

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DELA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS - MOSTAGANEM

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES
Pour l'Obtention du Diplôme de Master en
Mathématiques
Option : Analyse Fonctionnelle

THEME :
Etude d'un problème aux limites non locales de type
Bitsadze-Samarskii
dans les espaces de Banach UMD

présenté par :

« Amara Mohamed Hicham »

Président : « M. BELAIDI Benharrat »

Examineur : « M. HAOUA Rabah »

Encadreur : « M. MEDEGHRI Ahmed »

Année Universitaire :2016-2017

Table des matières

Introduction	4
1 Rappels	7
1.1 Opérateurs linéaires fermés	7
1.2 Les semi-groupes	8
1.2.1 Semi-groupes différentiables	9
1.2.2 Semi-groupes analytiques	9
1.2.3 Semi-groupes analytiques généralisés	10
1.3 Les espaces d'interpolation	10
1.4 Puissances fractionnaires d'opérateurs	11
1.4.1 Intégrale de Dunford-Riesz	11
1.4.2 Pour les opérateurs non borné	12
1.4.3 Puissances fractionnaires avec parties réelles positives	12
1.4.4 Puissances fractionnaires avec parties réelles quelconques	13
1.5 La théorie des sommes d'opérateurs	13
1.5.1 Approche de Dore et Venni	13
1.6 Résultats d'analyse complexe	16
1.6.1 Théorème de Cauchy	16
1.6.2 Théorème des résidus	16
2 Position du problème et résolution	17
2.1 Position du problème	17
2.2 Hypothèses	17
2.3 Représentation de la solution	18
2.3.1 Solution globale	18
2.3.2 Solution finale	19
3 Inversibilité du déterminant	25
4 Régularité de la solution	31
4.1 Lemmes techniques	31
4.2 Régularité de la solution	36
4.2.1 Réécriture de l'expression de $u(x)$	37
4.2.2 Résultat	39
5 Application	42

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	3
6 Conclusion	43
Bibliographie	44

Introduction

Les problèmes elliptiques sont des cas particuliers des problèmes qui modélisent la majorité des phénomènes physiques, d'où l'importance de notre problème, qui est écrit sous une forme abstraite en un problème aux limites non locales de type Bitsadze-Samarskii :

$$\begin{cases} -u''(x) + Au(x) = f(x) & \text{pp : } (0 < x < 1) \\ u(0) = \varphi \\ u(1) = u(\lambda) + \psi & (0 \leq \lambda < 1) \end{cases}$$

A est un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A) \subset X$ qui est un espace de Banach.

$f \in L^p(0, 1; X); \varphi, \psi \in X$.

Parmis les travaux faits sur ce problème, on cite celui de Allaberen Ashyralyev[1] qui s'est intéressé à la notion de problème bien posé dans les espaces de Hölder, en vérifiant l'inégalité de coercitivité.

Dans ce mémoire, on étudie l'existence, l'unicité et la régularité de la solution de ce problème en utilisant : les semi-groupes, les domaines fractionnaires des opérateurs, les espaces d'interpolation et la théorie des sommes d'opérateurs en s'inspirant du travail de "Hammou Houari"[5] qui est fait dans un cadre général (conditions non locales opérationnelles).

Ce mémoire est constitué de quatre chapitres :

Le premier chapitre est consacré à un ensemble de rappels sur les outils mathématiques qu'on utilise dans ce travail : les notions d'opérateurs linéaires fermés, les semi-groupes, les espaces d'interpolation et les puissances fractionnaires d'opérateurs.

Au deuxième chapitre, on pose notre problème en supposant les hypothèses ci-dessous sur l'espace où on travaille, et surtout sur l'opérateur A . De plus, en utilisant la méthode de Krein et les conditions de notre problème, on obtient des représentations de $u(x)$ et de $u(1)$, sachant que $u(x)$ dépend de $u(1)$.

Hypothèses :

Hypothèse d'ellipticité

$$\rho(A) \supset]-\infty, 0]$$

$$\exists C > 0 : \|(A + \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C}{1 + \lambda} \text{ avec } \lambda \geq 0$$

Hypothèse BIP

$$\forall s \in \mathbb{R} : A^{is} \in \mathcal{L}(X) \text{ et } \exists C > 1, \theta_A \in]0, \pi[: \|A^{is}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C e^{\theta_A |s|}$$

Hypothèse UMD

X est un espace UMD.

Le troisième chapitre est consacré à la démonstration de l'existence de l'inverse du déterminant de la solution du problème étudié en s'inspirant de la preuve faite par "Lunardi [8]" qui assure l'inversibilité de l'opérateur $I - e^{TQ}$, $\forall T > 0$ (Q un générateur infinitésimal du semi-groupe analytique : $(e^{TQ})_{T \geq 0}$), et pour cela on utilise des résultats d'analyse complexe qu'on cite au chapitre "Rappels".

Dans le quatrième chapitre, on étudie la régularité de la solution à l'aide des lemmes techniques suivants qu'on démontre au début de ce chapitre. Les preuves sont basées sur le théorème de Dore et Venni, appliqué aux problèmes de Cauchy.

Théorème 0.1 *Soit X un espace de Banach. On considère le problème de Cauchy :*

$$(P_c) : \begin{cases} u'(t) + Au(t) = f(t), & t \in [0, T] \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

où : $f \in L^p(0, T; X)$ et $A : D(A) \longrightarrow X$ un opérateur linéaire fermé de domaine dense et tel que :

$$\exists C > 0 : \|(A + \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C}{1 + \lambda}, \forall \lambda \geq 0$$

Et $\xi \longmapsto A^{i\xi}$ est un groupe fortement continu dans $\mathcal{L}(X)$ vérifiant :

$$\exists C > 0 : \|A^{i\xi}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C e^{\theta_A |\xi|} \text{ et } 0 \leq \theta_A < \frac{\pi}{2}$$

Après l'écriture de (P_c) sous forme abstraite $Bu + Au = f$, et en appliquant l'approche de Dore et Venni, on obtient le résultat suivant :

Si X est UMD et l'opérateur A vérifiant les hypothèses précédentes, alors

$\forall f \in L^p(0, T; X), 1 < p < \infty$: le problème de Cauchy (P_c) admet une unique solution u telle que :

$$t \longmapsto u(t) = \int_0^t e^{(t-s)A} f(s) ds \in W^{1,p}(0, T; X) \cap L^p(0, T; D(A))$$

Lemme 0.1 *Soit*

$$f \in L^p(0, 1; X); 1 < p < +\infty.$$

Sous les hypothèses (ellipticité), (BIP) et (UMD) on a

$$1. x \longmapsto F(x, f) = B \int_0^x e^{-(x-s)B} f(s) ds \in L^p(0, 1; X)$$

$$2. x \longmapsto K(x, f) = B \int_x^1 e^{-(s-x)B} f(s) ds \in L^p(0, 1; X)$$

$$3. x \longmapsto T(x, f) = B \int_0^1 e^{-(x+s)B} f(s) ds \in L^p(0, 1; X)$$

Lemme 0.2 *Soit $p \in]1, +\infty[$ et supposons l'hypothèse d'ellipticité , alors :*

$$1. Ae^{-\cdot B} \varphi \in L^p(0, 1; X) \text{ si et seulement si } \varphi \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}$$

$$2. Be^{-\cdot B} \varphi \in L^p(0, 1; X) \text{ si et seulement si } \varphi \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{p}, p}$$

Lemme 0.3 *Si on pose $\Lambda = I - e^{-2B}$, alors il existe un opérateur $W \in \mathcal{L}(X)$ tel que :*

$$\Lambda^{-1} = I - W \text{ et } W(X) \subset \bigcap_{k=1}^{+\infty} D(B^k)$$

Le dernier chapitre est une illustration de ce qu'on a traité dans les chapitres précédents, à travers un exemple concret auquel on applique les résultats obtenus.

Chapitre 1

Rappels

Dans ce chapitre, on donne les outils essentiels utilisés dans ce travail.

1.1 Opérateurs linéaires fermés

On note par X un espace de Banach.

On rappelle que A est un opérateur linéaire sur un espace de Banach X si et seulement si c'est une application linéaire définie sur un sous-espace vectoriel de X (appelé domaine de définition de A , noté $D(A)$) à valeur dans X .

De plus ;

1. A est dit borné si :

$$D(A) = X$$

et

$$\exists C > 0 : \forall \xi \in X : \|A\xi\|_X \leq C\|\xi\|_X$$

et on écrit :

$$A \in \mathcal{L}(X)$$

2. A est dit fermé si et seulement si ;

pour toute suite $(x_n)_n \subset D(A)$ telle que : $\begin{cases} x_n \longrightarrow x \\ Ax_n \longrightarrow y \end{cases}$ on a : $\begin{cases} x \in D(A) \\ Ax = y \end{cases}$

3. A est dit fermable si et seulement si ;

pour toute suite $(x_n)_n \subset D(A)$ telle que : $\begin{cases} x_n \longrightarrow 0 \\ Ax_n \longrightarrow y \end{cases}$ on a : $y = 0$

les convergences des suites $(x_n)_n$ et $(Ax_n)_n$ sont au sens de la norme de l'espace X .

Définition 1.1 Soient X un espace de Banach et $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ un opérateur linéaire borné sur X , on appelle :

.spectre de A , l'ensemble :

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda I) \text{ est non inversible}\}$$

.ensemble résolvant de A , l'ensemble :

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda I) \text{ est inversible dans } \mathcal{L}(X)\}$$

c'est le complémentaire de $\sigma(A)$ dans $\mathbb{C}$.

.résolvante de l'opérateur A , l'opérateur $(A - \lambda I)^{-1}$ pour $\lambda \in \rho(A)$.

1.2 Les semi-groupes

Définition 1.2 Soit X un espace de Banach. On dit que la famille $(G(t))_{t \geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés sur X forme un semi-groupe si :

1. $G(0) = I_X$
2. $\forall t, s \geq 0 : G(t + s) = G(t)G(s)$.

Définition 1.3 On dit qu'un semi-groupe $(G(t))_{t \geq 0}$ est fortement continu si et seulement si pour tout $x \in X$,

l'application $\begin{matrix} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow X \\ t \longmapsto G(t)x \end{matrix}$ est continue, c'est à dire :

$$\forall x \in X : \lim_{t \rightarrow 0^+} \|G(t)x - x\|_X = 0$$

et on dit que $(G(t))_{t \geq 0}$ est un C_0 -semi-groupe.

Définition 1.4 On appelle générateur infinitésimal du semi-groupe $(G(t))_{t \geq 0}$, l'opérateur Λ défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} D(\Lambda) = \left\{ x \in X : \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{G(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\} \\ \forall x \in D(\Lambda) : \Lambda x = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{G(t)x - x}{t} \end{array} \right.$$

Proposition 1.1 Si Λ est un générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe $(G(t))_{t \geq 0}$ alors,

1. Λ est linéaire fermé de domaine $D(\Lambda)$ dense dans X .
2. $\forall x \in X$, la fonction $t \mapsto G(t)x$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
3. Si $x \in D(\Lambda)$ et $t \geq 0$ alors $G(t)x \in D(\Lambda)$.

