

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS - MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
FILIÈRE : MATHÉMATIQUES



MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques Appliquées délivré par

Université Abdelhamid Ibn Badis Mostaganem

Spécialité "Modélisation, Contrôle et Optimisation"

présenté par :

Asmae BENABDALLAH

**Analyse de la stabilité de combinaisons linéaires matricielles
convexes : Application à quelques modèles linéaires**

Soutenu publiquement le 12 Juin 2025 devant le jury composé de :

Présidente :	Amina FARAOUN	MCB	UMAB
Examineur :	Kamel BENYETTOU	MCB	NHSM, Alger
Encadrant :	Djillali BOUAGADA	Professeur	UMAB

Année Universitaire : 2024 / 2025

M
A
S
T
E
R

إهداء

﴿فَإِذَا جَاءَ وَعْدُ الْآخِرَةِ لِيَسُوءُوا وُجُوهَكُمْ وَلِيَدْخُلُوا الْمَسْجِدَ كَمَا دَخَلُوهُ أَوَّلَ مَرَّةٍ وَلِيُتَبَرُوا مَا عَلَوَا تَبِيرًا﴾

إلى الشهداء الخمسين ألفاً ويزيدون، إلى الذين لا نعرف أَسْمَاءَهُمْ ولكن الله يعلمهم جميعاً، إلى شهداء غزة.

إلى جنود خير، أحفاد صلاح الدين ورجال الضيف، أسياد النزال والميدان والزمان، إلى كتائبنا كتائب الشهيد عز الدين القسام.

إلى غزة الأبية معقل الإسلام وجرح الأمة النازف، إلى رجالها ونسائها وأطفالها وشيوخها وجرحها وشجرها، وكلّ ذرة تُرَبُّ فيها.

إلى الأطفال الذين ماتوا دون أن يأكلوا، إلى ريم روح الروح وأخوها طارق ويوسف الأبيضاني الحلوي، إلى الأطفال الذين ماتوا جوعاً، برداً وقصفاً، إلى الطفولة المسفوحة على الأرصفة، في الخيام وتحت الأنقاض.

إلى أرض المعراج زهرة المدائن وقبلة الروح، إليك يا قدس وعهدنا معك إنّنا وربك لن نبذل ولن ننسى ولن نخون.

أَسْمَاءُ

REMERCIEMENTS

Avant tout, je remercie Allah pour sa guidance et sa patience tout au long de ce parcours.

Un grand merci à mes parents pour leur soutien constant et leurs encouragements tout au long de ce parcours. Je remercie aussi mes deux sœurs, Khadidja et Fatima, pour leur soutien, leur patience et leur présence tout au long de ce travail.

Je tiens à remercier Monsieur Djillali BOUAGADA, Professeur à l'Université Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem, à la Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique, au département de Mathématiques Informatique. C'est un homme de respect et d'intégrité avant d'être un excellent enseignant. Merci pour sa gentillesse, son respect et sa bonne humeur tout au long de cette expérience. Merci également pour son encadrement et ses conseils précieux qui m'ont guidée dans ce travail.

J'adresse mes sincères remerciements à Dr. Kamel BENYETTOU pour ses conseils qui m'ont aidée à réaliser ce travail, ainsi que pour avoir accepté d'être membre du jury. Je remercie également Dr. Amina FARAOUN pour avoir accepté d'évaluer ce mémoire. Mes remerciements s'adressent aussi à tous les enseignants du département de mathématiques, dont les conseils et l'accompagnement ont été précieux.

Enfin, un merci spécial à mes camarades pour leur soutien, leur aide, et les bons moments partagés.

TABLE DES MATIÈRES

Remerciements	ii
Table des figures	iv
Introduction	1
1 Notions de base et préliminaires	3
1 Définitions et propriétés de base	3
2 Systèmes unidimensionnels	9
1 Systèmes linéaires à temps continu et à temps discret	9
2 Analyse de la stabilité des systèmes linéaires à temps continu et à temps discret	16
3 Systèmes positifs unidimensionnels	23
4 Stabilité des systèmes linéaires positifs	23
5 Systèmes linéaires à paramètres variants (LPV)	25
6 Conditions de stabilité pour la combinaison convexe de matrices positives .	32
7 Discrétisation utilisant une combinaison convexe des matrices dynamiques	33
3 Systèmes bidimensionnels	39
1 Analyse de stabilité pour le modèle de Roesser 2D (temps discret)	40
2 Stabilité de la combinaison convexe (temps discret)	43
3 Analyse de stabilité pour le modèles de Roesser 2D singulier (temps discret)	50
4 Analyse de stabilité pour le modèles de Roesser 2D (temps continu)	54
5 Stabilité de la combinaison convexe (temps continu)	57
6 Analyse de stabilité pour le modèle de Roesser 2D singulier (temps continu)	60
4 Application à un processus thermique	63
1 Description de l'application	63
2 Validation de la stabilité	65
3 Validation de la stabilité pour la combinaison convexe	67
Conclusion	72

TABLE DES FIGURES

1.1	Disques de Gershgorin pour la matrice A .	6
2.1	Modèle des deux wagons couplés par un ressort.	26
3.1	Valeur propre minimale de $R(\alpha)$.	48
3.2	Module maximal des valeurs propres de $A(\alpha)$.	49
3.3	Module maximal des valeurs propres de $A(\alpha)$ (A_1 instable).	50
4.1	Modèle physique du processus thermique 2D	64
4.2	Modules des valeurs propres pour le scénario 1 stable ($a_1 = 0,5$, $a_2 = 0,1$). Tous les modules sont inférieurs au seuil de stabilité ($\gamma = 1$).	66
4.3	Modules des valeurs propres pour le scénario 2 instable ($a_1 = 2,0$, $a_2 = 2,5$). Un module dépasse le seuil de stabilité ($\gamma = 1$).	66
4.4	Variable d'état $x_\nu(i, j)$ pour le scénario 1 stable ($a_1 = 0,5$, $a_2 = 0,1$), montrant un comportement borné.	67
4.5	Variable d'état $x_\nu(i, j)$ pour le scénario 2 instable ($a_1 = 2,0$, $a_2 = 2,5$), mon- trant une divergence.	67
4.6	Modules des valeurs propres pour $\alpha = 0,5$ ($a_1 = 0,5$, $a_2 = 0,1$). Tous les mo- dules sont inférieurs au seuil de stabilité ($\gamma = 1$).	69
4.7	Variable d'état $x_\nu(i, j)$ pour $\alpha = 0,5$ ($a_1 = 0,5$, $a_2 = 0,1$), montrant un com- portement borné.	69
4.8	Modules des valeurs propres pour $\alpha = 0,5$ ($a_1 = 1,3$, $a_2 = 1,275$). Le module $\approx 1,951 > 1$ indique l'instabilité de $A(0,5)$.	70
4.9	Variable d'état $x_\nu(i, j)$ pour $\alpha = 0,5$ ($a_1 = 1,3$, $a_2 = 1,275$). La divergence re- flète l'instabilité.	70

$\mathbb{R}$	: Corps des nombres réels.
$\mathbb{R}_+$	: Corps des nombres réels non négatifs.
$\mathbb{R}^n$	: Espace des vecteurs à n entrées réelles.
$\mathbb{R}^{n \times m}$	: Espace des matrices réelles de dimensions $n \times m$.
$\mathbb{C}$	: Corps des nombres complexes.
$\mathcal{M}_n$	: Ensemble des matrices de Metzler de dimensions $n \times n$.
A^T	: Transposée d'une matrice A .
A^{-1}	: Inverse d'une matrice A .
I_n	: Matrice identité de dimension n .
$\mathcal{L}(s)$	: Transformée de Laplace.
$X(z)$	: Z-Transformée.
$\Re(s)$	: Partie réelle du nombre complexe s .
LMI	: (en anglais) Linear Matrix Inequality.
IML	: Inégalité matricielle linéaire.
$\rho(A)$	: Le rayon spectral de la matrice A .
e^{At}	: L'exponentielle d'une matrice A .
$\det(A)$	: Le déterminant d'une matrice A .
$A > 0$	: A une matrice définie positive.
$A < 0$	: A une matrice définie négative.

La théorie de contrôle, terme générique englobant un large éventail de techniques analytiques et d'approches, vise à réguler ou optimiser des systèmes mathématiques, souvent modélisés comme des systèmes dynamiques en lien étroit avec la théorie des systèmes. Depuis le XVI^e siècle, ces systèmes dynamiques servent de base à la conception de stratégies de contrôle mathématiques, traduites ensuite en solutions physiques pour des applications concrètes [17, 28, 29].

Les systèmes dynamiques, qu'ils soient standards ou singuliers, unidimensionnels (1D) ou bidimensionnels (2D), décrivent l'évolution temporelle ou spatiale de phénomènes physiques à travers des équations différentielles ou discrètes, permettant de modéliser des processus complexes dans des domaines variés tels que l'ingénierie, l'électronique, le traitement du signal ou la biomathématique [28, 29]. Les systèmes standards s'appuient sur des dynamiques régulières, souvent représentées par des équations différentielles ordinaires, tandis que les systèmes singuliers, caractérisés par des matrices non inversibles, modélisent des comportements plus complexes, comme ceux rencontrés dans les systèmes contraints [8]. Les systèmes 1D se concentrent sur l'évolution dans une seule dimension, généralement le temps, tandis que les systèmes 2D intègrent deux dimensions indépendantes, comme le temps et l'espace, offrant une analyse enrichie pour des applications nécessitant une propagation multidirectionnelle de l'information. Ces systèmes jouent un rôle fondamental dans l'analyse et la commande, en fournissant des outils pour étudier la contrôlabilité, l'observabilité et la stabilité, essentielles à l'optimisation des performances dans les sciences appliquées [8, 29].

Dans de nombreux systèmes physiques, les variables sont par nature positives (ex. concentrations, flux, populations), mais les modèles usuels ne tiennent généralement pas compte de cette contrainte. Pour y remédier, des modèles spécifiques appelés systèmes positifs ont été développés. Ils garantissent que les états et les sorties restent dans le cône des réels positifs lorsque les conditions initiales et les entrées sont positives. De tels modèles apparaissent notamment dans les modèles à compartiments utilisés en biologie et en médecine, dans les circuits électriques (RLC), ou encore dans les systèmes de communication et d'information [30, 31]. Les systèmes positifs évoluent dans des cônes, ce qui nécessite des outils spécifiques pour leur analyse, notamment en ce qui concerne la stabilité, la commande et l'observabilité. Ce mémoire accorde une attention particulière à ces systèmes en raison de leur intérêt théorique et de leurs nombreuses applications pratiques [30, 31, 24].

La stabilité des systèmes dynamiques, qu'ils soient standards ou singuliers, unidimensionnels (1D) ou bidimensionnels (2D), est essentielle pour garantir un comportement

robuste et prévisible face aux perturbations en ingénierie. Les inégalités matricielles linéaires (LMI) offrent un cadre analytique puissant pour étudier la stabilité, en s'appuyant sur les travaux fondateurs d'Alexandre Lyapunov à la fin du XIX^e siècle [18, 23]. Lyapunov a démontré que pour un système linéaire

$$x' = Ax(t),$$

la stabilité est assurée si une matrice $P > 0$ existe telle que

$$A^T P + PA < 0,$$

formant ainsi la première LMI, qui par définition [3] est une expression affine de la forme

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i < 0, \quad (1)$$

où F_i sont des matrices symétriques réelles, et x est un vecteur de variables de décisions [8]. Par exemple, l'inégalité matricielle suivante avec deux variables x_1, x_2 [17, 8, 3, 19].

$$\begin{bmatrix} x_1 - 4 & x_1 + x_2 & -2 \\ x_1 + x_2 & x_2 - 5 & 0 \\ -2 & 0 & x_1 \end{bmatrix} < 0$$

peut être reformulée comme :

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} + x_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} < 0.$$

L'inégalité (1) est une contrainte convexe en x , c'est-à-dire que l'ensemble $\{x \mid F(x) < 0\}$ est convexe. Cette inégalité matricielle linéaire LMI peut sembler avoir une forme affine particulière.

Ce mémoire est structuré pour présenter une analyse progressive et cohérente des systèmes dynamiques, en mettant l'accent sur leur stabilité et leurs applications. Le premier chapitre établit les notions préliminaires, couvrant les définitions de base et les propriétés fondamentales des systèmes. Le deuxième chapitre se concentre sur les systèmes unidimensionnels (1D), abordant les systèmes linéaires à temps continu et discret, leur stabilité, les systèmes positifs, ainsi que les systèmes à paramètres variants (LPV), avec une analyse des conditions de stabilité et des méthodes de discrétisation basées sur des combinaisons convexes de matrices. Le troisième chapitre étend l'étude aux systèmes bidimensionnels (2D), en examinant la stabilité des modèles de Roesser, standards et singuliers, à temps discret et continu, ainsi que la stabilité des combinaisons convexes. Enfin, le quatrième chapitre applique ces concepts théoriques à un processus thermique, décrivant l'application, les conditions de stabilité et la validation des résultats pour une combinaison convexe, illustrant ainsi l'impact pratique des approches développées.

CHAPITRE 1

NOTIONS DE BASE ET PRÉLIMINAIRES

Ce chapitre présente les notions et outils mathématiques fondamentaux qui seront utilisés dans les chapitres suivants. Ils constituent une base essentielle pour le développement théorique du mémoire.

1 Définitions et propriétés de base

La transformée de Laplace et la transformée en Z sont des outils fondamentaux dans l'analyse des systèmes linéaires. La transformée de Laplace s'applique aux systèmes à temps continu, tandis que la transformée en Z est utilisée pour les systèmes à temps discret.

1.1 La transformée de Laplace

La transformée de Laplace est un outil important et extrêmement puissant pour résoudre les équations différentielles linéaires et les systèmes à temps continu.

Définition 1.1 [32] Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est dite causale si son support est borné à gauche en 0, c'est-à-dire si $f(t) = 0$ pour tout $t < 0$.

Définition 1.2 [4] La transformée de Laplace d'une fonction f (éventuellement généralisée, telle que la "fonction de Dirac") d'une variable réelle t , à support positif, est la fonction F de la variable complexe p , définie par :

$$F(p) = \mathcal{L}\{f\}(p) = \int_{0^+}^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt.$$

Cette formule est valide lorsque :

1. $\Re(p) > \alpha$, où α est l'abscisse de convergence, $-\infty \leq \alpha \leq +\infty$.
2. f est une fonction causale et localement intégrable à support positif, c'est-à-dire nulle en dehors de l'intervalle $[0, +\infty[$.

Propriétés

Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et pour f, g deux fonctions causales, nous décrivons les propriétés importantes et utiles pour résoudre certains problèmes :

1. Linéarité :

$$\mathcal{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha F(p) + \beta G(p).$$

2. Dérivation :

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = pF(p) - f(0).$$

3. Intégration :

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t) dt\right] = \frac{F(p)}{p}.$$

4. Convolution :

$$\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = F(p) \cdot G(p).$$

Transformée de Laplace inverse

La transformée de Laplace inverse, notée $f(t)$, également appelée l'original d'une fonction $F(p)$, est définie par :

$$\mathcal{L}^{-1}[F(p)] = f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_0^{+\infty} F(p) \cdot e^{pt} dp,$$

où le chemin d'intégration peut être choisi arbitrairement dans le plan complexe, à condition qu'il reste dans la région de convergence de $F(p)$.

1.2 La transformée en Z

La transformée en Z est également un outil important et extrêmement puissant pour résoudre des équations différentielles linéaires et des systèmes à temps discret.

Définition 1.3 [4] La transformation en Z est une application qui transforme une suite $\{s(n)\}$ (définie sur les entiers) en une fonction S d'une variable complexe nommée z , telle que :

$$S(z) = Z\{s(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(n)z^{-n}, \quad z \in \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(n)z^{-n} \text{ converge} \right\}.$$

Si $n < 0$, $s(n) = 0$, on parle de signal causal. Inversement, si $n > 0$, $s(n) = 0$, on parle de signal anti-causal.

Propriétés

Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $x_1(n), x_2(n)$ deux séquences, nous avons :

1. Linéarité :

Si

$$x(n) = ax_1(n) + bx_2(n),$$

alors :

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} ax_1(n)z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} bx_2(n)z^{-n}, \\ &= aX_1(z) + bX_2(z). \end{aligned}$$

2. Dérivation :

Puisque,

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n},$$

nous avons également :

$$\frac{dX(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-n)x(n)z^{-n-1},$$

et donc :

$$-z \frac{dX(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} nx(n)z^{-n}.$$

Il s'ensuit que $-z \frac{dX(z)}{dz}$ est la transformée de $nx(n)$.

3. Convolution :

Cette propriété est l'une des plus importantes et justifie à elle seule l'utilisation de la transformée en Z pour étudier les systèmes linéaires invariants à temps discret. Si $y(n)$ est obtenu par convolution de $x(n)$ et $g(n)$, nous avons :

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)g(n-m),$$

ainsi :

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)g(n-m)z^{-n}, \\ &= \left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)z^{-m} \right] \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(n-m)z^{-(n-m)} \right], \\ &= X(z)G(z). \end{aligned}$$

Transformée en Z inverse

Définition 1.4 [4] La transformée en Z inverse est définie par :

$$x(n) = Z^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathbf{C}} X(z)z^{n-1} dz,$$

où $\mathbf{C}$ est un chemin fermé parcouru dans le sens inverse des aiguilles d'une montre et appartenant entièrement au domaine de convergence.

1.3 Théorème de Gershgorin

Le théorème de Gershgorin est un résultat puissant et élégant de l'algèbre linéaire qui permet de localiser les valeurs propres d'une matrice carrée dans le plan complexe.

Pour une matrice carrée $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ (ou $\mathbb{R}^{n \times n}$), le théorème stipule que chaque valeur propre λ de A se trouve dans au moins l'un des disques de Gershgorin [12] définis comme suit :

- Définition des disques : Pour chaque ligne i (où $i = 1, 2, \dots, n$), le disque de Gershgorin C_i est un cercle dans le plan complexe,
- Centre : a_{ii} (l'élément diagonal de la ligne i).

- Rayon : $R_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ (la somme des valeurs absolues des éléments hors diagonale de la ligne i).

Formellement :

$$|\lambda - a_{ii}| \leq R_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Union des disques : Les valeurs propres de A sont contenues dans l'union de ces disques :

$$\lambda \in \bigcup_{i=1}^n C_i, \quad \text{où } C_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq R_i\}.$$

Exemple 1.1 Considérons la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

- Pour la ligne 1 : Centre = 5, rayon = $|1| + |0| = 1$, disque : $|z - 5| \leq 1$.
- Pour la ligne 2 : Centre = 4, rayon = $|2| + |1| = 3$, disque : $|z - 4| \leq 3$.
- Pour la ligne 3 : Centre = 3, rayon = $|0| + |1| = 1$, disque : $|z - 3| \leq 1$.

Les valeurs propres de A doivent se trouver dans l'union de ces disques :

$$\{z : |z - 5| \leq 1\} \cup \{z : |z - 4| \leq 3\} \cup \{z : |z - 3| \leq 1\}.$$

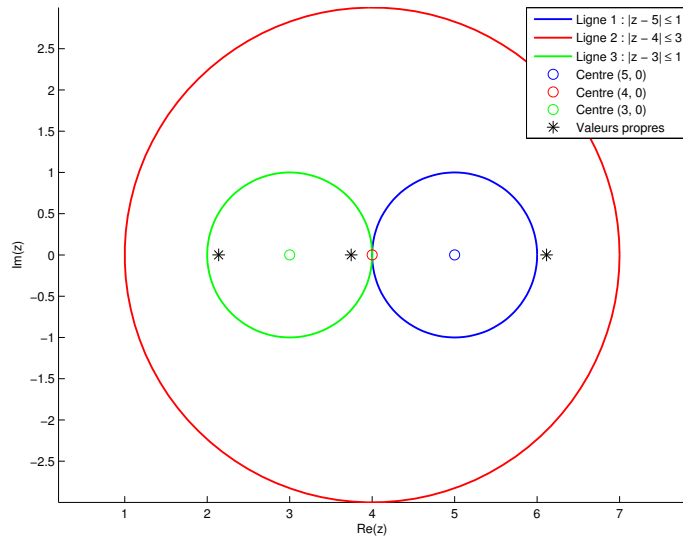


FIGURE 1.1 – Disques de Gershgorin pour la matrice A .

1.4 Notion de convexité

Définition 1.5 [33] Soit $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble non vide. C est dit **convexe** si, pour tous $x, y \in C$ et tout α tel que $0 \leq \alpha \leq 1$, on a :

$$(1 - \alpha)x + \alpha y \in C.$$

Cette définition fondamentale permet d'introduire des concepts plus avancés, tels que les combinaisons linéaires matricielles convexes.

Définition 1.6 [12] Soient $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{m \times n}$ deux matrices de même dimension. Une **combinaison linéaire matricielle convexe** de A_1 et A_2 est une matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ définie par :

$$A(\alpha) = (1 - \alpha)A_1 + \alpha A_2,$$

où $\alpha \in [0, 1]$.

1.5 Matrices particulières

Une classe spéciale de matrices particulières est introduite dans cette section. Ce type de matrices est fréquemment utilisée dans l'étude des systèmes positifs, où les variables de décisions sont positives par nature, notamment en théorie du contrôle, en économie et en biologie.

Soit $\mathbb{R}^{n \times m}$ l'ensemble des $n \times m$ matrices avec des entrées réelles.

Définition 1.7 [6] On dit qu'une matrice A est une matrice non-négative si toutes ses entrées sont non-négatives, autrement dit : $\forall i = 1, \dots, n, \forall j = 1, \dots, m : a_{ij} \geq 0$. Une telle matrice est notée $A \geq 0$ ou $A \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$.

Définition 1.8 [6] On dit qu'une matrice A est une matrice positive si toutes ses entrées sont non-négatives avec au moins une entrée strictement positive, i.e., A est une matrice non-négative et $\exists k = 1, \dots, n, \exists l = 1, \dots, m$ telle que : $a_{kl} > 0$. On note par $A > 0$.

Définition 1.9 [6] On dit qu'une matrice A est une matrice strictement positive si toutes ses entrées sont strictement positives, i.e., $\forall i = 1, \dots, n, \forall j = 1, \dots, m : a_{ij} > 0$. Une telle matrice est notée par $A \gg 0$.

Définition 1.10 [34] Une matrice carrée A est dite **nilpotente** si, pour un certain entier positif h , $A^h = 0$, où 0 est la matrice nulle. L'**indice de nilpotence** est le plus petit entier positif h tel que $A^h = 0$.

Par exemple, considérons la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nous avons $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$. Ainsi, A est nilpotente avec un indice de nilpotence $h = 2$.

Définition 1.11 [7] Une matrice carrée $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est appelée **matrice de Metzler positive** si tous ses éléments hors diagonale sont non négatifs, c'est-à-dire :

$$a_{ij} \geq 0 \quad \text{pour tout } i \neq j,$$

tandis que les éléments diagonaux a_{ii} peuvent être n'importe quel nombre réel (positif, négatif ou nul).

L'ensemble des matrices de Metzler de dimension n est noté $\mathcal{M}_n$.

Exemple 1.2 Considérons la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

Dans cette matrice A , les éléments hors diagonale sont non négatifs. Ainsi, A est une matrice de Metzler positive.

Définition 1.12 [4] Une matrice carrée $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est appelée **matrice de Metzler négative** si tous ses éléments hors diagonale sont non positifs, c'est-à-dire :

$$a_{ij} \leq 0 \quad \text{pour tout } i \neq j,$$

tandis que les éléments diagonaux a_{ii} peuvent être n'importe quel nombre réel (positif, négatif ou nul).

Exemple 1.3 Considérons la matrice :

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Dans cette matrice B , les éléments hors diagonale sont non positifs. Ainsi, B est une matrice de Metzler négative.

1.6 Les faisceaux de matrices

Nous présentons dans cette partie de notre travail les définitions fondamentales relatives aux faisceaux de matrices, afin de poser les bases nécessaires à la compréhension des résultats qui suivront.

Définition 1.13 (Matrice polynômiale) [6] On appelle λ -matrice ou matrice polynômiale, toute matrice

$$P(\lambda) = (a_{ij}(\lambda)), \quad i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}.$$

Définition 1.14 (Faisceau de matrices) [6] Un faisceau de matrices $\lambda A - B$ est une matrice polynômiale dont les coefficients sont des polynômes de degré inférieur ou égal à 1, λ est une variable indéterminée; A et B sont deux matrices quelconques de même ordre $m \times n$.

Définition 1.15 (Faisceau régulier et singulier) [6] Un faisceau de matrices $\lambda A - B$ est dit régulier (F.R) si :

1. Les deux matrices A et B sont des matrices carrées de même ordre n .
2. Le déterminant $|\lambda A - B|$ ne s'annule pas identiquement.

Si le rang $r < m = n$, le faisceau est appelé faisceau singulier carré (F.S.C). Si $m \neq n$, il sera dit singulier rectangulaire (F.S.R).

Ce chapitre présente les notions fondamentales nécessaires à la compréhension du travail développé dans les chapitres suivants. Les définitions et propriétés de base ont été exposées afin de poser un cadre théorique solide, permettant d'aborder de manière rigoureuse l'analyse de la stabilité des systèmes dynamiques.

CHAPITRE 2

SYSTÈMES UNIDIMENSIONNELS

Dans ce chapitre, nous étudions la stabilité des systèmes linéaires unidimensionnels, aussi bien à temps continu qu'à temps discret. Nous présentons les notions essentielles liées à ces modèles, tout en accordant une attention particulière aux systèmes positifs et à paramètres variants (LPV), largement rencontrés dans les applications réelles. Par la suite, nous introduisons le concept de combinaison convexe de matrices dynamiques, qui permet de modéliser des incertitudes ou des variations paramétriques dans les systèmes. Des conditions de stabilité adaptées à ces structures convexes seront alors développées.

1 Systèmes linéaires à temps continu et à temps discret

Définition 2.1 [35] *La représentation en espace d'état d'un système linéaire à temps continu est donnée par :*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), \\ x(t_0) &= x_0, \end{cases} \quad (2.1)$$

où :

- $x(t) \in \mathbb{R}^n$ représente la variable d'état du système,
- $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est la commande (entrée) du système,
- $y(t) \in \mathbb{R}^p$ est la sortie du système,
- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est la matrice d'état,
- $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ est la matrice de contrôle,
- $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ et $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ sont des matrices de dimensions appropriées,
- $x(t_0) = x_0$ est la condition initiale.

Parmi les méthodes utilisées pour résoudre le modèle (2.1), l'utilisation de la transformée de Laplace;

$$\mathcal{L}[\dot{x}] = A\mathcal{L}[x] + B\mathcal{L}[u].$$

Sachant que $x = x(t)$ et $u = u(t)$. Nous savons que,

$$\mathcal{L}[\dot{x}] = sX(s) - x(0).$$

Et,

$$X(s) = \mathcal{L}[x] = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt.$$

Nous obtenons par suite :

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s), \text{ avec } \mathcal{L}[u] = U(s).$$

D'où,

$$[I_n s - A] X(s) = x(0) + BU(s).$$

On suppose que le faisceau est régulier,

$$X(s) = [I_n s - A]^{-1} (x(0) + BU(s)),$$

sachant que [3],

$$[I_n s - A]^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k s^{-(k+1)},$$

Il s'ensuit,

$$X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k s^{-(k+1)} x(0) + \sum_{k=0}^{\infty} A^k s^{-(k+1)} BU(s).$$

En appliquant la transformée de Laplace inverse,

$$\mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \mathcal{L}^{-1}[s^{-(k+1)}] x(0) + \sum_{k=0}^{\infty} A^k \mathcal{L}^{-1}[s^{-(k+1)} BU(s)].$$

Par conséquent, la solution générale pour la trajectoire d'état est donnée par [35] :

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau.$$

Où,

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k \mathcal{L}^{-1}[s^{-(k+1)}] x(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!}.$$

Réponse du système : [35] La sortie $y(t)$ est obtenue à partir de la représentation de l'espace d'état :

$$y(t) = Cx(t) + Du(t).$$

En substituant $x(t)$ de la solution :

$$y(t) = C(e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau) + Du(t).$$

Simplifions :

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)} x_0 + C \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau + Du(t).$$

Nous passons maintenant au cas discret afin d'étudier la trajectoire et la réponse d'un modèle linéaire à temps discret.

