } \binom{\alpha}{p} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-p+1)}{p!} \text{ et } 0 < n - 1 < \alpha < n, n \in \mathbb{Z}_+^*.$$

3.6 La relation entre les dérivées fractionnaires :

Dans cette partie, nous donnerons des résultats sur la relation entre les dérivées fractionnaires, donnée dans [43]

Soit α vérifiant $0 < n - 1 < \alpha < n, n \in \mathbb{Z}_+^*$. Supposons que f est une fonction dont les dérivées ${}^C D^\alpha f$ et ${}^R D^\alpha f$ existent alors,

$${}^C D^\alpha f(t) = {}^R D^\alpha f(t) - \sum_{p=0}^{n-1} \frac{f^{(p)}(a)(t-a)^{p-\alpha}}{\Gamma(p-\alpha+1)} \quad (1.49)$$

Nous en déduisons que si toutes les conditions initiales $f^{(p)}(a) = 0$ pour tout $p = 0, \dots, (n-1)$, alors ${}^C D^\alpha = {}^R D^\alpha$.

Si la fonction f est de classe \mathbf{C}^n , alors en faisant des intégrations par parties nous obtenons ce qui suit :

$${}^R D^\alpha f(t) = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{f^{(p)}(a)(t-a)^{p-\alpha}}{\Gamma(p-\alpha+1)} + \frac{1}{n-\alpha} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)} d\tau \quad (1.50)$$

Donc, on déduit que les deux approches de Grünwald-Letnikov et de Riemann-Liouville sont équivalentes, c-à-d, ${}^{GL}D^\alpha = {}^R D^\alpha$.

4 Systèmes bidimensionnels

Les systèmes bidimensionnels (2-D) représentent une classe intéressante de systèmes physiques dans lesquels l'état dépend de deux variables indépendantes, il existe une grande variété de systèmes 2D. Par conséquent, pour traiter de tels systèmes, différents modèles mathématiques ont été proposés et étudiés dans la littérature. Dans cette partie, nous nous concentrons sur les modèles les plus largement utilisés (ce qu'on appelle Roesser et Fornasini-Marchesini (F-M), et Attasi) introduit dans [1, 2, 3].

On cite dans ce qui suit et à titre d'exemples,

Modèle bidimensionnel de Fornasini-Marchesini discret :

Le premier modèle d'état bidimensionnel a été introduit en 1976, par Fornasini-Marchesini noté FF-FM dans [2] est donné pour le cas discret par la relation suivante :

$$\begin{cases} x(i_1 + 1, i_2 + 1) &= A_0x(i_1, i_2) + A_1x(i_1 + 1, i_2) + A_2x(i_1, i_2 + 1) + Bu(i_1, i_2), \\ y(i_1, i_2) &= C'x(i_1, i_2). \end{cases} \quad (1.51)$$

Le second modèle bidimensionnel noté SF-FM introduit dans [3] est donné par :

$$\begin{cases} x(i_1 + 1; i_2 + 1) &= A_1x(i_1 + 1, i_2) + A_2x(i_1, i_2 + 1) + B_1u(i_1 + 1, i_2) + B_2u(i_1, i_2 + 1), \\ y(i_1, i_2) &= Cx(i_1, i_2). \end{cases} \quad (1.52)$$

où, $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_1, B_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ et,

- $x^h(t, i) \in \mathbb{R}^{n_1}$ vecteur d'état horizontal
- $x^v(t, i) \in \mathbb{R}^{n_2}$ vecteur d'état vertical
- $y(t, i) \in \mathbb{R}^p$ vecteur de sortie
- $u(t, i) \in \mathbb{R}^m$ vecteur d'entrée

Modèle bidimensionnel de Fornasini-Marchesini continu-discret :

On introduit une formulation du modèle de Fornasini-Marchesini par rapport au cas continu-discret, donné dans [2] par,

$$\dot{x}(t, i + 1) = A_0x(t, i) + A_1\dot{x}(t, i) + A_2x(t, i + 1) + Bu(t, i), \quad (1.53)$$

$$y(t, i) = C'x(t, i). \quad (1.54)$$

Le second modèle 2D de Fornasini-Marchesini au cas continu-discret introduit dans [3] est donné par les équations suivantes :

$$\dot{x}(t, i + 1) = A_1 \dot{x}(t, i) + A_2 x(t, i + 1) + B_1 \dot{u}(t, i) + B_2 u(t, i + 1), \quad (1.55)$$

$$y(t, i) = C' x(t, i). \quad (1.56)$$

où, où, $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_1, B_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ et,

- $n_1 + n_2 = n$
- $x^h(t, i) \in \mathbb{R}^{n_1}$ vecteur d'état horizontal
- $x^v(t, i) \in \mathbb{R}^{n_2}$ vecteur d'état vertical
- $y(t, i) \in \mathbb{R}^p$ vecteur de sortie
- $u(t, i) \in \mathbb{R}^m$ vecteur d'entrée

Modèle bidimensionnel de Fornasini-Marchesini continu :

Soit le modèle bidimensionnel fractionnaire de Fornasini-Marchesini introduit dans [2] donné par l'équation suivante :

$$D_{t_1, t_2}^{\alpha_1 \alpha_2} x(t_1, t_2) = A_0 x(t_1, t_2) + A_1 D_{t_1}^{\alpha_1} x(t_1, t_2) + A_2 D_{t_2}^{\alpha_2} x(t_1, t_2) + B u(t_1, t_2). \quad (1.57)$$

où, $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^n$.

Le second modèle 2D de Fornasini-Marchesini au cas continu introduit dans [3] est donnée par l'équation suivante :

$$D_{t_1, t_2}^{\alpha_1 \beta} x(t_1, t_2) = A_1 D_{t_1}^{\alpha} x(t_1, t_2) + A_2 D_{t_2}^{\beta} x(t_1, t_2) + B_1 D_{t_1}^{\alpha} u(t_1, t_2) + B_2 D_{t_2}^{\beta} u(t_1, t_2) \quad (1.58)$$

4.1 Applications des modèles bidimensionnels

Application1 :[44]

Considérons $(N + 1)$ circuits (à deux ports) tous connectés en séries, représenté par la figure2, étant donnée C_1, C_2 les capacités respectives de chaque condensateur ; R et connaissant les valeurs initiales des tensions au bords de chaque condensateur $u_1(0, k)$ et $u_2(0, k)$ pour $K = 0, \dots, N$, la résistance R_0 et la source de voltage $e(t)$, on définit $u_1(t, k)$ et $u_2(t, k)$ pour $t \in \mathbb{R}_+$ et $K = 0, \dots, N$.

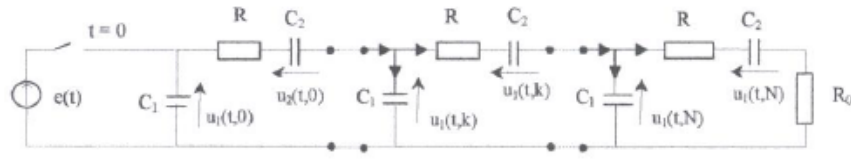


FIGURE 1.1 – circuit RC bidimensionnelle

Moyennant les lois de Kirchoff, on obtient les équations suivantes,

$$C_1 \dot{u}_1(t, k + 1) + C_2 \dot{u}_2(t, k + 1) - C_2 \dot{u}_2(t, k) = 0$$

$$u_1(t, k) - RC_2 \dot{u}_2(t, k) - u_2(t, k) - u_1(t, k + 1) = 0$$

Définissons, $x(t, k) := \begin{bmatrix} u_1(t, k) \\ u_2(t, k) \end{bmatrix}$, on obtient ;

$$E \dot{x}(t, k + 1) = Ax(t, k + 1) + A_0 x(t, k) + A_1 \dot{x}(t, k) = f(t, k).$$

où, $t \in \mathbb{R}_+$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $\dot{x}(t, k) = \frac{\partial x(t, k)}{\partial t}$, $x(t, k) \in \mathbb{R}^n$, $x(0, k) = x_k$ pour $K = 0, 1, \dots, N$.

Application 2 :[30]

Considérons la longue ligne de transmission avec le modèle d'éléments distribués illustré par la figure 2

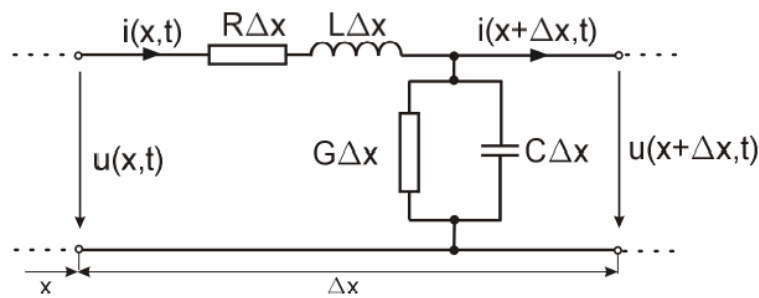


FIGURE 1.2 – Ligne de transmission

Nous pouvons donc formuler les équations décrivant le courant et la tension dans cette ligne en fonction du temps t et de la variable d'espace x , par le même principe qui est les lois de Kirchoff,

$$-{}^C D_x^\alpha u(x, t) = Ri(x, t) + L^C D_t^\beta i(x, t), \quad (1.59)$$

$$-{}^C D_x^\alpha i(x, t) = Gi(x, t) + C {}^C D_t^\beta u(x, t), \quad (1.60)$$

où, $u(x, t)$ est la tension, $i(x, t)$ est le courant au point x depuis le début de la ligne au temps t ; R est la résistance distribuée, L est l'inductance distribuée, G est la conductance distribuée, et C est la capacité distribuée de la ligne de transmission; $0 < \alpha \leq 1$ et $0 < \beta \leq 1$ sont des ordres fractionnaires (réels) par rapport à la variable spatiale x et au temps t .

Les équations (1.59) et (1.60) peuvent être écrites sous la représentation en espace d'état suivant,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L \\ 0 & 1 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^C D_x^\alpha x^h(x, t) \\ {}^C D_t^\beta x^v(x, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -R & 0 & 0 \\ -G & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(x, t) \\ x^v(x, t) \end{bmatrix} \quad (1.61)$$

$$\begin{bmatrix} u(x, t) \\ i(x, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(x, t) \\ x^v(x, t) \end{bmatrix} \quad (1.62)$$

où,

$$x^h(x, t) = x^v(x, t) = \begin{bmatrix} u(x, t) \\ i(x, t) \end{bmatrix}$$

Le système (1.61) est un exemple de système continu d'ordre fractionnaire singulier 2D décrit par le modèle de Roesser, où $t_1 = x$ est la variable spatiale décrivant une distance depuis le début de la ligne, $t_2 = t$ est une variable qui représente le temps, $\alpha_1 = \alpha$ est l'ordre fractionnaire de la dérivée partielle par rapport à l'espace des variables et $\alpha_2 = \beta$ est l'ordre fractionnaire de la dérivée partielle par rapport au temps. Les matrices du système sont donc,

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L \\ 0 & 1 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -R & 0 & 0 \\ -G & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$B = [0]^{4 \times 1}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = [0]_{2 \times 1}.$$

Notez que le système (1.61) a des matrices nulles B et D. C'est donc un système autonome indépendant de l'entrée $u(x, t)$.

Les conditions aux limites sont les courants et les tensions et ses dérivées d'ordre entier en

début de ligne et pour $t = 0$.

$$x^{h(k)} = (0, t) = \begin{bmatrix} \frac{d^k u(0,t)}{dx^k} \\ \frac{d^k i(0,t)}{dx^k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^k u(x,t)}{\partial x^k} \\ \frac{\partial^k i(x,t)}{\partial x^k} \end{bmatrix}_{x=0} = \begin{bmatrix} u_0^{(k)}(t) \\ i_0^{(k)}(t) \end{bmatrix}$$

pour $k = 0, \dots, N_1 - 1$; $t_2 \geq 0$.

$$x^{v(l)} = (x, 0) = \begin{bmatrix} \frac{d^l u(x,0)}{dt^l} \\ \frac{d^l i(0,t)}{dt^l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^l u(x,t)}{\partial t^l} \\ \frac{\partial^l i(x,t)}{\partial t^l} \end{bmatrix}_{t=0} = \begin{bmatrix} u_0^{(l)}(x) \\ i_0^{(l)}(x) \end{bmatrix}$$

où, $l = 0, 1, 2, \dots, N_1 - 1$; $t_1 \geq 0$ et $x_0^{h(k)}(t_2)$, $x_0^{v(l)}(t_1)$ sont des fonctions données.

Positivité des systèmes bidimensionnels linéaires

Dans ce chapitre, nous introduisons quelques modèles bidimensionnels linéaires, et nous étudions les principaux résultats obtenus concernant la positivité de ces systèmes, pour cela nous nous sommes basés sur [1, 2, 3, 6, 36].

1 Positivité du modèle de Roesser

Considérons le modèle de Roesser 2D introduit dans [1] décrit par les équations suivantes :

$$\begin{bmatrix} x_{i+1,j}^h \\ x_{i,j+1}^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{ij}^h \\ x_{ij}^v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u_{ij}, \quad (2.1)$$

$$y_{ij} = (C_1, C_2) \begin{bmatrix} x_{ij}^h \\ x_{ij}^v \end{bmatrix} + D u_{ij} \quad i, j \in \mathbb{Z}_+. \quad (2.2)$$

où $x_{ij}^h \in \mathbb{R}^{n_1}$ et $x_{ij}^v \in \mathbb{R}^{n_2}$ sont les vecteurs d'états horizontaux et verticaux aux points $(i, j) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$, $u_{ij} \in \mathbb{R}^m$ et $y_{ij} \in \mathbb{R}^p$ sont les vecteurs d'entrées et de sorties, respectivement et $A_{11} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$, $A_{12} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$, $A_{21} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_1}$, $A_{22} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times m}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times m}$, $C_1 \in \mathbb{R}^{p \times n_1}$, $C_2 \in \mathbb{R}^{p \times n_2}$, $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$.

