

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABDELHAMID BEN BADIS DE MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE



MÉMOIRE

Master Académique

pour obtenir le diplôme de Master délivré par

Université de Mostaganem

Spécialité "Modélisation, Contrôle et Optimisation"

présenté et soutenu publiquement par

Badra BOUKARMA

le 14 Juin 2018

Schémas numériques appliqués aux problèmes aux limites : Etude comparative

Encadeur : **Naima ABLAOUI-LAHMAR (UNIVERSITÉ DE MOSTAGANEM, ALGÉRIE)**

Jury

Maghnia HAMOU MAAMAR, M.A.B Présidente (Université de Mostaganem, Algérie)
Leila BOUZID, M.A.B Examinatrice (Université de Mostaganem, Algérie)

**LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE (FSEI)
Chemin des Crêtes (Ex-INES), 27000 Mostaganem, Algérie**

**M
A
S
T
E
R**

Dédicace

Je dédie ce travail à ma mère qui m'a toujours conseillé et pensé a moi, et qui m'ante fait au bonne éducation. Je dédie ce travail à toute ma famille, et spécialement mon mari et toute la famille de département de mathématiques et ma promotion 2017-2018

Remerciements

Tout d'abord, Louange à Allah, le Tout Puissant de m'avoir donné le courage et la volonté d'avoir réalisé ce travail.

Je tiens à remercier ma mère qui est toujours priée pour me voir réussir. Et à leur conseils judicieux durant cette année.

Je remercie l'encadreur Mme ABLAOUI-LAHMAR Naima pour son aide, pour ses encouragements.

Je tiens à remercier Mlle HAMOU MAAMAR pour avoir accepté de présider ce jury et Mlle BOUZID Leila pour avoir accepté d'examiner ce travail.

Mes remerciements s'adressent à mon fidèle amie BOUKSARA Naima pour son aide.

J'adresse également mes remerciements envers mes amis et mes collègues pour leur soutien.

Mes remerciements sont adressés également à tous les enseignants du département de mathématiques.

En fin, je remercie tous ceux et celles qui m'ont aidé de loin ou de près pour l'élaboration de ce travail et les promotions 2017-2018.

Merci à toutes et à tous.

Table des matières

Remerciements	2
Introduction	4
1 Notions mathématiques de base	5
1 Les polynômes de Legendre et leurs propriétés :	5
2 Les ondelettes de Legendre	6
3 L'approximation dans des espaces fonctionnels	8
3.1 L'approximation dans $L^2(]0, 1[)$	8
3.2 L'approximation dans $C([0, T]; L^2(]0, 1[))$	9
4 La méthode des différences finies	10
4.1 Les schémas numériques	11
4.2 Notion de consistance et de stabilité	12
4.3 La convergence d'un schéma numérique	13
2 La matrice opérationnelle d'intégration	14
1 Matrice d'intégration de Razzaghi	14
2 Matrice d'intégration exacte	19
3 Matrice d'intégration modifiée	21
3 Simulation et résultats numériques	22
1 Introduction	22
2 Résolution par la méthode combinée	22
3 Résolution par la méthode des différences finies	25
3.1 Résolution du problème stationnaire	26
3.2 Résolution du problème évolutif	30
Bibliographie	35

Introduction

La plus part des phénomènes naturels, qu'ils soient physiques, biologiques, épidémiologiques ou autres, sont décrits par des systèmes d'équations différentielles ou d'équations aux dérivées partielles soumis à des conditions (qui soient de type Cauchy ou aux limites). A part dans quelques cas particuliers, il est impossible de calculer explicitement la solution de ces problèmes aux limites. Il est donc nécessaire d'avoir recours au calcul numérique pour estimer qualitativement et quantitativement cette solution. Le principe de toutes les méthodes de résolution numérique des problèmes aux limites, est d'obtenir des valeurs numériques discrètes (en un nombre fini de points) qui approchent la solution exacte.

De nombreuses et différentes méthodes ont été conçues pour l'estimation de la solution de ces problèmes. Les couramment utilisées sont la méthode des différences finies [3], la méthode des volumes finies [7], la méthode des éléments finies [3] et plus récemment les méthodes fondées sur les ondelettes [8]. Toutes visent à gagner en précision sans augmenter les coûts (temps de calcul et place mémoire).

On s'intéresse, pour leur simplicité, à deux d'entre elles : la méthode des différences finies et la méthode des ondelettes de Legendre.

L'utilisation de cette dernière nécessite la connaissance de la matrice opérationnelle d'intégration. En 2000 [8], la matrice d'intégration de Legendre a été introduite par Razzaghi. Celle ci a été obtenue de manière approximative.

Le premier objectif de ce travail et qui constitue son originalité, est le calcul de la matrice d'intégration exacte. Pour des considérations numériques, une nouvelle matrice approchée est proposée.

Le second objectif de ce travail est d'appliquer ces méthodes (la méthode des différences finies et la méthode des ondelettes de Legendre avec les deux matrices) au problème de diffusion

$$(P_{diff}) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = 2(t - t^2 - 1) \exp(2x); \text{ sur }]0, 1] \times]0, 1] \\ u(0, x) = \exp(2x) \text{ pour } x \in]0, 1] \\ u(t, 0) = (t^2 + 1) \text{ pour } t \in]0, 1] \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = 2(t^2 + 1) \text{ pour } t \in]0, 1] \end{array} \right. , \quad (1)$$

et ensuite comparer les résultats obtenus.

Ce mémoire se compose de trois chapitres.

-Dans le premier, on rappelle les notions mathématiques nécessaires à la compréhension de ce mémoire.

-Le deuxième chapitre est consacré à l'obtention des matrices opérationnelles d'intégration.

-Le troisième chapitre est consacré aux résultats numériques obtenus suite à l'application des trois méthodes.

Chapitre 1

Notions mathématiques de base

Dans ce chapitre, on va rappeler certaines notions utilisées lors de la résolution d'un problème aux limites (par les méthodes choisies).

Pour appliquer la méthode de la décomposition en ondelettes de Legendre, on a besoin de la définition de ces ondelettes ainsi que de quelques résultats sur les bases de certains espaces tels que $L^2(]0, 1[)$ et $C([0, T]; L^2(]0, 1[))$.

Pour appliquer la méthode des différences finies, on va rappeler quelques schémas numériques ainsi que les conditions qui assurent leurs convergence.

1 Les polynômes de Legendre et leurs propriétés :

Les polynômes de Legendre ont été introduits en 1784 par le mathématicien français Adrien Marie Legendre (1752-1833).

Définition 1.1 Les polynômes de Legendre notés L_m , $m \geq 0$ sont des polynômes de degré m définis sur $[-1, 1]$, comme étant les solutions de l'équation différentielle, dite de Legendre suivante

$$(1 - x^2)L_m'' - 2xL_m' + m(m + 1)L_m = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Proposition 1.1 [6] Les polynômes de Legendre L_m , $m \geq 0$, sont caractérisés par l'une des représentations suivantes :

1. Ils sont définis par la formule dite de Rodriguez

$$L_m(x) = \frac{1}{m!2^m} \frac{d^m}{dx^m} (x^2 - 1)^m; \quad m \geq 0.$$

2. Ils vérifient la formule de récurrence

$$\begin{cases} L_0(x) = 1 \\ L_1(x) = x \\ L_{m+1}(x) = \frac{2m+1}{m+1} xL_m(x) - \frac{m}{m+1} L_{m-1}(x), \quad m = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (1.1)$$

3. Leur forme analytique est donné par

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad L_m(x) = \sum_{k=0}^m (-1)^{m+k} \frac{(m+k)! x^k}{(m-k)!(k!)^2}.$$

4. Ils admettent la représentation intégrale

$$L_m(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [x + \sqrt{1-x^2} \cos(t)]^m dt.$$

Pour énoncer une propriété importante vérifiée par ces polynômes on a besoin de la définition suivante.

Définition 1.2 [5] $L^2(]a, b[)$ est l'espace des fonctions définies sur $]a, b[$ et qui sont de carré intégrables sur $]a, b[$, c'est à dire

$$f \in L^2(]a, b[) \Leftrightarrow \int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty.$$

Proposition 1.2 ([6],[5]) La famille des polynômes de Legendre $\{L_m\}_{m \geq 0}$ est orthogonale dans $L^2(]-1, 1[)$. De plus on a

$$\langle L_n, L_m \rangle = \int_{-1}^1 L_n(x)L_m(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \frac{2}{2n+1} & \text{si } n = m \end{cases}$$

où $\langle ., . \rangle$, représente le produit scalaire dans $L^2(]-1, 1[)$.

Remarque 1.1 La famille $\left\{ \sqrt{\frac{2m+1}{2}} L_m \right\}_{m \geq 0}$ est orthonormé dans $L^2(]-1, 1[)$.