Définition 2.2 (Système linéaire à temps discret) [35] La représentation en espace d'état d'un modèle linéaire à temps discret est donnée par :

$$\begin{cases} x_{i+1} &= Ax_i + Bu_i, \\ y_i &= Cx_i + Du_i, \\ x(t_0) &= x_0, \end{cases} \quad (2.2)$$

où :

- $x_i \in \mathbb{R}^n$ représente le vecteur d'état,
- $u_i \in \mathbb{R}^m$ représente le vecteur d'entrée (commande),
- $y_i \in \mathbb{R}^p$ représente le vecteur de sortie,
- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est la matrice d'état,
- $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ est la matrice de contrôle,
- $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ et $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ sont des matrices de dimensions appropriées,
- $x(t_0) = x_0$ est la condition initiale.

Nous allons déterminer par récurrence la trajectoire d'état du système à temps discret (2.2).

Pour $i = 0$:

$$x_1 = Ax_0 + Bu_0.$$

Pour $i = 1$:

$$x_2 = Ax_1 + Bu_1 = A[Ax_0 + Bu_0] + Bu_1 = A^2x_0 + ABu_0 + Bu_1.$$

Pour $i = 2$:

$$\begin{aligned} x_3 &= Ax_2 + Bu_2, \\ &= A[A^2x_0 + ABu_0 + Bu_1] + Bu_2, \\ &= A^3x_0 + A^2Bu_0 + ABu_1 + Bu_2, \\ &= A^3x_0 + \sum_{k=0}^{2-1} A^{2-(k+1)}Bu_k. \end{aligned}$$

Généralisons pour i :

$$\begin{aligned} x_i &= Ax_{i-1} + Bu_{i-1}, \\ &= A \left[A^{i-1}x_0 + \sum_{k=0}^{i-2} A^{i-2-k}Bu_k \right] + Bu_{i-1}, \\ &= A^i x_0 + \sum_{k=0}^{i-1} A^{i-1-k}Bu_k, \\ &= A^i x_0 + \sum_{k=0}^{i-1} A^{i-(k+1)}Bu_k, \quad i > 0. \end{aligned}$$

Ainsi, la solution générale pour la trajectoire d'état est donnée par [35] :

$$x_i = A^i x_0 + \sum_{k=0}^{i-1} A^{i-(k+1)}Bu_k, \quad i > 0.$$

Réponse du système : [35] La sortie y_i est obtenue à partir de la représentation en espace d'état :

$$y_i = CA^i x_0 + C \sum_{k=0}^{i-1} A^{i-(k+1)}Bu_k + Du_i.$$

Systèmes linéaires singuliers à temps continu et à temps discret

Définition 2.3 [20] *Considérons un système dynamique linéaire singulier à temps continu décrit par les équations suivantes :*

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), \\ x(t_0) &= x_0, \end{cases} \quad (2.3)$$

- $x(t) \in \mathbb{R}^n$: vecteur d'état représentant l'état du système à l'instant t .
- $u(t) \in \mathbb{R}^m$: entrée du système à l'instant t .
- $y(t) \in \mathbb{R}^p$: sortie du système à l'instant t .
- $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, et $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$: matrices de dimensions appropriées qui définissent la dynamique du système,
- $x(t_0) = x_0$ est la condition initiale.

Définition 2.4 [36] *Le système 2.3 est dit singulier si $\det(E) = 0$. Sinon, il est appelé standard.*

Pour garantir l'existence d'une solution pour le système, la condition de régularité doit être satisfaite. En nous basant sur la définition 1.15 des faisceaux réguliers et singuliers, nous définissons la condition de régularité pour un système singulier comme suit [13] :

Définition 2.5 (Condition de régularité) [36] *Le système décrit par l'équation (2.3) est dit régulier si et seulement s'il existe un $s \in \mathbb{C}$ tel que :*

$$\det[sE - A] \neq 0.$$

La régularité permet d'analyser le système sous une forme équivalente via la décomposition de Kronecker-Weierstrass, voir [5].

Cette approche est utilisé par les auteurs [36, 3]

Si $\det E \neq 0$, le système peut être réécrit comme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= E^{-1}Ax(t) + E^{-1}Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), \\ x(t_0) &= x_0. \end{cases}$$

Sa solution est donnée par :

$$x(t) = e^{E^{-1}At} x_0 + \int_0^t e^{E^{-1}A(t-\tau)} E^{-1}Bu(\tau) d\tau,$$

et sa réponse est :

$$y(t) = Ce^{E^{-1}At} x_0 + \int_0^t Ce^{E^{-1}A(t-\tau)} E^{-1}Bu(\tau) d\tau + Du(t).$$

Une autre approche utilisé par les auteurs [3, 36] est décrite comme suit.

Si $\det E = 0$, l'état de ce système est exprimé comme :

$$x(t) = e^{\Phi_0 A t} \Phi_0 E x_0 + \int_0^t e^{\Phi_0 A(t-\tau)} \Phi_0 B u(\tau) d\tau + \sum_{i=1}^{\mu} \Phi_{-i} (B u^{(i-1)}(t) + E x_0 \delta^{(i-1)}(t)).$$

Solution d'un système singulier à temps continu

Nous considérons le cas de faisceau régulier.
Dans ce cas, nous pouvons écrire la matrice résolvante sous forme d'une série de Laurent unique au voisinage de l'infini [3] :

$$(\lambda E - A)^{-1} = \sum_{i=-\mu}^{+\infty} \phi_i \lambda^{-(i+1)},$$

où μ est l'indice de nilpotence du faisceau $(\lambda E - A)$, décrit par :

$$\mu = \text{rg } E - \deg[(\lambda E - A)] + 1,$$

et ϕ_i est la matrice fondamentale de (2.3), qui satisfait les équations suivantes :

$$\begin{cases} E\phi_i - A\phi_{i-1} = \delta_{0i}I_n, \\ \phi_i E - \phi_{i-1}A = \delta_{0i}I_n, \\ \forall i \leq -\mu, \phi_i = 0, \end{cases}$$

où

$$\delta_{0i} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

est le Delta de Kronecker.

La solution du système (2.3) est donnée par :

$$x(t) = e^{\phi_0 A t} \phi_0 E x_0 + \int_0^t e^{\phi_0 A(t-\tau)} \phi_0 u(\tau) d\tau + \sum_{j=1}^{\mu} \phi_{-j} \left[B u^{(j-1)} + E x_0 \delta^{(j-1)} \right],$$

où

$$u^{(j)} = \frac{d^j u}{dt^j}, \quad j = 1, \dots, \mu - 1.$$

Preuve. [3, 20] En appliquant la transformée de Laplace à la première équation du système (2.3), nous obtenons :

$$(E\lambda - A)X(\lambda) = E x_0 + B U(\lambda).$$

Le système est régulier, donc $(E\lambda - A)^{-1}$ existe pour un certain $\lambda \in \mathbb{C}$, d'où :

$$X(\lambda) = (E\lambda - A)^{-1} (E x_0 + B U(\lambda)).$$

De cette relation, il s'ensuit :

$$X(\lambda) = \sum_{i=-\mu}^{\infty} \phi_i \lambda^{-(i+1)} [E x_0 + B U(\lambda)],$$

$$X(\lambda) = \sum_{i=-\mu}^{\infty} \phi_i \lambda^{-(i+1)} E x_0 + \sum_{i=-\mu}^{\infty} \phi_i \lambda^{-(i+1)} B U(\lambda),$$

$$X(\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i \lambda^{-(i+1)} E x_0 + \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i \lambda^{-(i+1)} B U(\lambda) + \sum_{i=1}^{\mu} \phi_{-i} \lambda^{(i-1)} E x_0 + \sum_{i=1}^{\mu} \phi_{-i} \lambda^{(i-1)} B U(\lambda).$$

Enfin, en utilisant la transformée de Laplace inverse $\mathcal{L}^{-1}$:

Nous avons :

$$\mathcal{L} [e^{\phi_0 A t} \phi_i] = \sum_{i=-\mu}^{+\infty} \phi_i \lambda^{-(i+1)}.$$

Par le théorème de convolution :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[X(t)] = & E x_0 \mathcal{L}^{-1} [\mathcal{L}(e^{\phi_0 A t} \phi_0)] + B \mathcal{L}^{-1} [\mathcal{L}(e^{\phi_0 A t} \phi_0) \times \mathcal{L}(u(t))] \\ & + E x_0 \mathcal{L}^{-1} \left[\sum_{i=1}^{\mu} \phi_{-i} \lambda^{(i-1)} \right] + B \mathcal{L}^{-1} \left[\sum_{i=1}^{\mu} \phi_{-i} \lambda^{(i-1)} U(\lambda) \right]. \end{aligned}$$

En appliquant la transformée de Laplace inverse, nous obtenons :

$$\begin{aligned} x(t) = & E x_0 e^{\phi_0 A t} \phi_0 + (e^{\phi_0 A t} \phi_0 * B u(t)) + E x_0 \sum_{i=1}^{\mu} \phi_{-i} \delta^{(i-1)} + B \sum_{i=1}^{\mu} \phi_{-i} u^{(i-1)}(t), \\ = & E x_0 e^{\phi_0 A t} \phi_0 + \int_0^t e^{\phi_0 A(t-\tau)} \phi_0 B u(\tau) d\tau + \sum_{i=1}^{\mu} \phi_{-i} \left[E x_0 \delta^{(i-1)} + B u^{(i-1)}(t) \right]. \end{aligned}$$

■

Exemple 2.1 Considérons les matrices suivantes E et A ,

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

alors,

$$(Es - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -s \end{pmatrix}.$$

Ici l'indice de nilpotence est $\mu = 2$. Les matrices fondamentales sont,

$$\phi_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \phi_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \phi_{-2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{pour } i \geq 0.$$

La sortie du système : [3] La sortie du système singulier est donnée par :

$$y(t) = C E x_0 e^{\phi_0 A t} \phi_0 + C \int_0^t e^{\phi_0 A(t-\tau)} \phi_0 B u(\tau) d\tau + C \sum_{i=1}^{\mu} \phi_{-i} \left[E x_0 \delta^{(i-1)} + B u^{(i-1)}(t) \right] + D u(t).$$

Trajectoire d'état des systèmes singuliers à temps discret

Considérons le système linéaire singulier à temps discret suivant [35] :

$$\begin{cases} E x_{i+1} &= A x_i + B u_i, \\ y_i &= C x_i + D u_i, \\ x(t_0) &= x_0, \end{cases} \quad (2.4)$$

- $x_i \in \mathbb{R}^n$: vecteur d'état.
- $u_i \in \mathbb{R}^m$: vecteur d'entrée.
- $y_i \in \mathbb{R}^p$: vecteur de sortie.
- $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, et $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$: matrices de dimensions appropriées,
- $x(t_0) = x_0$ est la condition initiale.

Définition 2.6 (Condition de régularité – Cas discret) [13] Le système discret (2.4) est appelé régulier si et seulement s'il existe un $z \in \mathbb{C}$ tel que :

$$\det[zE - A] \neq 0.$$

Si la condition de régularité est satisfaite, alors :

$$(zE - A)^{-1} = \sum_{i=-\mu}^{\infty} \phi_i z^{-(i+1)},$$

où μ est l'indice de nilpotence, et les matrices ϕ_i sont les matrices fondamentales données par :

$$E\phi_i - A\phi_{i-1} = \delta_{0i}I,$$

ou de manière équivalente :

$$\phi_i E - \phi_{i-1} A = \delta_{0i}I,$$

où δ_{0i} est le delta de Kronecker.

En appliquant la transformée en Z au système, nous obtenons :

$$(zE - A)X(z) = zEx_0 + BU(z),$$

ou de manière équivalente :

$$X(z) = (zE - A)^{-1} zEx_0 + (zE - A)^{-1} BU(z).$$

Nous obtenons :

$$X(z) = \sum_{i=-\mu}^{\infty} \phi_i z^{-(i+1)} BU(z) + \sum_{i=-\mu}^{\infty} \phi_i z^{-i} Ex_0.$$

Maintenant, utilisons la transformée en Z inverse pour trouver la solution du système :

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} X(z) z^{n-1} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \sum_{i=-\mu}^{\infty} \phi_i BU(z) z^{(n-i-2)} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \sum_{i=-\mu}^{\infty} \phi_i z^{n-i-1} Ex_0.$$

Par conséquent, la solution du système est :

$$\begin{aligned} x(n) &:= x_n = \phi_n Ex_0 + \sum_{i=-\mu}^{\infty} \phi_i Bu(n-i-1), \\ x(n) &:= x_n = \phi_n Ex_0 + \sum_{i=0}^{n+\mu-1} \phi_{n-i-1} Bu(i). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que :

$$x_n = \phi_n Ex_0 + \sum_{i=0}^{n+\mu-1} \phi_{n-i-1} Bu_i, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Ce qui représente la solution du système singulier à temps discret.

Sortie des systèmes singuliers à temps discret[35] La sortie y_n pour $n \in \mathbb{Z}_+$ est :

$$y_n = C \phi_n Ex_0 + C \sum_{i=0}^{n+\mu-1} \phi_{n-i-1} Bu_i + Du_i.$$

1.1 Discrétisation des systèmes à temps continu

La discrétisation transforme un système à temps continu en une forme à temps discret [11, 22] pour des applications numériques ou des simulations. La méthode d'Euler explicite (forward Euler) approxime la dérivée en utilisant un pas de temps h .

Considérons le système standard à temps continu (2.1) en utilisant l'approximation d'Euler explicite :

$$\dot{x}(t) \approx \frac{x(t+h) - x(t)}{h}.$$

À $t = ih$, avec $x_i = x(ih)$:

$$\dot{x}_i \approx \frac{x_{i+1} - x_i}{h}.$$

Substituons dans l'équation d'état :

$$\frac{x_{i+1} - x_i}{h} = Ax_i + Bu_i.$$

Multiplions par h :

$$x_{i+1} - x_i = hAx_i + hBu_i.$$

Réarrangeons :

$$x_{i+1} = (I + hA)x_i + hBu_i.$$

Définissons $\tilde{A} = I + hA$ et $\tilde{B} = hB$. La sortie est échantillonnée comme suit :

$$y_i = Cx_i + Du_i.$$

Ainsi, le système discrétisé est :

$$\begin{cases} x_{i+1} &= \tilde{A}x_i + \tilde{B}u_i, \\ y_i &= Cx_i + Du_i, \\ x(t_0) &= x_0. \end{cases} \quad (2.5)$$

Théorème 2.1 [11, 22] La solution du système (2.5) est donnée par :

$$x_n = \tilde{A}^n x_0 + \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{A}^{n-1-i} \tilde{B}u_i,$$

et sa sortie par :

$$y_n = C\tilde{A}^n x_0 + C \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{A}^{n-1-i} \tilde{B}u_i + Du_i.$$

2 Analyse de la stabilité des systèmes linéaires à temps continu et à temps discret

La stabilité asymptotique des systèmes linéaires à temps continu est un concept central en théorie des systèmes dynamiques. Cette section présente les préliminaires et les conditions spécifiques de stabilité. Les définitions et théorèmes suivants établissent les bases pour l'analyse de la stabilité des systèmes linéaires à temps continu et à temps discret [11], [12].

2.1 Classification des conditions de stabilité pour les systèmes à temps continu

La stabilité d'un système linéaire à temps continu peut être évaluée à l'aide des critères des valeurs propres, de Lyapunov et de Gershgorin.

Considérons le système linéaire autonome (sans contrôle) à temps continu [11] :

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad (2.6)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état et $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. La solution pour une condition initiale donnée x_0 est [11] :

$$x(t) = e^{At} x_0.$$

Définition 2.7 (Stabilité asymptotique des systèmes à temps continu) [12] *Le système (ou de manière équivalente la matrice A) est dit asymptotiquement stable si :*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad \text{pour tout } x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Critères des valeurs propres

Définition 2.8 (Valeurs propres de la matrice du système A) [12] *Les valeurs propres de la matrice A, notées $s_l = |s_l|e^{j\phi_l}$ pour $l = 1, \dots, n$, sont les racines de l'équation caractéristique :*

$$\det(sI_n - A) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 = 0,$$

où I_n est la matrice identité $n \times n$, et $|s_l|$ est le module de la valeur propre s_l .

Ces conditions reposent sur les valeurs propres de la matrice du système.

Système standard :

Le système est **asymptotiquement stable** si et seulement si toutes les valeurs propres s_l de A satisfont l'une des conditions équivalentes suivantes [12, 11] :

1. La partie réelle de chaque valeur propre est négative :

$$\operatorname{Re}(s_l) < 0, \quad l = 1, \dots, n.$$

2. La phase ϕ_l de chaque valeur propre se situe strictement dans le deuxième ou le troisième quadrant du plan complexe :

$$\frac{\pi}{2} < \phi_l < \frac{3\pi}{2}, \quad l = 1, \dots, n.$$

Conditions de Lyapunov

L'approche de Lyapunov utilise une fonction quadratique et sa dérivée pour (2.6) [13].

- **Fonction de Lyapunov** : Définissons :

$$V(x) = x^T P x,$$

où P est une matrice symétrique et définie positive ($P = P^T$, $x^T P x > 0$ pour $x \neq 0$).

- **Dérivée temporelle** : Calculons $\dot{V}(x)$ le long des trajectoires :

$$\dot{V}(x) = \frac{d}{dt}[x^T P x].$$

En utilisant la règle de la chaîne :

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x}, \\ &= (Ax)^T P x + x^T P (Ax), \\ &= x^T A^T P x + x^T P A x, \\ &= x^T (A^T P + P A) x.\end{aligned}$$

Le système (2.1) est asymptotiquement stable si :

$$\dot{V}(x) = x^T (A^T P + P A) x < 0 \quad \text{pour tout } x \neq 0.$$

Définissons $Q = -(A^T P + P A)$, où $Q > 0$, donc :

$$\dot{V}(x) = -x^T Q x < 0.$$

- **Équation de Lyapunov** : Cela est vérifié s'il existe une matrice P définie positive solution de :

$$A^T P + P A = -Q,$$

où Q est définie positive (par exemple, $Q = I_n$).

Conditions de Gershgorin

Le théorème de Gershgorin fournit une borne sur les valeurs propres de A dans (2.6) [12] :

- **Disques de Gershgorin** : Chaque valeur propre s_l de $A = [a_{ij}]$ satisfait :

$$|s_l - a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n.$$

- **Condition de stabilité** : Le système est asymptotiquement stable si :

$$a_{ii} + \sum_{j \neq i} |a_{ij}| < 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

ce qui garantit que tous les disques se situent dans le demi-plan gauche ($\text{Re}(s_l) < 0$).

2.2 Classification des conditions de stabilité pour les systèmes à temps discret

La stabilité d'un système linéaire à temps discret peut également être évaluée à l'aide des critères des valeurs propres, de Lyapunov et de Gershgorin.

Considérons le système linéaire autonome (sans contrôle) à temps discret [12] :

$$x_{i+1} = \bar{A} x_i, \quad i \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, \dots\}, \quad (2.7)$$

où $x_i \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état et $\bar{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. La solution pour une condition initiale donnée x_0 est :

$$x_i = \bar{A}^i x_0.$$

Définition 2.9 (Stabilité asymptotique des systèmes à temps discret) [12] Le système (ou de manière équivalente la matrice $\bar{A}$) est dit asymptotiquement stable si :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = 0 \quad \text{pour tout } x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Critères des valeurs propres

Ces critères reposent sur les valeurs propres de la matrice du système [12].

Définition 2.10 (Valeurs propres de la matrice du système $\bar{A}$) Les valeurs propres de la matrice $\bar{A}$, notées $z_l = |z_l|e^{j\psi_l}$ pour $l = 1, \dots, n$, sont les racines de l'équation caractéristique :

$$\det(zI_n - \bar{A}) = z^n + \tilde{a}_{n-1}z^{n-1} + \dots + \tilde{a}_1z + \tilde{a}_0 = 0,$$

où I_n est la matrice identité $n \times n$, et $|z_l|$ est le module de la valeur propre z_l .

Système standard :

Le système est **asymptotiquement stable** si et seulement si toutes les valeurs propres z_l de $\bar{A}$ satisfont [12] :

$$|z_l| < 1, \quad l = 1, \dots, n.$$

Conditions de Lyapunov

L'approche de Lyapunov utilise une fonction quadratique et sa différence pour (2.7).

- **Fonction de Lyapunov** : Définissons :

$$V(x_i) = x_i^T P x_i,$$

- **Différence** : Calculons $\Delta V(x_i)$:

$$\Delta V(x_i) = V(x_{i+1}) - V(x_i),$$

$$\begin{aligned} \Delta V(x_i) &= x_{i+1}^T P x_{i+1} - x_i^T P x_i, \\ &= (\bar{A}x_i)^T P (\bar{A}x_i) - x_i^T P x_i, \\ &= x_i^T \bar{A}^T P \bar{A} x_i - x_i^T P x_i, \\ &= x_i^T (\bar{A}^T P \bar{A} - P) x_i. \end{aligned}$$

Le système est asymptotiquement stable si :

$$\Delta V(x_i) = x_i^T (\bar{A}^T P \bar{A} - P) x_i < 0 \quad \text{pour tout } x_i \neq 0.$$

Définissons $Q = -(\bar{A}^T P \bar{A} - P)$, où $Q > 0$, donc :

$$\Delta V(x_i) = -x_i^T Q x_i < 0.$$

- **Équation de Lyapunov** : Cela est vérifié s'il existe une matrice P définie positive solution de :

$$\bar{A}^T P \bar{A} - P = -Q,$$

où Q est définie positive.

Conditions de Gershgorin

Le théorème de Gershgorin fournit une borne sur les valeurs propres de $\bar{A}$ dans (2.7) [12].

- **Disques de Gershgorin** : Chaque valeur propre z_l de $\bar{A} = [\bar{a}_{ij}]$ satisfait :

$$|z_l - \bar{a}_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |\bar{a}_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n.$$

- **Condition de stabilité** : Le système est asymptotiquement stable si :

$$\sum_{j \neq i} |\bar{a}_{ij}| < 1 - |\bar{a}_{ii}| \quad i = 1, \dots, n,$$

ce qui garantit que tous les disques se situent à l'intérieur du cercle unitaire ($|z_l| < 1$).

2.3 Conditions de stabilité pour les systèmes singuliers à temps continu

La stabilité du système linéaire singulier autonome (sans contrôle) à temps continu [13].

$$E\dot{x} = Ax \tag{2.8}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $E, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, et $\text{rang}(E) = r \leq n$.

La solution est obtenue à partir de la dynamique du système, tandis que la stabilité est analysée à l'aide des critères fondés sur les valeurs propres, la théorie de Lyapunov et le théorème de Gershgorin.

Définition 2.11 (Stabilité asymptotique) [13] *Le système (2.8) est asymptotiquement stable si :*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0,$$

ou de manière équivalente, s'il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que :

$$\|x(t)\|_2 \leq \alpha e^{-\beta t} \|x(0)\|_2 \quad \text{pour } t > 0.$$

2.4 Conditions de stabilité

Critères des valeurs propres

Le système (2.8) est régulier et asymptotiquement stable si [13] :

$$\sigma(E, A) \subset \mathbb{C}^-,$$

où $\mathbb{C}^- = \{s \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(s) < 0\}$, et $\sigma(E, A)$ désigne les pôles finis [13], avec,

$$\sigma(E, A) = \{s \in \mathbb{C} \mid \det(sE - A) = 0\}$$

Conditions de Lyapunov

La fonction de Lyapunov pour le système (2.8) est définie comme [13] :

$$V(x) = x^T E^T P E x,$$

- **Dérivée temporelle** : Calculons $\dot{V}(x)$ le long des trajectoires :

$$\dot{V}(x) = \frac{d}{dt}(x^T E^T P E x),$$

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= \dot{x}^T E^T P E x + x^T E^T P E \dot{x}, \\ &= (Ax)^T P E x + x^T E^T P (Ax), \\ &= x^T A^T P E x + x^T E^T P A x, \\ &= x^T (A^T P E + E^T P A) x.\end{aligned}$$

La stabilité exige $\dot{V}(x) < 0$ pour $x \neq 0$.

- **Conditions de stabilité** [13] Le système est régulier, et asymptotiquement stable si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

1. Il existe une matrice semi-définie positive unique P solution de :

$$A^T P E + E^T P A < 0,$$

avec $\text{rang}(E^T P E) = \text{rang}(P) = r$.

2. Il existe une matrice P telle que :

$$\begin{cases} P^T A + A^T P < 0, \\ E^T P &= P^T E \geq 0. \end{cases}$$

Conditions de Gershgorin

Dans ce qui suit, nous adaptons les tests et les conditions en nous appuyant sur le théorème de Gershgorin, appliqué au cas des systèmes linéaires singuliers.

Pour le faisceau $sE - A$, les disques de Gershgorin sont définis comme :

$$|sE_{ii} - A_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |sE_{ij} - A_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n.$$

- **Condition de stabilité** : Le système est asymptotiquement stable si tous les disques se situent dans $\mathbb{C}^-$, une condition suffisante étant :

$$|sE_{ii} - A_{ii}| + \sum_{j \neq i} |sE_{ij} - A_{ij}| < 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

pour un certain s garantissant la régularité et des parties réelles négatives des pôles finis.

2.5 Conditions de stabilité pour les systèmes singuliers à temps discret

La stabilité du systèmes singuliers à temps discret [13]

$$E x_{i+1} = A x_i \tag{2.9}$$

où $x(i) \in \mathbb{R}^n$, $E, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, et $\text{rang}(E) = r \leq n$.

Définition 2.12 (Stabilité asymptotique) Le système (2.9) est *asymptotiquement stable* si :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_i = 0,$$

pour toutes les conditions initiales.

2.6 Conditions de stabilité

Critères des valeurs propres

Ces conditions dépendent des valeurs propres généralisées de $zE - A$.

Le système est régulier et asymptotiquement stable si les pôles finis satisfont [13] :

$$|z_l| < 1, \quad l = 1, \dots, n,$$

où z_l sont les valeurs propres du faisceau $zE - A$.

Conditions de Lyapunov

La fonction de Lyapunov pour le système (2.9) est [13] :

$$V[x_i] = x_i^T E^T P E x_i,$$

- **Différence** : Calculons $\Delta V[x_i]$:

$$\Delta V[x_i] = V[x_{i+1}] - V[x_i],$$

$$\begin{aligned} \Delta V[x_i] &= x_{i+1}^T E^T P E x_{i+1} - x_i^T E^T P E x_i, \\ &= (Ax_i)^T P (Ax_i) - x_i^T E^T P E x_i, \\ &= x_i^T A^T P A x_i - x_i^T E^T P E x_i, \\ &= x_i^T (A^T P A - E^T P E) x_i. \end{aligned}$$

La stabilité exige $\Delta V(x_i) < 0$ pour $x_i \neq 0$.

- **Conditions de stabilité** [13] Le système est régulier, et asymptotiquement stable si :
1. Il existe une matrice symétrique inversible P telle que :

$$\begin{cases} E^T P E & \geq 0, \\ A^T P A - E^T P E & < 0. \end{cases}$$

2. Pour tout $W > 0$, il existe une matrice semi-définie positive unique P solution de :

$$A^T P A - E^T P E = -E^T W E,$$

avec $\text{rang}(E^T P E) = \text{rang}(E) = r$.