Les conditions aux limites pour l'équation (2.1) ont la forme :

$$x_{0j}^h \quad \text{pour } j \in \mathbb{Z}_+ \quad \text{et} \quad x_{i0}^v \quad \text{pour } i \in \mathbb{Z}_+ \quad (2.3)$$

Soit $\mathbb{R}_+^{p \times q}$ l'ensemble des matrices $p \times q$ avec des entrées réelles non négatives et $\mathbb{R}_+^p := \mathbb{R}_+^{p \times 1}$.

La solution de l'équation (2.1) satisfaisant les conditions aux limites de l'équation (2.3) a la forme suivante :

$$x_{ij} = \begin{pmatrix} x_{i,j}^h \\ x_{i,j}^v \end{pmatrix} = x_{bc}(i, j) + \sum_{k,l \in D_{ij}} M_{i-k,j-l} u_{kl},$$

où

$$x_{bc}(i, j) = \sum_{k=0}^i T_{i-k, j} \begin{bmatrix} 0 \\ x_{k0}^v \end{bmatrix} + \sum_{l=0}^i T_{i, j-l} \begin{bmatrix} x_{0l}^v \\ 0 \end{bmatrix}.$$

La composante liée aux conditions initiales non nulles dans l'équation (2.3) est donnée par la formule suivante :

$$M_{i-k, j-l} := T_{i-k-1, j-l} \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} + T_{i-k, j-l-1} \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

$$D_{ij} := \{(k, l) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+; \quad 0 \leq k \leq i; \quad 0 \leq l \leq j, \quad k + l \neq i + j\}.$$

Les matrices de transitions du modèle donné par les équations (2.1) et (2.2) sont définies par ce qui suit :

$$T_{ij} := \begin{cases} I_n (\text{matrice d'identité}) & \text{pour } i = j = 0 \\ T_{10}T_{i-1, j} + T_{01}T_{i, j-1} & \text{pour } i, j \in \mathbb{Z}_+ (i + j) > 0. \\ 0 (\text{la matrice nulle}) & \text{pour } i < 0 \text{ ou } j < 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

où,

$$T_{10} := \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad T_{01} := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Définition 1.1. [1] *Le modèle bidimensionnel linéaire de Roesser décrit par les équations (2.1) et (2.2) est dit positif si pour toutes les conditions aux limites non négatives.*

$$x_{0j}^h \in \mathbb{R}_+^{n_1} \quad j \in \mathbb{Z}_+ \quad \text{et} \quad x_{i0}^v \in \mathbb{R}_+^{n_2} \quad i \in \mathbb{Z}_+ \quad (2.6)$$

et toutes les entrées $u_{ij} \in \mathbb{R}_+^m, i, j \in \mathbb{Z}_+,$ l'état $x_{ij} = \begin{bmatrix} x_{ij}^h \\ x_{ij}^v \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_+^n, n = n_1 + n_2$ et $y_{ij} \in \mathbb{R}_+^m$ pour tout $i, j \in \mathbb{Z}_+.$

Lemme 2. [36] *Le modèle de Roesser est positive si et seulement si, la matrice de transition T_{ij} est positive, c'est à dire ;*

$$T_{ij} \in \mathbb{R}_+^{n \times n} \quad \text{pour } i, j \in \mathbb{Z}_+. \quad (2.7)$$

Théorème 5. [1] *Le modèle décrit par les équations (2.1) (2.2) est un modèle de Roesser positif si et seulement si :*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_+^{n \times n}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_+^{n \times m}, \quad C = [C_1 C_2] \in \mathbb{R}_+^{p \times n}, \quad D \in \mathbb{R}_+^{p \times m}. \quad (2.8)$$

2 Positivité du modèle général

Considérons le modèle 2D général introduit dans [2, 3] décrit par les équations suivantes :

$$x_{i+1,j+1} = A_0x_{ij} + A_1x_{i+1,j} + A_2x_{i,j+1} + B_0u_{ij} + B_1u_{i+1,j} + B_2u_{i,j+1} \quad (2.9)$$

$$y_{ij} = Cx_{ij} + Du_{ij} \quad i, j \in \mathbb{Z}_+. \quad (2.10)$$

où $x_{ij} \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état au point (i, j) , $u_{ij} \in \mathbb{R}^m$ et $y_{ij} \in \mathbb{R}^p$ sont respectivement des vecteurs d'entrées et de sorties, et $A_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_k \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $k = 0, 1, 2$, $A \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$.

Les conditions aux limites pour l'équation (2.9) ont la forme :

$$x_{i0}, \quad i \in \mathbb{Z}_+ \quad \text{et} \quad x_{0j}, \quad j \in \mathbb{Z}_+ \quad (2.11)$$

La solution du modèle (2.9) satisfaisant les conditions aux limites (2.11) sont de la forme :

$$\begin{aligned} x(i, j) = & \sum_{k=1}^i T_{i-k,j-l}(A_1x_{k0} + B_1u_{k0}) + \sum_{l=1}^j T_{i-1,j-l}(A_2x_{0l} + B_2u_{0l}) \\ & \sum_{k=1}^{i-1} T_{i-k-1,j-l}A_0x_{k0} + \sum_{l=1}^{j-1} T_{i-1,j-l-1}A_0x_{0l} + T_{i-1,j-1}A_0x_{00} \\ & + \sum_{k=0}^{i-1} \sum_{l=0}^{j-1} T_{i-k-1,j-l-1}B_0u_{kl} \\ & + \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^j (T_{i-k-1,j-l}B_1 + T_{i-k,j-l-1}B_2)u_{kl}, \quad \text{pour } i, j \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned}$$

Les matrices de transitions du modèle (2.9) sont définies par. :

$$T_{ij} := \begin{cases} I_n(\text{matrice d'identité}) & \text{pour } i = j = 0 \\ A_0T_{i-1,j-1} + A_1T_{i,j-1} + A_2T_{i-1,j} & \text{pour } i, j \geq 0(i+j) > 0. \\ 0(\text{la matrice nulle}) & \text{pour } i < 0 \text{ ou } j < 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

Définition 2.1. [2] *Le modèle (2.9) est appelé modèle général positif si pour toutes les conditions aux limites vérifiant :*

$$x_{i0} \in \mathbb{R}_+^n, i \in \mathbb{Z}_+ \quad x_{0j} \in \mathbb{R}_+^n, j \in \mathbb{Z}_+ \quad (2.13)$$

et pour chaque entrées $u_{ij} \in \mathbb{R}_+^m, i, j \in \mathbb{Z}_+$, on a $x_{ij} \in \mathbb{R}_+^n$ et $y_{ij} \in \mathbb{R}_+^p$ pour $i, j \in \mathbb{Z}_+$.

Lemme 3. [36] *La matrice de transition T_{ij} du modèle positif (2.9) est une matrice positive, c'est-à-dire : $T_{ij} \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ pour $i, j \in \mathbb{Z}_+$.*

Théorème 6. [2] *Le modèle (2.9) est un modèle général positif si et seulement si :*

$$A_k \in \mathbb{R}_+^{n \times n}, \quad B_k \in \mathbb{R}_+^{n \times m}, \quad k = 0, 1, 2, \quad C \in \mathbb{R}_+^{p \times n}, \quad D \in \mathbb{R}_+^{p \times m}. \quad (2.14)$$

3 Positivité du modèle de Fornasini - Marchesini

Les modèles positifs de Fornasini - Marchesini introduit dans [2, 3] sont des cas particuliers du modèle général positif (2.9).

En remplaçant dans l'équation (2.9) $B_1 = B_2 = 0$ et $B_0 = B$ on obtient le premier modèle de Fornasini - Marchesini (FF-FM) décrit par :

$$x_{i+1,j+1} = A_0 x_{ij} + A_1 x_{i+1,j} + A_2 x_{i,j+1} + B u_{ij} \quad (2.15)$$

$$y_{ij} = C x_{ij} + D u_{ij} \quad i, j \in \mathbb{Z}_+. \quad (2.16)$$

D'après le théorème 6, le modèle est positif si et seulement si :

$$A_k \in \mathbb{R}_+^{n \times n}, \quad k = 0, 1, 2, \quad B \in \mathbb{R}_+^{n \times m} \quad C \in \mathbb{R}_+^{p \times n}, \quad D \in \mathbb{R}_+^{p \times m}. \quad (2.17)$$

Les matrices de transitions T_{ij} du modèle positif (2.15) sont définies par l'équation (2.12) et elles sont positives, c'est-à-dire $T_{ij} \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ pour tout $i, j \in \mathbb{Z}_+$.

Les conditions aux limites pour l'équation (2.15) ont la forme (2.13).

La solution du modèle (2.15) satisfaisant les conditions aux limites (2.13) a la forme :

$$\begin{aligned} x_{ij} = & \sum_{k=1}^i T_{i-k,j-1} A_1 x_{k0} + \sum_{l=1}^i T_{i-l,j-1} A_2 x_{0l} + T_{i-1,j-1} A_0 x_{00} \\ & + \sum_{k=1}^{i-1} T_{i-k-1,j-1} A_0 x_{k0} + \sum_{l=1}^{j-1} T_{i-1,j-l-1} A_0 x_{0l} \\ & + \sum_{k=0}^{i-1} \sum_{l=0}^{j-1} T_{i-k-1,j-l-1} B u_{k,l}, \quad i, j \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned} \quad (2.18)$$

D'une autre part, en substituant dans l'équation (2.9), $A_0 = 0$ et $B_0 = 0$ on obtient le deuxième modèle de Fornasini-Marchesini (SF-FM) qui a la forme :

$$x_{i+1,j+1} = A_1 x_{i+1,j} + A_2 x_{i,j+1} + B_1 u_{i+1,j} + B_2 u_{i,j+1} \quad (2.19)$$

$$y_{ij} = C x_{ij} + D u_{ij} \quad i, j \in \mathbb{Z}_+. \quad (2.20)$$

Les conditions aux limites du modèle positif (2.19) ont la forme :

$$x_{i0} \in \mathbb{R}_+^n, i = 1, 2, \dots \quad \text{et} \quad x_{0j} \in \mathbb{R}_+^n, j = 1, 2, \dots \quad (2.21)$$

La solution du modèle (2.19) satisfaisant les conditions aux limites (2.21) est telle que,

$$\begin{aligned} x_{ij} = & \sum_{k=1}^i T_{i-k,j-1} (A_1 x_{k0} + B_1 u_{k0}) + \sum_{l=1}^i T_{i-l,j-1} (A_2 x_{0l} + B_2 u_{0l}) \\ & + \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^j (T_{i-k-1,j-1} B_1 + T_{i-k,j-l-1} B_2) u_{kl} \quad i, j \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned} \quad (2.22)$$

La matrice de transition T_{ij} du modèle positif (2.19) est définie par :

$$T_{ij} := \begin{cases} I_n (\text{matrice d'identité}) & \text{pour } i = j = 0 \\ A_1 T_{i,j-1} + A_2 T_{i-1,j} & \text{pour } i, j \geq 0 (i+j) > 0. \\ 0 (\text{la matrice nulle}) & \text{pour } i < 0 \text{ ou } j < 0 \end{cases} \quad (2.23)$$

La définition peut être obtenue à partir de l'équation (2.12) par substitution de $A_0 = 0$. La matrice de transition T_{ij} du modèle positif (2.19) est positive, c'est-à-dire, $T_{ij} \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ pour $i, j \in \mathbb{Z}_+$.

D'après le théorème 6, le modèle est positif si et seulement si :

$$A_k \in \mathbb{R}_+^{n \times n}, B_k \in \mathbb{R}_+^{n \times m} \quad k = 1, 2 \quad C \in \mathbb{R}_+^{p \times n}, \quad D \in \mathbb{R}_+^{p \times m}. \quad (2.24)$$

4 Modèles continu-discret positifs

4.1 Modèle général continu-discret positif

Considérons le modèle 2D continu-discret introduit dans [2, 3] décrit par les équations à espace d'états suivantes :

$$\dot{x}(t, k+1) = A_0 x(t, k) + A_1 \dot{x}(t, k) + A_2 x(t, k+1) + B_0 u(t, k) + B_1 \dot{u}(t, k) + B_2 u(t, k+1), \quad (2.25)$$

$$y(t, k) = Cx(t, k) + Du(t, k). \quad (2.26)$$

où, $\dot{x}(t, k) = \frac{\partial x(t, k)}{\partial t}$, $x(t, k) \in \mathbb{R}^n$, $u(t, k) \in \mathbb{R}^m$ et $y(t, k) \in \mathbb{R}^p$ sont respectivement les vecteurs d'états, d'entrées et de sorties, et $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $i = 0, 1, 2$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$.

L'équation (2.25) est une équation différentielle par rapport à la variable continue $t \in \mathbb{R}_+$ et c'est une équation aux différences par rapport à la variable discrète $k \in \mathbb{Z}_+$, telle que la variable

continue t et la variable discrète k sont indépendantes.

Définition 4.1. [2] *Le modèle général continu-discret (2.25) est dit positif si pour toutes les conditions aux limites vérifiant :*

$$x(t, 0) \in \mathbb{R}_+, \quad \dot{x}(t, 0) \in \mathbb{R}_+, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad x(0, k) \in \mathbb{R}_+^n, \quad k \geq 1, \quad k \in \mathbb{Z}_+. \quad (2.27)$$

et toutes les entrées $u(t, k) \in \mathbb{R}_+^m$, $\dot{u}(t, k) \in \mathbb{R}_+^m$, $t \in \mathbb{R}_+$, $k \in \mathbb{Z}_+$, l'état $x(t, k) \in \mathbb{R}_+^n$, $y(t, k) \in \mathbb{R}_+^p$ pour $t \in \mathbb{R}_+$ et $k \in \mathbb{Z}_+$.