Propriétés : Ces polynômes possèdent des propriétés dont voici quelques unes :

1. Le polynôme de Legendre L_m est pair (respectivement impair) si m est pair (respectivement impair), de plus

$$L_m(1) = 1 \text{ et } L_m(-1) = (-1)^m, \forall m \geq 0 \quad (1.2)$$

2. La primitive du polynôme de Legendre est donnée par

$$\int L_m(x)dx = \frac{1}{2m+1} (L_{m+1}(x) - L_{m-1}(x)). \quad (1.3)$$

2 Les ondelettes de Legendre

Dans toute la suite, on note par j un entier positif non nul fixé. L'intervalle $[0, 1]$ est subdivisé en 2^{j-1} sous intervalles notés I_n , tels que

$$I_n = \left[\frac{n-1}{2^{j-1}}, \frac{n}{2^{j-1}} \right[; n = 1, \dots, 2^{j-1} - 1$$

$$I_n = \left[\frac{n-1}{2^{j-1}}, \frac{n}{2^{j-1}} \right]; \text{ pour } n = 2^{j-1},$$

de telle sorte que

$$[0, 1] = \bigcup_{1 \leq n \leq 2^{j-1}} I_n.$$

Les ondelettes de Legendre, notées $\Psi_{nm}(x) = \Psi(n, m, j, x)$, sont obtenues par dilatation avec un paramètre $a = 2^{-j}$, et par translation avec un paramètre $b = (2n-1)2^{-j}$, des polynômes de Legendre normalisés; c'est à dire

$$\Psi_{nm}(x) = \left(m + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} |a|^{-\frac{1}{2}} L_m\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

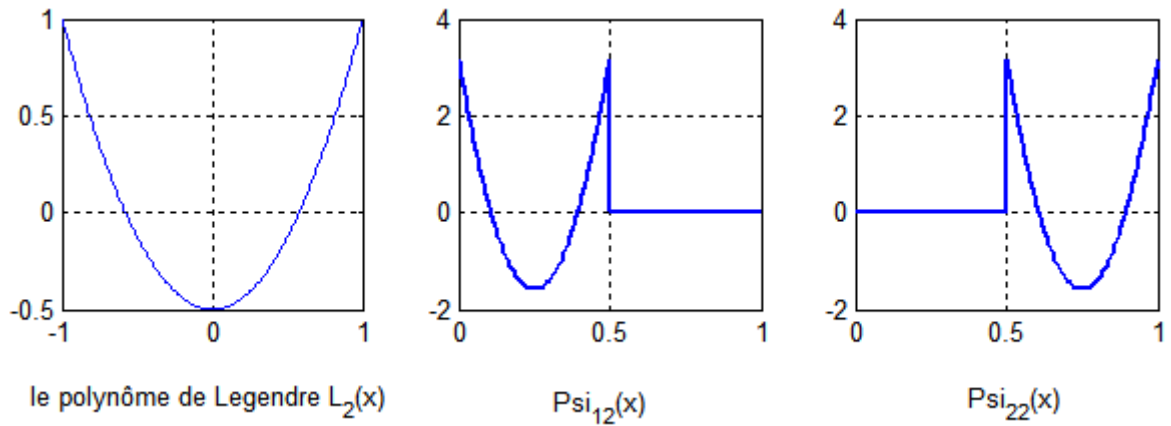


FIGURE 1.1 – Ondelettes associées au polynôme d'ordre 2.

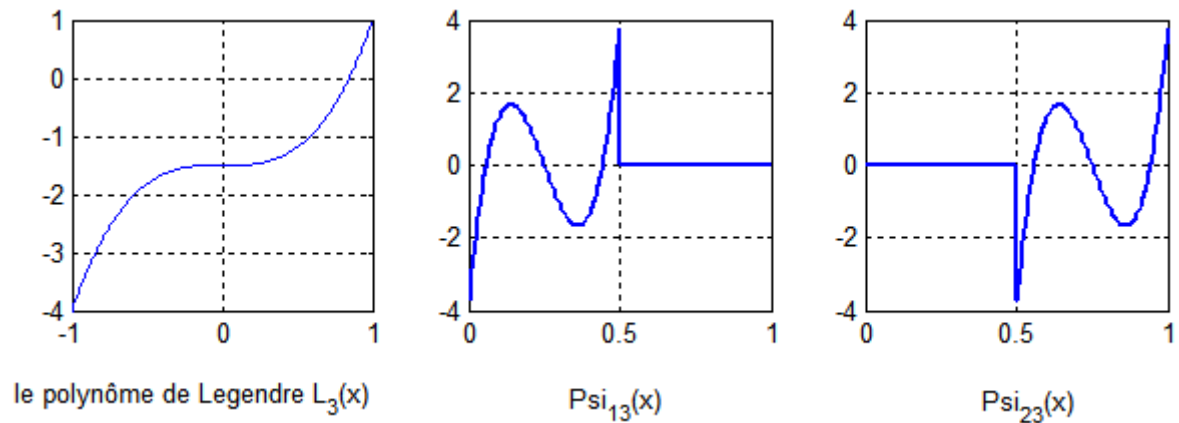


FIGURE 1.2 – Ondelettes associées au polynôme d'ordre 3.

Définition 1.3 Les ondelettes de Legendre sont définies sur l'intervalle $[0, 1]$ par

$$\Psi_{nm}(x) = \begin{cases} (m + \frac{1}{2})^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{j}{2}} L_m(2^j x - 2n + 1) & \text{si } \frac{n-1}{2^{j-1}} \leq x < \frac{n}{2^{j-1}} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.4)$$

avec $n = 1, 2, \dots, 2^{j-1}$; ($j \in \mathbb{N}^*$), représente le nombre des niveaux de la décomposition de l'intervalle $[0, 1]$ et $m \geq 0$ représente le degré du polynôme de Legendre.

Exemple 1.1 Quelques exemples de polynômes de Legendre et leurs ondelettes associées.

Proposition 1.3 [2] la famille d'ondelettes définies par (1.4), forme un ensemble orthonormé dans l'espace $L^2([0, 1])$. Elle vérifie donc la propriété

$$\langle \Psi_{nm}, \Psi_{n'm'} \rangle = \int_0^1 \Psi_{nm}(x) \Psi_{n'm'}(x) dx = \delta_{nn'} \delta_{mm'},$$

où $\delta_{nn'}$ représente le symbole de Kronecker; $\delta_{nn'} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = n' \\ 0 & \text{si } n \neq n'. \end{cases}$

3 L'approximation dans des espaces fonctionnels

3.1 L'approximation dans $L^2(]0, 1[)$

Théorème 1.1 [2] La famille d'ondelettes $\{\Psi_{nm}\}_{1 \leq n \leq 2^{j-1}, m \geq 0}$ est une base hilbertienne de $L^2(]0, 1[)$.

C'est à dire que toute fonction $f \in L^2(]0, 1[)$ s'écrit sous la forme

$$f(x) = \sum_{1 \leq n \leq 2^{j-1}} \sum_{m \geq 0} C_{nm} \Psi_{nm}(x), \quad (1.5)$$

avec

$$C_{nm} = \langle f, \Psi_{nm} \rangle = \int_0^1 f(x) \Psi_{nm}(x) dx.$$

Remarque 1.2 1. Le symbole $\langle \cdot, \cdot \rangle$ représente le produit scalaire dans $L^2(]0, 1[)$.

2. L'égalité dans (1.5) est prise au sens $L^2(]0, 1[)$, c'est à dire

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| f(\cdot) - \sum_{1 \leq n \leq 2^{j-1}} \sum_{m=0}^{m=k} C_{nm} \Psi_{nm}(\cdot) \right\|_{L^2(]0, 1[)} = 0;$$

où la norme dans $L^2(]0, 1[)$ est définie par

$$\|f\|_{L^2(]0, 1[)} = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

3. On obtient une approximation d'une fonction $f \in L^2(]0, 1[)$ en tronquant la série (1.5), ce qui aboutit à l'écriture

$$f(x) \simeq \sum_{1 \leq n \leq 2^{j-1}} \sum_{m=0}^{M-1} C_{nm} \Psi_{nm}(x),$$

qui prend la forme

$$f(x) = C^T \Psi(x),$$

avec C et $\Psi(x)$ sont deux vecteurs d'ordre $M \times 2^{j-1}$, définis par

$$C = [C_{10}, C_{11}, \dots, C_{1M-1}, C_{20}, C_{21}, \dots, C_{2M-1}, \\ C_{2^{j-1}0}, C_{2^{j-1}1}, \dots, C_{2^{j-1}M-1}]^T$$

et

$$\Psi(x) = [\Psi_{10}(x), \Psi_{11}(x), \dots, \Psi_{1M-1}(x), \Psi_{20}(x), \Psi_{21}(x), \dots, \Psi_{2M-1}(x), \\ \Psi_{2^{j-1}0}(x), \Psi_{2^{j-1}1}(x), \dots, \Psi_{2^{j-1}M-1}(x)]^T \quad (1.6)$$

Exemple 1.2 Pour $j = 2$ et $M = 3$, les fonctions $f(x) = 1$, $g(x) = x$ et $h(x) = \exp(x)$, se décomposent comme suit

$$f(x) = F^T \Psi(x)$$

$$g(x) = G^T \Psi(x)$$

$$h(x) = H^T \Psi(x),$$

où $\Psi(x) = [\Psi_{10}(x), \Psi_{11}(x), \Psi_{12}(x), \Psi_{20}(x), \Psi_{21}(x), \Psi_{21}(x)]^T$, F, G et H $\in \mathbb{R}^6$. Les vecteurs coefficients F, G et H sont obtenus numériquement en transformant les égalités ci-dessus en systèmes matriciels. On considère pour cela les points (voir[4]) $x_i = \frac{i-0.5}{M \times 2^{j-1}}$; $i = 1, \dots, 6$ (dans ce cas $M \times 2^{j-1} = 6$).

