

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS DE MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE



MÉMOIRE

Master Académique

pour obtenir le diplôme de Master délivré par

Université de Mostaganem

Spécialité "Modélisation, Contrôle et Optimisation"

présenté et soutenu publiquement par

Bouabdallah BENAÏSSA-CHERIF

le 13 Juin 2018

Théorème de point fixe de Brouwer et ses Applications

Encadeur : **Soumia Ould ali BELMOUHOB (UNIVERSITÉ DE MOSTAGANEM, ALGÉRIE)**

Jury

Hamid. Bouzit, MCA Président (Université de Mostaganem)

Amine. Ghezzar, MCB Examineur (Université de Mostaganem)

LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE (FSEI)
Chemin des Crêtes (Ex-INES), 27000 Mostaganem, Algérie

Année Universitaire 2017/2018

M
A
S
T
E
R

Dédicaces

Arrivé au terme de mes études, j'ai le grand plaisir de dédier ce modeste travail :

A ma très chère mère, qui me donne toujours l'espoir de vivre et qui n'a jamais cessé de prier pour moi.

A mon très cher père, pour ses encouragements, son soutien, surtout pour son amour et son sacrifice afin que rien n'entrave le déroulement de mes études.

Mes très chères frères et sœurs.

A mon encadreur Mme Soumia Belmouhoub qui m'a guidé durant toute ma recherche.

A mes collègues de département Mathématique d'université Mostaganem, qui m'ont apporté leur support moral et intellectuel tout au long de ma démarche.

A mes meilleurs amis chacun à son nom du département Mathématique d'université Mostaganem, qui m'ont apporté leur support moral et intellectuel tout au long de ma démarche.

Remerciements

D'abord, je tiens à remercier Allah, le tout Puissant, de m'avoir donné la santé, la volonté et la patience pour mener à terme ma formation de Master.

Je voudrais adresser à remercier vivement mon encadreur de mémoire, Mme Soumia Belmouhoub , pour sa patience, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribués à alimenter ma réflexion.

Je voudrais également remercier les membres du jury pour l'honneur qu'ils m'ont fait nous ont fait en acceptant de présider et d'examiner mon travail .

Je veux remercier mes parents qui priaient toujours pour mon succès. Et leurs judicieux conseils au cours de cette année.

J'adresse également mes remerciements envers mes amis et mes collègues pour leur soutien.

J'adresse mes sincères remerciements aux professeurs, intervenants et toute personne qui par leurs paroles, leurs écrits, leurs conseils et leurs critiques ont illuminé mes réflexions et ont accepté de me rencontrer et de répondre à mes questions durant mes recherches.

Enfin, je remercie tous ceux et celles qui m'ont aidé de loin ou de près pour l'élaboration de ce travail et toute la famille du département de mathématiques et la promotion 2018.

Les notations

$\epsilon, \lambda, \delta$: des petits paramètres positifs.
\emptyset	: L'ensemble vide.
\mathbb{N}	: Corps des naturels.
\mathbb{R}	: Corps des réels.
\mathbb{R}_+	: Corps des réels positifs.
\mathbb{R}^n	: L'espace Euclidien de dimension n .
$Im f$: ensemble image d'une fonction f .
E^\perp	: L'orthogonale de E .
$M_n(\mathbb{R})$: ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients réels.
\mathbb{C}	: Corps des complexes.
\mathbb{K}	: \mathbb{R} ou \mathbb{C} .
C^k	: La classe des fonctions k fois dérivables.
$\sup f(x)$: suprémum de la fonction f .
\cap	: Intersection.
\cup	: Réunion.
∇f_a	: gradient de f en point a .
$\det(A)$: Déterminant de la matrice A .
$Vol(B)$: Volume de la boule B .
\langle, \rangle	: Produit scalaire.
$\ \cdot\ _E$: La norme sur l'ensemble E .
$ \cdot $: Valeur absolue.
$\ \cdot\ _{\infty, k}$: La norme sup sur k .
$B^n(x, r)$: La boule ouverte de centre x et de rayon r dans \mathbb{R}^n .
$\bar{B}^n(x, r)$: La boule fermée de centre x et de rayon r dans \mathbb{R}^n .
$S^{n-1}(x, r)$: La sphère de centre x et de rayon r dans \mathbb{R}^n .
$C(E, F)$: L'ensemble des fonctions continues de E dans F .
A^c	: Complémentaire de A .
$V(x)$: Voisinage de x .
$\mathfrak{D}(x)$: L'ensemble des voisinages de x .
$f _A$: La restriction de f sur A .

Table des matières

Dédicaces	1
Remerciements	2
Notations	3
Introduction	5
1 Préliminaires	7
1 Espaces métriques	7
2 Espaces normés	9
3 Notions de Topologie	10
3.1 espaces topologiques	10
3.2 Topologie des espaces métriques	11
3.3 Les suites	13
3.4 Continuité	15
3.5 Convexité-Compacité-Connexité	16
4 Théorèmes de base	17
5 Théorème d'inversion locale	18
6 Rappels d'algèbre	19
7 Matrice Jacobienne et Différentielle	20
2 Théorème de Point fixe de Brouwer	22
1 Théorème de Point fixe de Banach	22
2 Théorème du point fixe de Brouwer	26
2.1 Théorème de Brouwer en dimension $n = 1$	26
2.2 Théorème de Brouwer en dimension $n > 1$	27
2.3 Théorème de Schauder	34
3 Applications	35
1 Application 1	35
2 Application 2	39
Conclusion	41

Introduction

Les théorèmes du point fixe sont d'une importance capitale en mathématiques, où leur application directe est rencontrée dans la résolution du problème d'existence et d'unicité des solutions des équations différentielles. Ces théorèmes énoncent que si une fonction continue f vérifie certaines propriétés, alors il existe un point x_0 tel que $f(x_0) = x_0$.

Le plus connu est celui du théorème de Banach(1922)[1, 22, 23], appelé aussi théorème de l'application contractante qui dit qu'une contraction d'un espace métrique complet dans lui-même admet un point fixe unique.

Il y a aussi les théorèmes du point fixe avec des conditions plus faibles que celles du théorème de Banach, parmi eux le théorème de point fixe de Brouwer qui sous sa forme la plus simple, exige uniquement la continuité de l'application d'un intervalle fermé borné dans lui-même et de façon plus générale, l'application continue doit être définie dans un convexe compact d'un espace euclidien dans lui-même. Historiquement, en 1886, Henri Poincaré démontre un résultat équivalent au théorème du point fixe de Brouwer. L'énoncé exact est prouvé pour la dimension trois par Piers Bohl pour la première fois en 1904, puis par Jacques Hadamard dans le cas général en 1910. le mathématicien Luitzen Egbertus Jan Brouwer remarquait, en mélangeant son café au lait, que le point central de la surface du liquide, au milieu du tourbillon créé par le mouvement rotatoire de la cuillère, restait immobile. Il examina le problème de cette façon : A tout moment, il y a un point de la surface qui n'est pas changé de place alors il propose une nouvelle démonstration en 1912 [10, 11]. Le théorème du point fixe de Schauder établi en 1930, est une généralisation de ce théorème et affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique.

Si, parmi les centaines de théorèmes de point fixe, celui de Brouwer est particulièrement célèbre, c'est en partie parce qu'il est utilisé dans de nombreuses branches mathématiques : géométrie différentielle , topologie ; Il apparaît même dans des branches plus inattendues, comme la théorie des jeux, où John Nash l'utilise pour montrer l'existence d'un équilibre pour un jeu de n personnes avec stratégies mixtes[7], et comme les sciences économiques plus précisément dans les modèle de marché concurrentiel [14]

Ce mémoire est consacré à la démonstration du théorème du point fixe de Brouwer en dimension n et à ses applications. on se base essentiellement sur [10, 11, 14, 25] qui utilisent le théorème de non rétraction. Pour plus détails, le lecteur pourra consulter les travaux cités dans la bibliographie.

Ce travail est composé de trois chapitres, d'une conclusion et d'une bibliographie et est organisé comme suit :

- Le premier chapitre porte sur les préliminaires où on rappelle des définitions et des théorèmes nécessaires pour le développement de notre travail.
- Le deuxième chapitre est consacré à la présentation du résultat principal de ce mémoire le théorème du point fixe de Brouwer et démonstration en passant par la démonstration du théorème de non rétraction de classe C^1 .

Théorème 0.1 (*Théorème non-rétraction de classe C^1*) [11]

Il n'existe pas d'application $f : \bar{B}^n \rightarrow S^{n-1}$ de classe C^1 telle-que pour tout $x \in S^{n-1}, f(x) = x$.

- Le troisième chapitre concerne les applications du théorème de Brouwer dans la résolution des équations différentielles et en algèbre linéaire :
 1. Résolution du problème de Cauchy Peano donné par :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

avec $(t_0, x_0) \in I \times U$ et $f : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue, où I un intervalle non vide de \mathbb{R} , U un ouvert de \mathbb{R}^n .

2. Nous allons citer le théorème de Perron-Frobenius .

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques définitions et résultats préliminaires ainsi que certains théorèmes d'analyse pour une meilleure présentation des démonstrations des résultats de notre travail. Nous nous sommes basés sur les documents suivants. [1, 6, 9, 17]

1 Espaces métriques

Définition 1.1 Une distance (métrique) sur un ensemble E est une application $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant :

1. $\forall x, y \in E : d(x, y) = 0 \iff x = y$ (séparation). (a)
2. $\forall x, y \in E : d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie). (b)
3. $\forall x, y, z \in E : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire). (c)

Dans ce cas, on dit que (E, d) est un **espace métrique** et on appelle $d(x, y)$ la **distance** entre x et y .

Exemple 1.1 Soit d une application définie par :

$$\begin{aligned} d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) &\rightarrow d(x, y) = |x^3 - y^3| \end{aligned}$$

- Montrons que d est une distance sur \mathbb{R} .

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}$, $d(x, y) = 0 \iff x = y$?

$$\begin{aligned} d(x, y) = 0 &\iff |x^3 - y^3| = 0 \\ &\iff x^3 - y^3 = 0 \\ &\iff x^3 = y^3 \\ &\iff x = y \end{aligned}$$

2. Soient $x, y \in \mathbb{R}$, $d(x, y) = d(y, x)$?

$$\begin{aligned} d(x, y) &= |x^3 - y^3| \\ &= |y^3 - x^3| \\ &= d(y, x) \end{aligned}$$

3. Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$?

$$\begin{aligned} d(x, z) &= |x^3 - z^3| \\ &= |x^3 - y^3 + y^3 - z^3| \\ &\leq |x^3 - y^3| + |y^3 - z^3| \\ &\leq d(x, y) + d(y, z) \end{aligned}$$

Proposition 1.1 Une distance d sur un ensemble E vérifie :

1) $\forall x, y \in E, d(x, y) \geq 0$

2) La deuxième inégalité triangulaire.

$$\forall x, y, z \in E, |d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z) \quad (1.1)$$

Preuve.