Théorème 7. [2] *Le modèle (2.25) est positif si :*

1. A_2 est une matrice de Metzler,
2. $A_0 \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$, $A_1 \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$, $A := A_0 + A_1 A_2 \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$, $B_i \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$, $i = 0, 1, 2$, $C \in \mathbb{R}_+^{p \times n}$, $D \in \mathbb{R}_+^{p \times m}$.

4.2 Modèles de Fornasini Marchesini positif à temps continu-discret

Les modèles positifs de Fornasini - Marchesini correspondant aux systèmes continus-discrets introduit dans [2, 3] sont des cas particuliers du modèle positif général (2.25).

En substituant dans l'équation (2.25) $B_1 = B_2 = 0$ et $B_0 = B$, nous obtenons le premier modèle continu-discret de Fornasini - Marchesini (FF-FM) suivant :

$$\dot{x}(t, k + 1) = A_0 x(t, k) + A_1 \dot{x}(t, k) + A_2 x(t, k + 1) + B u(t, k), \quad (2.28)$$

$$y(t, k) = C x(t, k) + D u(t, k). \quad (2.29)$$

Les conditions aux limites du modèle positif (2.28) ont la forme (2.27).

D'après le théorème 7, le modèle est positif si A_2 est une matrice de Metzler et $A_0 \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$, $A_1 \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$, $A := A_0 + A_1 A_2 \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$, $B_i \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$, $i = 0, 1, 2$, $C \in \mathbb{R}_+^{p \times n}$, $D \in \mathbb{R}_+^{p \times m}$.

D'une autre part, en substituant dans l'équation (2.25) $A_0 = 0$ et $B_0 = 0$, nous obtenons le deuxième modèle continu-discret de Fornasini- Marchesini (SF-FM) de la forme :

$$\dot{x}(t, k + 1) = A_1 \dot{x}(t, k) + A_2 x(t, k + 1) + B_1 \dot{u}(t, k) + B_2 u(t, k + 1), \quad (2.30)$$

$$y(t, k) = C x(t, k) + D u(t, k). \quad (2.31)$$

Les conditions aux limites du modèle positif (2.30) ont la forme (2.27).

D'après le théorème (7), le modèle est positif si A_2 est une matrice de Metzler et $A_0 \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$, $A_1 A_2 \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$, $B_i \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$, $i = 1, 2$, $C \in \mathbb{R}_+^{p \times n}$, $D \in \mathbb{R}_+^{p \times m}$.

Stabilité des systèmes bidimensionnels par l'approche LMIs

1 Inégalités Matricielles Linéaires IMLs (LMIs en anglais)

L'étude des inégalités matricielles affines dans le contexte des systèmes contrôlés est apparue, probablement, avec le début des travaux fondamentaux d'Aleksender Lyapunov, concernant la stabilité des systèmes qui évoluent avec le temps. Une approche d'analyse des caractéristiques lors de l'évolution d'un système en mouvement autour d'un point d'attraction a été mise en oeuvre par Aleksender Lyapunov autour des années 1890. Il étudia la stabilité d'équations différentielles de la forme, dite équation autonome :

$$\dot{x} = Ax \tag{3.1}$$

et démontra que celle-ci est stable si et seulement s'il existe une matrice P définie positive qui vérifie l'inégalité suivante :

$$A^T P + P A < 0 \tag{3.2}$$

La relation (3.2) est connue sous le nom d'inégalité de Lyapunov et c'est une LMI particulière. Lyapunov a aussi démontré que cette inégalité peut être résolue analytiquement. Nous utilisons dans ce qui suit la notation anglo-saxonne des inégalités matricielles linéaires LMI au lieu de la notation francophone IML.

Définition 1.1. Une inégalité matricielle linéaire (IML) est une expression de la forme,

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^{i=n} x_i F_i \succ 0 \quad (3.3)$$

où, $x = (x_i), i = \overline{1, m}$ est un vecteur de nombres réels (variables de décisions) et $(F_i), i = \overline{0, m}$, sont des matrices réelles symétriques i.e $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}, i = \overline{0, m}$.

L'inégalité " \succ " dans (3.3) signifie "définie positive".

Exemple 1.1. L'inégalité

$$\begin{bmatrix} x_1 - 3 & x_1 + x_2 & -1 \\ x_1 + x_2 & x_2 - 4 & 0 \\ -1 & 0 & x_1 \end{bmatrix} \succ 0$$

est une LMI à deux variables. On peut alors l'écrire comme des LMIs :

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + x_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \succ 0.$$

Exemple 1.2. Une LMI simple dans le plan,

$$-y > x \quad \Rightarrow \quad y - x \succ 0.$$

Définition 1.2. Une inégalité matricielle linéaire LMI est une inégalité

$$F(x) \succ 0. \quad (3.4)$$

où F une fonction affine d'un espace vectoriel de dimension fini \mathbf{V} vers un ensemble

$$\mathbf{S} := \{M/M = M^T \in \mathbb{R}^{n \times n}\}_{n \geq 0}$$

de matrices réelles symétriques.

Remarque 1.1. 1. Le terme inégalité matricielle linéaire est utilisé dans la littérature sur les systèmes et contrôlé, mais la terminologie n'est pas consistante avec l'expression $F(x) \succ 0$ que F n'est pas une fonction linéaire. Le terme inégalité matricielle affine peut mieux correspondre à la formulation.

2. Une LMI non stricte est une LMI telle que l'inégalité dans (3.4) est non stricte \succ et (3.4) est remplacée par $F(x) \succcurlyeq 0$. Les inégalités matricielles $F(x) \prec 0$ et $F(x) \prec G(x)$ où, F et G étant des fonctions affines, sont des cas particuliers de (3.3) puisqu'elles peuvent

être reformulées par la forme LMI :

$$-F(x) \succ 0$$

$$G(x) - F(x) \succ 0$$

On écrit toujours une LMI sous la forme $F(x) \prec 0$ avec $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbf{S}^n$ une fonction affine. L'objectif est de trouver $x \in \mathbb{R}^m$ satisfaisant l'inégalité. Ce choix x est appelé problème de faisabilité.

3. L'existence d'une solution à LMI (3.3) définit un problème dit convexe car l'ensemble des solutions

$$\mathbf{S}_{ol} := \{x \in \mathbb{R}^n / F(x) \succ 0\}.$$

est convexe.

Définition 1.3. (Système d'LMIs)

Soit un système d'LMIs $F_1(x) \succ 0, \dots, F_p(x) \succ 0$. Il est possible de regrouper le système ci-dessus en une seule LMI,

$$F(x) := \begin{pmatrix} F_1(x) & 0 & 0 \\ 0 & F_2(x) & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & F_p(x) \end{pmatrix} \succ 0 \quad (3.5)$$

Remarque 1.2. 1. Une LMI à de multiples contraintes peut toujours être convertie en une LMI à une seule contrainte .

2. L'écriture d'une LMI diagonale bloc a comme propriété que ses valeurs propres sont une simple réunion des valeurs propres des matrices qui la forment.

Exemple 1.3. Stabilité d'un système linéaire homogène

Soit le système défini par :

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (3.6)$$

La théorie de Lyapunov nous apprend que s'il existe une fonction $V(x)$, de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} , vérifiant simultanément :

$$V(0) = 0$$

$$V(x) > 0 \quad \text{pour tout } x \neq 0 \quad (3.7)$$

$$V'(x) < 0 \quad \text{pour tout } x(t) \text{ non nul solution de (3.6)}$$

alors le point d'équilibre $x \equiv 0$ est asymptotiquement stable (la réponse à toute condition initiale $x(0)$ tend asymptotiquement vers 0), en effet la troisième condition indique que la fonction $V(x)$ dite la fonction candidate de Lyapunov est strictement décroissante le long de toute trajectoire de (3.6), et les deux premières conditions indiquent que son minimum est atteint pour $x = 0$. Choisissons pour fonction de Lyapunov la fonction :

$$V(x) = x^T P x \quad \text{avec} \quad P \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad P = P^T > 0 \quad (3.8)$$

Cette fonction vérifie les deux premières conditions de façon évidente. En calculant sa dérivée par rapport au temps le long d'une trajectoire quelconque solution de (3.7), on obtient :

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = x^T A^T P x + x^T P A x \quad (3.9)$$

On en déduit que le point d'équilibre $x \equiv 0$ du système (3.7) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ vérifiant simultanément :

$$\begin{cases} P > 0, \\ A^T P + P A < 0. \end{cases} \quad (3.10)$$

Décomposons P sous la forme :

$$P = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \alpha_{ij} P_{ij} \quad (3.11)$$

où P_{ij} est la matrice dont tous les éléments sont nuls sauf les éléments (i, j) et (j, i) qui valent 1.

Les deux inégalités ci-dessus s'écrivent alors :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \alpha_{ij} \begin{bmatrix} P_{ij} & 0 \\ 0 & -A^T P_{ij} - P_{ij} A \end{bmatrix} > 0 \quad (3.12)$$

qui est bien une LMI, avec un vecteur x comprenant tous les coefficients α_{ij} .

On dit que la LMI ci-dessus est une LMI en la variable P .

Nous allons maintenant présenter les principaux outils qui sont utilisés pour mettre sous forme LMI un problème d'automatique.

1.1 Exemple 1

Soit la matrice A donnée par :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

D'après la condition de Lyapounov, il existe une solution symétrique réelle définie positive P à l'inéquation

$$A^T P + P A < 0$$

En utilisant le solveur "SEDUMI", on obtient :

$$P = \begin{bmatrix} 0.6545 & 0 \\ 0 & 0.6545 \end{bmatrix}$$

On dit pour cela que la LMI est faisable.

1.2 Exemple 2

De même pour

$$A = \begin{bmatrix} -3.2405 & 2.3058 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

En utilisant le solveur "SEDUMI" on obtient :

$$P = \begin{bmatrix} 0.3356 & 0.3646 \\ 0.3646 & 1.2735 \end{bmatrix}$$

Dans cette partie, nous avons introduit quelques notions sur les inégalités matricielles linéaires LMIs dans le but de les utiliser dans le prochain travail qui concerne l'analyse de la stabilité asymptotique de systèmes bidimensionnels fractionnaires de type de Lyapounov.

2 Conditions de stabilité par les LMIs

Dans cette partie, nous introduisons une nouvelle classe de systèmes bidimensionnels fractionnaires linéaires, et nous étudions la stabilité asymptotique de ces systèmes par rapport au polynôme caractéristique, puis nous établissons des conditions suffisantes liées à la faisabilité des LMIs .

2.1 Système général bidimensionnel à temps discret

Nous considérons le modèle discret 2D général proposé dans [21] comme une généralisation du modèle d'espace d'états 2D donné dans [4] par,

$$\begin{cases} z_1 z_2 E x &= z_1 A_1 x + z_2 A_2 x + A_0 x + B_0 u + z_1 B_1 u + z_2 B_2 u, \\ y &= C x + D u. \end{cases} \quad (3.13)$$

où, $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état du système. $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$ le vecteur de sortie du système, $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $i = 0, 1, 2$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$, et $z_1 x = x(k+1, l)$, $z_2 x = x(k, l+1)$. Les conditions initiales sont données par les fonctions connues $x(0, k)$, $k \in \mathbb{Z}_+$ et $x(i, 0)$, $i \in \mathbb{Z}$.

Le polynôme caractéristique correspondant du système (3.13) est donné par,

$$B(z_1, z_2) = \det[z_1 z_2 E - z_1 A_1 - z_2 A_2 - A_0] \quad (3.14)$$

Nous introduisons d'abord la notion de stabilité asymptotique des systèmes 2D à temps discret.

Définition 2.1. [11] *Le système bidimensionnel (3.13) est asymptotiquement stable si la réponse impulsionnelle initiale est nulle (i.e. $u(k, i) = 0$ pour $i \geq 0$, $k \geq 0$) avec des conditions initiales qui satisfont $\sup_{i \in \mathbb{Z}_+} x(i, 0) < \infty$, $\sup_{k \in \mathbb{Z}_+} x(0, k) < \infty$ converge vers zéro, i.e. $\lim_{k, i \rightarrow \infty} \|x(k, i)\| = 0$.*

2.2 Système bidimensionnel à temps continu-discret

Soit un système bidimensionnel à temps continu-discret introduit dans [11] décrit par ,

$$\begin{cases} s z E x &= s A_1 x + z A_2 x + A_0 x + B_0 u + s B_1 u + z B_2 u, \\ y &= C x + D u. \end{cases} \quad (3.15)$$

où, $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état du système. $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$ le vecteur de sortie du système, $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $i = 0, 1, 2$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$, et $z x = x(t, k+1)$, $s x = \frac{\partial x(t, k)}{\partial t}$. Les conditions initiales sont données par les fonctions connues $x(0, k)$, $k \in \mathbb{Z}_+$ et $x(t, 0)$, $i \in \mathbb{Z}_+$.