On a donc

$$F = ((\Psi(x_i))_{1 \leq i \leq 6}^{-1})^T (f(x_i))_{1 \leq i \leq 6}$$

$$G = ((\Psi(x_i))_{1 \leq i \leq 6}^{-1})^T (g(x_i))_{1 \leq i \leq 6}$$

$$H = ((\Psi(x_i))_{1 \leq i \leq 6}^{-1})^T (h(x_i))_{1 \leq i \leq 6}.$$

Les résultats Matlab, donne

$$F = (0.7071 \quad 0 \quad 0 \quad 0.7071 \quad 0 \quad 0)^T$$

$$G = (0.1768 \quad 0.1021 \quad 0 \quad 0.5303 \quad 0.1021 \quad 0)^T$$

$$H = (0.9174 \quad 0.1317 \quad 0.0085 \quad 1.5126 \quad 0.2171 \quad 0.0140)^T.$$

3.2 L'approximation dans $C([0, T]; L^2([0, 1]))$

Définition 1.4 [5] L'espace $C([0, T]; L^2([0, 1]))$ est l'espace des fonctions f qui dépendent des deux variables (t, x) telles que f est continue par rapport à $t \in [0, T]$ et $f(t, \cdot) \in L^2([0, 1])$ pour tout $t \in [0, T]$.

Théorème 1.2 [2] (La décomposition dans $C([0, T]; L^2([0, 1]))$) Toute fonction $f(\cdot, \cdot) \in C([0, T]; L^2([0, 1]))$ admet la décomposition :

$$f(t, x) = \sum_{n=1}^{2^{j-1}} \sum_{m=0}^{+\infty} C_{nm}(t) \Psi_{nm}(x), \forall t \in [0, T], \quad (1.7)$$

où les fonctions coefficients $C_{nm}(t)$, qui dépendent de la variable t , sont définies par :

$$C_{nm}(t) = \langle f(t, \cdot), \Psi_{nm} \rangle = \int_0^1 f(t, x) \Psi_{nm}(x) dx, \forall t \in [0, T].$$

Théorème 1.3 [2] (De convergence) Si la solution $u(\cdot, \cdot) \in C([0, T]; C^2([0, 1]))$ et s'il existe un nombre réel positif α tel que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) \leq \alpha; \forall (t, x) \in [0, T] \times [0, 1],$$

alors

1. pour $m \geq 0$ et $1 \leq n \leq 2^{j-1}$, on a :

$$|C_{nm}(t)| \leq \frac{\sqrt{6}\alpha 2^{-\frac{5}{2}j}}{\sqrt{(2m-1)(2m+3)(2m+5)(2m-3)}},$$

2. la série donnée par (1.7) est uniformément convergente sur $[0, T] \times [0, 1]$.

Remarque 1.3 1. Du fait que la série (1.7) est convergente, alors toute fonction $f(.,.) \in C([0, T]; C^2([0, 1]))$ peut être approchée par la somme finie (obtenue par troncature de cette série) ce qui conduit à :

$$f(t, x) \simeq \sum_{n=1}^{2^{j-1}M-1} \sum_{m=0}^{2^{j-1}M-1} C_{nm}(t) \Psi_{nm}(x),$$

que l'on peut écrire sous la forme

$$f(t, x) \simeq \sum_{n=1}^{2^{j-1}M-1} \sum_{m=0}^{2^{j-1}M-1} C_{nm}(t) \Psi_{nm}(x) = C^T(t) \Psi(x), \quad (1.8)$$

où $C(t)$ et $\Psi(x)$ sont deux vecteurs de dimension $2^{j-1}M$ donnés par

$$C(t) = [C_{10}(t), C_{11}(t), \dots, C_{1M-1}(t), C_{20}(t), C_{21}(t), \dots, C_{2M-1}(t), \\ C_{2^{j-1}0}(t), C_{2^{j-1}1}(t), \dots, C_{2^{j-1}M-1}(t)]^T$$

et $\Psi(x)$ est défini par (1.6).

2. C'est la décomposition (1.8) qui va intervenir dans la résolution des problèmes aux limites. Il s'agit de la méthode des ondelettes qui sera exposée et appliquée sur un exemple, dans le dernier chapitre.

Exemple 1.3 La fonction à variable séparée $f(t, x) = h(t) \exp(x)$, se décompose systématiquement en

$$f(t, x) = C^T(t) \Psi(x),$$

où

$$C^T(t) = h(t)H,$$

H est le vecteur déterminé dans l'exemple précédent (pour $j = 2$ et $M = 3$).

Pour des fonctions quelconques, la décomposition se fait pour chaque t fixé.

4 La méthode des différences finies

La méthode des différences finies consiste à approcher la dérivée de la fonction inconnue (du problème donné) en un point par une somme finie des valeurs de l'inconnue u en un certain nombre de points. Ces points apparaissent lors du maillage du domaine dans lequel est posé le problème.

On rappelle qu'on veut résoudre le problème (1) cité dans l'introduction et qui est posé sur le domaine $[0, T] \times [0, 1]$.

Le maillage de ce domaine est obtenu en choisissant :

- un pas de temps Δt ($\Delta t = \frac{T}{N}$ où N est un entier non nul fixé)
- un pas d'espace Δx ($\Delta x = \frac{1}{M}$ où M est un entier non nul fixé),

les points (ou les noeuds) de la discrétisation sont alors

$$t_i = i \Delta t; \quad i = 0, \dots, N, \quad \text{et} \quad x_j = j \Delta x; \quad j = 0, \dots, M.$$

On distingue différents schémas numériques pour approcher les dérivées, dont voici quelques uns.

4.1 Les schémas numériques

On peut citer trois schémas numériques pour approcher les dérivées de différents ordres :

Schémas centrés pour l'approximation de la dérivée première et seconde

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t_i, x_j) \simeq \frac{u(t_i, x_{j+1}) - u(t_i, x_{j-1})}{2\Delta x}, \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_i, x_j) \simeq \frac{u(t_i, x_{j+1}) - 2u(t_i, x_j) + u(t_i, x_{j-1}))}{\Delta x^2}.$$

Schéma progressif pour l'approximation de la dérivée première

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t_i, x_j) \simeq \frac{u(t_i, x_{j+1}) - u(t_i, x_j)}{\Delta x}.$$

Schéma régressif pour l'approximation de la dérivée première

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t_i, x_j) \simeq \frac{u(t_i, x_j) - u(t_{i-1}, x_j)}{\Delta t}.$$

Remarque 1.4 L'obtention des différents schémas est basée essentiellement sur le développement limité de la fonction inconnue u .

En effet; pour aboutir au schéma (1.9), on effectue un développement limité des termes $u(t_i, x_{j+1})$ et $u(t_i, x_{j-1})$ à l'ordre trois (on suppose que la fonction u est de classe $C^3([0, T] \times]0, 1[)$), ce qui donne

$$\begin{aligned} u(t_i, x_{j+1}) &= u(t_i, x_j + \Delta x) \\ &= u(t_i, x_j) + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(t_i, x_j) + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_i, x_j) + \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t_i, \xi_j), \end{aligned} \quad (1.10)$$

avec $x_j < \xi_j < x_{j+1}$

$$\begin{aligned} u(t_i, x_{j-1}) &= u(t_i, x_j - \Delta x) \\ &= u(t_i, x_j) - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(t_i, x_j) + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_i, x_j) - \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t_i, \xi'_j), \end{aligned} \quad (1.11)$$

avec $x_{j-1} < \xi'_j < x_j$.

En faisant la différence de ces deux développements limités, on obtient

$$u(t_i, x_{j+1}) - u(t_i, x_{j-1}) = 2\Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(t_i, x_j) + \frac{\Delta x^3}{3!} \left[\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t_i, \xi_j) - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t_i, \xi'_j) \right].$$

En arrangeant les termes, on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t_i, x_j) = \frac{u(t_i, x_{j+1}) - u(t_i, x_{j-1})}{2\Delta x} - \underbrace{\frac{\Delta x^2}{2 \times 3!} \left[\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t_i, \xi_j) - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t_i, \xi'_j) \right]}_{\text{terme à négliger}}. \quad (1.12)$$

En négligeant le terme souligné, on trouve l'approximation (1.9).

4.2 Notion de consistance et de stabilité

Soit à résoudre le problème continu

$$\begin{cases} L(u(t, x)) = F(t, x), \text{ sur }]0, T[\times]0, 1[\\ + \text{ conditions} \end{cases}$$

où L est un opérateur différentiel, u est la fonction inconnue et F une fonction donnée. On considère le problème discret

$$L_{\Delta t, \Delta x} \left(\left\{ u_j^i; i_1 \leq i \leq i_2, j_1 \leq j \leq j_2 \right\} \right) = F(t_i, x_j), \quad (1.13)$$

obtenu par application des différences finies, où $L_{\Delta t, \Delta x}$ est l'opérateur discret qui approche l'opérateur différentiel L et u_j^i une approximation de l'inconnue $u(t_i, x_j)$.

Définition 1.5 Si dans (1.13), $i_2 - i_1 = 1$, on dit que le schéma est à un pas de temps. il est dit multi-pas dans le cas contraire (si $i_2 - i_1 \geq 2$).