1) En utilisant successivement (a) et (b), on obtient pour $x, y \in E$.

$$0 = d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y)$$

2) En utilisant (c) on obtient pour $x, y, z \in E$,

$$d(x, z) - d(x, y) \leq d(y, z)$$

Par symétrie et en utilisant (b) on obtient,

$$d(x, y) - d(x, z) \leq d(z, y) = d(y, z)$$

On déduit alors,

$$|d(x, z) - d(x, y)| \leq d(y, z)$$

■

Exemple 1.2 Pour $x, y \in \mathbb{R}$, l'application

$$\begin{aligned} d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) &\rightarrow d(x, y) = |x - y| \end{aligned}$$

définit une distance, appelée distance **usuelle** sur \mathbb{R} .

Exemple 1.3 Soit E un ensemble et $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ une application définie par :

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = y \\ 1, & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

est une distance appelée **discrète**, le couple (E, d) est appelé **espace métrique discret**.

Définition 1.2 Sur l'espace \mathbb{R}^n , on définit plusieurs distances faisant intervenir les distances entre les composantes.

Soient $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, on définit,

$$\begin{aligned} d_1(x, y) &= \sum_{i=1}^n |y_i - x_i| \\ d_2(x, y) &= \left(\sum_{i=1}^n |y_i - x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ d_\infty(x, y) &= \max_{1 \leq i \leq n} |y_i - x_i| \end{aligned}$$

2 Espaces normés

Définition 1.3 Soit E un \mathbb{K} espace vectoriel, une norme d'espace vectoriel réel est une application notée $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ qui vérifie les axiomes suivants :

1. $\|x\| = 0 \iff x = 0$ (séparation).
2. $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.
3. $\forall x, y \in E: \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire).

On appelle espace vectoriel normé le couple $(E, \|\cdot\|)$ où E est un espace vectoriel sur \mathbb{R} et $\|\cdot\|$ est une norme sur E .

La proposition suivante précise en quel sens les espaces vectoriels normés sont des espaces métriques.

Proposition 1.2 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. la distance associée à la norme est l'application :

$$\begin{aligned} d : E \times E &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) &\rightarrow \|x - y\| \end{aligned}$$

Preuve.

- Pour $(x, y) \in E^2$, $d(x, y) = 0 \Rightarrow \|x - y\| = 0 \Rightarrow (x - y = 0) \Rightarrow (x = y)$
- Pour $(x, y) \in E^2$, $d(y, x) = \|y - x\| = \|(x - y)\| = |-1| \|x - y\| = \|x - y\|$
- Pour $(x, y, z) \in E^3$, $d(x, z) = \|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z)$

■

Définition 1.4 On définit les normes $\|x\|_1$, $\|x\|_2$ et $\|x\|_\infty$ pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ par,

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= |x_1| + \dots + |x_n| \\ \|x\|_2 &= \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2} \\ \|x\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_1| + \dots + |x_n|\} \end{aligned}$$

Proposition 1.3 Sur \mathbb{R}^n les trois normes $\|x\|_1$, $\|x\|_2$ et $\|x\|_\infty$ sont équivalentes.

Preuve. On va démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty$$

1. On montre que $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2$.

$$\begin{aligned} \|x\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_1| + \dots + |x_n|\} \\ &= |x_j| \quad (\text{où } j \text{ est tel que } |x_j| = \|x\|_\infty) \\ &\leq \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2} = \|x\|_2 \end{aligned}$$

2. On montre que $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$.

$$\begin{aligned} \|x\|_2^2 &= (x_1)^2 + \dots + (x_n)^2 \\ \Rightarrow \|x\|_2^2 &\leq |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2 + 2 \sum_{1 < i < j < n} |x_i||x_j| = (|x_1| + \dots + |x_n|)^2 \\ \Rightarrow \|x\|_2^2 &\leq \|x\|_1^2 \end{aligned}$$

Donc $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$.

3. On montre que $\|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$.

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= |x_1| + \dots + |x_n| \\ &\leq n \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_1| + \dots + |x_n|\} = n\|x\|_\infty \end{aligned}$$

Alors,

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$$

■

3 Notions de Topologie

3.1 espaces topologiques

Définition 1.5 On appelle *espace topologique* un couple (E, τ) où E est un ensemble et τ est une famille de parties E , appelées ouverts, vérifiant :

1. E et \emptyset est appartient à τ .
2. L'intersection fini d'éléments de τ appartient à τ .

$$\forall (\theta_i)_{i=1, \dots, n} \in \tau, \quad \bigcap_{i \in \{1, \dots, n\}} \theta_i \in \tau$$

3. Toute réunion quelconque d'éléments de τ appartient à τ .

$$\forall (\theta_i)_{i \in I} \in \tau, \quad \bigcup_{i \in I} \theta_i \in \tau, \quad I \subset \mathbb{N}$$

Exemple 1.4 Soit $E = \{a, b, c, d\}$.

1. $\tau_1 = \{\emptyset, \{E\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, c\}\}$ ne définit pas une topologie sur E car,

$$\{a\} \in \tau_1 \text{ et } \{b\} \in \tau_1$$

mais,

$$\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\} \notin \tau_1$$

2. $\tau_2 = \{\emptyset, \{E\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}\}$ ne définit pas une topologie sur E car,

$$\{a, c, d\} \in \tau_2 \text{ et } \{b, c, d\} \in \tau_2$$

mais,

$$\{a, c, d\} \cap \{b, c, d\} = \{c, d\} \notin \tau_2$$

3. $\tau_3 = \{\emptyset, \{E\}, \{d\}, \{a, d\}\}$ définit une topologie sur E .

3.2 Topologie des espaces métriques

Les boules

Définition 1.6 Soit (E, d) un espace métrique. pour $x \in E$ et $r > 0$, on définit :

1. La **boule ouverte** de centre x et rayon r :

$$B(x, r) = \{ y \in E, \quad d(x, y) < r \}.$$

2. La **boule fermée** de centre x et rayon r :

$$\bar{B}(x, r) = \{ y \in E, \quad d(x, y) \leq r \}.$$

3. La **sphère** de centre x et rayon r :

$$S(x, r) = \{ y \in E, \quad d(x, y) = r \}.$$

Définition 1.7 On appelle **boule unité** d'un espace normé la boule de centre 0 et de rayon 1.

Exemple 1.5 Dans \mathbb{R} muni de la distance usuelle $d(x, y) = |x - y|$ on a,

$$B(1, 1) =]0, 2[$$

$$\bar{B}(1, 1) = [0, 2]$$

Exemple 1.6 Dans \mathbb{R}^2 , les boules ouvertes (resp. fermées) de centre 0 et de rayon r pour les distances d_1, d_∞ et d_2 sont représentés par la figure 1 :

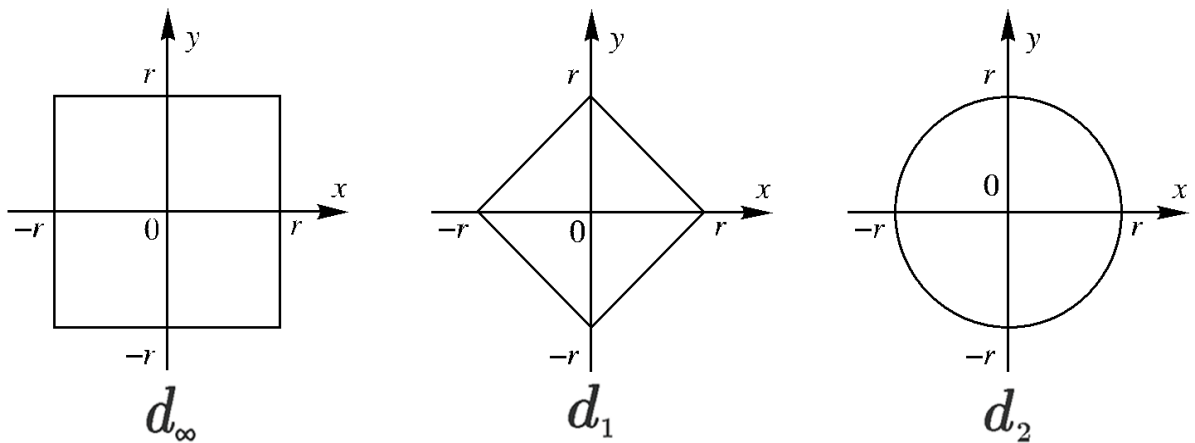


FIGURE 1

Ouverts - fermés

Définition 1.8 Soit (E, d) un espace métrique.

- On dit qu'une partie A de E est **ouverte** dans (E, d) si pour tout $x \in A$, il existe $r > 0$ telle que,

$$B(x, r) \subset A$$

- On dit qu'une partie A de E est **fermé** dans (E, d) si son complémentaire est ouvert.

Proposition 1.4 Une boule ouverte sur un espace métrique est un ouvert.

Preuve.

Soit $B(a, r)$ une boule de centre a et de rayon $r > 0$ dans un espace métrique (E, d)

Soit $x \in B(a, r)$, donc,

$$d(a, x) < r \implies r - d(a, x) > 0.$$

On pose,

$$\rho_x = \frac{r - d(a, x)}{2} > 0$$

et on montre que $B(x, \rho_x) \subset B(a, r)$ pour cela :

Soit $y \in B(x, \rho_x)$ on a ,

$$\begin{aligned} d(a, y) &\leq d(a, x) + d(x, y) \\ &< d(a, x) + \rho_x \\ &< d(a, x) + \frac{r - d(a, x)}{2} \\ &< \frac{r + d(a, x)}{2} \\ &< \frac{r + r}{2} = r \end{aligned}$$

Donc $\forall y \in B(x, \rho_x)$ on a, $d(a, y) < r$. on déduit alors $y \in B(a, r)$. ■

Cas particulier : l'espace métrique $(\mathbb{R}, |.|)$

Définition 1.9 Soit $A \subset \mathbb{R}$.

- On dit A est un **ouvert** de \mathbb{R} si A est vide ou s'il contient un intervalle ouvert contenant x . i.e :
 - $A = \emptyset$.
 - ou
 - $\forall x \in \mathbb{R}, \exists I_x$ intervalle ouvert telle que $x \in I_x \subset A$.
- Soit A un ouvert de \mathbb{R} son complémentaire A^c est dite **fermé** de \mathbb{R} .

Exemple 1.7

- Tous les intervalles de \mathbb{R} de la forme $]a, b[$ sont des ouverts.
- les intervalles de la forme $[a, b]$ sont fermés.

Exemple 1.8

- $[a, b]$ est fermé car,

$$[a, b] = C_{\mathbb{R}}(] - \infty, a[\cup]a, +\infty[)$$

Remarque 1.1

- Il existe des parties de E qui sont à la fois ouvertes et fermées, comme par exemple \emptyset et E .
- En général, il existe également des parties qui ne sont ni ouvertes ni fermées. C'est le cas de $[0, 1[$ dans \mathbb{R} muni de sa valeur absolue.