4. La fonction $t \mapsto G(t)x$ est continuellement dérivable sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si

$$x \in D(\Lambda)$$

et on a

$$x \in D(\Lambda) \implies \forall t \geq 0, \frac{d}{dt} G(t)x = \Lambda G(t)x = G(t)\Lambda x$$

5. $\forall x \in X, \forall t \geq 0$ on a :

$$\int_0^t G(s)x ds \in D(\Lambda) \text{ et } \Lambda \int_0^t G(s)x ds = G(t)x - x.$$

Et si de plus $x \in D(\Lambda)$ alors

$$\Lambda \int_0^t G(s)x ds = \int_0^t G(s)\Lambda x ds = G(t)x - x.$$

6. Si Λ est un générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe $(S(t))_{t \geq 0}$ alors

$$\forall t \geq 0 \text{ on a : } S(t) = G(t)$$

1.2.1 Semi-groupes différentiables

Définition 1.5 On dit qu'un C_0 -semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ est différentiable, si pour tout x de X , la fonction $t \mapsto T(t)x$ est différentiable de $]0, +\infty[$ dans X .

1.2.2 Semi-groupes analytiques

Définition 1.6 Soit X un espace de Banach complexe

Soit

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : \varphi_1 < \arg z < \varphi_2, \varphi_1 < 0 < \varphi_2\}$$

Soit $\{G(z)\}_{z \in \Delta}$ une famille d'opérateurs linéaires bornés sur X . On dit que $\{G(z)\}_{z \in \Delta}$ forme un semi-groupe holomorphe si elle vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} i) G(z_1 + z_2) = G(z_1)G(z_2) \forall z_1, z_2 \in \Delta \\ ii) G(0) = I_X \\ iii) \lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \in \Delta}} G(z)x = x, \forall x \in X \\ iv) l'application : z \in \Delta \setminus \{0\} \longrightarrow G(z)x \in X \text{ est holomorphe } \forall x \in X \end{array} \right.$$

Théorème 1.1 (de Kato) Soit $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ un opérateur linéaire non borné vérifiant :

- 1) A fermé
- 2) $D(A)$ dense
- 3)

$$\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{C}^* / \operatorname{Re} \lambda \geq 0\}$$

et $\exists L > 0 / \forall \lambda \in \rho(A)$ on ait

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{L}{|\lambda|}$$

Alors A est générateur infinitésimal d'un semi-groupe tel que :

1) $\exists M > 0 / \forall t > 0 :$

$$\|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M$$

2) $\forall t > 0 :$

$$G(t) \in \mathcal{L}(X, D(A))$$

et

$$\|AG(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{t}$$

(AG est presque L^1 mais pas L^1).

1.2.3 Semi-groupes analytiques généralisés

On suppose que $Q : D(Q) \subset X \longrightarrow X$ est un opérateur linéaire dans l'espace de Banach X vérifiant la propriété suivante :

$$\exists \phi \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[\text{ et } M > 0 : \begin{cases} \rho(Q) \supset S_\phi = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| \leq \phi\} \\ \|(\lambda I - Q)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{\lambda} \end{cases}$$

où $\rho(Q)$ est l'ensemble résolvant de Q . Si $\overline{D(Q)} \neq X$ Alors «Sinestrari [9]» a prouvé qu'on peut définir un semi-groupe analytique généralisé $(e^{xQ})_{x \geq 0}$ qui a plusieurs propriétés comme le semi-groupe holomorphe usuel.

1.3 Les espaces d'interpolation

Soit $(E_0; \|\cdot\|_0)$ et $(E_1; \|\cdot\|_1)$ deux espaces de Banach qui s'injectent continuellement dans un espace topologique séparé ξ .

Définition 1.7 Soit X un espace de Banach. On désigne par $L_*^p(\mathbb{R}_+, X)$ avec $p \in [1, +\infty[$, l'espace de Banach des fonctions fortement mesurables définies pour presque tout $t \in \mathbb{R}_+$, et telles que :

$$\left(\int_0^{+\infty} \|f(t)\|_X^p \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{L_*^p(\mathbb{R}_+, X)} < +\infty.$$

Si $p = +\infty$, alors on définit l'espace $L_*^\infty(\mathbb{R}_+, X)$ par :

$$f \in L_*^\infty(\mathbb{R}_+, X) \iff \begin{cases} f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow X \text{ est fortement mesurable} \\ \sup_{0 < t < +\infty} \text{ess } \|f(t)\|_X < +\infty \end{cases}$$

Définition 1.8 Pour $p \in [1, +\infty[$ et $\theta \in]0, 1[$, on dit que $x \in (E_0, E_1)_{\theta, p}$ si et seulement si

$$\begin{cases} i) \forall t > 0 : \exists u_0(t) \in E_0, u_1(t) \in E_1 : x = u_0(t) + u_1(t) \\ ii) t^{-\theta} u_0 \in L_*^p(\mathbb{R}_+, E_0); t^{1-\theta} u_1 \in L_*^p(\mathbb{R}_+, E_1) \end{cases}$$

Proposition 1.2 Les espaces : $(E_0 \cap E_1; \|\cdot\|_{E_0 \cap E_1})$, $(E_0 + E_1; \|\cdot\|_{E_0 + E_1})$ et $((E_0, E_1)_{\theta, p}; \|\cdot\|_{\theta, p})$ où :

$$\begin{cases} \cdot \|x\|_{E_0 \cap E_1} = \|x\|_{E_0} + \|x\|_{E_1} \text{ si } x \in E_0 \cap E_1 \\ \cdot \|x\|_{E_0 + E_1} = \inf_{\substack{x_i \in E_i : x_0 + x_1 = x \\ i=0,1}} (\|x\|_{E_0} + \|x\|_{E_1}) \\ \cdot \|x\|_{\theta, p} = \inf_{\substack{u_i : \mathbb{R}_+ \longrightarrow E_i, i=0,1 \\ \forall t > 0 : u_0(t) + u_1(t) = x}} (\|t^{-\theta} u_0\|_{L_*^p(\mathbb{R}_+, E_0)} + \|t^{1-\theta} u_1\|_{L_*^p(\mathbb{R}_+, E_1)}) \text{ si } x \in (E_0, E_1)_{\theta, p}. \end{cases}$$

sont de Banach.

De plus

$$E_0 \cap E_1 \subset (E_0, E_1)_{\theta, p} \subset E_0 + E_1$$

où : " $\subset$ " désigne l'injection continue.

Et on a

$$(E_0, E_1)_{\theta, p} = (E_1, E_0)_{1-\theta, p}$$

Définition 1.9 Soit A un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A) \subset X$ muni de la norme :

$$\forall x \in D(A) : \|x\|_{D(A)} = \|x\|_X + \|Ax\|_X$$

On définit $D_A(\theta, p) = (D(A), X)_{1-\theta, p}$ pour $p \in [1, +\infty]$ et $0 < \theta < 1$.

Théorème 1.2 (Triebel) [10] Soit $\{G(x)\}_{x \geq 0}$ un semi-groupe analytique et soit C son générateur infinitésimal.

soient m un nombre naturel, $0 < \theta < 1$ et $p \in [1, +\infty]$. Alors :

$$(D(C^m), X)_{1-\theta, p} = \{\phi : \phi \in X \text{ et } \|\phi\|^{**} = \|x^{(1-\theta)m} C^m G(x) \phi\|_{L^p_*(X)} + \|\phi\|_X < +\infty\}$$

et $\|\phi\|^{**}$ est une norme équivalente à la norme $\|\phi\|_{(D(C^m), X)_{1-\theta, p}}$

Définition 1.10 Soit X un espace de Banach tel que $E_0 \cap E_1 \subset X \hookrightarrow \xi$. On dit que X est de classe $K_\theta(E_0, E_1)$ (on note $X \in K_\theta(E_0, E_1)$) si et seulement si

$$(E_0, E_1)_{\theta, 1} \subset X \subset (E_0, E_1)_{\theta, +\infty}$$

Théorème 1.3 (Lions-Peetre [7])

Soient X_0, X_1 deux espaces de Banach tels que :

$X_0 \in K_{\alpha_0}(E_0, E_1)$ et $X_1 \in K_{\alpha_1}(E_0, E_1)$ avec $0 \leq \alpha_0 < \theta < \alpha_1 \leq 1$ alors ;

$$(E_0, E_1)_{\theta, p} = (X_0, X_1)_{\frac{\theta - \alpha_0}{\alpha_1 - \alpha_0}, p}$$

1.4 Puissances fractionnaires d'opérateurs

1.4.1 Intégrale de Dunford-Riesz

Le calcul fonctionnel classique de Dunford-Riesz s'appuie sur la formule de Cauchy pour construire $f(Q)$ où Q est un opérateur linéaire borné et f est holomorphe.

Plus précisément si $Q \in \mathcal{L}(X)$ (où X est un espace de Banach complexe) on pose $\mathcal{H}(Q)$ l'ensemble de toutes les fonctions f holomorphes sur un voisinage ouvert U de $\sigma(Q)$ (le spectre de Q). Alors, pour $f \in \mathcal{H}(Q)$, on définit l'intégrale de Dunford-Riesz par

$$f(Q) = \int_{\Gamma} f(\lambda)(\lambda I - Q)^{-1} d\lambda,$$

où Γ est le bord positivement orienté d'un compact à bord K avec

$$\sigma(Q) \subset \overset{\circ}{K} \subset U$$

1.4.2 Pour les opérateurs non borné

Soit A un opérateur linéaire fermé vérifiant les hypothèses suivantes : il existe $\theta \in]0, \pi[$ et $M \geq 0$ tels que

$$\sigma(Q) \subset \overline{S_\theta} = \{z \in \mathbb{C}^* / |\arg(z)| < \theta\}$$

et

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{S_\theta}, \|(A - \lambda I)^{-1}\| \leq \frac{M}{|\lambda|}$$

(on dira que A est un opérateur sectoriel). Il s'agit de vivre la formule

$$f(A) = \int_{\Gamma} f(\lambda)(\lambda I - A)^{-1} d\lambda,$$

où

. Γ est une courbe sectorielle entourant $\sigma(A)$ dans le sens positif.

. f est une fonction holomorphe au voisinage de $\sigma(A)$ (qui peut être non borné) et vérifiant certaines propriétés assurant la convergence de l'intégrale.

On s'intéresse aux cas tels que $f(A)$ est borné.

Théorème 1.4 *Si A un opérateur linéaire fermé à domaine dense dans X tel que :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists C > 0 : \rho(A) \supset \mathbb{R}_+ \\ \text{et pour } \lambda \geq 0 : \|(A - \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C}{1 + \lambda} \end{array} \right.$$

alors, pour $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $-(-A)^\alpha$ génère un semi-groupe $G_\alpha(t)$ fortement continu pour $t \geq 0$. (voir Balakrishnan [2])

1.4.3 Puissances fractionnaires avec parties réelles positives

On considère ici $A \in S_\phi = \{z \in \mathbb{C}^* : |\arg z| < \phi\}$ pour $\phi \in]0, \pi[$, et on note que dans la formule $A^\alpha = (z^\alpha)(A)$, la quantité z^α désigne la détermination principale de la fonction "puissance α " caractérisée par :

$$z^\alpha = e^{\alpha(\ln r + i\theta)}, \text{ pour } z = re^{i\theta}; r > 0, \theta \in]-\pi, \pi[.$$

Proposition 1.3 *Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que $\operatorname{Re} \alpha, \operatorname{Re} \beta > 0$, alors :*

1) A^α est un opérateur fermé de X .

2)

$$A^{\alpha+\beta} = A^\alpha A^\beta$$

3)

$$\operatorname{Re} \beta > \operatorname{Re} \alpha \implies D(A^\beta) \subset D(A^\alpha)$$

(en particulier, si $\operatorname{Re} \alpha < 1$, alors $D(A) \subset D(A^\alpha)$).

4) Si A est injectif alors A^α l'est aussi, et $(A^\alpha)^{-1} = (A^{-1})^\alpha$.