Le polynôme caractéristique associé au système (3.15) est donné par,

$$B(s, z) = \det[s z E - s A_1 - z A_2 - A_0] \quad (3.16)$$

Définition 2.2. [11] *Le modèle 2D continu-discret (3.15) est asymptotiquement stable si la réponse d'entrée initiale est nulle (i.e. $u(t, k) = 0$ pour $t \geq 0$, $k \geq 0$) avec toutes les conditions aux limites satisfaisant $\sup_t x(t, 0) < \infty$, $\sup_{k \in \mathbb{Z}_+} x(0, k) < \infty$ converge vers zéro, i.e. $\lim_{t, k \rightarrow \infty} \|x(t, k)\| = 0$*

2.3 Système bidimensionnel à temps continu

On considère le système bidimensionnel à temps continu introduit dans [19] décrit par les équations suivantes,

$$\begin{cases} s_1 s_2 E x &= s_1 A_1 x + s_2 A_2 x + A_0 x + B_0 u + s_1 B_1 u + 2B_2 u, \\ y &= Cx + Du. \end{cases} \quad (3.17)$$

où, $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état du système. $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$ le vecteur de sortie du système, $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $i = 0, 1, 2$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$, et $s_1 s_2 x = \frac{\partial x(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}$. Les conditions initiales sont données par les fonctions connues $x(0, t_2)$, $t_2 \in \mathbb{R}_+$ et $x(t_1, 0)$, $t_1 \in \mathbb{R}_+$.

Le polynôme caractéristique du système (3.17) est donné par,

$$B(s_1, s_2) = \det[s_1 s_2 E - s_1 A_1 - s_2 A_2 - A_0] \quad (3.18)$$

Définition 2.3. [19] *Le modèle 2D continu-discret (3.17) est asymptotiquement stable si la réponse d'entrée initiale est nulle (i.e. $u(t_1, t_2) = 0$ pour $t_1 \geq 0$, $t_2 \geq 0$) avec toutes les conditions aux limites satisfaisant $\sup_{t_1} x(t_1, 0) < \infty$, $\sup_{t_2} x(0, t_2) < \infty$ converges vers zéro, i.e. $\lim_{t_1, t_2 \rightarrow \infty} \|x(t_1, t_2)\| = 0$*

3 Test de stabilité

Dans cette section, des conditions nécessaires et suffisantes moyennant les polynômes caractéristiques pour la stabilité de tels systèmes sont énoncés.

Théorème 8. [11, 15]

Le système bidimensionnel discret (3.13) est asymptotiquement stable si et seulement si $B(z_1, z_2) \neq 0$ pour chaque paire (z_1, z_2) tel que $|z_1| \leq 1$ et $|z_2| \leq 1$.

Théorème 9. [11, 15]

Le système bidimensionnel continu discret (3.15) est asymptotiquement stable si et seulement si $B(s, z) \neq 0$ pour chaque paire (s, z) tel que $\Re(s) \geq 0$ et $|z| \leq 1$.

Théorème 10. [11, 15]

Le système bidimensionnel continu (3.17) est asymptotiquement stable si et seulement si $B(s_1, s_2) \neq 0$ pour chaque paire (s_1, s_2) tel que $\Re(s_1) \geq 0$ et $\Re(s_2) \geq 0$.

Théorème 11. [11, 15]

Le système bidimensionnel discret (3.13) est asymptotiquement stable si et seulement si

$$B(z_1, 0) \neq 0, \text{ pour } |z_1| \leq 1 \quad (3.19)$$

$$B(z_1, z_2) \neq 0, \text{ pour } |z_1| = 1, |z_2| \leq 1. \quad (3.20)$$

Théorème 12. [11]

Le système bidimensionnel continu discret (3.15) est asymptotiquement stable si et seulement si

$$B(s, 0) \neq 0, \text{ pour } \Re s \geq 0 \quad (3.21)$$

$$B(j\omega, z) \neq 0, \text{ pour } \omega \in \mathbb{R}, \text{ et } |z| \leq 1. \quad (3.22)$$

4 Approche LMIs pour les tests de stabilité

Nous introduisons les résultats issus de [19, 45] utiles pour notre étude,

Lemme 4. [13] Si A est une matrice définie positive dans \mathbb{C} . Alors, $\forall M \in \mathbb{C}^{n \times n}$, la matrice $M^*AM \succ 0$ est définie positive.

Théorème 13. [19, 45]

Une matrice polynômiale hermitienne $P(\omega) = \sum_{i=0}^2 P_i \omega^i$, avec $P_i = P_i^*$ est définie positive si et seulement si il existe une matrice hermitienne X tel que :

$$\begin{bmatrix} P_0 & (P_1 + jX)/2 \\ (P_1 - jX)/2 & P_2 \end{bmatrix} \succ 0, \quad X = X^* \quad (3.23)$$

Théorème 14. [19, 45]

Une matrice polynômiale hermitienne $P(z) = \sum_{i=0}^2 P_i z^i$ avec $P_{-i} = P_i^*$, est définie positive sur le cercle unité si et seulement s'il existe une matrice hermitienne X tel que :

$$\begin{bmatrix} P_0 + X & P_1 \\ P_1^* & -X \end{bmatrix} \succ 0, \quad X = X^* \quad (3.24)$$

Avec ces théorèmes on propose des conditions suffisantes sous forme d'une LMI pour la stabilité asymptotique des systèmes (3.13), (3.15) et (3.17) respectivement.

Théorème 15. [19]

Le modèle (3.13) est asymptotiquement stable s'il existe des matrices hermitiennes X_0, X_1 , et

X_2 telles que, les LMIs suivantes sont faisables.

$$X_1 \succ 0, X_2 \succ 0, \quad (3.25)$$

$$A_0^T X_1 A_0 - A_1^T X_1 A_1 \succ 0, \quad (3.26)$$

$$\begin{bmatrix} A_0^T X_2 A_0 - A_2^T X_2 A_2 - X_0 & A_2^T X_2 E + A_0^T X_2 A_1 \\ E^T X_2 A_2 + A_1^T X_2 A_0 & A_1^T X_2 A_1 - E^T X_2 E + X_0 \end{bmatrix} \succ 0, \quad X = X^* \quad (3.27)$$

Théorème 16. [19]

Le modèle (3.15) est asymptotiquement stable s'il existe des matrices hermitiennes X_0 , X_1 , et X_2 telles que les LMI's suivantes sont faisables.

$$X_1 \succ 0, X_2 \succ 0, \quad (3.28)$$

$$A_1^T X_1 A_0 + A_0^T X_1 A_1 \succ 0, \quad (3.29)$$

$$\begin{bmatrix} A_0^T X_2 A_0 - A_2^T X_2 A_2 & A_2^T X_2 E + A_0^T X_2 A_1 - X_0 \\ E^T X_2 A_2 + A_1^T X_2 A_0 - X_0 & A_1^T X_2 A_1 - E^T X_2 E \end{bmatrix} \succ 0, \quad X = X^* \quad (3.30)$$

Théorème 17. [11]

Le modèle (3.17) est asymptotiquement stable s'il existe des matrices hermitiennes X_0 , X_1 , et X_2 telles que les LMI's suivantes sont faisables.

$$X_1 \succ 0, X_2 \succ 0, \quad (3.31)$$

$$(A_1 - E)^T X_1 (A_2 + A_0) + (A_2 + A_0)^T X_1 (A_1 - E) \succ 0 \quad (3.32)$$

$$\begin{bmatrix} A_2^T X_2 A_0 + A_0^T X_2 A_2 & -A_1^T X_2 A_2 - A_0^T X_2 E + X_0 \\ -A_2^T X_2 A_1 - E^T X_2 A_0 + X_0 & E^T X_2 A_1 + A_1^T X_2 E \end{bmatrix} \succ 0, \quad X = X^* \quad (3.33)$$

5 Stabilité des systèmes bidimensionnels fractionnaires

Dans ce qui suit, nous allons nous intéresser à la stabilité d'une nouvelle classe de systèmes 2D introduite dans [7] et décrite sous la formulation suivante,

$$\frac{d^\alpha}{dt} x(t, i+1) = A_0 x(t, i) + A_1 x(t, i+1) + Bu(t, i). \quad (3.34)$$

$$y(t, i) = Cx(t, i) + Du(t, i). \quad (3.35)$$

où, $0 < \alpha < 1, t \in \mathbb{R}$ et $i \in \mathbb{Z}_+ = 0, 1, 2, \dots$ $x(t, i) \in \mathbb{R}^n, y(t, i) \in \mathbb{R}^p$ et $u(t, i) \in \mathbb{R}^m$ sont respectivement les vecteurs d'états, d'entrées et de sorties ; les matrices $A_0, A_1 \in \mathbb{R}^n, B \in \mathbb{R}^{n \times m}, C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ et $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$.

$x(t, 0) \in \mathbb{R}^n$ pour tous $t \in \mathbb{R}$ et $x(0, i) \in \mathbb{R}^n$ pour tous $i \in \mathbb{Z}_+$ sont les conditions aux limites.

Nous supposons que la variable continue t et la variable discrète i sont indépendantes.

Issue de [11], des extensions et des résultats dérivées et des caractérisations ont été établies.

Nous développons dans ce qui suit des résultats et nouveaux tests de stabilité pour cette classe de modèles.

Nous supposons que le système (3.34) est sans contrôle c-a-d : $u = 0$

Et nous obtenons :

$$\frac{d^\alpha}{dt}x(t, i + 1) = A_0x(t, i) + A_1x(t, i + 1). \quad (3.36)$$

Le polynôme caractéristique du système (3.36) est défini comme suit :

$$B(s^\alpha, z) = \det[s^\alpha z I_n - A_0 - zA_1] \quad (3.37)$$

Définition 5.1. [11] *Le modèle 2D continu-discret (3.34) est asymptotiquement stable si la réponse d'entrée initiale est nulle (i.e. $u(t, k) = 0$ pour $t \geq 0, k \geq 0$) avec toutes les conditions aux limites satisfaisant $\sup_t x(t, 0) < \infty, \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} x(0, k) < \infty$ converges vers zéro, i.e. $\lim_{t, k \rightarrow \infty} \|x(t, k)\| = 0$*

Théorème 18. *Le système 2D continu-discret (3.36) est asymptotiquement stable si et seulement si $B(s^\alpha, z) \neq 0$ pour tous (s^α, z) vérifiant, $\Re(s^\alpha) \geq 0$ et $|z| \leq 1$.*

Notons que cette condition peuvent être soumise sous la formulation suivante en se basant de [19] et de [15, 16, 17],

Théorème 19. *Le système 2D continu-discret (3.36) est asymptotiquement stable si et seulement si*

$$B(s^\alpha, 0) \neq 0, \text{ pour, } \Re(s^\alpha) \geq 0. \quad (3.38)$$

et

$$B((j\omega)^\alpha, z) \neq 0, \text{ pour, } \omega \in \mathbb{R}, |z| \leq 1. \quad (3.39)$$

on réécrit la condition (3.39) sous la forme suivante,

$$\begin{aligned} B((j\omega)^\alpha, z) \neq 0 &\Rightarrow \det[(j\omega)^\alpha z I_n - A_0 - z A_1], \\ &\Rightarrow \det[z((j\omega)^\alpha I_n - A_1) - A_0] \neq 0, \end{aligned} \quad (3.40)$$

et si on pose, $(j\omega)^\alpha I_n - A_1 = \bar{A}$.

on obtient,

$$\det[z\bar{A} - A_0] \neq 0. \quad (3.41)$$

Nous dérivons maintenant une condition LMI pour le modèle du type (3.36).

Théorème 20. *Le modèle (3.36) est asymptotiquement stable s'il existe des matrices hermiennes X_0 et X_2 telles que LMI suivante soit réalisable,*

$$X_0 \succ 0, X_2 \succ 0. \quad (3.42)$$

$$\begin{bmatrix} A_0^* X_2 A_0 - A_1^* X_2 A_1 & X_2 A_1 + A_1^* X_2 + X_0 \\ -X_0 & -X_2 \end{bmatrix} \succ 0 \quad (3.43)$$

De plus,

$$\frac{\pi}{2\alpha} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2\alpha}, \quad (0 < \alpha < 1). \quad (3.44)$$

avec, $\theta = \text{Arg}(s)$.

Démonstration. La condition (3.39) se réduit à :

$$\det[z\bar{A} - A_0] \neq 0, \text{ pour } \omega \in \mathbb{R}, |z| \leq 1. \quad (3.45)$$

ce qui mène à LMI suivante,

$$A_0^* X_2 A_0 - \bar{A}^* X_2 \bar{A} \succ 0. \quad (3.46)$$

On remplace maintenant \bar{A} par sa valeur dans (3.46), il s'ensuit alors ;

$$A_0^* X_2 A_0 - [((-j\omega)^\alpha I_n - A_1^*) X_2 ((j\omega)^\alpha I_n - A_1)] \succ 0. \quad (3.47)$$

Donc LMI (3.47) devient ;

$$A_0^* X_2 A_0 - [(-j\omega)^\alpha X_2 (j\omega)^\alpha - (-j\omega)^\alpha X_2 A_1 - A_1^* X_2 (j\omega)^\alpha + A_1^* X_2 A_1] \succ 0. \quad (3.48)$$

En posant $\omega^\alpha = \phi$ on obtient,

$$P(\phi) = -\phi^2 X_2 + \phi[(-j)^\alpha X_2 A_1 + (j)^\alpha A_1^* X_2] + A_0^* X_2 A_0 - A_1^* X_2 A_1 \geq 0. \quad (3.49)$$

où ;

$$\begin{cases} P_0 = A_0^* X_2 A_0 - A_1^* X_2 A_1. \\ P_1 = (-j)^\alpha X_2 A_1 + (j)^\alpha A_1^* X_2 \\ P_2 = -X_2. \end{cases} \quad (3.50)$$

Nous remarquons que, $P_k^* = P_k$. Alors, en appliquant le théorème 13, il s'ensuit ;

$$\begin{bmatrix} P_0 & (P_1 + j^\alpha X)/2 \\ (P_1 - j^\alpha X)/2 & P_2 \end{bmatrix} \succ 0, \text{ pour } X^* = X. \quad (3.51)$$

pour une certaine matrice hermitienne X . Définissons maintenant une nouvelle matrice hermitienne X_0 via la relation $X = 2X_0 + (-1)^\alpha X_2 A_1 + A_1^* X_2$, on obtient la condition équivalente ;

$$\begin{bmatrix} A_0^* X_2 A_0 - A_1^* X_2 A_1 & j^\alpha [(-1)^\alpha X_2 A_1 + A_1^* X_2 + X_0] \\ j^\alpha (-X_0) & -X_2 \end{bmatrix} \succ 0. \quad (3.52)$$

En appliquant le lemme 4, et on prend :

$$M = \text{diag}([I_n, j^\alpha I_n]) = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & j^\alpha I_n \end{bmatrix}. \quad (3.53)$$

pour obtenir LMI (3.43).