Voisinages

Définition 1.10 Soit (E, d) un espace métrique et $x \in E$, V une partie de E . On dit que V est voisinage de x si il existe une boule ouverte $B(x, r)$ telle que,

$$x \in B(x, r) \subset V$$

Exemple 1.9

- Soit $x = 1$, $V = [0, 3[$ alors,

$$\exists I =]0, 2[\text{ et } 1 \in I \subset V$$

Alors l'intervalle $[0, 3[$ est un voisinage de 1 dans $(\mathbb{R}, |.|)$.

- $[0, +\infty[$ est un voisinage de 5.

Remarque 1.2

- Un point $x \in E$ admet plusieurs voisinages.
- L'ensemble des voisinage de x est noté $\mathfrak{V}(x)$ et on écrit :

$$V \in \mathfrak{V}(x) \iff V \text{ est voisinage de } x$$

- Toute boule ouverte est un voisinages de tous ses points.

Remarque 1.3

La topologie des espaces normés en ce qui concerne boules ouverts fermés et voisinages est la même que celle des espaces métriques en remplaçant les distances par les normes dans les définitions par exemple : la boule ouverte de centre $a \in \mathbb{R}$ et de rayon r positif dans un espace normé E est donnée par $B(a, r) = \{ y \in E, \|x - y\| < r \}$.

3.3 Les suites

Les suites dans un espace métrique

Définition 1.11 Soit (E, d) un espace métrique.

On dit qu'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de E converge vers un point x de E si et seulement si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies d(x_n, x) < \epsilon$$

Définition 1.12 On dit que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels converge vers la limite $\ell \in \mathbb{R}$ quand n tend vers l'infini, si et seulement si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies |x_n - \ell| < \epsilon$$

Remarque 1.4 Si on travaille dans \mathbb{R} , c'est-à-dire $x_n \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$, la condition :

$$|x_n - \ell| < \epsilon$$

est équivalente à :

$$\ell - \epsilon < x_n < \ell + \epsilon$$

ou encore :

$$x_n \in]\ell - \epsilon, \ell + \epsilon[$$

Proposition 1.5 Une sous-suite extraite d'une suite convergente est encore convergente, et converge vers la même limite.

Proposition 1.6 Une partie F d'un espace métrique (E, d) est fermée si et seulement si toute suite (x_n) de F est telle que :

$$x_n \longrightarrow x \text{ alors } x \in F$$

Remarque 1.5 Les parties fermées d'un espace métrique sont celles qui contiennent les limites de leurs suites convergentes.

Les suites dans un espace normé

Définition 1.13 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé.

On dit qu'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans E converge vers $\ell \in E$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies \|x_n - \ell\| \leq \varepsilon$$

et on écrit,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \ell$$

Définition 1.14 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé.

Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite suite de Cauchy dans E si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n, m \in \mathbb{N}, n \geq n_0, m \geq n_0, \implies \|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

Proposition 1.7 Toute suite convergente est une suite de Cauchy.

Preuve.

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente vers une limite ℓ , alors on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, \|x_n - \ell\| \leq \varepsilon$$

Par suite,

$$\forall n \geq N, \forall m \geq N, \|x_n - x_m\| \leq \|x_n - \ell\| + \|\ell - x_m\| < 2\varepsilon$$

■

Définition 1.15 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé.

On dit que E est un espace complet si, et seulement si, toute suite de Cauchy dans E converge dans E .

Exemple 1.10

- L'espace \mathbb{R} muni de la norme euclidienne est complet.
- L'espace \mathbb{R}^n est complet pour tout n .

Définition 1.16 On dit qu'un espace vectoriel normé est un espace de Banach s'il est complet.

Exemple 1.11 Les espaces $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ et $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ sont des espaces de Banach.

3.4 Continuité

Continuité dans un espace métrique

Soit (E, d) et (F, d_1) deux espaces métrique et $f : E \rightarrow F$ une application.

Définition 1.17 On dit que f est continue en un point $x_0 \in E$ si pour tout V voisinage de $f(x_0)$ dans F , il existe U voisinage de x_0 dans E telle que $f(U) \subset V$

Définition 1.18 On dit que f est continue sur E si,

$$\forall x \in E, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ telle que } \forall y \in E \quad d(x, y) < \delta \implies d_1(f(x), f(y)) < \epsilon \quad (1.2)$$

Définition 1.19 Soit (E, d) est un espace métrique.

Une partie A de E est bornée s'il existe $a \in E$ et $r > 0$, telle que,

$$d(a, x) \leq r, \forall x \in A \quad (1.3)$$

C'est-à-dire la partie A est incluse dans la boule.

Exemple 1.12

- Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est bornée si $f(I)$ est minoré et majoré.
- la sphère de \mathbb{R}^n est bornée.

Cas particulier : continuité sur \mathbb{R}

Définition 1.20 Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

On dit que f est continue sur I si,

$$\forall x \in I, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall y \in I, |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon \quad (1.4)$$

Définition 1.21 Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

On dit que f est uniformément continue sur I si,

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x, y, |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon \quad (1.5)$$

Continuité dans un espace vectoriel normé

Définition 1.22 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé.

On dit que f est continue sur E si,

$$\forall x \in E, \forall \epsilon > 0, \exists \delta_{\epsilon, x} > 0 \text{ tel que } \forall y \in E \quad \|x - y\| < \delta \implies \|f(x) - f(y)\| < \epsilon \quad (1.6)$$

Définition 1.23 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé.

On dit que f est uniformément continue sur E si,

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_{\epsilon} > 0 \text{ tel que } \forall x, y \in E \quad \|x - y\| < \delta \implies \|f(x) - f(y)\| < \epsilon \quad (1.7)$$

Proposition 1.8 Si une application f est uniformément continue sur E alors f est continue sur E . la réciproque est fausse.

Exemple 1.13 La fonction constante d'un espace vectoriel normé dans un autre est continue.

3.5 Convexité-Compacité-Connexité

Définition 1.24 (ensemble convexe)

Soit E est un espace vectoriel réel. on dit que $K \subset E$ est un ensemble convexe si :

$$\forall (x, y) \in K^2, \forall \lambda \in [0, 1], \lambda x + (1 - \lambda)y \in K \quad (1.8)$$

Définition 1.25 Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dite convexe lorsque :

$$\forall x, y \in I, \forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

Exemple 1.14

- les boules d'un espace vectoriel normé sont des parties convexes.
- les parties convexes de \mathbb{R} sont les intervalles.

Définition 1.26 Soit (X, τ) un espace topologique.

Un recouvrement ouvert d'une partie A de X est une famille $(\theta_i)_{i \in I}$ d'ouverts vérifiant :

$$A \subset \bigcup_{i \in I} \theta_i, \quad I \subset \mathbb{N} \text{ quelconque.} \quad (1.9)$$

Définition 1.27 (ensemble compact)

Soit (E, d) espace métrique .

- On dit que (E, d) est un espace compact si et seulement si de tout recouvrement de E par des ouverts de E , on peut en extraire un sous-recouvrement fini. En d'autres termes, si $E = \bigcup_{i \in I} \theta_i$ où les θ_i sont des ouverts, il existe J fini, $J \subset I$ telle que $E = \bigcup_{i \in J} \theta_i$
- Une partie A de E est compacte si et seulement si de tout recouvrement ouvert de A par des ouverts de E , on peut extraire un sous-recouvrement fini.

Définition 1.28 Soit $(E, \|\cdot\|)$ espace normé.

Une partie A de E est dite compacte si et seulement si de toute suite d'éléments de A on peut extraire une sous suite convergente dans A .

Exemple 1.15 Les parties fermées bornées de \mathbb{R} sont des compacts.

Définition 1.29 (Convexe compact)

On dit qu'une partie K est convexe compact d'un espace vectoriel E si, munie d'une distance $d : K \times K \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie :

$$d(tx_1 + (1 - t)x_0, ty_1 + (1 - t)y_0) \leq td(x_1, y_1) + (1 - t)d(x_0, y_0)$$

Pour tous x_0, x_1, y_0 et y_1 dans K , et pour tout $t \in [0, 1]$, et tel que l'espace métrique (K, d) est compact.

Définition 1.30 Soit (E, d) un espace métrique.

On dit que (E, d) est un espace connexe si et seulement si les seules parties de E à la fois ouvertes et fermées sont l'ensemble vide \emptyset et E .

Remarque 1.6 Une définition équivalente de la connexité de E est la suivante :

E est connexe si et seulement si $E = A \cup B$, avec $A \cap B = \emptyset$, A et B sont les deux ouverts de E , alors soit $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$.

Définition 1.31 Soit (E, d) un espace métrique et A une partie de E , on munit A de la distance induite d_A . On dit que A est une partie connexe si et seulement si l'espace métrique (A, d_A) est connexe. Classiquement, nous considérons l'ensemble vide comme étant connexe.

Exemple 1.16

- \mathbb{R}^n est connexe.
- Tout intervalle de \mathbb{R} est connexe.
- Toute boule ouverte (fermée) de \mathbb{R} est connexe.

4 Théorèmes de base

Théorème 1.1 (d'approximation de weierstrass)[1]

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe une fonction polynomiale P telle que :

$$\sup_{x \in [a, b]} |f(x) - P(x)| \leq \epsilon \tag{1.10}$$

Théorème 1.2 (Théorème des accroissements finis sur \mathbb{R})[1]

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, à valeurs dans \mathbb{R} , dérivable sur $]a, b[$. alors il existe $c \in]a, b[$ telle que :

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \tag{1.11}$$

Théorème 1.3 (Théorème des valeurs intermédiaires)[1]

Soit $I = [a, b]$ un intervalle de \mathbb{R} , et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue. si $a < b$ sont dans I , et si $f(a) \times f(b) \leq 0$, Alors il existe au moins un point $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$. (figure 3)

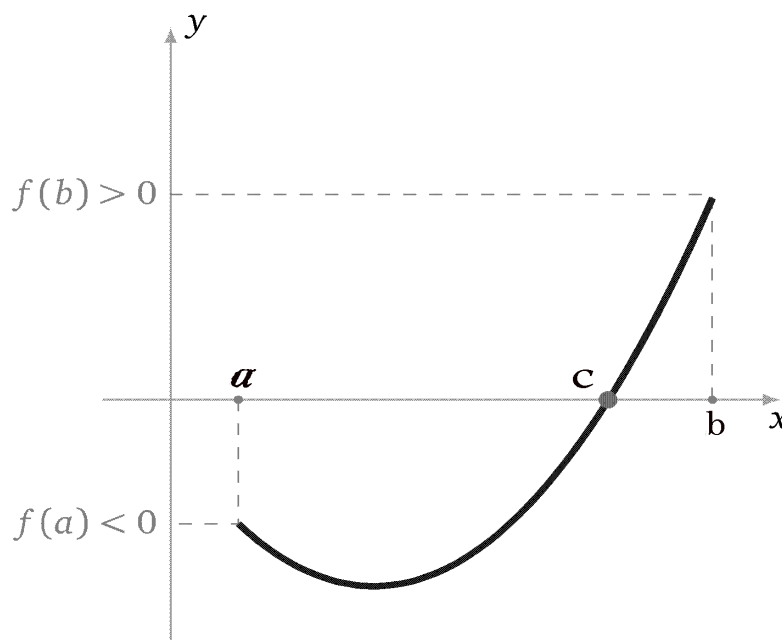


FIGURE 3

5 Théorème d'inversion locale

On s'est basé sur les résultats trouvés dans [3, 17]

Définition 1.32 (Difféomorphismes)

Soient E et F des espaces vectoriels normés, $U \subset E$ et $V \subset F$ des ouverts.

