REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS DE MOSTAGANEM

FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET D'INFORMATIQUE

Département de mathématiques et d'informatique

Thèse de Doctorat LMD

Spécialité: mathématiques

Option: Analyse fonctionnelle

Présentée par

Mlle. YSSAAD Somia

THEME

Propriétés des solutions de certains types d'équations différentielles linéaires à coefficients fonctions complexes

Soutenue le **devant le Jury**

Mr BELAIDI Benharrat	**Président**	**Pr**	**UMAB Mostaganem**
Mme SAHRAOUI Rahma	**Examinatrice**	**Pr**	**ESA de Mostaganem**
Mme HAMANI Karima	**Examinatrice**	**Pr**	**UMAB Mostaganem**
Mr HAMOUDA Saâda	**Encadreur**	**Pr**	**UMAB Mostaganem**

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer mes vifs remerciements pour mon directeur de thèse Monsieur HAMOUDA Saâda pour avoir accepté d'encadrer cette thèse, ainsi que pour son soutien, ses remarques pertinentes et son encouragement.

Je tiens à remercier les membres de mon jury pour avoir accepté de participer à la soutenance de cette thèse en commençant par Monsieur BELAIDI Benharrat pour avoir accepté de présider le jury.

Je remercie vivement Madame SAHRAOUI Rahma, Madame HAMANI Karima, pour avoir consacré du temps à la lecture de ce document en tant que examinateurs de ce travail.

Je remercie toute ma famille pour son soutien tout le long de cette thèse notamment dans les moments les plus difficiles.

Je dedie ce modeste travail à celle qui m'a donné la vie; le symbole de tendresse; qui s'est sacrifiée pour mon bonheur et ma réussite à ma mère Allah Yarhamha.

Table des Matières

Introduction

L'apparition de la théorie de R. Nevanlinna, en 1925, qui représente la théorie moderne et complète de la distribution des valeurs d'une fonction méromorphe dans le plan complexe et qui est considéré comme de rares événements des mathématiques dans le vingtième siècle, a donné des outils trés efficaces pour l'étude de la croissance et l'oscillation des solutions des équations différentielles linéaires et non linéaires dans le plan complexe. Pour une introduction de cette théorie voir [23, 30]. Des recherches actives, dans ce sens, ont été déclenchés dans les années 1950's et 1960's par H. Wittich et ses étudiants. En 1968, Whitich [35] a montré que: *toutes les solutions de l'équation différentielle*

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + ... + A_0(z) f = 0 \tag{1}$$

sont d'ordre fini, si et seulement si, les coefficients $A_0, ..., A_{k-1}$ *sont des polynômes.* Frei [17] a prouvé que: *si* p *est le plus grand indice tel que* A_p *est une fonction entière transcendante, alors il existe au plus* p *solutions linéairement independantes d'ordre fini.* A partir de là, il y a deux questions principales qui ont intéressés plusieurs chercheurs dans ce domaine: 1) Quelles sont les conditions sur les coefficients qui assurent que toutes les solutions soient d'ordre infini? 2) Dans quelles conditions existe-il des solutions d'ordre fini dans le cas où il y a des coefficients fonctions entières transcendantes? Il y a beaucoups d'articles publiés répondant à ces deux questions, voir à titre d'exemple [5, 6, 7, 8, 9, 18, 22]. D'autre part, pour préciser bien le taux de la croissance des solutions d'ordre infini, on a introduit les notions de l'hyper-odre, l'ordre itératif et [p,q]-ordre. En 1982, La théorie de l'oscillation complexe des solutions des équations différentielles linéaires dans le plan complexe $\mathbb{C}$ a été introduite la première fois par Bank et Laine [3]; ils ont étudié l'oscillation des équations différentielles de la forme $f''+Af=0$ où A est une fonction entière; puis en 1983, ils ont étudié les zéros des solutions méromorphes des équations différentielles linéaires de second ordre.

Dans cette dernière decennie, plusieurs chercheurs essayent d'étendre les résultats obtenus dans le plan complexe au disque unité $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, c'est à dire de passer des coefficients entières ou méromorphes dans le plan complexe aux coefficients analytiques ou méromorphes seulement dans le disque unité, voir à titre d'exemple [12, 16, 20, 21, 24, 25, 26].

Dans ce travail, on s'intéresse à étudier la croissance, la distribution des zéros et les point fixes des solutions ainsi que leurs dérivées de certaines classes d'équations différentielles linéaires dans le disque unité, en utilisant les notions de l'exposant de convegence et [p,q]-ordre.

Cette thèse est composée de trois chapitres. Le premier chapitre est consacré à quelques éléments de la théorie de R. Nevanlinna nécessaires pour notre travail. Dans le deuxième chapitre, on va étudier l'exposant de convergence de $f^{(i)} - \varphi$ où $f^{(0)} = f$ est une solution non triviale de certaines classes d'équations différentielles linéaires dont les coefficients sont des fonctions méromorphes dans le disque de l'unité et φ est une fonction de petite croissance devant f, en utilisant une approche sur le comportement des coefficients au voisinage d'un point sur le disque unité. Le troisième chapitre consiste à étudier l'exposant de convergence de $f^{(i)}-\varphi$ concernant d'autres types d'équations différentielles linéaires dans le disque unité en utilisant la notion [p,q]-ordre. Comme des cas particuliers, si $\varphi(z) = z$ cette étude nous donne la distribution des points fixes de $f^{(i)}$, et si $\varphi(z) = a \in \mathbb{C} - \{0\}$, on en déduit la distribution des zéros de l'équation $f^{(i)} - a = 0$.

Chapitre 1

Quelques éléments de la théorie de R. Nevanlinna

On va citer seulement les éléments nécessaires pour notre travail dans cette thèse et pour plus de détail voir [23, 30].

1.1 Fonction caractéristique de R. Nevanlinna

1.1.1 Formule de Jenson

Théorème 1.1.1 *[23, 30] Soit f une fonction méromorphe telles que $f(0) \neq 0, \infty$ et soit $a_1, a_2, ...$(resp. $b_1, b_2, ...$) ses zéros (resp. ses pôles), chacun étant compté avec son ordre de multiplicité. Alors*

$$\ln |f(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| f(re^{i\varphi}) \right| d\varphi + \sum_{|b_j|<r} \ln \frac{r}{|b_j|} - \sum_{|a_i|<r} \ln \frac{r}{|a_i|}.$$

Preuve:

On démontre le théorème dans le cas où f n'admet ni zéros ni pôles sur le cercle $|z| = r$. Considérons la fonction

$$g(z) = f(z) \prod_{|a_j|<r} \frac{r^2 - \overline{a_j} z}{r(z - a_j)} / \prod_{|b_j|<r} \frac{r^2 - \overline{b_j} z}{r(z - b_j)}.$$

On a $g \neq 0, \infty$ dans le disque $|z| < r$ et $\ln |g(z)|$ est une fonction harmonique. D'aprés la formule de la moyenne, on a

$$\ln |g(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| g\left(re^{i\varphi}\right) \right| d\varphi. \tag{1.1}$$

D'autre part,

$$|g(0)| = |f(0)| \prod_{|a_j|<r} \frac{r}{|a_j|} / \prod_{|b_j|<r} \frac{r}{|b_j|}$$

d'où

$$\ln |g(0)| = \ln |f(0)| + \sum_{|a_j|<r} \ln \frac{r}{|a_j|} - \sum_{|b_j|<r} \ln \frac{r}{|b_j|} \tag{1.2}$$

pour $z = re^{i\varphi}$, on a

$$\left| \frac{r^2 - \overline{a_j} z}{r(z - a_j)} \right| = \left| \frac{r^2 - \overline{a_j} re^{i\varphi}}{r(re^{i\varphi} - a_j)} \right| = \left| \frac{e^{i\varphi}(re^{-i\varphi} - \overline{a_j})}{re^{i\varphi} - a_j} \right| = 1$$

et

$$\left| \frac{r^2 - \overline{b_j} z}{r(z - b_j)} \right| = \left| \frac{r^2 - \overline{b_j} re^{i\varphi}}{r(re^{i\varphi} - b_j)} \right| = \left| \frac{e^{i\varphi}\left(re^{-i\varphi} - \overline{b_j}\right)}{re^{i\varphi} - b_j} \right| = 1.$$

D'où $|g(re^{i\varphi})| = |f(re^{i\varphi})|$. De (1.1) et (1.2), on obtient la formule de Jensen.

Définition 1.1.1 *Pour tout réel $x > 0$, on définit*

$$\ln^+ x = \max(\ln x, 0) = \begin{cases} \ln x, \ si \ x > 1, \\ 0, \ si \ 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Lemme 1.1.1 *On a les inégalitées suivantes*

(a)

$$\ln x \leq \ln^+ x.$$

(b)

$$\ln^+ x \leq \ln^+ y \ (si\ 0 < x < y).$$

(c)

$$\ln x = \ln^+ x - \ln^+ \frac{1}{x}.$$

(d)

$$|\ln x| = \ln^+ x + \ln^+ \frac{1}{x}.$$

(e)

$$\ln^+ \left(\prod_{i=1}^{n} x_i \right) \leq \sum_{i=1}^{n} \ln^+ x_i.$$

(f)

$$\ln^+ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) \leq \ln n + \sum_{i=1}^{n} \ln^+ x_i.$$

Preuve:

Montrons (c)-(f).

(c) On a

$$\begin{aligned} \ln^+ x - \ln^+ \frac{1}{x} &= \max\{\ln x, 0\} - \max\left\{\ln \frac{1}{x}, 0\right\} \\ &= \max\{\ln x, 0\} - \max\{-\ln x, 0\} \\ &= \max\{\ln x, 0\} + \min\{\ln x, 0\} \\ &= \ln x. \end{aligned}$$

(d) On a

$$\begin{aligned} \ln^+ x + \ln^+ \frac{1}{x} &= \max\{\ln x, 0\} + \max\left\{\ln \frac{1}{x}, 0\right\} \\ &= \max\{\ln x, 0\} + \max\{-\ln x, 0\} \\ &= \max\{\ln x, 0\} - \min\{\ln x, 0\} \\ &= |\ln x|. \end{aligned}$$

(e) Si $\prod_{i=1}^{n} x_i \leq 1$, alors l'inégalité est triviale.

Supposons que $\prod_{i=1}^{n} x_i > 1$. Alors

$$\begin{aligned} \ln^+ \left(\prod_{i=1}^{n} x_i \right) &= \ln \left(\prod_{i=1}^{n} x_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \ln x_i \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \ln^+ x_i; \text{ d'aprés (a).} \end{aligned}$$

(f) On a d'aprés (b) et (e)

$$\begin{aligned} \ln^+ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) &\leq \ln^+ \left(n \max_{1 \leq i \leq n} x_i \right) \\ &\leq \ln n + \ln^+ \left(\max_{1 \leq i \leq n} x_i \right) \\ &\leq \ln n + \sum_{i=1}^{n} \ln^+ x_i. \end{aligned}$$

1.1.2 Fonction a–points

Définition 1.1.2 *[23, 30] Soit f une fonction méromorphe. Pour tout nombre complexe a, on désigne par $n(t, a, f)$ le nombre de racines de l'équation $f(z) = a$ situées dans le disque $|z| \leq t$ et par $n(t, \infty, f)$ le nombre de pôles de la fonction f dans le disque $|z| \leq t$. Chaque racine ou pôle étant compté un nombre de fois égal á son ordre de multiplicité. Posons*

$$N(r, a, f) = N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = \int_0^r \frac{n(t, a, f) - n(0, a, f)}{t} dt + n(0, a, f) \ln r, \;\; a \neq \infty$$

et

$$N(r,\infty,f)=N(r,f)=\int\limits_{0}^{r}\frac{n(t,\infty,f)-n(0,\infty,f)}{t}dt+n(0,\infty,f)\ln r.$$

$N(r,a,f)$ *est appelée fonction a–points de la fonction* f *dans le disque* $|z|\leq r$.

1.1.3 Fonction de proximité

Définition 1.1.3 *[23, 30] Soit* f *une fonction méromorphe non constante et* a *un nombre complexe. Alors, on définit la fonction de proximité de la fonction* f *par*

$$m(r,a,f)=m\left(r,\frac{1}{f-a}\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}\ln^{+}\frac{1}{|f(re^{i\varphi}-a)|}d\varphi,\ \ a\neq\infty$$

et

$$m(r,\infty,f)=m(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}\ln^{+}\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right|d\varphi.$$

1.1.4 Fonction caractéristique de R. Nevanlinna

Définition 1.1.4 *[23, 30] On définit la fonction caractéristique de R. Nevanlinna de la fonction* f *par*

$$T(r,\infty,f)=T(r,f)=m(r,f)+N(r,f).$$

Lemme 1.1.2 *[23, 30] Soient* $f,f_1,...,f_n$ *des fonctions méromorphes et* a,b,c,d *des constantes complexes telle que* $ad-cb\neq0$, *alors*

(a)
$$m\left(r,\sum_{i=1}^{n}f_i\right)\leq\sum_{i=1}^{n}m(r,f_i)+\ln n.$$

(b)

$$m\left(r,\prod_{i=1}^{n}f_i\right)\leq\sum_{i=1}^{n}m\left(r,f_i\right).$$

(c)

$$N\left(r,\sum_{i=1}^{n}f_i\right)\leq\sum_{i=1}^{n}N\left(r,f_i\right).$$

(d)

$$N\left(r,\prod_{i=1}^{n}f_i\right)\leq\sum_{i=1}^{n}N\left(r,f_i\right).$$

(e)

$$T\left(r,\sum_{i=1}^{n}f_i\right)\leq\sum_{i=1}^{n}T\left(r,f_i\right)+\ln n,n\geq 1.$$

(f)

$$T\left(r,\prod_{i=1}^{n}f_i\right)\leq\sum_{i=1}^{n}T\left(r,f_i\right),n\geq 1.$$

(g)

$$T\left(r,f^n\right)=nT\left(r,f\right),n\in\mathbb{N}^*.$$

(h)

$$T\left(r,\frac{af+b}{cf+d}\right)=T\left(r,f\right)+O\left(1\right),f\not\equiv\frac{-d}{c}.$$

(i) Soit

$$R\left(z,f\right)=\frac{P\left(z,f\right)}{Q\left(z,f\right)}=\frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{p}a_i\left(z\right)f^i}{\displaystyle\sum_{j=0}^{q}b_j\left(z\right)f^j}$$

avec $a_i\left(z\right),\ b_j\left(z\right)$ coefficients méromorphes. Alors

$$T\left(r,R\left(z,f\right)\right)=dT\left(r,f\right)+S\left(r,f\right),$$

où $d=\max\left\{p,q\right\}.$

Preuve:

Montrons (e)-(h)

(e) On a

$$m\left(r,\sum_{i=1}^{n}f_i\right)\leq\sum_{i=1}^{n}m\left(r,f_i\right)+\ln n$$

et

$$N\left(r,\sum_{i=1}^{n}f_i\right)\leq\sum_{i=1}^{n}N\left(r,f_i\right)$$

donc

$$\begin{aligned}T\left(r,\sum_{i=1}^{n}f_i\right) &= m\left(r,\sum_{i=1}^{n}f_i\right)+N\left(r,\sum_{i=1}^{n}f_i\right)\\ &\leq \sum_{i=1}^{n}T\left(r,f_i\right)+\ln n.\end{aligned}$$

(f) On a

$$m\left(r,\prod_{i=1}^{n}f_i\right)\leq\sum_{i=1}^{n}m\left(r,f_i\right)$$

et

$$N\left(r,\prod_{i=1}^{n}f_i\right)\leq\sum_{i=1}^{n}N\left(r,f_i\right),$$

donc

$$\begin{aligned}T\left(r,\prod_{i=1}^{n}f_i\right) &= m\left(r,\prod_{i=1}^{n}f_i\right)+N\left(r,\prod_{i=1}^{n}f_i\right)\\ &\leq \sum_{i=1}^{n}m\left(r,f_i\right)+\sum_{i=1}^{n}N\left(r,f_i\right)\\ &\leq \sum_{i=1}^{n}T\left(r,f_i\right).\end{aligned}$$

(g) On a $|f^n|=|f|^n\leq 1$ équivaut a $|f|\leq 1$. Si $|f|\leq 1$, alors $m\left(r,f^n\right)=0$ et $N\left(r,f^n\right)=nN\left(r,f\right)$. Donc

$$T\left(r,f^n\right)=N\left(r,f^n\right)=n(N\left(r,f\right)+m\left(r,f\right))=nT\left(r,f\right).$$

Si $|f| > 1$, alors

$$\begin{aligned} T\left(r, f^n\right) &= m\left(r, f^n\right) + N\left(r, f^n\right) \\ &= nm\left(r, f\right) + nN\left(r, f\right) \\ &= nT\left(r, f\right). \end{aligned}$$

(h) Si $c = 0$, alors

$$\begin{aligned} T\left(r, \frac{af+b}{d}\right) &= T\left(r, \frac{a}{d}f + \frac{b}{d}\right) \\ &= T\left(r, \frac{a}{d}f\right) + O\left(1\right) \\ &= T\left(r, f\right) + O\left(1\right). \end{aligned}$$

Si $c \neq 0$, alors on écrit

$$\begin{aligned} \frac{af+b}{cf+d} &= \frac{a\left(f+\frac{b}{a}\right)}{c\left(f+\frac{d}{c}\right)} = \frac{a}{c}\frac{f+\frac{d}{c}+\frac{b}{a}-\frac{d}{c}}{f+\frac{d}{c}} \\ &= \frac{a}{c}\left[1 + \frac{bc-ad}{ac}\frac{1}{f+\frac{d}{c}}\right] \\ &= \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2}\frac{1}{f+\frac{d}{c}}. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} T\left(r, \frac{af+b}{cf+d}\right) &= T\left(r, \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2}\frac{1}{f+\frac{d}{c}}\right) \\ &= T\left(r, \frac{bc-ad}{c^2}\frac{1}{f+\frac{d}{c}}\right) \\ &= T\left(r, \frac{1}{f+\frac{d}{c}}\right) + O\left(1\right) \\ &= T\left(r, f\right) + O\left(1\right). \end{aligned}$$

Proposition 1.1.1 *[23] Soit f une fonction méromorphe avec le développement de*

Laurent

$$f(z) = \sum_{i=m}^{\infty} c_i z^i, \quad c_m \neq 0, m \in \mathbb{Z}.$$

Alors

$$\ln|c_m| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta + N(r,f) - N\left(r, \frac{1}{f}\right).$$

1.2 Premier théorème fondamental de R. Nevanlinna

Théorème 1.2.1 *[23, 30] Soit f une fonction méromorphe non constante et $a \in \mathbb{C}$. Soit le développement de Laurent de $f(z) - a$ autour du point d'origine*

$$f(z) - a = \sum_{i=m}^{\infty} c_i z^i, \quad c_m \neq 0, m \in \mathbb{Z}.$$

Alors

$$T(r,a,f) = T(r, \frac{1}{f-a}) = T(r,f) - \ln|c_m| + \varphi(r,a),$$

où

$$|\varphi(r,a)| \leq \ln^+|a| + \ln 2.$$

Preuve 1.2.1 *1) Montrons le théorème pour $a = 0$. D'après Proposition 1.1.1, on a*

$$\ln|c_m| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta + N(r,f) - N\left(r, \frac{1}{f}\right),$$

D'après les propriétés de $\left(\ln^+\right)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\ln|c_m| &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|} d\theta + N(r,f) - N\left(r, \frac{1}{f}\right) \\
&= m(r,f) - m\left(r, \frac{1}{f}\right) + N(r,f) - N\left(r, \frac{1}{f}\right) \\
&= T(r,f) - T\left(r, \frac{1}{f}\right).
\end{aligned}$$

Donc

$$T\left(r,\frac{1}{f}\right)=T\left(r,f\right)-\ln\left|c_m\right|,$$

avec $\varphi\left(r,0\right)=0$

2) Montrons le théorème pour $a\neq 0$. *Posons* $h=f-a$, *alors*

$$\begin{aligned}
N\left(r,\frac{1}{h}\right) &= N\left(r,\frac{1}{f-a}\right),\\
N\left(r,h\right) &= N\left(r,f-a\right)=N\left(r,f\right),\\
m\left(r,\frac{1}{h}\right) &= m\left(r,\frac{1}{f-a}\right),
\end{aligned}$$

de plus

$$\begin{aligned}
\ln^{+}\left|h\right| &= \ln^{+}\left|f-a\right|\leq \ln^{+}\left|f\right|+\ln^{+}\left|a\right|+\ln 2.\\
\ln^{+}\left|f\right| &= \ln^{+}\left|f-a+a\right|=\ln^{+}\left|h+a\right|\\
&\leq \ln^{+}\left|h\right|+\ln^{+}\left|a\right|+\ln 2.
\end{aligned}$$

En intégrant les deux membres de 0 *à* 2π, *on trouve*

$$\begin{aligned}
m\left(r,h\right) &\leq m\left(r,f\right)+\ln^{+}\left|a\right|+\ln 2.\\
m\left(r,f\right) &\leq m\left(r,h\right)+\ln^{+}\left|a\right|+\ln 2.
\end{aligned}$$

Posons

$$\varphi\left(r,a\right)=m\left(r,h\right)-m\left(r,f\right).$$

Alors

$$\varphi\left|\left(r,a\right)\right|\leq \ln^{+}\left|a\right|+\ln 2.$$

D'après le 1^{er}*cas, on a*

$$\begin{aligned} T\left(r,\frac{1}{h}\right) &= m\left(r,\frac{1}{h}\right)+N\left(r,\frac{1}{h}\right) \\ &= T\left(r,h\right)-\ln\left|c_m\right| \\ &= m\left(r,h\right)+N\left(r,h\right)-\ln\left|c_m\right| \\ &= m\left(r,f\right)+\varphi\left(r,a\right)+N\left(r,f\right)-\ln\left|c_m\right| \\ &= T\left(r,f\right)-\ln\left|c_m\right|+\varphi\left(r,a\right). \end{aligned}$$

Ainsi

$$T(r,a,f)=T(r,\frac{1}{f-a})=T(r,f)-\ln\left|c_m\right|+\varphi\left(r,a\right),$$

où

$$\left|\varphi\left(r,a\right)\right|\leq\ln^{+}\left|a\right|+\ln 2.$$

Remarque 1.2.1 *Le premier théorème fondamental peut être exprimé comme suit*

$$T(r,\frac{1}{f-a})=T(r,f)+O(1)$$

pour tout $a\in\mathbb{C}$.