5) Si $0 \in \rho(A)$ alors $0 \in \rho(A^\alpha)$. De plus

$$(A^{-1})^\alpha = A^{-\alpha} \in \mathcal{L}(X)$$

6)

$$A \in \mathcal{L}(X) \implies A^\alpha \in \mathcal{L}(X)$$

1.4.4 Puissances fractionnaires avec parties réelles quelconques

Proposition 1.4 Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et on suppose que A est injectif, alors :

- 1) A^α est un opérateur fermé dans X .
- 2) A^α est injectif et $(A^\alpha)^{-1} = A^{-\alpha} = (A^{-1})^\alpha$
- 3) $A^{\alpha+\beta} \subset A^\alpha A^\beta$

1.5 La théorie des sommes d'opérateurs

Soient A et B deux opérateurs linéaires fermés dans X de domaines $D(A)$ et $D(B)$ respectivement. On s'intéresse à l'équation

$$Au + Bu - \lambda u = g$$

où g est un vecteur donné de X . l'opérateur somme $L = A + B$ est défini par :

$$\begin{cases} D(L) = D(A) \cap D(B) \\ Lu = Au + Bu : u \in D(L) \end{cases}$$

Donc l'équation s'écrit :

$$Lu - \lambda u = g$$

Une solution stricte de cette équation est un élément $u \in D(L)$ qui la satisfait. Donc, il faut trouver une telle solution lorsque g est quelconque dans X , mais ce n'est pas toujours possible.

1.5.1 Approche de Dore et Venni

Définition 1.11 Un espace de Banach X possède la propriété UMD (unconditional martingal differences) si et seulement si $\exists p \in]1, +\infty[$ et $C(p) > 0$ tels que :

$$\left\| \sum_{k=1}^n \xi_k d_k \right\|_{L^p(\mathbb{R}, X)} \leq C(p) \left\| \sum_{k=1}^n d_k \right\|_{L^p(\mathbb{R}, X)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

pour toute martingale $(d_k)_{k=0, \dots, n}$ et pour toute suite $(\xi_k)_k \in [-1, 1]^n$.

Nous donnons ici une définition équivalente plus adaptée à notre propos, qui utilise la transformée de Hilbert.

Transformée de Hilbert :

Soient $\varepsilon \in]0, 1[$ et $p \in]1, +\infty[$; pour toute fonction $f \in L^p(\mathbb{R}, X)$, on définit l'opérateur H_ε par :

$$(H_\varepsilon f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon < |s| < \frac{1}{\varepsilon}} \frac{f(x-s)}{s} ds$$

Si pour un élément $f \in L^p(\mathbb{R}, X)$ donné, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} H_\varepsilon f$ existe dans $L^p(\mathbb{R}, X)$ alors cette limite est notée Hf et est appelée : la transformation de Hilbert.

Théorème 1.5 Soient X un espace de Banach et $p \in]1, +\infty[$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- . X est UMD.
- . $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} H_\varepsilon f$ existe dans $L^p(\mathbb{R}, X) \forall f \in L^p(\mathbb{R}, X)$.

Remarque 1.1 On peut aussi avoir une caractérisation géométrique des espaces UMD, c'est la notion de ξ -convexité qui a comme intérêt : la notion espace UMD ne dépend pas de p . (Voir Burkholder [3])

Exemple 1.1 . Tout espace de Hilbert est UMD.

- . Tout espace isomorphe à un UMD est UMD.
- . Tout sous espace fermé d'un UMD est UMD.
- . L'interpolé des espaces UMD est UMD.
- . Si $p \in]1, +\infty[$ et X est un UMD, alors $L^p([0, 1]; X)$ est UMD.
- . **contre exemple :** C et C^α ne sont pas UMD.

Théorème de Dore-Venni

Les hypothèses sur A et B :

On suppose que les opérateurs A et B vérifient :

$$\begin{aligned}
 (DV1) : & \begin{cases} \cdot \rho(A) \supset]-\infty, 0] \text{ et } \exists M_A > 0 : \forall \lambda \geq 0 : \|(A + \lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M_A}{1 + \lambda} \\ \cdot \rho(B) \supset]-\infty, 0] \text{ et } \exists M_B > 0 : \forall \lambda \geq 0 : \|(B + \lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M_B}{1 + \lambda} \\ \cdot \overline{D(A)} = \overline{D(B)} = X \end{cases} \\
 (DV2) : & \{ \forall \lambda \in \rho(-A), \forall \mu \in \rho(-B) : (A + \lambda)^{-1}(B + \mu)^{-1} = (B + \mu)^{-1}(A + \lambda)^{-1} \\
 (DV3) : & \begin{cases} \cdot \forall s \in \mathbb{R} : A^{is} \in \mathcal{L}(X) \text{ et } \exists K > 0, \theta_A > 0 : \|A^{is}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq K e^{|s|\theta_A} \\ \cdot \forall s \in \mathbb{R} : B^{is} \in \mathcal{L}(X) \text{ et } \exists K > 0, \theta_B > 0 : \|B^{is}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq K e^{|s|\theta_B} \\ \cdot \theta_A + \theta_B < \pi \end{cases}
 \end{aligned}$$

On note par $BIP(X, \theta)$ (Bounded imaginary powers) l'ensemble des opérateurs sectoriels sur X vérifiant (DV1) et (DV3). On a alors le théorème de Dore et Venni suivant :

Théorème 1.6 Si X est un espace UMD et sous les hypothèses (DV1), (DV2) et (DV3), alors l'opérateur $L = A + B$ est fermé et inversible et $L^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. De plus L^{-1} est défini par l'intégrale

$$L^{-1} = \frac{1}{i\pi} \int_{\gamma} \frac{A^{-z} B^{z-1}}{\sin \pi z} dz$$

où γ est une courbe verticale contenue dans la bande :

$$\{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$$

et orientée de $\infty e^{-i\frac{\pi}{2}}$ vers $\infty e^{i\frac{\pi}{2}}$.

Application du théorème de Dore-Venni au problèmes de Cauchy

Soit X un espace UMD. On considère le problème de Cauchy :

$$(P_c) : \begin{cases} u'(t) + Au(t) = f(t), & t \in [0, T] \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

où : $f \in L^p(0, T; X)$ et $A : D(A) \longrightarrow X$ un opérateur linéaire fermé de domaine dense et tel que :

$$\exists C > 0 : \|(A + \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C}{1 + \lambda}, \forall \lambda \geq 0$$

Et $\xi \longmapsto A^{i\xi}$ est un groupe fortement continu dans $\mathcal{L}(X)$ vérifiant :

$$\exists C > 0 : \|A^{i\xi}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C e^{\theta_A |\xi|} \text{ et } 0 \leq \theta_A < \frac{\pi}{2}$$

On écrit le problème sous la forme somme d'opérateurs :

on définit alors les opérateurs A et B comme suit :

$$\begin{cases} D(A) \subset L^p(0, T; X) \\ (Au)(\cdot) = Au(\cdot), u \in D(A) \end{cases}$$

$$\begin{cases} D(B) = \{u \in W^{1,p}(0, T; X) : u(0) = 0\} \\ Bu = u', u \in D(B) \end{cases}$$

et donc notre équation devient :

$$Bu + Au = f.$$

Dans ce cas, on a :

X est UMD, ce qui implique que $L^p(0, T; X)$ est UMD.

L'opérateur linéaire fermé B satisfait :

$$\begin{cases} \rho(B) \supset]-\infty, 0] \text{ et } \forall \lambda \leq 0 : \exists C_0 > 0 : \|(\lambda I - B)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C_0}{1 + |\lambda|} \\ \xi \longmapsto B^{is} \text{ est un groupe fortement continu tel que :} \\ \forall s \in \mathbb{R} : B^{is} \in \mathcal{L}(X) \text{ et } \exists C_1 > 0, : \|B^{is}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C_1(1 + s^2)e^{\frac{\pi}{2}|s|} \end{cases}$$

A et B vérifient (DV2)

On utilise donc l'approche de Dore et Venni, et on aura le résultat final suivant :

Si X est UMD et l'opérateur A comme on a défini ci-dessus, alors $\forall f \in L^p(0, T; X), 1 < p < \infty$: le problème de Cauchy (P_c) admet une unique solution :

$$u \in W^{1,p}(0, T; X) \cap L^p(0, T; D(A))$$

donc

$$t \longmapsto Au(t) = A \int_0^t e^{(t-s)A} f(s) ds \in L^p(0, T; X)$$

1.6 Résultats d'analyse complexe

1.6.1 Théorème de Cauchy

Théorème 1.7 *Soit f une fonction analytique dans un domaine D simplement connexe, alors l'intégrale sur tout lacet de Jordan dans D est nulle.*

1.6.2 Théorème des résidus

Théorème 1.8 *Soient U un sous-ensemble ouvert et simplement connexe du plan complexe $\mathbb{C}$, $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ un ensemble de points de U , et f une fonction définie et holomorphe sur $U \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$.*

Si γ est un lacet de Jordan dans U qui ne contient pas les points singuliers $z_k, k = 1 \dots n$ alors

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n n(\gamma, z_k) \text{Res}(f, z_k)$$

*où $\text{Res}(f, z_k)$ désigne le résidu de f en z_k
et*

$$n(\gamma, z_k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_k}$$

Chapitre 2

Position du problème et résolution

2.1 Position du problème

Considérons le problème abstrait suivant dans un espace de Banach X :

$$(P) : \begin{cases} -u''(x) + Au(x) = f(x) & \text{pp : } (0 < x < 1) \\ u(0) = \varphi \\ u(1) = u(\lambda) + \psi & (0 \leq \lambda < 1) \end{cases}$$

avec :

- .A un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A)$ et $f \in L^p(0, 1; X)$.
- . φ et $\psi \in X$

2.2 Hypothèses

Hypothèse d'ellipticité

$$\begin{cases} \cdot \rho(A) \supset]-\infty, 0] \\ \cdot \exists C > 0 : \|(A + \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C}{1 + \lambda}, \forall \lambda \geq 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

Hypothèse "BIP"

$$\forall s \in \mathbb{R} : A^{is} \in \mathcal{L}(X) \text{ et } \exists C > 1, \theta_A \in]0, \pi[: \|A^{is}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C e^{\theta_A |s|} \quad (2.2)$$

Hypothèse UMD

$$X \text{ est un espace } UMD \quad (2.3)$$

2.3 Représentation de la solution

Pour trouver la représentation, on utilise la méthode de Krein, et pour cela on a besoin de la remarque suivante :

Remarque 2.1 .D'après l'hypothèse d'ellipticité, l'opérateur $B = A^{\frac{1}{2}}$ existe.

.L'opérateur $(-B)$ génère un semi-groupe analytique généralisé (la densité de $D(B)$ dans X n'est pas nécessaire) noté $(e^{-xB})_{x \geq 0}$ (voir Balakrishnan[2]) et (Sinestrari [9]).

2.3.1 Solution globale

C'est une expression générale de la solution qui dépend des vecteurs ξ_0 et ξ_1 .