Définition 1.6 L'erreur de consistance, notée $E_{\Delta t, \Delta x}$, est définie comme étant la différence entre l'opérateur de dérivation continu et son approché, l'opérateur discret, c'est à dire

$$E_{\Delta t, \Delta x} = L - L_{\Delta t, \Delta x}.$$

Exemple 1.4 L'erreur de consistance du schéma (1.9), notée $E(t_i, x_j)$, est définie par

$$E(t_i, x_j) = \frac{\partial u}{\partial x}(t_i, x_j) - \frac{u(t_i, x_{j+1}) - u(t_i, x_{j-1})}{2\Delta x} \quad (1.14)$$

Définition 1.7 On dit que l'opérateur discret $L_{\Delta t, \Delta x}$ est consistant avec l'opérateur continu L (ou que l'approximation est consistante) si l'erreur de consistance tend uniformément vers zéro quand les pas tendent vers zéro;

$$\lim_{(\Delta t, \Delta x) \rightarrow (0,0)} \|E_{\Delta t, \Delta x}\| = 0.$$

On dit que l'approximation est consistante d'ordre p_1 en temps et d'ordre p_2 en espace s'il existe deux constantes c_1 et c_2 indépendantes des pas Δt et Δx telles que

$$\|E_{\Delta t, \Delta x}\| \leq c_1 \Delta t^{p_1} + c_2 \Delta x^{p_2}.$$

Exemple 1.5 Si la fonction u est de classe C^3 par rapport à ses variables, de (1.12), on vérifie facilement que l'erreur de consistance définie par (1.14) est d'ordre 2. En effet, de (1.12), on a

$$\begin{aligned} |E(t_i, x_j)| &= \left| \frac{\partial u}{\partial x}(t_i, x_j) - \frac{u(t_i, x_{j+1}) - u(t_i, x_{j-1})}{2\Delta x} \right| \\ &= \left| \frac{\Delta x^2}{2 \times 3!} \left[\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t_i, \xi_j) - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t_i, \xi'_j) \right] \right| \\ &\leq c \Delta x^2 \text{ avec } c = \frac{1}{3!} \max_{t,x} \left| \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t, x) \right|. \end{aligned}$$

On note par le vecteur $U^{(i)} = (u_j^i)_j$, la solution numérique à l'instant t_i du schéma (1.13). Le vecteur donné $U^{(0)} = (u_j^0)_j$ représente la condition initiale.

Définition 1.8 Un schéma aux différences finies est dit stable pour la norme $\|\cdot\|$, s'il existe une constante $c > 0$ indépendante des pas Δt et Δx telle que

$$\|U^{(i)}\| \leq c \|U^{(0)}\|; \forall i \geq 1.$$

Si cette inégalité n'a lieu que pour des pas Δt et Δx astreints à certaines inégalités, on dit que le schéma est conditionnellement stable.

Remarque 1.5 1. Cette notion traduit le fait qu'une petite perturbation de la donnée initiale $U^{(0)}$ n'introduira pas une perturbation trop grande sur la solution calculée aux différents temps t_i pour $i = 1, \dots, N$.

2. Pour des schémas multi-pas (quand le calcul de $U^{(i)}$ exige la connaissance de $U^{(i-1)}$, $U^{(i-2)}$, ...), d'autres définitions plus adaptées sont proposées pour l'étude de la stabilité (voir [3]).

4.3 La convergence d'un schéma numérique

Définition 1.9 On dit que le schéma numérique est convergent si

$$\lim_{(\Delta t, \Delta x) \rightarrow (0,0)} \|u_j^i - u(t_i, x_j)\| = 0, \text{ pour tout } i \text{ et } j.$$

Définition 1.10 On dit que le schéma numérique (1.13) est linéaire si l'opérateur discret $L_{\Delta t, \Delta x}$ est linéaire par rapport à ses arguments u_j^i ; $i_1 \leq i \leq i_2, j_1 \leq j \leq j_2$.

Dans le cas où le problème est linéaire, on dispose d'un théorème qui assure la convergence de la solution numérique vers la solution exacte.

Théorème 1.4 [3] (De LAX-RITCHMYER)

Un schéma numérique linéaire et consistant est convergent si et seulement si il est stable.

Chapitre 2

La matrice opérationnelle d'intégration

Pour résoudre les problèmes aux limites par la méthode des ondelettes de Legendre, on a besoin d'introduire la matrice opérationnelle d'intégration. Cette matrice a été donnée en 2000 par Razzaghi [8]. Mais, on a constaté qu'elle est obtenue de manière approximative.

Dans un premier temps, on va, à travers un exemple, voir à quel niveau intervient cette approximation.

Dans un second temps, on propose de calculer exactement la matrice opérationnelle d'intégration de Legendre.

1 Matrice d'intégration de Razzaghi

La matrice opérationnelle d'intégration, notée P , est définie par Razzaghi-Youssoufi (dans [8]) par :

$$\int_0^x \Psi(t) dt = P\Psi(x), \quad (2.1)$$

où $\Psi(x)$ est le vecteur d'ondelette défini dans (1.6).

Pour déterminer cette matrice, on intègre chaque composante Ψ_{nm} ; $n = 1, 2, \dots, 2^{j-1}$; $m = 0, 1, \dots, M-1$; du vecteur Ψ sur $[0, x]$ et on exprime le résultat de cette intégration en fonction des composantes de ce vecteur.

Exemple 2.1 On calcule cette matrice pour $M = 3$, et $j = 2$. dans ce cas le vecteur $\Psi(x)$ est donné par

$$\Psi(x) = [\Psi_{10}(x), \Psi_{11}(x), \Psi_{12}(x), \Psi_{20}(x), \Psi_{21}(x), \Psi_{22}(x)]^T,$$

où les trois fonctions du premier niveau ($n = 1$) sont

$$\Psi_{10}(t) = \begin{cases} 2^{\frac{1}{2}} & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}[\\ 0 & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1[\end{cases}$$

$$\Psi_{11}(t) = \begin{cases} 6^{\frac{1}{2}}(4t-1) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}[\\ 0 & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1[\end{cases},$$

et

$$\Psi_{12}(t) = \begin{cases} 10^{\frac{1}{2}}[\frac{3}{2}(4t-1)^2 - \frac{1}{2}] & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}[\\ 0 & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1[\end{cases}.$$

Le calcul explicite de l'intégration de chaque composante donne, pour le premier niveau

$$\int_0^x \Psi_{10}(t) dt = \begin{cases} \int_0^x 2^{\frac{1}{2}} dt & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}[\\ \int_0^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{1}{2}} dt + \int_{\frac{1}{2}}^x 0 dt & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1[\end{cases}$$

$$\int_0^x \Psi_{10}(t) dt = \begin{cases} 2^{\frac{1}{2}} x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}[\\ \frac{2^{\frac{1}{2}}}{2} & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1[\end{cases} .$$

Ces polynômes $2^{\frac{1}{2}} x$ et $\frac{2^{\frac{1}{2}}}{2}$ qui sont de degré ≤ 1 , s'écrivent en fonction de Ψ_{1m} et Ψ_{2m} avec $m \leq 1$,

$$\int_0^x \Psi_{10}(t) dt = \frac{1}{4} \Psi_{10}(x) + \frac{2^{\frac{1}{2}}}{4 \times 6^{\frac{1}{2}}} \Psi_{11}(x) + \frac{1}{2} \Psi_{20}(x).$$

Pour la fonction Ψ_{11}

$$\int_0^x \Psi_{11}(t) dt = \begin{cases} \int_0^x 6^{\frac{1}{2}}(4t-1) dt & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}[\\ \int_0^{\frac{1}{2}} 6^{\frac{1}{2}}(4t-1) dt + \int_{\frac{1}{2}}^x 0 dt & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1[\end{cases}$$

$$\int_0^x \Psi_{11}(t) dt = \begin{cases} 2 \times 6^{\frac{1}{2}} x^2 - 6^{\frac{1}{2}} x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}[\\ 0 & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1[\end{cases} .$$

Le résultat de cette intégration est nul sur le second niveau $(\frac{1}{2}, 1[)$, il s'exprimera qu'en fonction des ondelettes du premier niveau. Comme le polynôme $2 \times 6^{\frac{1}{2}} x^2 - 6^{\frac{1}{2}} x$ est degré ≤ 2 , il s'écrit en fonction de Ψ_{1m} avec $m \leq 2$,

$$\int_0^x \Psi_{11}(t) dt = -\frac{3^{\frac{1}{2}}}{12} \Psi_{10}(x) + \frac{3^{\frac{1}{2}}}{12 \times 5^{\frac{1}{2}}} \Psi_{12}(x).$$

Pour la fonction Ψ_{12}

$$\int_0^x \Psi_{12}(t) dt = \begin{cases} \int_0^x 10^{\frac{1}{2}} [\frac{3}{2}(4t-1)^2 - \frac{1}{2}] dt & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}[\\ \int_0^{\frac{1}{2}} 10^{\frac{1}{2}} [\frac{3}{2}(4t-1)^2 - \frac{1}{2}] dt + \int_{\frac{1}{2}}^x 0 dt & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1[\end{cases}$$

$$\int_0^x \Psi_{12}(t) dt = \begin{cases} 10^{\frac{1}{2}} (8x^3 - 6x^2 + x) & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}[\\ 0 & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1[\end{cases} ,$$

le polynôme $10^{\frac{1}{2}} (8x^3 - 6x^2 + x)$ (défini sur le premier niveau) qui est de degré ≤ 3 , s'écrit en fonction de Ψ_{1m} avec $m \leq 3$,

$$\int_0^x \Psi_{12}(t) dt = \frac{1}{2^2} \frac{1}{5^{\frac{1}{2}}} [\frac{1}{7^{\frac{1}{2}}} \Psi_{13}(x) - \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} \Psi_{11}(x)].$$

C'est à ce niveau que se situe l'approximation. On rappelle qu'on veut exprimer $\int_0^x \Psi(t) dt$ en fonction du vecteur $\Psi(x)$. Comme la fonction Ψ_{13} ne figure pas dans le vecteur Ψ , les auteurs, dans [8] ont approché ce dernier résultat en tronquant ce terme, ce qui donne

$$\int_0^x \Psi_{12}(t) dt \simeq -\frac{5^{\frac{1}{2}}}{20 \times 3^{\frac{1}{2}}} \Psi_{11}(x).$$