Conditions de Gershgorin

Pour le faisceau $zE - A$, les disques de Gershgorin sont :

$$|zE_{ii} - A_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |zE_{ij} - A_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n.$$

- **Condition de stabilité** : Le système est asymptotiquement stable si tous les disques se situent à l'intérieur du cercle unitaire ($|z| < 1$), une condition suffisante étant :

$$|zE_{ii} - A_{ii}| + \sum_{j \neq i} |zE_{ij} - A_{ij}| < 1, \quad i = 1, \dots, n,$$

pour un certain z garantissant la régularité et des pôles finis à l'intérieur du disque unitaire.

3 Systèmes positifs unidimensionnels

Dans de nombreux systèmes physiques, les variables sont naturellement positives, mais les modèles standards, en particulier les modèles linéaires, n'intègrent généralement pas cette contrainte. Des modèles spéciaux ont été développés par de nombreux scientifiques, par exemple pour les circuits RLC ou d'autres modèles comme les modèles compartimentaux.

Considérons maintenant les définitions et quelques résultats sur la positivité à temps continu [3].

Définition 2.13 (Positivité externe) [3] *Le système (2.1) est dit **extérieurement positif** si la sortie correspondant à un état initial nul est non négative pour toute entrée non négative, c'est-à-dire, pour $x_0 = x(0) = 0$ et pour tout $u(t) \in \mathbb{R}_+^m$, avec $t \geq 0$.*

Définition 2.14 (Positivité interne) [3] *Un système linéaire standard est dit **intérieurement positif** si, pour tout $u(t) \in \mathbb{R}_+^m$, avec $t \geq 0$, nous avons $x(t) \in \mathbb{R}_+^n$ et $y(t) \in \mathbb{R}_+^p$, avec $t \geq 0$.*

Cette définition implique que toutes les trajectoires issues de n'importe quel point dans l'orthant non négatif $\mathbb{R}_+^n$ (y compris les frontières) de l'espace d'état, obtenues en appliquant une entrée non négative au système, restent dans l'orthant non négatif et conduisent à une sortie non négative.

La positivité interne implique la positivité externe, mais l'inverse n'est pas vrai [3].

Théorème 2.2 (Condition de positivité) [3] *Le système est intérieurement positif si et seulement si A est une matrice de Metzler et $B \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}_+^{p \times n}$, $D \in \mathbb{R}_+^{p \times m}$.*

3.1 Applications

- Systèmes avec des variables physiques naturellement positives (niveaux, flux, concentrations, etc.).
- Modèles compartimentaux : applications en médecine, cinétique chimique, etc.
- Modèles économiques (Leontief, etc.).
- Modèles de dynamique des populations.
- Circuits RLC.
- Sciences de la communication et de l'information.
- Processus industriels impliquant des réacteurs chimiques, etc.

Nous adaptons les mêmes définitions pour le système à temps discret.

Théorème 2.3 [3] *Un système à temps discret est **positif** si et seulement si :*

$$A \in \mathbb{R}_+^{n \times n}, \quad B \in \mathbb{R}_+^{n \times m}, \quad u \in \mathbb{R}_+^m, \quad x_0 \in \mathbb{R}_+^n,$$

où A est la matrice d'état, B est la matrice d'entrée, u est la matrice de contrôle, et x_0 est la condition initiale, tous à valeurs positives.

4 Stabilité des systèmes linéaires positifs

Dans cette section, les résultats de stabilité sont étendus aux systèmes linéaires positifs à temps continu et à temps discret, classifiés à l'aide des conditions des valeurs propres, de type Lyapunov et de Gershgorin [12].

Systèmes linéaires positifs à temps continu

Considérons le système linéaire autonome à temps continu défini dans (2.6).

Définition 2.15 (Système positif) [12] Le système est **positif** si $x(t) \in \mathbb{R}_+^n$, $t \geq 0$, pour toute condition initiale $x(0) \in \mathbb{R}_+^n$.

Théorème 2.4 (Condition de positivité) [12] Le système est positif si et seulement si A est une matrice de Metzler (les entrées hors diagonale sont non négatives).

Définition 2.16 (Stabilité asymptotique) [12] Le système positif est **asymptotiquement stable** si $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ pour tout $x(0) \in \mathbb{R}_+^n$.

Critères des valeurs propres

- Le système positif (2.6) est asymptotiquement stable si et seulement si tous les coefficients du polynôme caractéristique [12] :

$$\det(I_n s - A) = s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0,$$

sont positifs, c'est-à-dire $a_k > 0$, $k = 0, \dots, n-1$.

Conditions de type Lyapunov

- Le système positif (2.6) est asymptotiquement stable si et seulement s'il existe un vecteur strictement positif $\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_n]^T$, $\lambda_k > 0$, $k = 1, \dots, n$, tel que [12] :

$$A\lambda < 0, \quad \text{ou} \quad A^T\lambda < 0.$$

Conditions de Gershgorin

Pour une matrice de Metzler $A = [a_{ij}]$ (où $a_{ij} \geq 0$ pour $i \neq j$) [12] :

- Disques de Gershgorin** : Chaque valeur propre s satisfait :

$$|s - a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} a_{ij}, \quad i = 1, \dots, n.$$

- Condition de stabilité** : Une condition suffisante pour la stabilité asymptotique est :

$$a_{ii} + \sum_{j \neq i} a_{ij} < 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

ce qui garantit que tous les disques se situent dans le demi-plan gauche ($\text{Re}(s) < 0$).

Systèmes linéaires positifs à temps discret

Considérons le système linéaire autonome à temps discret défini dans (2.7).

Définition 2.17 (Système positif) [12] Le système (2.6) est **positif** si $x_i \in \mathbb{R}_+^n$, $i \in \mathbb{Z}_+$, pour toute condition initiale $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$.

Théorème 2.5 (Condition de positivité) [12] Le système (2.7) est positif si et seulement si :

$$\bar{A} \in \mathbb{R}_+^{n \times n}.$$

Définition 2.18 (Stabilité asymptotique) [12] Le système positif (2.7) est **asymptotiquement stable** si :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = 0, \quad \text{pour tout } x_0 \in \mathbb{R}_+^n.$$

Critères des valeurs propres

- Le système positif (2.7) est asymptotiquement stable si et seulement si tous les coefficients du polynôme caractéristique [12] :

$$\det(I_n(z+1) - \bar{A}) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0,$$

sont positifs, c'est-à-dire $a_k > 0$, $k = 0, \dots, n-1$.

Conditions de type Lyapunov

- Le système positif (2.7) est asymptotiquement stable si l'une des conditions suivantes est vérifiée [12] :

- Il existe un vecteur strictement positif $\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_n]^T$, $\lambda_k > 0$, $k = 1, \dots, n$, tel que :

$$(\bar{A} - I_n)\lambda < 0, \quad \text{ou} \quad \lambda^T(\bar{A} - I_n) < 0.$$

- La somme des entrées de chaque colonne (ou ligne) de $\bar{A}$ est inférieure à 1 :

$$\sum_{i=1}^n \bar{a}_{ij} < 1, \quad \text{ou} \quad \sum_{j=1}^n \bar{a}_{ij} < 1, \quad j = 1, \dots, n.$$

Conditions de Gershgorin

Pour une matrice non négative $\bar{A} = [\bar{a}_{ij}]$ (tous les $\bar{a}_{ij} \geq 0$) :

- Disques de Gershgorin** : Chaque valeur propre z satisfait [12] :

$$|z - \bar{a}_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} \bar{a}_{ij}, \quad i = 1, \dots, n.$$

- Condition de stabilité** : Une condition suffisante pour la stabilité asymptotique est :

$$\bar{a}_{ii} + \sum_{j \neq i} \bar{a}_{ij} < 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

ce qui garantit que tous les disques se situent à l'intérieur du cercle unitaire ($|z| < 1$).

5 Systèmes linéaires à paramètres variants (LPV)

Dans cette section, nous introduisons la notion de systèmes LPV (Linear Parameter-Varying), qui nous permettra d'étudier les conditions de stabilité des combinaisons convexes linéaires de matrices [1].

5.1 Motivation

Les systèmes *LPV* (Linear Parameter Varying) constituent un cadre de modélisation puissant pour les systèmes dynamiques présentant des variations de paramètres. Ils permettent de prendre en compte des incertitudes physiques ou des changements structuraux tout en conservant une forme linéaire.

Afin d'illustrer ce cadre, nous considérons le modèle mécanique classique des **deux wagons** reliés par un ressort, souvent utilisé dans la littérature.

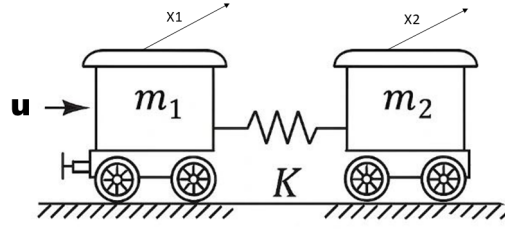


FIGURE 2.1 – Modèle des deux wagons couplés par un ressort.

5.2 Modèle dynamique des deux wagons

Le système modélisé est décrit par l'équation d'état suivante :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{K}{m_1} & \frac{K}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{K}{m_2} & -\frac{K}{m_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \end{bmatrix} u, \\ y = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \end{cases} \quad (2.10)$$

où $x = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$ est le vecteur d'état, avec :

- x_1 et x_2 , les positions respectives des deux wagons ;
- x_3 et x_4 , leurs vitesses ;
- m_1 et m_2 , les masses des deux wagons ;
- K , le coefficient de raideur du ressort, considéré comme un paramètre incertain ;
- u , la force de commande appliquée au premier wagon ;
- $y = x_2$, la sortie mesurée (position du second wagon).

L'incertitude sur K est interprétée comme un paramètre variable θ , variant dans un intervalle borné. Ainsi, la matrice $A(\theta)$ devient dépendante de θ , permettant de reformuler le modèle comme un système LPV. Cette représentation offre un cadre pertinent pour analyser la stabilité du système malgré les variations paramétriques.

5.3 Définition d'un système LPV continu

Des systèmes linéaires continus à paramètres variants (LPV) sont des systèmes dynamiques dont les matrices d'état dépendent de paramètres. Considérons le système donné par l'équation suivante [1] :

$$\dot{x}(t) = A(\theta)x(t), \quad (2.11)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état et $A(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est la matrice dynamique. La dépendance au paramètre variant θ est exprimée comme une combinaison linéaire convexe :

$$A(\theta) = \sum_{i=1}^N \theta_i A_i,$$

où :

- $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ($i = 1, \dots, N$) sont des matrices constantes représentant les sommets du système,
- $\theta = [\theta_1, \dots, \theta_N] \in \mathcal{A}_N$, avec le simplexe $\mathcal{A}_N$ défini par :

$$\mathcal{A}_N := \left\{ \theta \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \theta_i = 1, \theta_i \geq 0 \right\}.$$

Cela garantit que $A(\theta)$ est une combinaison convexe des matrices A_i . On s'intéresse au cas $N = 2$, qui est étendu également pour $N > 2$. Nous avons :

$$A(\theta) = \theta_1 A_1 + \theta_2 A_2,$$

avec $\theta_1 = 1 - \theta$, $\theta_2 = \theta$, et $\theta \in [0, 1]$, ce qui correspond à :

$$A(\theta) = (1 - \theta)A_1 + \theta A_2.$$

Cette expression est une **combinaison linéaire convexe** des matrices A_1 et A_2 , où les coefficients θ_1 et θ_2 satisfont $\theta_1 + \theta_2 = 1$ et $\theta_1, \theta_2 \geq 0$.

5.4 Analyse de la stabilité de la combinaison convexe

Etant donné des matrices stables asymptotiquement, peut-on préserver cette notion de stabilité pour leur combinaison convexe. Pour analyser la stabilité de (2.11) avec la combinaison convexe, nous considérons une fonction de Lyapunov quadratique candidate :

$$V(x) = x^T P(\theta)x, \quad (2.12)$$

où $P(\theta)$ est une matrice symétrique définie positive, également exprimée comme une combinaison linéaire convexe :

$$P(\theta) = (1 - \theta)P_1 + \theta P_2,$$

avec $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P_1 = P_1^T > 0$, $P_2 = P_2^T > 0$, garantissant que $P(\theta) > 0$ pour tout $\theta \in [0, 1]$.

La dérivée temporelle de la fonction de Lyapunov est donnée par :

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T P(\theta)x + x^T P(\theta)\dot{x}. \quad (2.13)$$

En substituant (2.12) dans (2.13), nous obtenons :

$$\dot{V}(x) = (A(\theta)x)^T P(\theta)x + x^T P(\theta)(A(\theta)x).$$

Cela se simplifie en :

$$\dot{V}(x) = x^T A(\theta)^T P(\theta) x + x^T P(\theta) A(\theta) x = x^T (A(\theta)^T P(\theta) + P(\theta) A(\theta)) x.$$

Pour que le système soit asymptotiquement stable, il faut que $\dot{V}(x) < 0$ pour tout $x \neq 0$, ce qui équivaut à la condition :

$$A(\theta)^T P(\theta) + P(\theta) A(\theta) < 0, \quad \forall \theta \in [0, 1].$$

Substituons les expressions de $A(\theta)$ et $P(\theta)$ dans cette condition :

$$A(\theta) = (1 - \theta)A_1 + \theta A_2, \quad P(\theta) = (1 - \theta)P_1 + \theta P_2.$$

Alors, calculons $A(\theta)^T P(\theta) + P(\theta) A(\theta)$. D'abord, $A(\theta)^T P(\theta)$:

$$\begin{aligned} A(\theta)^T P(\theta) &= ((1 - \theta)A_1 + \theta A_2)^T ((1 - \theta)P_1 + \theta P_2), \\ &= ((1 - \theta)A_1^T + \theta A_2^T) ((1 - \theta)P_1 + \theta P_2), \\ &= (1 - \theta)^2 A_1^T P_1 + (1 - \theta)\theta A_1^T P_2 + (1 - \theta)\theta A_2^T P_1 + \theta^2 A_2^T P_2. \end{aligned}$$

Ensuite, $P(\theta) A(\theta)$:

$$\begin{aligned} P(\theta) A(\theta) &= ((1 - \theta)P_1 + \theta P_2) ((1 - \theta)A_1 + \theta A_2), \\ &= (1 - \theta)^2 P_1 A_1 + (1 - \theta)\theta P_1 A_2 + (1 - \theta)\theta P_2 A_1 + \theta^2 P_2 A_2. \end{aligned}$$

Additionnons les deux termes :

$$\begin{aligned} A(\theta)^T P(\theta) + P(\theta) A(\theta) &= (1 - \theta)^2 (A_1^T P_1 + P_1 A_1) + (1 - \theta)\theta (A_1^T P_2 + P_2 A_1) \\ &\quad + (1 - \theta)\theta (A_2^T P_1 + P_1 A_2) + \theta^2 (A_2^T P_2 + P_2 A_2). \end{aligned}$$

Ces conditions peuvent être formulées sous forme d'inégalités matricielles linéaires (LMI) :

$$\begin{aligned} P_1 &> 0, \\ P_2 &> 0, \\ A_1^T P_1 + P_1 A_1 &< 0, \\ A_2^T P_2 + P_2 A_2 &< 0. \end{aligned}$$

Alors, si A_1 et A_2 sont asymptotiquement stables, la combinaison convexe est également stable pour tout $\theta \in [0, 1]$. Nous pouvons énoncer le théorème suivant.

Théorème 2.6 *Soit*

$$A(\theta) = (1 - \theta)A_1 + \theta A_2,$$

avec $\theta \in [0, 1]$. Si A_1 et A_2 sont asymptotiquement stables, alors il existe une matrice $P(\theta) = P(\theta)^T > 0$ telle que :

$$A(\theta)^T P(\theta) + P(\theta) A(\theta) < 0,$$

autrement dit le système (2.11) est asymptotiquement stable pour tout $\theta \in [0, 1]$.

5.5 Exemple numérique de vérification de la stabilité

Pour illustrer l'application du théorème 2.6, nous considérons un exemple numérique avec des matrices A_1 et A_2 , définies comme suit :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & -1.5 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & -1.2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1.5 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & -1.8 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & -1.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1.6 \end{bmatrix}.$$

Les valeurs propres de A_1 sont $-2.0, -1.5, -2.0, -1.2$, et celles de A_2 sont $-1.5, -1.8, -1.3, -1.6$, toutes ayant des parties réelles strictement négatives, ce qui confirme la stabilité asymptotique des deux matrices. Pour la combinaison convexe, nous considérons le cas où $\theta = 0.5$. Les valeurs propres de $A(0.5)$ sont alors $-1.75, -1.65, -1.65, -1.4$, indiquant également une stabilité asymptotique du système à cette valeur de θ .

Pour garantir la stabilité de $A(\theta)$ pour tout $\theta \in [0, 1]$, nous vérifions les conditions LMI suivantes :

$$A_i^T P_i + P_i A_i < 0, \quad P_i > 0, \quad i = 1, 2.$$

Ces LMI ont été résolues numériquement à l'aide de MATLAB. Les résultats confirment la faisabilité des LMI, avec les matrices définies positives suivantes :

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.4008 & 0.0453 & 0.0027 & 0.0003 \\ 0.0453 & 0.5106 & 0.0338 & 0.0046 \\ 0.0027 & 0.0338 & 0.4044 & 0.0495 \\ 0.0003 & 0.0046 & 0.0495 & 0.6019 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0.5001 & -0.0000 & 0.0264 & 0.0000 \\ -0.0000 & 0.4348 & 0.0000 & 0.0100 \\ 0.0264 & 0.0000 & 0.5584 & -0.0000 \\ 0.0000 & 0.0100 & -0.0000 & 0.4766 \end{bmatrix}.$$

Les valeurs propres de P_1 sont $0.3769, 0.3934, 0.5320, 0.6154$, et celles de P_2 sont $0.4326, 0.4789, 0.4899, 0.5686$, toutes positives, confirmant que $P_1, P_2 > 0$. Ces résultats satisfont le théorème de stabilité, garantissant que le système $A(\theta)$ est asymptotiquement stable pour tout $\theta \in [0, 1]$, y compris à $\theta = 0.5$.

5.6 Définition d'un système LPV discret

Un système linéaire à paramètres variants (LPV) discret est un système dynamique dont les matrices d'état varient en fonction de paramètres. Il est décrit par l'équation suivante [38] :

$$x_{i+1} = A(\theta)x_i, \quad (2.14)$$

où $x_i \in \mathbb{R}^n$ représente le vecteur d'état à l'instant i , et $A(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est la matrice dynamique dépendante du paramètre θ . Comme dans le cas continu, $A(\theta)$ est une combinaison convexe :

$$A(\theta) = (1 - \theta)A_1 + \theta A_2, \quad \theta \in [0, 1],$$

où A_1 et A_2 sont des matrices.

Analyse de la stabilité

L'analyse de la stabilité est basée sur une fonction de Lyapunov quadratique :

$$V(x_i) = x_i^T P(\theta) x_i,$$

où $P(\theta)$ est une matrice symétrique définie positive, également exprimée comme une combinaison linéaire convexe :

$$P(\theta) = (1 - \theta)P_1 + \theta P_2,$$

La différence de la fonction de Lyapunov s'exprime comme :

$$\Delta V(x_i) = V(x_{i+1}) - V(x_i). \quad (2.15)$$

En remplaçant (2.15), on obtient :

$$\begin{aligned} \Delta V(x_i) &= x_{i+1}^T P(\theta) x_{i+1} - x_i^T P(\theta) x_i, \\ &= x_i^T A^T(\theta) P(\theta) A(\theta) x_i - x_i^T P(\theta) x_i, \\ &= x_i^T [A^T(\theta) P(\theta) A(\theta) - P(\theta)] x_i. \end{aligned}$$

Pour assurer la stabilité asymptotique, il faut que $\Delta V(x_i) < 0$ pour tout $x_i \neq 0$, ce qui équivaut à :

$$A^T(\theta) P(\theta) A(\theta) - P(\theta) < 0, \quad \forall \theta \in [0, 1].$$

Substituons les expressions de $A(\theta)$ et $P(\theta)$ dans la condition suivante :

$$\begin{aligned} A^T(\theta) P(\theta) A(\theta) - P(\theta) &= (1 - \theta)^3 A_1^T P_1 A_1 + (1 - \theta)^2 \theta A_1^T P_1 A_2 + (1 - \theta)^2 \theta A_1^T P_2 A_1 \\ &\quad + (1 - \theta) \theta^2 A_1^T P_2 A_2 + (1 - \theta)^2 \theta A_2^T P_1 A_1 \\ &\quad + (1 - \theta) \theta^2 A_2^T P_1 A_2 + (1 - \theta) \theta^2 A_2^T P_2 A_1 + \theta^3 A_2^T P_2 A_2 \\ &\quad - (1 - \theta) P_1 - \theta P_2. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Or, nous avons l'identité suivante :

$$1 = \theta^2 + 2\theta(1 - \theta) + (1 - \theta)^2,$$

ce qui nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} (1 - \theta) P_1 + \theta P_2 &= [(1 - \theta) P_1 + \theta P_2] \theta^2 + 2 [(1 - \theta) P_1 + \theta P_2] \theta (1 - \theta) \\ &\quad + [(1 - \theta) P_1 + \theta P_2] (1 - \theta)^2, \\ &= (1 - \theta) \theta^2 P_1 + \theta^3 P_2 + 2\theta(1 - \theta)^2 P_1 + 2\theta^2(1 - \theta) P_2 \\ &\quad + (1 - \theta)^3 P_1 + \theta(1 - \theta)^2 P_2. \end{aligned} \quad (2.17)$$

En remplaçant l'expression (2.17) dans la condition (2.16), on obtient l'équation développée suivante :

$$\begin{aligned}
 A^T(\theta)P(\theta)A(\theta) - P(\theta) &= (1 - \theta)^3 (A_1^T P_1 A_1 - P_1) \\
 &\quad + (1 - \theta)^2 \theta (A_1^T P_1 A_2 - P_1) + (1 - \theta)^2 \theta (A_2^T P_1 A_1 - P_1) \\
 &\quad + (1 - \theta)^2 \theta (A_1^T P_2 A_1 - P_2) \\
 &\quad + (1 - \theta) \theta^2 (A_1^T P_2 A_2 - P_2) + (1 - \theta) \theta^2 (A_2^T P_2 A_1 - P_2) \\
 &\quad + (1 - \theta) \theta^2 (A_2^T P_1 A_2 - P_1) \\
 &\quad + \theta^3 (A_2^T P_2 A_2 - P_2).
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

On suppose que les matrices A_1 et A_2 sont asymptotiquement stables, ce qui signifie que toutes leurs valeurs propres λ_i vérifient $|\lambda_i| < 1$ pour $i = 1, 2$.

Dans ce cas, il existe des matrices symétriques définies positives P_1 et P_2 telles que :

$$A_1^T P_1 A_1 - P_1 < 0, \quad A_2^T P_2 A_2 - P_2 < 0,$$

$$A_1^T P_2 A_1 - P_2 < 0, \quad A_2^T P_1 A_2 - P_1 < 0.$$

Ces inégalités garantissent que plusieurs des termes de l'expression (2.18) sont définis négatifs.

Pour les termes mixtes, comme $A_1^T P_1 A_2 - P_1$ ou $A_2^T P_1 A_1 - P_1$. Supposons que x un vecteur propre commun aux matrices A_1 et A_2 , telles que $A_1 x = \lambda_1 x$ et $A_2 x = \lambda_2 x$, avec $|\lambda_1| < 1$, $|\lambda_2| < 1$, car A_1 et A_2 sont asymptotiquement stables. On analyse l'expression suivante :

$$x^T (A_1^T P_1 A_2 - P_1) x,$$

où $P_1 > 0$ est une matrice symétrique définie positive.

Puisque $A_1 x = \lambda_1 x$, on a $x^T A_1^T = \bar{\lambda}_1 x^T$, et $A_2 x = \lambda_2 x$, donc :

$$x^T A_1^T P_1 A_2 x = x^T A_1^T P_1 (\lambda_2 x) = \bar{\lambda}_1 x^T P_1 (\lambda_2 x) = \bar{\lambda}_1 \lambda_2 x^T P_1 x.$$

Ainsi :

$$x^T (A_1^T P_1 A_2 - P_1) x = \bar{\lambda}_1 \lambda_2 x^T P_1 x - x^T P_1 x = (\bar{\lambda}_1 \lambda_2 - 1) x^T P_1 x.$$

Comme $P_1 > 0$, on a $x^T P_1 x > 0$ pour $x \neq 0$. La condition pour que l'expression soit négative est :

$$\bar{\lambda}_1 \lambda_2 - 1 < 0.$$

Dans le cas où A_1 et A_2 ne partagent pas nécessairement le même vecteur propre. Soit x_1 un vecteur propre de A_1 tel que $A_1 x_1 = \lambda_1 x_1$, avec $|\lambda_1| < 1$. Nous analysons l'expression suivante :

$$x_1^T (A_1^T P_1 A_2 - P_1) x_1 = \bar{\lambda}_1 x_1^T P_1 A_2 x_1 - x_1^T P_1 x_1 = x_1^T P_1 (\bar{\lambda}_1 A_2 - I) x_1.$$

Soit x_2 un vecteur propre de A_2 tel que $A_2 x_2 = \lambda_2 x_2$, avec $|\lambda_2| < 1$. Calculons :

$$x_2^T (\bar{\lambda}_1 A_2 - I) x_2 = \bar{\lambda}_1 x_2^T A_2 x_2 - x_2^T x_2 = \bar{\lambda}_1 \lambda_2 x_2^T x_2 - x_2^T x_2 = x_2^T (\bar{\lambda}_1 \lambda_2 - 1) x_2.$$

Puisque $|\lambda_1| < 1$ et $|\lambda_2| < 1$, on a :

$$|\bar{\lambda}_1 \lambda_2| = |\lambda_1| |\lambda_2| < 1,$$

ce qui implique $\bar{\lambda}_1 \lambda_2 - 1 < 0$. Ainsi, l'expression est définie négative :

$$A_1^T P_1 A_2 - P_1 < 0.$$

De même pour les autres termes mixtes, comme $x_2^T (A_2^T P_1 A_1 - P_1) x_2$, on obtient :

$$x_2^T (A_2^T P_1 A_1 - P_1) x_2 = (\bar{\lambda}_2 A_1 - 1) x_2^T P_1 x_2 < 0,$$

Ainsi :

$$x_1^T (\bar{\lambda}_2 A_1 - I) x_1 = \bar{\lambda}_2 x_1^T A_1 x_1 - x_1^T x_1 = \bar{\lambda}_2 \lambda_1 x_1^T x_1 - x_1^T x_1 = x_1^T (\bar{\lambda}_2 \lambda_1 - 1) x_1.$$

car $|\bar{\lambda}_2 \lambda_1| < 1$. Cela s'applique à tous les termes mixtes de l'équation (2.18). Ainsi, tous les termes contribuent à la négativité définie de :

$$A^T(\theta) P(\theta) \bar{A}(\theta) - P(\theta) < 0.$$

On peut alors conclure que la matrice $A(\theta)$ est asymptotiquement stable pour tout $\theta \in [0, 1]$.

Nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème 2.7 *Soit*

$$A(\theta) = (1 - \theta)A_1 + \theta A_2,$$

avec $\theta \in [0, 1]$. Si A_1 et A_2 sont asymptotiquement stables, alors il existe une matrice $P(\theta) = P(\theta)^T > 0$ telle que :

$$A^T(\theta) P(\theta) A(\theta) - P(\theta) < 0,$$

et le système (2.14) est asymptotiquement stable pour tout $\theta \in [0, 1]$.

6 Conditions de stabilité pour la combinaison convexe de matrices positives

Dans cette section, nous proposons les conditions pour que le système (2.11) soit positif et asymptotiquement stable, en utilisant les critères des valeurs propres et de Gershgorin.

