



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
La République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
Ministère de l'Enseignement Supérieur & la Recherche Scientifique



جامعة محمد الحميد بن باديس - مستغانم  
Université Abdel Hamid IBN Badis – Mostaganem

كلية العلوم والتكنولوجيا  
Faculté des Sciences et de la Technologie

قسم الهندسة الميكانيكية  
Département de Génie Mécanique

N° d'ordre : M...../GM/2019

## MEMOIRE DE FIN D'ETUDE MASTER ACADEMIQUE

Filière : Génie Mécanique

Spécialité : Construction Mécanique

*Thème*

**Analyse des contraintes d'une plaque FGM avec des couches de surface piézoélectriques par la théorie de déformation en cisaillement**

Présenté par :

- ❖ DERKAOUI Fatima Zohra
- ❖ GORINE Somia

*Soutenu le 06/ 07 / 2019 devant le jury composé de :*

Président	Dr. M. SAHNOUNE	Université de Mostaganem UMAB
Examineur	Dr. S. E. BENKABOUCHE	Université de Mostaganem UMAB
Examineur	Mme. A. BELHACHEMI	Université de Mostaganem UMAB
Encadreur	Pr. D. OUINAS	Université de Mostaganem UMAB

**Année Universitaire : 2018 / 2019**

## *Remerciements*

Nous remercions le bon Dieu, ALLAH qui nous a donné la force et le courage d'entreprendre et de compléter ce travail. C'est avec beaucoup de respect et d'estime que nous remercions notre encadreur **Pr. D. OUINAS**, toujours présents pour nous accueillir et nous aider le long de notre travail, avec ses précieux conseils et son aide bénéfique.

En fin, nous remercions tous les enseignants qui nous ont fait profiter de leur savoir, le long de nos études, ainsi les personnels administratifs et tous ceux qui ont contribué à nous aider pour l'élaboration de notre travail.

## *Dédicace*

- ❖ Nous dédierons ce modeste travail à nos chers parents, et leur conseil d'amour qui nous a encouragés durant toutes nos études, ils sont toujours présents dans les moments difficiles.
- ❖ A nos frères et sœurs, sans oublier nos chères amies et tous les membres de nos familles.
- ❖ A toute la promotion de génie mécanique sans aucune exception.

**Gorine Somia**

**Derkaoui Fatima Zohra**

## Résumé

L'objectif de ce travail est de calculer les contraintes et les déformations d'une plaque à fonctionnellement graduée avec des faces en matériaux piézoélectriques. Une théorie des plaques de déformation de cisaillement à quatre inconnues est appliquée pour exprimer les composantes du déplacement. La distribution du potentiel électrique est composée d'une fonction linéaire dans le sens de l'épaisseur et d'une fonction cosinus dans le sens de la coordonnée plane. La plaque est soumise à une charge mécanique et une tension électrique est appliquée sur les faces piézoélectriques. Les équations d'équilibre et les conditions aux limites sont trouvées en utilisant le principe d'Hamilton. La solution de Navier est appliquée pour résoudre le problème considéré. L'influence de la tension appliquée, l'anisotropie du matériau, le rapport longueur-épaisseur, le rapport d'aspect et le paramètre d'inhomogénéité sont discutés. L'efficacité et l'exactitude des résultats sont établies en les comparant avec celles trouvées dans la littérature.

## Abstract

The objective of this work is to calculate the stresses and deformations of a functionally graduated plate with piezoelectric material faces. A theory of shear deformation plates with four unknowns is applied to express the displacement components. The electrical potential distribution is composed of a linear function in the direction of the thickness and a cosine function in the direction of the plane coordinate. The plate is subjected to a mechanical load and an electrical voltage is applied on the piezoelectric faces. Equilibrium equations and boundary conditions are found using the Hamilton principle. Navier's solution is applied to solve the problem. The influence of the applied voltage, the anisotropy of the material, the length-thickness ratio, the aspect ratio and the inhomogeneity parameter are discussed. The effectiveness and accuracy of the results are established by comparing them with those found in the literature.

## المخلص

الهدف من هذا العمل هو حساب الضغوطات والتشوهات في الطبقة المتدرج وظيفياً مع وجوه المواد الكهروإجهادية. يتم تطبيق نظرية لوحات تشوه القص مع أربعة مجهولات للتعبير عن مكونات الإزاحة. يتألف توزيع الجهد الكهربائي من وظيفة خطية في اتجاه السماكة ووظيفة جيب تمام في اتجاه إحداثي المستوى. تتعرض اللوحة إلى حمل ميكانيكي ويتم استخدام الجهد الكهربائي على الوجوه الكهروإجهادية. تم العثور على معادلات التوازن وشروط الحدود باستخدام مبدأ هاملتون. يتم تطبيق حل Navier لحل المشكلة. وتناقش تأثير الجهد المطبق، تباين المواد، ونسبة سمك الطول، ونسبة الارتفاع ومعلمة التجانس. يتم تحديد فعالية ودقة النتائج من خلال مقارنتها بالنتائج الموجودة في الأدبيات.

# *Sommaire*

Résumé.....	i
Table des Matières.....	ii
Liste des Tableaux.....	iii
Liste des Figures.....	iii
Notations.....	iv

## *Table des Matières*

### **Chapitre I : introduction générale**

I. Introduction générale.....	1
II. Domaines d'application.....	1
III. Caractéristiques matérielles des FGMs.....	1
IV. Méthodes d'Homogénéisation des matériaux à gradient de propriétés.....	2
IV.1. Loi exponentielle E-FGMs .....	2
IV.2. Loi des puissances P-FGMs .....	3
IV.3. Schéma de Mori-Tanaka MT-FGMs.....	3

### **Chapitre II : Modélisation analytique, résultats et discussions**

II.1. Introduction.....	5
II.2. Les théories d'élasticité tridimensionnelle (3-D) .....	5
II.3. Loi de mélange en puissance (P-FGM) .....	7
II.4. Configuration géométrique.....	7
II.5 Les équations constitutives.....	8
II.6 Détermination des équations d'équilibre.....	9
II.7 Solution exacte pour une plaque sandwich en FGM simplement appuyée.....	19
II.8 Résultats et discussions.....	21
II.8.1 Comparaison et vérification.....	21
II.9 Conclusions.....	30
Références bibliographiques.....	31

## *Liste des Tableaux*

<b>Tableau N°1.</b> Les propriétés mécaniques et électriques.....	21
<b>Tableau N°2.</b> Comparaison et validation du modèle analytique.....	22
<b>Tableau N°3.</b> Déplacements et contraintes adimensionnelles.....	23
<b>Tableau N°4.</b> Déplacements et contraintes adimensionnelles.....	24
<b>Tableau N°5.</b> Déplacements et contraintes adimensionnelles.....	25
<b>Tableau N°6.</b> Déplacements et contraintes adimensionnelles.....	26
<b>Tableau N°7.</b> Influence de la charge électrique sur les déplacements adimensionnels.....	27
<b>Tableau N°8.</b> Influence de la charge électrique sur les déplacements adimensionnels.....	27
<b>Tableau N°9.</b> Influence de la charge électrique sur les déplacements adimensionnels.....	28
<b>Tableau N°10.</b> Influence de la charge électrique sur les déplacements adimensionnels....	29

## *Liste des Figures*

<b>Fig. I.1.</b> Distribution de module de Young à travers l'épaisseur d'E-FGMs.....	2
<b>Fig. I.2.</b> Distribution de module de Young à travers l'épaisseur de P-FGMs.....	3
<b>Fig. I.3.</b> Distribution de module de Young à travers l'épaisseur de MT-FGMs.....	3
<b>Fig. II.1.</b> Géométrie de la plaque.....	7
<b>Fig. II.2.</b> Influence des charges mécaniques et électriques sur la flèche maximale Adimensionnelle.....	28
<b>Fig. II.3.</b> Influence des charges mécaniques et dimensions géométriques sur la charge électrique adimensionnelle.....	29

## *Notations :*

FGM: en anglais «Functionally Graded Materials»

3-D: tridimensionnelle

$F(z)$ : la fonction de cisaillement

$g(z)$ : dérivée de la fonction de cisaillement

$x, y, z$ : les axes de coordonnées cartésiennes

$a, b$ : dimensions de la plaque

$h$ : épaisseur de la plaque

$k$ : l'indice de la variation matériel

$u, v, w$ : composantes de déplacement

$\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}$ : Composantes des dérivées de déplacement par rapport le temps

$w_b$ : Composante de déplacement de flexion

$w_s$ : Composante de déplacement de cisaillement

$q$ : charge répartie

$t$ : temps

$C_{ij}$ : Matrice élastique de Hooke

$e_{ij}$ : Coefficients piézoélectriques

$E_x, E_y, E_z$ : champ électrique

$\Phi$ : potentiel électrique

$\eta_{ii}$ : Coefficients diélectrique

$U$ : énergie de déformation

$U_e$ : énergie de déformation électrique

$U_p$ : énergie de déformation mécanique

$V$ : travail des efforts extérieurs

$K$ : énergie cinétique

$E(z)$ : Module de Young à travers l'épaisseur en fonction de  $(z)$

$E_c$ : Module de Young de la céramique.

$E_m$ : Module de Young du Métal.

$V_c$ : Fraction volumique de la céramique.

$N_x, N_y, N_{xy}$ : Efforts normaux dans la plaque

$M_x, M_y, M_{xy}$ : Moments de flexion dans la plaque

$M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b$ : Moments Supplémentaires dus à la flexion

$M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s$ : Moments supplémentaires dus au cisaillement

$Q_{xz}, Q_{yz}$ : Efforts tranchants dans la plaque

$A, B, D, B^b, D^b, B^s, D^s, H^s$ : les matrices de rigidités de la membrane, couplage membrane /flexion, flexion et de cisaillement.

$(I_0, I_1, I_2, J_1, J_2, K_2)$ : Les inerties massiques

$a_{ij}$ : Coefficients de la matrice de rigidité

$m_{ij}$ : Coefficients de la matrice masse

$\sigma$ : Contraintes

$\varepsilon$ : Déformations

$\nu$ : Coefficient de Poisson

$\mu(z), \lambda(z)$  : Coefficients de Lamé.

$\rho(z)$  : La masse volumique à travers l'épaisseur en fonction de  $(z)$ .

$\tau_{xz}, \tau_{yz}$  : Contraintes de cisaillement en plan

$\partial$ : dérivée partielle

$\delta$ : quantité virtuel

$\psi(z)$  : Fonction de cisaillement(Hyperbolique)

$\psi(x, y)$  : Potentiel électrique à min-plan

$\Psi_0$  : La tension électrique externe

C : couche FGM

Pi : couche piézoélectrique inférieure

Ps : couche piézoélectrique supérieure

$D_x, D_y, D_z$  : déplacement électrique

# *Chapitre I : Introduction Général*

## **I. Introduction générale**

Récemment, une nouvelle classe de matériaux composites, connus sous le nom de matériaux à gradation fonctionnelle (FGM), a attiré une attention considérable des chercheurs. Un FGM typique, avec un fort effet de couplage flexion-étirement, est un composite non homogène composé de différentes phases de constituants de matériaux (généralement de la céramique et du métal), où des particules sphériques ou presque sphériques sont incorporées dans une matrice isotrope. Au sein des FGM, les différentes phases de la microstructure ont des fonctions différentes et les FGM globales atteignent le statut multi structural à partir de la gradation de leurs propriétés. En faisant varier progressivement la fraction volumique des matériaux constitutifs, leurs propriétés changent progressivement d'une surface à l'autre, en éliminant ainsi les problèmes d'interface et atténuant les concentrations de contraintes thermiques. Cela est dû au fait que les constituants céramiques des FGM sont capables de résister aux environnements à haute température grâce à leurs meilleures caractéristiques de résistance thermique, tandis que les constituants métalliques offrent des performances mécaniques plus élevées et réduisent le risque de fracture catastrophique.

## **II. Domaines d'application**

Les matériaux à gradient de propriétés offrent des caractéristiques performantes pour plusieurs utilisations dans l'industrie et la technologie qui exigent une conception optimale de leurs structures. Les matériaux FGMs présentent aussi une bonne résistance aux phénomènes de dégradations matérielles tels que l'usure, la fatigue et la corrosion. En comparaison aux matériaux classiques qui nécessitent une maintenance et un suivi régulier. Dans des cas de service, le gradient de température peut être important. L'utilisation des matériaux FGM (céramique-métal) est sans aucun doute la solution adéquate ; d'une part, pour éliminer la concentration des contraintes thermiques, et d'autre part pour des raisons fonctionnelles telles que : l'isolation thermique et la hygrothermique dans le matériau.

## **III. Caractéristiques matérielles des FGMs**

Le choix des composantes de base d'un matériau à gradient de propriétés, est adapté en fonction des propriétés physiques de chaque constituant. Les FGMs sont communément constitués de deux types de matériaux de base, céramique et métal.