D'une autre part, et à partir de la condition (3.38) nous avons :

$$B(s^\alpha, 0) \neq 0 \Rightarrow \det[-A_0] \neq 0, \text{ pour, } \Re(s^\alpha) \geq 0. \quad (3.54)$$

nous avons $s \in \mathbb{C}$ on pose donc ;

$$s^\alpha = R^\alpha \cos(\alpha\theta) + jR^\alpha \sin(\alpha\theta) \quad (3.55)$$

avec, $R = |s|$ et, $\theta = \text{Arg}(s)$.

$$\Re(s^\alpha) = R^\alpha \cos(\alpha\theta) \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} \Re(s^\alpha) = R^\alpha \cos(\alpha\theta) \leq 0 &\Rightarrow \cos(\alpha\theta) \leq 0, \\ &\Rightarrow \frac{\pi}{2} \leq (\alpha\theta) \leq \frac{3\pi}{2}, \\ &\Rightarrow \frac{\pi}{2\alpha} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2\alpha}, (0 < \alpha < 1). \end{aligned} \quad (3.57)$$

□

Exemple 5.1. *Considérons le système linéaire (3.36) , où les matrices A_0, A_2 sont définies comme suit :*

$$A_0 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

et la matrice A_2 est donnée par :

$$A_2 = \begin{bmatrix} -3.2405 & 2.3058 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

En utilisant le solveur "SEDUMI", LMI (3.43) est réalisable et les matrices X_i sont :

$$X_0 = \begin{bmatrix} 0.2214 & 0.1909 \\ 0.1909 & 0.2518 \end{bmatrix}$$

et,

$$X_2 = \begin{bmatrix} -0.1835 & 0.2111 \\ 0.2111 & 0.8989 \end{bmatrix}$$

Alors, le système (3.36) est asymptotiquement stable.

Dans ce chapitre nous avons dérivé des conditions suffisantes pour la stabilité asymptotique d'une certaine classe de systèmes 2D fractionnaires linéaires à temps continu-discret, et nous avons développé un nouveau test en terme des Inégalités Matricielles Linéaires (LMIs). Ces conditions sont suffisantes, et les LMIs trouvées sont de dimensions réduites.

Chapitre 4

Discrétisation et Influence

Dans ce chapitre on veut étudier comment et quand le pas de discrétisation peut influencer sur la stabilité asymptotique des systèmes une fois discrétisés. Nous donnerons des conditions pour laquelle la stabilité est préservée, pour cela nous nous basons sur [7, 14] et sur le théorème 21 et le lemme 5 pour la suite du travail.

Théorème 21. [12] Soit $A \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ et s_i pour $i = \overline{1, n}$ les valeurs propres de la matrice A . Soit f une application définie sur \mathbb{R} . Les valeurs $f(s_i)$ sont bien définies où $\sigma_A = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ est le spectre de la matrice A , soit alors les $f(s_i)$ sont finis et sont les valeurs propres de la matrice $f(A)$, $i = \overline{1, n}$.

Lemme 5. [12] Soit l'application suivante :

$$f : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n} \tag{4.1}$$

$$H \rightarrow f(H) = H + I_n$$

et soit les matrices $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ vérifiant $A = B + I_n$. Notons que s_i sont les valeurs propres de la matrice B et λ_i sont les valeurs propres de la matrice A . Donc, $f(s_i)$ sont les valeurs propres de la matrice $f(B)$. D'où, $f(s_i) = s_i + 1$ sont les valeurs propres de la matrice $B + I_n = A$, $\lambda_i = s_i + 1$.

1 Positivité et stabilité asymptotique d'un système 2D fractionnaire linéaire à temps continu-discret

Considérons le système linéaire 2D fractionnaire à temps continu-discret introduit dans [7] et défini par les équations d'états suivantes,

$$\frac{d^\alpha x(t, i+1)}{dt^\alpha} = A_0 x(t, i) + A_1 x(t, i+1) + Bu(t, i) \quad (4.2)$$

$$y(t, i) = Cx(t, i) + Du(t, i) \quad (4.3)$$

pour $0 < \alpha < 1$, $t \in \mathbb{R}$ et $i \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$, $x(t, i) \in \mathbb{R}^n$, $u(t, i) \in \mathbb{R}^m$, $y(t, i) \in \mathbb{R}^p$ sont respectivement les vecteurs d'états, d'entrées et de sorties, et les matrices $A_0, A_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ et $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$. Les états $x(t, 0) \in \mathbb{R}^n$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $x(0, i) \in \mathbb{R}^n$ pour tout $i \in \mathbb{Z}_+$ sont les conditions initiales. Notons que la dérivation fractionnaire de l'équation (4.2) est définie au sens de Caputo, i.e.,

$$\frac{d^\alpha x(t, i+1)}{dt^\alpha} = {}^C D^\alpha x(t, i+1) = {}^C D_t^\alpha x(t, i+1) \quad (4.4)$$

Nous supposons que la variable continue t et la variable discrète i sont indépendantes.

1.1 Solution du système

Comme le montre [26], la solution du système (4.2)-(4.3) avec les conditions aux limites $x(t, 0) \in \mathbb{R}^n$ pour $t \in \mathbb{R}$, et $x(0, i) \in \mathbb{R}^n$ pour $i \in \mathbb{Z}_+$ sont données par l'équation suivante,

$$\begin{aligned} x(t, i) = & T_{0,i} x(t, 0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T_{k,i}}{\Gamma(k\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{k\alpha-1} x(\tau, 0) d\tau \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T_{k,i} A_1}{\Gamma[(k+1)\alpha]} \int_0^t (t-\tau)^{(k+1)\alpha-1} x(\tau, 0) d\tau \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{T_{k,i-l} t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} x(0, l) \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{T_{k,i-l-1} B}{\Gamma[(k+1)\alpha]} \int_0^t (t-\tau)^{(k+1)\alpha-1} u(\tau, l) d\tau \end{aligned} \quad (4.5)$$

1.2 Positivité d'un système à temps continu-discret linéaire fractionnaire 2D.

Sur la base de [7, 14], nous rappelons quelques définitions et résultats qui garantissent la positivité.

Définition 1.1. [14] *Le système temporel continu-discret 2D fractionnaire (4.2)-(4.3) est dit positif si $x(t, i) \in \mathbb{R}_+^n$, pour toutes les conditions aux limites $x(t, 0) \in \mathbb{R}_+^n$, $t \in \mathbb{R}_+$ et $x(0, i) \in \mathbb{R}_+^n$, $i \in \mathbb{Z}_+$ et toutes les entrées $u(t, i) \in \mathbb{R}_+^n$, $t \in \mathbb{R}_+$, $i \in \mathbb{Z}_+$.*

Les conditions de positivité pour le système à temps discret continu 2D (4.2)-(4.3) ont été introduites par [7] comme indiqué dans le théorème suivant.

Théorème 22. [7]

Le système (4.2)-(4.3) est positif si et seulement si :

1. $A_0 \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}_+^{p \times n}$, $D \in \mathbb{R}_+^{p \times m}$.
2. A_1 une matrice de Metzler.

1.3 Stabilité asymptotique d'un système temporel continu-discret linéaire fractionnaire 2D

Les conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilité de tels systèmes ont été dérivées dans [15, 16, 17] en termes de polynômes caractéristiques. Nous appuyons ici sur les idées de base car elles seront utiles par la suite.

Définition 1.2. [14] *Le système à temps fractionnaire continu-discret positif (4.2) est appelé asymptotiquement stable si pour toutes les conditions aux limites bornées $x(t, 0) \in \mathbb{R}_+^n$, $t \in \mathbb{R}_+$, $x(0, i) \in \mathbb{R}_+^n$, $i \in \mathbb{Z}_+$ et zéro entrée $u(t, i) = 0$*

$$\lim_{t, i \rightarrow \infty} x(t, i) = 0. \quad (4.6)$$

Le polynôme caractéristique du système (4.2) est défini comme suit :

$$B(s^\alpha, z) = \det[s^\alpha z I_n - A_0 - z A_1]. \quad (4.7)$$

Issue de [19], on adapte les résultats au cas fractionnaires,

Théorème 23. *Le système à temps continu-discret 2D (4.2), (4.3) est asymptotiquement stable si et seulement si $B(s^\alpha, z) \neq 0$ pour chaque paire (s^α, z) tel que $\Re(s^\alpha) \geq 0$, $|z| \leq 1$,*

Théorème 24. *Le système temporel continu-discret 2D (4.2), (4.3) est asymptotiquement stable si et seulement si :*

$$B(s^\alpha, 1) \neq 0. \quad \text{for, } \Re(s^\alpha) \geq 0, \quad (4.8)$$

$$B((j\omega)^\alpha, z) \neq 0. \quad \text{for, } \omega \in \mathbb{R}, |z| \leq 1. \quad (4.9)$$

En effet, la condition (4.8) se réduit à :

$$B(s^\alpha, 1) = \det[s^\alpha I_n - M]. \quad (4.10)$$

avec, $M = A_0 + A_1$ et les s^α sont les valeurs propres de la matrice M .

Théorème 25. *Le système temporel continu-discret 2D (4.2), (4.3) est asymptotiquement stable si et seulement si : $\Re(s^\alpha) \leq 0$, telle que $-\frac{\pi}{2\alpha} \leq \arg(s) \leq \frac{\pi}{2\alpha}$.*

2 Positivité et stabilité asymptotique d'un système 2D fractionnaire linéaire à temps discret

Définition 2.1. [7]

Soit $h > 0$ le pas de discrétisation, α l'ordre de dérivation fractionnaire vérifiant $n - 1 < \alpha < n$ avec $n \in \mathbb{Z}_+^*$. L'approximation généralisée de l'opérateur de différentiation fractionnaire est définie pour tout pas h et tout $t = kh$ avec $k \in \mathbb{Z}_+^*$ par la formule :

$$\frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} = D^\alpha x(kh) \approx \frac{1}{h^\alpha} \sum_{p=0}^{k+1} C_\alpha(p) x((k+1-p)h) \quad (4.11)$$

où,

$$C_\alpha(p) = (-1)^p \binom{\alpha}{p} \quad (4.12)$$

avec,

$$\binom{\alpha}{p} = \begin{cases} 1 & , \text{ si } p = 0, \\ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-p+1)}{p!} & , \text{ si } p > 0. \end{cases} \quad (4.13)$$

Il s'ensuit de l'équation (4.11) que

$$D^\alpha x(kh) = h^{-\alpha} [x((k+1)h) - \alpha x(kh) + \sum_{p=2}^{k+1} C_\alpha(p) x((k+1-p)h)] \quad (4.14)$$

et

$$x((k+1)h) = h^\alpha D^\alpha x(kh) + \alpha x(kh) - \sum_{p=2}^{k+1} C_\alpha(p) x((k+1-p)h) \quad (4.15)$$

2.1 Discrétisation du système 2D linéaire fractionnaire hybride

Les relations (4.11) et (4.15) peuvent être étendu aux fonctions 2D, et nous les appliquons au système (4.2)-(4.3). Ainsi,

$$\frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} = D^\alpha x(kh) = h^{-\alpha} \sum_{p=0}^{k+1} C_\alpha(p)x((k+1-p)h, i+1) \quad (4.16)$$

et

$$x((k+1)h, i+1) = h^\alpha D^\alpha x(kh, i+1) + \alpha x(kh, i+1) - \sum_{p=2}^{k+1} C_\alpha(p)x((k+1-p)h, i+1) \quad (4.17)$$

Dorénavant et par convention, le pas d'échantillonnage h est omis des 2D suites discrétisées, i.e., $x(kh, i) = x(k, i)$, $y(kh, i) = y(k, i)$, $u(kh, i) = u(k, i)$ pour tout $k, i \in \mathbb{Z}_+$.

Théorème 26. [7]

Considérons $h > 0$. Le système 2D Linéaire fractionnaire hybride (4.2)-(4.3) où $0 < \alpha < 1$ est discrétisé en un système 2D linéaire à temps discret d'ordre fractionnaire α défini par les équations suivantes :

$$x_{k+1, i+1} = \widehat{A}_0 x_{k, i} + \widehat{A}_1 x_{k, i} - \sum_{p=2}^{k+1} C_\alpha(p)x_{k+1-p, i+1} + \widehat{B}u(k, i). \quad (4.18)$$

$$y(k, i) = Cx(k, i) + Du(k, i). \quad (4.19)$$

où, $h > 0$, $0 < \alpha < 1$, $\widehat{A}_0 = h^\alpha A_0$, $\widehat{A}_1 = h^\alpha A_1 + \alpha I_n$ et $\widehat{B} = h^\alpha B$; avec les conditions aux limites $x(k, 0) \in \mathbb{R}^n$ pour tout $k \in \mathbb{Z}_+$ et $x(0, i) \in \mathbb{R}^n$ pour tout $i \in \mathbb{Z}_+$.