Soient $A_1 = [a_{ij}^{(1)}]$ et $A_2 = [a_{ij}^{(2)}]$ deux matrices de Metzler asymptotiquement stables, c'est-à-dire $a_{ij}^{(1)} \geq 0, a_{ij}^{(2)} \geq 0$ pour $i \neq j$, et toutes leurs valeurs propres satisfont $\text{Re}(s_i) < 0$. Considérons la combinaison convexe :

$$A(\theta) = (1 - \theta)A_1 + \theta A_2, \quad 0 \leq \theta \leq 1.$$

6.1 Conditions des valeurs propres

Le système positif est asymptotiquement stable si et seulement si tous les coefficients du polynôme caractéristique :

$$\det(sI_n - A(\theta)) = s^n + a_{n-1}(\theta)s^{n-1} + \dots + a_1(\theta)s + a_0(\theta),$$

sont positifs, c'est-à-dire :

$$a_k(\theta) > 0, \quad k = 0, \dots, n-1, \quad \forall \theta \in [0, 1].$$

Preuve. : Puisque A_1 et A_2 sont stables ($a_k^{(1)} > 0, a_k^{(2)} > 0$), et que l'ensemble des matrices de Metzler stables est convexe, les coefficients $a_k(\theta)$ restent positifs pour tout $\theta \in [0, 1]$, garantissant $\text{Re}(s_i(\theta)) < 0$. ■

6.2 Conditions de Gershgorin

Pour la matrice de Metzler $A(\theta) = [a_{ij}(\theta)]$, les disques de Gershgorin sont :

$$|s - a_{ii}(\theta)| \leq \sum_{j \neq i} a_{ij}(\theta), \quad i = 1, \dots, n,$$

où :

$$a_{ii}(\theta) = (1 - \theta) a_{ii}^{(1)} + \theta a_{ii}^{(2)}, \quad \sum_{j \neq i} a_{ij}(\theta) = (1 - \theta) \sum_{j \neq i} a_{ij}^{(1)} + \theta \sum_{j \neq i} a_{ij}^{(2)}.$$

Condition de stabilité : Une condition suffisante pour la stabilité asymptotique est :

$$a_{ii}(\theta) + \sum_{j \neq i} a_{ij}(\theta) < 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad \forall \theta \in [0, 1].$$

Preuve. : Si A_1 et A_2 satisfont :

$$a_{ii}^{(1)} + \sum_{j \neq i} a_{ij}^{(1)} < 0, \quad a_{ii}^{(2)} + \sum_{j \neq i} a_{ij}^{(2)} < 0,$$

alors :

$$a_{ii}(\theta) + \sum_{j \neq i} a_{ij}(\theta) = (1 - \theta) \left(a_{ii}^{(1)} + \sum_{j \neq i} a_{ij}^{(1)} \right) + \theta \left(a_{ii}^{(2)} + \sum_{j \neq i} a_{ij}^{(2)} \right) < 0.$$

De même pour les colonnes :

$$a_{jj}(\theta) + \sum_{i \neq j} a_{ij}(\theta) < 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Cela place les disques dans le demi-plan gauche, garantissant $\text{Re}(s_i(\theta)) < 0$. ■

Nous résumons ces résultats dans le théorème suivant,

Théorème 2.8 *La combinaison convexe*

$$A(\theta) = (1 - \theta)A_1 + \theta A_2,$$

est positive (car $A(\theta)$ est une matrice de Metzler) et asymptotiquement stable pour tout $\theta \in [0, 1]$, vérifiant :

- $a_k(\theta) > 0$ (valeurs propres),
- $a_{ii}(\theta) + \sum_{j \neq i} a_{ij}(\theta) < 0$ (Gershgorin).

7 Discrétisation utilisant une combinaison convexe des matrices dynamiques

En nous basant sur la discrétisation des systèmes à temps continu, nous pouvons discrétiser le système en considérant une combinaison linéaire convexe des matrices dynamiques, avec un paramètre θ . En appliquant cette approche, nous obtenons la représentation discrète suivante [11, 22] :

$$\begin{cases} x_{i+1} = \tilde{A}(\theta)x_i + \tilde{B}u_i, \\ y_i = Cx_i + Du_i, \end{cases}$$

où nous définissons :

$$\tilde{A}(\theta) = I + h[(1 - \theta)A_1 + \theta A_2], \quad \tilde{B} = hB,$$

avec $\theta \in [0, 1]$, $h > 0$ le pas de discrétisation, et I la matrice identité.

7.1 Conditions de stabilité du système discrétisé

Supposons que s_{l1} et s_{l2} sont les valeurs propres des matrices A_1 et A_2 , respectivement, et que z_l sont les valeurs propres de la matrice $\tilde{A}(\theta)$ [11], nous avons :

$$z_l = 1 + h[(1 - \theta)s_{l1} + \theta s_{l2}], \quad l = 1, \dots, n.$$

Pour le système continu, si A_1 et A_2 sont des matrices asymptotiquement stables (c'est-à-dire $\text{Re}(s_{l1}) < 0$ et $\text{Re}(s_{l2}) < 0$), alors leur combinaison linéaire convexe est également asymptotiquement stable. Pour le système discrétisé, la stabilité exige que $|z_l| < 1$.

L'objectif est de vérifier si la condition $|z_l| < 1$ pour le système discrétisé est satisfaite lorsque $\text{Re}(s_{l1}) < 0$ et $\text{Re}(s_{l2}) < 0$ pour le système continu, et vice versa, pour tout $h > 0$.

Théorème 2.9 *Le système discrétisé est asymptotiquement stable pour tout $h > 0$ admissible si et seulement si le système continu est asymptotiquement stable.*

Preuve.

1. Du système discrétisé vers le système continu :

Commençons de l'expression des valeurs propres :

$$z_l = 1 + h[(1 - \theta)s_{l1} + \theta s_{l2}].$$

Nous pouvons exprimer $(1 - \theta)s_{l1} + \theta s_{l2}$ en fonction de z_l :

$$(1 - \theta)s_{l1} + \theta s_{l2} = \frac{z_l - 1}{h}.$$

Si $z_l = |z_l| \exp(j\psi_l)$, alors :

$$(1 - \theta)s_{l1} + \theta s_{l2} = \frac{|z_l| \exp(j\psi_l) - 1}{h},$$

$$\text{Re}((1 - \theta)s_{l1} + \theta s_{l2}) = \frac{|z_l| \cos(\psi_l) - 1}{h}.$$

Pour que le système continu soit stable ($\text{Re}((1 - \theta)s_{l1} + \theta s_{l2}) < 0$), il faut que :

$$|z_l| \cos(\psi_l) - 1 < 0 \Rightarrow |z_l| \cos(\psi_l) < 1.$$

Puisque la stabilité du système discrétisé exige $|z_l| < 1$, cette condition garantit que $|z_l| \cos(\psi_l) < 1$, confirmant que le système discrétisé est stable si et seulement si le système continu l'est.

2. Du système continu vers le système discrétisé :

Supposons que le système continu est asymptotiquement stable, c'est-à-dire que toutes les valeurs propres $s_l = (1 - \theta)s_{l1} + \theta s_{l2}$ satisfont $\text{Re}(s_l) < 0$, où s_{l1} et s_{l2} sont les valeurs propres de A_1 et A_2 . Pour le système discrétisé, les valeurs propres sont données par :

$$z_l = 1 + h[(1 - \theta)s_{l1} + \theta s_{l2}],$$

où $s_{l1} = |s_{l1}| e^{j\phi_{l1}}$ et $s_{l2} = |s_{l2}| e^{j\phi_{l2}}$. Nous devons vérifier que $|z_l|^2 < 1$.

Calcul de la magnitude :

Développons l'expression pour z_l :

$$z_l = 1 + h[(1 - \theta)|s_{l1}|(\cos \phi_{l1} + j \sin \phi_{l1}) + \theta |s_{l2}|(\cos \phi_{l2} + j \sin \phi_{l2})],$$

$$z_l = 1 + h[(1 - \theta)|s_{l1}| \cos \phi_{l1} + \theta|s_{l2}| \cos \phi_{l2}] + jh[(1 - \theta)|s_{l1}| \sin \phi_{l1} + \theta|s_{l2}| \sin \phi_{l2}].$$

Calculons $|z_l|^2$:

$$\begin{aligned} |z_l|^2 &= \left(1 + h[(1 - \theta)|s_{l1}| \cos \phi_{l1} + \theta|s_{l2}| \cos \phi_{l2}]\right)^2 + \left(h[(1 - \theta)|s_{l1}| \sin \phi_{l1} + \theta|s_{l2}| \sin \phi_{l2}]\right)^2, \\ &= 1 + 2h[(1 - \theta)|s_{l1}| \cos \phi_{l1} + \theta|s_{l2}| \cos \phi_{l2}] \\ &\quad + h^2 \left((1 - \theta)^2 |s_{l1}|^2 \cos^2 \phi_{l1} + 2(1 - \theta)\theta |s_{l1}| |s_{l2}| \cos \phi_{l1} \cos \phi_{l2} + \theta^2 |s_{l2}|^2 \cos^2 \phi_{l2} \right) \\ &\quad + h^2 \left((1 - \theta)^2 |s_{l1}|^2 \sin^2 \phi_{l1} + 2(1 - \theta)\theta |s_{l1}| |s_{l2}| \sin \phi_{l1} \sin \phi_{l2} + \theta^2 |s_{l2}|^2 \sin^2 \phi_{l2} \right), \\ &= 1 + 2h[(1 - \theta)|s_{l1}| \cos \phi_{l1} + \theta|s_{l2}| \cos \phi_{l2}] + h^2(1 - \theta)^2 |s_{l1}|^2 + h^2 \theta^2 |s_{l2}|^2 \\ &\quad + 2h^2(1 - \theta)\theta |s_{l1}| |s_{l2}| \cos(\phi_{l1} - \phi_{l2}). \end{aligned}$$

Pour la stabilité, $|z_l|^2 < 1$ implique :

$$\begin{aligned} &2h[(1 - \theta)|s_{l1}| \cos \phi_{l1} + \theta|s_{l2}| \cos \phi_{l2}] \\ &+ h^2(1 - \theta)^2 |s_{l1}|^2 + h^2 \theta^2 |s_{l2}|^2 + 2h^2(1 - \theta)\theta |s_{l1}| |s_{l2}| \cos(\phi_{l1} - \phi_{l2}) < 0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Factorisons :

$$\begin{aligned} &h \left[2[(1 - \theta)|s_{l1}| \cos \phi_{l1} + \theta|s_{l2}| \cos \phi_{l2}] + h((1 - \theta)^2 |s_{l1}|^2 + \theta^2 |s_{l2}|^2 \right. \\ &\quad \left. + 2(1 - \theta)\theta |s_{l1}| |s_{l2}| \cos(\phi_{l1} - \phi_{l2})) \right] < 0. \end{aligned}$$

Puisque $h > 0$, nous devons avoir :

$$\begin{aligned} &2[(1 - \theta)|s_{l1}| \cos \phi_{l1} + \theta|s_{l2}| \cos \phi_{l2}] + h((1 - \theta)^2 |s_{l1}|^2 + \theta^2 |s_{l2}|^2 \\ &+ 2(1 - \theta)\theta |s_{l1}| |s_{l2}| \cos(\phi_{l1} - \phi_{l2})) < 0. \end{aligned}$$

Le système continu est stable si :

$$\operatorname{Re}((1 - \theta)s_{l1} + \theta s_{l2}) = (1 - \theta)|s_{l1}| \cos \phi_{l1} + \theta|s_{l2}| \cos \phi_{l2} < 0.$$

Ainsi :

$$2[(1 - \theta)|s_{l1}| \cos \phi_{l1} + \theta|s_{l2}| \cos \phi_{l2}] < 0,$$

et le terme $h((1 - \theta)^2 |s_{l1}|^2 + \theta^2 |s_{l2}|^2 + 2(1 - \theta)\theta |s_{l1}| |s_{l2}| \cos(\phi_{l1} - \phi_{l2}))$ est positif pour $\cos(\phi_{l1} - \phi_{l2}) > 0$. Notez que la valeur admissible de $h > 0$ doit satisfaire la condition (2.19).

■

Théorème 2.10 *Le pas de discrétisation h pour le système LPV asymptotiquement stable satisfait :*

$$h < \min_{1 \leq l \leq n} \min_{\theta \in [0,1]} \frac{2[(1 - \theta)\alpha_{l1} + \theta\alpha_{l2}]}{(1 - \theta)^2(\alpha_{l1}^2 + \beta_{l1}^2) + 2(1 - \theta)\theta(\alpha_{l1}\alpha_{l2} + \beta_{l1}\beta_{l2}) + \theta^2(\alpha_{l2}^2 + \beta_{l2}^2)},$$

où $s_{l1} = -\alpha_{l1} + j\beta_{l1}$, $\alpha_{l1} > 0$, sont les valeurs propres de A_1 , et $s_{l2} = -\alpha_{l2} + j\beta_{l2}$, $\alpha_{l2} > 0$, sont les valeurs propres de A_2 . Avec $l = 1, \dots, n$ sont les valeurs propres de la matrice $\tilde{A}(\theta)$.

Preuve.

Puisque $\text{Re}(s_{l1}) < 0$ et $\text{Re}(s_{l2}) < 0$, posons $s_{l1} = -\alpha_{l1} + j\beta_{l1}$, $\alpha_{l1} > 0$, et $s_{l2} = -\alpha_{l2} + j\beta_{l2}$, $\alpha_{l2} > 0$. La combinaison convexe est :

$$(1 - \theta)s_{l1} + \theta s_{l2} = -(1 - \theta)\alpha_{l1} - \theta\alpha_{l2} + j[(1 - \theta)\beta_{l1} + \theta\beta_{l2}].$$

Définissons $\alpha_l = (1 - \theta)\alpha_{l1} + \theta\alpha_{l2}$, $\beta_l = (1 - \theta)\beta_{l1} + \theta\beta_{l2}$, donc :

$$z_l = 1 + h[(1 - \theta)s_{l1} + \theta s_{l2}] = 1 - h\alpha_l + jh\beta_l.$$

La magnitude au carré est :

$$|z_l|^2 = (1 - h\alpha_l)^2 + (h\beta_l)^2 = 1 - 2h\alpha_l + h^2(\alpha_l^2 + \beta_l^2).$$

Pour la stabilité, $|z_l|^2 < 1$:

$$1 - 2h\alpha_l + h^2(\alpha_l^2 + \beta_l^2) < 1,$$

$$-2h\alpha_l + h^2(\alpha_l^2 + \beta_l^2) < 0.$$

Factorisons :

$$h[h(\alpha_l^2 + \beta_l^2) - 2\alpha_l] < 0.$$

Puisque $h > 0$:

$$h(\alpha_l^2 + \beta_l^2) - 2\alpha_l < 0,$$

$$h < \frac{2\alpha_l}{\alpha_l^2 + \beta_l^2}.$$

Substituons $\alpha_l = (1 - \theta)\alpha_{l1} + \theta\alpha_{l2}$, $\beta_l = (1 - \theta)\beta_{l1} + \theta\beta_{l2}$, et calculons :

$$\alpha_l^2 + \beta_l^2 = (1 - \theta)^2(\alpha_{l1}^2 + \beta_{l1}^2) + 2(1 - \theta)\theta(\alpha_{l1}\alpha_{l2} + \beta_{l1}\beta_{l2}) + \theta^2(\alpha_{l2}^2 + \beta_{l2}^2).$$

Ainsi :

$$h < \frac{2[(1 - \theta)\alpha_{l1} + \theta\alpha_{l2}]}{(1 - \theta)^2(\alpha_{l1}^2 + \beta_{l1}^2) + 2(1 - \theta)\theta(\alpha_{l1}\alpha_{l2} + \beta_{l1}\beta_{l2}) + \theta^2(\alpha_{l2}^2 + \beta_{l2}^2)}.$$

Cette condition doit être satisfaite pour tout l et tout $\theta \in [0, 1]$, donc :

$$h < \min_{1 \leq l \leq n} \min_{\theta \in [0, 1]} \frac{2[(1 - \theta)\alpha_{l1} + \theta\alpha_{l2}]}{(1 - \theta)^2(\alpha_{l1}^2 + \beta_{l1}^2) + 2(1 - \theta)\theta(\alpha_{l1}\alpha_{l2} + \beta_{l1}\beta_{l2}) + \theta^2(\alpha_{l2}^2 + \beta_{l2}^2)}.$$

Avec $l = 1, \dots, n$ sont les valeurs propres de la matrice $\tilde{A}(\theta)$. ■

Exemple 2.2 Considérons un système avec une combinaison convexe

$$A = (1 - \theta)A_1 + \theta A_2,$$

où :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

Les valeurs propres de A_1 sont :

$$s_{1,1} = -1, \quad s_{1,2} = -2,$$

avec $\alpha_{1,1} = 1, \beta_{1,1} = 0, \alpha_{1,2} = 2, \beta_{1,2} = 0$.

Les valeurs propres de A_2 sont :

$$s_{2,1} = -1, \quad s_{2,2} = -4,$$

avec $\alpha_{2,1} = 1, \beta_{2,1} = 0, \alpha_{2,2} = 4, \beta_{2,2} = 0$.

Pour $\theta = 0.5$, la matrice combinée est :

$$A(0.5) = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 \\ -1 & -3.5 \end{bmatrix}.$$

Les valeurs propres de $A(0.5)$ sont :

$$s_1 = -0.6771, \quad s_2 = -3.3229,$$

avec $\alpha_1 = 0.6771, \alpha_2 = 3.3229, \beta_1 = \beta_2 = 0$.

Le schéma d'Euler explicite donne la matrice de discrétisation :

$$\tilde{A} = I + hA(0.5) = \begin{bmatrix} 1 - 0.5h & 0.5h \\ -h & 1 - 3.5h \end{bmatrix}.$$

Les valeurs propres de $\tilde{A}$ sont :

$$z_{1,2}(h) = 1 - \frac{4h}{2} \pm \frac{\sqrt{7}h}{2},$$

où :

$$\alpha = \frac{4 + \sqrt{7}}{2} \approx 3.3229, \quad \beta = \frac{4 - \sqrt{7}}{2} \approx 0.6771,$$

donc :

$$z_1(h) = 1 - \alpha h, \quad z_2(h) = 1 - \beta h.$$

Pour la stabilité, il faut que $|z_i(h)| < 1$.

Condition sur $z_1(h)$:

$$|1 - \alpha h| < 1 \implies 0 < h < \frac{2}{\alpha} \approx 0.6019.$$

Condition sur $z_2(h)$:

$$|1 - \beta h| < 1 \implies 0 < h < \frac{2}{\beta} \approx 2.9537.$$

Borne classique :

$$h < \min \left(\frac{2}{0.6771}, \frac{2}{3.3229} \right) \approx 0.6019.$$

Borne combinée :

D'après le théorème 2.10, la borne combinée est calculée comme :

$$h < \min_{1 \leq l \leq n} \frac{2[(1 - \theta)\alpha_{l1} + \theta\alpha_{l2}]}{(1 - \theta)^2(\alpha_{l1}^2 + \beta_{l1}^2) + 2(1 - \theta)\theta(\alpha_{l1}\alpha_{l2} + \beta_{l1}\beta_{l2}) + \theta^2(\alpha_{l2}^2 + \beta_{l2}^2)}.$$

Pour les paires de valeurs propres :

- Paire $(s_{1,1}, s_{2,2})$: $h_1 \approx 0.6047$,
- Paire $(s_{1,2}, s_{2,1})$: $h_2 \approx 1.0769$.

Ainsi, la borne combinée est :

$$h < 0.6047$$

Ainsi, $h < 0.6047$ garantit la stabilité discrète, en cohérence avec la stabilité du système continu.

Dans ce chapitre, nous avons étudié la stabilité des systèmes unidimensionnels, incluant les systèmes linéaires classiques, les systèmes positifs, ainsi que les systèmes à paramètres variants (LPV). L'introduction de la combinaison convexe de matrices dynamiques nous a permis de modéliser les incertitudes ou variations paramétriques.

Nous avons également abordé le processus de discrétisation basé sur cette combinaison convexe. Les conditions de stabilité formulées à travers ces approches constituent une base solide pour l'étude des systèmes bidimensionnels présentée dans le chapitre suivant.

Ce chapitre se concentre sur l'étude des modèles linéaires discrets et continus bidimensionnels (2D) décrits par le modèle de Roesser, en considérant à la fois les cas standard et singuliers. Les systèmes 2D discrets trouvent de nombreuses applications, notamment dans le traitement d'images numériques et le contrôle de processus itératifs. L'analyse se concentre sur la solvabilité et la stabilité asymptotique des systèmes discrets et continus. Les outils utilisés comprennent les inégalités matricielles linéaires (IML) et les fonctions de Lyapunov pour assurer la stabilité des modèles standards et singuliers [23, 9, 2, 24, 25, 26, 27, 21].

Modèle de Roesser

Considérons le modèle de Roesser 2D [15, 24, 25] décrit par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_{i+1,j}^h \\ x_{i,j+1}^v \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{ij}^h \\ x_{ij}^v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u_{ij}, \\ y_{ij} &= (C_1, C_2) \begin{bmatrix} x_{ij}^h \\ x_{ij}^v \end{bmatrix} + D u_{ij} \quad i, j \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Où $x_{ij}^h \in \mathbb{R}^{n_1}$ et $x_{ij}^v \in \mathbb{R}^{n_2}$ sont les vecteurs d'états horizontaux et verticaux aux points $(i, j) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$, $u_{ij} \in \mathbb{R}^m$ et $y_{ij} \in \mathbb{R}^p$ sont les vecteurs d'entrées et de sorties, respectivement et $A_{11} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$, $A_{12} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$, $A_{21} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_1}$, $A_{22} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times m}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times m}$, $C_1 \in \mathbb{R}^{p \times n_1}$, $C_2 \in \mathbb{R}^{p \times n_2}$, $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$.

Les conditions aux limites pour l'équation (3.1) ont la forme :

$$x_{0j}^h \quad \text{pour } j \in \mathbb{Z}_+ \quad \text{et} \quad x_{i0}^v \quad \text{pour } i \in \mathbb{Z}_+$$

Soit $\mathbb{R}_+^{p \times q}$ l'ensemble des matrices $p \times q$ avec des entrées réelles non négatives et $\mathbb{R}_+^p := \mathbb{R}_+^{p \times 1}$. La solution de l'équation (3.1) satisfaisant les conditions aux limites a la forme suivante :

$$x_{ij} = \begin{pmatrix} x_{i,j}^h \\ x_{i,j}^v \end{pmatrix} = x_{bc}(i, j) + \sum_{k,l \in \mathbb{D}_{ij}} M_{i-k,j-l} u_{kl},$$

où

$$x_{bc}(i, j) = \sum_{k=0}^i T_{i-k, j} \begin{bmatrix} 0 \\ x_{k0}^\nu \end{bmatrix} + \sum_{l=0}^j T_{i, j-l} \begin{bmatrix} x_{0l}^\nu \\ 0 \end{bmatrix}.$$

La composante liée aux conditions initiales non nulles est donnée par la formule suivante :

$$M_{i-k, j-l} := T_{i-k-1, j-l} \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} + T_{i-k, j-l-1} \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

$$D_{ij} := \{(k, l) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+; \quad 0 \leq k \leq i; \quad 0 \leq l \leq j, \quad k+l \neq i+j\}.$$

Les matrices de transitions du modèle donné par (3.1) sont définies par ce qui suit :

$$T_{ij} := \begin{cases} I_n(\text{matrice d'identité}) & \text{pour } i = j = 0 \\ T_{10}T_{i-1, j} + T_{01}T_{i, j-1} & \text{pour } i, j \in \mathbb{Z}_+ (i+j) > 0. \\ 0(\text{la matrice nulle}) & \text{pour } i < 0 \text{ ou } j < 0 \end{cases}$$

où,

$$T_{10} := \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, T_{01} := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

Remarque 3.1 La solution présentée est obtenue par l'application de la transformation double en $\mathbb{Z}$.

1 Analyse de stabilité pour le modèle de Roesser 2D (temps discret)

Les conditions suivantes assurent la stabilité asymptotique interne d'un système bi-dimensionnel discret représenté par le modèle d'état de Roesser [2, 24, 25, 39].

- **Condition sur le déterminant** : Le modèle (3.1) est asymptotiquement stable si, pour tout $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ avec $|z_1|, |z_2| \leq 1$,

$$\det \begin{pmatrix} I_{n_1} - z_1 A_{11} & -z_1 A_{12} \\ -z_2 A_{21} & I_{n_2} - z_2 A_{22} \end{pmatrix} \neq 0.$$

- **Condition sur le rayon spectral** (Forme équivalente) : Le modèle (3.1) est asymptotiquement stable si les deux conditions sont satisfaites :
 1. $\rho(A) < 1$, où $\rho(A)$ est le rayon spectral de la matrice A ,
 2. et pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| \leq 1$,

$$\rho(z(I_{n_1} - zA_{11})^{-1}A_{12} + A_{22}) < 1,$$

où ρ désigne le rayon spectral.