Une application $f : U \rightarrow V$ est appelé un C^k -difféomorphisme si et seulement si :

- f est de classe C^k .
- f est bijective.
- f^{-1} est de classe C^k .

Définition 1.33 (Difféomorphisme local)

- Soient E et F des espaces vectoriels normés, $U \subset E$ un ouvert. L'application $f : U \rightarrow F$ est un difféomorphisme local en a si et seulement s'il existe un voisinage ouvert V de a et un voisinage W de $b = f(a)$ telle que, $f : V \rightarrow W$ soit un difféomorphisme.
- f est un difféomorphisme local si et seulement si c'est un difféomorphisme local en a pour tout a de U .

Théorème 1.4 (Théorème Inversion locale)

Soit E et F des espaces vectoriels, $U \subset E$ un ouvert et $f : U \rightarrow F$ une application de classe C^1 . S'il existe $a \in U$ telle que la différentielle $Df(a)$ est inversible, alors il existe des voisinages V de a et W de $f(a)$ telle que $f : V \rightarrow W$ est un difféomorphisme.

Définition 1.34 (application ouverte)

Soit $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$. On dit que f est une application ouverte si l'image directe de tout ouvert de X est un ouvert dans Y . c'est à dire si $U \subseteq X$ est ouvert alors, $f(U)$ est ouvert dans Y .

Proposition 1.9 Soient E et F des espaces vectoriels normés, $U \subset E$ un ouvert.

Si $f : U \rightarrow F$ est un difféomorphisme local, alors f est une application ouverte.

Preuve.

Soit $V \subset U$ un ouvert et prenons $a \in V$. Nous allons montrer que $f(a)$ admet un voisinage contenu dans $f(V)$. Cela découle du théorème d'inversion locale qui implique l'existence d'un voisinage ouvert W de a tel que $f : W \rightarrow f(W)$ est un difféomorphisme ; notons $g : f(W) \rightarrow W$ son inverse qui est donc continue. Du coup, $V \cap W$ est un ouvert non vide, et $f(V \cap W) = g^{-1}(V \cap W)$ est ouvert par la continuité de g . ■

Théorème 1.5 (Théorème d'inversion globale)

Soit U un ouvert de E et $f : U \rightarrow F$ une fonction de classe C^1 et injective. Si pour tout $a \in U$, $Df(a)$ est inversible alors $f(U)$ un ouvert de F et f est un C^1 -difféomorphisme de U sur $f(U)$.

6 Rappels d'algèbre

Définition 1.35 Soient X et E deux ensembles et f une application de X dans E . Pour tout sous-ensemble A de X , on appelle image de A par f , et on note $f(A)$, le sous-ensemble de E défini par :

$$f(A) = \{ f(x), x \in A \} \quad (1.12)$$

Exemple 1.17 Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x) &\rightarrow f(x) = x^2 \end{aligned}$$

Alors l'image de l'intervalle $[1,2]$ par la fonction f est :

$$f([1,2]) = [1,4]$$

Définition 1.36 Soit $f : E \rightarrow F$ une application, où E et F sont des parties de \mathbb{R} .

- f est **injective** si tout élément de F admet au plus un antécédent par f dans E .
Autrement dit :

$$\forall x_1, x_2 \in E, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

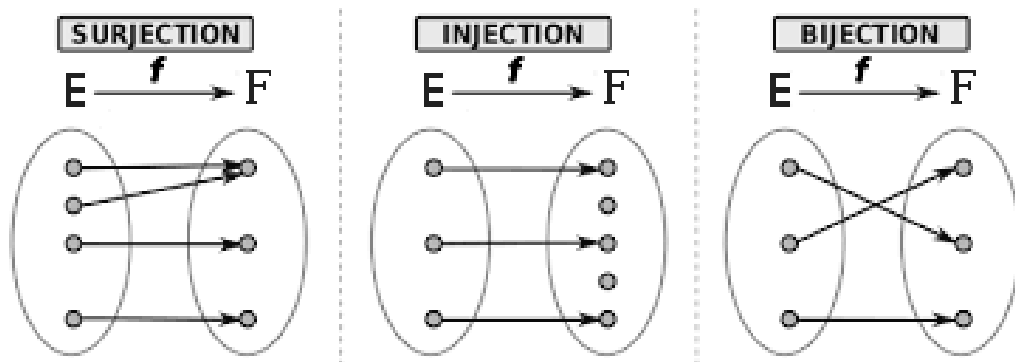
- f est **surjective** si tout élément de F admet au moins un antécédent par f dans E .
Autrement dit :

$$\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$$

- f est **bijjective** si tout élément de F admet exactement un antécédent par f dans E , cela équivaut à,

$$\forall y \in F, \exists ! x \in E, y = f(x)$$

Exemple 1.18

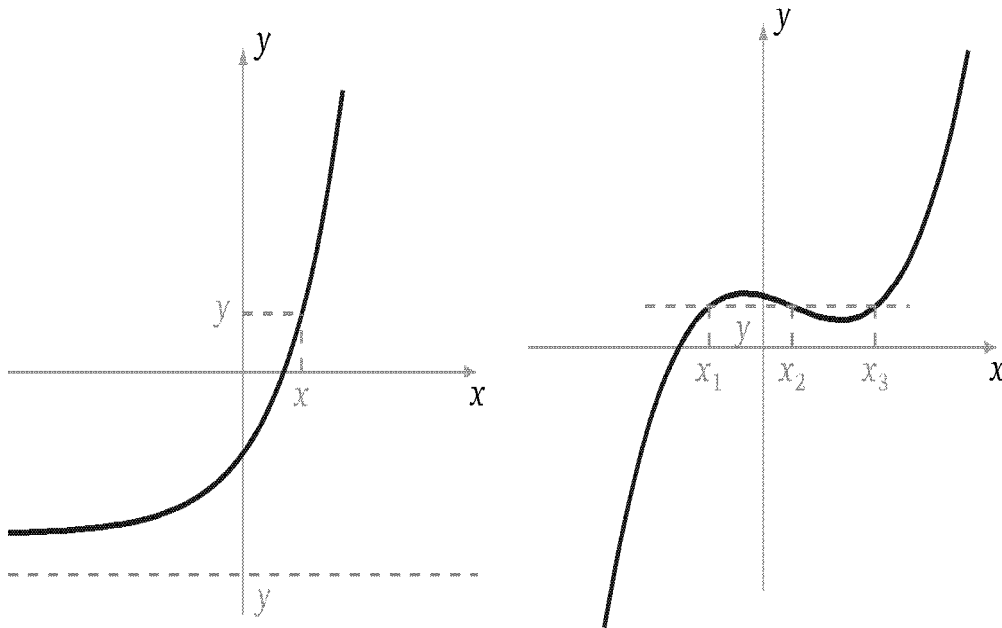


Exemple 1.19 (Interprétation graphique)

Soit $f : I \rightarrow J$ est une fonction.

- (**f injective**) \Leftrightarrow toute droite d'équation $y = k$ avec $k \in J$ coupe la courbe représentative de f en au plus un point.
- (**f surjective**) \Leftrightarrow toute droite d'équation $y = k$ avec $k \in J$ coupe la courbe représentative de f en au moins un point (1 ou plusieurs).
- (**f bijective**) \Leftrightarrow toute droite d'équation $y = k$ avec $k \in J$ coupe la courbe représentative de f en un unique point.

Voici le graphe d'une fonction injective (à gauche), et fonction surjective (à droite).



7 Matrice Jacobienne et Différentielle

Toute application f d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ dans \mathbb{R}^n est caractérisée par ses p fonctions coordonnées f_i (relativement aux bases canoniques), telles que :

$$\forall x \in \Omega : f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))$$

Exemple 1.20 Considérons l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(x, y) = (x^2 - y^2, xy, x + y)$$

Relativement à la base canonique, f a trois applications coordonnées :

$$f_1(x, y) \rightarrow x^2 - y^2$$

$$f_2(x, y) \rightarrow xy$$

$$f_3(x, y) \rightarrow x + y$$

Définition 1.37 Si les coordonnées de f admettent des dérivées partielles au point a , la matrice à p lignes et n colonnes définie par :

$$Jf_a = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{i=\{1..p\}, j=\{1..n\}}$$

est appelée la matrice jacobienne de f au point a .

Exemple 1.21 L'application $f : (x, y) \rightarrow (x^2 - y^2, 2xy)$ a pour matrice Jacobienne au point (x, y) :

$$Jf_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

Définition 1.38 Si $n = p$ le déterminant de la matrice jacobienne de f en a est appelé le Jacobien de la fonction f au point a .

Exemple 1.22 L'application $f : (x, y) \rightarrow (x^2 - y^2, 2xy)$ a pour la matrice Jacobienne au point (x, y)

$$\begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{vmatrix} = 4(x^2 + y^2)$$

Définition 1.39 L'application linéaire Df_a dont la matrice relativement aux bases canoniques est Jf_a est appelée la différentielle de f au point a .

Exemple 1.23 L'application $f : (x, y) \rightarrow (x^2 - y^2, 2xy)$ a pour Jacobien au point $(1, 1)$:

$$Jf_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Donc la différentielle sera :

$$df_a : (h, k) \rightarrow (2h - 2k, 2h + 2k)$$

Chapitre 2

Théorème de Point fixe de Brouwer

Dans ce chapitre, nous présentons quelques résultats sur le théorème du point fixe qui joue un rôle important dans les résultats d'existence et d'unicité des solutions des équations différentielles.

On commencera par le plus simple et le plus connu d'entre eux à savoir le théorème du point fixe de Banach pour les applications contractantes. On établira ensuite le théorème du point fixe de Brouwer (valable en dimension finie), et on termine ce chapitre par la donnée des généralisations du théorème de Brouwer.

On a essentiellement travaillé avec [10, 11, 14, 20, 22, 23, 28]

1 Théorème de Point fixe de Banach

Ce théorème est dit principe de l'application contractante, il est la base de la théorie du point fixe. Ce principe garantit l'existence d'un unique point fixe pour toute application contractante d'un espace métrique complet dans lui-même. Il donne aussi un critère général dans les espaces métriques complets pour assurer que le procédé d'itération d'une fonction tend vers un point fixe.

Définition 2.1 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, une application $f : E \rightarrow E$ est dite ***k*-lipschitzienne** s'il existe une constante positive $k \geq 0$ telle que :

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|, \quad \text{pour tout } x, y \in E. \quad (2.1)$$

k est dite constante de Lipschitz.

Définition 2.2 L'application lipschitzienne f est appelée :

- non expansive si $k \leq 1$.
- contraction si $k < 1$.

Proposition 2.1 Toute application lipschitzienne est uniformément continue. la réciproque est fausse.