Remarque 1.2.2 *Le premier théorème fondamental reste valable aussi dans le disque unité en prenant* $0<r<1$.

1.3 La croissance d'une fonction méromorphe et entière dans le plan complexe

Définition 1.3.1 *[23, 30] Soit* f *une fonction entière non constante. Alors l'ordre et l'hyper-ordre de* f *sont définis respectivement par*

$$\sigma\left(f\right)=\limsup_{r\longrightarrow+\infty}\frac{\log\log M\left(r,f\right)}{\log r}$$

et

$$\sigma_2(f) = \limsup_{r \longrightarrow +\infty} \frac{\log \log \log M(r,f)}{\log r},$$

où $M(r,f) = \max_{|z|=r} |f(z)|$. *Si* f *est une fonction méromorphe, alors l'ordre et l'hyper-ordre de* f *sont définis respectivement par*

$$\sigma(f) = \limsup_{r \longrightarrow +\infty} \frac{\log T(r,f)}{\log r}$$

et

$$\sigma_2(f) = \limsup_{r \longrightarrow +\infty} \frac{\log \log T(r,f)}{\log r},$$

où $T(r,f)$ *est la fonction caractéristique de* f.

On a généralisé cette définition pour l'ordre itératif comme suivant

$$\sigma_n(f) = \limsup_{r \longrightarrow +\infty} \frac{\log_n T(r,f)}{\log r}.$$

Exemple 1.3.1 *La fonction* $f(z) = \exp\{\exp z^n\}$, $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, *est d'ordre* $\sigma(f) = \infty$ *et d'hyper ordre* $\sigma_2(f) = n$.

Lemme 1.3.1 *[30] Si* f *est une fonction méromorphe non constante dans* $\mathbb{C}$, *alors* $\sigma(f^{(k)}) = \sigma(f)$, $k \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Proposition 1.3.1 *[23, 30] Soit* f *une fonction entière non constante et* $0 < r < R < \infty$. *Alors on a*

$$T(r,f) \leq \log M(r,f) \leq \frac{R+r}{R-r} T(R,f). \tag{1.3}$$

Remarque 1.3.1 *En prenant* $R = 2r$ *dans (1.3), on déduit que si* f *est une fonction entière non constante alors* $\sigma_n(f) = \sigma_{M,n}(f)$ *pour* $n \geq 1$.

1.4 Type d'une fonction méromorphe et entière dans le plan complexe

Définition 1.4.1 *[24, 31] Soit f une fonction méromorphe dans le plan complexe d'ordre $\sigma(f) = \sigma\,(0 < \sigma < \infty)$. On définit le type de f par*

$$\tau(f) = \limsup_{r \longrightarrow +\infty} \frac{T(r,f)}{r^{\sigma}}.$$

Si f est une fonction entière d'ordre $\sigma_M(f) = \sigma_M\,(0 < \sigma_M < \infty)$, on définit le type de f par

$$\tau_M(f) = \limsup_{r \longrightarrow +\infty} \frac{\log M(r,f)}{r^{\sigma}}.$$

Remarque 1.4.1 *En générale $\tau(f)$ n'égale pas $\tau_M(f)$, comme l'indique l'exemple suivant.*

Exemple 1.4.1 *Pour $f(z) = \exp\{z\}$, on a $T(r,f) = \frac{r}{\pi}$ et $M(r,f) = \exp\{r\}$. Donc $\tau(f) = \frac{1}{\pi}$ et $\tau_M(f) = 1$.*

1.5 Exposant de convergence d'une fonction méromorphe dans le plan complexe

Définition 1.5.1 *[31] Soit f une fonction méromorphe. On définit l'exposant de convergence des zéros de la fonction f par*

$$\lambda(f) = \limsup_{r \longrightarrow +\infty} \frac{\log N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r}$$

où

$$N\left(r, \frac{1}{f}\right) = \int_0^r \frac{n\left(t, \frac{1}{f}\right) - n\left(0, \frac{1}{f}\right)}{t} dt + n\left(0, \frac{1}{f}\right) \log r,$$

$n\left(t, \frac{1}{f}\right)$ *désigne le nombre des zéros de la fonction* f *situés dans le disque* $|z| \leq t$ *et l'exposant de convergence des zéros distincts de la fonction* f *par*

$$\overline{\lambda}(f) = \limsup_{r \longrightarrow +\infty} \frac{\log \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r}$$

où

$$\overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) = \int_0^r \frac{\overline{n}\left(t, \frac{1}{f}\right) - \overline{n}\left(0, \frac{1}{f}\right)}{t} dt + \overline{n}\left(0, \frac{1}{f}\right) \log r,$$

$\overline{n}\left(t, \frac{1}{f}\right)$ *désigne le nombre des zéros distincts de la fonction* f *situés dans le disque* $|z| \leq t$.

De même on définit l'exposant n-itératif de convergence des zéros de la fonction f par

$$\lambda_n(f) = \limsup_{r \longrightarrow +\infty} \frac{\log_n N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r};$$

et des zéro distincts par

$$\overline{\lambda}_n(f) = \limsup_{r \longrightarrow +\infty} \frac{\log_n \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r}.$$

Exemple 1.4.2 Soit $f(z) = e^z - a$, $a \neq 0, \infty$.

On a $e^z = a \Longleftrightarrow z = \ln a = \ln|a| + i(\arg a + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
|z| &< t \Rightarrow \sqrt{(\ln|a|)^2 + (\arg a + 2k\pi)^2} < t \\
&\Rightarrow \frac{-\sqrt{t^2 - (\ln a)^2} - \arg a}{2\pi} < k < \frac{\sqrt{t^2 - (\ln a)^2} - \arg a}{2\pi} \\
&\Rightarrow n\left(t, \frac{1}{f}\right) \sim \frac{\sqrt{t^2 - (\ln a)^2}}{\pi} \sim \frac{t}{\pi},\ t \to +\infty \\
&\Rightarrow N\left(r, \frac{1}{f}\right) = \frac{r}{\pi} + o(1) \\
&\Rightarrow \lambda(f) = 1.
\end{aligned}$$

1.6 La croissance d'une fonction méromorphe et analytique dans le disque unité

Définition 1.6.1 *[38, 12] Soit f une fonction méromorphe dans le disque unité $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. L'ordre et l'hyper-ordre de cette fonction sont définis respectivement par*

$$\sigma(f) = \limsup_{r \to 1^-} \frac{\log^+ T(r,f)}{-\log(1-r)},$$

et

$$\sigma_2(f) = \limsup_{r \to 1^-} \frac{\log^+ \log^+ T(r,f)}{-\log(1-r)}.$$

Si f est une fonction analytique dans D, alors l'ordre et l'hyper-ordre de cette fonction sont définis aussi respectivement par

$$\begin{aligned} \sigma_M(f) &= \limsup_{r \to 1^-} \frac{\log^+ \log^+ M(r,f)}{-\log(1-r)}, \\ \sigma_{M,2}(f) &= \limsup_{r \to 1^-} \frac{\log^+ \log^+ \log^+ M(r,f)}{-\log(1-r)}, \end{aligned}$$

où $M(r,f) = \max_{|z|=r} |f(z)|$.

On a généralisé ces définitions comme suivant.

L'ordre n-itératif d'une fonction méromorphe f est défini par

$$\sigma_n(f) = \limsup_{r \to 1^-} \frac{\log_n^+ T(r,f)}{-\log(1-r)}.$$

Si f est une fonction analytique dans D. Alors l'ordre n-itératif de cette fonction est défini par

$$\sigma_{M,n}(f) = \limsup_{r \to 1^-} \frac{\log_{n+1}^+ M(r,f)}{-\log(1-r)}.$$

Remarque 1.6.1 *Si f est analytique dans D, Tsuji [34, p.205] a montré que*

$$\sigma_1(f) \le \sigma_{M,1}(f) \le \sigma_1(f) + 1. \tag{1.4}$$

Les inégalités (1.4) sont les meilleures estimations possible dans le sens où ils existent des fonctions analytiques g et h telles que $\sigma_{M,1}(g) = \sigma_1(g)$ *et* $\sigma_{M,1}(h) = \sigma_1(h) + 1$; comme l'indique Exemple 1.6.1 ci-dessous.

De toute évidence, on a

$$\sigma(f) < \infty \text{ si et seulement si } \sigma_M(f) < \infty.$$

Exemple 1.6.1 *Pour la fonction* $f(z) = \exp\left\{\dfrac{1}{(1-z)^\mu}\right\}, \ (\mu > 1)$, *on a* $\sigma_1(f) = \mu - 1$ *et* $\sigma_{M,1}(f) = \mu$. *Par contre, pour la fonction* $f(z) = \exp\left\{\frac{1}{z-1}\right\}$, *on a*

$$\sigma(f) = \sigma_M(f) = 0.$$

Exemple 1.6.2 *Soit la fonction* $f(z) = \exp\exp\left\{\frac{1}{(1-z)^2}\right\}$. *Alors*

$$\sigma_2(f) = \sigma_{2,M}(f) = 2.$$

Remarque 1.6.2 *En prenant* $R = \frac{1+r}{2}$ *dans (1.3), on déduit que si* f *une fonction analytique non constante alors* $\sigma_n(f) = \sigma_{M,n}(f)$ *pour* $n \geq 2$.

Proposition 1.6.1 *Soit* f *et* g *deux fonctions méromorphes. Alors*

1.

$$\begin{aligned} \sigma(f+g) &\leq \max\{\sigma(f), \sigma(g)\}, \\ \sigma(fg) &\leq \max\{\sigma(f), \sigma(g)\}. \end{aligned}$$

2. Si $\sigma(g) < \sigma(f)$, *alors*

$$\sigma(f+g) = \sigma(fg) = \sigma(f).$$

1.7 Type d'une fonction méromorphe et analytique dans le disque unité

Définition 1.7.1 *[24] Soit f une fonction méromorphe dans le disque unité d'ordre $\sigma(f) = \sigma\,(0 < \sigma < \infty)$. On définit le type de f par*

$$\tau(f) = \limsup_{r\to 1^-} \frac{T(r,f)}{\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\sigma}} = \limsup_{r\to 1^-} (1-r)^{\sigma}\, T(r,f).$$

Si f est une fonction analytique dans le disque unité d'ordre $\sigma_M(f) = \sigma_M\,(0 < \sigma_M < \infty)$, on définit le type de f par

$$\tau_M(f) = \limsup_{r\to 1^-} (1-r)^{\sigma_M} \log M(r,f).$$

De même, on peut généraliser par la façon suivante: Si f est une fonction méromorphe dans le disque unité d'ordre itératif fini $\sigma_n(f) = \sigma\,(0 < \sigma < \infty)$, alors

$$\tau_n(f) = \limsup_{r\to 1^-} (1-r)^{\sigma} \log_{n-1} T(r,f).$$

Si f est une fonction analytique dans le disque unité d'ordre $\sigma_M(f) = \sigma_M\,(0 < \sigma_M < \infty)$, on a

$$\tau_{n,M}(f) = \limsup_{r\to 1^-} (1-r)^{\sigma_M} \log_n M(r,f).$$

Remarque 1.7.1 *En utilisant (1.3) avec $R = \frac{1+r}{2}$, on déduit que si f une fonction analytique non constante alors $\tau_n(f) = \tau_{n,M}(f)$ pour $n \geq 3$.*

Définition 1.7.2 *[11] Soit f une fonction méromorphe dans le disque unité et*

$$\limsup_{r\to 1^-} \frac{T(r,f)}{-\log(1-r)} = a.$$

Si $a < \infty$, on dit que f est de degré fini a (ou non admissible); et si $a = \infty$ on dit que f est de degré infini (ou admissible).

Définition 1.7.3 *[11] Soit f une fonction analytique dans le disque unité et*

$$\limsup_{r\rightarrow 1^-} \frac{\log M(r,f)}{-\log(1-r)} = b.$$

Si $b < \infty$, on dit que f est de degré fini b; et si $b = \infty$ on dit que f est de degré infini.

1.8 Exposant de convergence d'une fonction méromorphe dans le disque unité

Définition 1.8.1 *[25] Soit f une fonction méromorphe dans le disque unité . On définit l'exposant et l'hyper exposant de convergence des zéros de la fonction f respectivement par*

$$\lambda(f) = \limsup_{r\rightarrow 1^-} \frac{\log N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{-\log(1-r)}$$

$$\lambda_2(f) = \limsup_{r\rightarrow 1^-} \frac{\log\log N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{-\log(1-r)}$$

où

$$N\left(r, \frac{1}{f}\right) = \int_0^r \frac{n(t, \frac{1}{f}) - n(0, \frac{1}{f})}{t} dt + n(r, \frac{1}{f}) \log r$$

tel que $n(t, \frac{1}{f})$ désigne le nombre des zéros de la fonction f situés dans le disque $|z| \leq r$.

Définition 1.8.2 *[25] Soit f une fonction méromorphe dans le disque unité . On définit l'exposant et l'hyper exposant de convergence des zéros distincts de la fonction f respectivement par*

$$\overline{\lambda}(f) = \limsup_{r\rightarrow 1^-} \frac{\log \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log \frac{1}{1-r}}$$

$$\overline{\lambda}_2(f) = \limsup_{r\rightarrow 1^-} \frac{\log\log \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)}{-\log(1-r)}$$

où
$$\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)=\int_0^r \frac{\overline{n}(t,\frac{1}{f})-\overline{n}(0,\frac{1}{f})}{t}dt+\overline{n}(r,\frac{1}{f})\log r$$

tel que $\overline{n}(t,\frac{1}{f})$ désigne le nombre des zéros distincts de la fonction f situés dans le disque $|z|\leq r$.

Définition 1.8.3 *Soit f une fonction méromorphe dans D. L'exposant de convergence n-itératif des zéros d'une fonction f est définis par*

$$\lambda_n(f)=\limsup_{r\to 1^-}\frac{\log_n N\left(r,\frac{1}{f}\right)}{-\log(1-r)}$$

L'exposant de convergence n-itératif des zéros distincts d'une fonction f est défini par

$$\overline{\lambda}_n(f)=\limsup_{r\to 1^-}\frac{\log_n \overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)}{-\log(1-r)}$$

1.9 Mesure linéaire et logarithmique

Définition 1.9.1 *[23, 30] La mesure linéaire d'un ensemble $E\subset[0,+\infty[$ est définie par*

$$m(E)=\int_0^{+\infty}\chi_E(t)\,dt,$$

où $\chi_E(t)$ est la fonction caractéristique de l'ensemble E et la mesure logarithmique d'un ensemble $F\subset[1,+\infty[$ est définie par

$$Lm(F)=\int_1^{+\infty}\frac{\chi_F(t)}{t}dt.$$

Exemple 1.4.1 La mesure linéaire de l'ensemble $E = [1, 2] \subset [0, +\infty[$ est

$$m(E) = \int_0^{+\infty} \chi_E(t)\, dt = \int_1^2 dt = 1.$$

La mesure logarithmique de l'ensemble $F = [e, e^4] \subset [1, +\infty[$ est

$$Lm(F) = \int_1^{+\infty} \frac{\chi_F(t)}{t} dt = \int_e^{e^4} \frac{dt}{t} = 3.$$

Définition 1.9.2 *[24] La mesure logarithmique d'un ensemble $F \subset [0, 1[$ est définie par*

$$lm(F) = \int_0^1 \frac{\chi_F(t)}{1-t} dt.$$

Exemple 1.9.1 *La mesure logarithmique de l'ensemble $F = \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right] \subset [0, 1[$ est égale à $lm(F) = \log \frac{3}{2}$.*

Chapitre 2

Croissance et l'oscillation des solutions de certaines classes d'équations différentielles linéaires dans le disque de l'unité

2.1 Introduction et résultats

Plusieurs auteurs ont étudié l'équation différentielle linéaire suivantes

$$f'' + A(z)\,e^{az} f' + B(z)\,e^{bz} f = 0, \tag{2.1}$$

où $A(z)$ et $B(z)$ sont des fonctions entières, voir [1, 13, 14, 19]. Récemment dans [20], Hamouda a étudié l'équation différentielle linéaire

$$f'' + A(z)\,e^{\frac{a}{(z_0 - z)^{\mu}}} f' + B(z)\,e^{\frac{b}{(z_0 - z)^{\mu}}} f = 0,$$

où $A(z)$ et $B(z) \not\equiv 0$ sont des fonctions analytiques dans le disque unité en utilisant le comportement des coefficients au voisinage d'un point sur la frontière de disque unité. Puis dans [21], Hamouda a montré les résultats suivants.

Théorème 2.1.1 *[21] Soient $A_0(z), ..., A_{k-1}(z)$ des fonctions méromorphes dans le disque unité D. S'il existe $\omega_0 \in \partial D$ et une courbe $\gamma \subset D$ tendant vers ω_0 tel que*

$$\lim_{z \to \omega_0} \frac{\sum_{j=1}^{k-1} |A_j(z)| + 1}{|A_0(z)| (1 - |z|)^{\mu}} = 0,$$

avec $z \in \gamma$, pour tout $\mu > 0$. Alors chaque solution méromorphe $f(z) \not\equiv 0$ de l'équation différentielle

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + ... + A_1(z) f' + A_0(z) f = 0, \tag{2.2}$$

est d'ordre infinie.

Théorème 2.1.2 *[21] Soient $A_0(z), ..., A_{k-1}(z)$ des fonctions méromorphes dans le disque unité D. S'il existe $\omega_0 \in \partial D$ et une courbe $\gamma \subset D$ tendant vers ω_0 tel que*

$$\lim_{z \to \omega_0} \frac{\sum_{j=1}^{k-1} |A_j(z)| + 1}{|A_0(z)|} \exp_n \left\{ \frac{\lambda}{(1 - |z|)^{\mu}} \right\} = 0, \ \text{avec } z \in \gamma,$$

où $n \geq 1$ un entier, ($\exp_1(z) = \exp(z)$, $\exp_{n+1}(z) = \exp\{\exp_p(z)\}$), et $\lambda > 0$, $\mu > 0$ des constantes réelles, alors chaque solution méromorphe $f(z) \not\equiv 0$ de l'équation différentielle (2.2) satisfait $\sigma_n(f) = \infty$, et $\sigma_{n+1}(f) \geq \mu$.

Remarque 2.1.1 *Théorème 2.1.1 et Théorème 2.1.2 restent valables si au lieu de prendre une courbe qui tend vers un point sur la frontière du disque unité D, on prend, d'une manière générale, un sous-ensemble Γ de D tel que l'ensemble $\Gamma_0 = \{|z| : z \in \Gamma\}$ est de mesure logarithmique infini, qui est $\int_{\Gamma_0} \frac{dr}{1-r} = +\infty$.*

Dans [36], Xu, Tu et Zheng ont montré les résultats suivants.

Théorème 2.1.3 *[36] Soient $A_j(z)$ $j = 0, 1, ..., k-1$ des fonctions entières d'ordre fini satisfaisant l'une des deux conditions suivantes:*
(i) $\max\{\sigma(A_j) : j = 1, 2, ..., k-1\} < \sigma(A_0) < \infty$*;*
(ii) $0 < \sigma(A_{k-1}) = ... = \sigma(A_0) < \infty$ *et* $\max\{\tau(A_j) : j = 1, 2, ..., k-1\} = \tau_1 < \tau(A_0) = \tau$*.*

Alors pour chaque solution $f \not\equiv 0$ de (2.2) et pour toute fonction $\varphi(z) \not\equiv 0$ satisfaisant $\sigma_2(\varphi) < \sigma(A_0)$, on a

$$\overline{\lambda_2}(f-\varphi) = \overline{\lambda_2}(f'-\varphi) = \overline{\lambda_2}(f''-\varphi) = \overline{\lambda_2}\left(f^{(i)}-\varphi\right) = \sigma_2(f) = \sigma(A_0) \quad (i \in \mathbb{N}).$$

Théorème 2.1.4 *[36] Soient $A_j(z)$ $j = 1, 2, ..., k-1$ des polynômes et $A_0(z)$ une fonction entière transcendente. Aalors chaque solution $f \not\equiv 0$ de (2.2) et pour toute fonction entière $\varphi(z)$ d'ordre fini, on a*

(i) $\overline{\lambda}(f-\varphi) = \lambda(f-\varphi) = \sigma(f) = \infty$*;*
(ii) $\overline{\lambda}\left(f^{(i)}-\varphi\right) = \lambda\left(f^{(i)}-\varphi\right) = \sigma\left(f^{(i)}-\varphi\right) = \infty \quad (i \geq 1, i \in \mathbb{N})$.

Théorème 2.1.5 *[36] Soient $A_j(z)$ $j = 0, 1, ..., k-1$ des fonctions méromorphes satisfaisant* $\max\{\sigma(A_j) : j = 1, 2, ..., k-1\} < \sigma(A_0)$ *et* $\delta(\infty, A_0) = \liminf_{r\to+\infty} \frac{m(r,A_0)}{T(r,A_0)} > 0$. *Alors, pour chaque solution méromorphe $f \not\equiv 0$ de l'équation (2.2) et pour toute fonction méromorphe $\varphi(z) \not\equiv 0$ satisfaisant $\sigma_2(\varphi) < \sigma(A_0)$, on a*

$$\overline{\lambda_2}\left(f^{(i)}-\varphi\right) = \lambda_2\left(f^{(i)}-\varphi\right) \geq \sigma(A_0) \quad (i \in \mathbb{N}), \text{ où } f^{(0)} = f.$$

Dans ce chapitre, on étudiera la croissance et l'exposant de convergence de $f^{(i)}-\varphi$ telle que f est une solution de l'equation (2.2) avec des coefficients méromorphes dans le disque unité et vérifiant des conditions similaires aux ceux du Théorème 2.1.1 et Théorème 2.1.2. En fait, on établit les résultats suivants.