On a :

$$(P) : \begin{cases} -u''(x) + Au(x) = f(x) \\ u(0) = \varphi \\ u(1) = u(\lambda) + \psi \end{cases}$$

$$\stackrel{A=B^2}{\Longleftrightarrow} (P') : \begin{cases} u''(x) - B^2u(x) = -f(x) \\ u(0) = \varphi \\ u(1) = u(\lambda) + \psi \end{cases}$$

On pose alors :

$$\begin{cases} v(x) = B^{-1}u'(x) \\ y(x) = (u(x) - v(x))/2 \\ z(x) = (u(x) + v(x))/2 \end{cases}$$

donc :

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{1}{2}u'(x) - \frac{1}{2}v'(x) \\ &= \frac{1}{2}Bv(x) - \frac{1}{2}B^{-1}u''(x) \\ &= -By(x) + \frac{1}{2}B^{-1}f \end{aligned}$$

et

$$y(0) = \xi_0 = (u(0) - B^{-1}u'(0))/2$$

Alors on obtient

$$(P_1) : \begin{cases} y'(x) + By(x) = \frac{1}{2}B^{-1}f \\ y(0) = \xi_0 = (u(0) - B^{-1}u'(0))/2 \end{cases}$$

.De même que $y'(x)$, on obtient :

$$(P_2) : \begin{cases} z'(x) - By(x) = -\frac{1}{2}B^{-1}f \\ z(1) = \xi_1 = (u(1) + B^{-1}u'(1))/2 \end{cases}$$

.La solution du problème (P) est la somme des deux solutions de ces problèmes du premier ordre (P_1) et (P_2) qui sont respectivement :

$$y(x) = \frac{1}{2}B^{-1} \int_0^x e^{-(x-s)B} f(s) ds + e^{-xB} \xi_0$$

et

$$z(x) = \frac{1}{2}B^{-1} \int_x^1 e^{-(s-x)B} f(s) ds + e^{-(1-x)B} \xi_1$$

Donc

$$\begin{aligned} u(x) &= y(x) + z(x) \\ &= e^{-xB} \xi_0 + e^{-(1-x)B} \xi_1 + I_x + J_x \end{aligned}$$

avec :

$$I_x = \frac{1}{2}B^{-1} \int_0^x e^{-(x-s)B} f(s) ds \text{ et } J_x = \frac{1}{2}B^{-1} \int_x^1 e^{-(s-x)B} f(s) ds.$$

2.3.2 Solution finale

C'est à dire on détermine ξ_0 et ξ_1 et on les remplace par leurs expressions.

Expression de $u(x)$

Pour trouver la solution exacte, il reste à calculer ξ_0 et ξ_1 , donc on a besoin de supposer l'inversibilité de $\Lambda = I - e^{-2B}$, $I - e^{-(1-\lambda)B}$ et $I + e^{-(1+\lambda)B}$ et on fait la démonstration dans le chapitre suivant.

Trouvons maintenant ξ_0 et ξ_1 :

On a :

$$u(x) = I_x + J_x + e^{-xB} \xi_0 + e^{-(1-x)B} \xi_1$$

En utilisant les conditions de notre problème :

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} u(0) = \varphi \\ u(1) = u(\lambda) + \psi \end{cases} \\
& \iff \begin{cases} J_0 + \xi_0 + e^{-B}\xi_1 = u(0) = \varphi \\ I_1 + e^{-B}\xi_0 + \xi_1 = u(1) = u(\lambda) + \psi \end{cases} \\
& \iff \begin{cases} \xi_0 + e^{-B}\xi_1 = \varphi - J_0 \\ e^{-B}\xi_0 + \xi_1 = u(1) - I_1 \end{cases} \\
& \iff \begin{cases} e^{-B}\xi_0 + e^{-2B}\xi_1 = e^{-B}(\varphi - J_0) \\ e^{-B}\xi_0 + \xi_1 = u(1) - I_1 \end{cases} \\
& \implies (I - e^{-2B})\xi_1 = u(1) - I_1 - e^{-B}\varphi + e^{-B}J_0
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= (I - e^{-2B})^{-1} [u(1) - I_1 - e^{-B}\varphi + e^{-B}J_0] \\
&= \Lambda^{-1} \left[u(1) - \frac{1}{2}B^{-1} \int_0^1 e^{-(1-s)B} f(s) ds - e^{-B}\varphi + e^{-B} \frac{1}{2}B^{-1} \int_0^1 e^{-sB} f(s) ds \right] \\
&= \Lambda^{-1} u(1) - \Lambda^{-1} \frac{1}{2}B^{-1} \int_0^1 e^{-(1-s)B} f(s) ds - \Lambda^{-1} e^{-B}\varphi + \Lambda^{-1} \frac{1}{2}B^{-1} \int_0^1 e^{-(1+s)B} f(s) ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\xi_0 &= \varphi - J_0 - e^{-B}\xi_1 \\
&= \varphi - \frac{1}{2}B^{-1} \int_0^1 e^{-sB} f(s) ds - \Lambda^{-1} e^{-B} u(1) \\
&\quad + \Lambda^{-1} e^{-B} \frac{1}{2}B^{-1} \int_0^1 e^{-(1-s)B} f(s) ds + \Lambda^{-1} e^{-2B}\varphi - \Lambda^{-1} e^{-B} \frac{1}{2}B^{-1} \int_0^1 e^{-(1+s)B} f(s) ds
\end{aligned}$$

En remplaçant dans l'expression de u , on obtient :

$$\begin{aligned}
u(x) &= \frac{1}{2}B^{-1} \int_0^x e^{-(x-s)B} f(s) ds + \frac{1}{2}B^{-1} \int_x^1 e^{-(s-x)B} f(s) ds \\
&\quad + e^{-xB} \left[\varphi - \frac{1}{2}B^{-1} \int_0^1 e^{-sB} f(s) ds - \Lambda^{-1} e^{-B} u(1) \right. \\
&\quad \left. + \Lambda^{-1} e^{-B} \frac{1}{2}B^{-1} \int_0^1 e^{-(1-s)B} f(s) ds + \Lambda^{-1} e^{-2B} \varphi - \Lambda^{-1} e^{-B} \frac{1}{2}B^{-1} \int_0^1 e^{-(1+s)B} f(s) ds \right] \\
&\quad + e^{-(1-x)B} \left[\Lambda^{-1} u(1) - \Lambda^{-1} \frac{1}{2}B^{-1} \int_0^1 e^{-(1-s)B} f(s) ds - \Lambda^{-1} e^{-B} \varphi + \Lambda^{-1} \frac{1}{2}B^{-1} \int_0^1 e^{-(1+s)B} f(s) ds \right] \\
&= \frac{1}{2}B^{-1} \int_0^x e^{-(x-s)B} f(s) ds + \frac{1}{2}B^{-1} \int_x^1 e^{-(s-x)B} f(s) ds + e^{-xB} \varphi - \frac{1}{2}B^{-1} \int_0^1 e^{-(x+s)B} f(s) ds \\
&\quad - \Lambda^{-1} e^{-(1+x)B} u(1) + \Lambda^{-1} e^{-(1+x)B} \frac{1}{2}B^{-1} \int_0^1 e^{-(1-s)B} f(s) ds + \Lambda^{-1} e^{-(2+x)B} \varphi \\
&\quad - \Lambda^{-1} e^{-(1+x)B} \frac{1}{2}B^{-1} \int_0^1 e^{-(1+s)B} f(s) ds + \Lambda^{-1} e^{-(1-x)B} u(1) \\
&\quad - \Lambda^{-1} e^{-(1-x)B} \frac{1}{2}B^{-1} \int_0^1 e^{-(1-s)B} f(s) ds \\
&\quad - \Lambda^{-1} e^{-(2-x)B} \varphi + \Lambda^{-1} e^{-(1-x)B} \frac{1}{2}B^{-1} \int_0^1 e^{-(1+s)B} f(s) ds \\
&= \Lambda^{-1} [\Lambda e^{-xB} + e^{-(2+x)B} - e^{-(2-x)B}] \varphi + \Lambda^{-1} [e^{-(1-x)B} - e^{-(1+x)B}] u(1) \\
&\quad + \frac{1}{2}B^{-1} \int_0^x e^{-(x-s)B} f(s) ds + \frac{1}{2}B^{-1} \int_x^1 e^{-(s-x)B} f(s) ds - \frac{1}{2}B^{-1} \int_0^1 e^{-(x+s)B} f(s) ds \\
&\quad + \Lambda^{-1} e^{-(1+x)B} \frac{1}{2}B^{-1} \int_0^1 e^{-(1-s)B} f(s) ds \\
&\quad - \Lambda^{-1} e^{-(1+x)B} \frac{1}{2}B^{-1} \int_0^1 e^{-(1+s)B} f(s) ds - \Lambda^{-1} e^{-(1-x)B} \frac{1}{2}B^{-1} \int_0^1 e^{-(1-s)B} f(s) ds \\
&\quad + \Lambda^{-1} e^{-(1-x)B} \frac{1}{2}B^{-1} \int_0^1 e^{-(1+s)B} f(s) ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \Lambda^{-1}(e^{-xB} - e^{-(2-x)B})\varphi + \Lambda^{-1}(e^{-(1-x)B} - e^{-(1+x)B})u(1) \\
&\quad - \Lambda^{-1}(e^{-(1-x)B} - e^{-(1+x)B})\frac{1}{2}B^{-1}\int_0^1(e^{-(1-s)B} - e^{-(1+s)B})f(s)ds \\
&\quad + \frac{1}{2}B^{-1}\int_0^x e^{-(x-s)B}f(s)ds + \frac{1}{2}B^{-1}\int_x^1 e^{-(s-x)B}f(s)ds - \frac{1}{2}B^{-1}\int_0^1 e^{-(x+s)B}f(s)ds
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
u(x) &= \Lambda^{-1}\{(e^{-xB} - e^{-(2-x)B})\varphi + (e^{-(1-x)B} - e^{-(1+x)B})u(1) \\
&\quad - (e^{-(1-x)B} - e^{-(1+x)B})\frac{1}{2}B^{-1}\int_0^1(e^{-(1-s)B} - e^{-(1+s)B})f(s)ds\} \\
&\quad + \frac{1}{2}B^{-1}\int_0^1(e^{-|x-s|B} - e^{-(x+s)B})f(s)ds
\end{aligned}$$

Expression de $u(1)$

Cherchons l'expression de $u(1)$ en fonction de λ et ψ :

D'une part : en remplaçant x par λ dans l'expression de $u(x)$ qu'on a obtenu, on aura :

$$\begin{aligned}
u(\lambda) &= \Lambda^{-1}\{(e^{-\lambda B} - e^{-(2-\lambda)B})\varphi + (e^{-(1-\lambda)B} - e^{-(1+\lambda)B})u(1) \\
&\quad - (e^{-(1-\lambda)B} - e^{-(1+\lambda)B})\frac{1}{2}B^{-1}\int_0^1(e^{-(1-s)B} - e^{-(1+s)B})f(s)ds\} \\
&\quad + \frac{1}{2}B^{-1}\int_0^1(e^{-|\lambda-s|B} - e^{-(\lambda+s)B})f(s)ds
\end{aligned}$$