Preuve. Soit $(E, \|\cdot\|)$ espace normé et soit f une application lipschitzienne sur E , alors : il existe $k \in \mathbb{R}_+$, telle que $\forall x, y \in E$ on a :

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|$$

Pour montrer que f est uniformément continue, on considère deux cas :

Premier cas : $k > 0$. Soit $\epsilon > 0$, comme :

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|$$

alors $\|f(x) - f(y)\| \leq \epsilon$ est vérifiée dès que $k\|x - y\| \leq \epsilon$
c'est-à-dire :

$$\|x - y\| \leq \frac{\epsilon}{k}$$

donc il existe $\alpha = \frac{\epsilon}{k}$ telle que si $\|x - y\| \leq \alpha$, on a :

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \epsilon$$

donc f est uniformément continue.

Deuxième cas : $k = 0$ (évident).

$\forall x, y \in E, \|f(x) - f(y)\| = 0$ ce qui est équivalent à $\forall \epsilon > 0, \|f(x) - f(y)\| < \epsilon$

■

Exemple 2.1 soit $I = [0, +\infty[$ et $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$

Alors on a,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \frac{(x+1)(y+2) - (y+1)(x+2)}{(x+2)(y+2)} \right| \\ &= \left| \frac{x-y}{(x+2)(y+2)} \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{x+2} \right| \left| \frac{1}{y+2} \right| \|x - y\| \\ &\leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \|x - y\| \\ &\leq \frac{1}{4} \|x - y\| \end{aligned}$$

la fonction f est contractante sur $[0, +\infty[$ avec $K = \frac{1}{4}$

Définition 2.3 Soit (E, d) un espace métrique, et $f : E \rightarrow E$ une application,

On dit que f admet un point fixe s'il existe $x \in E$ telle que $f(x) = x$.

Théorème 2.1 (Théorème du point fixe de Banach (1922)) [22, 23]

Soit (E, d) un espace métrique complet et soit l'application $f : E \rightarrow E$ une contraction alors :

1. f admet un unique point fixe $x \in E$
2. pour tout point initiale $x_0 \in E$, la suite itérée définie par :

$$\begin{cases} x_0 \in E \\ x_{n+1} = f(x_n) \\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad \text{converge vers le point fixe } x \text{ avec } f(x) = x$$

Preuve.

On montre d'abord l'unicité d'un point fixe, puis son existence.

1. **Unicité :** Supposons qu'il existe $x, y \in E$ tel que $x = f(x)$ et $y = f(y)$.

Alors on a ,

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y) \quad (2.2)$$

Comme f est contractante alors : $\exists K \in]0, 1[$ telle que ,

$$d(f(x), f(y)) \leq Kd(x, y) \quad (2.3)$$

Donc,

$$d(x, y) \leq Kd(x, y) \quad (2.4)$$

$$\Rightarrow (1 - K)d(x, y) \leq 0$$

$$\Rightarrow d(x, y) = 0$$

$$\Rightarrow x = y$$

2. **Existence :** L'existence du point fixe résulte de l'itération de f à partir d'un point arbitraire $x_0 \in E$: on pose $x_{n+1} = f(x_n)$ et on montre que la suite (x_n) converge dans espace métrique, en vérifiant qu'elle est de Cauchy.

Soit x_0 un point initial quelconque et (x_p) la suite itérée associée.

On a,

$$d(x_p, x_{p+1}) = d(f(x_{p-1}), f(x_p)) \leq Kd(x_{p-1}, x_p) \quad (2.5)$$

On montre par récurrence sur p que :

$$d(x_p, x_{p+1}) \leq K^p d(f(x_0), f(x_1)) \quad (2.6)$$

- Initialisation : Evidente pour $p = 0$.
- Généralisation : supposons que pour un certain entier p quelconque mais fixé on ait la propriété (2.6). Alors ,

$$\begin{aligned} d(x_{p+1}, x_{p+2}) &= d(f(x_p), f(x_{p+1})) \\ &\leq Kd(x_p, x_{p+1}) \\ &\leq KK^p d(x_0, x_1) \\ &\leq K^{p+1} d(x_0, x_1) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Ce qui achève la récurrence.

On a par inégalité triangulaire $\forall q > p$,

$$d(x_q, x_p) \leq \sum_{i=p}^{q-1} d(f(x_i), f(x_{i+1}))$$

En appliquant (2.7), on obtient

$$d(x_q, x_p) \leq \sum_{i=p}^{q-1} d(f(x_i), f(x_{i+1})) \leq \left(\sum_{i=p}^{q-1} K^{i+1} \right) d(x_0, x_1) \quad (2.8)$$

Or pour tout $q > p$,

$$\sum_{i=p}^{q-1} K^{i+1} \leq \sum_{i=p+1}^{\infty} K^i \quad (2.9)$$

Comme $K < 1$ alors la série géométrique $\sum_{i=p+1}^{\infty} K^i$ est convergente et de somme

$$\sum_{i=p+1}^{\infty} K^i = \frac{K^p}{1-K} \quad (2.10)$$

D'où

$$\sum_{i=p}^{q-1} K^{i+1} \leq \frac{K^p}{1-K} \quad (2.11)$$

Ainsi,

$$d(x_p, x_q) \leq \frac{K^p}{1-K} d(x_0, x_1), \quad \forall p, q \quad (2.12)$$

Comme $0 \leq K < 1$, le second membre de (2.12) tend vers zéro pour $p \rightarrow +\infty$. on déduit que (x_n) est une suite de Cauchy, Comme (E, d) est complet, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un point $a \in E$.

De plus on a $f(x_n) \rightarrow f(a)$ quand $n \rightarrow +\infty$ car f est continue et $f(x_n) = x_{n+1}$ donc $x_{n+1} \rightarrow f(a)$.

or $x_{n+1} \rightarrow a$ quand $n \rightarrow +\infty$ d'où par unicité de la limite on a $f(a) = a$. ■

Exemple 2.2 Soit f une application définie par :

$$f : (\mathbb{R}, |\cdot|) \longrightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$$

$$f(x) = \frac{1}{5} \sin(2x) - \frac{2}{5}x$$

Montrons que f admet un unique point fixe \mathbb{R} .

Comme $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est complet, il suffit de montrer que f est contractante c'est-à-dire :

$$\exists k \in]0, 1], \forall x, y \in \mathbb{R} : |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

Soit $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \frac{1}{5} \sin(2x) - \frac{2}{5}x - \frac{1}{5} \sin(2y) + \frac{2}{5}y \right| \\ &\leq \frac{1}{5} |\sin(2x) - \sin(2y)| + \frac{2}{5} |x - y| \\ &\leq \frac{2}{5} |x - y| + \frac{2}{5} |x - y| \\ &\leq \frac{4}{5} |x - y| \end{aligned}$$

Car soit $g(x) = \sin(2x)$, d'après le théorème des accroissements finis il existe c compris entre x et y telle que,

$$\frac{g(x) - g(y)}{x - y} = g'(c) \quad (2.13)$$

Alors,

$$\left| \frac{\sin(2x) - \sin(2y)}{x - y} \right| = |2\cos(2c)| \leq 2 \quad (2.14)$$

D'où,

$$|\sin(2x) - \sin(2y)| \leq 2|x - y| \quad (2.15)$$

Alors f est contractante avec $k = \frac{4}{5} \in]0, 1[$.

Donc,

$$\exists !x \in \mathbb{R}, f(x) = x \quad (2.16)$$

2 Théorème du point fixe de Brouwer

Le théorème du point fixe de Brouwer est un résultat de topologie. Il fait partie de la grande famille des théorèmes du point fixe. Il existe plusieurs formes de ce théorème selon le contexte d'utilisation. Ce théorème donne l'existence d'un point fixe pour une fonction continue sur une boule fermée dans un espace de dimension finie. [10, 11, 14, 23]

On cite d'abord le théorème de Brouwer dans le cas $n = 1$.

2.1 Théorème de Brouwer en dimension $n = 1$

Il la forme particulière suivante :

Théorème 2.2 (Théorème de Brouwer sur \mathbb{R}) [1]

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une application continue telle que pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \in [a, b]$, alors l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution dans \mathbb{R} .

Preuve.

On remarque que si on considère la fonction numérique $g(x) \equiv f(x) - x$ alors les points fixes de $f(\cdot)$ sont les racines de $g(x)$ telles que $g(x) = 0$.

On a :

- g continue sur $[a, b]$ car f est continue.
 - pour $a \leq f(a)$, on a $g(a) \equiv f(a) - a \geq 0$ et pour $b \geq f(b)$ on a $g(b) \equiv f(b) - b \leq 0$
- Donc,

$$g(a) \times g(b) \leq 0 \quad (2.17)$$

Alors par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un point $x^* = c$, $c \in]a, b[$, telle que $g(c) = 0$, et puisque $g(x) \equiv f(x) - x$, on obtient alors,

$$g(c) = 0 \Rightarrow f(x^*) = x^* \quad (2.18)$$

■

On cite maintenant le théorème de Brouwer en dimension $n > 1$.

2.2 Théorème de Brouwer en dimension $n > 1$

Théorème 2.3 (Théorème de Brouwer sur \mathbb{R}^n) [11, 14, 28]

Toute fonction continue de la boule unité fermée de \mathbb{R}^n dans elle-même admet un point fixe.

Il y a plusieurs méthodes de démonstrations du théorème de Brouwer, dans notre mémoire on utilise le théorème de non rétraction de classe C^1 , pour cela on introduit les notions suivantes :

Rétraction :

Définition 2.4 On appelle **rétraction** de l'espace topologique E sur un fermé F de E toute fonction continue de E dans F telle que :

$$f|_F = id_F \quad (2.19)$$

Théorème 2.4 (Théorème non-rétraction de classe C^1) [11]

Il n'existe pas d'application $f : \bar{B}^n \rightarrow S^{n-1}$ de classe C^1 telle que pour tout $x \in S^{n-1}$, $f(x) = x$.

Preuve.

Procédons par un raisonnement par l'absurde, pour cela considérons une rétraction f de \bar{B}^n sur S^{n-1} de classe C^1 .

La preuve est réalisée en plusieurs étapes :

Étape 1 : Pour tout $t \in [0, 1]$ on pose ,

$$f_t(x) = (1-t)x + tf(x) \quad (2.20)$$

On cite les propriétés de l'application f_t .

1. On a, $f_t(\bar{B}^n) \subset \bar{B}^n$.
En effet, soit $x \in \bar{B}^n$ alors $\|x\| \leq 1$.
et on a,

$$\begin{aligned} \|f_t(x)\| &\leq (1-t)\|x\| + t\|f(x)\| \\ &\leq 1-t+t \\ &\leq 1 \end{aligned} \quad (2.21)$$

Car,

$$\|x\| \leq 1 \text{ et } f(x) \in S^{n-1} \implies \|f(x)\| = 1 \quad (2.22)$$

2. $f_t|_{S^{n-1}} = Id$.
En effet, si $x \in S^{n-1}$ alors,

$$f(x) = x, \quad (\text{car } f|_{S^{n-1}} = Id)$$

d'où,

$$\begin{aligned} f_t(x) &= (1-t)x + tx \\ &= x \end{aligned} \quad (2.23)$$

Étape 2 : Montrons que f_t est un C^1 -difféomorphisme local .