Les éléments chimiques majeurs dans le tableau de Mandeliev sont les métaux. D'une façon générale, les métaux possèdent plusieurs avantages, sont ordinairement très bons conducteurs de la chaleur et de l'électricité, ils sont plus souvent durs, rigides et déformables plastiquement. Un nombre important possèdent une température de fusion très élevée. Les métaux plus communément utilisés sont le fer, le nickel, le tungstène, le titane, le magnésium et l'aluminium.

Les céramiques résultent de la combinaison des éléments métalliques (Al, Ni, Ti, Zr...) avec des éléments non métalliques dont le plus courant est l'oxygène. Elles sont utilisées typiquement dans les régions ou les environnements extrêmes (hautes températures, etc.). Ils sont caractérisés généralement par leurs comportements réfractaires schématisés par leurs résistances mécaniques et thermiques très élevées. Les céramiques sont en général, des matériaux très durs et elles sont largement utilisés comme abrasifs. Les céramiques ont généralement un comportement fragile ce qui réduit leurs emplois pour des applications où les chocs mécaniques et thermiques sont importants.

#### IV. Méthodes d'Homogénéisation des matériaux à gradient de propriétés

Les matériaux à gradient de propriétés sont interprétés comme des matériaux hétérogènes ou non homogènes à cause de leurs structures microscopiques ou/et macroscopiques. Dans le premier temps, nous allons présenter les différents modèles d'homogénéisation permettant de prédire le comportement équivalent d'un matériau à gradient de propriétés, et de déterminer leurs propriétés physiques effectives. Afin d'analyser les structures en FGMs comme des structures homogènes à l'échelle macroscopique. D'une façon générale, les méthodes d'homogénéisation pour traiter les matériaux non homogènes se définissent par deux techniques :

- a) Techniques d'homogénéisation analytiques,
- b) Techniques d'homogénéisation numériques.

Dans la première classe, il s'agit de déterminer les propriétés matérielles d'un matériau en FGMs utilisant des modèles mathématiques, ces modèles permettent d'exprimer les propriétés physiques des différentes phases constituant le matériau hétérogène. Les modèles analytiques sont basés sur le choix d'un volume élémentaire représentatif pour prédire correctement les propriétés physiques effectives.

Les modèles numériques décrivent le comportement de ces matériaux basant sur la simulation micromécanique. En effet, ces modèles considèrent la forme géométrique, les propriétés matériels et le nombre des phases constituant le matériau hétérogène. Pour une étude approfondie, on pourra se référer aux ouvrages de Siboni et al.[1] et de Bary et al. [2].

Une présentation détaillée faite par A.H. Akbarzadeh et al. [3] pour examiner l'influence des modèles micromécaniques sur la réponse des plaques en FGMs. Trois méthodes d'homogénéisation employées dans la plupart des récents travaux, établis pour analyser le comportement statique et dynamique des plaques en FGMs. Nous citons pour évaluer le module d'Young  $E(z)$  les méthodes suivantes :

- 1) Loi exponentielle ;
- 2) Loi des puissances;
- 3) Schéma de Mori-Tanaka.

##### IV.1. Loi exponentielle E-FGMs :

Dans cette méthode, la fraction volumique est donnée sous forme d'une fonction exponentielle à travers l'épaisseur :

$$E(z) = E_0 e^{k\left(\frac{z}{h} + 1/2\right)} \quad (I.1)$$

D'où  $E_0$  présente le module d'Young de la face homogène de la plaque, et « k » c'est l'indice de la variation matérielle à travers l'épaisseur de la plaque. Cette méthode est utilisée généralement pour les plaques épaisses ou avec forte épaisseur [3].

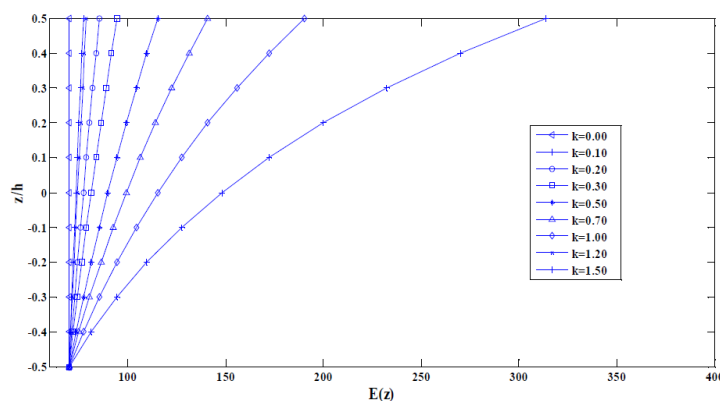


Fig. I.1. Distribution de module de Young à travers l'épaisseur d'E-FGMs.

### IV.2. Loi des puissances P-FGMs :

La loi des puissances est souvent introduite par plusieurs chercheurs pour évaluer le module d'Young, dans les cas statiques ou dynamiques, elle est utilisée pour estimer le module d'Young des plaques minces, modérément épaisses et épaisses [4]:

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m) \left( \frac{2z+h}{2h} \right)^k \quad (I.2)$$

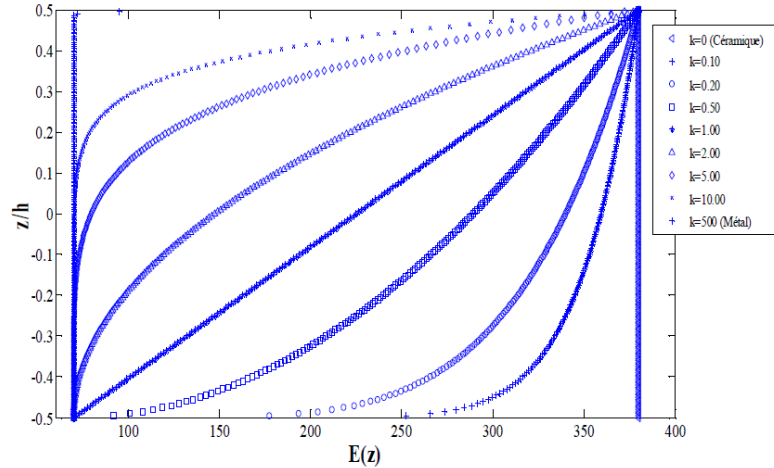


Fig. I.2. Distribution de module de Young à travers l'épaisseur de P-FGMs

Où «k» est un paramètre matériel, les indices «m» et «c» sont les modules élastiques de la face intérieure «métal» et la face supérieure «céramique» respectivement.

### IV.3. Schéma de Mori-Tanaka MT-FGMs :

En premier lieu, Mori et al. [5] ont proposé une approche de calculer les contraintes internes moyennes dans la matrice d'un matériau précipité. Par la suite, Benveniste [6] a reformulé cette méthode pour l'appliquer aux matériaux composites. Dans le cas d'un matériau à deux phases, le module d'Young est exprimé par la relation suivante :

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m) \left( \frac{V_c}{1+(1-V_c)(E_c/E_m-1)(1+\nu)/(3-3\nu)} \right)^k \quad (I.3)$$

Avec  $V_c = (0.5 + z/h)^k$  c'est la fraction volumique de la céramique.

Puisque les effets de la variation de coefficient de Poisson ( $\nu$ ) sur la réponse des plaques en FGMs sont faibles [7,8], ce paramètre matériel est considéré constant pour la simplification.

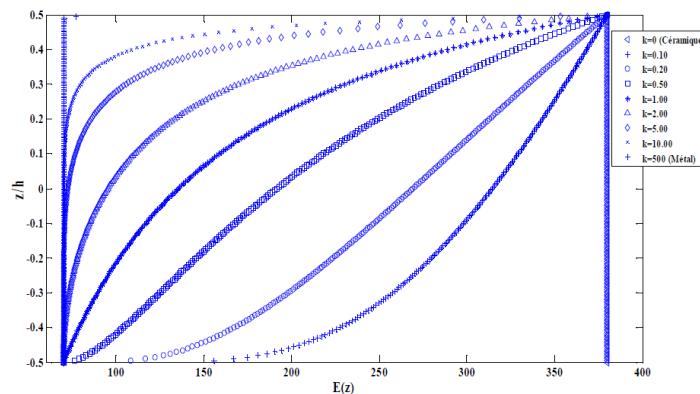


Fig. I.3. Distribution de module de Young à travers l'épaisseur de MT-FGMs.

*Chapitre II : modélisation analytique,  
résultats et discussions*

## Revue des travaux antérieurs sur la modélisation des FGM

### II.1 Introduction

Les matériaux à gradient fonctionnel (**Functionally Graded Materials** : FGM) ou les matériaux fonctionnellement gradués est une nouvelle classe de matériaux composites dont la microstructure et la composition varient graduellement et continûment avec la position de manière à optimiser les performances mécaniques et thermiques de la structure qu'ils constituent. Ils sont considérés comme des matériaux intelligents dont les fonctions désirées sont intégrées, dès la conception, au cœur même de la matière.

A chaque interface, le matériau est choisi selon les applications spécifiques et les charges environnementales. Ces matériaux possèdent de multiples avantages qui peuvent les rendre attractifs du point de vue de leur potentiel d'application. Il peut s'agir de l'amélioration de la rigidité, de la tenue à la fatigue, de la résistance à la corrosion ou de la conductivité thermique en plus d'avoir une gradation des propriétés permettant ainsi d'augmenter ou de moduler des performances telles que la réduction des contraintes locales.

Cette étude bibliographique présente quelques travaux réalisés sur les structures fabriquées en FGM, en utilisant la méthode des éléments finis pour souligner l'ampleur qu'ont pris ces nouveaux matériaux durant les deux dernières décennies.

### II.2 Les théories d'élasticité tridimensionnelle (3-D)

La reconversion vers les matériaux fonctionnellement gradués devient de plus en plus fréquente dans divers domaines et particulièrement l'aéronautique et aérospatial. Ce qui a incité les chercheurs à développer des théories capables de décrire correctement leur comportement structural. L'étude du comportement des plaques fonctionnellement graduées vis-à-vis des chargements mécanique et thermique reste un problème tridimensionnel de ce fait l'utilisation des théories d'élasticité tridimensionnelle (3-D) peut s'avérer très utile. Au cours des vingt dernières années beaucoup de chercheurs se sont intéressés aux théories de l'élasticité 3-D pour pouvoir développer des solutions plus exactes des comportements mécaniques et thermiques des plaques FGM et valider les résultats des modèles ESL.

En 1999 Ootao et Tanigawa [9]. Ont développé des solutions exactes pour des problèmes de contraintes thermiques des plaques FGM simplement appuyées. Reddy et Cheng [10] ont étudié l'analyse de la flexion des plaques carrées en FGM simplement appuyées sous un chargement thermique. Vel et Batra se sont aussi intéressés à l'étude thermoélastique des plaques carrées en FGM en adoptant une méthode de séries de puissances [11] Une année après ils ont développé leurs travaux pour analyser les problèmes de conduction de chaleur transitoire des plaques FGM simplement supportées soumises à une variation de température graduelle [12].

En utilisant la méthode de d'état d'espace qu'Alibeigloo a effectué une analyse de la flexion des plaques FGM sous charges thermiques et mécaniques [13]. Au cours des années qui suivent pas mal de travaux étaient enregistrés dans le cadre de l'étude statique sous des chargements thermiques et mécaniques des plaques en FGM comme Kashtalyan [14], Zhong et Shang [15], Xu et Zhou [16], Woodward et Kashtalyan [17], Wen et Sladek [18] Et Abali [19] en employant des théories de l'élasticité tridimensionnelle (3-D).

Des études tridimensionnelles de vibration des plaques FGM ont été initialement développées par Vel et Batra [20] à l'aide de la méthode de séries de puissances pour des plaques simplement appuyées en FGM. Ensuite Aydogdu et Uymaz ont présenté des solutions exactes

en utilisant les théories 3-D pour la vibration libre des plaques FGM avec des différentes conditions aux limites [21].

En utilisant la méthode de Ritz avec les fonctions de déplacement de Chebyshev que Li et al ont effectué une analyse 3-D de la vibration libre des plaques sandwichs en FGM simplement appuyées, des fréquences naturelles ont été obtenues pour deux types de plaques sandwichs en FGM, une plaque sandwich avec un noyau homogène et une plaque sandwich avec des faces homogènes [22]. Yas et Tahouneh ont examiné les réponses de vibration libre des plaques annulaires en FGM reposant sur des fondations élastiques. La théorie d'élasticité tridimensionnelle et la méthode des différences quadratiques ont été utilisées pour obtenir des fréquences propres [23]. D'autres études dynamiques ont été menées pour des plaques fonctionnellement graduées reposant sur des fondations élastiques on peut citer Amini et al [24], Lu et Lim [25], Malekzadeh [26,27] et Reddy et Kant [28].