2.2 Solvabilité du système bidimensionnel fractionnaire discret

Comme le montre [7], la solution du système (4.18), (4.19) avec des conditions aux limites $x(k, 0) \in \mathbb{R}^n$, $x(0, i) \in \mathbb{R}^n$, et $k, i \in \mathbb{Z}_+$, est donnée par,

$$\begin{aligned} x(k, i) = & \sum_{e=0}^k T_{k-e-1, i-f-1} \widehat{B}u(e, f) + [T_{k-1, i-1} \widehat{A}_0 - \sum_{p=0}^{k-1} C_\alpha(k-p)T_{k-p, i}]x(0, 0) \\ & + \sum_{f=1}^i [T_{k-1, i-f-1} \widehat{A}_1 - \sum_{p=2}^{k-1} C_\alpha(k-p)T_{p, f}]x(0, f) \\ & + \sum_{e=1}^k [T_{k-e-1, i-f-1} \widehat{A}_0 - \sum_{p=2}^{k-l} C_\alpha(k-e-p)T_{p, i}]x(e, 0) \end{aligned} \quad (4.20)$$

2.3 Positivité d'un système 2D fractionnaire linéaire à temps discret

Dans cette section, nous étudions la positivité d'un système à temps discret linéaire fractionnaire bidimensionnel introduit dans [7].

Définition 2.2. [7] *Les systèmes à temps discret linéaires fractionnaires 2D (4.18), (4.19) sont appelés positifs si tous les états et les sorties sont positifs, c'est-à-dire $x(k, i) \in \mathbb{R}_+^n$, $y(k, i) \in \mathbb{R}_+^p$, $k, i \in \mathbb{Z}_+$ pour toutes conditions aux limites $x(k, 0) \in \mathbb{R}_+^n$, $k \in \mathbb{Z}_+$ et $x(0, i) \in \mathbb{R}_+^n$, $i \in \mathbb{Z}_+$ et toutes les entrées $u(k, i) \in \mathbb{R}_+^m$, $k, i \in \mathbb{Z}_+$.*

Théorème 27. [7]

Les systèmes à temps discret linéaires fractionnaires 2D d'ordre α (4.18), (4.19) sont appelés positifs si et seulement si les matrices $\widehat{A}_0, \widehat{A}_1 \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ et $\widehat{B} \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$.

Théorème 28. [7]

Considérons $h > 0$ le pas de discrétisation. Nous supposons que les conditions du théorème 22 sont satisfaites. Cependant, nous avons l'un des cas suivants :

1. *Si la matrice A_1 est une matrice de Metzler positive, alors le système (4.18), (4.19) reste positif pour tout le pas d'échantillonnage $h > 0$.*
2. *Si la matrice A_1 est de Metzler non positif, alors le système (4.18), (4.19) reste positif si et seulement si*

$$0 < h \leq \left(\frac{\alpha}{\max_i |a_{ii}^{(1)}|} \right)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4.21)$$

où, $a_{ii}^{(1)}$, pour tout $i = \overline{1, n}$ sont les entrées diagonales strictement négatives de la matrice A_1

Donc nous avons, $h \in I_1 =]0, \left(\frac{\alpha}{\max_i |a_{ii}^{(1)}|} \right)^{\frac{1}{\alpha}}]$.

2.4 Stabilité asymptotique du système à temps discret 2D

Définition 2.3. [10]

Les systèmes à temps discrets fractionnaires positifs 2D (4.18), (4.19) sont asymptotiquement stables si pour toutes les conditions aux limites bornées $x(k, 0) \in \mathbb{R}_+^n$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $x(0, i) \in \mathbb{R}_+^n$, $i \in \mathbb{Z}_+$ et zéro entrée $u(k, i) = 0$.

$$\lim_{k, i \rightarrow \infty} x(k, i) = 0. \quad (4.22)$$

Issue de [20], il s'ensuit facilement en appliquant le résultat à notre modèle, le théorème suivant,

Théorème 29. *Les systèmes linéaires en temps discret fractionnaires positifs 2D (4.18) (4.19) sont asymptotiquement stables si et seulement si le système 1D positif*

$$x_{i+1} = \tilde{A}x_i \quad \text{où,} \quad \tilde{A} = h^\alpha M + I_n \quad i \in \mathbb{Z}_+, \quad \text{avec} \quad M = A_0 + A_1 \quad (4.23)$$

est asymptotiquement stable.

Démonstration. À partir de (4.18) et pour $u = 0$, nous avons,

$$x_{k+1,i+1} = \hat{A}_0 x_{k,i} + \hat{A}_1 x_{k,i} - \sum_{p=2}^{k+1} C_\alpha(p) x_{k+1-p,i+1}. \quad (4.24)$$

on a

$$\sum_{p=2}^{\infty} C_\alpha(p) + C_\alpha(0) + C_\alpha(1) = - \sum_{p=0}^{\infty} C_\alpha(p) = 0. \quad (4.25)$$

et

$$C_\alpha(0) = 1, C_\alpha(1) = -\alpha. \quad (4.26)$$

d'où

$$\sum_{p=2}^{\infty} C_\alpha(p) + 1 - \alpha = \sum_{p=0}^{\infty} C_\alpha(p). \quad (4.27)$$

donc,

$$\sum_{p=2}^{\infty} C_\alpha(p) = \alpha - 1. \quad (4.28)$$

par suite,

$$x_{i+1} = [\bar{A} - \sum_{p=2}^{\infty} C_\alpha(p) I_n] x_i. \quad (4.29)$$

ou encore,

$$x_{i+1} = [\bar{A} - (\alpha - 1) I_n] x_i. \quad (4.30)$$

où, $\bar{A} = \hat{A}_0 + \hat{A}_1$. D'où le système (4.30) devient :

$$x_{i+1} = [\hat{A}_0 + \hat{A}_1 - (\alpha - 1) I_n] x_i \quad (4.31)$$

$$= [h^\alpha A_0 + h^\alpha A_1 + \alpha I_n - \alpha I_n + I_n] x_i \quad (4.32)$$

$$= [h^\alpha (A_0 + A_1) + I_n] x_i. \quad (4.33)$$

$$= [h^\alpha M + I_n] x_i. \quad (4.34)$$

Enfin, le système (4.23) est asymptotiquement stable si et seulement si $|\tilde{z}| < 1$, où \tilde{z} sont les valeurs propres de la matrice \tilde{A} . □

2.5 Positivité du système 1D fractionnaire linéaire à temps discret

Théorème 30. *Le système (4.23) est appelé positif si et seulement si la matrice \tilde{A} est une matrice positive.*

Démonstration. On a,

$$\tilde{A} = h^\alpha M + I_n.$$

et

$$M = A_0 + A_1$$

Cependant, $A_0 \in \mathbb{R}_+^n$ et A_1 est une matrice de Metzler, où cela montre que M est une matrice de Metzler.

On a

$$\tilde{A} > 0 \quad \text{ce qui implique} \quad h^\alpha M + I_n > 0. \quad (4.35)$$

Nous avons donc l'un des cas suivants

- ★ Si M est une matrice de Metzler positive alors, $\tilde{A} > 0$.
- ★ Si M est une matrice de Metzler non positive, on a :

1. Si $i \neq j : \tilde{a}_{ij} = h^\alpha m_{ij} \geq 0$ car $m_{ij} \geq 0$ et $h > 0$.

2. Si $i = j : \tilde{a}_{ii} = h^\alpha m_{ii} + 1$.

Si $m_{ii} \geq 0$ ensuite $\tilde{a}_{ii} \geq 0$

Si $m_{ii} < 0$ pour certains $i = 1, \dots, n$

on a

$$\tilde{a}_{ii} \geq 0 \quad (4.36)$$

ceci implique

$$h^\alpha m_{ii} \geq -1 \quad (4.37)$$

Or,

$$h^\alpha \max_i(m_{ii}) \geq h^\alpha m_{ii} \geq -1 \quad (4.38)$$

donc

$$h^\alpha \leq \frac{-1}{\max_i(m_{ii})} \quad (4.39)$$

par conséquent

$$h \leq \left(\frac{-1}{\max_i m_{ii}}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (4.40)$$

où m_{ii} sont les entrées diagonales strictement négatives de la matrice de Metzler M .

Dans ce qui suit, nous noterons $I_2 =]0, (\frac{-1}{\max_i m_{ii}})^{\frac{1}{\alpha}}]$. \square

3 Influence du pas de discrétisation sur la stabilité asymptotique

Lemme 6. *Considérons le système (4.23)*

$$x_{i+1} = \tilde{A}x_i$$

où,

$$\tilde{A} = h^\alpha M + I_n$$

En appliquant le théorème 21 on obtient ;

$$\tilde{z} = h^\alpha s^\alpha + 1. \quad (4.41)$$

où \tilde{z} et s^α sont respectivement les valeurs propres des matrices \tilde{A} et M .

Théorème 31. *Le système (4.18), (4.19) préserve sa stabilité asymptotique si et seulement si le pas de discrétisation satisfait la condition suivante,*

$$0 < h < \left(-2 \max_s \frac{\Re(s^\alpha)}{|s^\alpha|}\right)^{\frac{1}{\alpha}}. \quad (4.42)$$

$$i.e; h \in I_3 =]0, (-2 \max_s \frac{\Re(s^\alpha)}{|s^\alpha|})^{\frac{1}{\alpha}}].$$

Démonstration. De (4.41) il s'ensuit que le système en temps discret (4.23) est asymptotiquement stable si et seulement si

$$|\tilde{z}| \leq 1. \quad (4.43)$$

ce qui donne,

$$|h^\alpha s^\alpha + 1| \leq 1 \quad (4.44)$$

et cela mène à,

$$|h^\alpha R^\alpha \cos(\alpha\theta) + 1 + ih^\alpha R^\alpha \sin(\alpha\theta)| \leq 1, \quad (4.45)$$

donc,

$$h^\alpha R^\alpha \leq -2 \cos(\alpha\theta), \quad (4.46)$$

par conséquent,

$$h^\alpha \leq \frac{-2 \cos(\alpha\theta)}{R^\alpha}, \quad (4.47)$$

alors,

$$0 \leq h \leq \min_s \left(\frac{-2\Re(s^\alpha)}{|s^\alpha|} \right)^{\frac{1}{\alpha}}. \quad (4.48)$$

Il est bien connu que $\min(-A) = -\max(A)$, il en découle alors (4.42). \square

Théorème 32. *Le système (4.18), (4.19) préserve sa positivité et sa stabilité asymptotique si et seulement si le pas de discrétisation $h > 0$ satisfait le théorème 28. Donc, nous avons deux cas :*

1. *Si la matrice A_1 est une matrice de Metzler positif, alors $h \in I_3$.*
2. *Si la matrice A_1 est de Metzler non positif, donc $h \in I_1 \cap I_2 \cap I_3$.*

4 Exemple numérique

Dans cette section, nous présentons une simulation numérique pour illustrer les résultats théoriques obtenus dans les sections précédentes.

Considérons le système (4.2), (4.3) avec les matrices A_0, A_1 suivantes

$$A_0 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}. \quad (4.49)$$

Les matrices A_0 et A_1 satisfont aux conditions du théorème 21.

La matrice de Metzler M est définie par la relation

$$M = A_0 + A_1 \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}. \quad (4.50)$$

Ensuite nous avons

$$I_1 =]0, 0.05]. \quad (4.51)$$

4. EXEMPLE NUMÉRIQUE

et

$$\tilde{A} = h^\alpha M + I_n \begin{bmatrix} 1 - 2h^\alpha & 3h^\alpha \\ h^\alpha & 1 - 2h^\alpha \end{bmatrix}. \quad (4.52)$$

D'après la relation (4.40) on obtient

$$I_2 = [0, 0.25]. \quad (4.53)$$

On a,

$$B(s^\alpha, z) = \det[s^{(\alpha)}zI_n - A_0 - zA_1] \quad (4.54)$$

D'après la relation (4.10) le polynôme caractéristique de la matrice M est donné par

$$B(s^\alpha, 1) = \det \begin{bmatrix} s^\alpha + 2 & -3 \\ -1 & s^\alpha + 2 \end{bmatrix}. \quad (4.55)$$

$$B(s^\alpha, 1) = (s^\alpha)^2 + 4s^\alpha + 1 \quad (4.56)$$

Le système (4.2), (4.3) est asymptotiquement stable car les valeurs propres s_1^α, s_2^α de la matrice M satisfont $\Re(s_i^\alpha) < 0$ (pour $i = 1, 2$) où

$$s_1^\alpha = -3.73205, s_2^\alpha = -0.26898.$$

D'après la relation (4.42) on obtient

$$I_3 =]0, 4]. \quad (4.57)$$

Le polynôme caractéristique de la matrice \tilde{A} est donné par :

$$\det[\tilde{z}I_2 - \tilde{A}] = \det \begin{bmatrix} \tilde{z} - (1 - 2h)^\alpha & -3h^\alpha \\ -h^\alpha & \tilde{z} - (1 - 2h)^\alpha \end{bmatrix}. \quad (4.58)$$

Les valeurs propres de la matrice \tilde{A} sont

$$\tilde{z}_1 = 1 - 3.73205h^\alpha, \quad \tilde{z}_2 = 1 - 0.26898h^\alpha$$

— Pour $h = 0.02, \alpha = 0.5$:

$$|\tilde{z}_1| = 0.66897 < 1, \quad (4.59)$$

$$|\tilde{z}_2| = 0.87971 < 1. \quad (4.60)$$

le système (4.2), (4.3) est asymptotiquement stable.

— Pour $h = 0.3, \alpha = 0.5$:

$$|\tilde{z}_1| = 1.0440 > 1, \quad (4.61)$$

$$|\tilde{z}_2| = 0.8527 < 1 \quad (4.62)$$

le système (4.2), (4.3) est instable.