D'autre part : d'après les conditions de notre problème (P) :

$$u(\lambda) = u(1) - \psi$$

Donc

$$\begin{aligned}
u(1) - \psi &= \Lambda^{-1}\{(e^{-\lambda B} - e^{-(2-\lambda)B})\varphi + (e^{-(1-\lambda)B} - e^{-(1+\lambda)B})u(1) \\
&\quad - (e^{-(1-\lambda)B} - e^{-(1+\lambda)B})\frac{1}{2}B^{-1}\int_0^1(e^{-(1-s)B} - e^{-(1+s)B})f(s)ds\} \\
&\quad + \frac{1}{2}B^{-1}\int_0^1(e^{-|\lambda-s|B} - e^{-(\lambda+s)B})f(s)ds
\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
 [I - \Lambda^{-1}(e^{-(1-\lambda)B} - e^{-(1+\lambda)B})]u(1) &= \psi + \Lambda^{-1}(e^{-\lambda B} - e^{-(2-\lambda)B})\varphi \\
 &\quad - \Lambda^{-1}(e^{-(1-\lambda)B} - e^{-(1+\lambda)B})\frac{1}{2}B^{-1}\int_0^1(e^{-(1-s)B} - e^{-(1+s)B})f(s)ds \\
 &\quad + \frac{1}{2}B^{-1}\int_0^1(e^{-|\lambda-s|B} - e^{-(\lambda+s)B})f(s)ds
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

posons

$$V = \Lambda[I - \Lambda^{-1}(e^{-(1-\lambda)B} - e^{-(1+\lambda)B})]$$

on a alors

$$[I - \Lambda^{-1}(e^{-(1-\lambda)B} - e^{-(1+\lambda)B})]u(1) = \Lambda^{-1}Vu(1)$$

et

$$\begin{aligned}
 V &= \Lambda - e^{-(1-\lambda)B} + e^{-(1+\lambda)B} \\
 &= I - e^{-2B} - e^{-(1-\lambda)B} + e^{-(1+\lambda)B} \\
 &= I + e^{-(1+\lambda)B} - e^{-(1-\lambda)B}(I + e^{-(1+\lambda)B}) \\
 &= (I + e^{-(1+\lambda)B})(I - e^{-(1-\lambda)B})
 \end{aligned}$$

donc V^{-1} existe et est égal à $(I - e^{-(1-\lambda)B})^{-1}(I + e^{-(1+\lambda)B})^{-1}$.

et en remplaçant $[I - \Lambda^{-1}(e^{-(1-\lambda)B} - e^{-(1+\lambda)B})]u(1)$ par $\Lambda^{-1}Vu(1)$ dans (2.4) on obtient :

$$\begin{aligned}
 u(1) &= V^{-1}\Lambda\psi + V^{-1}\Lambda[\Lambda^{-1}(e^{-\lambda B} - e^{-(2-\lambda)B})\varphi] \\
 &\quad - V^{-1}\Lambda\left[\Lambda^{-1}(e^{-(1-\lambda)B} - e^{-(1+\lambda)B})\frac{1}{2}B^{-1}\int_0^1(e^{-(1-s)B} - e^{-(1+s)B})f(s)ds\right] \\
 &\quad + V^{-1}\Lambda\left[\frac{1}{2}B^{-1}\int_0^1(e^{-|\lambda-s|B} - e^{-(\lambda+s)B})f(s)ds\right] \\
 &= V^{-1}(e^{-\lambda B} - e^{-(2-\lambda)B})\varphi \\
 &\quad - V^{-1}(e^{-(1-\lambda)B} - e^{-(1+\lambda)B})\frac{1}{2}B^{-1}\int_0^1(e^{-(1-s)B} - e^{-(1+s)B})f(s)ds \\
 &\quad + V^{-1}\Lambda\left[\frac{1}{2}B^{-1}\int_0^1(e^{-|\lambda-s|B} - e^{-(\lambda+s)B})f(s)ds + \psi\right]
 \end{aligned}$$

D'où, la représentation finale de la solution est comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x) = \Lambda^{-1} \{ (e^{-xB} - e^{-(2-x)B})\varphi + (e^{-(1-x)B} - e^{-(1+x)B})u(1) \} \\ \\ - \Lambda^{-1} (e^{-(1-x)B} - e^{-(1+x)B}) \frac{1}{2} B^{-1} \int_0^1 (e^{-(1-s)B} - e^{-(1+s)B}) f(s) ds \\ \\ + \frac{1}{2} B^{-1} \int_0^1 (e^{-|x-s|B} - e^{-(x+s)B}) f(s) ds \\ \\ u(1) = V^{-1} (e^{-\lambda B} - e^{-(2-\lambda)B})\varphi \\ \\ - V^{-1} (e^{-(1-\lambda)B} - e^{-(1+\lambda)B}) \frac{1}{2} B^{-1} \int_0^1 (e^{-(1-s)B} - e^{-(1+s)B}) f(s) ds \\ \\ + V^{-1} \Lambda \left[\frac{1}{2} B^{-1} \int_0^1 (e^{-|\lambda-s|B} - e^{-(\lambda+s)B}) f(s) ds + \psi \right] \end{array} \right.$$

Chapitre 3

Inversibilité du déterminant

On s'inspire de la preuve de Lunardi (voir [8], page 60).

On a vu que $(-B)$ est le générateur infinitésimal du semi-groupe analytique $(e^{-tB})_{t \geq 0}$.
D'après (Balakrishnan[2])

$$\rho(-B) \supset \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{2} - \beta < \arg \lambda < \frac{\pi}{2} + \beta \text{ pour } \beta > 0 \right\}$$

Alors on définit la courbe

$$\gamma = \{r + \rho e^{i\eta} : \rho \geq 0\} \cup \{r + \rho e^{-i\eta} : \rho \geq 0\}$$

avec $r < 0$ et $\eta \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$ sont tels que :

$\sigma(-B)$ se trouve à gauche de γ (voir le dessin ci-dessous).

Proposition 3.1 *Soit $t > 0$ alors*

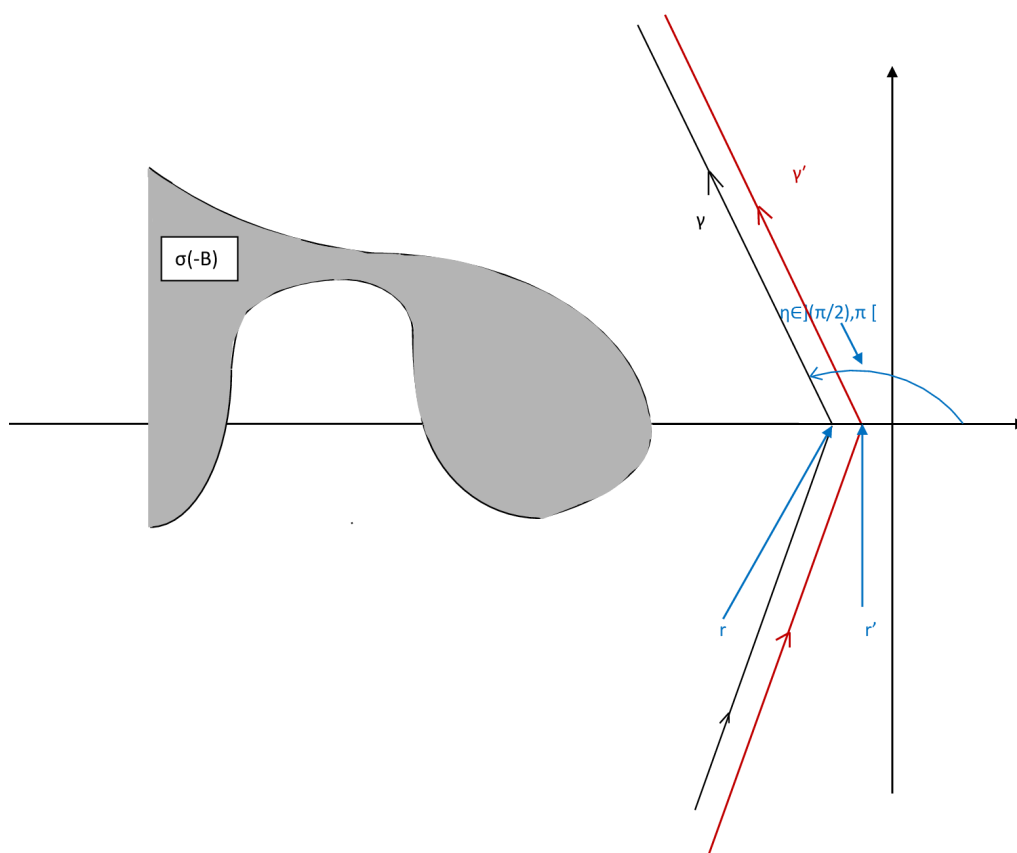
$$1 \in \rho(e^{-tB}) \text{ (c'est à dire } (I - e^{-tB})^{-1} \in \mathcal{L}(X))$$

et

$$(I - e^{-tB})^{-1} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{e^{tz}}{1 - e^{tz}} (zI + B)^{-1} dz + I = \Gamma + I \quad (3.1)$$

Preuve. On définit Γ par (3.1): $\Gamma = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{e^{tz}}{1 - e^{tz}} (zI + B)^{-1} dz$ (cette intégrale est définie comme intégrale de Dunford donc elle converge), et on définit γ' comme γ mais avec r' à la

place de r tel que : $0 > r' > r$



Alors, on a :

$$\begin{aligned}
\Gamma e^{-tB} &= e^{-tB} \Gamma \\
&= \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma'} e^{t\lambda} (\lambda I + B)^{-1} d\lambda \right) \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{e^{tz}}{1 - e^{tz}} (zI + B)^{-1} dz \right) \\
&= \left(\frac{1}{2i\pi} \right)^2 \int_{\gamma \times \gamma'} \frac{e^{t\lambda} e^{tz}}{1 - e^{tz}} (\lambda I + B)^{-1} (zI + B)^{-1} dz d\lambda \\
&= \left(\frac{1}{2i\pi} \right)^2 \int_{\gamma \times \gamma'} \frac{e^{t\lambda} e^{tz}}{1 - e^{tz}} (\lambda I + B)^{-1} (zI + B)^{-1} \frac{z - \lambda}{z - \lambda} dz d\lambda \quad (\gamma \ni z \neq \lambda \in \gamma') \\
&= \left(\frac{1}{2i\pi} \right)^2 \int_{\gamma \times \gamma'} \frac{e^{t\lambda} e^{tz}}{1 - e^{tz}} (\lambda I + B)^{-1} (zI + B)^{-1} \frac{(zI + B - B) - (\lambda I + B - B)}{z - \lambda} dz d\lambda \\
&= \left(\frac{1}{2i\pi} \right)^2 \int_{\gamma \times \gamma'} \frac{e^{t\lambda} e^{tz}}{1 - e^{tz}} \frac{(\lambda I + B)^{-1}}{z - \lambda} dz d\lambda \\
&\quad + \left(\frac{1}{2i\pi} \right)^2 \int_{\gamma \times \gamma'} \frac{e^{t\lambda} e^{tz}}{1 - e^{tz}} (\lambda I + B)^{-1} (zI + B)^{-1} (-B) \frac{1}{z - \lambda} dz d\lambda \\
&\quad - \left(\frac{1}{2i\pi} \right)^2 \int_{\gamma \times \gamma'} \frac{e^{t\lambda} e^{tz}}{1 - e^{tz}} \frac{(zI + B)^{-1}}{z - \lambda} dz d\lambda \\
&\quad - \left(\frac{1}{2i\pi} \right)^2 \int_{\gamma \times \gamma'} \frac{e^{t\lambda} e^{tz}}{1 - e^{tz}} (\lambda I + B)^{-1} (zI + B)^{-1} (-B) \frac{1}{z - \lambda} dz d\lambda \\
&= \left(\frac{1}{2i\pi} \right)^2 \int_{\gamma \times \gamma'} \frac{e^{t\lambda} e^{tz}}{1 - e^{tz}} \frac{(\lambda I + B)^{-1} - (zI + B)^{-1}}{z - \lambda} dz d\lambda \\
&= \left(\frac{1}{2i\pi} \right)^2 \int_{\gamma'} e^{t\lambda} (\lambda I + B)^{-1} \left(\int_{\gamma} \frac{e^{tz}}{(1 - e^{tz})(z - \lambda)} dz \right) d\lambda \\
&\quad - \left(\frac{1}{2i\pi} \right)^2 \int_{\gamma} \frac{e^{tz}}{1 - e^{tz}} (zI + B)^{-1} \left(\int_{\gamma'} \frac{e^{t\lambda}}{z - \lambda} d\lambda \right) dz
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} \frac{e^{tz}}{(1 - e^{tz})(z - \lambda)} dz &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R \cup C_R} \frac{e^{tz}}{(1 - e^{tz})(z - \lambda)} dz \\
&\quad - \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} \frac{e^{tz}}{(1 - e^{tz})(z - \lambda)} dz
\end{aligned}$$

telle que :