L'analyse tridimensionnelle du flambage des plaques FGM sous des chargements thermique et mécanique a aussi susciter beaucoup d'intérêt par exemple Na et Kim ont étudié le comportement 3-D du flambage des plaques FGM sous un chargement thermique linéaire et sinusoïdale à travers l'épaisseur en employant l'hypothèse d'une couche mixte [29] ensuite Na et Kim ont employé la méthode des éléments finis pour pouvoir étudier le post-flambement thermique des plaques FGM sous des chargements uniformes ou non uniformes. Un élément solide de 18 nœuds basé sur le théorème de Lagrange a été développé pour tenir compte de la forte déformation.

Selon Reddy [30] et Mallikarjuna et Kant [31] les hypothèses qui sont à l'origine du développement de ces théories d'ordre élevé sont :

- Les déplacements sont petits comparés à l'épaisseur de la plaque.
- Les sections transversales, initialement planes et normales au plan moyen, ne restent pas nécessairement planes et normales à celui-ci après déformation.
- La déformation axiale dans la direction transversale n'est pas négligeable.
- La contrainte normale dans la direction transversale n'est en général pas négligeable.

La plupart des théories d'ordre élevé (HSDT) sont basées sur les approches de Reissner [32], Henchy-Mindlin [33] et d'Ambartsumyan [34] et leur champ de déplacements s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= u(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ V(x, y, z) &= v(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ W(x, y, z) &= w_b(x, y) \end{aligned} \quad (II.1)$$

Dans notre travail, la fonction de forme est considérée sur la base de la fonction de déformation de cisaillement du troisième ordre (TSDT) [35] qui s'écrit par :

$$f(z) = -\frac{z}{4} + \left(\frac{5}{3}\right) \left(\frac{z^3}{h^2}\right) \quad (II.2)$$

Dans ce modèle le champ de déplacement membranaire est cubique, la distribution des contraintes de cisaillement transverse est parabolique dans l'épaisseur et les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites. D'où on peut obtenir une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution d'élasticité tridimensionnelle.

### II.3 Loi de mélange en puissance (P-FGM)

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance.

$$V_c(z) = \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^k \quad (\text{II.3})$$

Où  $k$  est un paramètre matériels et  $h$  est l'épaisseur de la plaque. Une fois la fraction volumique locale a été définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges [36]

$$P(z) = (P_c - P_m) \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^k + P_m \quad (\text{II.4})$$

### II.4 Configuration géométrique

Considérons une plaque FG avec des faces piézoélectriques comme illustrée à la Fig. 1. La plaque est de longueur  $a$ , largeur  $b$  et  $h$  comme l'épaisseur totale de la plaque. L'épaisseur de la couche FG est  $h_c$ , alors que l'épaisseur de chaque couche est  $h_c$ . Des faces piézoélectriques est  $h_p$ . Un axe de coordonnées orthogonales,  $x$ ,  $y$ ,  $z$  est choisi, de sorte que  $z = 0$  définit la surface médiane de la plaque étudiée. La surface inférieure de la couche FG ( $z = h_c/2$ ) est entièrement métallique et la surface supérieure ( $z = h_c/2$ ) est entièrement céramique tandis qu'entre la couche supérieure et inférieure les surfaces des matériaux ont une distribution différente.

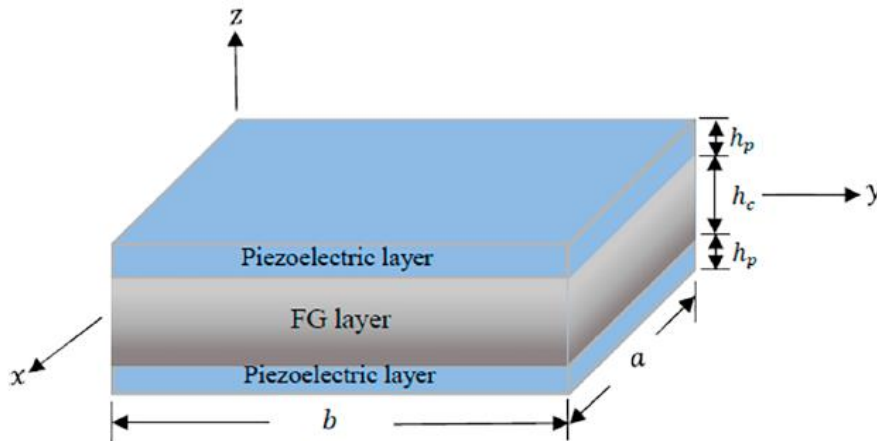


Fig. II.1. Géométrie de la plaque.

Les propriétés effectives  $P$  de la couche FG, à savoir le module de Young  $E$  et le rapport de Poisson, varient continuellement dans la direction de l'épaisseur selon la formule suivante de Bao et Wang [37] où  $P_m$  et  $P_c$  sont respectivement les propriétés du métal et de la céramique, et  $k$  est l'exposant de fraction volumique. La plaque est entièrement en céramique lorsque  $k$  est égal à zéro et entièrement en métal lorsque  $k$  est égal à l'infini.

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m) \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^k \quad (\text{II.5})$$

Selon la théorie des plaques de déformation par cisaillement à quatre inconnues, les composantes de déplacement sont exprimées par [36] :

$$\begin{aligned}
 U(x, y, z, t) &= u(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\
 V(x, y, z, t) &= v(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\
 W(x, y, z, t) &= w_b(x, y, t) - w_s(x, y, t)
 \end{aligned} \tag{II.6}$$

### II.5 Les équations constitutives

En se limitant à un comportement élastique linéaire, l'expression des contraintes pour les plaques sandwiches en FGM, les relations contrainte-déformation pour l'état de contrainte plane, y compris les influences thermiques, peut être écrite comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^c & C_{12}^c & 0 & 0 & 0 \\ C_{12}^c & C_{22}^c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{44}^c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{55}^c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}^c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{II.7}$$

$$\begin{aligned}
 \text{et } C_{11}^c(z) = C_{22}^c(z) &= \frac{E(z)}{1-\nu(z)^2} \\
 C_{12}^c(z) &= \frac{\nu E(z)}{1-\nu(z)^2}
 \end{aligned} \tag{II.8}$$

$$C_{44}^c(z) = C_{55}^c(z) = C_{66}^c(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu(z))}$$

Le champ de contrainte des couches piézoélectriques

$$-\frac{h_c}{2} - h_p \leq Z \leq -\frac{h_c}{2} \quad ; \quad \frac{h_c}{2} \leq Z \leq \frac{h_c}{2} + h_p$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^p & C_{12}^p & 0 & 0 & 0 \\ C_{12}^p & C_{22}^p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{44}^p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{55}^p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}^p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{32} \\ 0 & e_{24} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} \tag{II.9}$$

Les composantes de champ électrique

$$E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} ; E_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y} ; E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \tag{II.10}$$

Et la fonction

$$\phi(x, y, z) = \frac{2\tilde{z}}{h_p} \psi_0 - \psi(x, y) \cos\left(\frac{\pi \tilde{z}}{h_p}\right) \tag{II.11}$$

$$\begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \eta_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \eta_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} \tag{II.12}$$

## II.6 Détermination des équations d'équilibre

Afin d'établir de façon systématique l'ensemble des équations d'équilibre ainsi que les conditions aux limites, le principe des travaux virtuels est appliqué, celui-ci indique que, pour tout champ de contrainte en équilibre avec les efforts extérieurs, la somme de travail des efforts internes et le travail des efforts externes est nulle pour tout champ virtuel. Le principe d'Hamilton le problème de flexion mécanique d'une plaque sandwich fonctionnellement graduée est exprimé comme suit :

$$\int_0^T (\delta U + \delta V - \delta K) dt = 0 \quad (\text{II.13})$$

Où  $\delta U$  est l'énergie de déformation virtuelle et  $\delta V$  est le travail virtuel externe sous l'effet d'un chargement externe appliqué à la plaque,  $\delta K$  est l'énergie cinétique.

Les équations d'équilibre peuvent être dérivées en se basant sur

$$\delta U = \delta U_p - \delta U_e \quad (\text{II.14})$$

$$\delta U = \int_v (\sigma_{ij}^c \delta \epsilon_{ij} + \sigma_{ij}^{pi} \delta \epsilon_{ij} + \sigma_{ij}^{ps} \delta \epsilon_{ij}) dv - \int_v D_i \delta E_i dv \quad (\text{II.15})$$

En utilisant les contraintes, les déformations, les déplacements électriques et les relations de champ électrique et en intégrant à travers l'épaisseur de la plaque puis en collectant les termes, Eq(II.14) peut s'écrire comme suit

$$\delta U_p = \int_v \left[ \begin{aligned} &\sigma_x^c \delta \epsilon_x + \sigma_y^c \delta \epsilon_y + \tau_{yz}^c \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz}^c \delta \gamma_{xz} + \tau_{xy}^c \delta \gamma_{xy} + \sigma_x^{pi} \delta \epsilon_x + \sigma_y^{pi} \delta \epsilon_y + \tau_{yz}^{pi} \delta \gamma_{yz} \\ &+ \tau_{xz}^{pi} \delta \gamma_{xz} + \tau_{xy}^{pi} \delta \gamma_{xy} + \sigma_x^{ps} \delta \epsilon_x + \sigma_y^{ps} \delta \epsilon_y + \tau_{yz}^{ps} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz}^{ps} \delta \gamma_{xz} + \tau_{xy}^{ps} \delta \gamma_{xy} \end{aligned} \right] dv \quad (\text{II.16})$$

$$\delta U_e = \int_v [D_x \delta E_x + D_y \delta E_y + D_z \delta E_z] dv \quad (\text{II.17})$$

Où les résultats de contrainte  $N_{ij}$ , les couples de contrainte  $M_{ij}^b$ , les couples de contrainte supplémentaires  $M_{ij}^s$ , les résultats de contrainte de cisaillement transversal  $Q_{iz}$  et les résultats électriques  $\tilde{D}_i$ .

En substituant les expressions énergétiques appropriées on peut déterminer

$$\delta U = \int_A \left\{ \begin{aligned}
 & N_x^c \frac{\partial \delta u}{\partial x} - M_x^{bc} \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x^2} - M_x^{sc} \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial x^2} + N_y^c \frac{\partial \delta v}{\partial y} - M_y^{bc} \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial y^2} - M_y^{sc} \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial y^2} \\
 & + N_{xy}^c \left( \frac{\partial \delta u}{\partial y} + \frac{\partial \delta v}{\partial x} \right) - 2M_{xy}^{bc} \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x \partial y} - 2M_{xy}^{sc} \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial x \partial y} + Q_{xz}^c \frac{\partial \delta w_s}{\partial x} + Q_{yz}^c \frac{\partial \delta w_s}{\partial y} \\
 & + N_x^{pi} \frac{\partial \delta u}{\partial x} - M_x^{bpi} \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x^2} - M_x^{spi} \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial x^2} + N_y^{pi} \frac{\partial \delta v}{\partial y} - M_y^{bpi} \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial y^2} - M_y^{spi} \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial y^2} \\
 & + N_{xy}^{pi} \left( \frac{\partial \delta u}{\partial y} + \frac{\partial \delta v}{\partial x} \right) - 2M_{xy}^{bpi} \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x \partial y} - 2M_{xy}^{spi} \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial x \partial y} + Q_{xz}^{pi} \frac{\partial \delta w_s}{\partial x} + Q_{yz}^{pi} \frac{\partial \delta w_s}{\partial y} \\
 & + N_x^{ps} \frac{\partial \delta u}{\partial x} - M_x^{bps} \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x^2} - M_x^{sps} \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial x^2} + N_y^{ps} \frac{\partial \delta v}{\partial y} - M_y^{bps} \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial y^2} - M_y^{sps} \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial y^2} \\
 & + N_{xy}^{ps} \left( \frac{\partial \delta u}{\partial y} + \frac{\partial \delta v}{\partial x} \right) - 2M_{xy}^{bps} \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x \partial y} - 2M_{xy}^{sps} \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial x \partial y} + Q_{xz}^{ps} \frac{\partial \delta w_s}{\partial x} + Q_{yz}^{ps} \frac{\partial \delta w_s}{\partial y} \\
 & - \left( D_{15}^{epi} + D_{15}^{eps} \right) \frac{\partial w_s}{\partial x} \frac{\partial \delta \psi}{\partial x} - \left( D_{11}^{epi} + D_{11}^{eps} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \delta \psi}{\partial x} - \left( D_{24}^{epi} + D_{24}^{eps} \right) \frac{\partial w_s}{\partial y} \frac{\partial \delta \psi}{\partial y} \\
 & - \left( D_{22}^{epi} + D_{22}^{eps} \right) \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \delta \psi}{\partial y} + \left( D_{31}^{epi} + D_{31}^{eps} \right) \frac{\partial u}{\partial x} \delta \psi - \left( D_{31}^{ebpi} + D_{31}^{ebps} \right) \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \delta \psi \\
 & - \left( D_{31}^{espi} + D_{31}^{esps} \right) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \delta \psi + \left( D_{32}^{epi} + D_{32}^{eps} \right) \frac{\partial v}{\partial y} \delta \psi - \left( D_{32}^{ebpi} + D_{32}^{ebps} \right) \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \delta \psi \\
 & - \left( D_{32}^{espi} + D_{32}^{esps} \right) \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \delta \psi - \left( D_{33}^{epi} + D_{33}^{eps} \right) \delta \psi - \left( D_{33}^{\psi epi} + D_{33}^{\psi eps} \right) \psi \delta \psi
 \end{aligned} \right\} dA \quad (II.18)$$