- **Condition basée sur l'approche de Lyapunov** : Pour évaluer la stabilité, une fonction candidate de Lyapunov est définie comme suit :

$$V(i, j) = (x_{i,j}^h)^T P_1 x_{i,j}^h + (x_{i,j}^\nu)^T P_2 x_{i,j}^\nu,$$

où $P_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ et $P_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ sont des matrices symétriques définies positives. Sous forme matricielle :

$$V(i, j) = \begin{pmatrix} x_{i,j}^h \\ x_{i,j}^v \end{pmatrix}^T P \begin{pmatrix} x_{i,j}^h \\ x_{i,j}^v \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}.$$

La condition de stabilité exige :

$$\hat{V}(i, j) - V(i, j) < 0,$$

où :

$$\hat{V}(i, j) = (x_{i+1,j}^h)^T P_1 x_{i+1,j}^h + (x_{i,j+1}^v)^T P_2 x_{i,j+1}^v. \quad (*)$$

Calcul de $\hat{V}(i, j)$: Substituer les équations du système (3.1) dans (*) :

Dans ce cas,

$$\begin{aligned} (x_{i+1,j}^h)^T P_1 x_{i+1,j}^h &= (A_{11} x_{i,j}^h + A_{12} x_{i,j}^v)^T P_1 (A_{11} x_{i,j}^h + A_{12} x_{i,j}^v), \\ &= ((x_{i,j}^h)^T A_{11}^T + (x_{i,j}^v)^T A_{12}^T) P_1 (A_{11} x_{i,j}^h + A_{12} x_{i,j}^v), \\ &= (x_{i,j}^h)^T A_{11}^T P_1 A_{11} x_{i,j}^h + (x_{i,j}^h)^T A_{11}^T P_1 A_{12} x_{i,j}^v \\ &\quad + (x_{i,j}^v)^T A_{12}^T P_1 A_{11} x_{i,j}^h + (x_{i,j}^v)^T A_{12}^T P_1 A_{12} x_{i,j}^v. \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} (x_{i,j+1}^v)^T P_2 x_{i,j+1}^v &= (A_{21} x_{i,j}^h + A_{22} x_{i,j}^v)^T P_2 (A_{21} x_{i,j}^h + A_{22} x_{i,j}^v), \\ &= ((x_{i,j}^h)^T A_{21}^T + (x_{i,j}^v)^T A_{22}^T) P_2 (A_{21} x_{i,j}^h + A_{22} x_{i,j}^v), \\ &= (x_{i,j}^h)^T A_{21}^T P_2 A_{21} x_{i,j}^h + (x_{i,j}^h)^T A_{21}^T P_2 A_{22} x_{i,j}^v \\ &\quad + (x_{i,j}^v)^T A_{22}^T P_2 A_{21} x_{i,j}^h + (x_{i,j}^v)^T A_{22}^T P_2 A_{22} x_{i,j}^v. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \hat{V}(i, j) &= (x_{i,j}^h)^T (A_{11}^T P_1 A_{11} + A_{21}^T P_2 A_{21}) x_{i,j}^h \\ &\quad + (x_{i,j}^h)^T (A_{11}^T P_1 A_{12} + A_{21}^T P_2 A_{22}) x_{i,j}^v \\ &\quad + (x_{i,j}^v)^T (A_{12}^T P_1 A_{11} + A_{22}^T P_2 A_{21}) x_{i,j}^h \\ &\quad + (x_{i,j}^v)^T (A_{12}^T P_1 A_{12} + A_{22}^T P_2 A_{22}) x_{i,j}^v. \end{aligned}$$

Calcul de la différence :

$$\begin{aligned} V(i, j) &= (x_{i,j}^h)^T P_1 x_{i,j}^h + (x_{i,j}^v)^T P_2 x_{i,j}^v, \\ \hat{V}(i, j) - V(i, j) &= (x_{i,j}^h)^T (A_{11}^T P_1 A_{11} + A_{21}^T P_2 A_{21} - P_1) x_{i,j}^h \\ &\quad + (x_{i,j}^h)^T (A_{11}^T P_1 A_{12} + A_{21}^T P_2 A_{22}) x_{i,j}^v \\ &\quad + (x_{i,j}^v)^T (A_{12}^T P_1 A_{11} + A_{22}^T P_2 A_{21}) x_{i,j}^h \\ &\quad + (x_{i,j}^v)^T (A_{12}^T P_1 A_{12} + A_{22}^T P_2 A_{22} - P_2) x_{i,j}^v. \end{aligned}$$

Sous forme matricielle :

$$\hat{V}(i, j) - V(i, j) = \begin{pmatrix} x_{i,j}^h \\ x_{i,j}^v \end{pmatrix}^T R \begin{pmatrix} x_{i,j}^h \\ x_{i,j}^v \end{pmatrix},$$

où :

$$R = \begin{pmatrix} A_{11}^T P_1 A_{11} - P_1 + A_{21}^T P_2 A_{21} & A_{11}^T P_1 A_{12} + A_{21}^T P_2 A_{22} \\ A_{12}^T P_1 A_{11} + A_{22}^T P_2 A_{21} & A_{12}^T P_1 A_{12} + A_{22}^T P_2 A_{22} - P_2 \end{pmatrix}.$$

Les conditions LMI pour la stabilité sont :

$$\begin{cases} P_1 = P_1^T > 0, \\ P_2 = P_2^T > 0, \\ A^T P A - P < 0, \end{cases}$$

ou :

$$\begin{cases} P_1 = P_1^T > 0, \\ P_2 = P_2^T > 0, \\ \begin{pmatrix} A_{11}^T P_1 A_{11} - P_1 + A_{21}^T P_2 A_{21} & A_{11}^T P_1 A_{12} + A_{21}^T P_2 A_{22} \\ A_{12}^T P_1 A_{11} + A_{22}^T P_2 A_{21} & A_{12}^T P_1 A_{12} + A_{22}^T P_2 A_{22} - P_2 \end{pmatrix} < 0. \end{cases}$$

Théorème 3.1 *Le modèle 2D de Roesser à temps discret est asymptotiquement stable si les conditions LMI suivantes sont satisfaites :*

$$\begin{cases} P_1 = P_1^T > 0, \\ P_2 = P_2^T > 0, \\ \begin{pmatrix} A_{11}^T P_1 A_{11} - P_1 + A_{21}^T P_2 A_{21} & A_{11}^T P_1 A_{12} + A_{21}^T P_2 A_{22} \\ A_{12}^T P_1 A_{11} + A_{22}^T P_2 A_{21} & A_{12}^T P_1 A_{12} + A_{22}^T P_2 A_{22} - P_2 \end{pmatrix} < 0. \end{cases}$$

1.1 Exemple d'analyse de stabilité pour un système de Roesser 2D

Pour illustrer l'application des conditions de stabilité basées sur l'approche de Lyapunov pour un modèle de Roesser 2D, nous considérons un exemple avec les matrices suivantes :

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{pmatrix} 0.5 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}, & A_{12} &= \begin{pmatrix} 0.1 & 0.05 \\ 0.05 & 0.1 \end{pmatrix}, \\ A_{21} &= \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 \end{pmatrix}, & A_{22} &= \begin{pmatrix} 0.6 & 0.1 \\ 0.1 & 0.5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Les conditions de stabilité sont formulées sous forme d'inégalités matricielles linéaires (LMI), comme décrit dans la section précédente. Pour résoudre ces LMI, nous avons utilisé la boîte à outils YALMIP sous MATLAB avec le solveur SeDuMi. Les matrices P_1 et P_2 sont définies comme des matrices symétriques définies positives, et la condition de stabilité exige que la matrice R , définie par :

$$R = \begin{pmatrix} A_{11}^T P_1 A_{11} - P_1 + A_{21}^T P_2 A_{21} & A_{11}^T P_1 A_{12} + A_{21}^T P_2 A_{22} \\ A_{12}^T P_1 A_{11} + A_{22}^T P_2 A_{21} & A_{12}^T P_1 A_{12} + A_{22}^T P_2 A_{22} - P_2 \end{pmatrix},$$

soit définie négative.

1.2 Résultats numériques

L'optimisation des LMI a été réalisée avec succès, indiquant que le système est asymptotiquement stable. Les résultats obtenus sont les suivants :

- **Matrice P_1 :**

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1.4212 & 0.2654 \\ 0.2654 & 1.2703 \end{pmatrix}.$$

- **Matrice P_2 :**

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1.0511 & -0.0403 \\ -0.0403 & 1.0739 \end{pmatrix}.$$

- **Matrice R :**

$$R = \begin{pmatrix} -0.8591 & 0.0566 & 0.2920 & 0.1556 \\ 0.0566 & -0.8978 & 0.2018 & 0.2427 \\ 0.2920 & 0.2018 & -0.6467 & 0.1613 \\ 0.1556 & 0.2427 & 0.1613 & -0.7800 \end{pmatrix}.$$

- **Valeurs propres de P_1 :**

$$\begin{pmatrix} 1.0699 \\ 1.6216 \end{pmatrix}.$$

- **Valeurs propres de P_2 :**

$$\begin{pmatrix} 1.0206 \\ 1.1043 \end{pmatrix}.$$

- **Valeurs propres de R :**

$$\begin{pmatrix} -1.1542 \\ -0.9993 \\ -0.8201 \\ -0.2100 \end{pmatrix}.$$

- **Conclusion :** Le système est asymptotiquement stable : une solution faisable aux LMI a été trouvée.

Les valeurs propres de P_1 et P_2 sont toutes positives, confirmant que ces matrices sont définies positives. Les valeurs propres de R sont toutes négatives, satisfaisant la condition $R < 0$, ce qui garantit la stabilité du système de Roesser 2D pour les matrices données.

2 Stabilité de la combinaison convexe (temps discret)

L'objectif de cette section est de garantir la stabilité asymptotique pour toute combinaison convexe des matrices d'état.

On considère deux matrices blocs asymptotiquement stables.

$$A_1 = \begin{pmatrix} A_{11}^1 & A_{12}^1 \\ A_{21}^1 & A_{22}^1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} A_{11}^2 & A_{12}^2 \\ A_{21}^2 & A_{22}^2 \end{pmatrix}.$$

La combinaison convexe est :

$$A(\alpha) = (1 - \alpha)A_1 + \alpha A_2, \quad \alpha \in [0, 1].$$

En utilisant une fonction candidate de Lyapunov :

$$V(i, j) = (x_{i,j}^h)^T P_1(\alpha) x_{i,j}^h + (x_{i,j}^v)^T P_2(\alpha) x_{i,j}^v,$$

$$P(\alpha) = \begin{pmatrix} P_1(\alpha) & 0 \\ 0 & P_2(\alpha) \end{pmatrix}, \quad P(\alpha) = \alpha P^1 + (1 - \alpha)P^2,$$

où $P^1 = \begin{pmatrix} P_1^1 & 0 \\ 0 & P_2^1 \end{pmatrix}$, $P^2 = \begin{pmatrix} P_1^2 & 0 \\ 0 & P_2^2 \end{pmatrix}$, la condition de stabilité est :

$$R(\alpha) = A(\alpha)^T P(\alpha) A(\alpha) - P(\alpha) < 0, \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

Ensuite :

$$\begin{aligned} R(\alpha) = & (1 - \alpha)^3 (A_1^T P_1 A_1 - P_1) \\ & + (1 - \alpha)^2 \alpha (A_1^T P_1 A_2 - P_1) + (1 - \alpha)^2 \alpha (A_2^T P_1 A_1 - P_1) \\ & + (1 - \alpha)^2 \alpha (A_1^T P_2 A_1 - P_2) \\ & + (1 - \alpha) \alpha^2 (A_1^T P_2 A_2 - P_2) + (1 - \alpha) \alpha^2 (A_2^T P_2 A_1 - P_2) \\ & + (1 - \alpha) \alpha^2 (A_2^T P_1 A_2 - P_1) \\ & + \alpha^3 (A_2^T P_2 A_2 - P_2). \end{aligned} \quad (3.2)$$

On suppose que les matrices A_1 et A_2 sont asymptotiquement stables, c'est-à-dire que leur rayon spectral vérifie $\rho(A_i) < 1$ pour $i = 1, 2$.

Sous cette hypothèse, il existe des matrices symétriques définies positives P_1 et P_2 telles que :

$$\begin{aligned} A_1^T P_1 A_1 - P_1 &< 0, & A_2^T P_2 A_2 - P_2 &< 0, \\ A_1^T P_2 A_1 - P_2 &< 0, & A_2^T P_1 A_2 - P_1 &< 0. \end{aligned}$$

Ces inégalités garantissent que plusieurs des termes de l'expression (3.2) sont des matrices définies négatives.

Concernant les termes mixtes tels que $A_1^T P_1 A_2 - P_1$ ou $A_2^T P_1 A_1 - P_1$, Soit x_1 un vecteur propre de A_1 tel que $A_1 x_1 = \lambda_1 x_1$, avec $|\lambda_1| < 1$. avec $|\lambda_1| \leq \rho(A_1) < 1$, où $\rho(A_1)$ est le rayon spectral de A_1 , cela garantit que A_1 est asymptotiquement stable. On analyse l'expression suivante :

$$x_1^T (A_1^T P_1 A_2 - P_1) x_1,$$

où $P_1 > 0$ est une matrice symétrique définie positive.

Puisque $A_1 x_1 = \lambda_1 x_1$, on a $x_1^T A_1^T = \bar{\lambda}_1 x_1^T$, et $A_2 x_1 = \lambda_2 x_1$, donc : Nous analysons l'expression suivante :

$$x_1^T (A_1^T P_1 A_2 - P_1) x_1 = \bar{\lambda}_1 x_1^T P_1 A_2 x_1 - x_1^T P_1 x_1 = x_1^T P_1 (\bar{\lambda}_1 A_2 - I) x_1.$$

Soit x_2 un vecteur propre de A_2 tel que $A_2 x_2 = \lambda_2 x_2$. Calculons :

$$x_2^T (\bar{\lambda}_1 A_2 - I) x_2 = \bar{\lambda}_1 x_2^T A_2 x_2 - x_2^T x_2 = \bar{\lambda}_1 \lambda_2 x_2^T x_2 - x_2^T x_2 = x_2^T (\bar{\lambda}_1 \lambda_2 - 1) x_2.$$

Puisque $|\lambda_1| \leq \rho(A_1) < 1$ et $|\lambda_2| \leq \rho(A_2) < 1$, on a :

$$|\bar{\lambda}_1 \lambda_2| = |\lambda_1| |\lambda_2| \leq \rho(A_1) \rho(A_2) < 1,$$

ce qui implique $\bar{\lambda}_1 \lambda_2 - 1 < 0$. Ainsi, l'expression est négative définie :

$$A_1^T P_1 A_2 - P_1 < 0.$$

De manière similaire, pour les autres termes mixtes, comme $x_2^T (A_2^T P_1 A_1 - P_1) x_2$, on obtient :

$$x_2^T (A_2^T P_1 A_1 - P_1) x_2 = (\bar{\lambda}_2 A_1 - 1) x_2^T P_1 x_2 < 0,$$

Ainsi :

$$x_1^T (\bar{\lambda}_2 A_1 - I) x_1 = \bar{\lambda}_2 x_1^T A_1 x_1 - x_1^T x_1 = \bar{\lambda}_2 \lambda_1 x_1^T x_1 - x_1^T x_1 = x_1^T (\bar{\lambda}_2 \lambda_1 - 1) x_1.$$

car $|\bar{\lambda}_2 \lambda_1| \leq \rho(A_2) \rho(A_1) < 1$. Cela s'applique à tous les termes mixtes de l'équation (3.2). Ainsi, tous les termes contribuent à la négativité définie de $R(\alpha)$ pour tout $0 \leq \alpha \leq 1$, sous l'hypothèse que $\rho(A_1) < 1$, $\rho(A_2) < 1$. On peut donc conclure que la matrice $A(\alpha)$ est asymptotiquement stable pour tout $\alpha \in [0, 1]$. Ainsi, les conditions LMI sont :

$$\begin{cases} P_1^1 = (P_1^1)^T > 0, \\ P_2^1 = (P_2^1)^T > 0, \\ P_1^2 = (P_1^2)^T > 0, \\ P_2^2 = (P_2^2)^T > 0, \\ A_1^T P_1^1 A_1 - P_1^1 < 0, \\ A_2^T P_2^2 A_2 - P_2^2 < 0, \end{cases}$$

ou, explicitement :

$$\begin{cases} P_1^1 = (P_1^1)^T > 0, \\ P_2^1 = (P_2^1)^T > 0, \\ P_1^2 = (P_1^2)^T > 0, \\ P_2^2 = (P_2^2)^T > 0, \\ \begin{pmatrix} (A_{11}^1)^T P_1^1 A_{11}^1 - P_1^1 + (A_{21}^1)^T P_2^1 A_{21}^1 & (A_{11}^1)^T P_1^1 A_{12}^1 + (A_{21}^1)^T P_2^1 A_{22}^1 \\ (A_{12}^1)^T P_1^1 A_{11}^1 + (A_{22}^1)^T P_2^1 A_{21}^1 & (A_{12}^1)^T P_1^1 A_{12}^1 + (A_{22}^1)^T P_2^1 A_{22}^1 - P_2^1 \end{pmatrix} < 0, \\ \begin{pmatrix} (A_{11}^2)^T P_1^2 A_{11}^2 - P_1^2 + (A_{21}^2)^T P_2^2 A_{21}^2 & (A_{11}^2)^T P_1^2 A_{12}^2 + (A_{21}^2)^T P_2^2 A_{22}^2 \\ (A_{12}^2)^T P_1^2 A_{11}^2 + (A_{22}^2)^T P_2^2 A_{21}^2 & (A_{12}^2)^T P_1^2 A_{12}^2 + (A_{22}^2)^T P_2^2 A_{22}^2 - P_2^2 \end{pmatrix} < 0, \end{cases}$$

Théorème 3.2 Soit deux matrices blocs asymptotiquement stables.

$$A_1 = \begin{pmatrix} A_{11}^1 & A_{12}^1 \\ A_{21}^1 & A_{22}^1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} A_{11}^2 & A_{12}^2 \\ A_{21}^2 & A_{22}^2 \end{pmatrix}.$$

La combinaison convexe est :

$$A(\alpha) = (1 - \alpha)A_1 + \alpha A_2,$$

avec $\alpha \in [0, 1]$, est asymptotiquement stable si les conditions LMI suivantes sont satisfaites :

$$\begin{cases} P_1^1 = (P_1^1)^T > 0, \\ P_2^1 = (P_2^1)^T > 0, \\ P_1^2 = (P_1^2)^T > 0, \\ P_2^2 = (P_2^2)^T > 0, \\ \begin{pmatrix} (A_{11}^1)^T P_1^1 A_{11}^1 - P_1^1 + (A_{21}^1)^T P_2^1 A_{21}^1 & (A_{11}^1)^T P_1^1 A_{12}^1 + (A_{21}^1)^T P_2^1 A_{22}^1 \\ (A_{12}^1)^T P_1^1 A_{11}^1 + (A_{22}^1)^T P_2^1 A_{21}^1 & (A_{12}^1)^T P_1^1 A_{12}^1 + (A_{22}^1)^T P_2^1 A_{22}^1 - P_2^1 \end{pmatrix} < 0, \\ \begin{pmatrix} (A_{11}^2)^T P_1^2 A_{11}^2 - P_1^2 + (A_{21}^2)^T P_2^2 A_{21}^2 & (A_{11}^2)^T P_1^2 A_{12}^2 + (A_{21}^2)^T P_2^2 A_{22}^2 \\ (A_{12}^2)^T P_1^2 A_{11}^2 + (A_{22}^2)^T P_2^2 A_{21}^2 & (A_{12}^2)^T P_1^2 A_{12}^2 + (A_{22}^2)^T P_2^2 A_{22}^2 - P_2^2 \end{pmatrix} < 0. \end{cases}$$

2.1 Exemple d'analyse de stabilité pour une combinaison convexe de modèles de Roesser 2D

Pour illustrer l'application des conditions de stabilité basées sur l'approche de Lyapunov pour une combinaison convexe de deux modèles de Roesser 2D, nous considérons les matrices suivantes :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.1 & 0.1 & 0.05 \\ 0.2 & 0.4 & 0.05 & 0.1 \\ 0.3 & 0.2 & 0.6 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 & 0.1 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.05 & 0.08 & 0.03 \\ 0.15 & 0.3 & 0.04 & 0.07 \\ 0.25 & 0.15 & 0.5 & 0.08 \\ 0.05 & 0.2 & 0.07 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

La combinaison convexe est définie par

$$A(\alpha) = (1 - \alpha)A_1 + \alpha A_2,$$

avec $\alpha \in [0, 1]$. Les conditions de stabilité sont formulées sous forme d'inégalités matricielles linéaires (LMI), en utilisant une fonction de Lyapunov dépendante du paramètre :

$$V(i, j) = (x_{i,j}^h)^T P_1(\alpha) x_{i,j}^h + (x_{i,j}^v)^T P_2(\alpha) x_{i,j}^v,$$

où $P(\alpha) = (1 - \alpha)P^1 + \alpha P^2$, avec $P^1 = \begin{pmatrix} P_1^1 & 0 \\ 0 & P_1^1 \end{pmatrix}$ et $P^2 = \begin{pmatrix} P_1^2 & 0 \\ 0 & P_2^2 \end{pmatrix}$. La condition de stabilité exige que :

$$R(\alpha) = A(\alpha)^T P(\alpha) A(\alpha) - P(\alpha) < 0, \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

Pour résoudre ces LMI, nous avons utilisé, comme dans les sections précédentes, le solveur YALMIP sous MATLAB avec le solveur SeDuMi. Nous avons vérifié les conditions ($\alpha = 0, 1$) :

$$R(0) = A_2^T P^2 A_2 - P^2 < 0, \quad R(1) = A_1^T P^1 A_1 - P^1 < 0.$$

Résultats numériques

La faisabilité ou la solution des LMI a été réalisée avec succès, indiquant que la combinaison convexe est asymptotiquement stable. Les résultats obtenus sont les suivants :

- **Matrice P_1^1 :**

$$P_1^1 = \begin{pmatrix} 1.4212 & 0.2654 \\ 0.2654 & 1.2703 \end{pmatrix}.$$

- **Matrice P_2^1 :**

$$P_2^1 = \begin{pmatrix} 1.0511 & -0.0403 \\ -0.0403 & 1.0739 \end{pmatrix}.$$

- **Matrice P_1^2 :**

$$P_1^2 = \begin{pmatrix} 1.1818 & 0.0902 \\ 0.0902 & 1.1028 \end{pmatrix}.$$

- **Matrice P_2^2 :**

$$P_2^2 = \begin{pmatrix} 1.1090 & 0.0250 \\ 0.0250 & 1.0840 \end{pmatrix}.$$

- **Valeurs propres de P_1^1 :**

$$\begin{pmatrix} 1.0699 \\ 1.6216 \end{pmatrix}.$$

- Valeurs propres de P_2^1 :

$$\begin{pmatrix} 1.0206 \\ 1.1043 \end{pmatrix}.$$

- Valeurs propres de P_1^2 :

$$\begin{pmatrix} 1.0438 \\ 1.2408 \end{pmatrix}.$$

- Valeurs propres de P_2^2 :

$$\begin{pmatrix} 1.0685 \\ 1.1245 \end{pmatrix}.$$

- Matrice $R(\alpha)$ et valeurs propres pour les points vérifiés :

- Pour $\alpha = 0$:

$$R(0) = \begin{pmatrix} -0.8844 & 0.0484 & 0.1904 & 0.0752 \\ 0.0484 & -0.9281 & 0.1214 & 0.1280 \\ 0.1904 & 0.1214 & -0.8148 & 0.0614 \\ 0.0752 & 0.1280 & 0.0614 & -0.8950 \end{pmatrix}.$$

Valeurs propres :

$$\begin{pmatrix} -0.5517 \\ -0.8833 \\ -1.0868 \\ -1.0006 \end{pmatrix}.$$

- Pour $\alpha = 1$:

$$R(1) = \begin{pmatrix} -0.8591 & 0.0566 & 0.2920 & 0.1556 \\ 0.0566 & -0.8978 & 0.2018 & 0.2427 \\ 0.2920 & 0.2018 & -0.6467 & 0.1613 \\ 0.1556 & 0.2427 & 0.1613 & -0.7800 \end{pmatrix}.$$

Valeurs propres :

$$\begin{pmatrix} -0.2100 \\ -0.8201 \\ -1.1542 \\ -0.9993 \end{pmatrix}.$$

- **Conclusion** : La combinaison convexe est asymptotiquement stable : une solution faisable aux LMI a été trouvée.

Les valeurs propres de $P_1^1, P_2^1, P_1^2, P_2^2$ sont toutes positives, confirmant que ces matrices sont définies positives ($P_1^1, P_2^1, P_1^2, P_2^2 > 0$). Les matrices $R(\alpha)$ pour $\alpha = 0, 1$ ont des valeurs propres toutes négatives, satisfaisant la condition $R(\alpha) < 0$. Cela garantit la stabilité asymptotique de la combinaison convexe du système de Roesser 2D pour tout $\alpha \in [0, 1]$.

2.2 Simulation et Analyse Graphique de la Stabilité Asymptotique

Pour analyser la stabilité asymptotique de la combinaison convexe, une simulation numérique a été réalisée. Les matrices A_1 et A_2 , sont définies comme suit :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.1 & 0.1 & 0.05 \\ 0.2 & 0.4 & 0.05 & 0.1 \\ 0.3 & 0.2 & 0.6 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 & 0.1 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.05 & 0.08 & 0.03 \\ 0.15 & 0.3 & 0.04 & 0.07 \\ 0.25 & 0.15 & 0.5 & 0.08 \\ 0.05 & 0.2 & 0.07 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

Ces matrices ont été confirmées comme asymptotiquement stables dans le sens discret, leurs valeurs propres ayant toutes un module strictement inférieur à 1. La condition de stabilité exige que :

$$R(\alpha) = A(\alpha)^T P(\alpha) A(\alpha) - P(\alpha) < 0, \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

La simulation a consisté à évaluer cette condition pour 101 points uniformément espacés dans l'intervalle $[0, 1]$. Deux approches ont été utilisées pour confirmer la stabilité :

- **Via l'approche de Lyapunov** : Vérification que toutes les valeurs propres de $R(\alpha)$ sont strictement négatives pour tout α .
- **Via les valeurs propres de $A(\alpha)$** : Vérification que le module maximal des valeurs propres de $A(\alpha)$ reste inférieur à 1 pour tout α .

Les résultats de ces analyses sont illustrés dans les graphiques suivants.

2.3 Graphiques de stabilité

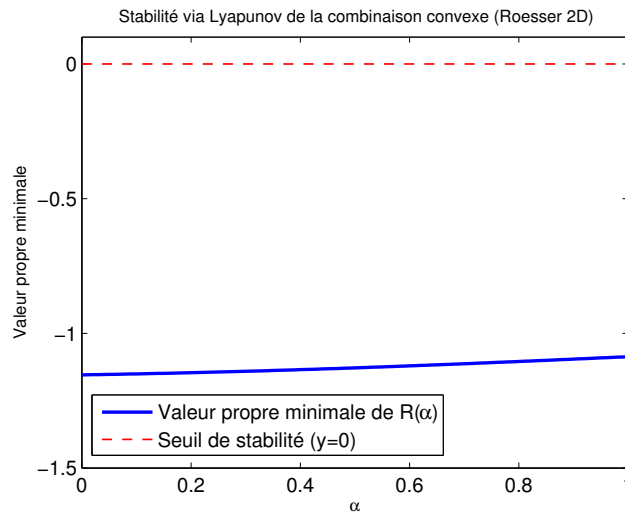


FIGURE 3.1 – Valeur propre minimale de $R(\alpha)$.

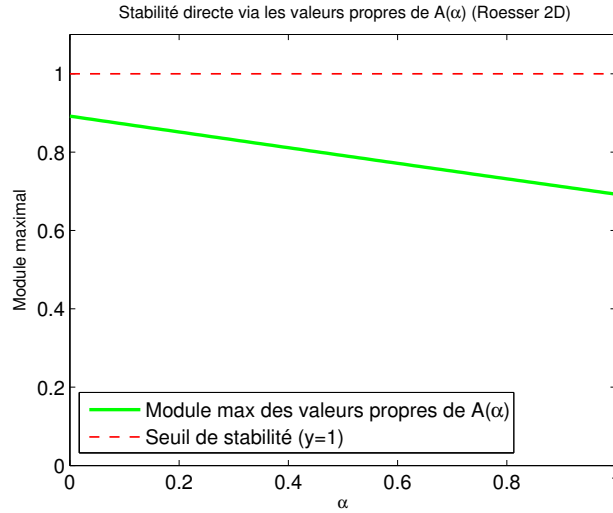


FIGURE 3.2 – Module maximal des valeurs propres de $A(\alpha)$.

2.4 Interprétation des graphiques

Les Figures 3.1 et 3.2 confirment la stabilité asymptotique de la combinaison convexe $A(\alpha)$ pour tout $\alpha \in [0, 1]$.

Dans la Figure 3.1, la courbe bleue, représentant la valeur propre minimale de $R(\alpha)$, reste en dessous du seuil de stabilité ($\gamma = 0$) sur tout l'intervalle. Cela indique que $R(\alpha) < 0$, garantissant la décroissance de la fonction de Lyapunov et donc la stabilité asymptotique du modèle 2D de Roesser.

Dans la Figure 3.2, la courbe verte, illustrant le module maximal des valeurs propres de $A(\alpha)$, reste sous le seuil de stabilité ($\gamma = 1$). Cela confirme que toutes les valeurs propres de $A(\alpha)$ ont un module inférieur à 1, validant la stabilité spectrale directe.

Ces deux analyses, via Lyapunov et via les valeurs propres, démontrent de manière cohérente que la combinaison convexe $A(\alpha)$ est asymptotiquement stable pour tout $\alpha \in [0, 1]$, en accord avec la stabilité initiale de A_1 et A_2 .

Par contre, si l'on considère une combinaison convexe incluant une matrice non stable, prenons par exemple A_1 définie comme suit :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1.2 & 0.1 & 0.1 & 0.05 \\ 0.2 & 0.4 & 0.05 & 0.1 \\ 0.3 & 0.2 & 0.6 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 & 0.1 & 0.5 \end{pmatrix},$$

qui est instable dans le sens discret, comme le montrent ses valeurs propres (dont une dominante d'environ 1.2, supérieure à 1). En combinant A_1 avec A_2 stable (définie précédemment), nous analysons l'impact sur la stabilité de $A(\alpha)$ à travers la figure suivante.

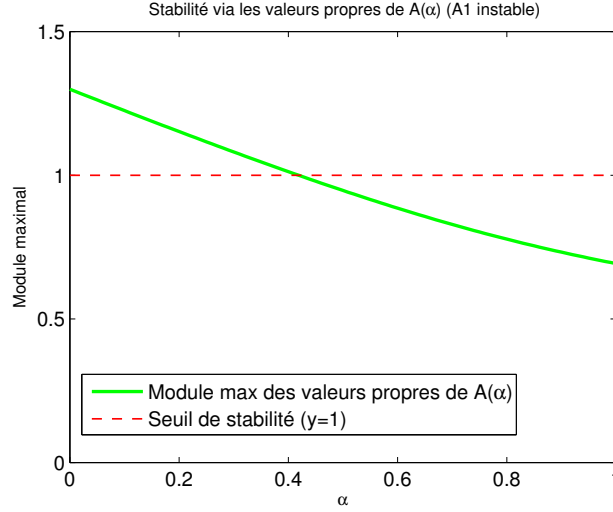


FIGURE 3.3 – Module maximal des valeurs propres de $A(\alpha)$ (A_1 instable).