1. Commençons par montrer l'injectivité de f_t .

Soit $c = \sup_{x \in \bar{B}^n} \|\nabla f(x)\|$ et par l'inégalité des accroissements finis on a,

$$\text{Pour tout } x, y \in \bar{B}^n, \quad \|f(x) - f(y)\| \leq c \|x - y\|$$

Soient $x, y \in \bar{B}^n$ telle que $f_t(x) = f_t(y)$,

Alors,

$$(1 - t)\|x - y\| = t\|f(x) - f(y)\| \tag{2.24}$$

implique ,

$$\|x - y\| \leq \frac{ct}{1-t}\|x - y\| \quad \text{pour tout } t \neq 1 \tag{2.25}$$

Si on pose $\alpha = \frac{1}{1+c}$ on obtient,

$$\frac{ct}{1-t} < 1 \tag{2.26}$$

On déduit alors que pour tout $t < \alpha$,

$$f_t(x) = f_t(y) \implies x = y \tag{2.27}$$

Donc f_t est injective.

2. Comme f_t est l'identité sur S^{n-1} , alors l'injectivité de f_t implique que $f_t(B^n) \subset B^n$

Pour tout $0 < t < \alpha$

En effet, comme f_t est l'identité sur S^{n-1} Alors,

$$\forall y \in S^{n-1}, \quad f_t(y) = y \tag{2.28}$$

Supposons que,

$$\exists x \in B^n \text{ et } f_t(x) = y \in S^{n-1} \tag{2.29}$$

et comme,

$$y = f_t(y) \quad (\text{car } f_t = \text{Id sur } S^{n-1}) \tag{2.30}$$

Alors on a,

$$\begin{aligned} f_t(x) = y = f_t(y) &\implies x = y \quad (\text{car } f_t \text{ est injective}) \\ &\implies x \in S^{n-1} \quad (\text{Absurde}) \end{aligned}$$

3. On remarque également que pour $0 \leq t < \alpha$ on a ,

$$\begin{aligned} \nabla f_t(x) &= (1-t)\text{Id} + t\nabla f(x) \\ &= (1-t)\left(\text{Id} + \frac{t}{1-t}\nabla f(x)\right) \end{aligned}$$

Avec,

$$\left\| \frac{t}{1-t}\nabla f(x) \right\| \leq \frac{t}{1-t}\|\nabla f(x)\| \leq \frac{ct}{1-t} < 1 \tag{2.31}$$

Par conséquent, pour ces valeurs de t , ∇f_t est partout inversible .

D'après le Théorème d'inversion locale on déduit que f_t est un C^1 -difféomorphisme local.

Étape 3 : Montrons que f_t est un C^1 -difféomorphisme global.

Du fait que B^n est connexe, $f_t(B^n)$ est ouvert car f_t est un C^1 -difféomorphisme donc c'est une application ouverte d'après le théorème (1.4) et B^n ouvert, il reste à montrer que $f_t(B^n)$ est un fermé.

En effet, si c'est le cas où $f_t(B^n)$ ouvert et fermé de B^n , $f_t(B^n) \neq \emptyset$.
alors $f_t(B^n) = B^n$

- Soit (y_n) une suite qui appartient à $f_t(B^n)$ qui converge vers y telle que $y \in B^n$.

$$y_n \longrightarrow y \in B^n \quad (2.32)$$

Il existe donc une suite $(x_n)_n \subset B^n$ qui vérifie,

$$y_n = f_t(x_n) \quad (2.33)$$

On peut extraire une sous suite de la suite (x_n) , par compacité de \bar{B}^n .

$$x_{n_k} \longrightarrow x \in \bar{B}^n \quad (\text{car } B^n \subset \bar{B}^n) \quad (2.34)$$

Alors par la continuité de f_t on a,

$$x_{n_k} \longrightarrow x \implies f_t(x_{n_k}) \xrightarrow[n_k \rightarrow +\infty]{} f_t(x) \quad (2.35)$$

et

$$y_n \longrightarrow y \implies f_t(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} y \quad (2.36)$$

Par unicité de la limite $y = f_t(x)$.

- Reste à montrer que $x \in B^n$, pour cela raisonnons par l'absurde. Comme,

$$\bar{B}^n = B^n \cup S^{n-1} \quad (2.37)$$

On suppose que $x \in S^{n-1}$, Alors,

$$f(x) = x \quad (\text{par hypothèse})$$

Donc,

$$\begin{aligned} y = f_t(x) &= (1-t)x + tx \\ &= x - tx + tx \\ &= x \quad (\text{Absurde}) \quad (\text{car } y \in B^n) \end{aligned}$$

Donc,

$$x \in B^n$$

Ainsi,

$$y = f_t(x) \in f_t(B^n) \quad (2.38)$$

Il en découle que pour tout $t < \alpha$, f_t est un C^1 -difféomorphisme global.

Étape 4 :

Pour tout $t \in [0, 1]$ on pose ,

$$P(t) = \int_{B^n} \det(\nabla f_t(x)) dx \quad (2.39)$$

On montre que pour $t \in [0, \alpha]$ et pour tout $x \in B^n$, on a $\det(\nabla f_t(x)) > 0$.

On a ∇f_t est inversible pour $t \in [0, \alpha[$, d'où $\det(\nabla f_t) \neq 0$, et on a l'application : $t \rightarrow \det(\nabla f_t)$ est continue (car polynomiale) et ne s'annule pas sur $[0, \alpha]$. De plus ,

$$\det(\nabla f_0) = \det(\text{Id}) = 1 \quad (2.40)$$

Donc grâce au théorème des valeurs intermédiaires, on a pour tout $t \in [0, \alpha]$

$$\det(\nabla f_t(x)) > 0$$

Étape 5 : On montre que P est une fonction polynomiale et constante.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, f_t est différentiable et $\nabla f_t(x)$ l'est aussi .

Donc $\det(\nabla f_t(x))$ est un polynôme en t , alors P également.

On peut effectuer le changement de variable $y = f_t(x)$ dans $P(x)$ et obtenir :

$$P(t) = \int_{B^n} \det(\nabla f_t(x)) dx = \int_{B^n} dy = \text{Vol}(B^n) \quad (2.41)$$

Alors pour t au voisinage de 0, ($0 \leq t < \alpha$) , le polynôme $P(t)$ est constant et c'est un polynôme de degré $\leq n$.

Car,

$$\nabla f_t = (1-t)\text{Id} + t\nabla f(x) = \text{polynôme de degré 1 en } t$$

Ainsi $P(t)$ est une fonction polynomiale qui est constante et égale au volume de B^n pour t petit.

Étape 6 : On conclut en aboutissant a une absurdité.

Comme P est constante on a,

$$\text{Vol}(B^n) = P(0) = P(1) = \int_{B^n} \det(\nabla f_t(x)) dx \quad (2.42)$$

Or

$$P(1) = \int_{B^n} \det(\nabla f_1(x)) dx = \int_{B^n} \det(\nabla f(x)) dx \quad (2.43)$$

Comme pour tout $x \in B^n$, on a $\|f(x)\|^2 = 1$.

Alors,

$$\forall x \in B^n, \langle f(x), \nabla f_1(x) \rangle = 0$$

Donc $\text{Im} \nabla f(x) \subset f(x)^\perp$ et par suite $\nabla f(x)$ n'est pas inversible, ce qui donne $\det(\nabla f_x) = 0$ d'où,

$$P(1) = 0 \quad (2.44)$$

Donc on obtient que le volume de B^n est nul, ce qui est une contradiction.

On a ainsi montré le théorème de non-rétraction. ■

On est en mesure maintenant de démontrer le théorème de Brouwer.

Preuve.

On démontre par l'absurde, pour cela considérons f une fonction continue de \bar{B}^n dans \bar{B}^n et supposons qu'elle n'admet pas de point fixe. Par conséquent,

$$\exists \epsilon > 0, \forall x \in \bar{B}^n, \quad \|f(x) - x\| \geq \epsilon \quad (2.45)$$

D'après le théorème d'approximation de Weierstrass (Théorème 1.1) il existe un polynôme Q telle que :

$$\forall x \in \bar{B}^n, \quad \|f(x) - Q(x)\|_\infty \leq \frac{\epsilon}{2} \quad (2.46)$$

On a donc,

$$\forall x \in \bar{B}^n, \quad \|Q(x)\| \leq \|Q(x) - f(x)\| + \|f(x)\| \leq \frac{\epsilon}{2} + 1 \quad (2.47)$$

Si on pose $K(x) = \frac{1}{1+\frac{\epsilon}{2}}Q(x)$, alors K est un fonction polynômiale et (à fortiori de classe C^1). De plus $K(\bar{B}^n) \subset \bar{B}^n$. En effet

Soit $y \in K(\bar{B}^n)$ alors, $\exists x \in \bar{B}^n$ telle que $y = K(x)$,
et on a,

$$\begin{aligned} \|y\| &= \|K(x)\| \\ &= \left\| \frac{1}{1+\frac{\epsilon}{2}}Q(x) \right\| \\ &= \left\| \frac{Q(x)}{1+\frac{\epsilon}{2}} \right\| \\ &\leq 1 \quad (\text{car } \|Q(x)\| \leq 1 + \frac{\epsilon}{2}) \end{aligned}$$

Donc $y \in \bar{B}^n$

Alors,

$$K(\bar{B}^n) \subset \bar{B}^n \quad (2.48)$$

De plus $\forall x \in \bar{B}^n$ on a ,

$$\begin{aligned} \|Q(x)\| &= \|K(x) + \frac{\epsilon}{2}K(x)\| \\ \Rightarrow \|Q(x) - K(x)\| &= \left\| \frac{\epsilon}{2}K(x) \right\| \leq \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\|f(x) - K(x)\| < \epsilon \quad (2.49)$$

Le polynôme vérifie

$$K(x) \neq x, \quad \forall x \in B^n$$

En effet,

$$\begin{aligned}\|f(x) - x\| &= \|f(x) - K(x) + K(x) - x\| \\ &\leq \|f(x) - K(x)\| + \|K(x) - x\|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \|K(x) - x\| &\geq \|f(x) - x\| - \|f(x) - K(x)\| \\ &> \epsilon - \epsilon = 0\end{aligned}$$

Alors, $K(x) \neq x, \forall x \in B^n$

On a donc remplacé f continue sans point fixe par une application $K(x)$ de classe C^1 sans point fixe .

A partir de maintenant, on peut supposer donc que f est de classe C^1 sans restreindre la généralité.