Où les résultantes des contraintes  $N$ ,  $M^b$ , and  $M^s$  sont données par :

$$\begin{aligned}
 (N_x^c, N_y^c, N_{xy}^c) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x^c, \sigma_y^c, \tau_{xy}^c) dz \\
 (M_x^{bc}, M_y^{bc}, M_{xy}^{bc}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x^c, \sigma_y^c, \tau_{xy}^c) z dz \\
 (M_x^{sc}, M_y^{sc}, M_{xy}^{sc}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x^c, \sigma_y^c, \tau_{xy}^c) f(z) dz \\
 (Q_{xz}^c, Q_{yz}^c) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xz}^c, \tau_{yz}^c) g(z) dz \\
 (N_x^{pi}, N_y^{pi}, N_{xy}^{pi}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x^{pi}, \sigma_y^{pi}, \tau_{xy}^{pi}) dz
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (M_x^{bpi}, M_y^{bpi}, M_{xy}^{bpi}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x^{pi}, \sigma_y^{pi}, \tau_{xy}^{pi}) z dz \\
 (M_x^{spi}, M_y^{spi}, M_{xy}^{spi}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x^{pi}, \sigma_y^{pi}, \tau_{xy}^{pi}) f(z) dz \\
 (Q_{xz}^{pi}, Q_{yz}^{pi}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xz}^{pi}, \tau_{yz}^{pi}) g(z) dz \\
 (N_x^{ps}, N_y^{ps}, N_{xy}^{ps}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x^{ps}, \sigma_y^{ps}, \tau_{xy}^{ps}) dz \\
 (M_x^{bps}, M_y^{bps}, M_{xy}^{bps}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x^{ps}, \sigma_y^{ps}, \tau_{xy}^{ps}) z dz \\
 (M_x^{sps}, M_y^{sps}, M_{xy}^{sps}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x^{ps}, \sigma_y^{ps}, \tau_{xy}^{ps}) f(z) dz \\
 (Q_{xz}^{ps}, Q_{yz}^{ps}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xz}^{ps}, \tau_{yz}^{ps}) g(z) dz \\
 (D_{15}^{epi}, D_{24}^{epi}) &= \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} (e_{15}^{pi}, e_{24}^{pi}) g(z) \cos\left(\frac{\pi z}{h_p}\right) dz \\
 (D_{11}^{epi}, D_{22}^{epi}) &= \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} (\eta_{11}^{pi}, \eta_{22}^{pi}) \cos^2\left(\frac{\pi z}{h_p}\right) dz \\
 (D_{31}^{epi}, D_{32}^{epi}) &= \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} (e_{31}^{pi}, e_{32}^{pi}) \frac{\pi}{h_p} \sin\left(\frac{\pi z}{h_p}\right) dz \\
 (D_{31}^{ebpi}, D_{32}^{ebpi}) &= \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} (e_{31}^{pi}, e_{32}^{pi}) \frac{\pi z}{h_p} \sin\left(\frac{\pi z}{h_p}\right) dz \\
 (D_{31}^{espi}, D_{32}^{espi}) &= \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} (e_{31}^{pi}, e_{32}^{pi}) \frac{\pi}{h_p} f(z) \sin\left(\frac{\pi z}{h_p}\right) dz \\
 (D_{33}^{epi}) &= \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} \eta_{33}^{pi} \frac{2\psi_0 \pi}{h_p^2} \sin\left(\frac{\pi z}{h_p}\right) dz
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (D_{33}^{yepi}) &= \int_{\frac{h_c}{2}-h_p}^{\frac{h_c}{2}} \eta_{33}^{pi} \frac{\pi^2}{h_p^2} \sin^2\left(\frac{\pi \tilde{z}}{h_p}\right) dz \\
 (D_{15}^{eps}, D_{24}^{eps}) &= \int_{\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}+h_p} (\mathbf{e}_{15}^{ps}, \mathbf{e}_{24}^{ps}) g(z) \cos\left(\frac{\pi \tilde{z}}{h_p}\right) dz \\
 (D_{11}^{eps}, D_{22}^{eps}) &= \int_{\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}+h_p} (\eta_{11}^{ps}, \eta_{22}^{ps}) \cos^2\left(\frac{\pi \tilde{z}}{h_p}\right) dz \\
 (D_{31}^{eps}, D_{32}^{eps}) &= \int_{\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}+h_p} (\mathbf{e}_{31}^{ps}, \mathbf{e}_{32}^{ps}) \frac{\pi}{h_p} \sin\left(\frac{\pi \tilde{z}}{h_p}\right) dz \\
 (D_{31}^{ebps}, D_{32}^{ebps}) &= \int_{\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}+h_p} (\mathbf{e}_{31}^{ps}, \mathbf{e}_{32}^{ps}) \frac{\pi \tilde{z}}{h_p} \sin\left(\frac{\pi \tilde{z}}{h_p}\right) dz \\
 (D_{31}^{esps}, D_{32}^{esps}) &= \int_{\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}+h_p} (\mathbf{e}_{31}^{ps}, \mathbf{e}_{32}^{ps}) \frac{\pi}{h_p} f(z) \sin\left(\frac{\pi \tilde{z}}{h_p}\right) dz \\
 (D_{33}^{eps}) &= \int_{\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}+h_p} \eta_{33}^{ps} \frac{2\psi_0 \pi}{h_p^2} \sin\left(\frac{\pi \tilde{z}}{h_p}\right) dz \\
 (D_{33}^{yeps}) &= \int_{\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}+h_p} \eta_{33}^{ps} \frac{\pi^2}{h_p^2} \sin^2\left(\frac{\pi \tilde{z}}{h_p}\right) dz
 \end{aligned} \tag{II.19}$$

L'énergie des forces extérieures :

$$\delta V = - \int_A (q \delta w_b + q \delta w_s) dA \tag{II.20}$$

$$\delta K = \int_A \left[ \begin{aligned} & I_0 (\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w}_b \delta \dot{w}_b + \dot{w}_s \delta \dot{w}_s + \dot{w}_b \delta \dot{w}_s + \dot{w}_s \delta \dot{w}_b) \\ & - I_1 \left( \dot{u} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \delta \dot{u} + \dot{v} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} \delta \dot{v} \right) \\ & - J_1 \left( \dot{u} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \delta \dot{u} + \dot{v} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \delta \dot{v} \right) + I_2 \left( \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial y} \right) \\ & + J_2 \left( \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial y} \right) \\ & + K_2 \left( \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial y} \right) \end{aligned} \right] dA \quad (\text{II.21})$$

$$\text{On a :} \quad (I_0, I_1, I_2, J_1, J_2, K_2) = \int_h (1, z, z^2, f, zf, f^2) \rho(z) dz \quad (\text{II.22})$$

A travers le principe d'Hamilton on écrit :

$$\begin{aligned}
 & \iint_{T A} \left( -\frac{\partial N_x^c}{\partial x} - \frac{\partial N_x^{pi}}{\partial x} - \frac{\partial N_x^{ps}}{\partial x} - \frac{\partial N_{xy}^c}{\partial y} - \frac{\partial N_{xy}^{pi}}{\partial y} - \frac{\partial N_{xy}^{ps}}{\partial y} + I_0 \ddot{u} - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x} - J_1 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial x} \right) \delta u dt dA \\
 & + \iint_{T A} \left( -\frac{\partial N_y^c}{\partial y} - \frac{\partial N_y^{pi}}{\partial y} - \frac{\partial N_y^{ps}}{\partial y} - \frac{\partial N_{xy}^c}{\partial x} - \frac{\partial N_{xy}^{pi}}{\partial x} - \frac{\partial N_{xy}^{ps}}{\partial x} + I_0 \ddot{v} - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial y} - J_1 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial y} \right) \delta v dt dA \\
 & + \iint_{T A} \left( -\frac{\partial^2 M_x^{bc}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_y^{bc}}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^{bc}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 M_x^{bpi}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_y^{bpi}}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^{bpi}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 M_x^{bps}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_y^{bps}}{\partial y^2} \right. \\
 & \left. - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^{bps}}{\partial x \partial y} - q + I_0 \ddot{w}_b + I_0 \ddot{w}_s + I_1 \frac{\partial \ddot{u}}{\partial x} + I_1 \frac{\partial \ddot{v}}{\partial y} - I_2 \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} - I_2 \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial y^2} - J_2 \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} - J_2 \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial y^2} \right) \delta w_b dt dA \\
 & + \iint_{T A} \left( -\frac{\partial^2 M_x^{sc}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_y^{sc}}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^{sc}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial Q_{xz}^c}{\partial x} - \frac{\partial Q_{yz}^c}{\partial y} - \frac{\partial^2 M_x^{spi}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_y^{spi}}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^{spi}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial Q_{xz}^{pi}}{\partial x} \right. \\
 & \left. - \frac{\partial Q_{yz}^{pi}}{\partial y} - \frac{\partial^2 M_x^{sps}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_y^{sps}}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^{sps}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial Q_{xz}^{ps}}{\partial x} - \frac{\partial Q_{yz}^{ps}}{\partial y} - q + I_0 \ddot{w}_b + I_0 \ddot{w}_s + J_1 \frac{\partial \ddot{u}}{\partial x} \right. \\
 & \left. + J_1 \frac{\partial \ddot{v}}{\partial y} - J_2 \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} - J_2 \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial y^2} - K_2 \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} - K_2 \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial y^2} \right) \delta w_s dt dA \\
 & + \iint_{T A} \left( -\frac{\partial^2 M_x^{sc}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_y^{sc}}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^{sc}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial Q_{xz}^c}{\partial x} - \frac{\partial Q_{yz}^c}{\partial y} - \frac{\partial^2 M_x^{spi}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_y^{spi}}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^{spi}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial Q_{xz}^{pi}}{\partial x} \right. \\
 & \left. - \frac{\partial Q_{yz}^{pi}}{\partial y} - \frac{\partial^2 M_x^{sps}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_y^{sps}}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^{sps}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial Q_{xz}^{ps}}{\partial x} - \frac{\partial Q_{yz}^{ps}}{\partial y} - q + I_0 \ddot{w}_b + I_0 \ddot{w}_s + J_1 \frac{\partial \ddot{u}}{\partial x} \right. \\
 & \left. + J_1 \frac{\partial \ddot{v}}{\partial y} - J_2 \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} - J_2 \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial y^2} - K_2 \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} - K_2 \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial y^2} \right) \delta w_s dt dA \\
 & + \iint_{T A} \left( (D_{15}^{epi} + D_{15}^{eps}) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + (D_{11}^{epi} + D_{11}^{eps}) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + (D_{24}^{epi} + D_{24}^{eps}) \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} + (D_{22}^{epi} + D_{22}^{eps}) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right. \\
 & \left. + (D_{31}^{epi} + D_{31}^{eps}) \frac{\partial u}{\partial x} - (D_{31}^{ebpi} + D_{31}^{ebps}) \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - (D_{31}^{espi} + D_{31}^{esps}) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + (D_{32}^{epi} + D_{32}^{eps}) \frac{\partial v}{\partial y} \right) \delta \psi dt dA = 0 \quad (II.23) \\
 & \left. - (D_{32}^{ebpi} + D_{32}^{ebps}) \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} - (D_{32}^{espi} + D_{32}^{esps}) \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} - (D_{33}^{epi} + D_{33}^{eps}) - (D_{33}^{vepi} + D_{33}^{veps}) \psi \right)
 \end{aligned}$$