Pour les fonctions du deuxième niveau, on suit les mêmes calculs, on obtient

$$\Psi_{20}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}[\\ 2^{\frac{1}{2}} & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1[\end{cases}$$

$$\int_0^x \Psi_{20}(t) dt = \frac{1}{4}\Psi_{20}(x) + \frac{2^{\frac{1}{2}}}{4 \times 6^{\frac{1}{2}}}\Psi_{21}(x)$$

$$\Psi_{21}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}[\\ 6^{\frac{1}{2}}(4t-1) & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1[\end{cases}$$

$$\int_0^x \Psi_{21}(t) dt = -\frac{3^{\frac{1}{2}}}{12}\Psi_{20}(x) + \frac{3^{\frac{1}{2}}}{12 \times 5^{\frac{1}{2}}}\Psi_{22}(x)$$

$$\Psi_{22}(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}[\\ 10^{\frac{1}{2}}[\frac{3}{2}(4t-1)^2 - \frac{1}{2}] & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1[\end{cases}$$

$$\int_0^x \Psi_{22}(t) dt = \frac{1}{2^2} \frac{1}{5^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{1}{7^{\frac{1}{2}}}\Psi_{23}(x) - \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}}\Psi_{21}(x) \right).$$

On remarque que le même problème se pose, la fonction Ψ_{23} ne figure pas dans le vecteur Ψ , ce résultat est approché par

$$\int_0^x \Psi_{22}(t) dt \simeq -\frac{5^{\frac{1}{2}}}{20 \times 3^{\frac{1}{2}}}\Psi_{21}(x).$$

Alors de la caractérisation (2.1)

$$\int_0^x \Psi_6(t) dt = P_{6 \times 6} \Psi_6(x)$$

et sachant que

$$\Psi_6 = [\Psi_{10}\Psi_{11}\Psi_{12}\Psi_{20}\Psi_{21}\Psi_{22}]^T,$$

on peut déduire l'expression de la matrice d'intégration $P_{6 \times 6}$

$$P_{6 \times 6} \simeq \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4 \times \sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4 \times \sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{4 \times \sqrt{3} \sqrt{5}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4 \times \sqrt{3} \sqrt{5}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4 \times \sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4 \times \sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{4 \times \sqrt{3} \sqrt{5}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4 \times \sqrt{3} \sqrt{5}} & 0 \end{bmatrix}.$$

Ces calculs se généralisent pour tout $M \geq 0$ et $j \geq 1$. On exprime cette généralisation dans la proposition suivante

Proposition 2.1 La matrice opérationnelle d'intégration de Legendre P est de la forme

$$P = \frac{1}{2^j} \begin{bmatrix} L & F & F & \cdots & F \\ \mathbf{0} & L & F & \cdots & F \\ \vdots & \mathbf{0} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & F \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & L \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

où $\mathbf{0}$ est la matrice nulle d'ordre M. F et L sont des matrices d'ordre M qui sont données par

$$F = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{5}} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{5}\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{7}} & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{\sqrt{7}\sqrt{5}} & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \frac{-1}{\sqrt{2M-3}\sqrt{2M-5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2M-3}\sqrt{2M-1}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2M-1}\sqrt{2M-3}} & 0 \end{bmatrix}.$$

Preuve

$m = 0$, en rappelant la définition de Ψ_{n0} , on a

$$\begin{aligned} \int_0^x \Psi_{n0}(t) dt &= \begin{cases} \int_0^x 2^{\frac{j}{2}} \sqrt{\frac{1}{2}} L_0(2^j t - 2n + 1) dt & \text{si } \frac{n-1}{2^{j-1}} \leq t \leq \frac{n}{2^{j-1}} \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq \frac{n-1}{2^{j-1}} \\ \int_{\frac{n-1}{2^{j-1}}}^x 2^{\frac{j}{2}} \sqrt{\frac{1}{2}} L_0(2^j t - 2n + 1) dt & \text{si } \frac{n-1}{2^{j-1}} \leq x < \frac{n}{2^{j-1}} \\ \int_{\frac{n-1}{2^{j-1}}}^{\frac{n}{2^{j-1}}} 2^{\frac{j}{2}} \sqrt{\frac{1}{2}} L_0(2^j t - 2n + 1) dt & \text{si } \frac{n}{2^{j-1}} \leq x \end{cases} \end{aligned}$$

Sachant que $L_0(t) = 1$ pour tout $t \in \left[\frac{n-1}{2^{j-1}}, \frac{n}{2^{j-1}} \right]$, on a

$$\int_0^x \Psi_{n0}(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \left[\frac{\hat{n}-1}{2^{j-1}}, \frac{\hat{n}}{2^{j-1}} \right]; \hat{n} = 1, \dots, n-1 \\ 2^{\frac{j}{2}} \sqrt{\frac{1}{2}} \left(x - \frac{n-1}{2^{j-1}} \right) & \text{si } x \in \left[\frac{n-1}{2^{j-1}}, \frac{n}{2^{j-1}} \right] \\ 2^{\frac{j}{2}} \sqrt{\frac{1}{2}} \frac{1}{2^{j-1}} & \text{si } x \in \left[\frac{\hat{n}-1}{2^{j-1}}, \frac{\hat{n}}{2^{j-1}} \right]; \hat{n} = n+1, \dots, 2^{j-1}. \end{cases}$$

Comme

$$\begin{aligned} 2^{\frac{j}{2}} \sqrt{\frac{1}{2}} \left(x - \frac{n-1}{2^{j-1}} \right) &= \frac{1}{2^j} 2^{\frac{j}{2}} \sqrt{\frac{1}{2}} \left((2^j x - 2n + 1) + 1 \right) \\ &= \frac{1}{2^j} \left(\sqrt{\frac{1}{3}} \sqrt{\frac{3}{2}} 2^{\frac{j}{2}} (2^j x - 2n + 1) + 2^{\frac{j}{2}} \sqrt{\frac{1}{2}} \right), \end{aligned}$$

on peut exprimer la dernière intégrale par

$$\int_0^x \Psi_{n0}(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \left[\frac{\hat{n}-1}{2^{j-1}}, \frac{\hat{n}}{2^{j-1}} \right]; \hat{n} = 1, \dots, n-1 \\ \frac{1}{2^j} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \Psi_{n1}(x) + \Psi_{n0}(x) \right) & \text{si } x \in \left[\frac{n-1}{2^{j-1}}, \frac{n}{2^{j-1}} \right] \\ \frac{1}{2^{j-1}} \Psi_{\hat{n}0}(x) & \text{si } x \in \left[\frac{\hat{n}-1}{2^{j-1}}, \frac{\hat{n}}{2^{j-1}} \right]; \hat{n} = n+1, \dots, 2^{j-1}. \end{cases}$$

On peut réécrire la relation de la manière

$$\int_0^x \Psi_{n0}(t) dt = \frac{1}{2^j} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \Psi_{n1}(x) + \Psi_{n0}(x) + 2 \sum_{\hat{n}=n+1}^{2^{j-1}} \Psi_{\hat{n}0}(x) \right). \quad (2.4)$$

Pour $1 \leq m \leq M-2$,

$$\int_0^x \Psi_{nm}(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq \frac{n-1}{2^{j-1}} \\ \int_{\frac{n-1}{2^{j-1}}}^x 2^{\frac{j}{2}} \sqrt{\frac{2m+1}{2}} L_m(2^j t - 2n + 1) dt & \text{si } \frac{n-1}{2^{j-1}} \leq x < \frac{n}{2^{j-1}} \\ \int_{\frac{n-1}{2^{j-1}}}^{\frac{n}{2^{j-1}}} 2^{\frac{j}{2}} \sqrt{\frac{2m+1}{2}} L_m(2^j t - 2n + 1) dt & \text{si } \frac{n}{2^{j-1}} \leq x. \end{cases}$$

$$\int_0^x \Psi_{nm}(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq \frac{n-1}{2^{j-1}} \\ 2^{\frac{j}{2}} \sqrt{\frac{2m+1}{2}} \frac{1}{2^j} \frac{1}{2m+1} \left(L_{m+1}(2^j t - 2n + 1) - L_{m-1}(2^j t - 2n + 1) \right) \Big|_{t=\frac{n-1}{2^{j-1}}}^{t=x}, & \text{si } \frac{n-1}{2^{j-1}} \leq x < \frac{n}{2^{j-1}} \\ 2^{\frac{j}{2}} \sqrt{\frac{2m+1}{2}} \frac{1}{2^j} \frac{1}{2m+1} \left(L_{m+1}(2^j t - 2n + 1) - L_{m-1}(2^j t - 2n + 1) \right) \Big|_{t=\frac{n-1}{2^{j-1}}}^{t=\frac{n}{2^{j-1}}}, & \text{si } \frac{n}{2^{j-1}} \leq x \end{cases}$$

$$\int_0^x \Psi_{nm}(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq \frac{n-1}{2^{j-1}} \\ 2^{\frac{j}{2}} \sqrt{\frac{2m+1}{2}} \frac{1}{2^j} \frac{1}{2m+1} \left(L_{m+1}(2^j x - 2n + 1) - L_{m-1}(2^j x - 2n + 1) \right) & \text{si } \frac{n-1}{2^{j-1}} \leq x < \frac{n}{2^{j-1}} \\ 0 & \text{si } \frac{n}{2^{j-1}} \leq x, \end{cases} \quad (2.5)$$

car, de (1.2), on a

$$\begin{aligned} \left(L_{m+1}(2^j t - 2n + 1) - L_{m-1}(2^j t - 2n + 1) \right) \Big|_{t=\frac{n-1}{2^{j-1}}} &= L_{m+1}(-1) - L_{m-1}(-1) \\ &= 0, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \left(L_{m+1}(2^j t - 2n + 1) - L_{m-1}(2^j t - 2n + 1) \right) \Big|_{t=\frac{n}{2^{j-1}}} &= L_{m+1}(1) - L_{m-1}(1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} & 2^{\frac{j}{2}} \sqrt{\frac{2m+1}{2}} \frac{1}{2^j} \frac{1}{2m+1} \left(L_{m+1}(2^j x - 2n + 1) - L_{m-1}(2^j x - 2n + 1) \right) \\ &= \frac{1}{2^j} \frac{1}{\sqrt{2m+1}} \times \\ & \left(\frac{2^{\frac{j}{2}}}{\sqrt{2m+3}} \sqrt{\frac{2m+3}{2}} L_{m+1}(2^j x - 2n + 1) - \frac{2^{\frac{j}{2}}}{\sqrt{2m-1}} \sqrt{\frac{2m-1}{2}} L_{m-1}(2^j x - 2n + 1) \right). \end{aligned}$$