Dans ce chapitre, une classe de systèmes bidimensionnels fractionnaires linéaires hybrides positifs a été considérée. Les conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilité asymptotique de cette classe de systèmes ont été établies ; une analyse de l'influence du pas de discrétisation sur la stabilité asymptotique du système bidimensionnel fractionnaire linéaire à temps discret obtenu par la discrétisation d'un système bidimensionnel fractionnaire hybride est considérée. Les conditions nécessaires et suffisantes sont ensuite dérivées et des exemples numériques sont également donnés pour illustrer l'applicabilité de l'approche proposée.

Conclusion

Une récente classe de modèles linéaires à deux dynamiques a été considérée dans cette thèse. La classe de modèles fractionnaires a de même fait partie de ce projet de thèse. Une synthèse et une analyse sur ces deux classes a été considérée. L'analyse de la positivité et de la stabilité de ce type de modèles a été introduite. L'objectif est d'établir des conditions sur la stabilité pour le modèle discrétisé obtenu par la discrétisation d'un système linéaire fractionnaire à temps continu-discret. Une analyse sur l'influence de la valeur du pas de discrétisation sur la stabilité asymptotique des systèmes linéaires fractionnaires positifs a été dérivée, nous avons cependant, établis une extension des résultats donné dans [7, 20]. Dans le premier chapitre, nous avons fait appel à quelques propriétés fondamentales sur la théorie des matrices qui permet de caractériser un système positif, et nous avons exposé quelques notions sur le calcul fractionnaire ; finalement, nous avons introduit la classe des systèmes bidimensionnels linéaires.

Dans le troisième chapitre, nous avons introduit une nouvelle classe de systèmes bidimensionnels fractionnaires linéaires apparaissant dans [7], et nous avons fait une analyse de la stabilité asymptotique de cette classe au sens de Lyapunov en se basant sur [11, 19] cependant des conditions suffisantes sur la stabilité asymptotique par l'approche LMI ont été dérivées .

Dans le chapitre 4, nous nous sommes intéressés aux conditions de la stabilité asymptotique qui est une extension des résultats introduite dans [20].

Perspectives

Comme perspectives, nous pouvons étudier la contrôlabilité et l'observabilité de cette classe de systèmes, et extraire les résultats concernant l'influence du pas de discrétisation sur la contrôlabilité et l'observabilité, toujours dans la classe à plusieurs directions.

Annexe

Transformée de Laplace à une dimension

Définition 4.1. [43] La transformée de Laplace d'une fonction f (éventuellement généralisée, telle que la " fonction de Dirac ") d'une variable réelle t , à support positif, est la fonction F de la variable complexe p , définie par :

$$F(p) = L\{f\}(p) = \int_{0^+}^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt. \quad (4.63)$$

Plus précisément, cette formule est valide lorsque :

1. $\Re(p) > \alpha$, où α est l'abscisse de convergence (définie plus bas), $-\infty \leq \alpha \leq +\infty$.
2. et f est une fonction localement intégrable à support positif, c'est-à-dire nulle en dehors de l'intervalle $[0, +\infty[$.

Transformée de Laplace à deux dimensions

Les propriétés fondamentales de l'intégrale de Laplace à deux dimensions présentent de nombreux points communs avec celles de l'intégrale à une dimension. D'autre part, l'intégrale de Laplace à deux dimensions, autant que le calcul opérationnel à deux variables, possèdent de nombreux traits spécifiques que l'on ne retrouve pas dans le cas unidimensionnel. Dans cette section, nous allons considérer une intégrale de Laplace à deux dimensions en énonçant ses propriétés fondamentales.

Définition 4.2. [43] On définit la transformée de Laplace à deux dimensions comme suit,

$$f(p, q) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-px - qy} f(x, y) dx dy. \quad (4.64)$$

où, $p = \sigma + i\mu$, $q = \tau + iv$ sont des paramètres complexes.

Définition 4.3. [47]

L'intégrale 4.64 est absolument convergente si existe la limite,

$$\lim_{a \rightarrow \infty, b \rightarrow \infty} \int_0^a \int_0^b |e^{-px-xy} f(x, y)| dx dy = \int_0^a \int_0^b e^{-px-xy} |f(x, y)| dx dy \quad (4.65)$$

où, $\Re p = \sigma$, $\Re q = \tau$

Propriétés de l'intégrale de Laplace à deux dimensions

1. La définition de l'intégrale (4.64) entraîne aussitôt les propriétés suivantes :

$$L_{p,q} f(\alpha x, \beta y) = \frac{1}{\alpha \beta} F\left(\frac{p}{\alpha}, \frac{q}{\beta}\right), \quad (4.66)$$

$$L_{p,q} e^{-\alpha x - \beta y} f(x, y) = F(p + \alpha, q + \beta), \quad (4.67)$$

où α et β sont des nombres complexes quelconques. Dans les deux cas p et q sont choisis tels que l'intégrale de Laplace converge.

2. Le produit de convolution de deux fonctions se définit comme suit :

$$f(x, y) = f_1(x, y) * f_2(x, y) = \int_0^x \int_0^y f_1(\xi, \eta) f_2(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta \quad (4.68)$$

3. Si l'intégrale (4.64) est absolument convergente, la propriété fondamentale du produit de convolution a lieu, i.e.,

$$L_{p,q} f_1(x, y) L_{p,q} f_2(x, y) = L_{p,q} f(x, y) \quad (4.69)$$

Inversion de l'intégrale de Laplace à deux dimensions

Théorème 33. [23, 43, 47] Supposons qu'une fonction $f(x, y)$ possède des dérivées partielles premières $f'_x(x, y)$ et $f'_y(x, y)$ et une dérivée partielle seconde mixte $f_{x,y}^{(2)}(x, y)$ et qu'existent des constantes positives Q , k_1 et k_2 telles que pour tous les $x \in]0, +\infty[$ et $y \in]0, +\infty[$ l'on ait,

$$|f(x, y)| < Q e^{k_1 x + k_2 y}, \quad |f_{x,y}^{(2)}(x, y)| < Q e^{k_1 x + k_2 y} \quad (4.70)$$

Si,

$$F(p, q) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-px-xy} f(x, y) dx dy \quad (4.71)$$

alors,

$$f(x, y) = \lim_{\omega_1 \rightarrow \infty, \omega_2 \rightarrow \infty} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\omega_1}^{\sigma + i\omega_1} \int_{\tau - i\omega_2}^{\tau + i\omega_2} e^{px+qy} F(x, y) dq dp. \quad (4.72)$$

où,

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \int_{\tau - i\infty}^{\tau + i\infty} e^{px+qy} F(x, y) dq dp. \quad (4.73)$$

où, $\sigma > k_1$, $\tau > k_2$

Transformée en Z à une dimension

Définition 4.4. [43] la transformation en Z est une application qui transforme une suite $(s(n))$ (définie sur les entiers) en une fonction S d'une variable complexe nommée z , telle que :

$$S(z) = Z\{s(n)\} = \sum_{-\infty}^{+\infty} s(n)z^{-n}, \quad z \in \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \sum_{-\infty}^{+\infty} s(n)z^{-n} \text{ converge} \right\} \quad (4.74)$$

Si $n < 0$, $s(n) = 0$, on parle de signal causal. Inversement, si $n > 0$, $s(n) = 0$, on parle de signal anti-causal.

Transformation en Z inverse

[43] La transformée en Z inverse est donnée par :

$$x(n) = Z^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathbf{C}} X(z)z^{n-1} dz \quad (4.75)$$

où \mathbf{C} est un chemin fermé parcouru dans le sens inverse des aiguilles d'une montre et appartenant entièrement au domaine de convergence.

Transformée en Z à deux dimensions

Définition 4.5. [43]

On considère les deux variables Z_x et Z_y . La valeur de la transformée en Z d'un échantillon d'amplitude $f(m, n)$ situé en un point de coordonnées m et n est alors,

$$f(Z_x, Z_y) = f(m, n)Z_x^{-m}Z_y^{-n} \quad (4.76)$$

Dans le cas d'une fonction échantillonnée définie sur tout le plan, la transformée s'obtient par sommation

$$f(Z_x, Z_y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(m, n) Z_x^{-m} Z_y^{-n}. \quad (4.77)$$

elle est définie dans un domaine où la somme converge, en général une couronne contenant le tore "produit".

Remarque 4.1. Si $Z_x = Z_y = 1$ de rayon un sur ce domaine, elle prend la forme d'une transformée de Fourier

$$F(e^{iu}, e^{iv}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(m, n) Z_x^{-m} Z_y^{-n}. \quad (4.78)$$

Remarque 4.2. Si la fonction $f(x, y)$ peut s'écrire sous la forme d'un produit

$$f(x, y) = h(x)g(y). \quad (4.79)$$

la transformée $F(Z_x, Z_y)$ est séparable

$$F(Z_x, Z_y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(x) Z_x^{-m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(y) Z_y^{-n} = H(Z_x)G(Z_y). \quad (4.80)$$

où $H(Z_x)$ et $G(Z_y)$ sont les transformées de $h(x)$ et $g(y)$. C'est le produit de deux transformées en z mono-dimensionnelles. Notons qu'il peut être pratique d'utiliser des fonctions séparables pour lesquelles le calcul des propriétés est facilité.

Propriétés de la transformée en Z bidimensionnelle

Transformée du produit de convolution

[43] On remarque que l'extension au cas bidimensionnel de la propriété de convolution reste valide, soit la convolution bidimensionnelle,

$$f(x, y) = f_1(x, y) * f_2(x, y) = \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} f_1(s, t) f_2(x - s, y - t) \quad (4.81)$$

et sa transformée en Z ,

$$F(Z_x, Z_y) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{t=-\infty}^{\infty} f_1(s, t) f_2(x - s, y - t) Z_x^{-x} Z_y^{-y}. \quad (4.82)$$

En introduisant artificiellement,

$$Z_x^{-x} Z_y^{-y} = Z_x^{-x+s} Z_y^{-y+t} Z_x^{-s} Z_y^{-t} \quad (4.83)$$

l'équation (4.82) devient,

$$F(Z_x, Z_y) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{t=-\infty}^{\infty} f_1(s, t) f_2(x - s, y - t) Z_x^{-x+s} Z_y^{-y+t} Z_x^{-s} Z_y^{-t} \quad (4.84)$$

le changement de variables,

$$x' = x' s y' = y - t \quad (4.85)$$

appliqué à l'équation (4.82), cela donne,

$$F(Z_x, Z_y) = \sum_{x'=-\infty}^{\infty} \sum_{y'=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{t=-\infty}^{\infty} f_1(s, t) f_2(x', y') Z_x^{-x'} Z_y^{-y'} Z_x^{-s} Z_y^{-t} \quad (4.86)$$

équation qui se décompose en un produit,

$$F(Z_x, Z_y) = \left[\sum_{x'=-\infty}^{\infty} \sum_{y'=-\infty}^{\infty} f_1(x', y') Z_x^{-x'} Z_y^{-y'} \right] \left[\sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{t=-\infty}^{\infty} f_2(s, t) Z_x^{-s} Z_y^{-t} \right] \quad (4.87)$$

$$F(Z_x, Z_y) = F_1(Z_x, Z_y) F_2(Z_x, Z_y) \quad (4.88)$$

où $F_1(Z_x, Z_y)$ et $F_2(Z_x, Z_y)$ sont les transformées en Z de $f_1(Z_x, Z_y)$ et $f_2(Z_x, Z_y)$.

Transformée d'un produit

Soit la donnée d'une fonction qui se décompose en produit de deux fonctions

$$f(x, y) = g(x, y) h(x, y) \quad (4.89)$$

a pour la transformée

$$F(Z_x, Z_y) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} g(x, y) h(x, y) Z_x^{-x} Z_y^{-y} \quad (4.90)$$

2-D Laplace- Z transformation

Définitions et propriétés de la 2-D $s - Z$ transformation

Pour les signaux et systèmes 2D continus-discrets, on établit les définitions suivantes.