Après la résolution des équations, nous déterminons les valeurs de la matrice comme suit :

$$\begin{aligned}
 (A_{11}^c, B_{11}^{bc}, B_{11}^{sc}) &= \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} C_{11}^c [1, z, f(z)] dz \\
 (A_{12}^c, B_{12}^{bc}, B_{12}^{sc}) &= \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} C_{12}^c [1, z, f(z)] dz \\
 (A_{66}^c, B_{66}^{bc}, B_{66}^{sc}) &= \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} C_{66}^c [1, z, f(z)] dz
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A_{11}^{pi}, B_{11}^{bpi}, B_{11}^{spi}) &= \int_{-\frac{h_c}{2}-h_p}^{\frac{h_c}{2}} C_{11}^{pi}[1, z, f(z)] dz \\ (A_6^{pi}, A_7^{pi}) &= \int_{-\frac{h_c}{2}-h_p}^{\frac{h_c}{2}} (e_{31}^{pi}, e_{32}^{pi}) \frac{1}{h_p} dz \\ (A_{12}^{pi}, B_{12}^{bpi}, B_{12}^{spi}) &= \int_{-\frac{h_c}{2}-h_p}^{\frac{h_c}{2}} C_{12}^{pi}[1, z, f(z)] dz \\ (A_6^{ppi}, A_7^{ppi}) &= \int_{-\frac{h_c}{2}-h_p}^{\frac{h_c}{2}} (e_{31}^{pi}, e_{32}^{pi}) \frac{\pi}{h_p} \sin\left(\frac{\pi \tilde{z}}{h_p}\right) dz \\ (A_{66}^{pi}, B_{66}^{bpi}, B_{66}^{spi}) &= \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} C_{66}^{pi}[1, z, f(z)] dz \\ (A_{11}^{ps}, B_{11}^{bps}, B_{11}^{sps}) &= \int_{\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}+h_p} C_{11}^{ps}[1, z, f(z)] dz \\ (A_6^{ps}, A_7^{ps}) &= \int_{\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}+h_p} (e_{31}^{ps}, e_{32}^{ps}) \frac{1}{h_p} dz \\ (A_{12}^{ps}, B_{12}^{bps}, B_{12}^{sps}) &= \int_{\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}+h_p} C_{12}^{ps}[1, z, f(z)] dz \\ (A_6^{pps}, A_7^{pps}) &= \int_{\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}+h_p} (e_{31}^{ps}, e_{32}^{ps}) \frac{\pi}{h_p} \sin\left(\frac{\pi \tilde{z}}{h_p}\right) dz \\ (A_{66}^{ps}, B_{66}^{bps}, B_{66}^{sps}) &= \int_{\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} C_{66}^{ps}[1, z, f(z)] dz \\ (A_{12}^c, B_{12}^{bc}, B_{12}^{sc}) &= \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} C_{12}^c[1, z, f(z)] dz \\ (A_{22}^c, B_{22}^{bc}, B_{22}^{sc}) &= \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} C_{22}^c[1, z, f(z)] dz \end{aligned}$$

$$(A_{66}^c, B_{66}^{bc}, B_{66}^{sc}) = \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} C_{66}^c [1, z, f(z)] dz$$

$$(A_{12}^{pi}, B_{12}^{bpi}, B_{12}^{spi}) = \int_{-\frac{h_c}{2}-h_p}^{\frac{h_c}{2}} C_{12}^{pi} [1, z, f(z)] dz$$

$$(A_{22}^{pi}, B_{22}^{bpi}, B_{22}^{spi}) = \int_{-\frac{h_c}{2}-h_p}^{\frac{h_c}{2}} C_{22}^{pi} [1, z, f(z)] dz$$

$$(A_{66}^{pi}, B_{66}^{bpi}, B_{66}^{spi}) = \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} C_{66}^{pi} [1, z, f(z)] dz$$

$$(A_{12}^{ps}, B_{12}^{bps}, B_{12}^{sps}) = \int_{\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}+h_p} C_{12}^{ps} [1, z, f(z)] dz$$

$$(A_{22}^{ps}, B_{22}^{bps}, B_{22}^{sps}) = \int_{\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}+h_p} C_{22}^{ps} [1, z, f(z)] dz$$

$$(A_{66}^{ps}, B_{66}^{bps}, B_{66}^{sps}) = \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} C_{66}^{ps} [1, z, f(z)] dz$$

$$(B_{11}^{bc}, D_{11}^{bc}, D_{11}^{sc}) = \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} C_{11}^c [z, z^2, zf(z)] dz$$

$$(B_{12}^{bc}, D_{12}^{bc}, D_{12}^{sc}) = \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} C_{12}^c [z, z^2, zf(z)] dz$$

$$(B_{11}^{bpi}, D_{11}^{bpi}, D_{11}^{spi}) = \int_{-\frac{h_c}{2}-h_p}^{\frac{h_c}{2}} C_{11}^{pi} [z, z^2, zf(z)] dz$$

$$(A_8^{pi}, A_9^{pi}) = \int_{-\frac{h_c}{2}-h_p}^{\frac{h_c}{2}} (e_{31}^{pi}, e_{32}^{pi}) \frac{z}{h_p} dz$$

$$\begin{aligned} (B_{12}^{bpi}, D_{12}^{bpi}, D_{12}^{spi}) &= \int_{\frac{h_c}{2}-h_p}^{\frac{h_c}{2}} C_{12}^{pi} [z, z^2, zf(z)] dz \\ (A_8^{vpi}, A_9^{vpi}) &= \int_{\frac{h_c}{2}-h_p}^{\frac{h_c}{2}} (e_{31}^{pi}, e_{32}^{pi}) \frac{\pi z}{h_p} \sin\left(\frac{\pi z}{h_p}\right) dz \\ (B_{11}^{bps}, D_{11}^{bps}, D_{11}^{sps}) &= \int_{\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}+h_p} C_{11}^{ps} [z, z^2, zf(z)] dz \\ (A_8^{ps}, A_9^{ps}) &= \int_{\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}+h_p} (e_{31}^{ps}, e_{32}^{ps}) \frac{z}{h_p} dz \\ (B_{12}^{bps}, D_{12}^{bps}, D_{12}^{sps}) &= \int_{\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}+h_p} C_{12}^{ps} [z, z^2, zf(z)] dz \\ (A_8^{vps}, A_9^{vps}) &= \int_{\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}+h_p} (e_{31}^{ps}, e_{32}^{ps}) \frac{\pi z}{h_p} \sin\left(\frac{\pi z}{h_p}\right) dz \\ (B_{22}^{bc}, D_{22}^{bc}, D_{22}^{sc}) &= \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} C_{22}^c [z, z^2, zf(z)] dz \\ (B_{22}^{bpi}, D_{22}^{bpi}, D_{22}^{spi}) &= \int_{\frac{h_c}{2}-h_p}^{\frac{h_c}{2}} C_{22}^{pi} [z, z^2, zf(z)] dz \\ (B_{22}^{bps}, D_{22}^{bps}, D_{22}^{sps}) &= \int_{\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}+h_p} C_{22}^{ps} [z, z^2, zf(z)] dz \\ (B_{66}^{bc}, D_{66}^{bc}, D_{66}^{sc}) &= \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} C_{66}^c [z, z^2, zf(z)] dz \\ (B_{66}^{bpi}, D_{66}^{bpi}, D_{66}^{spi}) &= \int_{\frac{h_c}{2}-h_p}^{\frac{h_c}{2}} C_{66}^{pi} [z, z^2, zf(z)] dz \\ (B_{66}^{bps}, D_{66}^{bps}, D_{66}^{sps}) &= \int_{\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}+h_p} C_{66}^{ps} [z, z^2, zf(z)] dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (B_{11}^{sc}, D_{11}^{sc}, H_{11}^{sc}) &= \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} C_{11}^c [f(z), zf(z), f^2(z)] dz \\
 (B_{12}^{sc}, D_{12}^{sc}, H_{12}^{sc}) &= \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} C_{12}^c [f(z), zf(z), f^2(z)] dz \\
 (B_{11}^{spi}, D_{11}^{spi}, H_{11}^{spi}) &= \int_{-\frac{h_c}{2}-h_p}^{\frac{h_c}{2}} C_{11}^{pi} [f(z), zf(z), f^2(z)] dz \\
 (A_{10}^{pi}, A_{13}^{pi}) &= \int_{-\frac{h_c}{2}-h_p}^{\frac{h_c}{2}} (e_{31}^{pi}, e_{32}^{pi}) \frac{1}{h_p} f(z) dz \\
 (B_{12}^{spi}, D_{12}^{spi}, H_{12}^{spi}) &= \int_{-\frac{h_c}{2}-h_p}^{\frac{h_c}{2}} C_{12}^{pi} [f(z), zf(z), f^2(z)] dz \\
 (A_{10}^{vpi}, A_{13}^{vpi}) &= \int_{-\frac{h_c}{2}-h_p}^{\frac{h_c}{2}} (e_{31}^{pi}, e_{32}^{pi}) \frac{\pi}{h_p} f(z) \sin\left(\frac{\pi \tilde{z}}{h_p}\right) dz \\
 (B_{11}^{sps}, D_{11}^{sps}, H_{11}^{sps}) &= \int_{\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}+h_p} C_{11}^{ps} [f(z), zf(z), f^2(z)] dz \\
 (A_{10}^{ps}, A_{13}^{ps}) &= \int_{\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}+h_p} (e_{31}^{ps}, e_{32}^{ps}) \frac{1}{h_p} f(z) dz \\
 (B_{12}^{sps}, D_{12}^{sps}, H_{12}^{sps}) &= \int_{\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}+h_p} C_{12}^{ps} [f(z), zf(z), f^2(z)] dz \\
 (A_{10}^{vps}, A_{13}^{vps}) &= \int_{\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}+h_p} (e_{31}^{ps}, e_{32}^{ps}) \frac{\pi}{h_p} f(z) \sin\left(\frac{\pi \tilde{z}}{h_p}\right) dz \\
 (B_{22}^{sc}, D_{22}^{sc}, H_{22}^{sc}) &= \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} C_{22}^c [f(z), zf(z), f^2(z)] dz \\
 (B_{22}^{spi}, D_{22}^{spi}, H_{22}^{spi}) &= \int_{-\frac{h_c}{2}-h_p}^{\frac{h_c}{2}} C_{22}^{pi} [f(z), zf(z), f^2(z)] dz
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (B_{22}^{sps}, D_{22}^{sps}, H_{22}^{sps}) &= \int_{\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c+h_p}{2}} C_{22}^{ps} [f(z), zf(z), f^2(z)] dz \\
 (B_{66}^{sc}, D_{66}^{sc}, H_{66}^{sc}) &= \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} C_{66}^c [f(z), zf(z), f^2(z)] dz \\
 (B_{66}^{spi}, D_{66}^{spi}, H_{66}^{spi}) &= \int_{-\frac{h_c-h_p}{2}}^{\frac{h_c}{2}} C_{66}^{pi} [f(z), zf(z), f^2(z)] dz \\
 (B_{66}^{sps}, D_{66}^{sps}, H_{66}^{sps}) &= \int_{\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c+h_p}{2}} C_{66}^{ps} [f(z), zf(z), f^2(z)] dz \\
 (A_{44}^{sc}, A_{55}^{sc}) &= \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} (C_{44}^c, C_{55}^c) (g(z))^2 dz \\
 (A_{44}^{spi}, A_{55}^{spi}) &= \int_{\frac{h_c-h_p}{2}}^{\frac{h_c}{2}} (C_{44}^{pi}, C_{55}^{pi}) (g(z))^2 dz \\
 (A_{24}^{pi}, A_{15}^{pi}) &= \int_{-\frac{h_c-h_p}{2}}^{\frac{h_c}{2}} (e_{24}^{pi}, e_{15}^{pi}) (g(z)) \cos\left(\frac{\pi \tilde{z}}{h_p}\right) dz \\
 (A_{44}^{sps}, A_{55}^{sps}) &= \int_{\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c+h_p}{2}} (C_{44}^{ps}, C_{55}^{ps}) (g(z))^2 dz \\
 (A_{24}^{ps}, A_{15}^{ps}) &= \int_{\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c+h_p}{2}} (e_{24}^{ps}, e_{15}^{ps}) (g(z)) \cos\left(\frac{\pi \tilde{z}}{h_p}\right) dz
 \end{aligned} \tag{II.24}$$

### II.7 Solution exacte pour une plaque sandwich en FGM simplement appuyée

Les plaques rectangulaires sont généralement classées selon le type support utilisé. Pour notre cas on considère une plaque rectangulaire simplement appuyée avec la longueur  $a$  et la largeur  $b$  sous la charge transversale  $q$ . Pour résoudre ce problème, Navier a présenté les charges transversales mécaniques et de température et sous la forme d'une double série trigonométrique tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} u \\ v \\ (w_b, w_s, \psi) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} u_m \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \\ v_m \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \\ (w_{bm}, w_{sm}, \psi_m) \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \end{array} \right\} \tag{II.25}$$

Avec  $(u_m, v_m, w_{bm}, w_{sm}, \psi_m)$  sont des fonctions inconnues à déterminer. En considérant les