— γ_R est la restriction de γ aux complexes de modules inférieurs ou égaux à R , (avec R est suffisamment grand)

— et on considère aussi les arcs :

$$\begin{aligned} C_R : [\eta, 2\pi - \eta] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \theta &\longmapsto \operatorname{Re}^{i\theta} \end{aligned}$$

1.

a) L'application

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{C} \setminus \left\{ \left\{ \frac{2k\pi i}{t}, k \in \mathbb{Z} \right\}, \lambda \right\} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \phi(z) = \frac{e^{tz}}{(1 - e^{tz})(z - \lambda)} \end{aligned}$$

est analytique, donc d'après le théorème de Cauchy :

$$\int_{\gamma_R \cup C_R} \frac{e^{tz}}{(1 - e^{tz})(z - \lambda)} dz = 0.$$

b) Et on a pour $z \in C_R (\implies z = \operatorname{Re}^{i\theta}, \theta \in [\eta, 2\pi - \eta])$:

$$\begin{aligned} |\phi(z)| &= \left| \frac{e^{tz}}{(1 - e^{tz})(z - \lambda)} \right| \\ &= \left| \frac{e^{tz}}{1 - e^{tz}} \right| \cdot \left| \frac{1}{z - \lambda} \right| \\ &\leq \frac{|e^{t \operatorname{Re}^{i\theta}}|}{|1 - |e^{t \operatorname{Re}^{i\theta}}||} \cdot \frac{1}{||\operatorname{Re}^{i\theta}| - |\lambda||} \\ &= \frac{e^{tR \cos \theta}}{|1 - e^{tR \cos \theta}|} \cdot \frac{1}{R - |\lambda|} \\ &\leq \frac{e^{tR \cos \eta}}{1 - e^{tR \cos \eta}} \cdot \frac{1}{R - |\lambda|} \end{aligned}$$

car $\cos \eta \geq \cos \theta, \forall \theta \in [\eta, 2\pi - \eta]$

$$\implies \begin{cases} e^{tR \cos \eta} \geq e^{tR \cos \theta} \\ \text{et } 1 - e^{tR \cos \eta} \leq 1 - e^{tR \cos \theta} \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} \phi(z) dz \right| &\leq \int_{\eta}^{2\pi - \eta} \frac{e^{tR \cos \eta}}{1 - e^{tR \cos \eta}} \frac{1}{R - |\lambda|} R d\theta \\ &= \frac{(2\pi - 2\eta)R}{R - |\lambda|} \frac{e^{tR \cos \eta}}{1 - e^{tR \cos \eta}} \longrightarrow 0, R \longrightarrow +\infty \end{aligned}$$

(car $\cos \eta < 0$).

2.

a)

$$\int_{\gamma'} \frac{e^{T\lambda}}{z - \lambda} d\lambda = \lim_{R' \rightarrow +\infty} \int_{\gamma'_{R'} \cup C_{R'}} \frac{e^{T\lambda}}{z - \lambda} d\lambda - \lim_{R' \rightarrow +\infty} \int_{C_{R'}} \frac{e^{T\lambda}}{z - \lambda} d\lambda$$

avec :

$\gamma'_{R'}$ et $C_{R'}$ sont définies comme γ_R et C_R (respectivement avec γ' au lieu de γ et R' au lieu de R).

Donc, d'après le théorème des résidus, comme $\lambda = z$ est un pôle simple de

la fonction : $\lambda \mapsto \frac{e^{t\lambda}}{z - \lambda}$, alors :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma'_{R'} \cup C_{R'}} \frac{e^{t\lambda}}{z - \lambda} d\lambda &= 2\pi i \operatorname{Res} \left[\frac{e^{t\lambda}}{z - \lambda}, z \right] \\ &= 2\pi i \lim_{\lambda \rightarrow z} (\lambda - z) \frac{e^{t\lambda}}{z - \lambda} \\ &= -2i\pi e^{tz} \end{aligned}$$

b) Calculons $\int_{C_{R'}} \frac{e^{t\lambda}}{z - \lambda} d\lambda$:

on a

$$\left| \frac{e^{t\lambda}}{z - \lambda} \right| \leq \frac{e^{tR' \cos \eta}}{R' - |z|}$$

donc

$$\left| \int_{C_{R'}} \frac{e^{t\lambda}}{z - \lambda} d\lambda \right| \leq \frac{(2\pi - 2\eta)R'}{R' - |z|} e^{tR' \cos \eta} \longrightarrow 0, R' \longrightarrow +\infty$$

D'où, d'après (1.) et (2.) :

$$\begin{aligned} \Gamma e^{-TB} &= e^{-TB} \Gamma \\ &= 0 - \left(\frac{1}{2i\pi} \right)^2 \int_{\gamma} \frac{e^{Tz}}{1 - e^{Tz}} (zI + B)^{-1} (-2i\pi e^{Tz}) dz \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{e^{2tz}}{1 - e^{tz}} (zI + B)^{-1} dz \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
e^{-tB} &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} e^{tz} (zI + B)^{-1} dz \\
&= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} e^{tz} (zI + B)^{-1} \frac{1 - e^{tz}}{1 - e^{tz}} dz \\
&= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \left(\frac{e^{tz}}{1 - e^{tz}} - \frac{e^{2tz}}{1 - e^{tz}} \right) (zI + B)^{-1} dz
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
(I - e^{-tB})(\Gamma + I) &= \Gamma + I - e^{-tB}\Gamma - e^{-tB} \\
&= \Gamma + I - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{e^{2tz}}{1 - e^{tz}} (zI + B)^{-1} \\
&\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \left(\frac{e^{tz}}{1 - e^{tz}} - \frac{e^{2tz}}{1 - e^{tz}} \right) (zI + B)^{-1} dz \\
&= \Gamma + I - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \left(\frac{e^{2tz}}{1 - e^{tz}} + \frac{e^{tz}}{1 - e^{tz}} - \frac{e^{2tz}}{1 - e^{tz}} \right) (zI + B)^{-1} dz \\
&= \Gamma + I - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{e^{tz}}{1 - e^{tz}} (zI + B)^{-1} dz \\
&= \Gamma + I - \Gamma \\
&= I \\
&= (\Gamma + I)(I - e^{-tB}) \text{ (car } \Gamma e^{-tB} = e^{-tB}\Gamma)
\end{aligned}$$

D'où :

$(I - e^{-tB})^{-1}$ existe et est égal à

$$\Gamma + I = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{e^{tz}}{1 - e^{tz}} (zI + B)^{-1} dz + I.$$

Ainsi, par un simple calcul on déduit que $(I + e^{-tB})^{-1}$ existe $\forall t > 0$.

Conclusion 3.1 $\forall t > 0$: Les opérateurs $(I - e^{-tB})^{-1}$ et $(I + e^{-tB})^{-1}$ existent et sont bornés.

■

Chapitre 4

Régularité de la solution

Dans ce chapitre, on va étudier la régularité, et avant ça, on démontre des lemmes techniques utiles pour l'analyse des termes de l'expression de la solution.

4.1 Lemmes techniques

Lemme 4.1 *Soit $f \in L^p(0, 1; X) : 1 < p < \infty$, sous les hypothèses (2.1), (2.2) et (2.3) on a :*

$$1.x \longmapsto F(x, f) = B \int_0^x e^{-(x-s)B} f(s) ds \in L^p(0, 1; X).$$

$$2.x \longmapsto K(x, f) = B \int_1^x e^{-(s-x)B} f(s) ds \in L^p(0, 1; X).$$

$$3.x \longmapsto T(x, f) = B \int_0^1 e^{-(x+s)B} f(s) ds \in L^p(0, 1; X).$$

Preuve. 1) X étant UMD et $(-B)$ un opérateur linéaire fermé dans X vérifiant les hypothèses de Dore-Venni, alors :

$$v(x) = \int_0^x e^{-(x-s)B} f(s) ds$$

est la solution stricte et unique du problème de Cauchy :

$$(P_c) \begin{cases} v'(x) + Bv(x) = f(x) \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

alors, en appliquant le théorème de Dore et Venni (voir chapitre rappels) sur ce problème de Cauchy (P_c) , on obtient :

$$v \in W^{1,p}(0, 1; X) \cap L^p(0, 1; D(B))$$

donc,

$$F(., f) \in L^p(0, 1; X)$$

2) En posant $t = 1 - s$, on obtient :

$$\begin{aligned}
 K(x, f) &= B \int_x^1 e^{-(s-x)B} f(s) ds \\
 &= B \int_x^1 e^{-(s-1+1-x)B} f(s) ds \\
 &= B \int_x^1 e^{-((1-x)-(1-s))B} f(s) ds \\
 &= B \int_0^{1-x} e^{-((1-x)-t)B} f(1-t) dt \\
 &= F(1-x, f(1-.\))
 \end{aligned}$$

donc

$$x \longmapsto K(x, f) = x \longmapsto F(1-x, f(1-.\)) \in L^p(0, 1; X) \text{ d'après 1.}$$

3)

$$\begin{aligned}
 \forall x \in (0, 1) : T(x, f) &= B \int_0^1 e^{-(x+s)B} f(s) ds \\
 &= B \int_0^x e^{-(x+s)B} f(s) ds + B \int_x^1 e^{-(x+s)B} f(s) ds \\
 &= B \int_0^x e^{-(x-s)B} e^{-2sB} f(s) ds + e^{-2xB} B \int_x^1 e^{-(s-x)B} f(s) ds \\
 &= F(x, e^{-2.B} f) + e^{-2xB} K(x, f)
 \end{aligned}$$

donc

$$T(., f) = x \longmapsto F(x, e^{-2.B} f) + e^{-2xB} K(x, f) \in L^p(0, 1; X) \text{ d'après 1 et 2.}$$

■

Lemme 4.2

$$(D(B), X)_{\frac{1}{p}, p} = (D(A), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}$$

Preuve. D'après le théorème(1.3), puisque

$$D(B) \in K_{\frac{1}{2}}(D(A), X) \text{ et } X \in K_1(D(A), X)$$

(voir Lions-Peetre[7]) alors

pour

$$\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2p} \in]\alpha_0, \alpha_1[= \left] \frac{1}{2}, 1 \right[(car 1 < p < \infty)$$

on a

$$\begin{aligned} (D(A), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p} &= (D(B), X)_{\frac{(\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}}, p} \\ &= (D(B), X)_{\frac{1}{p}, p} \end{aligned}$$

■

Lemme 4.3 Soit $p \in]1, \infty[$ et supposons l'hypothèse (2.1) du chapitre 2, alors :

1. $Ae^{-\cdot B}\varphi \in L^p(0, 1; X)$ si et seulement si $\varphi \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}$

2. $Be^{-\cdot B}\varphi \in L^p(0, 1; X)$ si et seulement si $\varphi \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}$

Preuve. Rappel :

On rappelle que si $m \in \mathbb{N}^*$ et C génère un semi-groupe analytique, alors :

$\phi \in (D(C^m), X)_{\frac{1}{mp}, p}$ si et seulement si $C^m e^{\cdot C} \phi \in L^p(0, 1; X)$.