On note $g(x)$ le point d'intersection de S^{n-1} avec la demi droite $[f(x), x)$.

g est caractérisée par le système d'équations suivant d'inconnue $\lambda \geq 0$:

$$(P) \begin{cases} g(x) = f(x) + \lambda(x)(x - f(x)) \\ \|g(x)\|^2 = 1 \end{cases}$$

Ce système est équivalent à :

$$\begin{cases} g(x) = f(x) + \lambda(x)(x - f(x)) \\ \|f(x) + \lambda(x)(x - f(x))\|^2 = 1 \end{cases}$$

i.e,

$$\|f(x)\|^2 + 2\lambda(x)\langle f(x), x - f(x) \rangle + \lambda^2(x)\|x - f(x)\|^2 - 1 = 0 \quad (2.50)$$

Donc,

$$\lambda(x) = \frac{-\langle f(x), x - f(x) \rangle + \sqrt{\Delta'}}{\|x - f(x)\|^2} \quad (2.51)$$

avec,

$$\Delta' = \langle f(x), x - f(x) \rangle^2 + \|x - f(x)\|^2(1 - \|f(x)\|^2) > 0 \quad (2.52)$$

On trouve par un calcul élémentaire,

$$g(x) = x + \frac{-\langle x, x - f(x) \rangle + \sqrt{\langle x, x - f(x) \rangle^2 + (1 - \|x\|^2)\|x - f(x)\|^2}}{\|x - f(x)\|} (x - f(x)) \quad (2.53)$$

finalemt g est une fonction de classe C^1 , car λ est de classe C^1 sur \bar{B}^n qui envoie \bar{B}^n sur S^{n-1} et dont la restriction a S^{n-1} est l'identité,

i.e $\forall x \in S^{n-1}$ alors $g(x) = x$ ce qui absurde d'après le Théorème de non-rétraction.

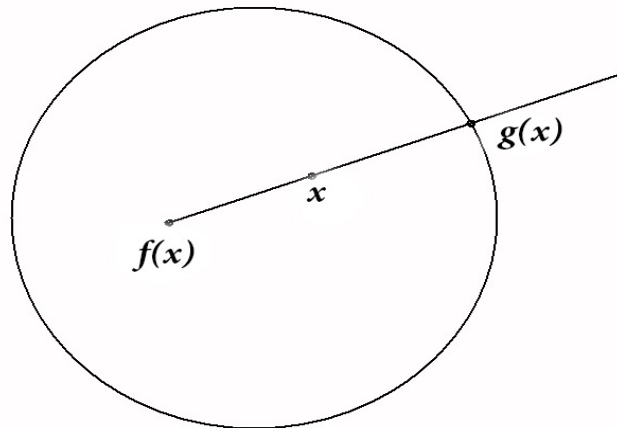


FIGURE 4 - Construction d'une rétraction à partir d'une application sans point fixe

■

Remarque 2.1 Le Théorème de Brouwer permet de généraliser le théorème de non-rétraction de la boule pour une fonction juste continue.

Théorème 2.5 [11]

Il n'existe pas d'application $f : \bar{B}^n \rightarrow S^{n-1}$ continue telle que l'on ait $f|_{S^{n-1}} = id$.

Preuve.

On démontre par l'absurde :

On considère $f : \bar{B}^n \rightarrow S^{n-1}$ est une fonction continue telle que pour tout $x \in S^{n-1}$, $f(x) = x$, alors $(-f)$ est une fonction continue de \bar{B}^n dans \bar{B}^n et admet un point fixe d'après le théorème de Brouwer.

Donc $\exists x_0$ telle que $-f(x_0) = x_0$, comme $f(x_0) \in S^{n-1}$, alors $x_0 \in S^{n-1}$ et ainsi $f(x_0) = 0$.

Donc $x_0 = 0$ contradiction avec le fait que $\|x_0\| = 1$.

■

Finalement, le théorème de non rétraction continue dans la boule et le théorème de Brouwer sont deux résultats équivalents.

On cite le théorème généralisant le théorème de Brouwer dans un convexe compact de \mathbb{R}^n .

Théorème 2.6 (Brouwer) [11]

Toute application continue $f : K \rightarrow K$, où K est un convexe compact de \mathbb{R}^n , admet un point fixe.

2.3 Théorème de Schauder

Ce théorème généralise le résultat du théorème de Brouwer pour montrer l'existence d'un point fixe pour une fonction continue sur un convexe compact dans un espace de Banach.

Théorème 2.7 (*Schauder*)

Soit E un espace de Banach et $K \subset E$ un sous ensemble convexe et compact. Alors toute application continue $f : K \rightarrow K$ possède un point fixe.

Pour plus de détails concernant la démonstration de ce résultat, on peut consulter [\[11, 28\]](#)

Chapitre 3

Applications

L'intérêt du théorème du point fixe de Brouwer est multiple car situé au carrefour de plusieurs disciplines; Ses applications sont aussi nombreuses que variées, allant de la topologie algébrique (démonstration des théorèmes de non-rétraction, de Jordan), à la biologie mathématique, en passant par la géométrie des corps convexes, les équations différentielles, la théorie de la commande, la théorie des jeux, la programmation non linéaire, la théorie de la décision, la combinatoire et l'économie [14]. L'analyse numérique elle-même, après l'avoir longtemps boudé, s'y intéresse activement[13]

Dans ce chapitre, nous avons choisi deux des applications, l'une portant sur le fameux théorème de Cauchy-Peano (théorie des équations différentielles) et l'autre sur le théorème de Perron-Frobenius (algèbre linéaire), associée aux matrices strictement positives. L'une comme l'autre est démontré par le théorème de Brouwer.

1 Application 1

Théorème 3.1 (Théorème d'Arzelà-Ascoli) [23, 26]

Soit (K, d) un espace métrique compact, $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et $A \subset C(K, E)$. Alors A est relativement compact dans $(C(K, E), \|\cdot\|_{\infty, K})$ si et seulement si les deux conditions ci-dessous sont satisfaites :

1. A est équicontinu, c'est-à-dire, pour tout $x \in K$ et pour tout $\epsilon > 0$ il existe un voisinage $V \subset K$ de x telle que :

$$\|f(x) - f(y)\| < \epsilon, \quad \forall y \in V, \forall f \in A$$

2. L'ensemble A est borné c'est-à-dire, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$A(x) = \{ \|f(x)\| \leq C, \forall x \in K \text{ et tout } f \in A \} \text{ est borné}$$

Théorème 3.2 (Théorème de Cauchy-Peano) [23]

Soit I un intervalle non vide de \mathbb{R} , U un ouvert de \mathbb{R}^n , $(t_0, x_0) \in I \times U$ et $f : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue. Alors le problème de Cauchy

$$(P_1) \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

admet au moins une solution locale.

Pour monter ce théorème nous allons utiliser le théorème du point fixe de Brouwer.

Le lemme suivant montre que résoudre un problème de Cauchy équivaut à résoudre une équation intégrale.

Lemme 3.1 \bar{x} est une solution du problème de Cauchy (P_1) , sur I si et seulement si \bar{x} est continue, et pour tout $t \in I$,

$$\begin{cases} (t, x(t)) \in I \times U \\ \bar{x}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \bar{x}(s)) ds \end{cases} \quad (3.2)$$

Preuve.

Supposons que \bar{x} est une solution du problème de Cauchy (P_1) , alors \bar{x} est dérivable sur I et vérifie :

$$\begin{cases} \bar{x}'(t) = f(t, \bar{x}(t)) \\ \bar{x}(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (3.3)$$

En intégrant les deux membres de t_0 à t , on obtient pour tout $t \in I$,

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t f(s, \bar{x}(s)) ds &= \int_{t_0}^t \bar{x}'(t) \\ &= \bar{x}(t) - \bar{x}(t_0) \end{aligned}$$

Ce qui donne, en remplaçant $\bar{x}(t_0)$ par x_0 ,

$$\bar{x}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \bar{x}(s)) ds \quad (3.4)$$

Inversement : supposons que pour tout $t \in I$, \bar{x} vérifie,

$$\bar{x}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \bar{x}(s)) ds \quad (3.5)$$

Alors, d'après le théorème fondamental d'intégration, on a \bar{x} est dérivable et sa dérivée égale,

$$\bar{x}'(t) = f(t, \bar{x}(t)) \quad (3.6)$$

De plus on a aussi,

$$\bar{x}(t_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t_0} f(s, \bar{x}(s)) ds = x_0 \quad (3.7)$$

Ainsi on a obtenu l'équivalence dans les deux sens. ■

On va démontrer maintenant le théorème (3.2).

Preuve.

Soit $r, M > 0$ telle que :

$$\bar{B}^n(x_0, r) \subset U \quad \text{et} \quad J = [t_0 - \frac{r}{M}, t_0 + \frac{r}{M}] \subset I \quad (3.8)$$

et

$$\sup_{(t,x) \in J \times \bar{B}^n(x_0,r)} \|f(t, x)\| \leq M \quad (3.9)$$

On note alors,

$$A = \{ f : J \longrightarrow \bar{B}^n(x_0, r) \text{ M-lipschitzienne avec } f(t_0) = x_0 \} \quad (3.10)$$

On va chercher un point fixe pour l'opérateur T .

$$\begin{aligned} T &: A \longrightarrow A \\ x &\longrightarrow Tx = \bar{x} \end{aligned}$$

1. On démontre que T est bien défini sur A .

(a) On démontre que $\bar{x}(t) \in \bar{B}^n(x_0, r)$:

Soit $x \in A$ et $t \in J$ on a,

$$\begin{aligned} \|\bar{x}(t) - x_0\| &= \left\| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \right\| \\ &\leq \int_{t_0}^t \|f(s, x(s))\| ds \\ &\leq M|t - t_0| \\ &\leq r \end{aligned}$$

Alors $\bar{x}(t) \in \bar{B}^n(x_0, r)$.

(b) On montre maintenant que $\bar{x}(t)$ est M -lipschitzienne.

Pour tout $t_1, t_2 \in J$ on a,

$$\begin{aligned} \|\bar{x}(t_1) - \bar{x}(t_2)\| &= \left\| \int_{t_0}^{t_1} f(s, x(s)) ds - \int_{t_0}^{t_2} f(s, x(s)) ds \right\| \\ &= \left\| \int_{t_0}^{t_1} f(s, x(s)) ds + \int_{t_2}^{t_0} f(s, x(s)) ds \right\| \\ &= \left\| \int_{t_2}^{t_1} f(s, x(s)) ds \right\| \\ &\leq \int_{t_2}^{t_1} \|f(s, x(s))\| ds \\ &\leq \int_{t_2}^{t_1} M ds \\ &\leq M \int_{t_2}^{t_1} ds \\ &\leq M \|t_1 - t_2\| \end{aligned}$$

Donc,

$$\|\bar{x}(t_1) - \bar{x}(t_2)\| \leq M \|t_1 - t_2\|$$

Comme $\bar{x}(t) \in \bar{B}^n(x_0, r)$ et M -lipschitzienne, alors $\bar{x}(t) \in A$.
et donc T est bien défini de A dans A .

2. On vérifie que A est convexe.

Soient $f, g \in A$, $\lambda \in [0, 1]$, et soit $t \in J$, et on pose $h(t) = \lambda f(t) + (1 - \lambda)g(t)$.