5 équations, on obtient les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \left[ \lambda^2 (A_{11}^c + A_{11}^{pi} + A_{11}^{ps}) + \mu^2 (A_{66}^c + A_{66}^{pi} + A_{66}^{ps}) \right] \\
 a_{12} &= \left[ \lambda \mu (A_{12}^c + A_{12}^{pi} + A_{12}^{ps} + A_{66}^c + A_{66}^{pi} + A_{66}^{ps}) \right] \\
 a_{13} &= - \left[ \lambda^3 (B_{11}^{bc} + B_{11}^{bpi} + B_{11}^{bps}) + \lambda \mu^2 (B_{12}^{bc} + B_{12}^{bpi} + B_{12}^{bps} + 2B_{66}^{bc} + 2B_{66}^{bpi} + 2B_{66}^{bps}) \right] \\
 a_{14} &= - \left[ \lambda^3 (B_{11}^{sc} + B_{11}^{spi} + B_{11}^{sps}) + \lambda \mu^2 (B_{12}^{bc} + B_{12}^{bpi} + B_{12}^{bps} + 2B_{66}^{bc} + 2B_{66}^{bpi} + 2B_{66}^{bps}) \right] \\
 a_{15} &= - \left[ \lambda (A_6^{vpi} + A_6^{vps}) \right] \\
 m_{11} &= I_0 \\
 m_{12} &= 0 \\
 m_{13} &= -I_1 \lambda \\
 m_{14} &= -J_1 \lambda \\
 m_{15} &= 0 \\
 F_{1e} &= 2\bar{\nu}_0 \left[ \lambda (A_6^{ps} + A_6^{pi}) \right] \\
 a_{21} &= \left[ \lambda \mu (A_{12}^c + A_{12}^{pi} + A_{12}^{ps} + A_{66}^c + A_{66}^{pi} + A_{66}^{ps}) \right] \\
 a_{22} &= \mu^2 (A_{22}^c + A_{22}^{pi} + A_{22}^{ps}) + \lambda^2 (A_{66}^c + A_{66}^{pi} + A_{66}^{ps}) \\
 a_{23} &= - \left[ \lambda^2 \mu (B_{12}^{bc} + B_{12}^{bpi} + B_{12}^{bps} + 2B_{66}^{bc} + 2B_{66}^{bpi} + 2B_{66}^{bps}) + \mu^3 (B_{22}^{bc} + B_{22}^{bpi} + B_{22}^{bps}) \right] \\
 a_{24} &= - \left[ \lambda^2 \mu (B_{12}^{bc} + B_{12}^{bpi} + B_{12}^{bps} + 2B_{66}^{bc} + 2B_{66}^{bpi} + 2B_{66}^{bps}) + \mu^3 (B_{22}^{sc} + B_{22}^{spi} + B_{22}^{sps}) \right] \\
 a_{25} &= - \left[ \mu (A_7^{vps} + A_7^{vpi}) \right] \\
 m_{21} &= 0 \\
 m_{22} &= I_0 \\
 m_{23} &= -I_1 \mu \\
 m_{24} &= -J_1 \mu \\
 m_{25} &= 0 \\
 F_{2e} &= 2\bar{\nu}_0 \left[ \mu (A_7^{ps} + A_7^{pi}) \right] \\
 a_{31} &= - \left[ \lambda^3 (B_{11}^{bc} + B_{11}^{bpi} + B_{11}^{bps}) + \lambda \mu^2 (B_{12}^{bc} + B_{12}^{bpi} + B_{12}^{bps} + 2B_{66}^{bc} + 2B_{66}^{bpi} + 2B_{66}^{bps}) \right] \\
 a_{32} &= - \left[ \lambda^2 \mu (B_{12}^{bc} + B_{12}^{bpi} + B_{12}^{bps} + 2B_{66}^{bc} + 2B_{66}^{bpi} + 2B_{66}^{bps}) + \mu^3 (B_{22}^{bc} + B_{22}^{bpi} + B_{22}^{bps}) \right] \\
 a_{33} &= \left[ \lambda^4 (D_{11}^{bc} + D_{11}^{bpi} + D_{11}^{bps}) + \lambda^2 \mu^2 (2D_{12}^{bc} + 2D_{12}^{bpi} + 2D_{12}^{bps} + 4D_{66}^{bc} + 4D_{66}^{bpi} + 4D_{66}^{bps}) + \mu^4 (D_{22}^{bc} + D_{22}^{bpi} + D_{22}^{bps}) \right] \\
 a_{34} &= \left[ \lambda^4 (D_{11}^{sc} + D_{11}^{spi} + D_{11}^{sps}) + \lambda^2 \mu^2 (2D_{12}^{sc} + 2D_{12}^{spi} + 2D_{12}^{sps} + 4D_{66}^{sc} + 4D_{66}^{spi} + 4D_{66}^{sps}) + \mu^4 (D_{22}^{sc} + D_{22}^{spi} + D_{22}^{sps}) \right] \\
 a_{35} &= \left[ \lambda^2 (A_8^{vpi} + A_8^{vps}) + \mu^2 (A_9^{vpi} + A_9^{vps}) \right] \\
 m_{31} &= -I_1 \lambda \\
 m_{32} &= -I_1 \mu \\
 m_{33} &= \left[ I_0 + I_2 \lambda^2 + I_2 \mu^2 \right] \\
 m_{34} &= \left[ I_0 + J_2 \lambda^2 + J_2 \mu^2 \right] \\
 m_{35} &= 0 \\
 F_{3e} &= -2\bar{\nu}_0 \left[ \lambda^2 (A_8^{vpi} + A_8^{vps}) + \mu^2 (A_9^{vpi} + A_9^{vps}) \right] \\
 F_{3m} &= q_0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{41} &= -\left[ (B_{11}^{sc} + B_{11}^{spi} + B_{11}^{sps})\lambda^3 + (B_{12}^{sc} + B_{12}^{spi} + B_{12}^{sps} + 2B_{66}^{sc} + 2B_{66}^{spi} + 2B_{66}^{sps})\lambda\mu^2 \right] \\
 a_{42} &= -\left[ (B_{12}^{sc} + B_{12}^{spi} + B_{12}^{sps} + 2B_{66}^{sc} + 2B_{66}^{spi} + 2B_{66}^{sps})\lambda^2\mu + (B_{22}^{sc} + B_{22}^{spi} + B_{22}^{sps})\mu^3 \right] \\
 a_{43} &= \left[ (D_{11}^{sc} + D_{11}^{spi} + D_{11}^{sps})\lambda^4 + (2D_{12}^{sc} + 2D_{12}^{spi} + 2D_{12}^{sps} + 4D_{66}^{sc} + 4D_{66}^{spi} + 4D_{66}^{sps})\lambda^2\mu^2 \right. \\
 &\quad \left. + (D_{22}^{sc} + D_{22}^{spi} + D_{22}^{sps})\mu^4 \right] \\
 a_{44} &= \left[ (H_{11}^{sc} + H_{11}^{spi} + H_{11}^{sps})\lambda^4 + (2H_{12}^{sc} + 2H_{12}^{spi} + 2H_{12}^{sps} + 4H_{66}^{sc} + 4H_{66}^{spi} + 4H_{66}^{sps})\lambda^2\mu^2 \right. \\
 &\quad \left. + (H_{22}^{sc} + H_{22}^{spi} + H_{22}^{sps})\mu^4 + (A_{44}^{sc} + A_{44}^{spi} + A_{44}^{sps})\mu^2 + (A_{55}^{sc} + A_{55}^{spi} + A_{55}^{sps})\lambda^2 \right] \\
 a_{45} &= \left[ (A_{10}^{wpi} + A_{10}^{wps} - A_{15}^{pi} - A_{15}^{ps})\lambda^2 + (A_{13}^{wpi} + A_{13}^{wps} - A_{24}^{pi} - A_{24}^{ps})\mu^2 \right] \\
 m_{41} &= -J_1\lambda \\
 m_{42} &= -J_1\mu \\
 m_{43} &= [I_0 + J_2\lambda^2 + J_2\mu^2] \\
 m_{44} &= [I_0 + K_2\lambda^2 + K_2\mu^2] \\
 m_{45} &= 0 \\
 F_{4e} &= -2\bar{\psi}_0 [(A_{10}^{wpi} + A_{10}^{wps})\lambda^2 + (A_{13}^{wpi} + A_{13}^{wps})\mu^2] \\
 F_{4m} &= q_0 \\
 a_{51} &= -\lambda(D_{31}^{epi} + D_{31}^{eps}) \\
 a_{52} &= -\mu(D_{32}^{epi} + D_{32}^{eps}) \\
 a_{53} &= [\lambda^2(D_{31}^{ebpi} + D_{31}^{ebps}) + \mu^2(D_{32}^{ebpi} + D_{32}^{ebps})] \\
 a_{54} &= [-\lambda^2(D_{15}^{epi} + D_{15}^{eps}) - \mu^2(D_{24}^{epi} + D_{24}^{eps}) + \lambda^2(D_{31}^{espi} + D_{31}^{esps}) + \mu^2(D_{32}^{espi} + D_{32}^{esps})] \\
 a_{55} &= -[\lambda^2(D_{11}^{epi} + D_{11}^{eps}) + \mu^2(D_{22}^{epi} + D_{22}^{eps}) + (D_{33}^{wepi} + D_{33}^{weps})] \\
 F_{5e} &= (D_{33}^{epi} + D_{33}^{eps})
 \end{aligned} \tag{II.26}$$

## II.8 Résultats et discussions

### II.8.1 Comparaison et vérification

Pour vérification, une comparaison est présentée au tableau 2 avec les résultats de Zenkour [38] après élimination des deux couches de surface piézoélectriques. Les propriétés des matériaux sont introduites. De plus, les paramètres sans dimensions suivants sont considérés :

$$\begin{aligned}
 \bar{U} &= \frac{100h^3 E_c}{a^4 q_0} u_1 \left( 0, \frac{b}{2}, \bar{z} \right), \bar{V} = \frac{100h^3 E_c}{a^4 q_0} u_2 \left( \frac{a}{2}, 0, \bar{z} \right), \bar{W} = \frac{10h^3 E_c}{a^4 q_0} u_3 \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \bar{z} \right), \\
 \bar{\sigma}_x &= \frac{h}{aq_0} \sigma_x \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \bar{z} \right), \bar{\sigma}_y = \frac{h}{aq_0} \sigma_y \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \bar{z} \right), \bar{\tau}_{xy} = \frac{h}{aq_0} \tau_{xy} (0, 0, \bar{z}), \\
 \bar{\tau}_{yz} &= \frac{h}{aq_0} \tau_{yz} \left( \frac{a}{2}, 0, \bar{z} \right), \bar{\tau}_{xz} = \frac{h}{aq_0} \tau_{xz} \left( 0, \frac{a}{2}, \bar{z} \right), \bar{z} = \frac{z}{h}.
 \end{aligned} \tag{II.27}$$

Les propriétés mécaniques et électriques sont montrées sur le tableau suivant :

$c_{11}^p, c_{22}^p, c_{12}^p, c_{66}^p, c_{44}^p, c_{55}^p$ (GPa)	166, 166, 77, 44.5, 43, 43
$e_{31}, e_{32}, e_{15}, e_{24}$ (C/m <sup>2</sup> )	-4.4, -4.4, 11.6, 11.6
$\eta_{11}, \eta_{22}, \eta_{33}$ (F/m)	$11.2 \times 10^{-9}, 11.2 \times 10^{-9}, 12.6 \times 10^{-9}$

Tableau N°1. Les propriétés mécaniques et électriques.

Afin de valider notre modèle, nous avons comparé les résultats de Zenkour, avec le notre en utilisant plusieurs fonction de cisaillement, à savoir, la fonction de Zaoui et al.[39], Reddy [40], Taratier [41], et Karama [42]. Les tableaux regroupent les variations des déplacements et des contraintes dans différentes positions de l'épaisseur de la plaque (1, 2,4 et 10 mm).