La Figure 3.3 illustre l'instabilité de la combinaison convexe $A(\alpha)$ due à A_1 . La courbe verte dépasse le seuil de stabilité ($\gamma = 1$) pour α entre 0 et environ 0.4, atteignant un module maximal d'environ 1.2 à $\alpha = 0$, reflétant l'instabilité de A_1 . À mesure que α augmente, le module maximal diminue et passe sous $\gamma = 1$ pour $\alpha > 0.4$, indiquant une transition vers la stabilité influencée par A_2 .

3 Analyse de stabilité pour le modèles de Roesser 2D singulier (temps discret)

Cette section présente un résumé des étapes clés pour analyser la stabilité asymptotique du modèles de Roesser 2D singulier et de sa combinaison convexe, en utilisant une approche basée sur les inégalités matricielles linéaires (LMI) [9].

3.1 Système de Roesser 2D singulier

Le système est défini par :

$$\begin{cases} E \begin{bmatrix} x_{i+1,j}^h \\ x_{i,j+1}^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i,j}^h \\ x_{i,j}^v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u_{i,j}, \\ y_{i,j} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i,j}^h \\ x_{i,j}^v \end{bmatrix} + D u_{i,j}, \end{cases}$$

où $E = \begin{pmatrix} E_{11} & 0 \\ 0 & E_{22} \end{pmatrix}$.

Pour étudier la stabilité asymptotique, comme pour le modèle standard, considérons la fonction candidate de Lyapunov :

$$V(i, j) = (x_{i,j}^h)^T E_{11}^T P_1 E_{11} x_{i,j}^h + (x_{i,j}^v)^T E_{22}^T P_2 E_{22} x_{i,j}^v,$$

avec $P_1 = P_1^T > 0$, $P_2 = P_2^T > 0$.

Après calculs, on obtient les conditions LMI de stabilité suivantes :

$$\begin{cases} P_1 = P_1^T > 0, \\ P_2 = P_2^T > 0, \\ \begin{pmatrix} A_{11}^T P_1 A_{11} + A_{21}^T P_2 A_{21} - E_{11}^T P_1 E_{11} & A_{11}^T P_1 A_{12} + A_{21}^T P_2 A_{22} \\ A_{12}^T P_1 A_{11} + A_{22}^T P_2 A_{21} & A_{12}^T P_1 A_{12} + A_{22}^T P_2 A_{22} - E_{22}^T P_2 E_{22} \end{pmatrix} < 0. \end{cases}$$

Théorème 3.3 *Le modèle 2D de Roesser singulier à temps discret est asymptotiquement stable si les conditions LMI suivantes sont satisfaites :*

$$\begin{cases} P_1 = P_1^T > 0, \\ P_2 = P_2^T > 0, \\ \begin{pmatrix} A_{11}^T P_1 A_{11} + A_{21}^T P_2 A_{21} - E_{11}^T P_1 E_{11} & A_{11}^T P_1 A_{12} + A_{21}^T P_2 A_{22} \\ A_{12}^T P_1 A_{11} + A_{22}^T P_2 A_{21} & A_{12}^T P_1 A_{12} + A_{22}^T P_2 A_{22} - E_{22}^T P_2 E_{22} \end{pmatrix} < 0. \end{cases}$$

3.2 Combinaison convexe (cas singulier)

Pour étudier la stabilité asymptotique, considérons la fonction candidate de Lyapunov dépendante du paramètre :

$$V(i, j) = (x_{i,j}^h)^T E_{11}^T P_1(\alpha) E_{11} x_{i,j}^h + (x_{i,j}^v)^T E_{22}^T P_2(\alpha) E_{22} x_{i,j}^v,$$

$$\text{où } P(\alpha) = (1 - \alpha)P^1 + \alpha P^2, \quad P^1 = \begin{pmatrix} P_1^1 & 0 \\ 0 & P_2^1 \end{pmatrix}, \quad P^2 = \begin{pmatrix} P_1^2 & 0 \\ 0 & P_2^2 \end{pmatrix}.$$

Pour assurer la stabilité asymptotique, il faut que $\Delta V(x_i) < 0$ pour tout $x_i \neq 0$, ce qui équivaut à :

$$A^T(\alpha)P(\alpha)A(\alpha) - E^T P(\alpha)E < 0, \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

Substituons les expressions de $A(\alpha)$ et $P(\alpha)$ dans la condition suivante :

$$\begin{aligned} A^T(\alpha)P(\alpha)A(\alpha) - E^T P(\alpha)E &= (1 - \alpha)^3 A_1^T P_1 A_1 + (1 - \alpha)^2 \alpha A_1^T P_1 A_2 + (1 - \alpha)^2 \alpha A_1^T P_2 A_1 \\ &\quad + (1 - \alpha) \alpha^2 A_1^T P_2 A_2 + (1 - \alpha)^2 \alpha A_2^T P_1 A_1 \\ &\quad + (1 - \alpha) \alpha^2 A_2^T P_1 A_2 + (1 - \alpha) \alpha^2 A_2^T P_2 A_1 + \alpha^3 A_2^T P_2 A_2 \\ &\quad - (1 - \alpha) E^T P_1 E - \alpha E^T P_2 E. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Or, on a l'identité suivante :

$$1 = \alpha^2 + 2\alpha(1 - \alpha) + (1 - \alpha)^2,$$

ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} E^T P(\alpha)E &= [(1 - \alpha)P_1 + \alpha P_2] \alpha^2 + 2[(1 - \alpha)P_1 + \alpha P_2] \alpha(1 - \alpha) \\ &\quad + [(1 - \alpha)P_1 + \alpha P_2] (1 - \alpha)^2, \\ &= (1 - \alpha) \alpha^2 E^T P_1 E + \alpha^3 E^T P_2 E + 2\alpha(1 - \alpha)^2 E^T P_1 E + 2\alpha^2(1 - \alpha) E^T P_2 E \\ &\quad + (1 - \alpha)^3 E^T P_1 E + \alpha(1 - \alpha)^2 E^T P_2 E. \end{aligned} \quad (3.4)$$

En remplaçant l'expression (3.4) dans la condition (3.3), on obtient l'équation développée suivante :

$$\begin{aligned}
 A^T(\alpha)P(\alpha)A(\alpha) - E^TP(\alpha)E &= (1-\alpha)^3 (A_1^TP_1A_1 - E^TP_1E) \\
 &+ (1-\alpha)^2\alpha (A_1^TP_1A_2 - E^TP_1E) + (1-\alpha)^2\alpha (A_2^TP_1A_1 - E^TP_1E) \\
 &+ (1-\alpha)^2\alpha (A_1^TP_2A_1 - E^TP_2E) \\
 &+ (1-\alpha)\alpha^2 (A_1^TP_2A_2 - E^TP_2E) + (1-\alpha)\alpha^2 (A_2^TP_2A_1 - E^TP_2E) \\
 &+ (1-\alpha)\alpha^2 (A_2^TP_1A_2 - E^TP_1E) \\
 &+ \alpha^3 (A_2^TP_2A_2 - E^TP_2E). \tag{3.5}
 \end{aligned}$$

Dans le cas singulier, où E est une matrice non inversible, nous analysons la négativité définie de l'expression (3.5). Supposons que x est un vecteur propre commun à A_1 et A_2 , tel que :

$$A_1x = \lambda_1x, \quad A_2x = \lambda_2x,$$

Pour un terme mixte, comme $x^T(A_1^TP_1A_2 - E^TP_1E)x$, calculons :

$$x^TA_1^TP_1A_2x = \bar{\lambda}_1\lambda_2x^TP_1x,$$

et, supposons que $E^TP_1 = P_1E$, on a :

$$x^TE^TP_1Ex = x^TP_1E^TEx.$$

Ainsi :

$$x^T(A_1^TP_1A_2 - E^TP_1E)x = \bar{\lambda}_1\lambda_2x^TP_1x - x^TP_1E^TEx = x^TP_1(\bar{\lambda}_1\lambda_2I - E^TE)x.$$

Pour que cette expression soit négative, il faut :

$$x^TP_1(\bar{\lambda}_1\lambda_2I - E^TE)x < 0, \quad \forall x \neq 0.$$

Puisque $P_1 > 0$, cela équivaut à :

$$\bar{\lambda}_1\lambda_2I - E^TE < 0.$$

De manière similaire, pour le terme mixte $x^T(A_2^TP_1A_1 - E^TP_1E)x$, on obtient :

$$x^T(A_2^TP_1A_1 - E^TP_1E)x = x^TP_1(\bar{\lambda}_2\lambda_1I - E^TE)x,$$

avec la condition :

$$\bar{\lambda}_2\lambda_1I - E^TE < 0.$$

Dans le cas où A_1 et A_2 ne partagent pas le même vecteur propre. Soit x_1 un vecteur propre de A_1 tel que $A_1x_1 = \lambda_1x_1$. Nous analysons l'expression suivante :

$$x_1^T(A_1^TP_1A_2 - E^TP_1E)x_1.$$

Puisque $A_1x_1 = \lambda_1x_1$, on a $x_1^TA_1^T = \bar{\lambda}_1x_1^T$. Ainsi :

$$x_1^TA_1^TP_1A_2x_1 = (\bar{\lambda}_1x_1^T)P_1A_2x_1 = \bar{\lambda}_1x_1^TP_1A_2x_1.$$

Avec $x_1^TE^TP_1Ex_1 = x_1^TP_1E^TEx_1$, on obtient :

$$x_1^T(A_1^TP_1A_2 - E^TP_1E)x_1 = \bar{\lambda}_1x_1^TP_1A_2x_1 - x_1^TP_1E^TEx_1 = x_1^TP_1(\bar{\lambda}_1A_2 - E^TE)x_1.$$

Pour vérifier la négativité, considérons x_2 , vecteur propre de A_2 . Calculons :

$$x_2^T (\bar{\lambda}_1 A_2 - E^T E) x_2 = \bar{\lambda}_1 x_2^T A_2 x_2 - x_2^T E^T E x_2 = \bar{\lambda}_1 x_2^T (\lambda_2 x_2) - x_2^T E^T E x_2 = \bar{\lambda}_1 \lambda_2 x_2^T x_2 - x_2^T E^T E x_2.$$

Pour que cette expression soit négative, il faut :

$$\bar{\lambda}_1 \lambda_2 I - E^T E < 0.$$

Nous pouvons énoncer le théorème suivant.

Théorème 3.4 *Soit deux matrices blocs asymptotiquement stables.*

$$A_1 = \begin{pmatrix} A_{11}^1 & A_{12}^1 \\ A_{21}^1 & A_{22}^1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} A_{11}^2 & A_{12}^2 \\ A_{21}^2 & A_{22}^2 \end{pmatrix}.$$

et une matrice $E = \begin{pmatrix} E_{11} & 0 \\ 0 & E_{22} \end{pmatrix}$, en général non inversible (cas singulier). Avec,

$$P(\alpha) = (1 - \alpha)P^1 + \alpha P^2,$$

$$\text{où } P^1 = \begin{pmatrix} P_1^1 & 0 \\ 0 & P_2^1 \end{pmatrix}, \quad P^2 = \begin{pmatrix} P_1^2 & 0 \\ 0 & P_2^2 \end{pmatrix}.$$

La combinaison convexe est :

$$A(\alpha) = (1 - \alpha)A_1 + \alpha A_2,$$

avec $\alpha \in [0, 1]$, est asymptotiquement stable si les conditions LMI suivantes sont satisfaites :

$$\left\{ \begin{array}{l} P_1^1 = (P_1^1)^T > 0, \\ P_2^1 = (P_2^1)^T > 0, \\ P_1^2 = (P_1^2)^T > 0, \\ P_2^2 = (P_2^2)^T > 0, \\ \left(\begin{array}{cc} (A_{11}^1)^T P_1^1 A_{11}^1 - E_{11}^T P_1^1 E_{11} + (A_{21}^1)^T P_2^1 A_{21}^1 & (A_{11}^1)^T P_1^1 A_{12}^1 + (A_{21}^1)^T P_2^1 A_{22}^1 \\ (A_{12}^1)^T P_1^1 A_{11}^1 + (A_{22}^1)^T P_2^1 A_{21}^1 & (A_{12}^1)^T P_1^1 A_{12}^1 + (A_{22}^1)^T P_2^1 A_{22}^1 - E_{22}^T P_2^1 E_{22} \end{array} \right) < 0, \\ \left(\begin{array}{cc} (A_{11}^2)^T P_1^2 A_{11}^2 - E_{11}^T P_1^2 E_{11} + (A_{21}^2)^T P_2^2 A_{21}^2 & (A_{11}^2)^T P_1^2 A_{12}^2 + (A_{21}^2)^T P_2^2 A_{22}^2 \\ (A_{12}^2)^T P_1^2 A_{11}^2 + (A_{22}^2)^T P_2^2 A_{21}^2 & (A_{12}^2)^T P_1^2 A_{12}^2 + (A_{22}^2)^T P_2^2 A_{22}^2 - E_{22}^T P_2^2 E_{22} \end{array} \right) < 0, \end{array} \right.$$

Avec,

$$E^T P_1 = P_1 E, \quad \text{et} \quad E^T P_2 = P_2 E.$$

Et,

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\lambda}_1 \lambda_2 I - E^T E < 0, \\ \bar{\lambda}_2 \lambda_1 I - E^T E < 0. \end{array} \right.$$

On note λ_i une valeur propre de la matrice A_i , et $\bar{\lambda}_i$ une valeur propre de sa transposée A_i^T , avec $i \in \{1, 2\}$.

4 Analyse de stabilité pour le modèles de Roesser 2D (temps continu)

Cette section traite des conditions de stabilité asymptotique d'un modèle continu de Roesser.

Le modèle de Roesser pour les systèmes 2D continus est donné par [14, 2, 25, 26, 27, 21] :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x^h(t_1, t_2)}{\partial t_1} \\ \frac{\partial x^v(t_1, t_2)}{\partial t_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(t_1, t_2) \\ x^v(t_1, t_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t_1, t_2), \quad (3.6)$$

où $x^h(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^{n_h}$, $x^v(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^{n_v}$ et $u(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^m$ sont respectivement l'état horizontal, l'état vertical et l'entrée du système, et $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, B_1, B_2$ sont des matrices réelles de dimensions appropriées.

$$\lim_{t_1 \rightarrow \infty} \|x(t_1, 0)\| = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t_2 \rightarrow \infty} \|x(0, t_2)\| = 0.$$

Ces conditions découlent des conditions initiales pour le système (3.6).

Dans l'analyse de la stabilité du système 2D continu (3.6), il est requis de considérer les zéros du polynôme caractéristique 2D donné par :

$$C(s_1, s_2) = \det \begin{bmatrix} s_1 I_{n_h} - A_1 & -A_2 \\ -A_3 & s_2 I_{n_v} - A_4 \end{bmatrix}.$$

Il est connu dans la littérature que le système 2D continu est asymptotiquement stable si et seulement si $C(s_1, s_2) \neq 0$ pour tout (s_1, s_2) tel que $\text{Re}(s_1) \geq 0$ et $\text{Re}(s_2) \geq 0$. En général, cette condition est difficile à utiliser en pratique pour vérifier la stabilité, c'est pourquoi une autre méthode sera utilisée via les LMI.

Lemme 3.1 *Des conditions nécessaires simples pour la stabilité asymptotique du système 2D continu (3.6) sont les suivantes :*

- i) A_1 est Hurwitz (c'est-à-dire que toutes ses valeurs propres ont des parties réelles négatives, $\text{Re} \lambda_i(A_1) < 0; i = 1, \dots, n_h$).
- ii) A_4 est Hurwitz.

Preuve. À partir de (3.6), en posant $A_2 = A_3 = A_4 = 0$, on obtient l'équation d'état du système continu (pour $0 \leq t_2 \in \mathbb{R}$ fixé) :

$$\frac{\partial x^h(t_1, t_2)}{\partial t_1} = A_1 x^h(t_1, t_2). \quad (3.7)$$

Le système (3.7) est asymptotiquement stable si la matrice A_1 est Hurwitz.

De manière similaire, on peut démontrer ii). ■

Condition basée sur l'approche de Lyapunov

Pour évaluer la stabilité, une fonction de Lyapunov est définie comme :

$$V(t_1, t_2) = (x^h(t_1, t_2))^T P_1 x^h(t_1, t_2) + (x^v(t_1, t_2))^T P_2 x^v(t_1, t_2),$$

où $P_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ et $P_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ sont des matrices symétriques définies positives. Sous forme matricielle :

$$V(t_1, t_2) = x(t_1, t_2)^T P x(t_1, t_2), \quad P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}.$$

La condition de stabilité exige :

$$\dot{V}(t_1, t_2) = \frac{\partial V}{\partial t_1} + \frac{\partial V}{\partial t_2} < 0.$$

Calcul de $\dot{V}(t_1, t_2)$:

En substituant les équations du système dans les dérivées partielles de V, on obtient :

$$\dot{V}(t_1, t_2) = x(t_1, t_2)^T (A^T P + PA) x(t_1, t_2),$$

où :

$$A^T P + PA = \begin{pmatrix} A_{11}^T P_1 + P_1 A_{11} & P_1 A_{12} + A_{21}^T P_2 \\ A_{12}^T P_1 + P_2 A_{21} & A_{22}^T P_2 + P_2 A_{22} \end{pmatrix}.$$

Les conditions LMI pour la stabilité sont :

$$\begin{cases} P_1 = P_1^T > 0, \\ P_2 = P_2^T > 0, \\ \begin{pmatrix} A_{11}^T P_1 + P_1 A_{11} & P_1 A_{12} + A_{21}^T P_2 \\ A_{12}^T P_1 + P_2 A_{21} & A_{22}^T P_2 + P_2 A_{22} \end{pmatrix} < 0. \end{cases}$$

Théorème 3.5 *Le modèle 2D de Roesser à temps continu est asymptotiquement stable si les conditions LMI suivantes sont satisfaites :*

$$\begin{cases} P_1 = P_1^T > 0, \\ P_2 = P_2^T > 0, \\ \begin{pmatrix} A_{11}^T P_1 + P_1 A_{11} & P_1 A_{12} + A_{21}^T P_2 \\ A_{12}^T P_1 + P_2 A_{21} & A_{22}^T P_2 + P_2 A_{22} \end{pmatrix} < 0. \end{cases}$$

4.1 Exemple d'analyse de stabilité pour un système de Roesser 2D continu

Pour illustrer l'application des conditions de stabilité basées sur l'approche de Lyapunov, nous considérons les matrices asymptotiquement stables.

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{pmatrix} -2 & 0.1 \\ 0.2 & -1.5 \end{pmatrix}, & A_{12} &= \begin{pmatrix} 0.1 & 0.05 \\ 0.05 & 0.1 \end{pmatrix}, \\ A_{21} &= \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 \end{pmatrix}, & A_{22} &= \begin{pmatrix} -1.8 & 0.1 \\ 0.1 & -2.2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La matrice du système est donc :

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0.1 & 0.1 & 0.05 \\ 0.2 & -1.5 & 0.05 & 0.1 \\ 0.3 & 0.2 & -1.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 & 0.1 & -2.2 \end{pmatrix}.$$

Une fonction candidate de Lyapunov est définie comme :

$$V(t_1, t_2) = (x^h(t_1, t_2))^T P_1 x^h(t_1, t_2) + (x^v(t_1, t_2))^T P_2 x^v(t_1, t_2),$$

où $P_1 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ et $P_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ sont des matrices symétriques définies positives. Les conditions LMI pour la stabilité sont :

$$\begin{cases} P_1 = P_1^T > 0, \\ P_2 = P_2^T > 0, \\ \begin{pmatrix} A_{11}^T P_1 + P_1 A_{11} & P_1 A_{12} + A_{21}^T P_2 \\ A_{12}^T P_1 + P_2 A_{21} & A_{22}^T P_2 + P_2 A_{22} \end{pmatrix} < 0. \end{cases}$$

Afin d'illustrer l'efficacité des conditions proposées, un exemple numérique est présenté ci-après.

Résultats numériques

La faisabilité des LMI a été réalisée avec succès, indiquant que le système est asymptotiquement stable. Les résultats obtenus sont les suivants :

- **Matrice P_1 :**

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0.4040 & 0.0324 \\ 0.0324 & 0.5032 \end{pmatrix}.$$

- **Matrice P_2 :**

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0.4334 & 0.0151 \\ 0.0151 & 0.3703 \end{pmatrix}.$$

- **Valeurs propres de P_1 :**

$$\begin{pmatrix} 0.3943 \\ 0.5128 \end{pmatrix}.$$

- **Valeurs propres de P_2 :**

$$\begin{pmatrix} 0.3669 \\ 0.4368 \end{pmatrix}.$$

- **Matrice $A^T P + P A$:**

$$A^T P + P A = \begin{pmatrix} -1.6029 & 0.0276 & 0.1735 & 0.0650 \\ 0.0276 & -1.5030 & 0.1196 & 0.1661 \\ 0.1735 & 0.1196 & -1.5570 & 0.0199 \\ 0.0650 & 0.1661 & 0.0199 & -1.6264 \end{pmatrix}.$$

- **Valeurs propres de $A^T P + P A$:**

$$\begin{pmatrix} -1.8129 \\ -1.6867 \\ -1.5167 \\ -1.2730 \end{pmatrix}.$$

- **Conclusion :** Le système de Roesser 2D continu est asymptotiquement stable : une solution faisable aux LMI a été trouvée.

Les valeurs propres de P_1 et P_2 sont toutes positives, confirmant que ces matrices sont définies positives ($P_1, P_2 > 0$). La matrice $A^T P + P A$ a des valeurs propres toutes négatives, satisfaisant la condition $A^T P + P A < 0$. Cela garantit la stabilité du modèle de Roesser 2D continu.

5 Stabilité de la combinaison convexe (temps continu)

L'objectif de cette section est de garantir la stabilité asymptotique pour toute combinaison convexe des matrices d'état.

On considère deux matrices blocs asymptotiquement stables.

$$A_1 = \begin{pmatrix} A_{11}^1 & A_{12}^1 \\ A_{21}^1 & A_{22}^1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} A_{11}^2 & A_{12}^2 \\ A_{21}^2 & A_{22}^2 \end{pmatrix}.$$

La combinaison convexe est :

$$A(\alpha) = (1 - \alpha)A_1 + \alpha A_2, \quad \alpha \in [0, 1].$$

En utilisant une fonction de Lyapunov dépendante du paramètre :

$$V(t_1, t_2) = (x^h(t_1, t_2))^T P_1(\alpha) x^h(t_1, t_2) + (x^v(t_1, t_2))^T P_2(\alpha) x^v(t_1, t_2),$$

$$P(\alpha) = \begin{pmatrix} P_1(\alpha) & 0 \\ 0 & P_2(\alpha) \end{pmatrix}, \quad P(\alpha) = (1 - \alpha)P^1 + \alpha P^2,$$

où $P^1 = \begin{pmatrix} P_1^1 & 0 \\ 0 & P_2^1 \end{pmatrix}$, $P^2 = \begin{pmatrix} P_1^2 & 0 \\ 0 & P_2^2 \end{pmatrix}$, la condition de stabilité est :

$$R(\alpha) = A(\alpha)^T P(\alpha) + P(\alpha) A(\alpha) < 0, \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

$$R(\alpha) = A(\alpha)^T P(\alpha) + P(\alpha) A(\alpha),$$

$$\begin{aligned} &= ((1 - \alpha)A_1 + \alpha A_2)^T ((1 - \alpha)P_1 + \alpha P_2) + ((1 - \alpha)P_1 + \alpha P_2)((1 - \alpha)A_1 + \alpha A_2), \\ &= ((1 - \alpha)A_1^T + \alpha A_2^T)((1 - \alpha)P_1 + \alpha P_2) + ((1 - \alpha)P_1 + \alpha P_2)((1 - \alpha)A_1 + \alpha A_2), \\ &= (1 - \alpha)^2 A_1^T P_1 + (1 - \alpha)\alpha A_1^T P_2 + \alpha(1 - \alpha) A_2^T P_1 + \alpha^2 A_2^T P_2 \\ &\quad + (1 - \alpha)^2 P_1 A_1 + (1 - \alpha)\alpha P_1 A_2 + \alpha(1 - \alpha) P_2 A_1 + \alpha^2 P_2 A_2, \\ &= (1 - \alpha)^2 (A_1^T P_1 + P_1 A_1) + (1 - \alpha)\alpha (A_1^T P_2 + P_2 A_1) + \alpha(1 - \alpha) (A_2^T P_1 + P_1 A_2) + \alpha^2 (A_2^T P_2 + P_2 A_2). \end{aligned}$$

Ainsi, les conditions LMI sont :

$$\begin{cases} P_1^1 = (P_1^1)^T > 0, \\ P_2^1 = (P_2^1)^T > 0, \\ P_1^2 = (P_1^2)^T > 0, \\ P_2^2 = (P_2^2)^T > 0, \\ A_1^T P^1 + P^1 A_1 < 0, \\ A_2^T P^2 + P^2 A_2 < 0, \end{cases}$$

ou, explicitement :

$$\begin{cases} P_1^1 = (P_1^1)^T > 0, \\ P_2^1 = (P_2^1)^T > 0, \\ P_1^2 = (P_1^2)^T > 0, \\ P_2^2 = (P_2^2)^T > 0, \\ \begin{pmatrix} (A_{11}^1)^T P_1^1 + P_1^1 A_{11}^1 & P_1^1 A_{12}^1 + (A_{21}^1)^T P_2^1 \\ (A_{12}^1)^T P_1^1 + P_2^1 A_{21}^1 & (A_{22}^1)^T P_2^1 + P_2^1 A_{22}^1 \end{pmatrix} < 0, \\ \begin{pmatrix} (A_{11}^2)^T P_1^2 + P_1^2 A_{11}^2 & P_1^2 A_{12}^2 + (A_{21}^2)^T P_2^2 \\ (A_{12}^2)^T P_1^2 + P_2^2 A_{21}^2 & (A_{22}^2)^T P_2^2 + P_2^2 A_{22}^2 \end{pmatrix} < 0, \end{cases}$$

Théorème 3.6 Soit deux matrices blocs asymptotiquement stables.

$$A_1 = \begin{pmatrix} A_{11}^1 & A_{12}^1 \\ A_{21}^1 & A_{22}^1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} A_{11}^2 & A_{12}^2 \\ A_{21}^2 & A_{22}^2 \end{pmatrix}.$$

Avec,

$$P(\alpha) = (1 - \alpha)P^1 + \alpha P^2,$$

$$\text{où } P^1 = \begin{pmatrix} P_1^1 & 0 \\ 0 & P_2^1 \end{pmatrix}, P^2 = \begin{pmatrix} P_1^2 & 0 \\ 0 & P_2^2 \end{pmatrix}.$$

La combinaison convexe est :

$$A(\alpha) = (1 - \alpha)A_1 + \alpha A_2,$$

avec $\alpha \in [0, 1]$, est asymptotiquement stable si les conditions LMI suivantes sont satisfaites :

$$\begin{cases} P_1^1 = (P_1^1)^T > 0, \\ P_2^1 = (P_2^1)^T > 0, \\ P_1^2 = (P_1^2)^T > 0, \\ P_2^2 = (P_2^2)^T > 0, \\ \begin{pmatrix} (A_{11}^1)^T P_1^1 + P_1^1 A_{11}^1 & P_1^1 A_{12}^1 + (A_{21}^1)^T P_2^1 \\ (A_{12}^1)^T P_1^1 + P_2^1 A_{21}^1 & (A_{22}^1)^T P_2^1 + P_2^1 A_{22}^1 \end{pmatrix} < 0, \\ \begin{pmatrix} (A_{11}^2)^T P_1^2 + P_1^2 A_{11}^2 & P_1^2 A_{12}^2 + (A_{21}^2)^T P_2^2 \\ (A_{12}^2)^T P_1^2 + P_2^2 A_{21}^2 & (A_{22}^2)^T P_2^2 + P_2^2 A_{22}^2 \end{pmatrix} < 0. \end{cases}$$

5.1 Exemple d'analyse de stabilité pour une combinaison convexe de modèles de Roesser 2D continus

Pour illustrer l'application des conditions de stabilité basées sur l'approche de Lyapunov pour une combinaison convexe, nous considérons deux matrices blocs asymptotiquement stables.