Théorème 2.1.6 *[39] Soient $A_0(z), ..., A_{k-1}(z)$ des fonctions meromorphes d'ordre finie dans le disque unité D. S'il existe un sous-ensemble Γ de D tel que l'ensemble*

$\Gamma_0 = \{|z| : z \in \Gamma\}$ *est de mesure logarithmique infini et que pour toute constante réelle* $\mu > 0$ *on a*

$$\lim_{\substack{|z| \to 1^- \\ z \in \Gamma}} \frac{\sum_{j=1}^{k-1} |A_j(z)| + 1}{|A_0(z)| (1 - |z|)^{\mu}} = 0, \tag{2.3}$$

alors pour chaque solution méromorphe $f \not\equiv 0$ *de (2.2) et pour toute fonction meromorphe* $\varphi(z) \not\equiv 0$ *d'ordre fini dans le disque unité* D*, on a*

$$\overline{\lambda}(f - \varphi) = \overline{\lambda}\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \lambda\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \sigma(f) = \infty \quad (i \in \mathbb{N}). \tag{2.4}$$

Corollaire 2.1.1 *[39] Soient* $A_0(z) \not\equiv 0, ..., A_{k-1}(z)$ *des fonctions analytiques d'ordre zéro dans le disque unité telle que* $A_1, ...A_{k-1}$ *sont de degré fini et* A_0 *est de degré infini. Alors pour chaque solution* $f(z) \not\equiv 0$ *de (2.2) et pour toute fonction analytique* $\varphi(z) \not\equiv 0$ *d'ordre fini dans le disque unité* D*, on a*

$$\overline{\lambda}(f - \varphi) = \overline{\lambda}\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \lambda\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \sigma(f) = \infty \quad (i \in \mathbb{N}).$$

Corollaire 2.1.2 *Soient* $A_0(z), ..., A_{k-1}(z)$ *des fonctions meromorphes d'ordre fini dans le disque unité* D *. S'il existe* $\omega_0 \in \partial D$ *et une courbe* $\gamma \subset D$ *tendu vers* ω_0 *telle que pour toute constante réelle* $\mu > 0$ *on a*

$$\lim_{z \to \omega_0} \frac{\sum_{j=1}^{k-1} |A_j(z)| + 1}{|A_0(z)| (1 - |z|)^{\mu}} = 0, \text{ avec } z \in \gamma,$$

alors pour chaque solution méromorphe $f \not\equiv 0$ *de (2.2) et pour toute fonction méromorphe* $\varphi(z) \not\equiv 0$ *d'ordre fini dans le disque unité* D*, on a*

$$\overline{\lambda}(f - \varphi) = \overline{\lambda}\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \lambda\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \sigma(f) = \infty \quad (i \in \mathbb{N}).$$

En effet, pour la courbe $\gamma \subset D$, l'ensemble $\{|z| : z \in \gamma\}$ est de mesure logarithmique infini, qui est $\int\limits_{\gamma} \frac{dr}{1-r} = +\infty$.

Théorème 2.1.7 *[39] Soient $A_0(z), ..., A_{k-1}(z)$ des fonctions méromorphes dans le disque unité D avec $\sigma_n(A_j) < \infty$. S'il existe un sous-ensemble Γ de D tel que l'ensemble $\Gamma_0 = \{|z| : z \in \Gamma\}$ est de mesure logarithmique infini et*

$$\lim_{\substack{|z|\to 1^- \\ z\in\Gamma}} \frac{\sum\limits_{j=1}^{k-1} |A_j(z)| + 1}{|A_0(z)|} \exp_n\left\{\frac{\beta}{(1-|z|)^{\mu}}\right\} = 0, \tag{2.5}$$

où $n \geq 1$ est un entier, ($\exp_1(z) = \exp(z)$, $\exp_{n+1}(z) = \exp\left\{\exp_p(z)\right\}$), et $\beta > 0$, $\mu > 0$ sont des constants réels , alors pour chaque solution méromorphe $f \not\equiv 0$ de (2.2) et pour toute fonction meromorphe $\varphi(z) \not\equiv 0$ dans le disque unité D satisfaisant $\sigma_{n+1}(\varphi) < \mu$, on a

$$\overline{\lambda_{n+1}}(f-\varphi) = \overline{\lambda_{n+1}}\left(f^{(i)}-\varphi\right) = \lambda_{n+1}\left(f^{(i)}-\varphi\right) = \sigma_{M,n+1}(f) \geq \mu \quad (i \in \mathbb{N}). \tag{2.6}$$

Corollaire 2.1.3 *Soient $A_0(z), ..., A_{k-1}(z)$ des fonctions méromorphes dans le disque unité D avec $\sigma_n(A_j) < \infty$. S'il existe $\omega_0 \in \partial D$ et une courbe $\gamma \subset D$ tendu vers ω_0 telle que*

$$\lim_{z\to\omega_0} \frac{\sum\limits_{j=1}^{k-1} |A_j(z)| + 1}{|A_0(z)|} \exp_n\left\{\frac{\beta}{(1-|z|)^{\mu}}\right\} = 0, \ \text{avec } z \in \gamma,$$

où $n \geq 1$ est un entier, $\beta > 0$, $\mu > 0$ sont des constants réels, alors pour chaque solution méromorphe $f \not\equiv 0$ de (2.2) et pour toute fonction meromorphe $\varphi(z) \not\equiv 0$ dans le disque unité D satisfaisant $\sigma_{n+1}(\varphi) < \mu$, on a

$$\overline{\lambda_{n+1}}(f-\varphi) = \overline{\lambda_{n+1}}\left(f^{(i)}-\varphi\right) = \lambda_{n+1}\left(f^{(i)}-\varphi\right) = \sigma_{n+1}(f) \geq \mu \quad (i \in \mathbb{N}).$$

Corollaire 2.1.4 *[39] Soient $A_0(z), ..., A_{k-1}(z)$ des fonctions méromorphes dans D avec $\sigma_n(A_j) < \infty$. S'il existe un sous-ensemble Γ de D tel que l'ensemble $\Gamma_0 =$*

$\{|z| : z \in \Gamma\}$ *est de mesure logarithmique infini et pour* $z \in \Gamma$, *on a*

$$|A_0(z)| \geq \exp_n\left\{\frac{\alpha}{(1-|z|)^{\mu}}\right\} \tag{2.7}$$

et

$$|A_j(z)| \leq \exp_n\left\{\frac{\beta}{(1-|z|)^{\mu}}\right\} \tag{2.8}$$

où $n \geq 1$ *est un entier,* $0 \leq \beta < \alpha$, $\mu > 0$ *sont des constants réels, alors pour chaque solution méromorphe* $f \not\equiv 0$ *de (2.2) et pour toute fonction méromorphe* $\varphi(z) \not\equiv 0$ *dans le disque unité* D *satisfaisant* $\sigma_{n+1}(\varphi) < \mu$, *on a*

$$\overline{\lambda_{n+1}}(f-\varphi) = \overline{\lambda_{n+1}}\left(f^{(i)}-\varphi\right) = \lambda_{n+1}\left(f^{(i)}-\varphi\right) = \sigma_{n+1}(f) \geq \mu \quad (i \in \mathbb{N}).$$

Corollaire 2.1.5 *[39] Soient* $A_0(z) \not\equiv 0, ..., A_{k-1}(z)$ *des fonctions analytique dans le disque unité* $\sigma_n(A_j) < \infty$. *Supposons que* $\alpha > 1$ *est un constant réel,* a *et* ω_0 *sont des nombres complexes tel que* $a \neq 0$, $|\omega_0| = 1$. *Si* $A_0(z), ..., A_{k-1}(z)$ *sont analytiques en* ω_0 *alors pour chaque solution* $f(z) \not\equiv 0$ *de l'équation différentielle*

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + ... + A_1(z) f' + A_0(z) \exp_n\left\{\frac{a}{(\omega_0 - z)^{\alpha}}\right\} f = 0,$$

et pour toute fonction analytique $\varphi(z) \not\equiv 0$ *dans le disque unité* D *satisfaisant* $\sigma_{n+1}(\varphi) < \alpha$, *on a*

$$\overline{\lambda_{n+1}}(f-\varphi) = \overline{\lambda_{n+1}}\left(f^{(i)}-\varphi\right) = \lambda_{n+1}\left(f^{(i)}-\varphi\right) = \sigma_{n+1}(f) \geq \alpha \quad (i \in \mathbb{N}).$$

Corollaire 2.1.6 *Soit* $A(z)$ *et* $B(z) \not\equiv 0$ *deux fonctions analytique dans le disque unité. Supposons que* $\alpha > 1$ *est un constant réel,* a, b *et* ω_0 *sont des nombres complexes tels que* $ab \neq 0$, $\arg a \neq \arg b$ *ou* $a = cb$ $(0 < c < 1)$, $|z_0| = 1$. *Si* $B_1(z)$ *et* $B_0(z)$ *sont analytiques en* ω_0, *alors pour chaque solution* $f(z) \not\equiv 0$ *de l'équation* *différentielle*

$$f'' + B_1(z) e^{\overline{\frac{a}{(\omega_0 - z)^\alpha}}} f' + B_0(z) e^{\overline{\frac{b}{(\omega_0 - z)^\alpha}}} f = 0, \tag{2.9}$$

et pour toute fonction analytique $\varphi(z) \not\equiv 0$ *dans le disque unité* D *satisfaisant* $\sigma_2(\varphi) < \alpha$, *on a*

$$\overline{\lambda_2}(f - \varphi) = \overline{\lambda_2}\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \lambda_2\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \sigma_{M,2}(f) \geq \alpha \quad (i \in \mathbb{N}).$$

Remarque 2.1.2 *Comme des cas particulier, si* $\varphi = a \in \mathbb{C} - \{0\}$, *on en déduit la distribution des zéros de* $f^{(i)} - a = 0$ *et si* $\varphi(z) = z$ *on en déduit la distribution des points fixes de* $f^{(i)}$.

Exemple 2.1.1 suivant montre que la condition (2.5) du Théorème 2.1.7 n'exige pas que $\sigma_n(A_0) > \sigma_n(A_j)$ $(j = 1, ..., k-1)$.

Exemple 2.1.1 *Considérons l'équation différentielle*

$$f'' + A_1(z) f' + A_0(z) f = 0.$$

(i) Si $A_1(z) = \exp_3\left\{\frac{1}{1-z}\right\} \exp_4\left\{\frac{1}{1-z}\right\}$ *et* $A_0(z) = \exp_3\left\{\frac{2}{1-z}\right\} \exp_4\left\{\frac{1}{1-z}\right\}$, *alors* $\sigma_4(A_1) = \sigma_4(A_0) = 1$; *et c'est claire que la condition (2.5) est satisfait en prenant* $n = 3$, $\beta = 1$, $\mu = 1$, $\Gamma = \{z \in D : \arg z = 0\}$; *et donc* $\sigma_4(f) \geq 1$.
(ii) Si $A_1(z) = \exp_3\left\{\frac{1}{1-z}\right\} \exp_4\left\{\frac{1}{i-z}\right\}$ *et* $A_0(z) = \exp_3\left\{\frac{2}{1-z}\right\} \exp_4\left\{\frac{1}{2+z}\right\}$, *alors* $\sigma_4(A_1) = 1$ *et* $\sigma_4(A_0) = 0$; *et c'est claire que la scondition (2.5) est satisfait en prenant* $n = 3$, $\beta = 1$, $\mu = 1$, $\Gamma = \{z \in D : \arg z = 0\}$; *et donc* $\sigma_4(f) \geq 1$.

Maintenant, on donne un exemple pour prouver l'existence des solutions méromorphes dans le cas des coefficients méromorphes qui satisfaient les conditions des Théorème 2.1.6 et Théorème 2.1.7.

Exemple 2.1.2 *L'equation différentielle*

$$f'' + A_1(z) f' + A_0(z) f = 0,$$

admet les deux solutions suivantes qui sont linéairement independentes:

$$f_1(z) = \frac{1}{z} \exp_2 \left\{ \frac{1}{1-z} \right\}, \ f_2(z) = \frac{1}{z} \exp_2 \left\{ \frac{2}{1-z} \right\},$$

où

$$A_1(z) = -\frac{\frac{f_2''}{f_2} - \frac{f_1''}{f_1}}{\frac{f_2'}{f_2} - \frac{f_1'}{f_1}}, \ A_0(z) = -\frac{f_1''}{f_1} - A_1(z) \frac{f_1'}{f_1}.$$

On note que $z = 0$ *est un pôle pour* $A_0(z)$ *et* $A_1(z)$. *En prenant* $\Gamma = \left\{ z \in D : \arg z = 0 \ \text{et} \ |z| \geq \frac{1}{2} \right\} = \left[\frac{1}{2}, 1\right)$ *et après les calculs, on obtient*

$$|A_1(z)| = \frac{2}{(1-|z|)^2} \exp\left\{ \frac{2}{1-|z|} \right\} (1 + o(1)),$$

$$|A_0(z)| = \frac{2}{(1-|z|)^4} \exp\left\{ \frac{3}{1-|z|} \right\} (1 + o(1)),$$

quand $|z| \to 1^-$ *avec* $z \in \Gamma$. *Il est claire que la condition (2.5) est satisfait en prenant* $n = 1, \ \mu = 1, \ \beta = \frac{1}{2}$. *Aussi la condition (2.3) est vérifiée pour tout constant* $\mu > 0$.

2.2 Lemmes préliminaires

Lemme 2.2.1 *[36] Soit* $f \not\equiv 0$ *une solution de l'équation (2.2). On pose* $g = f - \varphi$*; alors* g *satisfait l'équation*

$$g^{(k)} + A_{k-1} g^{(k-1)} + ... + A_0 g = -\left[\varphi^{(k)} + A_{k-1}\varphi^{(k-1)} + ... + A_0 \varphi\right]. \tag{2.10}$$

Lemme 2.2.2 *[36] On suppose que* $f \not\equiv 0$ *est une solution de (2.2). Posons* $g_i = f^{(i)} - \varphi, \ (i \in \mathbb{N} - \{0\})$*; alors* g_i *satisfait l'équation*

$$g_i^{(k)} + U_{k-1}^i g_i^{(k-1)} + ... + U_0^i g_i = -\left[\varphi^{(k)} + U_{k-1}^i \varphi^{(k-1)} + ... + U_0^i \varphi\right], \qquad (2.11)$$

Avec

$$U_j^i = \left(U_{j+1}^{i-1}\right)' + U_j^{i-1} - \frac{\left(U_0^{i-1}\right)'}{U_0^{i-1}} U_{j+1}^{i-1}, \qquad (2.12)$$

$j = 0, 1, ..., k-1,\ U_j^0 = A_j$ *et* $U_k^i \equiv 1$.

Lemme 2.2.3 *[16] Soit f une fonction méromorphe dans le disque unité D telle que $f^{(j)}$ n'est pas identiquement nulle. Soient $\varepsilon > 0$, $k > j > 0$ et $d \in (0,1)$. Alors, il existe un ensemble $E \subset [0,1)$ de mesure logarithmique fini, qui est $\int_E \frac{1}{1-r} dr < \infty$, tel que pour tout $z \in D$ vérifiant $|z| \notin E$, On a*

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right| \leq \left(\left(\frac{1}{1-|z|}\right)^{(2+\varepsilon)} \max\left\{\log\frac{1}{1-|z|}, T(s(|z|), f)\right\}\right)^{k-j},$$

avec $s(|z|) = 1 - d(1-|z|)$. On a deux cas particulier:

1) si $\sigma_1(f) = \sigma_1 < \infty$, alors

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right| \leq \left(\frac{1}{1-|z|}\right)^{(k-j)(\sigma_1+2+\varepsilon)}, \ |z| \notin E;$$

2) si $\sigma_n(f) = \sigma_n < \infty$ $(n \geq 2)$, alors

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right| \leq \exp_{n-1}\left\{\left(\frac{1}{1-|z|}\right)^{(\sigma_n+\varepsilon)}\right\}, \ |z| \notin E.$$

Lemme 2.2.4 *[12] Si f et g sont des fonctions méromorphes dans D, $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, alors on a*

(i) $\sigma_n(f) = \sigma_n\left(\frac{1}{f}\right)$, $\sigma_n(a \cdot f) = \sigma_n(f)$ $(a \in \mathbb{C} - \{0\})$;

(ii) $\sigma_n(f) = \sigma_n(f')$;

(iii) $\max\{\sigma_n(f+g), \sigma_n(f \cdot g)\} \leq \max\{\sigma_n(f), \sigma_n(g)\}$;

(iv) Si $\sigma_n(f) < \sigma_n(g)$, alors $\sigma_n(f+g) = \sigma_n(g)$ et $\sigma_n(f \cdot g) = \sigma_n(g)$.

Lemme 2.2.5 *Soient $A_0(z), ..., A_{k-1}(z)$ des fonctions méromorphes dans le disque unité D d'ordre n-itératif fini $\sigma_n(A_j) < \infty$ et satisfaisant la condition (2.5). Alors la suite $\left\{U_j^i\right\}$ définie par (2.12) satisfait*

$$\lim_{\substack{|z|\to 1^- \\ z\in\Gamma}} \frac{\sum_{j=1}^{k-1} \left|U_j^i(z)\right| + 1}{\left|U_0^i(z)\right|} \exp_n \left\{ \frac{\beta-\varepsilon}{(1-|z|)^{\mu}} \right\} = 0, \quad |z| \notin E, \tag{2.13}$$

où $0 < \varepsilon < \beta$.

Preuve. Par induction sur $i \in \mathbb{N}$. Pour $i = 0$, on a $U_j^0 = A_j$; ce cas est évident parce qu'on a (2.5). Pour $i = 1$, on a $U_j^1 = A'_{j+1} + A_j - \frac{A'_0}{A_0} A_{j+1} = A_j + A_{j+1}\left(\frac{A'_{j+1}}{A_{j+1}} - \frac{A'_0}{A_0}\right)$ $(j = 0, 1, ..., k-1)$ et $A_k \equiv 1$. Donc

$$\left|U_0^1\right| \geq |A_0| - |A_1| \left(\left|\frac{A'_1}{A_1}\right| + \left|\frac{A'_0}{A_0}\right| \right) \tag{2.14}$$

et

$$\left|U_j^1\right| \leq |A_j| + |A_{j+1}| \left(\left|\frac{A'_{j+1}}{A_{j+1}}\right| + \left|\frac{A'_0}{A_0}\right| \right). \tag{2.15}$$

D'après (2.14) et (2.15), on obtient

$$\left|\frac{U_j^1}{U_0^1}\right| \leq \frac{|A_j| + |A_{j+1}| \left(\left|\frac{A'_{j+1}}{A_{j+1}}\right| + \left|\frac{A'_0}{A_0}\right| \right)}{|A_0| \left(1 - \frac{|A_1|}{|A_0|} \left(\left|\frac{A'_1}{A_1}\right| + \left|\frac{A'_0}{A_0}\right| \right) \right)}. \tag{2.16}$$

Posons $\sigma_n = \max_{0\leq j\leq k-1} \{\sigma_n(A_j)\}$. Alors d'après Lemme 2.2.3, on a

$$\left|\frac{A'_j}{A_j}\right| \leq \exp_{n-1} \left\{ \frac{1}{(1-|z|)^{\sigma_n+\varepsilon}} \right\}. \tag{2.17}$$

De l'hypothèse (2.5), on a

$$\lim_{\substack{|z|\to 1^- \\ z\in\Gamma}} \frac{|A_j(z)|}{|A_0(z)|} \exp_n \left\{ \frac{\beta}{(1-|z|)^{\mu}} \right\} = 0, \quad (j = 1, ..., k)$$

qui signifie pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe $0 < r_0 < 1$ tel que pour tout $z \in \gamma$ avec $r_0 < |z| = r < 1$, on a

$$\frac{|A_j(z)|}{|A_0(z)|} \exp_n \left\{ \frac{\beta}{(1-|z|)^{\mu}} \right\} < \varepsilon_0.$$

En particulier pour $\varepsilon_0 = 1$, on a

$$\left| \frac{A_j}{A_0} \right| \leq \left(\exp_n \left\{ \frac{\beta}{(1-|z|)^{\mu}} \right\} \right)^{-1}. \tag{2.18}$$

Alors, d'après (2.17) et (2.18), on obtient

$$\frac{|A_1|}{|A_0|} \left(\left| \frac{A_1'}{A_1} \right| + \left| \frac{A_0'}{A_0} \right| \right) \leq \left(\exp_n \left\{ \frac{\beta - \frac{\varepsilon}{2}}{(1-|z|)^{\mu}} \right\} \right)^{-1} \text{ quand } |z| \to 1^- \text{ le long } z \in \Gamma;$$

et donc on peut prendre

$$1 - \frac{|A_1|}{|A_0|} \left(\left| \frac{A_1'}{A_1} \right| + \left| \frac{A_0'}{A_0} \right| \right) > \frac{1}{2} \text{ quand } |z| \to 1^- \text{ le long } z \in \Gamma. \tag{2.19}$$

En combinant (2.16)-(2.19), on obtient

$$\left| \frac{U_j^1}{U_0^1} \right| \leq \left(\exp_n \left\{ \frac{\lambda - \frac{\varepsilon}{2}}{(1-|z|)^{\mu}} \right\} \right)^{-1} \text{ quand } |z| \to 1^- \text{ le long } z \in \Gamma. \tag{2.20}$$

Maintenant d'après (2.14) on a

$$\frac{1}{|U_0^1|} \leq \frac{1}{|A_0| \left(1 - \frac{|A_1|}{|A_0|} \left(\left| \frac{A_1'}{A_1} \right| + \left| \frac{A_0'}{A_0} \right| \right) \right)}. \tag{2.21}$$

De la condition (2.5), on a

$$\lim_{\substack{|z| \to 1^- \\ z \in \Gamma}} \frac{1}{|A_0(z)|} \exp_n \left\{ \frac{\beta}{(1-|z|)^{\mu}} \right\} = 0;$$

et par la même méthode, quand $|z| \to 1^-$ le long $z \in \Gamma$, on obtient

$$\frac{1}{|A_0|} \leq \left(\exp_n\left\{\frac{\beta}{(1-|z|)^\mu}\right\}\right)^{-1}. \tag{2.22}$$

En utilisant (2.19) et (2.22) dans (2.21), on obtient

$$\frac{1}{|U_0^1|} \leq \left(\exp_n\left\{\frac{\beta-\frac{\varepsilon}{2}}{(1-|z|)^\mu}\right\}\right)^{-1} \quad \text{quand } \ |z| \to 1^- \text{ le long } z \in \Gamma. \tag{2.23}$$

(2.20) et (2.23) impliquent que (2.13) est satisfait pour $i = 1$. Maintenant, on suppose que (2.13) est satisfait pour $i = m$; ce qui implique, quand $|z| \to 1^-$ le long $z \in \Gamma$, les inégalitées suivantes

$$\left|\frac{U_j^m}{U_0^1}\right| \leq \left(\exp_n\left\{\frac{\beta-\varepsilon}{(1-|z|)^\mu}\right\}\right)^{-1}$$

et

$$\frac{1}{|U_0^m|} \leq \left(\exp_n\left\{\frac{\beta-\varepsilon}{(1-|z|)^\mu}\right\}\right)^{-1}.$$

D'après (2.12), on obtient

$$\left|U_j^{m+1}\right| \leq \left|U_j^m\right| + \left|U_{j+1}^m\right| \left(\left|\frac{U_{j+1}^{m\prime}}{U_{j+1}^m}\right| + \left|\frac{U_0^{m\prime}}{U_0^m}\right|\right)$$

et

$$\frac{1}{\left|U_0^{m+1}\right|} \leq \frac{1}{|U_0^m|\left(1 - \frac{|U_1^m|}{|U_0^m|}\left(\left|\frac{U_1^{m\prime}}{U_1^m}\right| + \left|\frac{U_0^{m\prime}}{U_0}\right|\right)\right)}.$$

Par la même méthode utilisé précemmént dans (2.14)-(2.23) et en prennant en considération $\sigma_n\left(U_j^i\right) \leq \max_{0\leq j\leq k-1}\left\{\sigma_n\left(A_j\right)\right\}$, on obtient

$$\frac{\left|U_j^{m+1}\right|}{\left|U_0^{m+1}\right|} \leq \left(\exp_n\left\{\frac{\beta-\frac{\varepsilon}{2}}{(1-|z|)^\mu}\right\}\right)^{-1}$$

et

$$\frac{1}{\left|U_0^{m+1}\right|} \leq \left(\exp_n \left\{ \frac{\beta - \frac{\varepsilon}{2}}{(1-|z|)^{\mu}} \right\}\right)^{-1};$$

ce qui implique que (2.13) est satisfait pour $i = m+1$. Ce qui termine la preuve.