Définition 4.6. [23, 47]

On définit la transformée de Laplace 1D d'un signal 2D continu-discret $x(t, n)$ de la première

variable comme suit,

$$X(s, n) = \int_0^{\infty} x(t, n) e^{-st} dt \quad (4.91)$$

et on note,

$$X(s, n) = L_t[x(t, n)] \quad (4.92)$$

Définition 4.7. [47] Pour un signal hybride 2-D $X(s, n)$, sa transformée de Laplace 1-D partielle inverse est définie comme suit,

$$x(t, n) = \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} X(s, n) e^{st} ds \quad (4.93)$$

où $\sigma > 0$ est un nombre réel qui est plus grand que la partie réelle de n'importe quelle singularité de $X(s, n)$. On note la transformée de Laplace 1-D partielle inverse de $X(s, n)$ de la première variable

$$x(t, n) = L_t^{-1}[X(s, n)] \quad (4.94)$$

Définition 4.8. [23, 47] La transformée en Z pour un signal 2-D continu-discret $x(t, n)$ de la second variable est définie comme suit,

$$X(t, Z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(t, n) Z^{-n} \quad (4.95)$$

On note la transformation en Z 1D de $x(t, n)$

$$X(t, Z) = Z_n[x(t, n)] \quad (4.96)$$

Définition 4.9. [36, 23, 47] La transformée en Z 1D inverse est définie comme suit,

$$x(t, n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_r X(t, z) z^{n-1} dz \quad (4.97)$$

On note la transformée en Z 1D inverse de $X(t, z)$,

$$x(t, n) = Z_n^{-1}[X(t, z)] \quad (4.98)$$

Définition 4.10. [36, 23, 47] La 2D Laplace- Z transformée d'un signal 2D continu-discret $x(t, n)$ est définie par,

$$X(s, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} x(n, t) e^{-st} dt z^{-n} \quad (4.99)$$

On note la 2D Laplace-Z transformée d'un signal 2-D continu-discret $x(t, n)$

$$X(s, z) = L_t Z_n[x(t, n)] \quad (4.100)$$

Définition 4.11. [36, 23, 47] La 2D Laplace-Z transformée inverse d'un signal 2-D continu-discret $x(tn)$ est,

$$x(t, n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_r \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} x(n, t) e^{-st} z^{n-1} ds dz \quad (4.101)$$

et on la note,

$$x(t, n) = (L_t Z_n)^{-1}[X(s, z)] \quad (4.102)$$

Proposition 4.1. [36, 23] Les propriétés suivantes apparaissent dans Xiao, Y

1. Soient $X_1(s, z)$ et $X_2(s, z)$ les 2D Laplace-Z transformées des signaux bidimensionnels $x_1(t, n)$ et $x_2(t, n)$ respectivement, alors,

$$L_t Z_n[ax_1(t, n) + bx_2(t, n)] = aX_1(s, z) + bX_2(s, z) \quad (4.103)$$

2. Soit $X(s, z)$ la 2D Laplace-Z transformée du signal bidimensionnel $x(t, n)$, et donc,

$$L_t Z_n[x(t, n)] = Z_n L_t[x(t, n)] \quad (4.104)$$

3. Soit $X(s, z)$ la 2D Laplace-Z transformée du signal bidimensionnel $x(t, n)$, alors,

$$(L_t Z_n)^{-1}[x(t, n)] = (Z_n L_t)^{-1}[x(t, n)] \quad (4.105)$$

4. Soit $X(s, z)$ la 2D Laplace-Z transformée du signal bidimensionnel $x(t, n)$, ainsi,

$$L_t Z_n\left[\frac{\partial x(t, n)}{\partial t}\right] = sX(s, z) - X(0, z) \quad (4.106)$$

5. Soit $X(s, z)$ la 2-D Laplace-Z transformée du signal bidimensionnel $x(t, n)$, et $x(t, 0) \neq 0$, alors,

$$L_t Z_n x(t, n+1) = zX(s, z)X(s, 0) \quad (4.107)$$

6. Soit $X(s, z)$ la 2D Laplace-Z transformée du signal bidimensionnel $x(t, n)$, alors,

$$L_t Z_n\left[\frac{\partial x(t, n+1)}{\partial t}\right] = szX(s, z) - sX(s, 0) - zX(0, z) + x(0, 0) \quad (4.108)$$

Résumé

Analyse de la stabilité d'une certaine classe de systèmes singuliers fractionnaires

Résumé : Dans ce travail, nous considérons une nouvelle classe de systèmes bidimensionnels fractionnaires linéaires positifs hybrides. Des conditions suffisantes pour la stabilité asymptotique de cette classe ont été établies, nous nous basons pour cela sur l'approche LMI. Nous avons fait une analyse de l'influence du pas de discrétisation sur la stabilité asymptotique d'un système bidimensionnel fractionnaire linéaire discrétisé obtenu par la discrétisation d'un système linéaire bidimensionnel continu-discret.

Mots-Clés. Systèmes bidimensionnelles, Systèmes hybrides, Systèmes fractionnaires, Stabilité asymptotique, Discrétisation, Positivité.

Analysis of the stability of a certain class of fractional singular systems

Abstract : In this work, we consider a new class of hybrid positive linear fractional two-dimensional systems. A sufficient conditions for the asymptotic stability of this class have been introduced, basing on LMI approach. We have made an analysis of the influence of the discretization step on the asymptotic stability of a two-dimensional linear fractional discretized system obtained by the discretization of a continuous-discrete two-dimensional linear system.

Key Words. Bi dimensional systems, fractional systems, hybrid systems, discretization, Asymptotic stability, Positivity.

الملخص:

الهدف من هذا العمل هو دراسة بعض الأنظمة وكيفية البحث عن الشروط الضامنة لاستقرار النظم، نهتم في عملنا هذا بصنف جديد من الأنظمة المعممة ذات مشتقات كسرية.

لقد قمنا بتحليل تأثير الخطوة التقديرية على الاستقرار المقارب لنظام منفصل ثنائي الأبعاد خطي يتم الحصول عليه من خلال التقدير لنظام خطي ثنائي الأبعاد مستمر.

الكلمات المفتاحية: أنظمة ثنائية الأبعاد أنظمة هجينة، أنظمة كسور، استقرار مقارب تقديري.

Bibliographie

- [1] R.P. ROESSER (1975), "A discrete state-space model for linear image processing." *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol. AC-20, 1975, 1-10.
- [2] E. FORNASINI, G. MARCHESINI (1976), "State-Space Realization Theory of Two-Dimensional Filters." *IEEE Trans. Aut. Contr*, Vol AC-21, pp. 484-492
- [3] E. FORNASINI, G. MAECHESINI (1978), "Doubly Indexed Dynamical Systems : State-space Models and Structural Properties." *Mathematical Systems Theory*, Vol 12, pp. 59-72,
- [4] J. KUREK (1985), "The General State-Space Model for a Two-Dimensional." *IEEE Trans. Autom. Contr*, AC Vol 30, pages 600-602.
- [5] T. KACZOREK (2002), "Positive 1D and 2D Systems." *Springer-Verlag London Ltd..*
- [6] T. KACZOREK (1985), "Two Dimensional Linear Systems." *Springer Verlag, Berlin.*
- [7] M.A. GHEZZAR, D. BOUAGADA, M. CHADLI (2017), "Influence of Discretization Step on Positivity of a Certain Class of Two-Dimensional Continuous-Discrete Fractional Linear Systems." *IMA Journal of Mathematical Control and Information*
- [8] L. FARINA, S. RINALDI (2000), "Positive Linear Systems :Theory and Applications." *J.Wiley, New york.*
- [9] M.E. VALCHER (1997), "On The Internal Stability and Asymptotic Behavior of 2D Positive Systems." *IEEE Transactions On Circuits and Systems*, Vol 44(7), pp. 602-613
- [10] T. KACZOREK (2008), "Fractional 2D linear systems." *J. Automation, Mobile Robotics Intelligent Systems*, 2 (2), 5-9.
- [11] D. BOUAGADA, P. VAN DOOREN (2010), "LMI Conditions for The Stability of 2D State-Space Models." *K. Proc. 19th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems.*

- [12] T. KACZOREK (2016), "Analysis and Comparison of The Stability of Discrete-Time and Continuous-Time Linear Systems." *Archives of Control Sciences, Vol 26(LXII), No. 4, pages 551-563.*
- [13] F.R. GANTMACHER (1998), "The Teory of Matrices." *Chelsea Pub. Comp. London.*
- [14] T. KACZOREK (2011), "Positive Fractional 2D Continuous-Discrete Linear Systems." *Bulletin of The Polish Academy of Sciences technical Sciences, Vol Vol. 59, No. 4.*
- [15] EI. JURY (1973), "Inners and Stability of Dynamic Systems." *John Wiley sons : New York. London. Sydney Toronto.*
- [16] DD. SILJAK (1975), "Stability criteria for two-variable polynomials." *IEEE Transactions on Circuits and Systems, CAS-22 :185-189.*
- [17] DL. DAVIS (1976), "A Correct proof of Huang's theorem on stability." *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing :425-426.*
- [18] D. BOUAGADA, P. VAN DOOREN (2010), "LMI Conditions for the Stability of 2D State-Space Models." *Proc. 19th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems, MTNS.*
- [19] D. BOUAGADA, P. DOOREN (2013), "LMI Conditions for the Stability of 2D State-Space Models." *Numerical Linear Algebra with Applications, Vol 20 (2), Numéro :198-207.*
- [20] T. KACZOREK(2010), "Stability and Stabilisation of Positive Fractional Linear Systems by State-Feedbacks." *Bulletin of the Polish Academy of Sciences technical Sciences, Vol.58,No 4.*
- [21] T. KACZOREK (1988), "The Singular General Model of 2D systems and its solutions." *IEEE Trans. Aut. Contr., Vol 33 (11), pp. 1060-1061.*
- [22] T. KACZOREK (1993), "Linear Control Systems." , *Vol. 2, Research Studies Press and J. Wiley, New York,*
- [23] T. KACZOREK (1996), " Singular two-dimensional continuous-discrete linear systems dynamics of continuous-discrete and impulsive systems." *An International Journal for Theory Systems Science and Applications,193-204.*
- [24] T. KACZOREK (1998), "Vectors and Matrices in Automation and Electronics." *WNT, Warszawa.*
- [25] T. KACZOREK (1999), "Theory of Control Systems." *PWN, Warszawa.*
- [26] T. KACZOREK (2008), "Asymptotic Stability of Positive 2D Linear Systems." *Proc. 13th Scientific Conf. on Computer Applications in Electrical Engineering, Poznan, Poland.*
- [27] M. TWARDY (2007), "An LMI Approach to Checking Stability of 2D Positive Systems." *Bulletin of the Polish Academy of Sciences : Technical Sciences, Vol 54(4), pp. 385-395.*

- [28] Y. ZOU, Y. HU, W. WANG (2008), "Stability for Two-Dimensional Singular Discrete Systems Described by General Model." *Multidimensional Systems and Signal Processing, Vol 19, pp. 219-229.*
- [29] I. PODLUBNY (1999), "Fractional Differential Equations :An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications." *Academic Press, New york.*
- [30] T. KACZOREK (2011), "Selected Problems of Fractional Systems Theory." *Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.*
- [31] T. KACZOREK (2013), "Comparison of Approximation Methods of Positive Stable Continuous-Time Linear Systems by Positive Stable Discrete-Time Systems." *Archives of Electrical Engineering, Vol 62(2), pp.345-355.*
- [32] T. KACZOREK (2011), "Positive Fractional 2D Hybrid Linear Systems." *Bulletin of the Polish Academy of Sciences-Technical Sciences, Vol 59(4), pp.575-579.*
- [33] D. BOUAGADA (2004), "Influence of The Value of Discretization Step on Positivity of 2D Linear Continuous-Discrete Systems." *Far East Journal of Mathematical Sciences, Vol 15(1), pp.107-112.*
- [34] M. CHADLI, P. BORNE (2012), "Mutimodèle en Automatique-Outils Avancés d'Analyse et de Synthèse." *Publisher : Hermès-Lavoisier, p 192, ISBNB : 978-2-7462-3825-1.*
- [35] T. KACZOREK (2008), "Positive Fractional 2D Hybrid Linear Systems." *Bul. Pol. Acad. Tech. Scien., Vol. 56, No. 3.*
- [36] T. KACZOREK (2002), "New Stability Tests of Positive 1D and 2D Linear Systems." *Proceeding 25th European Conference on Modeling and Similation.*
- [37] Y. GENIN, Y. HACHEZ, Y. NESTEROV, R. STEFAN, P. VAN DOOREN (2002), "Positivity and linear matrix inequalities," *European Journal of Control, Vol 8(3), pp. 275-298.*
- [38] Y. GENIN, Y. HACHEZ, Y. NESTEROV, R. P. VAN DOOREN (2003), "Optimization problems over positive pseudopolynomial matrices," *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, Vol 25(1), pp. 57-79.*
- [39] C.A. MONJE, Y. CHEN, B.M. VINAGRE, D. XUE, V. FELIU (2010), "Fractional order Systems and Controls, Fundamentals and Applications," *Springer London, 2010.*
- [40] B. BOUKILI, A. HMAMED, F. TADEO (2014), "Robust H_∞ filtering for 2-D discrete Fornasini-Marchesini systems," *Int. J. Sci. Tech. Autom. Control Comput. Eng. 8(1), 1998-2011 (2014).*
- [41] J.R. CUI, G.D. HU, Q. ZHU (2011), "Stability and robust stability of 2-D discrete stochastic systems," *Discret. Dyn. Nature Soc. Article ID 545361, 11 pp. (2011).*

- [42] L. LI, W. WANG, X. LI (2013), "New approach to H_∞ filtering of two-dimensional T-S fuzzy systems," *Int. J. Robust. Nonlinear Control* 23(17), 1990-2012.
- [43] M.A GHEZZAR (2018), "Analyse et synthèse de certains classes de systèmes bidimensionnels fractionnaires et/ou singuliers," *Thèse de doctorat en science en mathématique, option : contrôle, université abd el hamid ibn basis mostaganem*, [HTTP://E-BIBLIO.UNIV-MOSTA.DZ/HANDLE/123456789/2679?SHOW=FULL](http://e-biblio.univ-mosta.dz/handle/123456789/2679?show=full)
- [44] D. BOUAGADA (2007), "Systèmes Différentiels Singuliers Positifs et LMIs," *Thèse de doctorat d'état Centre d'Ingénierie des Systèmes, d'Automatique et de Mécanique Appliquée-UCL. Louvain-La-Ne- Belgique*. [HTTPS://PERSO.UCLOUVAIN.BE/PAUL.VANDOOREN/THESISBOUAGADA.PDF](https://perso.uclouvain.be/paul.vandooren/thesisbouagada.pdf)
- [45] GENIN Y, HACHEZ Y, NESTEROV Y, STEFAN R, VAN DOOREN P, XU S (2002), "Positivity and linear matrix inequalities," *European Journal of Control* 2002; 8(3) :275-298.
- [46] M.A. GHEZZAR, D. BOUAGDA, K. BENYETTOU, M. CHADLI, P. VAN DOOREN (2021), "On the stability of 2D general Roesser Lyapunov systems," *63(1)*, pp. 85-87. doi 10.24.193/mathcluj.2021.1.08
- [47] A. O. ELOSMANI, D. BOUAGADA, P. V DOOREN AND K. BENYETTOU (2021), "LMI stability test for multidimensional linear state space models," *Journal of Computational and Applied Mathematics* vol.390(2021) doi.org/10.1016/j.com.2020.113363