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0.1 & 0.1 & 0.05 \\ 0.2 & -1.5 & 0.05 & 0.1 \\ 0.3 & 0.2 & -1.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 & 0.1 & -2.2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1.8 & 0.05 & 0.08 & 0.03 \\ 0.15 & -1.4 & 0.04 & 0.07 \\ 0.25 & 0.15 & -1.9 & 0.08 \\ 0.05 & 0.2 & 0.07 & -2.1 \end{pmatrix}.$$

La combinaison convexe est définie par :

$$A(\alpha) = (1 - \alpha)A_1 + \alpha A_2, \quad \alpha \in [0, 1].$$

Une fonction de Lyapunov dépendante du paramètre est utilisée :

$$V(t_1, t_2) = (x^h(t_1, t_2))^T P_1(\alpha) x^h(t_1, t_2) + (x^v(t_1, t_2))^T P_2(\alpha) x^v(t_1, t_2),$$

où :

$$P(\alpha) = (1 - \alpha)P^1 + \alpha P^2, \quad P^1 = \begin{pmatrix} P_1^1 & 0 \\ 0 & P_2^1 \end{pmatrix}, \quad P^2 = \begin{pmatrix} P_1^2 & 0 \\ 0 & P_2^2 \end{pmatrix}.$$

La condition de stabilité exige :

$$R(\alpha) = A(\alpha)^T P(\alpha) + P(\alpha) A(\alpha) < 0, \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

Un exemple numérique est présenté ci-après afin de démontrer l'efficacité des conditions de stabilité proposées.

Résultats numériques

L'optimisation des LMI a été réalisée avec succès, indiquant que la combinaison convexe est asymptotiquement stable. Les résultats obtenus sont les suivants :

- **Matrice P_1^1 :**

$$P_1^1 = \begin{pmatrix} 0.4040 & 0.0324 \\ 0.0324 & 0.5031 \end{pmatrix}.$$

- **Matrice P_2^1 :**

$$P_2^1 = \begin{pmatrix} 0.4333 & 0.0151 \\ 0.0151 & 0.3703 \end{pmatrix}.$$

- **Matrice P_1^2 :**

$$P_1^2 = \begin{pmatrix} 0.4372 & 0.0245 \\ 0.0245 & 0.5276 \end{pmatrix}.$$

- **Matrice P_2^2 :**

$$P_2^2 = \begin{pmatrix} 0.4160 & 0.0117 \\ 0.0117 & 0.3847 \end{pmatrix}.$$

- **Valeurs propres de P_1^1 :**

$$\begin{pmatrix} 0.3943 \\ 0.5128 \end{pmatrix}.$$

- **Valeurs propres de P_2^1 :**

$$\begin{pmatrix} 0.3669 \\ 0.4368 \end{pmatrix}.$$

- **Valeurs propres de P_1^2 :**

$$\begin{pmatrix} 0.4310 \\ 0.5338 \end{pmatrix}.$$

- **Valeurs propres de P_2^2 :**

$$\begin{pmatrix} 0.3809 \\ 0.4199 \end{pmatrix}.$$

- **Matrice $R(\alpha)$ et valeurs propres pour les points vérifiés :**

- Pour $\alpha = 0$:

$$R(0) = \begin{pmatrix} -1.5664 & 0.0226 & 0.1405 & 0.0370 \\ 0.0226 & -1.4748 & 0.0878 & 0.1164 \\ 0.1405 & 0.0878 & -1.5791 & 0.0135 \\ 0.0370 & 0.1164 & 0.0135 & -1.6140 \end{pmatrix}.$$

Valeurs propres :

$$\begin{pmatrix} -1.7405 \\ -1.6572 \\ -1.5037 \\ -1.3330 \end{pmatrix}.$$

- Pour $\alpha = 1$:

$$R(1) = \begin{pmatrix} -1.6029 & 0.0276 & 0.1735 & 0.0650 \\ 0.0276 & -1.5029 & 0.1196 & 0.1661 \\ 0.1735 & 0.1196 & -1.5570 & 0.0199 \\ 0.0650 & 0.1661 & 0.0199 & -1.6264 \end{pmatrix}.$$

Valeurs propres :

$$\begin{pmatrix} -1.8129 \\ -1.6866 \\ -1.5167 \\ -1.2730 \end{pmatrix}.$$

- **Conclusion** : La combinaison convexe est asymptotiquement stable : une solution faisable aux LMI a été trouvée.

Les valeurs propres de $P_1^1, P_2^1, P_1^2, P_2^2$ sont toutes positives, confirmant que ces matrices sont définies positives ($P_1^1, P_2^1, P_1^2, P_2^2 > 0$). Les matrices $R(\alpha)$ pour $\alpha = 0, 1$ ont des valeurs propres toutes négatives, satisfaisant la condition $R(\alpha) < 0$. Cela garantit la stabilité de la combinaison convexe du modèle de Roesser 2D continu pour tout $\alpha \in [0, 1]$.

6 Analyse de stabilité pour le modèle de Roesser 2D singulier (temps continu)

Cette section présente un résumé des étapes clés pour analyser la stabilité asymptotique du modèle de Roesser 2D singulier à temps continu et de sa combinaison convexe, en utilisant une approche basée sur les inégalités matricielles linéaires (LMI) [9, 26].

Modèle de Roesser 2D singulier (temps continu)

Le système est défini par :

$$\begin{cases} E \begin{bmatrix} \frac{\partial x^h(t_1, t_2)}{\partial t_1} \\ \frac{\partial x^v(t_1, t_2)}{\partial t_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(t_1, t_2) \\ x^v(t_1, t_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t_1, t_2), \\ y(t_1, t_2) = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(t_1, t_2) \\ x^v(t_1, t_2) \end{bmatrix} + D u(t_1, t_2), \end{cases}$$

où $E = \begin{pmatrix} E_{11} & 0 \\ 0 & E_{22} \end{pmatrix}$.

Pour étudier la stabilité asymptotique, comme pour le modèle standard, considérons la fonction candidate de Lyapunov :

$$V(t_1, t_2) = (x^h(t_1, t_2))^T E_{11}^T P_1 E_{11} x^h(t_1, t_2) + (x^v(t_1, t_2))^T E_{22}^T P_2 E_{22} x^v(t_1, t_2),$$

avec $P_1 = P_1^T > 0, P_2 = P_2^T > 0$.

Après calculs, on obtient les conditions LMI de stabilité suivantes :

$$\begin{cases} P_1 = P_1^T > 0, \\ P_2 = P_2^T > 0, \\ \begin{pmatrix} A_{11}^T P_1 E_{11} + E_{11}^T P_1 A_{11} & E_{11}^T P_1 A_{12} + A_{21}^T P_2 E_{22} \\ A_{12}^T P_1 E_{11} + E_{22}^T P_2 A_{21} & A_{22}^T P_2 E_{22} + E_{22}^T P_2 A_{22} \end{pmatrix} < 0. \end{cases}$$

Théorème 3.7 *Le modèle 2D de Roesser singulier à temps continu est asymptotiquement stable si les conditions LMI suivantes sont satisfaites :*

$$\begin{cases} P_1 = P_1^T > 0, \\ P_2 = P_2^T > 0, \\ \begin{pmatrix} A_{11}^T P_1 E_{11} + E_{11}^T P_1 A_{11} & E_{11}^T P_1 A_{12} + A_{21}^T P_2 E_{22} \\ A_{12}^T P_1 E_{11} + E_{22}^T P_2 A_{21} & A_{22}^T P_2 E_{22} + E_{22}^T P_2 A_{22} \end{pmatrix} < 0. \end{cases}$$

6.1 Stabilité de la combinaison convexe (temps continue)

L'objectif est de garantir la stabilité asymptotique pour toute combinaison convexe des matrices d'état.

On considère deux matrices blocs asymptotiquement stables.

$$A_1 = \begin{pmatrix} A_{11}^1 & A_{12}^1 \\ A_{21}^1 & A_{22}^1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} A_{11}^2 & A_{12}^2 \\ A_{21}^2 & A_{22}^2 \end{pmatrix}.$$

La combinaison convexe est :

$$A(\alpha) = (1 - \alpha)A_1 + \alpha A_2, \quad \alpha \in [0, 1].$$

En utilisant une fonction candidate de Lyapunov :

$$V(i, j) = (x_{i,j}^h)^T P_1(\alpha) x_{i,j}^h + (x_{i,j}^v)^T P_2(\alpha) x_{i,j}^v,$$

$$P(\alpha) = \begin{pmatrix} P_1(\alpha) & 0 \\ 0 & P_2(\alpha) \end{pmatrix}, \quad P(\alpha) = (1 - \alpha)P^1 + \alpha P^2,$$

où $P^1 = \begin{pmatrix} P_1^1 & 0 \\ 0 & P_2^1 \end{pmatrix}$, $P^2 = \begin{pmatrix} P_1^2 & 0 \\ 0 & P_2^2 \end{pmatrix}$, la condition de stabilité est :

$$A(\alpha)^T P(\alpha) E + E^T P(\alpha) A(\alpha) < 0, \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

Substituons les expressions de $A(\theta)$ et $P(\theta)$ dans cette condition :

Calculons d'abord $A(\alpha)^T P(\alpha) E$:

$$\begin{aligned} A(\alpha)^T P(\alpha) E &= ((1 - \alpha)A_1 + \alpha A_2)^T ((1 - \alpha)P_1 + \alpha P_2) E, \\ &= ((1 - \alpha)A_1^T + \alpha A_2^T) ((1 - \alpha)P_1 + \alpha P_2) E, \\ &= (1 - \alpha)^2 A_1^T P_1 E + (1 - \alpha)\alpha A_1^T P_2 E + (1 - \alpha)\alpha A_2^T P_1 E + \alpha^2 A_2^T P_2 E. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Ensuite, calculons $E^T P(\alpha) A(\alpha)$:

$$\begin{aligned} E^T P(\alpha) A(\alpha) &= E^T ((1 - \alpha)P_1 + \alpha P_2) ((1 - \alpha)A_1 + \alpha A_2), \\ &= (1 - \alpha)^2 E^T P_1 A_1 + (1 - \alpha)\alpha E^T P_1 A_2 + (1 - \alpha)\alpha E^T P_2 A_1 + \alpha^2 E^T P_2 A_2. \end{aligned} \quad (3.9)$$

L'addition des équations (3.8) et (3.9) donne :

$$\begin{aligned} A(\alpha)^T P(\alpha) E + E^T P(\alpha) A(\alpha) &= (1 - \alpha)^2 (A_1^T P_1 E + E^T P_1 A_1) \\ &\quad + (1 - \alpha)\alpha (A_1^T P_2 E + E^T P_2 A_1) \\ &\quad + (1 - \alpha)\alpha (A_2^T P_1 E + E^T P_1 A_2) \\ &\quad + \alpha^2 (A_2^T P_2 E + E^T P_2 A_2). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Ces conditions peuvent être formulées sous forme d'inégalités matricielles linéaires (LMI) :

$$\begin{cases} P_1^1 = (P_1^1)^T > 0, \\ P_2^1 = (P_2^1)^T > 0, \\ P_1^2 = (P_1^2)^T > 0, \\ P_2^2 = (P_2^2)^T > 0, \\ \begin{pmatrix} (A_{11}^1)^T P_1^1 E_{11} + E_{11}^T P_1^1 A_{11}^1 & E_{11}^T P_1^1 A_{12}^1 + (A_{21}^1)^T P_2^1 E_{22} \\ (A_{12}^1)^T P_1^1 E_{11} + E_{22}^T P_2^1 A_{21}^1 & (A_{22}^1)^T P_2^1 E_{22} + E_{22}^T P_2^1 A_{22}^1 \end{pmatrix} < 0, \\ \begin{pmatrix} (A_{11}^2)^T P_1^2 E_{11} + E_{11}^T P_1^2 A_{11}^2 & E_{11}^T P_1^2 A_{12}^2 + (A_{21}^2)^T P_2^2 E_{22} \\ (A_{12}^2)^T P_1^2 E_{11} + E_{22}^T P_2^2 A_{21}^2 & (A_{22}^2)^T P_2^2 E_{22} + E_{22}^T P_2^2 A_{22}^2 \end{pmatrix} < 0, \end{cases}$$

Nous pouvons énoncer le théorème suivant.

Théorème 3.8 *Soit deux matrices blocs asymptotiquement stables.*

$$A_1 = \begin{pmatrix} A_{11}^1 & A_{12}^1 \\ A_{21}^1 & A_{22}^1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} A_{11}^2 & A_{12}^2 \\ A_{21}^2 & A_{22}^2 \end{pmatrix}.$$

et une matrice $E = \begin{pmatrix} E_{11} & 0 \\ 0 & E_{22} \end{pmatrix}$, en général non inversible (cas singulier). Avec,

$$P(\alpha) = (1 - \alpha)P^1 + \alpha P^2,$$

$$\text{où } P^1 = \begin{pmatrix} P_1^1 & 0 \\ 0 & P_2^1 \end{pmatrix}, P^2 = \begin{pmatrix} P_1^2 & 0 \\ 0 & P_2^2 \end{pmatrix}.$$

La combinaison convexe est :

$$A(\alpha) = (1 - \alpha)A_1 + \alpha A_2,$$

avec $\alpha \in [0, 1]$, est asymptotiquement stable si les conditions LMI suivantes sont satisfaites :

$$\begin{cases} P_1^1 = (P_1^1)^T > 0, \\ P_2^1 = (P_2^1)^T > 0, \\ P_1^2 = (P_1^2)^T > 0, \\ P_2^2 = (P_2^2)^T > 0, \\ \begin{pmatrix} (A_{11}^1)^T P_1^1 E_{11} + E_{11}^T P_1^1 A_{11}^1 & E_{11}^T P_1^1 A_{12}^1 + (A_{21}^1)^T P_2^1 E_{22} \\ (A_{12}^1)^T P_1^1 E_{11} + E_{22}^T P_2^1 A_{21}^1 & (A_{22}^1)^T P_2^1 E_{22} + E_{22}^T P_2^1 A_{22}^1 \end{pmatrix} < 0, \\ \begin{pmatrix} (A_{11}^2)^T P_1^2 E_{11} + E_{11}^T P_1^2 A_{11}^2 & E_{11}^T P_1^2 A_{12}^2 + (A_{21}^2)^T P_2^2 E_{22} \\ (A_{12}^2)^T P_1^2 E_{11} + E_{22}^T P_2^2 A_{21}^2 & (A_{22}^2)^T P_2^2 E_{22} + E_{22}^T P_2^2 A_{22}^2 \end{pmatrix} < 0, \end{cases}$$

Ce chapitre a démontré la stabilité asymptotique des modèles de Roesser 2D standards et singuliers à temps discret et continu, ainsi que leurs combinaisons convexes, à l'aide de fonctions de Lyapunov et de conditions LMI. Cette approche efficace assure la stabilité pour tout $\alpha \in [0, 1]$ et constitue une fondation pour les applications des modèles 2D standards et singuliers.

CHAPITRE 4

APPLICATION À UN PROCESSUS THERMIQUE

Dans ce chapitre, nous appliquons le modèle de Roesser étudié dans le chapitre précédent à un processus thermique réel, tel qu'une plaque chauffante, pour valider les résultats théoriques obtenus. L'objectif est de vérifier la stabilité du système en utilisant les conditions LMI (Inégalités Matricielles Linéaires) et d'analyser le comportement des états à travers une simulation numérique. Cette application permet de relier la théorie des systèmes 2D aux problèmes pratiques rencontrés dans les domaines de l'ingénierie thermique, comme les échangeurs de chaleur ou les fours tubulaires.

1 Description de l'application

L'application considérée concerne un processus thermique modélisé par l'équation différentielle partielle suivante, qui décrit l'évolution de la température $T(x, t)$ en fonction de la position spatiale $x \in [0, x_f]$ et du temps $t \in \mathbb{Z}_+$ [37] :

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial x} = -\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} - T(x, t) + U(t), \quad (4.1)$$

où $U(t)$ représente une fonction de contrôle (par exemple, une source de chaleur externe). Les conditions initiales et aux limites sont données par :

$$T(x, 0) = f_1(x), \quad T(0, t) = f_2(t).$$

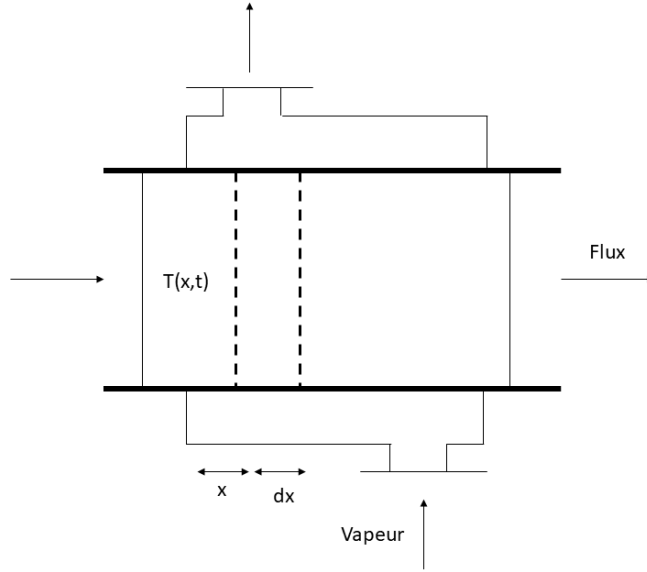


FIGURE 4.1 – Modèle physique du processus thermique 2D

Pour résoudre l'équation (4.1), nous utilisons une méthode de discrétisation. En approximant les dérivées partielles par des différences finies, nous obtenons :

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \approx \frac{T(i, j+1) - T(i, j)}{\Delta t},$$

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \approx \frac{T(i, j) - T(i-1, j)}{\Delta x},$$

où $T(i, j) = T(i\Delta x, j\Delta t)$ et $U(j) = U(j\Delta t)$. Cela conduit à l'équation discrète suivante :

$$T(i, j+1) = \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)T(i-1, j) + \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} - \Delta t\right)T(i, j) + \Delta t U(j).$$

En définissant les états $x_h(i, j) = T(i-1, j)$ et $x_v(i, j) = T(i, j)$, l'équation est reformulée sous la forme du modèle de Roesser :

$$\begin{bmatrix} x_h(i+1, j) \\ x_v(i, j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_2 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_h(i, j) \\ x_v(i, j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} U(j),$$

où $a_1 = 1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} - \Delta t$, $a_2 = \frac{\Delta t}{\Delta x}$, et $b = \Delta t$.

1.1 Conditions de stabilité

Pour garantir la stabilité asymptotique du modèle de Roesser, nous rappelons le théorème suivant, qui repose sur des conditions LMI.

Théorème 4.1 *Le modèle 2D de Roesser à temps discret est asymptotiquement stable si les conditions suivantes sont satisfaites :*

- $P_1 = P_1^T > 0$,
- $P_2 = P_2^T > 0$,

- La matrice suivante est définie négative :

$$\begin{pmatrix} A_{11}^T P_1 A_{11} - P_1 + A_{21}^T P_2 A_{21} & A_{11}^T P_1 A_{12} + A_{21}^T P_2 A_{22} \\ A_{12}^T P_1 A_{11} + A_{22}^T P_2 A_{21} & A_{12}^T P_1 A_{12} + A_{22}^T P_2 A_{22} - P_2 \end{pmatrix} < 0,$$

où $A_{11} = 0$, $A_{12} = 1$, $A_{21} = a_2$, $A_{22} = a_1$.

Dans notre cas, P_1 et P_2 sont des scalaires ($p_1, p_2 > 0$). En substituant, la matrice LMI devient :

$$\begin{pmatrix} -p_1 + a_2^2 p_2 & a_1 a_2 p_2 \\ a_1 a_2 p_2 & p_1 + a_1^2 p_2 - p_2 \end{pmatrix} < 0.$$

Pour valider la stabilité, nous avons résolu ces LMI à l'aide de MATLAB.

1.2 Vérification des conditions de stabilité

Pour que la matrice LMI soit définie négative, ses mineurs principaux doivent satisfaire les conditions suivantes :

- **Premier mineur** : L'élément diagonal $-p_1 + a_2^2 p_2 < 0$, ce qui implique :

$$p_1 > a_2^2 p_2.$$

- **Déterminant** : Le déterminant de la matrice doit être positif :

$$\det(M) = (-p_1 + a_2^2 p_2)(p_1 + a_1^2 p_2 - p_2) - (a_1 a_2 p_2)^2 > 0.$$

En posant $q = \frac{p_1}{p_2}$, cela devient :

$$\det(M) = p_2^2 [-q^2 + (a_1^2 + a_2^2 - 1)q - a_2^2].$$

Pour $\det(M) > 0$, il faut :

$$q^2 - (a_2^2 - a_1^2 + 1)q + a_2^2 < 0.$$

2 Validation de la stabilité

Dans cette section, nous procédons à la validation de la stabilité asymptotique du système. Deux scénarios distincts ont été analysés afin de vérifier les conditions de stabilité, notamment à travers l'étude des valeurs propres de la matrice d'état A .

- **Scénario 1 (stable)** : $a_1 = 0,5$, $a_2 = 0,1$. Les conditions LMI sont réalisables avec $p_1 \approx 0,7508$, $p_2 \approx 1,8674$, confirmant que la matrice est définie négative. Les valeurs propres sont $\lambda \approx 0,653, -0,153$, avec des modules $0,653, 0,153 < 1$, indiquant la stabilité (voir figure 4.2). La simulation montre un comportement borné, comme illustré dans la figure 4.4.
- **Scénario 2 (instable)** : $a_1 = 2,0$, $a_2 = 2,5$. Les LMI ne sont pas réalisables, indiquant que la matrice n'est pas définie négative. Les valeurs propres sont $\lambda \approx 2,871, -0,871$, avec un module $2,871 > 1$, confirmant l'instabilité (voir figure 4.3). La simulation montre une divergence (voir figure 4.5).

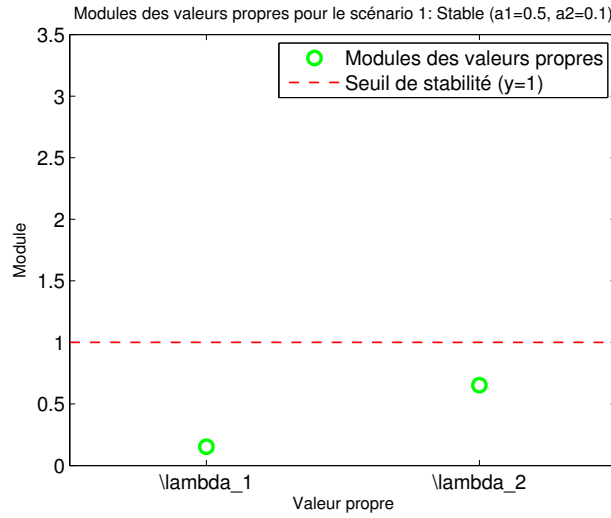


FIGURE 4.2 – Modules des valeurs propres pour le scénario 1 stable ($a_1 = 0,5$, $a_2 = 0,1$). Tous les modules sont inférieurs au seuil de stabilité ($\gamma = 1$).

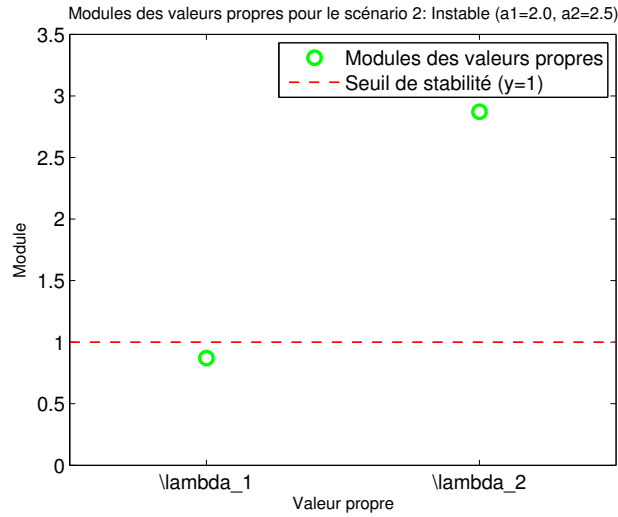


FIGURE 4.3 – Modules des valeurs propres pour le scénario 2 instable ($a_1 = 2,0$, $a_2 = 2,5$). Un module dépasse le seuil de stabilité ($\gamma = 1$).

2.1 Résultats des simulations

Les figures suivantes illustrent l'évolution de la température $x_v(i, j) = T(i, j)$, confirmant le comportement stable ou instable des scénarios.

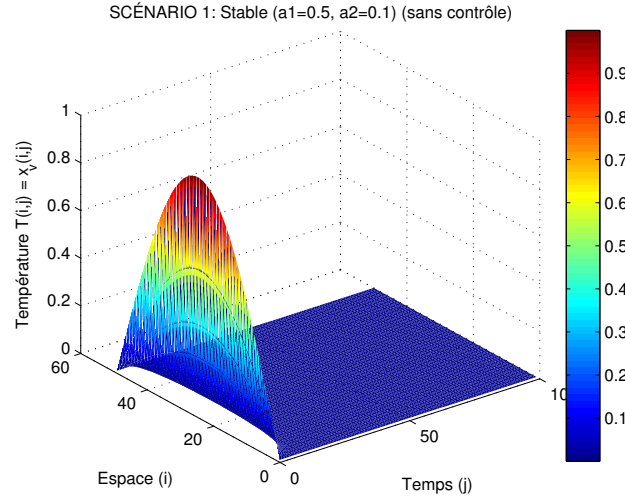


FIGURE 4.4 – Variable d'état $x_v(i, j)$ pour le scénario 1 stable ($a_1 = 0,5$, $a_2 = 0,1$), montrant un comportement borné.

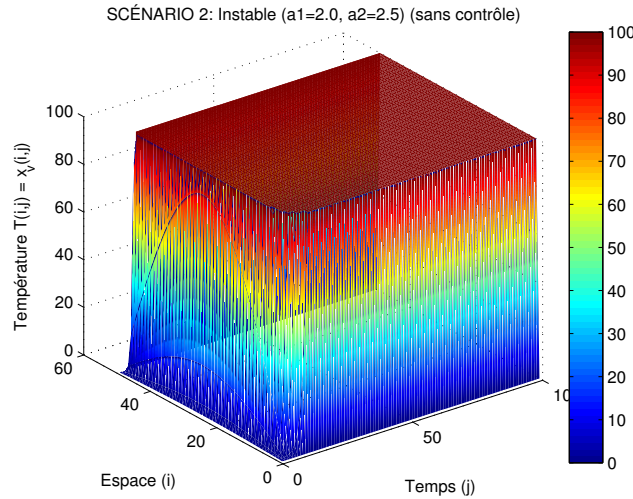


FIGURE 4.5 – Variable d'état $x_v(i, j)$ pour le scénario 2 instable ($a_1 = 2,0$, $a_2 = 2,5$), montrant une divergence.

3 Validation de la stabilité pour la combinaison convexe

Dans cette section, nous validons la stabilité asymptotique de la combinaison convexe $A(\alpha)$, avec $\alpha = 0,5$, pour deux matrices asymptotiquement stables A_1 et A_2 . Nous utilisons le théorème suivant, qui garantit la stabilité sous certaines conditions LMI.