Ainsi, on peut réécrire (2.5) de la manière

$$\int_0^x \Psi_{nm}(t) dt = \frac{1}{2^j} \frac{1}{\sqrt{2m+1}} \left(\frac{1}{\sqrt{2m+3}} \Psi_{nm+1}(x) - \frac{1}{\sqrt{2m-1}} \Psi_{nm-1}(x) \right) \quad (2.6)$$

Pour $m = M - 1$, en reprenant les mêmes calculs, on obtient

$$\int_0^x \Psi_{nM-1}(t) dt = \frac{1}{2^j} \frac{1}{\sqrt{2M-1}} \left(\frac{1}{\sqrt{2M+1}} \Psi_{nM}(x) - \frac{1}{\sqrt{2M-3}} \Psi_{nM-2}(x) \right). \quad (2.7)$$

Comme la fonction Ψ_{nM} ne figure pas dans le vecteur ψ , on approche ce dernier résultat par

$$\int_0^x \Psi_{nM-1}(t) dt \simeq -\frac{1}{2^j} \frac{1}{\sqrt{2M-1}} \frac{1}{\sqrt{2M-3}} \Psi_{nM-2}(x). \quad (2.8)$$

Les relations (2.4), (2.6) et (2.8) déterminent entièrement la matrice d'intégration P.

2 Matrice d'intégration exacte

Proposition 2.2 *la matrice d'intégration exacte notée P_{ex} diffère de la matrice de Razzaghi P que dans l'expression de la matrice L, qui est notée dans ce cas L_{ex} et qui est donnée par*

$$L_{ex} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{5}} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{5}\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{7}} & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{\sqrt{7}\sqrt{5}} & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \frac{-1}{\sqrt{2M-3}\sqrt{2M-5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2M-3}\sqrt{2M-1}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\sqrt{2M-1}} \frac{1}{\sqrt{2M-3}} \frac{2M-1}{M} & \frac{1}{M} (2^j x - 2n + 1) \end{bmatrix}.$$

Preuve

Pour retrouver la matrice d'intégration exacte, au lieu de procéder à la troncature du terme Ψ_{nM} , on va l'exprimer en fonction de Ψ_{nM-1} et de Ψ_{nM-2} . Les calculs pour $m = 0$ et $1 \leq m \leq M - 2$ restent inchangés. On a donc

Pour $m = 0$,

$$\int_0^x \Psi_{n0}(t) dt = \frac{1}{2^j} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \Psi_{n1}(x) + \Psi_{n0}(x) + 2 \sum_{\hat{n}=n+1}^{\hat{n}=2^j-1} \Psi_{\hat{n}0}(x) \right), \quad (2.9)$$

et pour $1 \leq m \leq M-2$,

$$\int_0^x \Psi_{nm}(t) dt = \frac{1}{2^j} \frac{1}{\sqrt{2m+1}} \left(\frac{1}{\sqrt{2m+3}} \Psi_{nm+1}(x) - \frac{1}{\sqrt{2m-1}} \Psi_{nm-1}(x) \right).$$

Pour $m = M-1$, on reprend la formule (2.7), c'est à dire

$$\int_0^x \Psi_{nM-1}(t) dt = \frac{1}{2^j} \frac{1}{\sqrt{2M-1}} \left(\frac{1}{\sqrt{2M+1}} \Psi_{nM}(x) - \frac{1}{\sqrt{2M-3}} \Psi_{nM-2}(x) \right) \quad (2.10)$$

En utilisant la formule (1.4), on rappelle que Ψ_{nM} prend la forme

$$\Psi_{nM}(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2M+1}{2}} 2^{\frac{j}{2}} L_M(2^j x - 2n + 1) & \text{si } \frac{n-1}{2^{j-1}} \leq x < \frac{n}{2^{j-1}} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

En rapellant la formule (1.1), le polynôme L_M est donné par

$$L_M(2^j x - 2n + 1) = \frac{2M-1}{M} (2^j x - 2n + 1) L_{M-1}(2^j x - 2n + 1) - \frac{M-1}{M} L_{M-2}(2^j x - 2n + 1). \quad (2.11)$$

En remplaçant par (2.11) dans l'expression de Ψ_{nM-1} , on trouve

$$\Psi_{nM}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^j} \frac{1}{\sqrt{2M-1}} \frac{1}{\sqrt{2}} 2^{\frac{j}{2}} \left(\frac{2M-1}{M} (2^j x - 2n + 1) L_{M-1}(2^j x - 2n + 1) \right. \\ \left. - \frac{M-1}{M} L_{M-2}(2^j x - 2n + 1) \right) & \text{si } \frac{n-1}{2^{j-1}} \leq x < \frac{n}{2^{j-1}} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

En mutipliant et en divisant L_{M-1} et L_{M-2} , respevtivement, par les coefficients $\sqrt{\frac{2M-1}{2}}$ et $\sqrt{\frac{2M-3}{2}}$, on réécrit cette dernière égalité comme suit

$$\Psi_{nM}(x) = \frac{1}{2^j} \frac{1}{M} (2^j x - 2n + 1) \Psi_{nM-1}(x) - \frac{1}{2^j} \frac{1}{\sqrt{2M-1}} \frac{1}{\sqrt{2M-3}} \frac{M-1}{M} \Psi_{nM-2}(x).$$

En substituant cette valeur de Ψ_{nM} dans (2.10), on arrive au résultat

$$\int_0^x \Psi_{nM-1}(t) dt = \frac{1}{2^j} \frac{1}{M} (2^j x - 2n + 1) \Psi_{nM-1}(x) - \frac{1}{2^j} \frac{1}{\sqrt{2M-1}} \frac{1}{\sqrt{2M-3}} \frac{2M-1}{M} \Psi_{nM-2}(x). \quad (2.12)$$

Les formules (2.9), (2.10) et (2.12) donnent l'expression de la matrice exacte notée P_{ex} .

Remarque 2.1 Cette matrice d'intégration exacte dépend des indices m et n ainsi que de la variable x , ceci rend son application en numérique compliquée voir impossible. On se retrouve dans l'obligation de tronquer le terme en x .

3 Matrice d'intégration modifiée

Proposition 2.3 Une matrice opérationnelle d'intégration, notée P_{mo} , est définie par

$$P_{mo} = \frac{1}{2^j} \begin{bmatrix} L_{mo} & F & F & \cdots & F \\ \mathbf{0} & L_{mo} & F & \cdots & F \\ \vdots & \mathbf{0} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & F \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & L_{mo} \end{bmatrix},$$

où $\mathbf{0}$ est la matrice nulle d'ordre M . F et L sont des matrices d'ordre M qui sont données par

$$F = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

$$L_{mo} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{5}} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{5}\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{7}} & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{\sqrt{7}\sqrt{5}} & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \frac{-1}{\sqrt{2M-3}\sqrt{2M-5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2M-3}\sqrt{2M-1}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{\sqrt{2M-1}\sqrt{2M-3}} \frac{2M-1}{M} & \frac{1}{\frac{1-2n}{M}} \end{bmatrix}.$$

Preuve

Si on supprime le terme

$$\frac{2M-1}{M} 2^j x L_{M-1} (2^j x - 2n + 1)$$

dans (2.12), on obtient

$$\int_0^x \Psi_{nM-1}(t) dt = \frac{1}{2^j} \left(\frac{(-2n+1)}{M} \Psi_{nM-1} - \frac{1}{\sqrt{2M-1}} \frac{1}{\sqrt{2M-3}} \frac{2M-1}{M} \Psi_{nM-2}(x) \right).$$

En particulier pour $m = 3$ et $j = 2$, la matrice d'intégration modifiée est

$$P_{mo} \simeq \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4 \times \sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4 \times \sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{4 \times \sqrt{3} \sqrt{5}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{12 \times \sqrt{15}} - \frac{1}{4 \times \sqrt{15}} & \frac{-1}{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4 \times \sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4 \times \sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{4 \times \sqrt{3} \sqrt{5}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{12 \times 15^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{4 \times 15^{\frac{1}{2}}} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}.$$

Remarque 2.2 On va comparer dans le chapitre suivant, les résultats obtenus en utilisant les deux matrices d'intégration.

Chapitre 3

Simulation et résultats numériques

1 Introduction

On considère le problème aux limites suivant

$$e \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + a \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) + b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) + c_1 u(t, x) = f(t, x) \quad (3.1)$$

avec les conditions initiales et aux bords suivantes

$$u(0, x) = u_0(x) \quad (\text{condition initiale}) \quad (3.2)$$

$$u(t, 0) = \varphi_1(t) \quad (\text{condition de Dirichlet}) \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = \varphi_2(t). \quad (\text{condition de Neumann}) \quad (3.4)$$

où a, b, c_1 et e sont des réels donnés, f, u_0, φ_1 et φ_2 des fonctions régulières données.