(a) On va montrer que,

$$h(t) \in \bar{B}^n(x_0, r) \tag{3.11}$$

C'est-à-dire,

$$\|h(t) - x_0\| \leq r \tag{3.12}$$

on a,

$$\begin{aligned}
 \| \lambda f(t) + (1 - \lambda)g(t) - x_0 \| &= \| \lambda(f(t) - g(t)) + g(t) - x_0 \| \\
 &= \| \lambda f(t) - \lambda x_0 + \lambda x_0 + g(t) - x_0 - \lambda g(t) \| \\
 &= \| \lambda(f(t) - x_0) + \lambda(x_0 - g(t)) + g(t) - x_0 \| \\
 &\leq \lambda \| f(t) - x_0 \| + \lambda \| x_0 - g(t) \| + \| g(t) - x_0 \| \\
 &\leq \lambda \frac{r}{4} + \lambda \frac{r}{4} + \frac{r}{2} = \lambda \frac{r}{2} + \frac{r}{2} \\
 &\leq \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r
 \end{aligned}$$

Donc,

$$\| \lambda f(t) + (1 - \lambda)g(t) - x_0 \| \leq r$$

(b) On va montrer que $h(t)$ est M-lipschitzienne.

C'est-à-dire on va montrer que $\forall t_1, t_2 \in J$,

$$\| h(t_1) - h(t_2) \| \leq M \| t_1 - t_2 \| \quad (3.13)$$

on a,

$$\begin{aligned}
 \| h(t_1) - h(t_2) \| &= \| \lambda f(t_1) + (1 - \lambda)g(t_1) - \lambda f(t_2) - (1 - \lambda)g(t_2) \| \\
 &= \| \lambda(f(t_1) - f(t_2)) + (1 - \lambda)(g(t_1) - g(t_2)) \| \\
 &\leq |\lambda| \| f(t_1) - f(t_2) \| + |(1 - \lambda)| \| g(t_1) - g(t_2) \| \\
 &\leq \lambda M \| t_1 - t_2 \| + (1 - \lambda)M \| t_1 - t_2 \| = M \| t_1 - t_2 \|
 \end{aligned}$$

Car $f, g \in A$

Alors $h(t)$ est M-lipschitzienne.

De plus on a aussi,

$$h(t_0) = \lambda f(t_0) + (1 - \lambda)g(t_0) = x_0 \quad (3.14)$$

Donc comme $h(t) \in \bar{B}^n(x_0, r)$ et est M-lipschitzienne, alors A est convexe.

3. D'après le théorème d'Ascoli on déduit que A est compact.

4. Il reste donc à montrer que T est continu.

Soit $x, y \in A$ et $\epsilon > 0$.

Puisque f est uniformément continue sur $J \times \bar{B}^n(x_0, r)$, il existe $\eta > 0$ telle que,

$$\| x - y \| < \delta \implies \| f(t, x(t)) - f(t, y(t)) \| \leq \frac{\epsilon}{L} \quad (3.15)$$

On en déduit que si $\| x - y \| \leq \delta$ on a alors,

$$\| \bar{x}(t) - \bar{y}(t) \| \leq \int_{t_0}^t \| f(s, x(s)) - f(s, y(s)) \| ds \quad (3.16)$$

Si on pose $L = \frac{r}{M}$ et on a $|t - t_0| \leq \frac{r}{M} = L$
Alors,

$$\begin{aligned} \|\bar{x}(t) - \bar{y}(t)\| &\leq \int_{t_0}^t \|f(s, x(s)) - f(s, y(s))\| ds \\ &\leq |t - t_0| \frac{\epsilon}{L} \\ &< L \frac{\epsilon}{L} \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

D'où T est continu.

Alors le théorème du point fixe de Brouwer dans un convexe compact assure l'existence d'un point fixe de T .

Par conséquent, le problème à valeur initiale (3.1) possède au moins une solution. ■

2 Application 2

Le théorème de Perron-Frobenius donne des renseignements sur la plus grande valeur propre et l'espace propre associé. C'est souvent une information très importante en pratique. Par exemple pour les systèmes dynamiques $x_{n+1} = Ax_n + b$. Il a d'importantes applications en probabilités (chaines de Markov) et en théorie des graphes. Une belle et récente application est l'algorithme PageRank avec lequel Google classe les pages web.

Définition 3.1 Une matrice $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,n} \in M_n(\mathbb{R})$ est dite :

- positive si $\forall i, j, a_{ij} \geq 0$, on note $A \geq 0$.
- strictement positive si $\forall i, j, a_{ij} > 0$, on note $A > 0$.

Proposition 3.1 Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$. Pour tout vecteur x de \mathbb{R}^n , on a l'inégalité :

$$|Ax| \leq |A||x| \tag{3.17}$$

Théorème 3.3 (Théorème de Perron-Frobenius)[8, 16]

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice strictement positive (à coefficients > 0) alors A admet au moins une valeur propre strictement positive associée à un vecteur propre strictement positif.

Preuve.

Soit λ une valeur propre et V un vecteur propre associé de norme $\|V\| = 1$ alors,

$$|\lambda V| = |AV| \leq |A||V| \leq A|V| \tag{3.18}$$

telle que $|X|$ désigne le vecteur dont les coordonnées sont les valeurs absolues des coordonnées de X

Soit,

$$S = \{X \in \mathbb{R}^n; X \geq 0, \|X\|_1 \leq 1, \lambda X \leq AX\} \tag{3.19}$$

un convexe (comme intersection de convexes) compact (fermé , borné), S est non vide . Pour tout $X \in S$, on considère l'application :

$$\begin{aligned} f : S &\longrightarrow S \\ X &\longrightarrow f(X) = \frac{AX}{\|AX\|_1} \end{aligned}$$

La fonction f est bien définie et continue.

Donc, le théorème de point fixe de Brouwer implique qu'il existe $Y \in S$ vérifiant $f(Y) = Y$
C'est-à-dire :

$$f(Y) = Y = \frac{AY}{\|AY\|_1} \quad (3.20)$$

ie. $AY = \|AY\|_1 Y$. Comme $Y \in S$, on a :

$$\lambda Y \leq AY = \|AY\|_1 Y \quad (3.21)$$

mais $Y \geq 0$ donc $\lambda \leq \|AY\|_1 \Rightarrow \lambda = \|AY\|_1 > 0$. ■

Conclusion

Le théorème du point fixe de Brouwer est l'un des théorèmes-clef caractérisant la topologie d'un espace euclidien. C'est un résultat non trivial, sauf dans le cas $n = 1$ où il se montre très simplement. Il en existe plusieurs démonstrations dans le cas général, faisant toutes appel à des notions plus ou moins élémentaires. Ce théorème est généralisé en 1930 aux espaces de Banach par Schauder.

Dans ce mémoire, nous avons donné une preuve basée sur le théorème de non rétraction de classe C^1 (résultat obtenu en 1931 par Karel Borsuk) et on a choisi deux de ces applications à savoir le théorème de Cauchy-Peano et le théorème de Perron-Frobenius, pour les exposer sachant que l'on ne peut pas décrire de manière exhaustive toutes ses applications (par exemple en théorie du contrôle, en théorie des jeux, en économie, ...).

Bibliographie

- [1] **K. Allab.** *Eléments d'Analyse, 1ère et 2ème Années* . Université OPU. [5](#), [7](#), [17](#), [26](#)
- [2] **W. Bertram** , *Calcul différentiel topologique élémentaire* .
- [3] **H. Cartan** , *Calcul Différentiel* . Hermann. [18](#)
- [4] **M. Cuesta** . (2009) , *Analyse Fonctionnel le Non Linéaire et applications en équations différentielles* . .
- [5] **D. Diderot.** (2005) , *Cours topologie des espaces vectoriels de dimension finie* . Université Paris 7.
- [6] **Y. El-Bachir** . (2016), *Topologie Générale Élémentaire* . Licence Mathématiques Deuxième Année LMD, Université Ferhat Abbas, Sétif 1. [7](#)
- [7] **D. Gale.** *The game of Hex and the Brouwer fixed-point theorem.* The American Mathematical Monthly(86.10). [5](#)
- [8] **S.Gonnord et N.Tosel.** (1998), *calcul différentiel* . Ellipses. [39](#)
- [9] **M. Hitta Amara** . (2009) , *Cours licence topologie des espaces métriques* . univ 8 Mai 1945 Guelma. [7](#)
- [10] **H. Joel Shapiro.** (2016) , *A Fixed Point Farrago* . Springer International Switzerland. [5](#), [22](#), [26](#)
- [11] **H. le Dret** . (2010) , *Équations aux dérivées partielles elliptiques non linéaires* . Springer Heidelberg New York Dordrecht London. [5](#), [6](#), [22](#), [26](#), [27](#), [33](#), [34](#)
- [12] **R. Leplaideur** . (2014) , *Cours de Topologie L3-math* . Université de Bretagne Occidentale .
- [13] **J. Mawhin** . January 2007, *Le théorème du point fixe de Brouwer* . un siècle de métamorphoses, Article in Sciences et techniques en perspective . [35](#)
- [14] **M. Mbikayi, Y. Togba et J-P K. Tsasa.**(2016), *Théorème du point fixe de Brouwer.* [Lareq One Pager, Vol. 11, no. 1, 15-36] . [5](#), [22](#), [26](#), [27](#), [35](#)
- [15] **P. Mironescu** . (2005) , *Cours de topologie métrique* .
- [16] **I. Nourdin**, (2001), *leçons d'analyse, probabilités, algèbre et géométrie.* Dunod. [39](#)
- [17] **J. Paul TRUC.** (2012) *fonction de plusieurs variables et diffeomorphismes.* Professeur de Mathématiques Spéciales à l'Ecole des Pupilles de l'AIR. [7](#), [18](#)
- [18] **J. Philippe Préaux.** (2016) , *Cour Théorème de Perron-Frobenius, application aux chaines de Markov et aux moteurs de recherche* .
- [19] **A. Pommellet.** (1994) , *Agrégation de mathématiques* . Cours d'analyse, Ellipses .
- [20] **J. Saint Raymond.** (2007) , *Topologie, calcul différentiel et variable complexe* . Calvage et Mounet, Paris. [22](#)
- [21] **D. Serre.** (2001) , *Les matrices. Théorie et pratique, Dunod* .

- [22] **D.R. Smart.** (1974) , *Fixed point theory* . Combridge Uni. Press, Combridge. 5, 22, 23
- [23] **Z. SMITH** , *fixed point methods in non linear analysis* . 5, 22, 23, 26, 35
- [24] **Y. Sonntag** .(1998) , *Topologie et analyse fonctionnelle* . Course de license avec exercices.
- [25] **D. Vincent.** (2002), *Théorème du point fixe de Brouwer*. Tuteur : Yves Carrière ,Page web [https ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/ carriere/TerDunias.pd](https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/carriere/TerDunias.pd) . 5
- [26] **S. Verduyn and J. K. Hale** . (1993) , *Introduction to Functional Differential Equations, Applied Mathematical Sciences* . 99, Springer-Verlag, New York . 35
- [27] **C. Wagschal** . (2012) , *Topologie et analyse fonctionnelle* .
- [28] **E. Zeidler.** (1985) , *Nonlinear functional analysis and its applications Fixed point theorems* . Springer-Verlag, New york Berlin Heiderberg, Tokyo. 22, 27, 34