Théorème 4.2 Soit deux matrices blocs asymptotiquement stables :

$$A_1 = \begin{pmatrix} A_{11}^1 & A_{12}^1 \\ A_{21}^1 & A_{22}^1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} A_{11}^2 & A_{12}^2 \\ A_{21}^2 & A_{22}^2 \end{pmatrix}.$$

La combinaison convexe

$$A(\alpha) = (1 - \alpha)A_1 + \alpha A_2,$$

avec $\alpha \in [0, 1]$, est asymptotiquement stable si les conditions LMI suivantes sont satisfaites :

$$\begin{cases} P_1^1 = (P_1^1)^T > 0, & P_2^1 = (P_2^1)^T > 0, \\ P_1^2 = (P_1^2)^T > 0, & P_2^2 = (P_2^2)^T > 0, \\ \begin{pmatrix} (A_{11}^1)^T P_1^1 A_{11}^1 - P_1^1 + (A_{21}^1)^T P_2^1 A_{21}^1 & (A_{11}^1)^T P_1^1 A_{12}^1 + (A_{21}^1)^T P_2^1 A_{22}^1 \\ (A_{12}^1)^T P_1^1 A_{11}^1 + (A_{22}^1)^T P_2^1 A_{21}^1 & (A_{12}^1)^T P_1^1 A_{12}^1 + (A_{22}^1)^T P_2^1 A_{22}^1 - P_2^1 \end{pmatrix} < 0, \\ \begin{pmatrix} (A_{11}^2)^T P_1^2 A_{11}^2 - P_1^2 + (A_{21}^2)^T P_2^2 A_{21}^2 & (A_{11}^2)^T P_1^2 A_{12}^2 + (A_{21}^2)^T P_2^2 A_{22}^2 \\ (A_{12}^2)^T P_1^2 A_{11}^2 + (A_{22}^2)^T P_2^2 A_{21}^2 & (A_{12}^2)^T P_1^2 A_{12}^2 + (A_{22}^2)^T P_2^2 A_{22}^2 - P_2^2 \end{pmatrix} < 0. \end{cases}$$

Dans notre cas, les matrices sont définies comme suit :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_2^1 & a_1^1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_2^2 & a_1^2 \end{bmatrix},$$

avec :

$$a_1^1 = 0,4, \quad a_2^1 = 0,15, \quad a_1^2 = 0,6, \quad a_2^2 = 0,05.$$

Ainsi :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0,15 & 0,4 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0,05 & 0,6 \end{bmatrix}.$$

Pour $\alpha = 0,5$, la matrice combinée est :

$$A(0,5) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0,1 & 0,5 \end{bmatrix},$$

Les matrices P_1^i, P_2^i sont des scalaires ($p_1^i, p_2^i > 0$), et les LMI deviennent :

$$\begin{pmatrix} -p_1^i + (a_2^i)^2 p_2^i & a_1^i a_2^i p_2^i \\ a_1^i a_2^i p_2^i & p_1^i + (a_1^i)^2 p_2^i - p_2^i \end{pmatrix} < 0, \quad i = 1, 2,$$

et pour $A(0,5)$:

$$\begin{pmatrix} -p_1 + (0,1)^2 p_2 & 0,5 \cdot 0,1 \cdot p_2 \\ 0,5 \cdot 0,1 \cdot p_2 & p_1 + (0,5)^2 p_2 - p_2 \end{pmatrix} < 0.$$

3.1 Analyse de stabilité

Nous avons analysé les matrices A_1, A_2 , et leur combinaison convexe pour $\alpha = 0,5$, ainsi que l'analyse des valeurs propres.

- **Matrice A_1 (stable)** : $a_1^1 = 0,4, a_2^1 = 0,15$. Les LMI sont réalisables, confirmant la stabilité. Les valeurs propres sont $\lambda \approx 0,636, -0,236$, avec des modules $0,636, 0,236 < 1$.
- **Matrice A_2 (stable)** : $a_1^2 = 0,6, a_2^2 = 0,05$. Les LMI sont réalisables, confirmant la stabilité. Les valeurs propres sont $\lambda \approx 0,674, -0,074$, avec des modules $0,674, 0,074 < 1$.
- **Combinaison convexe $A(\alpha = 0,5)$** : Les LMI sont réalisables, confirmant la stabilité. Les valeurs propres sont $\lambda \approx 0,653, -0,153$, avec des modules $0,653, 0,153 < 1$ (voir figure 4.6). La simulation montre un comportement borné (voir figure 4.7).

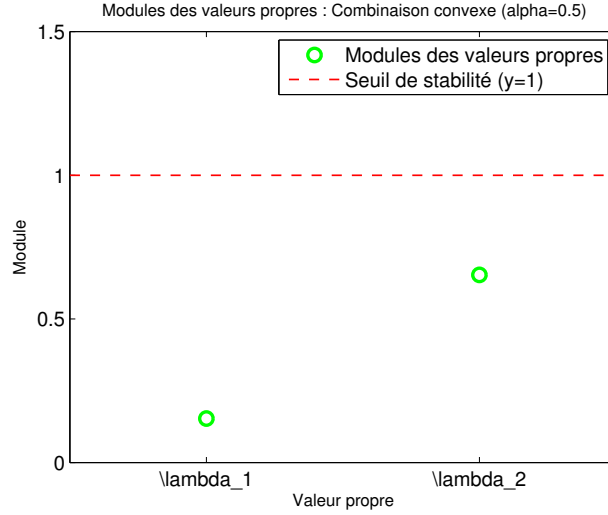


FIGURE 4.6 – Modules des valeurs propres pour $\alpha = 0,5$ ($a_1 = 0,5$, $a_2 = 0,1$). Tous les modules sont inférieurs au seuil de stabilité ($\gamma = 1$).

3.2 Résultats des simulations

La figure 4.7 illustre l'évolution de la température $x_v(i, j) = T(i, j)$ pour $\alpha = 0,5$, confirmant que les états restent bornés, en accord avec les résultats des LMI et des valeurs propres.

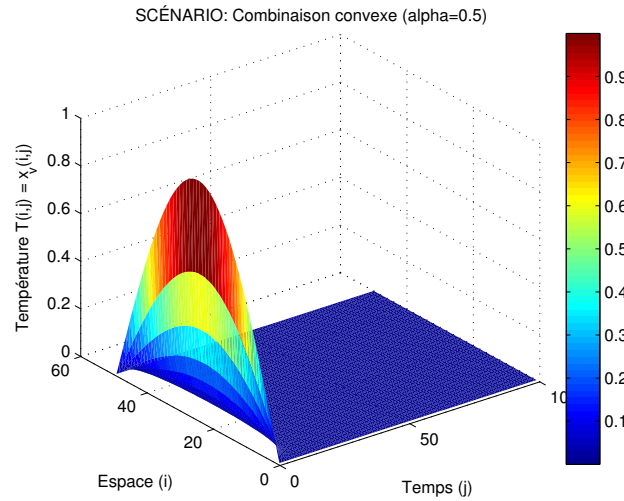


FIGURE 4.7 – Variable d'état $x_v(i, j)$ pour $\alpha = 0,5$ ($a_1 = 0,5$, $a_2 = 0,1$), montrant un comportement borné.

3.3 Analyse avec A_1 instable et combinaison convexe

Nous analysons la combinaison convexe $A(\alpha)$ pour $\alpha = 0,5$, où A_1 est instable et A_2 est asymptotiquement stable. Les matrices sont définies comme suit :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_2^1 & a_1^1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_2^2 & a_1^2 \end{bmatrix},$$

avec :

$$a_1^1 = 2.0, \quad a_2^1 = 2.5, \quad a_1^2 = 0.6, \quad a_2^2 = 0.05.$$

Ainsi :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2.5 & 2.0 \end{bmatrix} \quad (\text{instable}), \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.05 & 0.6 \end{bmatrix} \quad (\text{stable}).$$

Pour $\alpha = 0,5$, la matrice combinée est :

$$A(0.5) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1.275 & 1.3 \end{bmatrix},$$

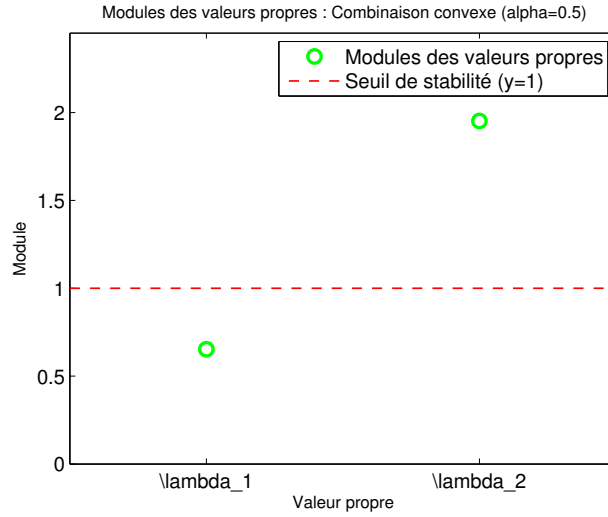


FIGURE 4.8 – Modules des valeurs propres pour $\alpha = 0,5$ ($a_1 = 1,3$, $a_2 = 1,275$). Le module $\approx 1,951 > 1$ indique l'instabilité de $A(0,5)$.

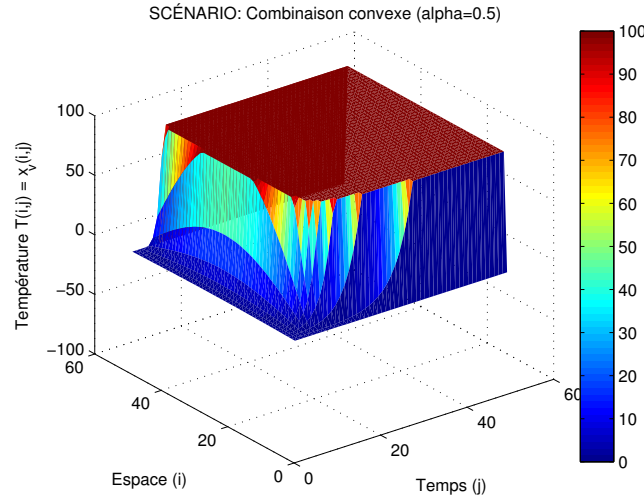


FIGURE 4.9 – Variable d'état $x_v(i, j)$ pour $\alpha = 0,5$ ($a_1 = 1,3$, $a_2 = 1,275$). La divergence reflète l'instabilité.

Les valeurs propres de A_1 ($\lambda \approx 2,871, -0,871$, modules $2,871, 0,871$) confirment son instabilité, tandis que celles de A_2 ($\lambda \approx 0,674, -0,074$, modules $0,674, 0,074$) indiquent sa stabilité. Pour $A(0,5)$, les valeurs propres ($\lambda \approx 1,951, -0,651$, modules $1,951, 0,651$) montrent une instabilité, comme illustré par la figure 4.8. La figure 4.9 montre l'évolution de $x_v(i, j)$, confirmant que l'instabilité de A_1 domine la combinaison convexe.

Dans ce chapitre, nous avons présenté un exemple concret de système 2D issu d'un processus thermique, modélisé initialement par une équation différentielle partielle. Ce modèle a été discrétisé puis reformulé sous la forme du modèle de Roesser, permettant ainsi l'analyse de sa stabilité via les outils développés précédemment.

Les conditions de stabilité obtenues ont été appliquées à ce cas réel, puis validées à l'aide de simulations numériques. Cette étude confirme la pertinence du cadre théorique adopté et son efficacité pour analyser le comportement de systèmes physiques bidimensionnels.

Ce travail s'est concentré sur l'analyse de la stabilité des systèmes dynamiques unidimensionnels et bidimensionnels. Nous avons d'abord introduit les concepts de base liés aux systèmes linéaires unidimensionnels, en abordant les cas des systèmes continus, discrets, positifs et à paramètres variables (LPV). Des conditions de stabilité ont été formulées pour chacun de ces types, notamment grâce à l'utilisation de combinaisons convexes de matrices dynamiques. Par ailleurs, un système LPV continu a été discrétisé, et l'analyse a porté sur le choix du pas de discrétisation garantissant la préservation de la stabilité asymptotique.

La deuxième partie du mémoire a été consacrée à l'étude des systèmes bidimensionnels, en se concentrant sur le modèle de Roesser. Après avoir présenté des conditions théoriques de stabilité, souvent difficiles à vérifier analytiquement, nous proposons des formulations équivalentes sous forme d'inégalités matricielles linéaires (LMI). Cette approche est facilement accessible et très fiable dans la vérification numérique, grâce à l'utilisation combinée de MATLAB, de la boîte à outils YALMIP et du puissant solveur SeDuMi. Ainsi, la méthodologie adoptée assure une vérification précise et efficace de la stabilité des systèmes étudiés, ouvrant la voie à des applications pratiques efficaces.

L'approche a été développée aussi bien pour le cas discret que pour le cas continu, avec une attention particulière portée à la stabilité de la combinaison convexe de matrices. Des exemples numériques et des simulations ont été fournis pour illustrer et valider les résultats théoriques obtenus.

Enfin, une application pratique a été développée à travers un processus thermique modélisé par une équation aux dérivées partielles, reformulée en modèle de Roesser 2D. Les conditions de stabilité obtenues ont été appliquées à ce modèle, puis validées numériquement via des simulations. Deux scénarios distincts ont été considérés, illustrant à la fois le comportement stable et instable du système selon les valeurs des paramètres.

Les résultats obtenus confirment la pertinence des outils théoriques utilisés et leur efficacité pour l'analyse de stabilité des systèmes multidimensionnels. Ce travail ouvre également la voie à des perspectives futures, telles que la commande robuste de ces systèmes ou l'extension vers des modèles de dimension supérieure.

Analyse de la stabilité de combinaisons linéaires matricielles convexes : Application à quelques modèles linéaires

Résumé : Ce projet se concentre sur l'étude de la stabilité des combinaisons matricielles linéaires convexes et sur l'exploration de différentes classes de modèles linéaires de natures et de dimensions diverses. Le projet vise à fournir des résultats généralisés basés sur une analyse de stabilité utilisant des polynômes caractéristiques. Les conditions de détermination de la localisation des valeurs propres pour assurer la stabilité asymptotique seront précisées, en ce qui concerne la faisabilité des systèmes d'inégalités matricielles linéaires, notamment par l'existence d'ensembles de matrices symétriques positives définies. Afin de poser les fondations solides de cette analyse, les outils algébriques et matriciels fondamentaux indispensables à l'étude ont été présentés en détail, en mettant en lumière leur rôle central dans l'élaboration et la justification des méthodes proposées. Enfin, des exemples pratiques et des simulations seront présentés pour valider les résultats obtenus et démontrer leur applicabilité.

Mots-Clés. Modèles linéaires, Modèles de Roesser, Systèmes unidimensionnels, Systèmes bidimensionnels, Systèmes singuliers, Combinaisons convexes, Stabilité asymptotique, Positivité, Discrétisation.

Stability Analysis of Convex Combinations of Linear Matrices : Application to Various Linear Models

Abstract : This project focuses on the study of the stability of convex linear matrix combinations and the exploration of various classes of linear models with different structures and dimensions. The aim is to provide generalized results based on a stability analysis using characteristic polynomials. Conditions for determining the location of eigenvalues to ensure asymptotic stability will be specified, particularly regarding the feasibility of linear matrix inequality (LMI) systems, notably through the existence of sets of positive definite symmetric matrices. To establish a solid foundation for this analysis, the fundamental algebraic and matrix tools essential to the study have been presented in detail, highlighting their central role in the development and justification of the proposed methods. Finally, practical examples and simulations will be provided to validate the obtained results and demonstrate their applicability.

Keywords. Linear models, Roesser models, One-dimensional systems, Two-dimensional systems, Singular systems, Convex combinations, Asymptotic stability, Positivity, Discretization.

تحليل استقرارية التركيبات الخطية المحدبة للمصفوفات: تطبيق على بعض النماذج الخطية

الملخص: يركز هذا المشروع على دراسة استقرارية التركيبات الخطية المحدبة للمصفوفات، واستكشاف فئات مختلفة من النماذج الخطية ذات الطبيعة والأبعاد المتنوعة. يهدف المشروع إلى تقديم نتائج معممة استناداً إلى تحليل الاستقرارية باستخدام كثيرات الحدود المميزة. سيتم تحديد الشروط المتعلقة بموضع القيم الذاتية لضمان الاستقرارية التقاربية، وذلك من خلال دراسة قابلية تحقق أنظمة المتراجحات الخطية المصفوفية، ولا سيما من خلال وجود مجموعات من المصفوفات المتناظرة المعرفة الموجبة. ومن أجل وضع أسس متينة لهذا التحليل، تم تقديم الأدوات الجبرية والمصفوفية الأساسية الضرورية للدراسة بشكل مفصل، مع إبراز دورها المحوري في تطوير وتبرير الأساليب المقترحة. وأخيراً، سيتم عرض أمثلة تطبيقية ومحاكاة رقمية من أجل التحقق من صحة النتائج المتحصل عليها وإثبات قابليتها للتطبيق.

الكلمات المفتاحية: النماذج الخطية، نماذج رويسر، الأنظمة أحادية البعد، الأنظمة ثنائية البعد، الأنظمة الشاذة، التركيبات المحدبة، الاستقرار التقاربي، الإيجابية، التحويل إلى النماذج المنفصلة.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. Aouani, S. Salhi, G. Garcia, M. Ksouri : *Parameter Dependent Lyapunov Functions for Stability of Linear Parameter Varying Systems*. Proceedings of the 17th IEEE International Conference on Electronics, Circuits, and Systems (ICECS), Athens, Greece, 2010, pp. 1002–1005.
25, 26
- [2] D. Bouagada, P. Van Dooren : *Stability Margins for Generalized State Space Systems*. Applied Mathematics Letters, vol. 19, no. 5, 2006, pp. 451–457.
DOI : <https://doi.org/10.1016/j.aml.2005.06.015> 39, 40, 54
- [3] D. Bouagada : *Systèmes différentiels singuliers, positifs et LMIs*. Thèse de Doctorat d'État, Département de Mathématiques, Université d'Es-Sénia Oran, 2007.
<https://dspace.univ-oran1.dz>,
<https://perso.uclouvain.be/paul.vandooren/ThesisBouagada.pdf>. 2, 10, 12, 13, 14, 23
- [4] S. Bouguessa : *Analyse de la stabilité d'une certaine classe de systèmes singuliers fractionnaires*. Thèse de Doctorat, spécialité Recherche Opérationnelle et Aide à la Décision, Université Abdelhamid Ben Badis de Mostaganem, 2022.
<http://e-biblio.univ-mosta.dz/handle/123456789/2679?show=full> 3, 4, 5, 8
- [5] F. R. Gantmacher : *The Theory of Matrices*. Chelsea Publishing Company, New York, 1974. 12
- [6] F. R. Gantmacher : *The Theory of Matrices*. Chelsea Publishing Company, London, 1998. 7, 8
- [7] M. A. Ghezzar, D. Bouagada, M. Chadli : *Influence of Discretization Step on Positivity of a Certain Class of Two-Dimensional Continuous-Discrete Fractional Linear Systems*. IMA Journal of Mathematical Control and Information, 2017.
7
- [8] M. A. Ghezzar : *Analyse et synthèse de certaines classes de systèmes bidimensionnels fractionnaires et/ou singuliers*. Thèse de doctorat en sciences mathématiques, option : contrôle, Université Abdelhamid Ibn Badis Mostaganem, 2018.
<http://e-biblio.univ-mosta.dz/handle/123456789/2679?show=full> 1, 2
- [9] K. Benyettou, D. Bouagada : *Admissibility Tests for Multidimensional Singular Fractional Continuous-Time Models*. Archives of Control Sciences, vol. 32, no. 3, 2022, pp. 607–625.
DOI : <https://doi.org/10.24425/acs.2022.142851> 39, 50, 60

- [10] T. Kaczorek : *Fractional 2D linear systems*. Journal of Automation, Mobile Robotics Intelligent Systems, 2(2), 2008, 5–9.
- [11] T. Kaczorek : *Analysis and Comparison of the Stability of Discrete-Time and Continuous-Time Linear Systems*. Archives of Control Sciences, 26(LXII), 2016, 551–563.
[16](#), [17](#), [33](#), [34](#)
- [12] T. Kaczorek : *Stability of Convex Linear Combinations of Continuous-Time and Discrete-Time Linear Systems*. Archives of Control Sciences, 33(LXIX), 2023, 789–799.
[5](#), [7](#), [16](#), [17](#), [18](#), [19](#), [20](#), [23](#), [24](#), [25](#)
- [13] B. Men, Q. Zhang, X. Li, C. Yang, Y. Chen : *The Stability of Linear Descriptor Systems*. International Journal of Information and Systems Sciences, vol. 2, no. 3, 2006, pp. 362–374. [12](#), [15](#), [17](#), [20](#), [21](#), [22](#)
- [14] I. Er Rachid, A. Hmamed : *Stability and Robust Stabilization of 2-D Continuous Systems in Roesser Model Based on GKYP Lemma*. International Journal of Power Electronics and Drive Systems (IJPEDS), vol. 8, no. 3, 2017, pp. 990–1001.
ISSN : 2088-8694. [54](#)
- [15] R. P. Roesser : *A discrete state-space model for linear image processing*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-20, 1975, pp. 1–10. [39](#)
- [16] Y. Xiao : *Stability test for 2-D continuous–discrete systems*. Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control, vol. 4, 2001, pp. 3649–3654.
- [17] Pearce, R. H. (s.d.). *The Theory of Control : A Brief Overview*. Document PDF, Page 1, Abstract, lignes 4–10 et lignes 11–14. [1](#), [2](#)
- [18] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan : *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, 1994. [2](#)
- [19] K. Benyettou : *Analyse de la Stabilité et Contrôle des Modèles Uni et Multidimensionnels Fractionnaires et Applications*. Thèse de Doctorat, Département de Mathématiques et Informatique, Université Abdelhamid Ben Badis de Mostaganem, 2023. [2](#)
- [20] D. Bouagada, P. Van Dooren : *State Space Solution of Implicit Fractional Continuous Time Systems*. Fractional Calculus and Applied Analysis, vol. 15, no. 3, 2012, pp. 356–361.
[12](#), [13](#)
- [21] D. Bouagada, A. Faraoun : *State-Space Solution of Singular Linear Continuous-Time Systems using the Conformable Derivative and Sumudu Transform*. Bulletin of the Transilvania University of Braşov, Series III : Mathematics and Computer Science, vol. 3(65), no. 1, 2023, pp. 77–92. DOI :<https://doi.org/10.31926/but.mif.2023.3.65.1.6> [39](#), [54](#)
- [22] S. Bouguessa, D. Bouagada, M. A. Ghezzar : *Influence of Discretization Step on Positivity of a Certain Class of Two-Dimensional Continuous-Discrete Fractional Linear Systems*. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, vol. 38, no. 1, 2021.
[16](#), [33](#)
- [23] D. Bouagada, P. Van Dooren : *LMI Conditions for the Stability of 2D State-Space Models*. Numerical Linear Algebra with Applications, vol. 20, no. 2, pp. 198–207, 2013.
[2](#), [39](#)
- [24] N. MILIANI, D. Bouagada, K. Benyettou : *On the Analysis of Positivity and Stabilization of Fractional Multidimensional Discrete Linear Systems*. International Journal of

Dynamics and Control, 2023.

DOI : <https://doi.org/10.1007/s40435-023-01243-0> 1, 39, 40

- [25] M. A. Ghezzar, D. Bouagada, K. Benyettou, M. Chadli, P. Van Dooren : *On the Stability of 2D General Roesser Lyapunov Systems*. Mathematica, 2021, no. 1, pp. 85–97. 39, 40, 54
- [26] K. Benyettou, D. Bouagada : *Admissibility Tests for Multidimensional Singular Fractional Continuous-Time Models*. Archives of Control Sciences, vol. 32, no. 3, 2022. 39, 54, 60
- [27] K. Benyettou, D. Bouagada, M. A. Ghezzar : *Solution of 2D State Space Continuous-Time Conformable Fractional Linear System Using Laplace and Sumudu Transform*. Comput Math Model, vol. 32, no. 2, 2021, pp. 94–109. DOI : <https://doi.org/10.1007/s10598-021-09519-w> 39, 54
- [28] K. Ogata : *Modern Control Engineering*, 3rd ed. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1997. 1
- [29] J. R. Leigh : *Control Theory : A Guided Tour*, 2nd ed. The Institution of Electrical Engineers, London, UK, 2004. 1
- [30] R. F. Brown : *Biomedical Systems Analysis via Compartmental Concepts*. Abacus Press, Tunbridge Wells, 1985. 1
- [31] T. Kaczorek : *Normal positive linear systems and electrical circuits*. Przegląd Elektrotechniczny, vol. 94, no. 6, pp. 1–7, 2018. 1
- [32] J. Monnier : *Transformée de Laplace*, INSA Toulouse, Toulouse, France, 2019.
- [33] P. Maréchal : *Éléments d'analyse convexe*, Université Paul Sabatier, Toulouse, France. 3
- [34] J. Luk : *Notes on Simplification of Matrices*. 6
- [35] T. Kaczorek : *Positive 1D and 2D Systems*, Communications and Control Engineering, Springer-Verlag, London, 2002. 7
- [36] M. Benaoued : *Stability and Stabilization of Positive Infinite-Dimensional Systems*, Thèse de doctorat, Université Abdelhamid Ibn Badis, Mostaganem, Algérie, 2021. 9, 10, 11, 14, 15
- [37] D. Bouagada : *New Results in Multidimensional Systems Theory ($n \geq 1$) State Space Representations and Stability*, Présentation au Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées (LMPA), Université Abdelhamid Ibn Badis, Mostaganem, Algérie, 2021. 12
- [38] M. C. de Oliveira, J. Bernussou, and J. C. Geromel : *A new discrete-time robust stability condition*, Systems and Control Letters, Vol. 37, No. 4, pp. 261–265, 1999. 63
- [39] N. Yeganefer, N. Yeganefer, M. Ghamgui, and E. Moulay : *Lyapunov theory for 2-D nonlinear Roesser models : Application to asymptotic and exponential stability*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 58, no. 5, May 2013, pp. 1299–1304. 29

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة عبد الحميد بن باديس-مستغانم-
كلية العلوم الدقيقة والإعلام الآلي

تصريح شرفي خاص بالالتزام بقواعد النزاهة العلمية
لإنجاز البحث

أنا الممضي أدناه،

الطالبة: بن عبد الله أسماء رقم التسجيل الجامعي: 37028254

الحامل لبطاقة التعريف الوطنية رقم: 110020963020120004 والصادرة بتاريخ: 25.04.2023

عن صيادة - مستغانم

المسجل بـ كلية العلوم الدقيقة والإعلام الآلي / قسم: الرياضيات والإعلام الآلي

شعبة: الرياضيات التطبيقية / التخصص: النمذجة، التحكم والتجويد

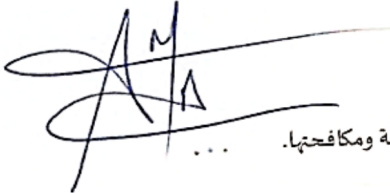
والمكلف بإنجاز مذكرة ماستر بعنوان:

« تحليل استقرارية التركيبات الخطية المحدبة للمصفوفات : تطبيق على بعض النماذج الخطية »

أصرح بشرفي أنني ألتزم بمراعاة المعايير العلمية والمنهجية ومعايير الأخلاقيات العلمية والنزاهة الأكاديمية المطلوبة في إنجاز البحث، وأتحمل المسؤولية الشخصية عن كل المحتوى المتضمن في البحث المذكور أعلاه.

التاريخ: 12.06.2025

إمضاء المعني



* ملحق القرار الوزاري رقم 933 المؤرخ في 28 جويلية 2016 الذي يحدد القواعد المتعلقة بالوقاية من السرقة العلمية ومكافحتها.