Épaisseur	1mm	2mm	4mm	10mm	céramique	métal
$u\left(-\frac{1}{4}\right)$	0.6413691399	0.8983517548	1.05206815	1.076615986	0.2183075495	1.185098127
$v\left(-\frac{1}{6}\right)$	0.4943757100	0.7101461256	0.8341920605	0.8329367160	0.1450597492	0.7874672106
$w(0)$	0.5889531626	0.757295553	0.8814780408	1.008701233	0.2960568148	1.607165567
$\bar{\sigma}_x\left(\frac{1}{2}\right)$	3.085006801	3.606693720	4.065504257	5.084888852	1.994322048	1.994322049
$\bar{\sigma}_y\left(\frac{1}{3}\right)$	1.489803985	1.396035017	1.179362371	0.8784989180	1.312363802	1.312363803
$\bar{\tau}_{yz}\left(\frac{1}{6}\right)$	0.2607604366	0.2736770996	0.2536952392	0.2014315560	0.2120642106	0.2120642105
$\bar{\tau}_{xz}(0)$	0.2385722368	0.2185666542	0.1943715282	0.2113585809	0.2385722369	0.2385722368
$\bar{\tau}_{xy}\left(-\frac{1}{3}\right)$	0.6111127182	0.5442162427	0.5669366505	0.5895857250	0.7066574320	0.7066574321

**Tableau 2.** Comparaison et validation du modèle analytique.

• Fonction de Zaoui

$$f(z) = \frac{\pi h}{\pi^4 + h^4} e^{hz/\pi} \left( \pi^2 \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) + h^2 \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right) - \frac{\pi h^3}{\pi^4 + h^4}$$

Epaisseur	1	2	4	10	céramique	métal
$\bar{u}\left(-\frac{1}{4}\right)$	0.6452513589	0.9047818985	1.060226871	1.089598264	0.2207035343	1.918104900
$\bar{v}\left(-\frac{1}{6}\right)$	0.4981540414	0.7162512715	0.8435418953	0.844886761	0.1473846418	0.8000880561
$\bar{w}(0)$	0.5642690311	0.7237035577	0.8332537415	0.9431428470	0.281580590	1.528580347
$\bar{\sigma}_x\left(\frac{1}{2}\right)$	3.045506254	3.554231371	3.993675380	4.995487043	1.970877246	1.970877247
$\bar{\sigma}_y\left(\frac{1}{3}\right)$	1.499072681	1.408802041	1.196563325	0.8950265209	1.318993241	1.318993241
$\bar{\tau}_{yz}\left(\frac{1}{6}\right)$	0.00706245002	0.00789311341	0.00779045753	0.00654056913	0.00615923247	0.00615923247
$\bar{\tau}_{xz}(0)$	0	0	0	$1.016166280 \cdot 10^{-4}$	0	0
$\bar{\tau}_{xy}\left(-\frac{1}{3}\right)$	0.6127206764	0.5462398068	0.5699083050	0.5933328840	0.7098424408	0.7098424409

**Tableau 3.** Déplacements et contraintes adimensionnelles.

- Fonction de Reddy

$$f(z) = z \left( 1 - \frac{4}{3} \frac{z^2}{h^2} \right)$$

Épaisseur	1	2	4	10	céramique	métal
$u\left(-\frac{1}{4}\right)$	0.6451885047	0.9046590881	1.059887039	1.088977886	0.2205690185	1.197374656
$v\left(-\frac{1}{6}\right)$	0.4979322671	0.7158951770	0.8428562701	0.8437183663	0.1471656647	0.7988993229
$w(0)$	0.5639436217	0.7232304962	0.8323936986	0.9416619442	0.2812485340	1.5256777757
$\bar{\sigma}_x\left(\frac{1}{2}\right)$	3.045826758	3.554613836	3.954398423	4.997629993	1.97423338	1.971123339
$\bar{\sigma}_y\left(\frac{1}{3}\right)$	1.498580671	1.408236854	1.195853170	0.8942770468	1.318378282	1.318378283
$\bar{\tau}_{yz}\left(\frac{1}{6}\right)$	0.008148763641	0.009202807238	0.00895350942	0.00732590442	0.00662700658	0.00662700656
$\bar{\tau}_{xz}(0)$	-1.276022557 .10 <sup>-16</sup>	2.952365915 .10 <sup>-16</sup>	9.540979118 .10 <sup>-17</sup>	-9.381215672 .10 <sup>-18</sup>	3.330669074 .10 <sup>-16</sup>	-1.332267630 .10 <sup>-16</sup>
$\bar{\tau}_{xy}\left(-\frac{1}{3}\right)$	0.6128639429	0.5463585535	0.5934214336	0.5933328840	0.7098959984	0.7098959985

**Tableau 4.** Déplacements et contraintes adimensionnelles.

- Fonction de Touratier

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin \frac{\pi z}{h}$$

Épaisseur	1	2	4	10	céramique	métal
$u\left(-\frac{1}{4}\right)$	0.6454208997655	0.905069373132	1.06055806438	1.08983455845	0.22070661786	1.19812164051
$v\left(-\frac{1}{6}\right)$	0.4981724583	0.7163051054	0.8434130223	0.8445455367	0.1473078239	0.7996710446
$w(0)$	0.5645461376	0.7241920183	0.8339597330	0.9438821689	0.2816052869	1.520714415
$\bar{\sigma}_x\left(\frac{1}{2}\right)$	3.043931579	3.551939491	3.990548513	4.993017047	1.970001192	1.97001193
$\bar{\sigma}_y\left(\frac{1}{3}\right)$	1.4989854883623	1.408861953594	1.19679166217	0.89519120687	1.31865569504	1.31865569565
$\bar{\tau}_{yz}\left(\frac{1}{6}\right)$	0.0118392917952	0.013412639488	0.01363215442	0.01068980939	0.00962833971	0.00962833971
$\bar{\tau}_{xz}(0)$	9.534365485 .10 <sup>-12</sup>	9.429000547 .10 <sup>-12</sup>	8.858870668 .10 <sup>-12</sup>	9.872697561 .10 <sup>-12</sup>	9.534051326 .10 <sup>-12</sup>	9.534295595 .10 <sup>-12</sup>
$\bar{\tau}_{xy}\left(-\frac{1}{3}\right)$	0.6129447166410	0.546472259797	0.57018181418	0.59363434558	0.71004537440	0.71004537450

**Tableau 5.** Déplacements et contraintes adimensionnelles.

- Fonction de Karama

$$f(z) = ze^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}$$

Épaisseur	1	2	4	10	céramique	métal
$\overline{u}\left(-\frac{1}{4}\right)$	0.6456986645593	0.905561674472	1.06136966991	1.09685665448	0.22087108385	1.19901445592
$\overline{v}\left(-\frac{1}{6}\right)$	0.4984692998075	0.718611618000	0.84433054559	0.84556972984	0.14748342555	0.80062431062
$w(0)$	0.5633081232	0.7254095729	0.8359549269	0.9466845302	0.2820564625	1.531163655
$\overline{\sigma}_x\left(\frac{1}{2}\right)$	3.0417589732945	3.548870491477	3.98641497622	4.98776936409	1.96871478112	1.96871478209
$\overline{\sigma}_y\left(\frac{1}{3}\right)$	1.4994295296047	1.409559341317	1.19786234229	0.89623378955	1.31895998722	1.31895998787
$\overline{\tau}_{yz}\left(\frac{1}{6}\right)$	0.0167962450272	0.019088614816	0.01881936380	0.01522688326	0.01365959685	0.01361959685
$\overline{\tau}_{xz}(0)$	-1.801443610 .10 <sup>-16</sup>	-3.936487887 .10 <sup>-17</sup>	-2.504507018 .10 <sup>-16</sup>	2.626740388 .10 <sup>-16</sup>	1.998401444 .10 <sup>-16</sup>	0
$\overline{\tau}_{xy}\left(-\frac{1}{3}\right)$	0.6130333168246	0.546600833571	0.57038432471	0.59387333039	0.71020922405	0.71020922415

**Tableau 6.** Déplacements et contraintes adimensionnelles

Les tableaux 2-6 présentent les résultats des flèches et des contraintes adimensionnelles des plaques sandwich fonctionnellement graduées carrées pour des différentes hauteurs «  $h$  » et diverses valeurs d'indice matériel «  $k$  ». Les résultats actuels sont comparés avec des solutions basées sur une théorie sinusoidale raffinée proposée par Zenkour et al. [38]. A partir de ces tableaux, on peut constater que les résultats actuels sont inférieurs à la solution donnée par Zenkour et al. [38] sans tenir en compte de l'effet de l'étirement de l'épaisseur de la plaque. La Figure II.2 montre l'influence du rapport d'aspect géométrique de la plaque  $a/h$  sur la flèche maximale adimensionnelle pour une plaque sandwich fonctionnellement graduée avec un indice matériel  $k = 2$  et un rapport géométrique  $a/b=2$ . Les influences des charges mécaniques et électriques sont considérées dans cet exemple. A partir de la figure II.2, on peut remarquer que l'influence du rapport d'aspect géométrique est plus importante sur la flèche maximale adimensionnelle  $w$  de la plaque sandwich en FGM lorsque les rapports géométriques sont réduits, c'est-à-dire pour les dimensions faibles de la plaque sandwich.

$$K = 2 ; \frac{a}{b} = 2$$

$\bar{w}$	$\bar{\psi}_0 = 0$	$\bar{\psi}_0 = -100$	$\bar{\psi}_0 = 100$	$\bar{\psi}_0 = -200$	$\bar{\psi}_0 = 200$
$\frac{a}{h} = 2.5$	-0.0113	-20.0549	20.0322	-40.0984	40.0758
$\frac{a}{h} = 5$	-0.0032	-1.6050	1.5989	-3.2074	3.2011
$\frac{a}{h} = 7.5$	-0.00148	-0.4271	0.4242	-0.8528	0.8499
$\frac{a}{h} = 10$	-0.00082	-0.1996	0.1980	-0.3984	0.3968
$\frac{a}{h} = 12.5$	-0.00053	-0.1249	0.1239	-0.2493	0.2482
$\frac{a}{h} = 15$	-0.00037	-0.0912	0.0904	-0.1819	0.1812
$\frac{a}{h} = 17.5$	-0.00028	-0.0724	0.0719	-0.1446	0.1440
$\frac{a}{h} = 20$	-0.00020	-0.0605	0.0601	-0.1209	0.1204

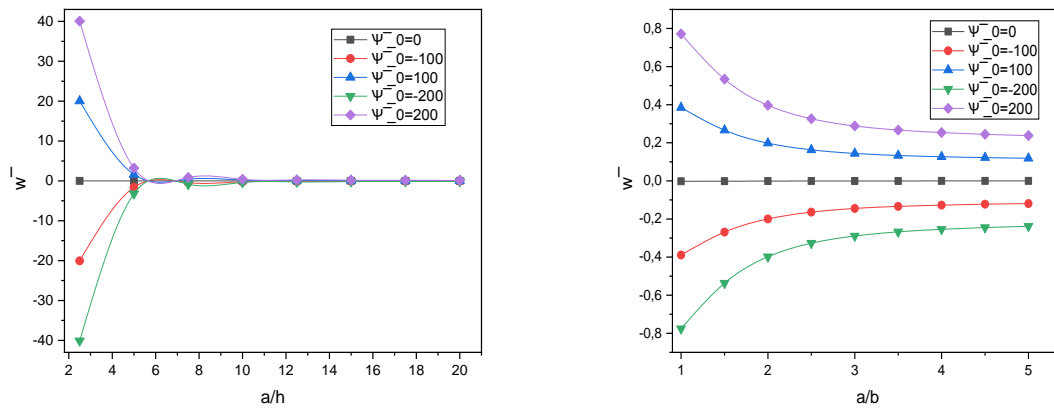
**Tableau 7.** Influence de la charge électrique sur les déplacements adimensionnels

$$K = 2 ; \frac{a}{h} = 10$$

$\bar{w}$	$\bar{\psi}_0 = 0$	$\bar{\psi}_0 = -100$	$\bar{\psi}_0 = 100$	$\bar{\psi}_0 = -200$	$\bar{\psi}_0 = 200$
$\frac{a}{b} = 1$	-0.0021	-0.3890	0.3849	-0.7760	0.7718
$\frac{a}{b} = 1.5$	-0.0013	-0.2690	0.2665	-0.5368	0.5343
$\frac{a}{b} = 2$	-0.00083	-0.1996	0.1980	-0.3984	0.3968
$\frac{a}{b} = 2.5$	-0.00057	-0.1639	0.1628	-0.3272	0.3261
$\frac{a}{b} = 3$	-0.00041	-0.1449	0.1440	-0.2893	0.2885
$\frac{a}{b} = 3.5$	-0.00031	-0.1340	0.1333	-0.2676	0.2670
$\frac{a}{b} = 4$	-0.00024	-0.1272	0.1267	-0.2541	0.2536
$\frac{a}{b} = 4.5$	-0.00019	-0.1224	0.1221	-0.2450	0.2446
$\frac{a}{b} = 5$	-0.00015	-0.1192	0.1189	-0.2382	0.2379

**Tableau 8.** Influence de la charge électrique sur les déplacements adimensionnels

Les valeurs dans les tableaux indiquent que lorsque de tension appliquée diminue, elle produit la réduction des déplacements.