Lemme 2.2.6 *Soient $A_0(z), ..., A_{k-1}(z)$ des fonctions méromorphes, d'ordre fini, dans le disque unité D et satisfaisant la condition (2.3). Alors, pour tout constant $\mu > 0$, la suite $\left\{U_j^i\right\}$ definie par (2.12) satisfait*

$$\lim_{\substack{|z|\to 1^- \\ z\in\Gamma}} \frac{\sum_{j=1}^{k-1} \left|U_j^i(z)\right| + 1}{\left|U_0^i(z)\right|(1-|z|)^{\mu}} = 0, \quad |z| \notin E. \tag{2.24}$$

Preuve. Par induction sur $i \in \mathbb{N}$. Pour $i = 0$, on a $U_j^0 = A_j$; ce cas est évident parce qu'on a (2.3). Pour $i = 1$, d'après l'hypothèse (2.3), on a

$$\lim_{\substack{|z|\to 1^- \\ z\in\Gamma}} \frac{|A_j(z)|}{|A_0(z)|(1-|z|)^{\mu}} = 0, \quad (j = 1, ..., k) \tag{2.25}$$

et

$$\lim_{\substack{|z|\to 1^- \\ z\in\Gamma}} \frac{1}{|A_0(z)|(1-|z|)^{\mu}} = 0. \tag{2.26}$$

(2.25) signifie que pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe $0 < r_0 < 1$ tel que pour tout $z \in \gamma$ avec $r_0 < |z| = r < 1$ on a

$$\frac{|A_j(z)|}{|A_0(z)|(1-|z|)^{\mu}} < \varepsilon_0.$$

En particulier pour $\varepsilon_0 = 1$, on a

$$\frac{|A_j(z)|}{|A_0(z)|} < (1-|z|)^{\mu} \quad \text{pour tout constant } \mu > 0. \tag{2.27}$$

La même méthode pour (2.26); on obtient

$$\frac{1}{|A_0(z)|} < (1-|z|)^{\mu} \quad \text{pour tout constant } \mu > 0. \tag{2.28}$$

Posant $\sigma_1 = \max_{0\leq j\leq k-1}\{\sigma_1(A_j)\}$. D'après Lemme 2.2.3, on a

$$\left|\frac{A_j'}{A_j}\right| \leq \frac{1}{(1-|z|)^{\sigma_1+2+\varepsilon}},\ |z| \notin E. \tag{2.29}$$

Donc, d'après (2.27) et (2.29), on obtient

$$\frac{|A_1|}{|A_0|}\left(\left|\frac{A_1'}{A_1}\right| + \left|\frac{A_0'}{A_0}\right|\right) \leq \frac{(1-|z|)^{\mu}}{(1-|z|)^{\sigma_1+2+\varepsilon}};$$

et puisqu'on a pour tout constant $\mu > 0$, donc on peut choisir $\mu > \sigma_1 + 2 + \varepsilon$; alors, quand $|z| \to 1^-$ le long $z \in \Gamma$, on peut prendre

$$1 - \frac{|A_1|}{|A_0|}\left(\left|\frac{A_1'}{A_1}\right| + \left|\frac{A_0'}{A_0}\right|\right) > \frac{1}{2}. \tag{2.30}$$

En combinant (2.27)-(2.30) avec (2.16), on obtient

$$\left|\frac{U_j^1}{U_0^1}\right| \leq (1-|z|)^{\mu'} \quad \text{pour tout constant } \mu' > 0. \tag{2.31}$$

En combinant aussi (2.28)-(2.30) avec (2.21) on obtient

$$\left|\frac{1}{U_0^1}\right| \leq (1-|z|)^{\mu'} \quad \text{pour tout constant } \mu' > 0. \tag{2.32}$$

(2.31) et (2.32) implique que (2.24) est vérifiée pour $i = 1$. Maintenant, on suppose que (2.24) est satisfait pour $i = m$; qui implique quand $|z| \to 1^-$ le long $z \in \Gamma$, on a

$$\left|\frac{U_j^m}{U_0^1}\right| \leq (1-|z|)^{\mu} \quad \text{pour tout constant } \mu > 0$$

et

$$\frac{1}{|U_0^m|} \leq (1-|z|)^{\mu} \quad \text{pour tout constant } \mu > 0.$$

Par la même méthode précédente, on obtient

$$\frac{\left|U_j^{m+1}\right|}{\left|U_0^{m+1}\right|} \leq (1-|z|)^{\mu'} \quad \text{pour tout constant } \mu' > 0$$

et

$$\frac{1}{\left|U_0^{m+1}\right|} \leq (1-|z|)^{\mu'} \quad \text{pour tout constant } \mu' > 0;$$

qui implique que (2.24) est satisfait pour $i = m+1$. Ce qui acheve la preuve.

Lemme 2.2.7 *Soient $G \not\equiv 0, H_j(z)$ $j = 0, 1, ..., k-1$ des fonctions méromorphes dans le disque unité D. Si f est une solution méromorphe de l'équation différentielle*

$$f^{(k)} + H_{k-1}(z) f^{(k-1)} + ... + H_1(z) f' + H_0(z) f = G(z),$$

satisfait $\max\{\sigma_n(G), \sigma_n(H_j);\ j = 0, 1, ..., k-1\} < \sigma_n(f)$, *alors*

$$\overline{\lambda_n}(f) = \lambda_n(f) = \sigma_n(f), \ (n \in \mathbb{N} - \{0\}).$$

Preuve. Le même raisonnement de la preuve du Lemme 3.5 dans [10] lorsque $G \not\equiv 0$, $H_j(z)$ $j = 0, 1, ..., k-1$ sont analytique dans le disque unité D.

Lemme 2.2.8 *Soit $A(z)$ une fonctions analytiques dans le disque unité D, $\mu > 1$ est une constante réelle, a et ω_0 deux nombres complexes tels que $a \neq 0$, $|z_0| = 1$. Soit $g(z) = A(z) \exp_n \left\{ \frac{a}{(\omega_0 - z)^{\mu}} \right\}$, $(n \in \mathbb{N} - \{0\})$, $a = \alpha + i\beta \neq 0$, $\omega_0 - z = Re^{i\varphi}$, $\delta_a(\varphi) = \alpha\cos(\mu\varphi) + \beta\sin(\mu\varphi)$, et $H = \{\varphi \in [0, 2\pi) : \delta_a(\varphi) = 0\}$, (évidemment, H est de mesure linéaire nulle).*

Si $A(z)$ est analytique au point z_0, alors pour tout $\varepsilon > 0$ donné et pour tout $\varphi \in [0, 2\pi) \backslash H$, il existe $R_0 > 0$ tel que pour $z \in D$ avec $0 < R < R_0$, on a *(i) si* $\delta_a(\varphi) > 0,$ *alors*

$$\exp_n\left\{(1-\varepsilon)\,\delta_a(\varphi)\,\frac{1}{R^\mu}\right\} \leq |g(z)| \leq \exp_n\left\{(1+\varepsilon)\,\delta_a(\varphi)\,\frac{1}{R^\mu}\right\}, \qquad (2.33)$$

(ii) si $\delta_a(\varphi) < 0,$ *alors*

$$\exp_n\left\{(1+\varepsilon)\,\delta_a(\varphi)\,\frac{1}{R^\mu}\right\} \leq |g(z)| \leq \exp_n\left\{(1-\varepsilon)\,\delta_a(\varphi)\,\frac{1}{R^\mu}\right\}. \qquad (2.34)$$

Preuve 2.2.1 *La même méthode utilisée dans la preuve du cas particulier* $n = 1$ *dans [20, Lemme 2.2].*

Remarque 2.2.1 *[20] En général, nous pouvons écrire* $\delta_a(\varphi) = c\cos(\mu\varphi + \varphi_0)$, *où* $c = \sqrt{\alpha^2+\beta^2},\ \varphi_0 \in [0, 2\pi)$. *Par cette formule, il est facile de prouver que si* $\mu > 1,\ \delta_a(\varphi)$ *change de signe dans chaque intervalle* (φ_1, φ_2) *de mesure linéaire est égale à* π.

2.3 Preuve du Théorème 2.1.6

On suppose $f \not\equiv 0$ est une solution méromorphe de (2.2) et $\varphi(z) \not\equiv 0$ est une fonction méromorphe d'ordre fini dans le disque unité D. On montre premièrement (2.4) pour $i = 0$, i.e. $\overline{\lambda_1}(f-\varphi) = \lambda_1(f-\varphi) = \sigma_1(f) = \infty$. D'après [21, Theorem 1] et Remarque 2.1.1, on a $\sigma_1(f) = \infty$. Posant $g = f - \varphi$. Puisque $\sigma_1(\varphi) < \infty$, alors $\sigma_1(g) = \sigma_1(f) = \infty$. Du Lemme 2.2.1, g satisfait (2.10). Posons $G(z) = \varphi^{(k)} + A_{k-1}\varphi^{(k-1)} + ... + A_0\varphi$. Si $G \equiv 0$, alors par [21, Theorem 1] et Remarque 2.1.1, on a $\sigma_1(\varphi) = \infty$, contradiction; donc $G \not\equiv 0$. Maintenant, puisque $\sigma_1(g) = \sigma_1(f) = \infty > \max\{\sigma_1(G), \sigma_1(A_j)\}$, alors les conditions du Lemme 2.2.7 sont vérifiées pour l'équation différentielle (2.10); alors on a $\overline{\lambda_1}(g) = \lambda_1(g) = \sigma_1(g)$. Donc, on conclut que $\overline{\lambda_1}(f-\varphi) = \lambda_1(f-\varphi) = \sigma_1(f) = \infty$. Maintenant, on montre (2.4) pour $i \geq 1$. Posant $g_i = f^{(i)} - \varphi$. puisque $\sigma_1\left(f^{(i)}\right) = \sigma_1(f) = \infty$ et $\sigma_1(\varphi) < \infty$, alors on a $\sigma_1(g_i) = \sigma_1(f) = \infty$. Du Lemme 2.2.2, g_i satisfait

(2.11). Posons $G_i = \varphi^{(k)} + U^i_{k-1}\varphi^{(k-1)} + ... + U^i_0\varphi$. Si $G_i \equiv 0$, du Lemme 2.2.6 et [21, Theorem 1] et Remarque 2.1.1, on obtient $\sigma_1(\varphi) = \infty$, contradiction; donc $G_i \not\equiv 0$. Maintenant, d'après Lemme 2.2.7, on obtient $\overline{\lambda_1}(g_i) = \lambda_1(g_i) = \sigma_1(g_i)$ i.e. $\overline{\lambda_1}\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \lambda_1\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \sigma_1(f) = \infty$.

2.4 Preuve du Théorème 2.1.7

On suppose $f \not\equiv 0$ est une solution méromorphe de l'équation (2.2) et $\varphi(z) \not\equiv 0$ est une fonction méromorphe dans le disque unité D satisfait $\sigma_{n+1}(\varphi) < \mu$. On commence à montrer (2.6) pour $i = 0$, i.e. $\overline{\lambda_{n+1}}(f - \varphi) = \lambda_{n+1}(f - \varphi) = \sigma_{n+1}(f) \geq \mu$. D'après [21, Theorem 2] et Remarque 2.1.1, on a $\sigma_{n+1}(f) \geq \mu$. Posons $g = f - \varphi$. Puisque $\sigma_{n+1}(\varphi) < \mu$, on a $\sigma_{n+1}(g) = \sigma_{n+1}(f)$. Du Lemme 2.2.1, g satisfait (2.10). Posons $G(z) = \varphi^{(k)} + A_{k-1}\varphi^{(k-1)} + ... + A_0\varphi$. Si $G \equiv 0$, alors par [21, Theorem 2] et Remarque 2.1.1, on a $\sigma_{n+1}(\varphi) \geq \mu$, contradiction; donc $G \not\equiv 0$. Comme $\sigma_{n+1}(g) = \sigma_{n+1}(f) \geq \mu > \max\{\sigma_{n+1}(G), \sigma_{n+1}(A_j)\}$, alors les conditions du Lemme 2.2.7 sont satisfaits; par conséquent $\overline{\lambda_{n+1}}(g) = \lambda_{n+1}(g) = \sigma_{n+1}(g)$. Alors, on conclut que $\overline{\lambda_{n+1}}(f - \varphi) = \lambda_{n+1}(f - \varphi) = \sigma_{n+1}(f) \geq \mu$. Maintenant, on montre (2.6) pour $i \geq 1$. Posons $g_i = f^{(i)} - \varphi$. Puisque $\sigma_{n+1}\left(f^{(i)}\right) = \sigma_{n+1}(f) \geq \mu$ et $\sigma_{n+1}(\varphi) < \mu$, alors on a $\sigma_{n+1}(g_i) = \sigma_{n+1}(f) \geq \mu$. D'après Lemme 2.2.2, g_i satisfait (2.11). Posons $G_i = \varphi^{(k)} + U^i_{k-1}\varphi^{(k-1)} + ... + U^i_0\varphi$. Si $G_i \equiv 0$, par Lemme 2.2.5 et [21, Theorem 2] et Remarque 2.1.1, on obtient $\sigma_{n+1}(\varphi) \geq \mu$, contradiction; d'où $G_i \not\equiv 0$. Maintenant, du Lemme 2.2.7, on obtient $\overline{\lambda_{n+1}}(g_i) = \lambda_{n+1}(g_i) = \sigma_{n+1}(g_i)$ i.e. $\overline{\lambda_{n+1}}\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \lambda_{n+1}\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \sigma_{n+1}(f) \geq \mu$.

2.5 Preuve du Corollaire 2.1.5

Du Lemme 2.2.8 et la Remarque 2.2.1, puisque $\alpha > 1$, il existe un intervalle $(\varphi_1, \varphi_2) \subset \left(\arg\omega_0 - \frac{\pi}{2}, \arg\omega_0 + \frac{\pi}{2}\right)$, tel que pour tout $\varphi \in (\varphi_1, \varphi_2)$ on a $\delta_b(\varphi) > 0$

et

$$\exp_n \left\{ (1-\varepsilon)\, \delta_b(\varphi) \frac{1}{R^\mu} \right\} \leq \left| A_0(z)\, e^{\dfrac{b}{(z_0 - z)^\alpha}} \right|. \tag{2.35}$$

Comme $A_1(z), ..., A_{k-1}(z)$ sont analytiques en ω_0 alors quand $z \to \omega_0$ avec $\arg z = \varphi \in (\varphi_1, \varphi_2)$, on a

$$|A_j(z)| \leq \lambda, \; j = 1, ..., k-1, \tag{2.36}$$

où $\lambda > 0$. De (2.35) et (2.36), il est claire que la condition (2.5) est satisfait en prenant $\Gamma = \{z \in D : \arg(\omega_0 - z) \in (\varphi_1, \varphi_2)\}$ et $0 < \beta < \frac{1}{2}\delta_b(\varphi)$.

2.6 Preuve du Corollaire 2.1.6

Il y a deux cas à traiter:

i) 1er cas $\arg a \neq \arg b$.

Du Lemme 2.2.8 et la Remarque 2.2.1, puisque $\alpha > 1$ et $\arg a \neq \arg b$, il existe un intervalle $(\varphi_1, \varphi_2) \subset \left(\arg z_0 - \frac{\pi}{2}, \arg z_0 + \frac{\pi}{2}\right)$, tel que pour tout $\varphi \in (\varphi_1, \varphi_2)$ on a $\delta_b(\varphi) > 0, \; \delta_a(\varphi) < 0$ et

$$\exp \left\{ (1-\varepsilon)\, \delta_b(\varphi) \frac{1}{R^\mu} \right\} \leq \left| B_0(z)\, e^{\dfrac{b}{(\omega_0 - z)^\alpha}} \right|, \tag{2.37}$$

$$\left| B_1(z)\, e^{\dfrac{a}{(\omega_0 - z)^\alpha}} \right| \leq \exp \left\{ (1-\varepsilon)\, \delta_a(\varphi) \frac{1}{R^\mu} \right\}. \tag{2.38}$$

De (2.37) et (2.38), c'est facille à vérifier que la condition (2.5) est satisfait en prenant $\Gamma = \{z \in D : \arg(\omega_0 - z) \in (\varphi_1, \varphi_2)\}$ et $0 < \beta < \frac{1}{2}\delta_b(\varphi)$.

ii) 2ème cas $a = cb \; (0 < c < 1)$.

Aussi du Lemme 2.2.8 et la Remarque 2.2.1, come $\alpha > 1$ et $a = cb$, il existe un intervalle $(\varphi_1, \varphi_2) \subset \left(\arg z_0 - \frac{\pi}{2}, \arg z_0 + \frac{\pi}{2}\right)$, tel que pour tout $\varphi \in (\varphi_1, \varphi_2)$ on a

$\delta_a(\varphi) = c\delta_b(\varphi) > 0$ et

$$\exp\left\{(1-\varepsilon)\,\delta_b(\varphi)\,\frac{1}{R^{\mu}}\right\} \le \left|B_0(z)\,e^{\dfrac{b}{(\omega_0 - z)^{\alpha}}}\right|, \tag{2.39}$$

$$\left|B_1(z)\,e^{\dfrac{a}{(\omega_0 - z)^{\alpha}}}\right| \le \exp\left\{(1+\varepsilon)\,\delta_a(\varphi)\,\frac{1}{R^{\mu}}\right\}. \tag{2.40}$$

De (2.39) et (2.40), la condition (2.5) est satisfait en prenant $\Gamma = \{z \in D : \arg(\omega_0 - z) \in (\varphi_1, \varphi_2)\}$ et $0 < \varepsilon < \frac{1-c}{1+c}$ avec $0 < \beta < ((1-\varepsilon) - (1+\varepsilon)\,c)\,\delta_b(\varphi)$.

Chapitre 3

Exposant de convergence des solutions des équations différentielles linéaires dans le disque unité et la notion [p,q]-ordre

3.1 Introduction

Considérons l'équation différentielle

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + ... + A_1(z) f' + A_0(z) f = 0 \tag{3.1}$$

où $A_j(z)$ des fonctions entières ou méromorphes dans le plan complexe et dans le disque unité $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Récemment Xu, Tu et Zheng ont étudié la croissance et la distribution des zéros de $f^{(i)} - \varphi$ où $f \not\equiv 0$ est une solution de l'equation (3.1) et φ est une fonction de petite croissance devant f au voisinage de ∞.