On va le résoudre par :

1. la méthode des différences finies où la dérivée temporelle est approchée par un schéma régressif alors que les dérivées spatiales sont approchées par des schémas centrés.
2. la méthode des ondelettes combinée avec la méthode des différences finies.

2 Résolution par la méthode combinée

On va suivre le même procédé exposé dans [1], on commence donc par poser

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = C^T(t)\Psi(x), \quad (3.5)$$

en procédant à plusieurs intégrations par rapport à la variable d'espace dans l'équation (3.5), on obtient l'expression de la fonction inconnue $u(t, x)$ et de ses dérivées premières $\frac{\partial u}{\partial x}(t, x), \frac{\partial u}{\partial t}(t, x)$ en fonction du vecteur C , des conditions du problème donné et de la matrice d'intégration P .

Sachant que

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) = \int_0^x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t, y) dy + \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0),$$

en faisant intervenir la relation (3.5) et la condition (3.4), on a

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) = \int_0^x C^T(t)\Psi(y)dy + \varphi_2(t).$$

En rapelant la définition (2.1), cette dernière égalité devient

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) = C^T(t)P\Psi(x) + \varphi_2(t). \quad (3.6)$$

En suivant les mêmes étapes et en faisant intervenir la condition (3.3), on obtient l'expression du terme u à savoir

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \int_0^x (C^T(t)P\Psi(y) + \varphi_2(t))dy + u(t, 0), \\ u(t, x) &= C^T(t)P^2\Psi(x) + x\varphi_2(t) + \varphi_1(t). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Pour obtenir l'expression du terme $\frac{\partial u}{\partial t}$, il suffit de dériver par rapport au temps l'inconnue u , donnée par la relation (3.7)

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = (C'(t))^T P^2 \Psi(x) + x\varphi_2'(t) + \varphi_1'(t). \quad (3.8)$$

On remplace (3.5), (3.6), (3.7) et (3.8) dans (3.1) on trouve,

$$\begin{aligned} e(C'(t))^T P^2 \Psi(x) + C^T(t)(aP + bId + c_1 P^2)\Psi(x) = \\ f(t, x) - e\varphi_2'(t)x - e\varphi_1'(t) - a\varphi_2(t) - c_1 x\varphi_2(t) - c_1 \varphi_1(t). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Sachant que

$$f(t, x) = F^T(t)\Psi(x), \quad (3.10)$$

$$x = X^T\Psi(x), \quad (3.11)$$

$$1 = d^T\Psi(x). \quad (3.12)$$

L'injection de (3.10), (3.11) et (3.12) dans (3.9) donne :

$$\begin{aligned} [e(C'(t))^T P^2 + C^T(t)(aP + bId + c_1 P^2)]\Psi(x) = \\ (F^T(t) - eX^T\varphi_2'(t) - e\varphi_1'(t)d^T - a\varphi_2(t)d^T - c_1 X^T\varphi_2(t) - c_1 \varphi_1(t)d^T)\Psi(x) \end{aligned} ,$$

ce qui revient à écrire

$$\begin{aligned} e(C'(t))^T P^2 + C^T(t)(aP + bId + c_1 P^2) = \\ F^T(t) - eX^T\varphi_2'(t) - e\varphi_1'(t)d^T - a\varphi_2(t)d^T - c_1 X^T\varphi_2(t) - c_1 \varphi_1(t)d^T, \end{aligned}$$

ou encore suite à une transposition

$$\begin{aligned} e(P^2)^T(C')(t) + (aP + bId + c_1 P^2)^T C(t) = \\ F(t) - eX\varphi_2'(t) - e\varphi_1'(t)d - a\varphi_2(t)d - c_1 X\varphi_2(t) - c_1 \varphi_1(t)d. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Il est important de remarquer que la résolution du problème aux limites (3.1), (3.3)-(3.4) s'est ramenée à la résolution d'une équation différentielle dont l'inconnue est le vecteur $C(t)$. Il reste à trouver l'expression de la condition initiale vérifiée par C , ($C(t=0)=?$).

D'une part et grâce à (3.2) et à (3.7), on a

$$\begin{aligned} u(0, x) = u_0(x) &= C^T(0)P^2\Psi(x) + x\varphi_2(0) + \varphi_1(0) \\ C^T(0)P^2\Psi(x) &= u_0(x) - x\varphi_2(0) - \varphi_1(0) \end{aligned} \quad (3.14)$$

D'autre part, grâce à la décomposition de $u_0(x)$, on a

$$u_0(x) = U_0^T\Psi(x) \quad (3.15)$$

On remplace (3.11), (3.12) et (3.15) dans (3.14), on trouve :

$$\begin{aligned} C^T(0)P^2\Psi(x) &= (U_0^T - X^T\varphi_2(0) - d^T\varphi_1(0))\Psi(x) \\ (P^2)^T C(0) &= U_0 - X\varphi_2(0) - d\varphi_1(0). \end{aligned}$$

D'où

$$C(0) = ((P^2)^T)^{-1}(U_0 - X\varphi_2(0) - d\varphi_1(0)). \quad (3.16)$$

On a donc à résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} e(P^2)^T C'(t) + (aP + bId + c_1P^2)^T C(t) = \\ F^T(t) - eX\varphi_2'(t) - e\varphi_1'(t)d - a\varphi_2(t)d - c_1X\varphi_2(t) - c_1\varphi_1(t)d \\ C(0) = ((P^2)^T)^{-1}(U_0 - X\varphi_2(0) - d\varphi_1(0)), \end{cases} \quad (3.17)$$

par la méthode des différences finies. Pour cela on commence par lui associer le système discret en tout point $t_i = i\Delta t$, $i = 1, \dots, N$,

$$\begin{cases} e(P^2)^T (C')(t_i) + (aP + bId + c_1P^2)^T C(t_i) = \\ F(t_i) - eX\varphi_2'(t_i) - e\varphi_1'(t_i)d - a\varphi_2(t_i)d - c_1X\varphi_2(t_i) - c_1\varphi_1(t_i)d \\ C(0) = ((P^2)^T)^{-1}(U_0 - X\varphi_2(0) - d\varphi_1(0)), \end{cases} \quad (3.18)$$

ensuite, on applique le schéma régressif pour approcher $(C')(t_i)$

$$C'(t_i) = \frac{C(t_i) - C(t_{i-1})}{\Delta t}. \quad (3.19)$$

En remplaçant par (3.19) dans (3.18), on trouve

$$\begin{aligned} (eP^2 + \Delta taP + \Delta tbId + \Delta tc_1P^2)^T C(t_i) &= e(P^2)^T C(t_{i-1}) \\ + \Delta t(F(t_i) - eX\varphi_2'(t_i) - e\varphi_1'(t_i)d - a\varphi_2(t_i)d - c_1X\varphi_2(t_i) - c_1\varphi_1(t_i)d) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Enfin, la résolution du problème aux limites (3.1), (3.2)~(3.4), revient à la résolution du système algébrique :

$$\begin{aligned} (eP^2 + \Delta taP + \Delta tbId + \Delta tc_1P^2)^T C(t_i) &= e(P^2)^T C(t_{i-1}) \\ + \Delta t(F(t_i) - eX\varphi_2'(t_i) - e\varphi_1'(t_i)d - a\varphi_2(t_i)d - c_1X\varphi_2(t_i) - c_1\varphi_1(t_i)d) \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$C(0) = ((P^2)^T)^{-1}(U_0 - X\varphi_2(0) - d\varphi_1(0))$$

Dont la solution est le vecteur $C(t_i)$; $i \geq 1$, qui intervient directement dans la détermination de la solution $u(t_i, x_j)$ via la relation (3.7).

3 Résolution par la méthode des différences finies

On considère le système discret associé à (3.1), (3.2)~(3.4) (pris en tout point t_i)

$$e \frac{\partial u}{\partial t}(t_i, x_j) + a \frac{\partial u}{\partial x}(t_i, x_j) + b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_i, x_j) + c_1 u(t_i, x_j) = f(t_i, x_j); \quad (3.22)$$

pour $i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, M-1,$

avec

$$u(0, x_j) = u_0(x_j); \quad j = 1, 2, \dots, M-1, \quad (3.23)$$

$$u(t_i, 0) = \varphi_1(t_i); \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t_i, 0) = \varphi_2(t_i); \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (3.25)$$

On rappelle qu'on applique un schéma régressif pour approcher la dérivée temporelle

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t_i, x_j) = \frac{u(t_i, x_j) - u(t_{i-1}, x_j)}{\Delta t}, \quad (3.26)$$

et des schémas centrés pour approcher les dérivées spatiales

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t_i, x_j) = \frac{u(t_i, x_{j+1}) - u(t_i, x_{j-1})}{2\Delta x} \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_i, x_j) = \frac{u(t_i, x_{j+1}) - 2u(t_i, x_j) + u(t_i, x_{j-1}))}{\Delta x^2}. \quad (3.28)$$

En remplaçant par (3.26), (3.27) et (3.28) dans (3.22) on trouve

$$e \frac{u_j^i - u_j^{i-1}}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^i - u_{j-1}^i}{2\Delta x} + b \frac{u_{j+1}^i - 2u_j^i + u_{j-1}^i}{\Delta x^2} + c_1 u_j^i = f_j^i. \quad (3.29)$$

En arrangeant les termes, on obtient

$$\left[\frac{b\Delta t}{\Delta x^2} - \frac{a\Delta t}{2\Delta x} \right] u_{j-1}^i + \left(1 - \frac{2b\Delta t}{\Delta x^2} + \Delta t c_1 \right) u_j^i + \left(\frac{a\Delta t}{2\Delta x} + \frac{b\Delta t}{\Delta x^2} \right) u_{j+1}^i = u_j^{i-1} + \Delta t f_j^i; \quad i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, M-1, \quad (3.30)$$

où u_j^i est une valeur approchée de $u(t_i, x_j)$ et $f_j^i = f(t_i, x_j)$.