**Figure II.2.** Influence des charges mécaniques et électriques sur la flèche maximale adimensionnelle.

$$K = 2 ; \frac{a}{b} = 2$$

$\bar{\Psi}$	$\bar{\psi}_0 = 0$	$\bar{\psi}_0 = -100$	$\bar{\psi}_0 = 100$	$\bar{\psi}_0 = -200$	$\bar{\psi}_0 = 200$
$\frac{a}{h} = 2.5$	-8.4407	-4920.6419	4903.7604	-9832.8431	9815.9616
$\frac{a}{h} = 5$	-14.028	-274.3965	-302.4534	562.8214	-590.8783
$\frac{a}{h} = 7.5$	-20.1798	3107.5091	-3147.8687	6235.1980	-6275.5576
$\frac{a}{h} = 10$	-26.5507	6411.9730	-6465.0744	12850.4968	-12903.5982
$\frac{a}{h} = 12.5$	-33.0426	10472.9578	-10539.0429	20978.9581	-21045.0433
$\frac{a}{h} = 15$	-39.6192	15352.7246	-15431.9629	30745.0683	-30824.3067
$\frac{a}{h} = 17.5$	-46.2642	21069.5897	-21162.1181	42185.4437	-42277.9721
$\frac{a}{h} = 20$	-52.9692	27628.8988	-27734.8371	55310.7668	-55416.7051

**Tableau 9.** Influence de la charge électrique sur les déplacements adimensionnels

$$K = 2 \quad ; \quad \frac{a}{h} = 10$$

$\bar{\Psi}$	$\bar{\psi}_0 = 0$	$\bar{\psi}_0 = -100$	$\bar{\psi}_0 = 100$	$\bar{\psi}_0 = -200$	$\bar{\psi}_0 = 200$
$\frac{a}{b} = 1$	-65.7012	20728.8909	-20860.2933	41523.4829	-41654.8854
$\frac{a}{b} = 1.5$	-40.6098	11642.0735	-11723.2932	23324.7568	-23405.9765
$\frac{a}{b} = 2$	-26.5507	6411.9730	-6465.0744	12850.4968	-12903.5982
$\frac{a}{b} = 2.5$	-18.4618	3670.9649	-3707.8885	7360.3917	-7397.3152
$\frac{a}{b} = 3$	-13.5275	2174.0392	-2201.0942	4361.6059	-4388.6609
$\frac{a}{b} = 3.5$	-10.3459	1297.0378	-1317.7195	2604.4163	-2625.0981
$\frac{a}{b} = 4$	-8.1795	742.5468	-758.9059	1493.2733	-1509.6323
$\frac{a}{b} = 4.5$	-6.6521	364.0530	-377.3572	734.7582	-748.0624
$\frac{a}{b} = 5$	-5.5351	85.7171	-96.7873	176.9693	-188.0396

Tableau N°10. Influence de la charge électrique sur les déplacements adimensionnels

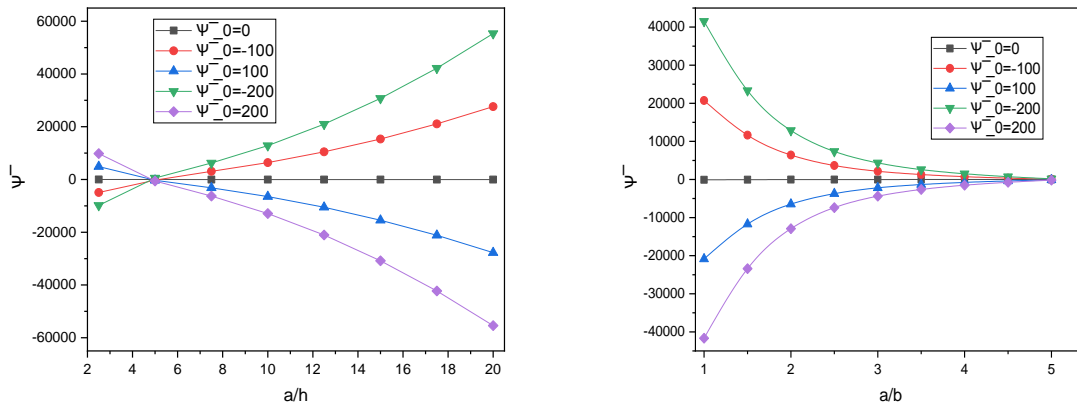


Figure II.3. Influence des charges mécaniques et dimensions géométriques sur la charge électrique adimensionnelle.

Fig. II.3 (a) montre l'évolution du potentielle électrique en fonction du rapport géométrique  $a/h$ . Il est à observer que le potentiel électrique augmente avec l'augmentation de la tension appliquée et du rapport géométrique, alors qu'il diminue avec l'augmentation du rapport géométrique et la réduction de la tension appliquée. Un comportement inverse est constaté en fonction du rapport géométrique  $a/b$ , comme le montre la Figure II.3 (b). Le déplacement électrique augmente avec l'augmentation de l'exposant de fraction volumique, tandis qu'il augmente avec l'augmentation du rapport latéral sur l'épaisseur et diminue avec la tension appliquée.

## II.9 Conclusions

Sur la base de la théorie des plaques de déformation par cisaillement à quatre inconnues, l'analyse de flexion est introduite pour la plaque composée d'une couche FG et de deux faces piézoélectriques situées aux parties supérieure et inférieure de la couche FGM. Le principe d'Hamilton est utilisé pour obtenir les équations d'équilibre. Les équations d'équilibre de la plaque sont résolues en appliquant des séries doubles de Fourier. La plaque est dans des conditions de bord simplement supporté où les charges mécaniques et électriques sont appliquées sur la surface supérieure de la plaque étudiée. L'influence de la tension appliquée, de l'anisotropie du matériau, du rapport latéral sur l'épaisseur, des rapports géométriques et du paramètre d'inhomogénéité est illustrée. La vérification de la théorie actuelle est établie par comparaison avec les résultats de Zenkour [38].

- Les résultats pour la plaque FG sans deux faces piézoélectriques sont comparés à ceux correspondants dans la littérature et les résultats obtenus montrent un très bon accord.
- Les couches de face piézoélectriques jouent un rôle important sur la plaque.
- Les résultats indiquent qu'avec l'augmentation de la tension appliquée, le déplacement transversal, et les déplacements dans le plan sont réduits.
- Le potentiel électrique augmente avec l'augmentation de la tension appliquée.

## References bibliographiques

- [1] Siboni, G., Benveniste, Y., .A micro-mechanics model for the effective thermomechanical behavior of multiphase composite media. *Mechanics of Materials* 11, 1991, 107– 122.
- [2] B. Bary, M.Ben Haha, E.Adam, and P.Montarnal. Numerical and analytical effective elastic properties of degraded cement pastes. *Cem.Concr.Res*, 39(10):902–912, 2009.
- [3] A.H. Akbarzadeh, A. Abedini, Z.T. Chen, Effect of micromechanical models on structural responses of functionally graded plates, *Compos. Struct.* 119 (2015) 598–609.
- [4] J.N. Reddy, Analysis of functionally graded plates. *Int. J. Num. Meth. Eng.* 47 (2000) 663-684.
- [5] T. Mori, K. Tanaka. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metall.* 21 (1973) 571-574.
- [6] [Benven1987] Y. Benveniste. A new approach to the application of Mori-Tanaka's theory in composite materials. *Mech. Mat.*6 (1987) 147-157.
- [7] J. Yang, K.M. Liew, S. Kitipornchai, Second-order statistics of the elastic buckling of functionally graded rectangular plates, *Compos. Sci. Technol.* 65 (2005) 65–1175.
- [8] S. Kitipornchai, J. Yang, K.M. Liew. Random vibration of the functionally graded laminates in thermal environments. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* 195 (2006) 1075-1095.
- [9] Ootao Y, Tanigawa Y. Three-dimensional transient thermal stresses of functionally graded rectangular plate due to partial heating. *J Therm Stresses*; 22(1):35–55, 1999.
- [10] Reddy, J.N. and Cheng, Z.Q. “Three-dimensional thermo mechanical deformations of functionally graded rectangular plates”, *Euro. J. Mech. A Solids*, 20(5), 841-855.2001.
- [11] Vel SS, Batra RC. Exact solution for thermoelastic deformations of functionally graded thick rectangular plates. *AIAA J*; 40(7):1421–33, 2002.
- [12] Vel SS, Batra RC. Three-dimensional analysis of transient thermal stresses in functionally graded plates. *Int J Solids Struct*; 40(25):7181–96, 2003.
- [13] Alibeigloo A. Exact solution for thermo-elastic response of functionally graded rectangular plates. *Compos Struct* 2010;92(1):113–21, 2010.
- [14] Kashtalyan M. Three-dimensional elasticity solution for bending of functionally graded rectangular plates. *Eur J Mech A Solids*; 23(5):853–64, 2004.
- [15] Zhong Z, Shang E. Closed-form solutions of three-dimensional functionally graded plates. *Mech Adv Mater Struct*; 15(5):355–63, 2008.
- [16] Xu Y, Zhou D. Three-dimensional elasticity solution of functionally graded rectangular plates with variable thickness. *Compos Struct*; 91(1):56–65, 2009.
- [17] Woodward B, Kashtalyan M. Three-dimensional elasticity solution for bending of transversely isotropic functionally graded plates. *Eur J Mech A Solids*; 30(5):705–18, 2011.
- [18] Wen PH, Sladek J, Sladek V. Three-dimensional analysis of functionally graded plates. *Int J Numer Methods Eng*; 87(10):923–42, 2011.
- [19] Abali BE, Völlmecke C, Woodward B, Kashtalyan M, Guz I, Müller WH. Threedimensional elastic deformation of functionally graded isotropic plates under point loading. *Compos Struct*; 118:367–76, 2014.
- [20] Vel, S.S. et Batra, R.C., "Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates", *Journal of Sound and Vibration*, 703-730, 2004.
- [21] Uymaz B, Aydogdu M. Three-dimensional vibration analyses of functionally graded plates under various boundary conditions. *J Reinf Plast Compos* ; 26(18):1847–63, 2007.
- [22] Li Q, Iu VP, Kou KP. Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material sandwich plates. *J Sound Vib*; 311(1–2):498–51, 2008.

- [23] Yas MH, Tahouneh V. 3-D Free vibration analysis of thick functionally graded annular plates on Pasternak elastic foundation via differential quadrature method (DQM). *Acta Mech*; 223(1):43–62, 2012.
- [24] Amini MH, Soleimani M, Rastgoo A. Three-dimensional free vibration analysis of functionally graded material plates resting on an elastic foundation. *Smart Mater Struct*; 18(8):085015, 2009.
- [25] Lu CF, Lim CW, Chen WQ. Exact solutions for free vibrations of functionally graded thick plates on elastic foundations. *Mech Adv Mater Struct*; 16(8):576–84, 2009.
- [26] Malekzadeh P. Three-dimensional free vibration analysis of thick functionally graded plates on elastic foundations. *Compos Struct*; 89(3):367–73, 2009.
- [27] Malekzadeh P, Shahpari S, Ziaee H. Three-dimensional free vibration of thick functionally graded annular plates in thermal environment. *J Sound Vib*; 329(4):425–42., 2010.
- [28] Reddy K, Kant T. Three-dimensional elasticity solution for free vibrations of exponentially graded plates. *J Eng Mech*; 140(7):04014047, 2014.
- [29] Na KS, Kim JH. Three-dimensional thermal buckling analysis of functionally graded materials. *Compos B Eng* ; 35(5):429–37, 2004.
- [30] Reddy, J.N., "A review of Refined Theories of Laminated Composite Plates", 22(7), 1990.
- [31] Mallikarjuna, M. et Kant, T., "A critical Review and Some Results of Recently Developed Refined Theories of Fiber-Reinforced Laminated Composites and Sandwiches ", 23(4), 1993.
- [32] Reissner, E., "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates", *Journal of Applied Mechanics-transactions of The ASME*, 69–77, 1945.
- [33] Mindlin RD. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates. *J Appl Mech*, 18(1):31–8, 1951.
- [34] Reddy, J.N. et Phan, N.D., "Analysis of laminated composite plates using a higher order shear deformation theory", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2201–2219, 1985.
- [35] Thai HT, Kim SE. Analytical solution of a two-variable refined plate theory for bending analysis of orthotropic Levy-type plates. *Int J Mech Sci* 2012;54:269–76.
- [36] Hill, R., "A self-consistent mechanics of composite materials", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 213-222, 1955.
- [37] G. Bao., L. Wang, Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings, *Int. J; Solids Structures*; 32 (19): 2853–2871, 1995.
- [38] A.M. Zenkour, R.A. Alghanmi. Stress analysis of a functionally graded plate integrated with piezoelectric faces via a four-unknown shear deformation theory. *Results in Physics* 12 (2019) 268–277.
- [39] Zaoui FZ, Ouinas D, Tounsi A, New 2D and quasi-3D shear deformation theories for free vibration of functionally graded plates on elastic foundations, *composites part B* (2018).
- [40] Reddy JN. A simple higher-order theory for laminated composite plates. *J Appl Mech* 1984; 51:745e52.
- [41] Touratier M. An efficient standard plate theory. *Int J Eng Sci* 1991; 29(8):901e16.
- [42] Karama M, Afaq KS, Mistou S. A new theory for laminated composite plates. *J Mater Des Appl* 2009; 223(2):53-62.