Ils ont démontrer les résultats suivantss

Théorème 3.1.1 *[36] Soient* $A_j(z)$ $j = 0, 1, ..., k-1$ *des fonctions entières d'ordre fini, satisfaisant l'une des deux conditions suivantes:*
(i) $\max\{\sigma(A_j) : j = 1, 2, ..., k-1\} < \sigma(A_0) < \infty$*;*
(ii) $0 < \sigma(A_{k-1}) = ... = \sigma(A_1) = \sigma(A_0) < \infty$ *et* $\max\{\tau(A_j) : j = 1, 2, ..., k-1\} = \tau_1 < \tau(A_0) = \tau$*.*
Alors pour chaque solution $f \not\equiv 0$ *de (3.1) et pour toute fonction entière* $\varphi(z) \not\equiv 0$ *satisfait* $\sigma_2(\varphi) < \sigma(A_0)$*, on a*

$$\overline{\lambda}_2\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \lambda_2\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \sigma_2(f) = \sigma(A_0) \quad (i \in \mathbb{N}).$$

En 2013, Latreuch et Belaidi [32] ont obtenus les resultats suivants:

Théorème 3.1.2 *[32] Soient* $p \geq q \geq 1$ *des entiers et* $A_j(z)$ $j = 0, 1, ..., k-1$ *des fonctions analytiques dans le disque unité* D *vérifiant*

$$\max\left\{\sigma_{[p,q]}(A_j) : j = 1, 2, ..., k-1\right\} < \sigma_{[p,q]}(A_0).$$

Si $f \not\equiv 0$ *est une solution de (3.1), alors* $\sigma_{[p,q]}(f) = \infty$ *et*

$$\sigma_{[p,q]}(A_0) \leq \sigma_{[p+1,q]}(f) \leq \max\left\{\sigma_{M,[p,q]}(A_j) : j = 0, 1, ..., k-1\right\}.$$

De plus, si $p > q$*, alors*

$$\sigma_{[p+1,q]}(f) = \sigma_{[p,q]}(A_0).$$

Théorème 3.1.3 *[32] Soit* $p \geq q \geq 1$ *des entiers. Supposons que* $A_j(z)$ $j = 0, 1, ..., k-1$ *satisfaient les hypothèses du Théorème 3.1.2, et soit* $\varphi(z) \not\equiv 0$ *une fonction analytique dans* D *tel que* $\sigma_{[p,q]}(\varphi) < \infty$*. Alors, chaque solution* $f \not\equiv 0$ *de (3.1) satisfait*

$$\overline{\lambda}_{[p,q]}(f - \varphi) = \lambda_{[p,q]}(f - \varphi) = \sigma_{[p,q]}(f) = \infty$$

et

$$\overline{\lambda}_{[p+1,q]}(f-\varphi)=\lambda_{[p+1,q]}(f-\varphi)=\sigma_{[p+1,q]}(f).$$

Dans ce chapitre, nous allons continuer cette investigation pour étudier l'exposant de convergence de $f^{(i)}-\varphi$ pour tout $i\in\mathbb{N}$ et nous allons aussi étudier le cas où $\max\left\{\sigma_{[p,q]}(A_j):j=1,2,...,k-1\right\}=\sigma_{[p,q]}(A_0)$.

Avant d'énoncer nos résultats, nous donnons quelques définitions et notations dont on aura besoin par la suite.

3.2 Quelques définitions et Notations

3.2.1 $[p,q]$-ordre d'une fonction méromorphe et analytique dans le disque unité

Cette notion a été introduite pour la première fois pour les fonctions entières par Juneja, Kapoor et Bajpai dans [28, 29].

Définition 3.2.1 *[4] Soient f une fonction méromorphe dans le disque unité D et $p\geq q\geq 1$ des entiers. Alors, $[p,q]$-order de f est défini par*

$$\sigma_{[p,q]}(f)=\limsup_{r\to 1^-}\frac{\log_p^+ T(r,f)}{\log_q\left(\frac{1}{1-r}\right)},$$

où $\log_1^+(x)=\log^+(x)=\max\{\log x,0\}$, $\log_{n+1}^+(x)=\log^+\log_n^+(x)$ et $T(r,f)$ est la fonction caractéristique de R. Nevanlinna de f.

Si f est une fonction analytique dans D. Alors, on a aussi

$$\sigma_{M,[p,q]}(f)=\limsup_{r\to 1^-}\frac{\log_{p+1}^+ M(r,f)}{\log_q\left(\frac{1}{1-r}\right)},$$

où $M(r,f)=\max_{|z|=r}|f(z)|$. pour $p\geq q\geq 1$.

Proposition 3.2.1 *[4] Soit $p \geq q \geq 1$ des entiers et f est une fonction analytique dans D, alors*

(1) si $p = q$, on a

$$\sigma_{[p,q]}(f) \leq \sigma_{M,[p,q]}(f) \leq 1 + \sigma_{[p,q]}(f),$$

(2) et si $p > q$, on a

$$\sigma_{[p,q]}(f) = \sigma_{M,[p,q]}(f).$$

Preuve D'après l'inéqualités de [30, p. 26]

$$T(r,f) \leq \log^{+} M(r,f) \leq \frac{R+r}{R-r} T(R,f),$$

et en prennant $R = \frac{1+r}{2}$, on peut obtenir (1) et (2) . ■

3.2.2 $[p,q]$-exposant de convergence d'une fonction méromorphe dans le disque unité

Définition 3.2.2 *[32] Soit f une fonction méromorphe dans le disque unité. On définit le $[p,q]$-exposant de convergence des zéros de la fonction f par*

$$\lambda_{[p,q]}(f) = \limsup_{r \to 1^-} \frac{\log_p N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log_q \left(\frac{1}{1-r}\right)}.$$

On définit aussi le $[p,q]$-exposant de convergence des zéros distincts de la fonction f par

$$\overline{\lambda}_{[p,q]}(f) = \limsup_{r \to 1^-} \frac{\log_p \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log_q \left(\frac{1}{1-r}\right)}.$$

3.2.3 $[p,q]$-type d'une fonction méromorphe et analytique dans le disque unité

Définition 3.2.3 *[32] Soit f une fonction méromorphe dans le disque unité D avec $0 < \sigma_{[p,q]}(f) = \sigma < \infty$. On définit le $[p,q]$-type de f par*

$$\tau_{[p,q]}(f) = \limsup_{r \to 1^-} \frac{\log_{p-1}^{+} T(r,f)}{\left(\log_{q-1} \frac{1}{1-r}\right)^{\sigma}};$$

Soit f est une fonction analytique dans le disque unité D avec $0 < \sigma_{M,[p,q]}(f) = \sigma < \infty$, On a une autre définition du $[p,q]$-type de f qui est

$$\tau_{M,[p,q]}(f) = \limsup_{r \to 1^-} \frac{\log_{p}^{+} M(r,f)}{\left(\log_{q-1} \frac{1}{1-r}\right)^{\sigma}}.$$

3.3 Résultats principaux

Pour l'étude de la croissance et la distribution des zéros de $f^{(i)} - \varphi$ où $f \not\equiv 0$ est une solution de l'équation (3.1) avec des coefficients analytiques et méromorphes dans le disque unité, on établit les résultats suivants:

Théorème 3.3.1 *Soient $p \geq q \geq 1$ des entiers et $A_j(z)$ $j = 0, 1, ..., k-1$ des fonctions analytiques dans le disque unité D satisfaisant l'une des deux conditions suivantes :*
(1) $\max\left\{\sigma_{M,[p,q]}(A_j) : j = 1, 2, ..., k-1\right\} < \sigma_{M,[p,q]}(A_0) < \infty;$
(2) $\max\left\{\sigma_{M,[p,q]}(A_j) : j = 1, 2, ..., k-1\right\} \leq \sigma_{M,[p,q]}(A_0) < \infty;$ *et*
$\max\left\{\tau_{M,[p,q]}(A_j) : \sigma_{M,[p,q]}(A_j) = \sigma_{M,[p,q]}(A_0)\right\} < \tau_{M,n}(A_0) < \infty.$
Alors, pour chaque solution $f \not\equiv 0$ de (3.1) et pour toute fonction analytique $\varphi(z) \not\equiv 0$ dans le disque unité D satisfaisant $\sigma_{M,[p+1,q]}(\varphi) < \sigma_{M,[p,q]}(A_0)$ on a

$$\overline{\lambda}_{[p+1,q]}\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \lambda_{[p+1,q]}\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \sigma_{M,[p+1,q]}(f) = \sigma_{M,[p,q]}(A_0), \ (i \in \mathbb{N}) \quad (3.2)$$

où $f^{(0)} = f$.

Maintenant; on étudie le cas où les coefficients de (3.1) sont méromorphes dans le disque unité et on obtient les résultats suivants.

Théorème 3.3.2 *Soient $p > q \geq 1$ des entiers et $A_j(z)$ $j = 0, 1, ..., k-1$ des fonctions méromorphes dans le disque unité D satisfaisant l'une des deux conditions suivantes avec $\delta(\infty, A_0) \liminf_{r \to 1^-} \frac{m(r,A_0)}{T(r,A_0)} > 0$:*
(1) $\max\left\{\sigma_{[p,q]}(A_j) : j = 1, 2, ..., k-1\right\} < \sigma_{[p,q]}(A_0) < \infty$;
(2) $\max\left\{\sigma_{[p,q]}(A_j) : j = 1, 2, ..., k-1\right\} \leq \sigma_{[p,q]}(A_0) < \infty$; *et*
$\max\left\{\tau_{[p,q]}(A_j) : \sigma_{[p,q]}(A_j) = \sigma_{[p,q]}(A_0)\right\} < \tau_{[p,q]}(A_0) < \infty$.
Alors, pour chaque solution $f \not\equiv 0$ de (3.1) et pour toute fonction méromorphe $\varphi(z) \not\equiv 0$ dans le disque unité D satisfait $\sigma_{[p+1,q]}(\varphi) < \sigma_{[p,q]}(A_0)$ on a

$$\overline{\lambda}_{[p+1,q]}\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \lambda_{[p+1,q]}\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \sigma_{[p+1,q]}(f) \geq \sigma_{[p,q]}(A_0), \ (i \in \mathbb{N}) \tag{3.3}$$

où $f^{(0)} = f$.

Il reste le cas $p = q \geq 1$ pour les coefficients meromorphes et même pour les coefficients analytiques en utilisant $[p, q]$-order de $T(r, f)$. Nous pouvons investiguer ces cas comme suit.

Théorème 3.3.3 *Soient $p \geq 1$ un entier et $A_j(z)$ $j = 0, 1, ..., k-1$ des fonctions analytiques dans le disque unité D satisfaisant l'une des deux conditions suivantes:*
(1) $\max\left\{\sigma_{[p,p]}(A_j) : j = 1, 2, ..., k-1\right\} < \sigma_{[p,p]}(A_0) < \infty$;
(2) $\sum_{j \in J} \tau_{[p,p]}(A_j) < \tau_{[p,p]}(A_0) < \infty$; *tel que* $J = \left\{j \neq 0 : \sigma_{[p,p]}(A_j) = \sigma_{[p,p]}(A_0)\right\}$ *et* $\sigma_{[p,p]}(A_j) < \sigma_{[p,p]}(A_0)$ *pour* $j \notin J$.
Alors, pour chaque solution $f \not\equiv 0$ de (3.1) et pour toute fonction analytique $\varphi(z) \not\equiv 0$ dans le disque unité D satisfaisant $\sigma_{[p+1,p]}(\varphi) < \sigma_{[p,p]}(A_0)$ on a

$$\sigma_{[p,p]}(A_0) \leq \overline{\lambda}_{[p+1,p]}\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \lambda_{[p+1,p]}\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \sigma_{[p+1,p]}(f) \leq \alpha_M, \ (i \in \mathbb{N}) \tag{3.4}$$

tel que $\alpha_M = \max\left\{\sigma_{M,[p,p]}(A_j) : j = 0, 1, ..., k-1\right\}$..

Ajoutant la condition $\delta(\infty, A_0) > 0$ dans le Théorème 3.3.3, on obtient le corollaire suivant dans le cas où les coefficients sont méromorphes.

Corollaire 3.3.1 *Soit $p \geq 1$ un entier et $A_j(z)$ $j = 0, 1, ..., k-1$ des fonctions méromorphes dans le disque unité D satisfaisant la condition (1) ou (2) du Théorème 3.3.3 avec $\delta(\infty, A_0) > 0$. Alors, pour chaque solution $f \not\equiv 0$ de (3.1) et pour toute fonction méromorphe $\varphi(z) \not\equiv 0$ dans le disque unité D satisfait $\sigma_{[p+1,p]}(\varphi) < \sigma_{[p,p]}(A_0)$ on a*

$$\overline{\lambda}_{[p+1,p]}\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \lambda_{[p+1,p]}\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \sigma_{[p+1,p]}(f) \geq \sigma_{[p,p]}(A_0), \ (i \in \mathbb{N}).$$

3.4 Lemmes préliminaires

Dans ce chapitre, on utilise les notations suivantes qui ne sont pas nécessairement les mêmes à chaque occurence:

$E \subset (0,1)$ est un ensemble de mesure logarithmique finie i.e $\int\limits_E \frac{dr}{1-r} < \infty$.

$F \subset (0,1)$ est un ensemble de mesure logarithmique infinie i.e $\int\limits_F \frac{dr}{1-r} = \infty$.

$c > 0, \ \varepsilon > 0, \ \sigma \geq 0, \ \sigma_1 \geq 0, \ \tau \geq 0, \ \tau_1 \geq 0$, sont des constants réels.

Lemme 3.4.1 *Soit $h : (0,1) \to (c, \infty)$ une fonction croissante telle que*

$$\limsup_{r \to 1^-} \frac{\log_p h(r)}{\log_q \frac{1}{1-r}} = \alpha, \tag{3.5}$$

(α est une valeur finie ou infinie); alors il existe un ensemble $F \subset (0,1)$ de mesure logarithmique infinie tel que pour tout $r \in F$, on a

$$\lim_{r \to 1^-} \frac{\log_p h(r)}{\log_q \frac{1}{1-r}} = \alpha.$$

Preuve. D'après (3.5), il existe une suite croissante $\{r_m\} \to 1^-$ lorsque $m \to \infty$, satisfaisant $1-\left(1-\frac{1}{m}\right)(1-r_m)<r_{m+1}$ et

$$\lim_{r_m\to 1^-}\frac{\log_p h(r_m)}{\log_q \frac{1}{1-r_m}}=\alpha.$$

Alors, il existe m_0 tel que pour tout $m\geq m_0$ et $r\in I_m=\left[r_m,1-\left(1-\frac{1}{m}\right)(1-r_m)\right]$, on a

$$\frac{\log_p h(r_m)}{\log_q 1/\left[\left(1-\frac{1}{m}\right)(1-r_m)\right]}\leq\frac{\log_p h(r)}{\log_q 1/(1-r)}\leq\frac{\log_p h\left(1-\left(1-\frac{1}{m}\right)(1-r_m)\right)}{\log_q 1/(1-r_m)}. \tag{3.6}$$

La limite des deux côtés de (3.6), lorsque $r_m\to 1^-$, est égale à α; donc pour $r\in I_m$, on a

$$\lim_{r\to 1^-}\frac{\log_p h(r_m)}{\log_q \frac{1}{1-r_m}}=\alpha.$$

Posons $F=\bigcup\limits_{m=m_0}^{\infty} I_m$. Alors

$$m_l(F)=\sum_{m=m_0}^{\infty}\int_{I_m}\frac{dr}{1-r}=\sum_{m=m_0}^{\infty}\log\left(\frac{m}{m-1}\right)=\infty.$$

Lemme 3.4.2 *[16, Theorem 3.1] Soit f une fonctions méromorphe dans le disque unité D telle $f^{(j)}$ ne s'annule pas identiquement. Soit $\varepsilon>0$ une constante; k et j des entiers satisfaisant $k>j\geq 0$ et $d\in(0,1)$. Alors, on a*

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right|\leq\left(\left(\frac{1}{1-|z|}\right)^{(2+\varepsilon)}\max\left\{\log\frac{1}{1-|z|},T(s(|z|),f)\right\}\right)^{k-j},\quad |z|\notin E,$$

tel que $s(|z|)=1-d(1-|z|)$.

Lemme 3.4.3 *[32] Soient $p\geq q\geq 1$ des entiers. Si $A_j(z)$ $j=0,1,...,k-1$ sont des fonctions analytiques dans le disque unité D de $[p,q]$-ordre fini, alors chaque* *solution $f \not\equiv 0$ de (3.1) satisfait*

$$\sigma_{[p+1,q]}(f) = \sigma_{M,[p+1,q]}(f) \leq \max\left\{\sigma_{M,[p,q]}(A_j) : j = 0, 1, ..., k-1\right\}.$$

Lemme 3.4.4 *Soit $f(z)$ une fonction analytique dans le disque unité D avec $\sigma_{M,[p,q]}(f) = \sigma$, $\tau_{M,[p,q]}(f) = \tau$, $0 < \sigma < \infty$, $0 < \tau < \infty$; alors pour chaque β donnée tel que $0 < \beta < \tau$, il existe un ensemble $F \subset (0,1)$ de mesure logarithmique infinie, tel que pour tout $r \in F$, on a*

$$M(r,f) > \exp_p\left\{\beta\left(\log_{q-1}\frac{1}{1-r}\right)^{\sigma}\right\}.$$

Preuve. D'après la définition de $\tau_{M,[p,q]}(f) = \tau$, il existe une suite croissante $\{r_m\} \to 1^-$ satisfaisant $1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)(1 - r_m) < r_{m+1}$ et

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\log_p M(r_m, f)}{\left(\log_{q-1}\frac{1}{1-r_m}\right)^{\sigma}} = \tau.$$

Alors, il existe m_0 tel que pour tout $m \geq m_0$ et pour ε donnée, on a

$$\log_p M(r_m, f) > (\tau - \varepsilon)\left(\log_{q-1}\frac{1}{1-r_m}\right)^{\sigma}. \tag{3.7}$$

Pour β donnée $(0 < \beta < \tau - \varepsilon)$, Alors, il existe m_1 tel que pour tout $m \geq m_1$, on a

$$\left(\log_{q-1}\frac{1-\frac{1}{m}}{1-r}\right)^{\sigma} > \left(\frac{\beta}{\tau-\varepsilon}\right)\left(\log_{q-1}\frac{1}{1-r}\right)^{\sigma}. \tag{3.8}$$

D'après (3.7) et (3.8), pour tout $m \geq \max\{m_0, m_1\}$ et pour $r \in \left[r_m, 1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)(1 - r_m)\right]$, on a

$$\begin{aligned}\log_p M(r,f) &\geq \log_p M(r_m,f) > (\tau-\varepsilon)\left(\log_{q-1}\frac{1}{1-r_m}\right)^{\sigma} > \\ &> (\tau-\varepsilon)\left(\log_{q-1}\frac{1-\frac{1}{m}}{1-r}\right)^{\sigma} > \\ &> \beta\left(\log_{q-1}\frac{1}{1-r}\right)^{\sigma}.\end{aligned}$$

Posons $F=\bigcup\limits_{m=m_2}^{\infty} I_m$ où $I_m=\left[r_m,1-\left(1-\frac{1}{m}\right)(1-r_m)\right]$. Alors, on a

$$m_l(F)=\sum_{m=m_2}^{\infty}\int\limits_{I_m}\frac{dr}{1-r}=\sum_{m=m_2}^{\infty}\log\left(\frac{m}{m-1}\right)=\infty.$$

Lemme 3.4.5 *Soit $f(z)$ une fonction analytique dans le disque unité D avec $\sigma_{M,[p,q]}(f)=\sigma$, $0<\sigma<\infty$, alors pour tout donné β, $0<\beta<\sigma$, il existe un ensemble $F\subset(0,1)$ de mesure logarithmique infinie tel que pour tout $|z|=r\in F$, on a*

$$M(r,f)>\exp_p\left\{\left(\log_{q-1}\frac{1}{1-r}\right)^{\beta}\right\}.$$

Preuve. D'après la définition de $\sigma_{M,[p,q]}(f)=\sigma$, il existe une suite croissante $\{r_m\}\to 1^-$ satisfaisant $1-\left(1-\frac{1}{m}\right)(1-r_m)<r_{m+1}$ et

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\log_{p+1}M(r_m,f)}{\log_q\frac{1}{1-r_m}}=\sigma.$$

Alors, il existe m_0 tel que pour tout $m\geq m_0$ et pour ε donnée, on a

$$\log_{p+1}M(r_m,f)>(\sigma-\varepsilon)\left(\log_q\frac{1}{1-r_m}\right). \tag{3.9}$$

Pour β donnée $(0<\beta<\sigma-\varepsilon)$, Alors, il existe m_1 tel que pour tout $m\geq m_1$, on a

$$\log_q\frac{1-\frac{1}{m}}{1-r}>\left(\frac{\beta}{\sigma-\varepsilon}\right)\log_q\frac{1}{1-r}. \tag{3.10}$$

D'après (3.9) et (3.10), pour tout $m \geq \max\{m_0, m_1\}$ et pour $r \in \left[r_m, 1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)(1 - r_m)\right]$, on a

$$\begin{aligned}
\log_{p+1} M(r, f) &\geq \log_{p+1} M(r_m, f) > (\sigma - \varepsilon) \log_q \frac{1}{1 - r_m} > \\
&> (\sigma - \varepsilon) \log_q \frac{1 - \frac{1}{m}}{1 - r} > \\
&> \beta \left(\log_q \frac{1}{1 - r} \right).
\end{aligned}$$

Posons $F = \bigcup\limits_{m=m_2}^{\infty} I_m$ où $I_m = \left[r_m, 1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)(1 - r_m)\right]$. Alors, on a

$$m_l(F) = \sum_{m=m_2}^{\infty} \int\limits_{I_m} \frac{dr}{1 - r} = \sum_{m=m_2}^{\infty} \log\left(\frac{m}{m - 1}\right) = \infty.$$

Lemme 3.4.6 *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans le disque unité D avec $\sigma_{[p,q]}(f) = \sigma$, $\tau_{[p,q]}(f) = \tau$, $0 < \sigma < \infty$, $0 < \tau < \infty$, alors pour tout donné $0 < \beta < \tau$, il existe un ensemble $F \subset (0, 1)$ de mesure logarithmique infinie tel que pour tout $|z| = r \in F$, on a*

$$T(r, f) > \exp_{p-1}\left\{ \beta \left(\log_{q-1} \frac{1}{1 - r} \right)^{\sigma} \right\}.$$