En effet : supposons que $\phi \in (D(C^m), X)_{\frac{1}{mp}, p}$, donc, d'après le théorème (1.2) qui assure l'équivalence des normes $\|\phi\|^{**}$ et $\|\phi\|_{(D(C^m), X)_{\frac{1}{mp}, p}}$:

$\exists K > 0 :$

$$\begin{aligned} \|\phi\|^{**} &= \|x^{m(1-(1-\frac{1}{mp}))} C^m e^{x^C} \phi\|_{L_*^p(X)} + \|\phi\|_X \\ &\leq K \|\phi\|_{(D(C^m), X)_{\frac{1}{mp}, p}} < +\infty \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \|C^m e^{\cdot C} \phi\|_{L^p(X)}^p &= \int_0^1 \|C^m e^{xC} \phi\|_X^p dx \\ &\leq \int_0^\infty \|x^{m(1-(1-\frac{1}{mp}))} C^m e^{xC} \phi\|_X^p \frac{dx}{x} \\ &= \|x^{m(1-(1-\frac{1}{mp}))} C^m e^{\cdot C} \phi\|_{L_*^p(X)}^p \end{aligned}$$

donc

$$\|C^m e^{\cdot C} \phi\|_{L^p(X)} \leq K \|\phi\|_{(D(C^m), X)_{\frac{1}{mp}, p}} < +\infty$$

alors :

$$C^m e^{\cdot C} \phi \in L^p(0, 1; X).$$

Et réciproquement :

On suppose que

$$C^m e^{\cdot C} \phi \in L^p(0, 1; X)$$

Alors

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \|x^{m(1-(1-\frac{1}{mp}))} C^m e^{xC} \phi\|_X^p \frac{dx}{x} &= \int_0^\infty \|C^m e^{xC} \phi\|_X^p dx \\ &= \int_0^1 \|C^m e^{xC} \phi\|_X^p dx + \int_1^\infty \|C^m e^{xC} \phi\|_X^p dx \end{aligned}$$

la première intégrale est finie, et pour la deuxième intégrale, on a d'après (Vrabie[11] page 155)

$$\|C^m e^{xC}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{K}{x^m} \text{ avec } K > 0$$

Alors

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \|C^m e^{xC} \phi\|_X^p dx &\leq \int_1^\infty \frac{K^p}{x^{mp}} \|\phi\|_X^p dx \\ &= K^p \int_1^\infty x^{-mp} dx \cdot \|\phi\|_X^p \\ &= \frac{K^p}{mp-1} \|\phi\|_X^p < +\infty \end{aligned}$$

donc

$$\int_0^\infty \|x^{m(1-(1-\frac{1}{mp}))} C^m e^{xC} \phi\|_X^p \frac{dx}{x} = \|x^{m(1-(1-\frac{1}{mp}))} C^m e^{xC} \phi\|_{L_*^p(X)}^p < +\infty$$

D'où :

$$\|\phi\|^{**} = \|x^{m(1-(1-\frac{1}{mp}))} C^m e^{xC} \phi\|_{L_*^p(X)} + \|\phi\|_X < +\infty$$

et d'après l'équivalence des normes $\|\phi\|^{**}$ et $\|\phi\|_{(D(C^m), X)_{\frac{1}{mp}, p}}$ on constate que

$$\|\phi\|_{(D(C^m), X)_{\frac{1}{mp}, p}} < +\infty$$

d'où :

$$\phi \in (D(C^m), X)_{\frac{1}{mp}, p}$$

Retour à la preuve :

On démontre maintenant le lemme à l'aide de ce rappel :

1) d'après ce qui précède :

$$Ae^{-\cdot B} \varphi = B^2 e^{-\cdot B} \varphi \in L^p(0, 1; X) \iff \varphi \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}$$

2) De même :

$$Be^{-\cdot B}\varphi \in L^p(0, 1; X) \iff \varphi \in (D(B), X)_{\frac{1}{p}, p} = (D(A), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p},$$

d'après le lemme(4.2).

D'où le résultat. ■

Corollaire 4.1 *Soit $f \in L^p(0, 1; X)$, $1 < p < \infty$. Sous les hypothèses (2.1), (2.2) et (2.3) on a :*

$$\int_0^1 e^{-sB} f(s) ds \in (D(B), X)_{\frac{1}{p}, p} = (D(A), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}$$

Preuve. (3.) du lemme (4.1) implique que $Be^{-\cdot B} \int_0^1 e^{-sB} f(s) ds \in L^p(0, 1; X)$, donc en appliquant la deuxième assertion du lemme (4.3) , on aura :

$$\int_0^1 e^{-sB} f(s) ds \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}$$

■

Lemme 4.4 *On rappelle que $\Lambda = I - e^{-2B}$, alors il existe un opérateur $W \in \mathcal{L}(X)$ tel que :*

$$\Lambda^{-1} = I - W$$

et

$$W(X) \subset \bigcap_{k=1}^{+\infty} D(B^k)$$

Preuve. On a $\Lambda = I - e^{-2B} = I + V$ avec $V = -e^{-2B}$. Donc

$$V(X) \subset \bigcap_{k=1}^{+\infty} D(B^k)$$

car $(-B)$ est un générateur infinitésimal du semi-groupe analytique $(e^{-xB})_{x \geq 0}$.

Et en posant $W = \Lambda^{-1}V$:

On a d'une part :

$$\begin{aligned} W &= \Lambda^{-1}V = (I - e^{-2B})^{-1}(-e^{-2B}) \\ &= -e^{-2B}(I - e^{-2B})^{-1} \end{aligned}$$

donc

$$W(X) \subset \bigcap_{k=1}^{+\infty} D(B^k)$$

Et d'autre part :

$$\begin{aligned}
I - W &= I - \Lambda^{-1}V \\
&= I - (I - e^{-2B})^{-1}(-e^{-2B}) \\
&= I - (I - e^{-2B})^{-1}(I - e^{-2B} - I) \\
&= I - I + (I - e^{-2B})^{-1} \\
&= \Lambda^{-1}
\end{aligned}$$

De plus W est un opérateur borné comme composition de deux opérateurs bornés. ■

4.2 Régularité de la solution

Définition 4.1 On dit que $u(x)$ est une solution stricte du problème (P) si :

$$u \in W^{2,p}(0, 1; X) \cap L^p(0, 1; D(A))$$

vérifiant (P).

Remarque 4.1 Dans notre étude de la régularité, on veut obtenir les conditions néces-

saires et suffisantes pour que la solution $u(x)$ qui vérifie $-u''(x) + Au(x) = f(x)$, (avec $f \in L^p(0, 1; X)$) soit stricte. Et à partir de cette dernière équation, il suffit d'analyser le

terme $Au(x)$. Pour cela, on utilise le lemme (4.4) pour réécrire l'expression de $u(x)$ sous une

forme qui facilite l'analyse du terme $Au(x)$.

4.2.1 Réécriture de l'expression de $u(x)$

On a :

$$\begin{aligned}
u(x) &= \Lambda^{-1} \{ (e^{-xB} - e^{-(2-x)B})\varphi + (e^{-(1-x)B} - e^{-(1+x)B})u(1) \\
&\quad - (e^{-(1-x)B} - e^{-(1+x)B})\frac{1}{2}B^{-1} \int_0^1 (e^{-(1-s)B} - e^{-(1+s)B})f(s)ds \} \\
&\quad + \frac{1}{2}B^{-1} \int_0^1 (e^{-|x-s|B} - e^{-(x+s)B})f(s)ds \\
&= (I - W) \{ (e^{-xB} - e^{-(2-x)B})\varphi + (e^{-(1-x)B} - e^{-(1+x)B})u(1) \\
&\quad - (e^{-(1-x)B} - e^{-(1+x)B})\frac{1}{2}B^{-1} \int_0^1 (e^{-(1-s)B} - e^{-(1+s)B})f(s)ds \} \\
&\quad + \frac{1}{2}B^{-1} \int_0^1 (e^{-|x-s|B} - e^{-(x+s)B})f(s)ds \\
&= (I - W)(e^{-xB} - e^{-(2-x)B})\varphi \\
&\quad + (I - W)(e^{-(1-x)B} - e^{-(1+x)B})u(1) \\
&\quad - (I - W)(e^{-(1-x)B} - e^{-(1+x)B})\frac{1}{2}B^{-1} \int_0^1 (e^{-(1-s)B} - e^{-(1+s)B})f(s)ds \\
&\quad + \frac{1}{2}B^{-1} \int_0^x (e^{-(x-s)B} - e^{-(x+s)B})f(s)ds + \frac{1}{2}B^{-1} \int_x^1 (e^{-(s-x)B} - e^{-(x+s)B})f(s)ds \\
&= (e^{-xB} - e^{-(2-x)B})\varphi \\
&\quad + (e^{-(1-x)B} - e^{-(1+x)B})u(1) \\
&\quad - (e^{-(1-x)B} - e^{-(1+x)B})\frac{1}{2}B^{-1} \int_0^1 (e^{-(1-s)B} - e^{-(1+s)B})f(s)ds \\
&\quad - W \{ e^{-xB} - e^{-(2-x)B} \} \varphi \\
&\quad + (e^{-(1-x)B} - e^{-(1+x)B})u(1) \\
&\quad - (e^{-(1-x)B} - e^{-(1+x)B})\frac{1}{2}B^{-1} \int_0^1 (e^{-(1-s)B} - e^{-(1+s)B})f(s)ds \} \\
&\quad + \frac{1}{2}B^{-1} \int_0^x e^{-(x-s)B}f(s)ds + \frac{1}{2}B^{-1} \int_x^1 e^{-(s-x)B}f(s)ds - \frac{1}{2}B^{-1} \int_0^1 e^{-(x+s)B}f(s)ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-xB}\varphi - e^{-(2-x)B}\varphi + e^{-(1-x)B}u(1) - e^{-(1+x)B}u(1) \\
&\quad - e^{-(1-x)B}\frac{1}{2}B^{-1}\int_0^1 e^{-(1-s)B}f(s)ds \\
&\quad + e^{-(1-x)B}\frac{1}{2}B^{-1}\int_0^1 e^{-(1+s)B}f(s)ds + e^{-(1+x)B}\frac{1}{2}B^{-1}\int_0^1 e^{-(1-s)B}f(s)ds \\
&\quad - e^{-(1+x)B}\frac{1}{2}B^{-1}\int_0^1 e^{-(1+s)B}f(s)ds \\
&\quad + \frac{1}{2}B^{-1}\int_0^x e^{-(x-s)B}f(s)ds + \frac{1}{2}B^{-1}\int_x^1 e^{-(s-x)B}f(s)ds - \frac{1}{2}B^{-1}\int_0^1 e^{-(x+s)B}f(s)ds \\
&\quad - W\{e^{-xB} - e^{-(2-x)B}\}\varphi \\
&\quad + (e^{-(1-x)B} - e^{-(1+x)B})u(1) \\
&\quad - (e^{-(1-x)B} - e^{-(1+x)B})\frac{1}{2}B^{-1}\int_0^1 (e^{-(1-s)B} - e^{-(1+s)B})f(s)ds\} \\
&= -W\{e^{-xB} - e^{-(2-x)B}\}\varphi \\
&\quad + (e^{-(1-x)B} - e^{-(1+x)B})u(1) \\
&\quad - (e^{-(1-x)B} - e^{-(1+x)B})\frac{1}{2}B^{-1}\int_0^1 (e^{-(1-s)B} - e^{-(1+s)B})f(s)ds\} \\
&\quad - e^{-(2-x)B}\varphi - e^{-(1+x)B}u(1) + e^{-(2-x)B}\frac{1}{2}B^{-1}\int_0^1 e^{-sB}f(s)ds \\
&\quad + e^{-(1+x)B}\frac{1}{2}B^{-1}\int_0^1 e^{-(1-s)B}f(s)ds - e^{-(2+x)B}\frac{1}{2}B^{-1}\int_0^1 e^{-sB}f(s)ds \\
&\quad + e^{-xB}\varphi + e^{-(1-x)B}u(1) - e^{-(1-x)B}\frac{1}{2}B^{-1}\int_0^1 e^{-(1-s)B}f(s)ds \\
&\quad + \frac{1}{2}B^{-1}\int_0^x e^{-(x-s)B}f(s)ds + \frac{1}{2}B^{-1}\int_x^1 e^{-(s-x)B}f(s)ds - \frac{1}{2}B^{-1}\int_0^1 e^{-(x+s)B}f(s)ds
\end{aligned}$$