Preuve. D'après la définition de $\tau_{[p,q]}(f) = \tau$, il existe une suite croissante $\{r_m\} \to 1^-$ satisfaisant $1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)(1 - r_m) < r_{m+1}$ et

$$\lim_{m \to \infty} \frac{\log_{p-1} T(r_m, f)}{\left(\log_{q-1} \frac{1}{1 - r_m}\right)^{\sigma}} = \tau.$$

Alors, il existe m_0 tel que pour tout $m \geq m_0$ et pour ε donnée, on a

$$\log_{p-1} T(r_m, f) > (\tau - \varepsilon) \left(\log_{q-1} \frac{1}{1 - r_m} \right)^{\sigma}. \tag{3.11}$$

Pour β donnée ($0 < \beta < \tau - \varepsilon$), Alors, il existe m_1 tel que pour tout $m \geq m_1$, on a

$$\left(\log_{q-1} \frac{1 - \frac{1}{m}}{1 - r}\right)^{\sigma} > \left(\frac{\beta}{\tau - \varepsilon}\right) \left(\log_{q-1} \frac{1}{1 - r}\right)^{\sigma}. \tag{3.12}$$

D'après (3.11) et (3.12), pour tout $m \geq \max\{m_0, m_1\}$ et pour $r \in \left[r_m, 1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)(1 - r_m)\right]$, on a

$$\begin{aligned} \log_{p-1} T(r, f) &\geq \log_{p-1} T(r_m, f) > (\tau - \varepsilon) \left(\log_{q-1} \frac{1}{1 - r_m}\right)^{\sigma} > \\ &> (\tau - \varepsilon) \left(\log_{q-1} \frac{1 - \frac{1}{m}}{1 - r}\right)^{\sigma} > \\ &> \beta \left(\log_{q-1} \frac{1}{1 - r}\right)^{\sigma}. \end{aligned}$$

Posons $F = \bigcup\limits_{m=m_2}^{\infty} I_m$ où $I_m = \left[r_m, 1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)(1 - r_m)\right]$. Alors, on a

$$m_l(F) = \sum_{m=m_2}^{\infty} \int\limits_{I_m} \frac{dr}{1 - r} = \sum_{m=m_2}^{\infty} \log\left(\frac{m}{m - 1}\right) = \infty.$$

Lemme 3.4.7 *Soit $f(z)$ une fonction meromorphe dans le disque unité D avec $\sigma_{[p,q]}(f) = \sigma$, $0 < \sigma < \infty$; alors pour tout donné $0 < \beta < \sigma$, il existe un ensemble $F \subset (0, 1)$ de mesure logarithmique infinie tel que pour tout $|z| = r \in F$, on a*

$$T(r, f) > \exp_{p-1}\left\{\left(\log_{q-1} \frac{1}{1 - r}\right)^{\beta}\right\}.$$

Preuve. D'après la définition de $\sigma_{[p,q]}(f) = \sigma$, il existe une suite croissante $\{r_m\} \to 1^{-}$ satisfaisant $1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)(1 - r_m) < r_{m+1}$ et

$$\lim_{m \to \infty} \frac{\log_p T(r_m, f)}{\log_q \frac{1}{1 - r_m}} = \sigma.$$

Alors, il existe m_0 tel que pour tout $m \geq m_0$ et pour ε donnée, on a

$$\log_p M(r_m, f) > (\sigma - \varepsilon)\left(\log_{q-1} \frac{1}{1-r_m}\right). \tag{3.13}$$

Pour β donnée $(0 < \beta < \sigma - \varepsilon)$, Alors, il existe m_1 tel que pour tout $m \geq m_1$, on a

$$\log_{q-1} \frac{1-\frac{1}{m}}{1-r} > \left(\frac{\beta}{\sigma - \varepsilon}\right) \log_{q-1} \frac{1}{1-r}. \tag{3.14}$$

D'après (3.13) et (3.14), pour tout $m \geq \max\{m_0, m_1\}$ et pour $r \in \left[r_m, 1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)(1 - r_m)\right]$, on a

$$\begin{aligned}
\log_p T(r, f) &\geq \log_p T(r_m, f) > (\sigma - \varepsilon) \log_{q-1} \frac{1}{1-r_m} > \\
&> (\sigma - \varepsilon) \log_{q-1} \frac{1-\frac{1}{m}}{1-r} > \\
&> \beta \left(\log_{q-1} \frac{1}{1-r}\right)^{\sigma}.
\end{aligned}$$

Posons $F = \bigcup\limits_{m=m_2}^{\infty} I_m$ où $I_m = \left[r_m, 1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)(1 - r_m)\right]$. Alors, on a

$$m_l(F) = \sum_{m=m_2}^{\infty} \int_{I_m} \frac{dr}{1-r} = \sum_{m=m_2}^{\infty} \log\left(\frac{m}{m-1}\right) = \infty.$$

Lemme 3.4.8 *Soit $p \geq q \geq 1$ des entiers et soient $A_j(z)$ $j = 0, 1, ..., k-1$ des fonctions analytiques dans le disque unité D satisfaisant la condition (1) ou (2) du Théorème 3.3.1. Alors, chaque solution $f \not\equiv 0$ de (3.1) satisfait*

$$\sigma_{M,[p+1,q]}(f) = \sigma_{M,[p,q]}(A_0). \tag{3.15}$$

Preuve. On va prouver le cas (2) et par la même méthode on peut montrer le premier cas (1). Supposons qu'on a la condition (2) du Théorème 3.3.1. D'après Lemme 3.4.4, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ensemble $F \subset [0, 1)$ de mesure logarithmique infinie tel que pour $|z| = r \in F$, on a

$$M\left(r, A_0\right) \geq \exp_p \left\{ (\tau - \varepsilon) \left(\log_{q-1} \frac{1}{1-r} \right)^{\sigma} \right\}. \tag{3.16}$$

De la condition (2), il existe un ensemble $E \subset [0, 1)$ de mesure logarithmique finie tel que pour $|z| = r \in [0, 1) - E$, on a

$$M\left(r, A_j\right) \leq \exp_p \left\{ (\tau - 2\varepsilon) \left(\log_{q-1} \frac{1}{1-r} \right)^{\sigma} \right\}, \ j \neq 0, \tag{3.17}$$

où $\varepsilon > 0$ assez petit. Si $\sigma_{M,[p,q]}(f) < \infty$, alors du Lemme 3.4.2, si $p > q$ on a

$$\left| \frac{f^{(j)}(z)}{f(z)} \right| \leq \exp_{p-1} \left\{ \left(\log_{q-1} \frac{1}{1-r} \right)^{(\sigma+\varepsilon)} \right\}, \tag{3.18}$$

et si $p = q$ on a

$$\left| \frac{f^{(j)}(z)}{f(z)} \right| \leq \left(\frac{1}{1-|z|} \right)^{j(2+\varepsilon)} \left(\exp_{p-1} \left\{ \left(\log_{q-1} \frac{1}{1-r} \right)^{(\sigma+\varepsilon)} \right\} \right)^{j},$$

pour $|z| = r \notin E$. De (3.1), on peut écrire

$$|A_0(z)| \leq \left| \frac{f^{(k)}(z)}{f(z)} \right| + |A_{k-1}(z)| \left| \frac{f^{(k-1)}(z)}{f(z)} \right| + ... + |A_1(z)| \left| \frac{f'(z)}{f(z)} \right|. \tag{3.19}$$

Utilisant (3.16)-(3.18) dans (3.19) avec $|z| = r \in F - E$, on obtient une contradiction; donc $\sigma_{M,[p,q]}(f) = \infty$ et alors pour $p \leq q$, on a

$$\max \left\{ \log \frac{1}{1-|z|}, T(s(|z|), f) \right\} = T(s(|z|), f).$$

Du Lemme 3.4.2, on a

$$\left| \frac{f^{(j)}(z)}{f(z)} \right| \leq (T(s(r), f))^{j+\varepsilon}. \tag{3.20}$$

Maintenant, par la combinaison de (3.16)-(3.17) et (3.19)-(3.20), avec $|z| = r \in$

$F-E$, on obtient

$$\exp_p\left\{(\tau-\varepsilon)\left(\log_{q-1}\frac{1}{1-r}\right)^{\sigma}\right\}\leq k\left(T\left(s\left(r\right),f\right)\right)^{k+\varepsilon}\exp_p\left\{(\tau-2\varepsilon)\left(\log_{q-1}\frac{1}{1-r}\right)^{\sigma}\right\}. \tag{3.21}$$

Posons $s(r)=R$. On a $1-r=\frac{1}{d}(1-R)$ et pour $R\in F$, (3.21) devient

$$\exp_p\left\{(\tau-\varepsilon)\left(\log_{q-1}\frac{d}{1-R}\right)^{\sigma}\right\}\leq k\left(T\left(R,f\right)\right)^{k+\varepsilon}\exp_p\left\{(\tau-2\varepsilon)\left(\log_{q-1}\frac{d}{1-R}\right)^{\sigma}\right\}. \tag{3.22}$$

De (3.22), on peut facilement obtenir $\sigma_{M,[p+1,q]}(f)=\sigma_{[p+1,q]}(f)\geq\sigma$. d'autre part, Du Lemme 3.4.3, on a $\sigma_{[p+1,q]}(f)\leq\max\left\{\sigma_{M,[p,q]}(A_j):j=0,1,...,k-1\right\}=\sigma_{M,[p,q]}(A_0)=\sigma$. Donc, on conclut que $\sigma_{M,[p+1,q]}(f)=\sigma_{M,[p,q]}(A_0)$.

Lemme 3.4.9 *Soit $p>q\geq1$ des entiers et soient $A_j(z)$ $j=0,1,...,k-1$ des fonctions méromorphes dans le disque unité D satisfaisant la condition (1) ou (2) du Théorème 3.3.2 avec $\delta(\infty,A_0)>0$. Alors, chaque solution $f\not\equiv0$ de (3.1) satisfait*

$$\sigma_{[p+1,q]}(f)\geq\sigma_{[p,q]}(A_0).$$

Preuve. Pour la condition (1), voir [32, Thm 1.1]. Maintenant, supposons qu'on a la condition (2). Par la définition de $\tau_{[p,q]}(A_0)$ et Lemme 3.4.6, pour tout $\varepsilon>0$, il existe un ensemble $F\subset[0,1)$ de mesure logarithmique infinie tel que pour $|z|=r\in F$, on a

$$T(r,A_0)>\exp_{p-1}\left\{(\tau-\varepsilon)\left(\log_{q-1}\frac{1}{1-r}\right)^{\sigma}\right\}. \tag{3.23}$$

De la condition (2) du Théorème 3.3.2, il existe un ensemble $E\subset[0,1)$ de mesure logarithmique finie tel que pour $|z|=r\in[0,1)-E$, on a

$$T(r,A_j)\leq\exp_{p-1}\left\{(\tau-2\varepsilon)\left(\log_{q-1}\frac{1}{1-r}\right)^{\sigma}\right\}, \tag{3.24}$$

où $\varepsilon > 0$ assez petit. Maintenant, on va suivre les mêmes étapes (3.18)-(3.21) avec

$$m(r, A_0) \le \sum_{j=1}^{k-1} m(r, A_j) + \sum_{j=1}^{k} m\left(r, \frac{f^{(j)}}{f}\right) + O(1),$$

au lieu de (3.19); on en déduit que $\sigma_{[p+1,q]}(f) \ge \sigma$.

Lemme 3.4.10 *Soit $p \ge 1$ un entier et soient $A_j(z)$ $j = 0, 1, ..., k-1$ des fonctions analytiques dans le disque unité D satisfaisant la condition (1) ou (2) du Théorème 3.3.3. Alors, chaque solution $f \not\equiv 0$ de (3.1) satisfait*

$$\sigma_{[p+1,p]}(f) \ge \sigma_{[p,p]}(A_0).$$

Preuve. Pour la condition (1), voir [32, Thm 1.1]. La condition (2) implique (3.23) et (3.24) pour $p = q$, et donc on peut suivre la même méthode de la preuve du Lemme 3.4.8.

Lemme 3.4.11 *Soit $p \ge q \ge 1$ des entiers et soient $A_j(z)$ $j = 0, 1, ..., k-1$ des fonctions analytiques dans le disque unité D satisfaisant*

$$\max\left\{\sigma_{M,[p,q]}(A_j) : j = 1, 2, ..., k-1\right\} = \sigma_1 < \sigma_{M,[p,q]}(A_0) = \sigma < \infty \qquad (3.25)$$

et U_j^i $(j = 0, 1, ..., k)$ $(i \in \mathbb{N})$ sont définies dans (2.12). Alors, pour tout donné $\varepsilon > 0$ satisfaisant $\sigma - 2\varepsilon > \sigma_1$, il existe un ensemble F de mesure logarithmique infinie et un ensemble E de mesure logarithmique finie tel que

$$\left|U_0^i\right| \ge \exp_p\left\{\left(\log_{q-1}\frac{1}{1-r}\right)^{\sigma-\varepsilon}\right\},\ |z| = r \in F, \qquad (3.26)$$

et

$$\left|U_j^i\right| \le \exp_p\left\{\left(\log_{q-1}\frac{1}{1-r}\right)^{\sigma_1+\varepsilon}\right\}.\ j \ne 0,\ r \notin E. \qquad (3.27)$$

Preuve. On va utiliser le raisonnement par récurrence. On commence par (3.27) et $i = 1$. D'après (2.12), on a $U_j^1 = A_j + A_{j+1}\left(\frac{A'_{j+1}}{A_{j+1}} - \frac{A'_0}{A_0}\right)$; et par l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\left|U_j^1\right| \leq |A_j| + |A_{j+1}| \left(\left| \frac{A'_{j+1}}{A_{j+1}} \right| + \left| \frac{A'_0}{A_0} \right| \right). \tag{3.28}$$

D'après la condition (3.25), on a

$$|A_j| \leq \exp_p \left\{ \left(\log_{q-1} \frac{1}{1-r} \right)^{\sigma_1 + \varepsilon/2} \right\} \quad (j \neq 0), \ r \notin E; \tag{3.29}$$

et par Lemme 3.4.2, on obtient

$$\max \left\{ \left| \frac{A'_{j+1}}{A_{j+1}} \right|, \left| \frac{A'_0}{A_0} \right| \right\} \leq \exp_{p-1} \left\{ \left(\log_{q-1} \frac{1}{1-r} \right)^{(\sigma+\varepsilon)} \right\}, \ \varepsilon > 0. \tag{3.30}$$

D'après (3.28)-(3.30), pour r assez proche de 1^-, on obtient

$$\left|U_j^1\right| \leq \exp_p \left\{ \left(\log_{q-1} \frac{1}{1-r} \right)^{\sigma_1 + \varepsilon} \right\}.$$

Maintenant, on suppose que

$$\left|U_j^{i-1}\right| \leq \exp_p \left\{ \left(\log_{q-1} \frac{1}{1-r} \right)^{\sigma_1 + \varepsilon/2} \right\}, \ (j \neq 0). \tag{3.31}$$

De (2.12), on a

$$\left|U_j^i\right| \leq \left|U_j^{i-1}\right| + \left|U_{j+1}^{i-1}\right| \left(\left| \frac{\left(U_{j+1}^{i-1}\right)'}{U_{j+1}^{i-1}} \right| + \left| \frac{\left(U_0^{i-1}\right)'}{U_0^{i-1}} \right| \right). \tag{3.32}$$

En utilisant les propriétés de l'ordre d'une fonction méromorphe dans Lemme 2.2.4 et par induction sur $i \in \mathbb{N}$, on peut conclure que $\sigma_{[p,q]}\left(U_j^i\right) \leq \max\left\{\sigma_{[p,q]}\left(A_j\right)\right\} \leq \max\left\{\sigma_{M,[p,q]}\left(A_j\right)\right\}$ pour chaque $i \in \mathbb{N}$ et $j = 0, 1, ..., k-1$; et par Lemme 3.4.2, on obtient

$$\left| \frac{\left(U_j^i\right)'}{U_j^i} \right| \leq \exp_{p-1} \left\{ \left(\log_{q-1} \frac{1}{1-r} \right)^{(\sigma_1+\varepsilon)} \right\}, \ \varepsilon > 0. \tag{3.33}$$

Par (3.31)-(3.33), on obtient

$$\left|U_j^i\right| \leq \exp_p \left\{ \left(\log_{q-1} \frac{1}{1-r} \right)^{\sigma_1+\varepsilon} \right\} \ (j \neq 0) \,. \tag{3.34}$$

Maintenant, on va montrer (3.26) aussi par induction et on commence par $i = 1$. Comme $0 < \sigma_{M,[p,q]}\left(A_0\right) = \sigma < \infty$, alors par Lemme 3.4.1, il existe un ensemble F de mesure logarithmique infinie tel que pour $|z| = r \in F$ on a

$$\lim_{r \to 1^-} \frac{\log_{p+1}^+ M\left(r, A_0\right)}{\log_q \left(\frac{1}{1-r}\right)} = \sigma$$

et alors, pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe $r_0 \in (0,1)$ tel que pour tout $r \in F$ satisfait $r_0 < r < 1$ et $|A_0| = M\left(r, A_0\right)$ on a

$$|A_0| \geq \exp_p \left\{ \left(\log_{q-1} \frac{1}{1-r} \right)^{\sigma-\varepsilon/2} \right\}. \tag{3.35}$$

Maintenant, on va montrer $\left|U_0^1\right| \geq \exp_p \left\{ \left(\log_{q-1} \frac{1}{1-r} \right)^{\sigma-\varepsilon} \right\}$. D'après (2.12), on a $U_0^1 = A_0 + A_1 \left(\frac{A_1'}{A_1} - \frac{A_0'}{A_0} \right)$; et donc

$$\left|U_0^1\right| \geq |A_0| - |A_1| \left(\left| \frac{A_1'}{A_1} \right| + \left| \frac{A_0'}{A_0} \right| \right). \tag{3.36}$$

En utilisant (3.29)-(3.30) et (3.35) dans (3.36), on obtient

$$\left|U_0^1\right| \geq \exp_p \left\{ \left(\log_{q-1} \frac{1}{1-r} \right)^{\sigma-\varepsilon/2} \right\} - \exp_p \left\{ \left(\log_{q-1} \frac{1}{1-r} \right)^{\sigma_1+\varepsilon/2} \right\}, \tag{3.37}$$

ce qui implique

$$\left|U_0^1\right| \geq \exp_p \left\{ \left(\log_{q-1} \frac{1}{1-r} \right)^{\sigma-\varepsilon} \right\}.$$

Supposons que

$$\left|U_0^{i-1}\right| \geq \exp_p \left\{ \left(\log_{q-1} \frac{1}{1-r} \right)^{\sigma-\varepsilon/2} \right\}, \tag{3.38}$$

et montrons (3.25). D'après (2.12), on obtient

$$\left|U_0^i\right| \geq \left|U_0^{i-1}\right| - \left|U_1^{i-1}\right| \left(\left| \frac{\left(U_1^{i-1}\right)'}{U_1^{i-1}} \right| + \left| \frac{\left(U_0^{i-1}\right)'}{U_0^{i-1}} \right| \right). \tag{3.39}$$

Combinons (3.33), (3.34) et (3.38) avec (3.39), on trouve

$$\left|U_0^i\right| \geq \exp_p \left\{ \left(\log_{q-1} \frac{1}{1-r} \right)^{\sigma - \varepsilon} \right\}.$$

Ce qui termine cette preuve.

Lemme 3.4.12 *Soient $p \geq q \geq 1$ des entiers et soient $A_j(z)$ $j = 0, 1, ..., k-1$ des fonctions analytiques dans le disque unité D satisfaisant*

$$\max \left\{ \sigma_{M,[p,q]}(A_j) : j = 1, 2, ..., k-1 \right\} \leq \sigma_{M,[p,q]}(A_0) = \sigma < \infty$$

et

$$\max \left\{ \tau_{M,[p,q]}(A_j) : \sigma_{M,[p,q]}(A_j) = \sigma_{M,[p,q]}(A_0) \right\} = \tau_1 < \tau_{M,[p,q]}(A_0) = \tau < \infty. \tag{3.40}$$

Alors, pour tout donné $\varepsilon > 0$ satisfaisant $\tau - \tau_1 > 2\varepsilon$, il existe un ensemble F de mesure logarithmique infinie et un ensemble E de mesure logarithmique finie tel que

$$\left|U_0^i\right| \geq \exp_p \left\{ (\tau - \varepsilon) \left(\log_{q-1} \frac{1}{1-r} \right)^{\sigma} \right\}, \quad r \in F, \tag{3.41}$$

et

$$\left|U_j^i\right| \leq \exp_p \left\{ (\tau_1 + \varepsilon) \left(\log_{q-1} \frac{1}{1-r} \right)^{\sigma} \right\}. \quad j \neq 0, \ r \notin E. \tag{3.42}$$

où U_j^i $(j = 0, 1, ..., k)$ $(i \in \mathbb{N})$ sont définies dans (2.12).

Preuve. On va utiliser le raisonnement par récurrence. On commence par (3.42) et $i = 1$. D'après (2.12), on a $U_j^1 = A_j + A_{j+1} \left(\frac{A'_{j+1}}{A_{j+1}} - \frac{A'_0}{A_0} \right)$; et par l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\left|U_j^1\right| \leq |A_j| + |A_{j+1}| \left(\left| \frac{A'_{j+1}}{A_{j+1}} \right| + \left| \frac{A'_0}{A_0} \right| \right). \tag{3.43}$$

D'après la condition (3.40), on a

$$|A_j| \leq \exp_p \left\{ (\tau_1 + \varepsilon/2) \left(\log_{q-1} \frac{1}{1-r} \right)^{\sigma} \right\} \quad (j \neq 0)\,,\ r \notin E; \tag{3.44}$$

et par Lemme 3.4.2, on obtient

$$\max \left\{ \left| \frac{A'_{j+1}}{A_{j+1}} \right|, \left| \frac{A'_0}{A_0} \right| \right\} \leq \exp_{p-1} \left\{ \left(\log_{q-1} \frac{1}{1-r} \right)^{(\sigma+\varepsilon)} \right\},\ \varepsilon > 0. \tag{3.45}$$

D'après (3.43)-(3.45), pour r assez proche de 1^-, on obtient

$$\left|U_j^1\right| \leq \exp_p \left\{ (\tau_1 + \varepsilon) \left(\log_{q-1} \frac{1}{1-r} \right)^{\sigma} \right\}.$$

Maintenant, on suppose que

$$\left|U_j^{i-1}\right| \leq \exp_p \left\{ (\tau_1 + \varepsilon/2) \left(\log_{q-1} \frac{1}{1-r} \right)^{\sigma} \right\},\ (j \neq 0)\,. \tag{3.46}$$

De (2.12), on a

$$\left|U_j^i\right| \leq \left|U_j^{i-1}\right| + \left|U_{j+1}^{i-1}\right| \left(\left| \frac{\left(U_{j+1}^{i-1}\right)'}{U_{j+1}^{i-1}} \right| + \left| \frac{\left(U_0^{i-1}\right)'}{U_0^{i-1}} \right| \right). \tag{3.47}$$

En utilisant les propriétés de l'ordre d'une fonction méromorphe dans Lemme 2.2.4 et par induction sur $i \in \mathbb{N}$, on peut conclure que $\sigma_{[p,q]}\left(U_j^i\right) \leq \max\left\{\sigma_{[p,q]}\left(A_j\right)\right\} \leq \max\left\{\sigma_{M,[p,q]}\left(A_j\right)\right\}$ pour chaque $i \in \mathbb{N}$ et $j = 0, 1, ..., k-1$; et par Lemme 3.4.2, on obtient

$$\left| \frac{\left(U_j^i\right)'}{U_j^i} \right| \leq \exp_{p-1} \left\{ \left(\log_{q-1} \frac{1}{1-r} \right)^{(\sigma+\varepsilon)} \right\},\ \varepsilon > 0. \tag{3.48}$$

Par (3.46)-(3.48), on obtient

$$\left|U_j^i\right| \leq \exp_p\left\{(\tau_1+\varepsilon)\left(\log_{q-1}\frac{1}{1-r}\right)^{\sigma}\right\}\ (j\neq 0)\,. \tag{3.49}$$

Maintenant, on va montrer (3.41) aussi par induction et on commence par $i=1$. Comme $0<\sigma_{M,[p,q]}(A_0)=\sigma<\infty$ et $0<\tau_{M,[p,q]}(A_0)=\tau<\infty$, alors par Lemme 3.4.4, il existe un ensemble F de mesure logarithmique infinie tel que, pour chaque $\varepsilon>0$ il existe $r_0\in(0,1)$ tel que pour tout $r\in F$ satisfait $r_0<r<1$ et $|A_0|=M(r,A_0)$ on a

$$|A_0| \geq \exp_p\left\{(\tau-\varepsilon/2)\left(\log_{q-1}\frac{1}{1-r}\right)^{\sigma}\right\}. \tag{3.50}$$

Maintenant, on va montrer $|U_0^1|\geq \exp_p\left\{(\tau-\varepsilon)\left(\log_{q-1}\frac{1}{1-r}\right)^{\sigma}\right\}$. D'après (2.12), on a $U_0^1=A_0+A_1\left(\frac{A_1'}{A_1}-\frac{A_0'}{A_0}\right)$; et donc

$$\left|U_0^1\right| \geq |A_0|-|A_1|\left(\left|\frac{A_1'}{A_1}\right|+\left|\frac{A_0'}{A_0}\right|\right). \tag{3.51}$$

En utilisant (3.44)-(3.45) et (3.50) dans (3.51), on obtient

$$\left|U_0^1\right| \geq \exp_p\left\{(\tau-\varepsilon/2)\left(\log_{q-1}\frac{1}{1-r}\right)^{\sigma}\right\}-\exp_{p-1}\left\{\left(\log_{q-1}\frac{1}{1-r}\right)^{(\sigma+\varepsilon)}\right\}, \tag{3.52}$$

ce qui implique

$$\left|U_0^1\right| \geq \exp_p\left\{(\tau-\varepsilon)\left(\log_{q-1}\frac{1}{1-r}\right)^{\sigma}\right\}.$$

Supposons que

$$\left|U_0^{i-1}\right| \geq \exp_p\left\{(\tau-\varepsilon/2)\left(\log_{q-1}\frac{1}{1-r}\right)^{\sigma}\right\}, \tag{3.53}$$

et montrons (3.40). D'après (2.12), on obtient

$$\left|U_0^i\right| \geq \left|U_0^{i-1}\right|-\left|U_1^{i-1}\right|\left(\left|\frac{\left(U_1^{i-1}\right)'}{U_1^{i-1}}\right|+\left|\frac{\left(U_0^{i-1}\right)'}{U_0^{i-1}}\right|\right). \tag{3.54}$$

Combinons (3.48), (3.49) et (3.53) avec (3.54), on trouve

$$\left|U_0^i\right| \geq \exp_p \left\{ (\tau - \varepsilon) \left(\log_{q-1} \frac{1}{1-r} \right)^{\sigma} \right\}.$$

Ce qui termine cette preuve.

Lemme 3.4.13 *Soient $p \geq q \geq 1$ des entiers et $A_j(z)$ $j = 0, 1, ..., k-1$ des fonctions méromorphes dans le disque unité D satisfaisant $\delta(\infty, A_0) > 0$ et*

$$\max \left\{ \sigma_{[p,q]}(A_j) : j = 1, 2, ..., k-1 \right\} = \sigma_1 < \sigma_{[p,q]}(A_0) = \sigma < \infty.$$

Alors, pour tout donné $\varepsilon > 0$ tel que $\sigma - 2\varepsilon > \sigma_1$, il existe un ensemble F de mesure logarithmique infinie et un ensemble E de mesure logarithmique finie telles que

$$m\left(r, U_0^i\right) \geq \exp_{p-1} \left\{ \left(\log_{q-1} \frac{1}{1-r} \right)^{\sigma - \varepsilon} \right\}, \quad r \in F, \tag{3.55}$$

et

$$m\left(r, U_j^i\right) \leq \exp_{p-1} \left\{ \left(\log_{q-1} \frac{1}{1-r} \right)^{\sigma_1 + \varepsilon} \right\}, \quad j \neq 0, \ r \notin E. \tag{3.56}$$

Preuve. On va procéder par récurrence. On commence par (3.56) et pour $i = 1$. De (2.12), on a $U_j^1 = A_j + A_{j+1} \left(\frac{A'_{j+1}}{A_{j+1}} - \frac{A'_0}{A_0} \right)$, $j \neq 0$; et par la propriété de la fonction de proximité, on obtient

$$m\left(r, U_j^1\right) \leq m(r, A_j) + m(r, A_{j+1}) + m\left(r, \frac{A'_{j+1}}{A_{j+1}}\right) + m\left(r, \frac{A'_0}{A_0}\right) + O(1).$$

D'après les hypothèses, on a

$$m(r, A_j) \leq T(r, A_j) \leq \exp_{p-1} \left\{ \left(\log_{q-1} \frac{1}{1-r} \right)^{\sigma_1 + \varepsilon/2} \right\}, \quad j \neq 0, \ r \notin E,$$

et en utilisant le théorème de la dérivée logarithmique

$$m\left(r, \frac{A_j'}{A_j}\right) = O\left(\log^+ T\left(r, A_j\right) + \log\frac{1}{1-r}\right),$$

on conclut que

$$m\left(r, U_j^1\right) \leq \exp_{p-1}\left\{\left(\log_{q-1}\frac{1}{1-r}\right)^{\sigma_1+\varepsilon}\right\}, \quad j \neq 0, \ r \notin E.$$

Maintenant supposons que

$$m\left(r, U_j^{i-1}\right) \leq \exp_{p-1}\left\{\left(\log_{q-1}\frac{1}{1-r}\right)^{\sigma_1+\varepsilon/2}\right\}, \quad j \neq 0, \ r \notin E.$$

D'après (2.12), on a

$$m\left(r, U_j^i\right) \leq m\left(r, U_j^{i-1}\right) + m\left(r, U_{j+1}^{i-1}\right) + m\left(r, \frac{\left(U_{j+1}^{i-1}\right)'}{U_{j+1}^{i-1}}\right) + m\left(r, \frac{\left(U_0^{i-1}\right)'}{U_0^{i-1}}\right).$$

En utilisant le théorème de la dérivée logarithmique et du fait que

$$\sigma_{[p,q]}\left(U_j^i\right) \leq \max\left\{\sigma_{[p,q]}\left(A_j\right)\right\} \leq \sigma_{[p,q]}\left(A_0\right) = \sigma$$

pour chaque $i \in \mathbb{N}$ et chaque $j = 0, 1, ..., k-1$, on obtient

$$m\left(r, U_j^i\right) \leq \exp_{p-1}\left\{\left(\log_{q-1}\frac{1}{1-r}\right)^{\sigma_1+\varepsilon}\right\}, \quad j \neq 0, \ r \notin E.$$

Maintenant, on montre (3.55) pour $i = 1$. Du Lemme 3.4.7 et $\delta(\infty, A_0) > 0$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble $F \subset [0, 1)$ de mesure logarithmique infinie tel que pour $|z| = r \in F$, on a

$$m(r, A_0) > \exp_{p-1}\left\{\left(\log_{q-1}\frac{1}{1-r}\right)^{\sigma-\varepsilon}\right\}. \tag{3.57}$$

D'après (2.12), on a $U_0^1 = A_0 + A_1\left(\frac{A_1'}{A_1} - \frac{A_0'}{A_0}\right)$; et par la propriété de la fonction de proximité, on obtient

$$m\left(r, U_0^1\right) \leq m\left(r, A_0\right) + m\left(r, A_1\right) + m\left(r, \frac{A_1'}{A_1}\right) + m\left(r, \frac{A_0'}{A_0}\right) + O\left(1\right). \tag{3.58}$$

D'autre part, d'après (2.12), on a $A_0 = U_0^1 - A_1\left(\frac{A_1'}{A_1} - \frac{A_0'}{A_0}\right)$; et alors

$$m\left(r, A_0\right) \leq m\left(r, U_0^1\right) + m\left(r, A_1\right) + m\left(r, \frac{A_1'}{A_1}\right) + m\left(r, \frac{A_0'}{A_0}\right) + O\left(1\right). \tag{3.59}$$

D'après (3.58)-(3.59), on conclut que $m\left(r, U_0^1\right) \sim m\left(r, A_0\right)$ lorsque $r \to 1^-$ et de (3.57), on obtient

$$m\left(r, U_0^1\right) > \exp_{p-1}\left\{\left(\log_{q-1}\frac{1}{1-r}\right)^{\sigma-\varepsilon}\right\}, \quad r \in F.$$

Si on suppose que

$$m\left(r, U_0^{i-1}\right) \geq \exp_{p-1}\left\{\left(\log_{q-1}\frac{1}{1-r}\right)^{\sigma-\varepsilon}\right\}, \quad r \in F,$$

alors on peut montrer que

$$m\left(r, U_0^{i}\right) \geq \exp_{p-1}\left\{\left(\log_{q-1}\frac{1}{1-r}\right)^{\sigma-\varepsilon}\right\}, \quad r \in F,$$

par (2.12) et la propriété de la fonction de proximité dans (3.58)-(3.59).

Lemme 3.4.14 *Soient $p \geq q \geq 1$ des entiers et $A_j\left(z\right)$ $j = 0, 1, ..., k-1$ des fonctions méromorphes dans le disque unité D satisfaisant*

$$\max\left\{\sigma_{[p,q]}\left(A_j\right) : j = 1, 2, ..., k-1\right\} \leq \sigma_{[p,q]}\left(A_0\right) = \sigma < \infty$$

et

$$\max\left\{\tau_{[p,q]}\left(A_j\right):\sigma_{[p,q]}\left(A_j\right)=\sigma_{[p,q]}\left(A_0\right)\right\}=\tau_1<\tau_{[p,q]}\left(A_0\right)=\tau<\infty$$

avec $\delta\left(\infty,A_0\right)>0$*. Alors, pour tout donné* $\varepsilon>0$ *tel que* $\tau-\tau_1>2\varepsilon$*, il existe un ensemble* F *de mesure logarithmique infinie et un ensemble* E *de mesure logarithmque finie tel que*

$$m\left(r,U_0^i\right)\geq\exp_{p-1}\left\{\left(\tau-\varepsilon\right)\left(\log_{q-1}\frac{1}{1-r}\right)^{\sigma}\right\},\quad r\in F,\tag{3.60}$$

et

$$m\left(r,U_j^i\right)\leq\exp_{p-1}\left\{\left(\tau_1+\varepsilon\right)\left(\log_{q-1}\frac{1}{1-r}\right)^{\sigma}\right\}.\quad j\neq0,\ r\notin E.\tag{3.61}$$

Preuve. On va procéder par récurrence. On commence par (3.61) et pour $i=1$. De (2.12), on a $U_j^1=A_j+A_{j+1}\left(\frac{A'_{j+1}}{A_{j+1}}-\frac{A'_0}{A_0}\right),\ j\neq0$; et par la propriété de la fonction de proximité, on obtient

$$m\left(r,U_j^1\right)\leq m\left(r,A_j\right)+m\left(r,A_{j+1}\right)+m\left(r,\frac{A'_{j+1}}{A_{j+1}}\right)+m\left(r,\frac{A'_0}{A_0}\right)+O\left(1\right).$$

D'après les hypothèses, on a

$$m\left(r,A_j\right)\leq T\left(r,A_j\right)\leq\exp_{p-1}\left\{\left(\tau_1+\varepsilon/2\right)\left(\log_{q-1}\frac{1}{1-r}\right)^{\sigma}\right\},\quad j\neq0,\ r\notin E,$$

et en utilisant le théorème de la dérivée logarithmique

$$m\left(r,\frac{A'_j}{A_j}\right)=O\left(\log^+T\left(r,A_j\right)+\log\frac{1}{1-r}\right),$$

on conclut que

$$m\left(r,U_j^1\right)\leq\exp_{p-1}\left\{\left(\tau_1+\varepsilon\right)\left(\log_{q-1}\frac{1}{1-r}\right)^{\sigma}\right\},\quad j\neq0,\ r\notin E.$$

Maintenant supposons que

$$m\left(r,U_j^{i-1}\right)\leq \exp_{p-1}\left\{(\tau_1+\varepsilon/2)\left(\log_{q-1}\frac{1}{1-r}\right)^{\sigma}\right\},\quad j\neq 0,\ r\notin E.$$

D'après (2.12), on a

$$m\left(r,U_j^{i}\right)\leq m\left(r,U_j^{i-1}\right)+m\left(r,U_{j+1}^{i-1}\right)+m\left(r,\frac{\left(U_{j+1}^{i-1}\right)'}{U_{j+1}^{i-1}}\right)+m\left(r,\frac{\left(U_0^{i-1}\right)'}{U_0^{i-1}}\right).$$

En utilisant le théorème de la dérivée logarithmique et du fait que

$$\sigma_{[p,q]}\left(U_j^{i}\right)\leq \max\left\{\sigma_{[p,q]}\left(A_j\right)\right\}\leq \max\left\{\sigma_{[p,q]}\left(A_j\right)\right\}=\sigma$$

pour chaque $i\in\mathbb{N}$ et chaque $j=0,1,...,k-1$, on obtient

$$m\left(r,U_j^{i}\right)\leq \exp_{p-1}\left\{(\tau_1+\varepsilon)\left(\log_{q-1}\frac{1}{1-r}\right)^{\sigma}\right\},\quad j\neq 0,\ r\notin E.$$

Maintenant, on montre (3.60) pour $i=1$. Du Lemme 3.4.6 et $\delta\left(\infty,A_0\right)>0$, pour tout $\varepsilon>0$, il existe un ensemble $F\subset[0,1)$ de mesure logarithmique infinie tel que pour $|z|=r\in F$, on a

$$m\left(r,A_0\right)>\exp_{p-1}\left\{(\tau-\varepsilon)\left(\log_{q-1}\frac{1}{1-r}\right)^{\sigma}\right\}. \tag{3.62}$$

D'après (2.12), on a $U_0^1=A_0+A_1\left(\frac{A_1'}{A_1}-\frac{A_0'}{A_0}\right)$; et par la propriété de la fonction de proximité, on obtient

$$m\left(r,U_0^{1}\right)\leq m\left(r,A_0\right)+m\left(r,A_1\right)+m\left(r,\frac{A_1'}{A_1}\right)+m\left(r,\frac{A_0'}{A_0}\right)+O\left(1\right). \tag{3.63}$$

D'autre part, d'après (2.12), on a $A_0=U_0^1-A_1\left(\frac{A_1'}{A_1}-\frac{A_0'}{A_0}\right)$; et alors

$$m\left(r,A_0\right)\leq m\left(r,U_0^{1}\right)+m\left(r,A_1\right)+m\left(r,\frac{A_1'}{A_1}\right)+m\left(r,\frac{A_0'}{A_0}\right)+O\left(1\right). \tag{3.64}$$

D'après (3.63)-(3.64), on conclut que $m\left(r,U_0^1\right) \sim m\left(r,A_0\right)$ lorsque $r \to 1^-$ et de (3.62), on obtient

$$m\left(r,U_0^1\right) > \exp_{p-1}\left\{(\tau-\varepsilon)\left(\log_{q-1}\frac{1}{1-r}\right)^{\sigma}\right\},\quad r \in F.$$

Si on suppose que

$$m\left(r,U_0^{i-1}\right) \geq \exp_{p-1}\left\{(\tau-\varepsilon)\left(\log_{q-1}\frac{1}{1-r}\right)^{\sigma}\right\},\quad r \in F,$$

alors on peut montrer que

$$m\left(r,U_0^{i}\right) \geq \exp_{p-1}\left\{(\tau-\varepsilon)\left(\log_{q-1}\frac{1}{1-r}\right)^{\sigma}\right\},\quad r \in F,$$

par (2.12) et la propriété de la fonction de proximité dans (3.63)-(3.64).

Lemme 3.4.15 *Soient $p = q \geq 1$ des entiers et $A_j(z)$ $j = 0,1,...,k-1$ des fonctions analytiques dans le disque unité D satisfaisant*

$$\sum_{j\in J}\tau_{[p,q]}\left(A_j\right) = \tau_1 < \tau_{[p,q]}\left(A_0\right) = \tau < \infty;$$

où $J = \left\{j : \sigma_{[p,q]}\left(A_j\right) = \sigma_{[p,q]}\left(A_0\right)\right\}$ et $\sigma_{[p,q]}\left(A_j\right) < \sigma_{[p,q]}\left(A_0\right)$ pour $j \notin J$. Alors, pour tout donné $\varepsilon > 0$ tel que $\tau - \tau_1 > 2\varepsilon$, il existe un ensemble F de mesure logarithmique infinie et un ensemble E de mesure logarithmique finie tel que

$$m\left(r,U_0^{i}\right) \geq \exp_{p-1}\left\{(\tau-\varepsilon)\left(\log_{q-1}\frac{1}{1-r}\right)^{\sigma}\right\},\quad r \in F,$$

et

$$m\left(r,U_j^{i}\right) \leq \exp_{p-1}\left\{(\tau_1+\varepsilon)\left(\log_{q-1}\frac{1}{1-r}\right)^{\sigma}\right\},\quad j \neq 0,\ r \notin E.$$

Preuve. En remarquant que la condition

$$\sum_{j\in J}\tau_{[p,q]}\left(A_j\right)=\tau_1<\tau_{[p,q]}\left(A_0\right)=\tau<\infty;$$

implique que

$$\max\left\{\tau_{[p,q]}\left(A_j\right):\sigma_{[p,q]}\left(A_j\right)=\sigma_{[p,q]}\left(A_0\right)\right\}=\tau_1<\tau_{[p,q]}\left(A_0\right)=\tau<\infty,$$

alors, on peut suivre la même méthode de la preuve du Lemme 3.4.14.

Lemme 3.4.16 *Soient $p\geq q\geq 1$ des entiers et soient $H_j\left(z\right)$ $j=0,1,...,k-1$ des fonctions méromorphes dans le disque unité D satisfaisant*

$$\max\left\{\left|H_j\left(z\right)\right|,\ j=1,...,k-1\right\}\leq\exp_p\left\{\beta\left(\log_{q-1}\frac{1}{1-r}\right)^{\sigma}\right\}$$

et

$$\left|H_0\left(z\right)\right|\geq\exp_p\left\{\alpha\left(\log_{q-1}\frac{1}{1-r}\right)^{\sigma}\right\}$$

pour $|z|=r\in F\subset(0,1)$ de mesure logarithmique infinie, où $\alpha>\beta>0,\ \sigma>0$. Alors, chaque solution méromorphe f de l'équation différentielle

$$f^{(k)}+H_{k-1}\left(z\right)f^{(k-1)}+...+H_1\left(z\right)f'+H_0\left(z\right)f=0 \tag{3.65}$$

satisfait $\sigma_{[p+1,q]}\left(f\right)\geq\sigma$.