Donc

$$u(x) = R_1(x) + R_2(x) + S_1(x) + S_2(x) + S_3(x) \quad (4.1)$$

avec

$$\begin{aligned}
R_1(x) &= -W\{e^{-xB} - e^{-(2-x)B}\}\varphi \\
&\quad + (e^{-(1-x)B} - e^{-(1+x)B})u(1) \\
&\quad - (e^{-(1-x)B} - e^{-(1+x)B})\frac{1}{2}B^{-1}\int_0^1 (e^{-(1-s)B} - e^{-(1+s)B})f(s)ds \\
R_2(x) &= -e^{-(2-x)B}\varphi - e^{-(1+x)B}u(1) + e^{-(2-x)B}\frac{1}{2}B^{-1}\int_0^1 e^{-sB}f(s)ds \\
&\quad + e^{-(1+x)B}\frac{1}{2}B^{-1}\int_0^1 e^{-(1-s)B}f(s)ds - e^{-(2+x)B}\frac{1}{2}B^{-1}\int_0^1 e^{-sB}f(s)ds \\
S_1(x) &= -e^{-(1-x)B}\frac{1}{2}B^{-1}\int_0^1 e^{-(1-s)B}f(s)ds + \frac{1}{2}B^{-1}\int_0^x e^{-(x-s)B}f(s)ds \\
&\quad + \frac{1}{2}B^{-1}\int_x^1 e^{-(s-x)B}f(s)ds - \frac{1}{2}B^{-1}\int_0^1 e^{-(x+s)B}f(s)ds \\
S_2(x) &= e^{-xB}\varphi \\
S_3(x) &= e^{-(1-x)B}u(1)
\end{aligned}$$

Alors

$$Au(x) = AR_1(x) + AR_2(x) + AS_1(x) + AS_2(x) + AS_3(x)$$

4.2.2 Résultat

Théorème 4.1 *Supposons les hypothèses (2.1), (2.2) et (2.3) et soient $\varphi, u(1) \in X$,*

et $f \in L^p(0, 1; X)$. Alors le problème (P) admet une unique solution stricte si et seulement si $\varphi, u(1) \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}$.

De plus, la solution est donnée par la formule (4.1).

Preuve. *On a vu dans la dernière remarque qu'il suffit d'analyser Au .*

On a $Au = AR_1(\cdot) + AR_2(\cdot) + AS_1(\cdot) + AS_2(\cdot) + AS_3(\cdot)$

donc, on va voir quand est ce qu'on aura Au (avec cette dernière écriture) appartient à $L^p(0, 1; X)$.

1.

$$\begin{aligned}
AR_1(.) &= -AW\{(e^{-\cdot B} - e^{-(2-\cdot)B})\varphi \\
&\quad + (e^{-(1-\cdot)B} - e^{-(1+\cdot)B})u(1) \\
&\quad - (e^{-(1-\cdot)B} - e^{-(1+\cdot)B})\frac{1}{2}B^{-1}\int_0^1 (e^{-(1-s)B} - e^{-(1+s)B})f(s)ds\} \\
&\in L^p(0,1;X)
\end{aligned}$$

car on a montré dans le lemme(4.4) que $W(X) \subset \bigcap_{k=1}^{+\infty} D(B^k)$ ce qui implique que

$$\begin{aligned}
&W\{(e^{-xB} - e^{-(2-x)B})\varphi + (e^{-(1-x)B} - e^{-(1+x)B})u(1) \\
&\quad - (e^{-(1-x)B} - e^{-(1+x)B})\frac{1}{2}B^{-1}\int_0^1 (e^{-(1-s)B} - e^{-(1+s)B})f(s)ds\} \\
&\in D(B^2) = D(A)
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
AR_2(.) &= -Ae^{-(2-\cdot)B}\varphi - Ae^{-(1+\cdot)B}u(1) + \frac{1}{2}Be^{-(2-\cdot)B}\int_0^1 e^{-sB}f(s)ds \\
&\quad + \frac{1}{2}Be^{-(1+\cdot)B}\int_0^1 e^{-(1-s)B}f(s)ds - \frac{1}{2}Be^{-(2+\cdot)B}\int_0^1 e^{-sB}f(s)ds \\
&\in L^p(0,1;X)
\end{aligned}$$

car $(-B)$ est un générateur infinitésimal du semi-groupe analytique $(e^{-xB})_{x \geq 0}$, ce qui implique que les opérateurs bornés : $e^{-(2-x)B}$, $e^{-(2+x)B}$ et $e^{-(1+x)B}$ ramènent dans $D(A)$, $\forall x \in [0,1]$, sachant que

$$\int_0^1 e^{-sB}f(s)ds \text{ et } \int_0^1 e^{-(1-s)B}f(s)ds \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}$$

d'après le corollaire (4.1).

3.

$$\begin{aligned}
AS_1(.) &= -\frac{1}{2}Be^{-(1-\cdot)B}\int_0^1 e^{-(1-s)B}f(s)ds + \frac{1}{2}B\int_0^1 e^{-(\cdot-s)B}f(s)ds \\
&\quad + \frac{1}{2}B\int_0^1 e^{-(s-\cdot)B}f(s)ds - \frac{1}{2}B\int_0^1 e^{-(\cdot+s)B}f(s)ds \\
&\in L^p(0,1;X)
\end{aligned}$$

car on a **(a)**, **(b)**, **(c)** et **(d)** avec :

(a) : Le corollaire(4.1)

$$\implies \int_0^1 e^{-(1-s)B} f(s) ds \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}$$

donc la deuxième assertion du lemme(4.3)

$$\implies -\frac{1}{2} B e^{-(1-\cdot)B} \int_0^1 e^{-(1-s)B} f(s) ds \in L^p(0, 1; X)$$

(b) : La première assertion du lemme (4.1)

$$\implies \frac{1}{2} B \int_0^1 e^{-(\cdot-s)B} f(s) ds \in L^p(0, 1; X)$$

(c) : La deuxième assertion du lemme (4.1)

$$\implies \frac{1}{2} B \int_0^1 e^{-(s-\cdot)B} f(s) ds \in L^p(0, 1; X)$$

(d) : La troisième assertion du lemme (4.1)

$$\implies -\frac{1}{2} B \int_0^1 e^{-(\cdot+s)B} f(s) ds \in L^p(0, 1; X)$$

4.

$$AS_2(\cdot) = A e^{-\cdot B} \varphi \in L^p(0, 1; X) \iff \varphi \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}$$

d'après 1. du lemme (4.3) .

5.

$$AS_3(\cdot) = A e^{-(1-\cdot)B} u(1) \in L^p(0, 1; X) \iff u(1) \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}$$

d'après le même lemme.

Enfin, de **1,2,3,4** et **5** on a

$$Au \in L^p(0, 1; X) \iff \varphi, u(1) \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}$$

D'où le résultat. ■

Chapitre 5

Application

Illustrons notre travail par cet exemple :

Exemple 5.1 *Considérons le problème suivant :*

$$(1) : \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) + \delta u(x, y) = f(x, y) \\ u(0, y) = \varphi(y) & pp : 0 < y < 1 \\ u(1, y) = u(\lambda, y) + \psi(y) & 0 \leq \lambda < 1 \\ u(x, 0) = u(x, 1) & pp : 0 < x < 1 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, 1) \end{array} \right.$$

avec : $f \in E = L^p(0, 1; X)$ tel que $X = L^p(0, 1)$
et $\varphi, \psi \in X$

On définit l'opérateur A comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} D(A) = \{\varphi \in W^{2,p}(0, 1) : \varphi(0) = \varphi(1) \text{ et } \varphi'(0) = \varphi'(1)\} \\ A\varphi = -\varphi'' + \delta\varphi \quad \text{pour } \varphi \in D(A) \end{array} \right.$$

Alors, le problème (1) devient sous la forme abstraite (2) suivante :

$$(2) : \left\{ \begin{array}{ll} -u''(x) + Au(x) = f(x) & pp : (0 < x < 1) \\ u(0) = \varphi \\ u(1) = u(\lambda) + \psi & (0 \leq \lambda < 1) \end{array} \right.$$

On a $X = L^p(0, 1)$ ($1 < p < \infty$) est un espace UMD, donc on peut appliquer directement notre résultat sur le problème (2) si A est un opérateur linéaire fermé qui vérifie les hypothèses (2.1), (2.2), ce qui est démontré dans l'article (Labbas Moussaoui[6]).

Chapitre 6

Conclusion

Dans ce mémoire, on a étudié un problème elliptique aux limites non locales de type Bitsadze-Samarskii dans le cadre L_p .

Allaberen Ashyralyev s'est intéressé (en 2008) à ce problème dans le cadre des espaces de Hölder et a montré que ce problème est bien posé, en vérifiant l'inégalité de coercitivité.

Le but de notre travail était de trouver des résultats concernant l'existence, l'unicité et la régularité de la solution de ce problème.

La méthode est basée essentiellement sur la construction d'une représentation de la solution, l'utilisation des semi-groupes, les domaines fractionnaires des opérateurs, les espaces d'interpolation et la théorie des sommes d'opérateurs en s'inspirant du travail de « Hammou Houari et al » qui est fait dans un cadre général (conditions non locales opérationnelles).

On a obtenu des conditions nécessaires et suffisantes sur les données permettant d'obtenir une L_p régularité maximale.

Bibliographie

- [1] Allaberen Ashyralyev : A note on the Bitsadze-Samarskii type nonlocal boundary value problem in a Banach space :journal of mathematical analysis and applications.344(2008)557-573.
- [2] Balakrishnan, A.V. : Fractional powers of closed operators and the semigroups generated by them. Pac. J. Math. 10, 419–437 (1960).
- [3] Burkholder. D.L : A géométricale caractérisation of Banach spaces in which martingale difference sequences are unconditional, Ann. Proba., 9(1981), 977-1011.
- [4] Dore. G and Venni A. : On the Closedness of the Sum of two Closed Operators, Mathematische Zeitschrift, 196, 189-201 (1987).
- [5] Hammou H , Labbas R, Maingot S, Medeghri A. : Nonlocal General Boundary Value Problems of Elliptic Type in L_p Cases :Mediterranean Journal of Mathematics 2015.
- [6] R.labbas, M.Moussaoui, on the resolution of the heat equation with discontinuous coefficients, semigroup forum, 2000, vol 60 issue 2, p187.
- [7] J.L.Lions et J.Peetre, sur une classe d'espaces d'interpolation, Inst.Hautes Etudes Sci. Publ. Math.19 (1964),p.5-58
- [8] Lunardi A. : Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems. Birkhäuser, (1995).
- [9] E.Sinestrari, On the Abstract Cauchy Problem of Parabolic Type in Spaces of Continuous Functions, journal of mathematical analysis and applications107, 16-66 (1985)
- [10] Triebel.H : Interpolation theory, Function spaces, Differential opérateurs, Amsterdam, North Holland (1978).
- [11] Vrabie,I : C_0 -semigroups and applications, 2003 Elsevier