Preuve. Supposons que $f\not\equiv 0$ est une solution méromorphe de l'équation (3.65) avec $\sigma_{[p,q]}\left(f\right)=\rho<\infty$. D'après (3.65), on obtient

$$\left|H_0\left(z\right)\right|\leq\left|\frac{f^{(k)}}{f}\right|+\sum_{j=1}^{k-1}\left|H_j\left(z\right)\right|\left|\frac{f^{(j)}}{f}\right|. \tag{3.66}$$

Du Lemme 3.4.2, pour $\varepsilon>0$ donné, il existe un ensemble $E\subset[0,1)$ de mesure logarithmique finie telle que pour tout $z \in D$ satisfait $|z| = r \notin E$, on a

$$\left| \frac{f^{(j)}(z)}{f(z)} \right| \leq \exp_{p-1} \left\{ \left(\log_{q-1} \frac{1}{1-r} \right)^{\rho+\varepsilon} \right\}. \tag{3.67}$$

De (3.66)-(3.67) et les conditions du Lemme 3.4.16, on obtient

$$\exp_p \left\{ \alpha \left(\log_{q-1} \frac{1}{1-r} \right)^{\sigma} \right\} \leq c \exp_p \left\{ \beta \left(\log_{q-1} \frac{1}{1-r} \right)^{\sigma} \right\} \exp_{p-1} \left\{ \left(\log_{q-1} \frac{1}{1-r} \right)^{\rho+\varepsilon} \right\}, \tag{3.68}$$

où $c > 0$ est une constante. Comme $\beta < \alpha$, l'inégalité (3.68) mène à une contradiction lorsque $r \to 1^-$. Donc, $\sigma_{[p,q]}(f) = \infty$. Maintenant d'après Lemme 3.4.2, on obtient

$$\left| \frac{f^{(j)}(z)}{f(z)} \right| \leq \frac{1}{(1-r)^{j(2+\varepsilon)}} (T(s(r), f))^j, \ r \notin E. \tag{3.69}$$

De (3.66), (3.69) et les conditions de ce Lemme, on obtient

$$\exp_p \left\{ \alpha \left(\log_{q-1} \frac{1}{1-r} \right)^{\sigma} \right\} \leq \frac{c}{(1-r)^{k(2+\varepsilon)}} (T(s(r), f))^k \exp_p \left\{ \beta \left(\log_{q-1} \frac{1}{1-r} \right)^{\sigma} \right\}. \tag{3.70}$$

Posons $s(r) = R$. On a $1 - r = \frac{1}{d}(1-R)$ et pour $R \in F$, (3.70) devient

$$\exp_p \left\{ \alpha \left(\log_{q-1} \frac{d}{1-R} \right)^{\sigma} \right\} \leq c \left(\frac{d}{1-R} \right)^{k(2+\varepsilon)} (T(R, f))^k \exp_p \left\{ \beta \left(\log_{q-1} \frac{d}{1-R} \right)^{\sigma} \right\}. \tag{3.71}$$

D'après (3.71), on déduit que

$$\sigma_{[p+1,q]}(f) \geq \sigma.$$

Ce qui termine la démonstration.

Par la même méthode de la preuve du Lemma 3.4.16, on peut montrer le lemme suivant.

Lemme 3.4.17 *Soient $p \geq q \geq 1$ des entiers et $H_j(z)$ $j = 0, 1, ..., k-1$ des* *fonctions méromorphes dans le disque unité D satisfaisant*

$$\max\{|H_j(z)|,\ j=1,...,k-1\} \leq \exp_p\left\{\left(\log_{q-1}\frac{1}{1-r}\right)^{\beta}\right\}$$

et

$$|H_0(z)| \geq \exp_p\left\{\left(\log_{q-1}\frac{1}{1-r}\right)^{\sigma}\right\}$$

pour $|z| = r \in F \subset (0,1)$ *de mesure logarithmique infinie, où* $\sigma > \beta > 0$*. Alors, chaque solution méromorphe* f *de (3.65) satisfait* $\sigma_{[p+1,q]}(f) \geq \sigma$*.*

Lemme 3.4.18 *Soient* $p \geq q \geq 1$ *des entiers et* $H_j(z)$ $j = 0,1,...,k-1$ *des fonctions méromorphes dans le disque unité D satisfaisant*

$$m(r, H_j) \leq \exp_{p-1}\left\{\beta\left(\log_{q-1}\frac{1}{1-r}\right)^{\sigma}\right\},\ j \neq 0, \tag{3.72}$$

et

$$m(r, H_0) \geq \exp_{p-1}\left\{\alpha\left(\log_{q-1}\frac{1}{1-r}\right)^{\sigma}\right\}, \tag{3.73}$$

où $|z| = r \in F$ *et* $\alpha > \beta > 0$*. Alors, chaque solution méromorphe* f *de (3.65) satisfait* $\sigma_{[p+1,q]}(f) \geq \sigma$*.*

Preuve. D'après (3.65), on a

$$m(r, H_0) \leq \sum_{j=1}^{k-1} m(r, H_j) + \sum_{j=1}^{k} m\left(r, \frac{f^{(j)}}{f}\right) + O(1).$$

En utilisant le théorème de la dérivée logarithmique

$$m\left(r, \frac{f^{(j)}}{f}\right) \leq c\left(\log^+ T(r,f) + \log\frac{1}{1-r}\right)^{j},$$

et par les hypothèses (3.72) et (3.73), on obtient

$$\exp_{p-1}\left\{\alpha\left(\log_{q-1}\frac{1}{1-r}\right)^{\sigma}\right\} \leq (k-1)\exp_{p-1}\left\{\beta\left(\log_{q-1}\frac{1}{1-r}\right)^{\sigma}\right\} +$$

$$c\left(\log^{+} T(r,f)+\log\frac{1}{1-r}\right)^{j}. \tag{3.74}$$

De (3.74), on obtient facilement que $\sigma_{[p+1,q]}(f)\geq\sigma$.

En utilisant la même méthode de la preuve du lemme 3.4.18, on peut prouver le lemme suivant.

Lemme 3.4.19 *Soient $p\geq q\geq 1$ des entiers et $H_j(z)$ $j=0,1,...,k-1$ des fonctions méromorphes dans le disque unité D satisfaisant*

$$m(r,H_0)\geq\exp_{p-1}\left\{\left(\log_{q-1}\frac{1}{1-r}\right)^{\sigma}\right\},$$

et

$$m(r,H_j)\leq\exp_{p-1}\left\{\left(\log_{q-1}\frac{1}{1-r}\right)^{\beta}\right\},\ j\neq 0,$$

où $|z|=r\in F$ et $0<\beta<\sigma$. Alors, chaque solution méromorphe f de (3.65) satisfait $\sigma_{[p+1,q]}(f)\geq\sigma$.

Lemme 3.4.20 *[32] Soient $G(z)\not\equiv 0, H_j(z)$ $j=0,1,...,k-1$ des fonctions méromorphes dans le disque unité D. Si f est une solution méromorphe de l'équation différentielle*

$$f^{(k)}+H_{k-1}(z)f^{(k-1)}+...+H_1(z)f'+H_0(z)f=G(z), \tag{3.75}$$

satisfaisant

$$\max\left\{\sigma_{[p,q]}(G),\sigma_{[p,q]}(H_j);\ j=0,1,...,k-1\right\}<\sigma_{[p,q]}(f),$$

alors

$$\overline{\lambda}_{[p,q]}(f)=\lambda_{[p,q]}(f)=\sigma_{[p,q]}(f),\ (p\geq q\geq 1).$$

3.5 Preuve du Théorème 3.3.1

Supposons que $f \not\equiv 0$ est une solution de l'équation (3.1) et $\varphi(z) \not\equiv 0$ une fonction analytique dans le disque unité D qui satisfait $\sigma_{[p+1,q]}(\varphi) < \sigma_{[p,q]}(A_0)$. On commence par montrer (3.2) pour $i = 0$, i.e.

$$\overline{\lambda}_{[p+1,q]}(f-\varphi) = \lambda_{[p+1,q]}(f-\varphi) = \sigma_{[p+1,q]}(f) = \sigma_{[p,q]}(A_0).$$

Du Lemme 3.4.8, on a $\sigma_{[p+1,q]}(f) = \sigma_{[p,q]}(A_0)$. Posons $g = f - \varphi$. Comme $\sigma_{[p+1,q]}(\varphi) < \sigma_{[p,q]}(A_0)$, alors $\sigma_{[p+1,q]}(g) = \sigma_{[p+1,q]}(f)$. Du Lemme 2.2.1, g satisfait (2.10). On pose

$$G(z) = \varphi^{(k)} + A_{k-1}\varphi^{(k-1)} + ... + A_0\varphi.$$

Si $G \equiv 0$, alors par Lemme 3.4.8, on a $\sigma_{[p+1,q]}(\varphi) = \sigma_{[p,q]}(A_0)$, une contradiction; donc $G \not\equiv 0$. Maintenant, puisque $\sigma_{[p+1,q]}(g) = \sigma_{[p+1,q]}(f) = \sigma_{[p,q]}(A_0) > \max\left\{\sigma_{[p+1,q]}(G), \sigma_{[p+1,q]}(A_j)\right\}$, alors la condition du Lemme 3.4.20 est satisfait et alors on a $\overline{\lambda}_{[p+1,q]}(g) = \lambda_{[p+1,q]}(g) = \sigma_{[p+1,q]}(g)$, i.e

$$\overline{\lambda}_{[p+1,q]}(f-\varphi) = \lambda_{[p+1,q]}(f-\varphi) = \sigma_{[p+1,q]}(f) = \sigma_{[p,q]}(A_0).$$

Maintenant, on montre (3.2) pour $i \geq 1$. Posons $g_i = f^{(i)} - \varphi$. Puisque $\sigma_{[p+1,q]}\left(f^{(i)}\right) = \sigma_{[p+1,q]}(f) = \sigma_{[p,q]}(A_0)$ et $\sigma_{[p+1,q]}(\varphi) < \sigma_{[p,q]}(A_0)$, alors on a $\sigma_{[p+1,q]}(g_i) = \sigma_{[p+1,q]}(f) = \sigma_{[p,q]}(A_0)$. Par Lemme 2.2.2, g_i satisfait (2.11). Posons

$$G_i = \varphi^{(k)} + U^i_{k-1}\varphi^{(k-1)} + ... + U^i_0\varphi.$$

Si $G_i \equiv 0$, du Lemme 3.4.11, Lemme 3.4.12, Lemme 3.4.16 et Lemme 3.4.17, on obtient $\sigma_{[p+1,q]}(\varphi) \geq \sigma_{[p,q]}(A_0)$, une contradiction; donc $G_i \not\equiv 0$. Maintenant, du Lemme 3.4.20, on obtient $\overline{\lambda}_{[p+1,q]}(g_i) = \lambda_{[p+1,q]}(g_i) = \sigma_{[p+1,q]}(g_i)$ i.e.

$$\overline{\lambda}_{[p+1,q]}\left(f^{(i)}-\varphi\right) = \lambda_{[p+1,q]}\left(f^{(i)}-\varphi\right) = \sigma_{[p+1,q]}(f) = \sigma_{[p,q]}(A_0).$$

3.6 Preuve du Théorème 3.3.2

Supposons que $f \not\equiv 0$ est une solution méromorphe de l'équation (3.1) et $\varphi(z) \not\equiv 0$ une fonction méromorphe dans le disque unité D qui satisfait $\sigma_{[p+1,q]}(\varphi) < \sigma_{[p,q]}(A_0)$. Du Lemme 3.4.9, on a $\sigma_{[p+1,q]}(f) \geq \sigma_{[p,q]}(A_0)$. Posons $g = f - \varphi$. Puisque $\sigma_{[p+1,q]}(\varphi) < \sigma_{[p,q]}(A_0)$ alors $\sigma_{[p+1,q]}(g) = \sigma_{[p+1,q]}(f)$. Du Lemme 2.2.1, g satisfait (2.10). On pose $G(z) = \varphi^{(k)} + A_{k-1}\varphi^{(k-1)} + ... + A_0\varphi$. Si $G \equiv 0$, alors du Lemme 3.4.9 on a $\sigma_{[p+1,q]}(\varphi) \geq \sigma_{[p,q]}(A_0)$, contradiction; donc $G \not\equiv 0$; et par Lemme 3.4.20 on obtient le résultat pour $i = 0$. Maintenant pour $i \geq 1$, En utilisant la même notation comme dans la preuve du Théorème 2.1.6 $g_i = f^{(i)} - \varphi$ et $G_i = \varphi^{(k)} + U_{k-1}^i\varphi^{(k-1)} + ... + U_0^i\varphi$; si $G_i \equiv 0$, alors du Lemme 3.4.13, Lemme 3.4.14, Lemme 3.4.18 et Lemme 3.4.19, on a $\sigma_{[p+1,q]}(\varphi) \geq \sigma_{[p,q]}(A_0)$, contradiction; donc $G_i \not\equiv 0$; et du Lemme 3.4.20, on obtient

$$\overline{\lambda}_{[p+1,q]}\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \lambda_{[p+1,q]}\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \sigma_{[p+1,q]}(f) \geq \sigma_{[p,q]}(A_0).$$

3.7 Preuve du Théorème 3.3.3

D'après Lemme 3.4.3 et Lemme 3.4.10, on obtient que chaque solution $f \not\equiv 0$ de l'équation (2.2) satisfait $\sigma_{[p,q]}(A_0) \leq \sigma_{[p+1,q]}(f) \leq \alpha_M$. On utilise la même méthode et notation de la preuve du Théorème 3.3.1. Si $G \equiv 0$, du Lemme 3.4.10, on obtient $\sigma_{[p+1,q]}(\varphi) \geq \sigma_{[p,q]}(A_0)$, contradiction; donc $G \not\equiv 0$; et du Lemme 3.4.20, on obtient

$$\overline{\lambda}_{[p+1,q]}(f - \varphi) = \lambda_{[p+1,q]}(f - \varphi) = \sigma_{[p+1,q]}(f).$$

Si $G_i \equiv 0$, d'après Lemme 3.4.13, Lemme 3.4.15, Lemme 3.4.18 et Lemme 3.4.19, on obtient $\sigma_{[p+1,q]}(\varphi) \geq \sigma_{[p,q]}(A_0)$, contradiction; donc $G_i \not\equiv 0$; et par Lemme 3.4.20, on obtient

$$\overline{\lambda}_{[p+1,q]}\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \lambda_{[p+1,q]}\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \sigma_{[p+1,q]}(f).$$

Conclusion

Dans cette thèse nous nous somme intéressé à l'étude de la croissance et la distribution des zéros et les point fixes des solutions ainsi que leurs dérivées de certaines classes d'équations différentielles linéaires dans le disque unité, en utilisant les notions de l'exposant de convergence et [p,q]-ordre. Dans le deuxième chapitre, on s'est basé sur des conditions très fortes sur le comportement des coefficients sur une partie du disque unité de mesure logarithmique infinie et on a donné un cas particulier fondamentale ce qui est une courbe tendant vers un point sur la frontière ce qui nous a permet d'en déduire plusieurs résultats. Dans le troisième chapitre, nous avons introduit la notion de [p,q]-ordre pour cette investigation et qui nous a permet d'étendre beaucoup de résultats du plan complexe vers le disque unité d'une part et d'autre part de généraliser certains résultats de Latreuch et Belaidi [32]. Je pense que ce travail constitue une contribution dans ce domaine de recherche et le problème dans sa généralité reste ouvert.

Bibliographie

[1] **I. Amemiya and M. Ozawa,** *Non-existence of finite order solutions of* $w'' + e^{-z}w' + Q(z)w = 0$, Hokkaido Math. J., **10** (1981), 1-17.

[2] **S. Bank**, *General theorem concerning the growth of solutions of first order algebraic differential equations*, Compositio Math. 25 (1972), 61-70.

[3] **S. Bank and I. Laine,** *On the oscilation theory of* $f'' + A(z)f = 0$ *wehre* $A(z)$ *is entire,* Bull. Amer. Math. Soc. 6 (1982), 95-98.

[4] **B. Belaidi,** *Growth of solutions to linear differential equations with analytic coefficients of [p,q]-order in the unit disc,* Electron. J. Differential Equations, Vol. 2011 (156) (2011), 1–11.

[5] **B. Belaïdi**, *The Properties of Solutions of Some Linear Differential Equations*, Publicationes Mathematicae Debrecen, 78/2 (2011), 317-326.

[6] **B. Belaïdi,** *Estimation of the hyper-order of entire solutions of complex linear ordinary differential equations whose coefficients are entire functions,* E. J. Qualitative Theory of Diff. Equ., N° 5, (2002), 1-8.

[7] **B. Belaïdi and K. Hamani**, *Order and hyper-order of entire solutions of linear differential equations with entire coefficients*, Electron. J. Diff. Eqns, N° 17, Vol. 2003 (2003), 1-12.

[8] **B. Belaïdi and S. Hamouda**, *Orders of solutions of an n-th order linear differential equations with entire coefficients*, Electron. J. Diff. Eqns, N° 63, Vol. 2001 (2001), 1-5.

[9] **B. Belaïdi and S. Hamouda**, *Growth of solutions of an n-th order linear differential equations with entire coefficients*, Kodai Math. J. Vol. 25 (2002), N° 3, 240-245.

[10] **T-B. Cao,** *The growth, oscillation and fixed points of solutions of complex linear differential equations in the unit disc,* J. Math. Anal. Appl. 352 (2009) 739-748.

[11] **T. B. Cao and H. X. Yi,** *The growth of solutions of linear differential equations with coefficients of iterated order in the unit disc,* J. Math. Anal. Appl. 319 (2006) 278–294.

[12] **T. B. Cao and H. X. Yi,** *On the complex oscillation theory of linear differential equations with analytic coefficients in the unit disc*, Acta Math. Sci. 28A (6) (2008), 1046-1057.

[13] **Z.X. Chen,** *The growth of solutions of* $f'' + e^{-z} f' + Q(z) f = 0$, *where the order* $(Q) = 1$, Sci, China Ser. A, **45** (2002), 290-300.

[14] **Z. X. Chen,** *The growth of solutions of a class of second order linear differential equations with entire coefficients,* Chin. Ann. of Math. 1999, 20A(1) 7-14.

[15] **Z. X. Chen and C.C. Yang**, *Some further results on the zeros and growths of entire solutions of second order linear differential equations*, Kodai Math. J., 22(1999), 273-285.

[16] **I. Chyzhykov, G. Gundersen and J. Heittokangas,** *Linear differential equations and logarithmic derivative estimates*, Proc. London Math. Soc., 86 (2003), 735-754.

[17] **M. Frei,** *Sur l'ordre des solutions entières d'une équation différentielle linéaire*, C. R. Acad. Sci. Paris 236 (1953), 38-40.

[18] **G. G. Gundersen**, *Finite order solutions of second order linear differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc. 305 (1988), no. 1, 415-429.

[19] **G. G. Gundersen,** *On the question of whether* $f'' + e^{-z}f' + B(z)f = 0$ *can admit a solution* $f \not\equiv 0$ *of finite order*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh **102A** (1986), 9-17.

[20] **S. Hamouda,** *Proporities of solutions to linear differential equations with analytic coefficients in the unit disc,* Electron. J. Diff. Equ. 177 (2012) pp. 1-9.

[21] **S. Hamouda**, *Iterated order of solutions of linear differential equations in the unit disc,* Comput. Methods Funct. Theory, 13 (2013) No. 4, 545-555.

[22] **S. Hamouda and B. Belaïdi,** *On the growth of solutions of* $w^{(n)} + e^{-z}w' + Q(z)w = 0$ *and some related extensions,* Hokkaido. Math. J. Vol 35 (2006) N° 3, 573-586.

[23] **W.K. Hayman,** *Meromorphic functions*, Clarendon Press, Oxford, 1964.

[24] **J. Heittokangas,** *On complex differential equations in the unit disc*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. Diss. 122 (2000), 1-54.

[25] **J. Heittokangas, R. Korhonen and J. Rättyä,** *Fast growing solutions of linear differential equations in the unit disc*, Result. Math. 49 (2006), 265-278.

[26] **J. Heittokangas,** *On complex differential equations in the unit disc*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. Diss. 122(2000), 1-54.

[27] **G. Jank and L. Volkmann,** *Einführung in die Theorie der ganzen und Meromorphen Funktionen mit Anwendungen auf Differential gleichungen,* Birkhäuser, Basel-Boston, 1985.

[28] **O.P. Juneja, G.P. Kapoor and S.K. Bajpai,** *On the (p, q)-order and lower (p,q)-order of an entire function*, Reine Angew. Math. 282 (1976), 53 67.

[29] **O.P. Juneja, G.P. Kapoor and S.K. Bajpai,** On the (p, q)-type and lower (p,q)-type of an entire function. J. Reine Angew. Math. 290 (1977), 180 190.

[30] **I. Laine,** *Nevanlinna theory and complex differential equations,* W. de Gruyter, Berlin, 1993.

[31] **I. Laine,** *Complex differential equations*, Handbook of Differential Equations: Ordinary Differential Equations, 4(2008), 269-363.

[32] **Z. Latreuch and B. Benharrat,** *Linear differential equations with analytic coefficients of [p,q]-order in the unit disc, Sarajevo J. Math.* Vol.9 (21) (2013), 71-84.

[33] **R. Nevanlinna,** *Analytic Functions,* Springer-Verlag New York. Heidelberg. Berlin 1970.

[34] **M. Tsuji,** *Differential theory in modern function theory*, Chelsea, New York, 1975, reprint of the 1959 edition.

[35] **H. Wittich**, *Neuere Untersuchungen über eindeutige analytishe Funktionen*, 2nd Edition, Springer-Verlag New York. Heidelberg Berlin, 1968.

[36] **H. Y. Xu, J. Tu, and X. M. Zheng,** *On the hyper exponent of convergence of zeros of $f^{(i)} - \varphi$ of higher order linear differential equations,* Advances in Difference Equations, Vol. 2012 (2012), No. 114, 1-16.

[37] **L. Yang,** *Value distribution theory,* Springer-Verlag Science Press, Berlin-Beijing. 1993.

[38] **H. X. Yi and C. C. Yang**, *Uniqueness theory of meromorphicfunctions*, Mathematics and its Applications, 557. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 2003.

[39] **S. Yssaad and S. Hamouda,** *Exponent of convergence of solutions of a class of linear differential equations in the unit disc,* Novi. Sad. J. Math. accepted, online http://www.dmi.uns.ac.rs/nsjom/Accepted.html.

[40] **S. Yssaad and S. Hamouda,** *[p,q]-order and exponent of convergence of solutions to linear differential equations in the unit disc,* soumis