Pour simplifier l'écriture de cette équation, on considère les notations suivantes :

$$\alpha_1 = \frac{b\Delta t}{\Delta x^2} - \frac{a\Delta t}{2\Delta x},$$

$$\alpha_2 = 1 - \frac{2b\Delta t}{\Delta x^2} + \Delta t c_1,$$

$$\alpha_3 = \frac{a\Delta t}{2\Delta x} + \frac{b\Delta t}{\Delta x^2}.$$

L'équation (3.30) devient :

$$\alpha_1 u_{j-1}^i + \alpha_2 u_j^i + \alpha_3 u_{j+1}^i = u_j^{i-1} + \Delta t f_j^i; \quad (3.31)$$

$i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, M-1.$

L'écriture de (3.31) pour toutes les valeurs de l'indice j , donne

$$\begin{aligned}
 \text{pour } j &= 1; & \alpha_1 u_0^i + \alpha_2 u_1^i + \alpha_3 u_2^i &= u_1^{i-1} + \Delta t f_1^i \\
 \text{pour } j &= 2; & \alpha_1 u_1^i + \alpha_2 u_2^i + \alpha_3 u_3^i &= u_2^{i-1} + \Delta t f_2^i \\
 \text{pour } j &= 3; & \alpha_1 u_2^i + \alpha_2 u_3^i + \alpha_3 u_4^i &= u_3^{i-1} + \Delta t f_3^i \\
 & & \vdots & \\
 \text{pour } j &= M-2; & \alpha_1 u_{M-3}^i + \alpha_2 u_{M-2}^i + \alpha_3 u_{M-1}^i &= u_{M-2}^{i-1} + \Delta t f_{M-2}^i \\
 \text{pour } j &= M-1; & \alpha_1 u_{M-2}^i + \alpha_2 u_{M-1}^i + \alpha_3 u_M^i &= u_{M-1}^{i-1} + \Delta t f_{M-1}^i.
 \end{aligned}$$

On remarque que ce système est à M inconnues (u_j^i ; $j = 1; \dots; M$) mais $M - 1$ équations. Pour y remédier, on fait intervenir les conditions aux bords. On a de la condition (3.4)

$$u(t_i, 0) = u_0^i = \varphi_1(t_i).$$

En appliquant un schéma aux différences finies progressif, la condition (3.25), se traduit par

$$\frac{u_1^i - u_0^i}{\Delta x} = \varphi_2(t_i).$$

Cette dernière égalité donne la valeur de u_1^i en fonction de φ_1 et φ_2

$$u_1^i = \Delta x \varphi_2(t_i) + \varphi_1(t_i).$$

Ainsi, la solution approchée, par la méthode des différences finies, du problème (3.22), (3.23)~(3.25) est caractérisée par

$$\begin{aligned}
 u_1^i &= \Delta x \varphi_2(t_i) + \varphi_1(t_i) \\
 \alpha_2 u_1^i + \alpha_3 u_2^i &= u_1^{i-1} + \Delta t f_1^i - \alpha_1 \varphi_1(t_i) \\
 \alpha_1 u_1^i + \alpha_2 u_2^i + \alpha_3 u_3^i &= u_2^{i-1} + \Delta t f_2^i \\
 \alpha_1 u_2^i + \alpha_2 u_3^i + \alpha_3 u_4^i &= u_3^{i-1} + \Delta t f_3^i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \\
 &\vdots \\
 \alpha_1 u_{M-3}^i + \alpha_2 u_{M-2}^i + \alpha_3 u_{M-1}^i &= u_{M-2}^{i-1} + \Delta t f_{M-2}^i \\
 \alpha_1 u_{M-2}^i + \alpha_2 u_{M-1}^i + \alpha_3 u_M^i &= u_{M-1}^{i-1} + \Delta t f_{M-1}^i.
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

L'itération initiale est déterminée par la condition initiale (3.23), c'est à dire

$$U^{(0)} = (u_0(x_1), u_0(x_2), \dots, u_0(x_M))^T$$

Ces deux méthodes sont appliquées à deux problèmes, l'un stationnaire et l'autre évolutif.

3.1 Résolution du problème stationnaire

On considère le problème différentiel

$$\begin{cases} u''(x) - 2u'(x) + u(x) = -2 \exp(x) & \text{sur }]0, 1] \\ u(0) = 1 \\ u'(0) = 1. \end{cases}$$

3. RÉSOLUTION PAR LA MÉTHODE DES DIFFÉRENCES FINIES

Ce problème est un cas particulier de (3.1), (3.3)~ (3.4) où $e = 0$, $a = 1$, $b = -2$ et $c_1 = 1$.

1-La résolution du problème stationnaire par la méthode des ondelettes

Le système algébrique qui découle de l'application de la méthode des ondelettes, est obtenu directement de (3.17)

$$(-2P + Id + P^2)^T C = F^T$$

La résolution de ce système a été réalisée en utilisant les deux matrices d'intégration celle de Razzaghi et la matrice modifiée.

L'erreur est calculée par la formule

$$ErrMax = \max_j |u(x_j) - u_j|.$$

Les calculs ont été exécutés sur un pc de type Samsung, processeur 'intel' et 3 Go de RAM.

Les programmes ont été écrits en langage MATLAB.

Des tests ont été réalisés pour différents niveaux de décomposition de l'intervalle [0, 1] et pour différents degrés du polynôme de Legendre. Les résultats obtenus sont donnés dans les tableaux suivants :

pour $j = 2$ (deux niveaux de décomposition)

M	3	5	7	10	15	20
<i>ErrMax Razzaghi</i>	0.0091	4.51×10^{-5}	4.52×10^{-8}	2.27×10^{-13}	3.18×10^{-14}	9.28×10^{-13}
<i>ErrMax</i>	0.0694	1.92×10^{-4}	2.05×10^{-7}	1.61×10^{-12}	5.03×10^{-14}	9.10×10^{-13}
CPU(s)	0.47	1.15	1.17	0.52	0.58	0.64

pour $j = 3$ (quatre niveaux de décomposition)

M	3	5	7	10	15	20
<i>ErrMax Razzaghi</i>	0.0016	2.04×10^{-6}	5.11×10^{-10}	2.16×10^{-14}	3.46×10^{-14}	8.09×10^{-13}
<i>ErrMax</i>	0.0190	1.47×10^{-5}	4.48×10^{-9}	1.20×10^{-14}	3.49×10^{-14}	8.63×10^{-13}
CPU(s)	0.46	1.19	1.48	0.65	0.83	1.01

pour $j = 5$ (16 niveaux)

M	3	5	7	10	15	20
<i>ErrMax Razzaghi</i>	5.13×10^{-5}	4.03×10^{-9}	6.32×10^{-14}	1.49×10^{-14}	2.37×10^{-14}	3.23×10^{-13}
<i>ErrMax</i>	2.1×10^{-3}	1.08×10^{-7}	2.17×10^{-12}	4.11×10^{-15}	2.85×10^{-14}	3.30×10^{-13}
CPU(s)	0.63	3.00	3.75	3.25	9.08	19.75

Commentaire : On remarque, d'une part, que l'erreur diminue sensiblement lorsqu'on augmente le degré du polynôme de Legendre, alors que cette diminution est légère quand le nombre de niveaux augmente. D'autre part, il suffit de prendre que de petites valeurs pour le degré (M), pour avoir une précision convenable.

Contrairement à nos attentes, l'introduction de la matrice modifiée n'apporte pas d'amélioration quant à la précision de la solution par rapport à la matrice de Razzaghi.

Voici les figures pour $M = 3$ et $j = 2$:

et pour $M = 10$ et $j = 2$:

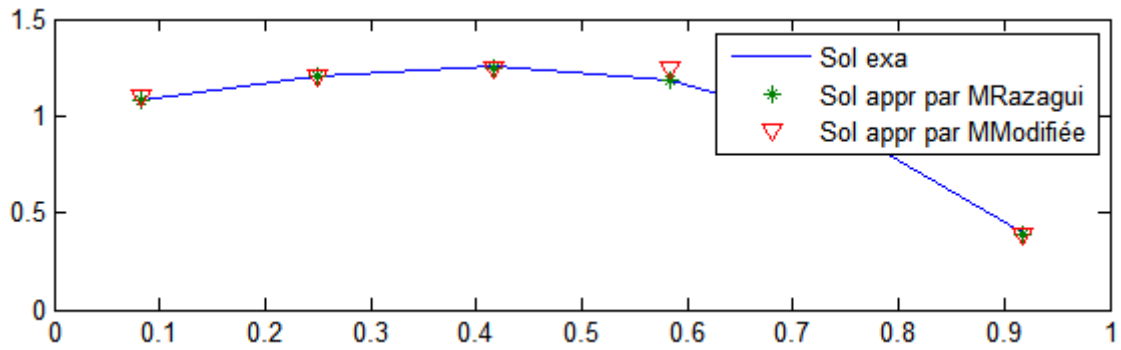


FIGURE 3.1 – Le graphe de solution exacte et solution approchée (mat RAZAGUI et mat modif).

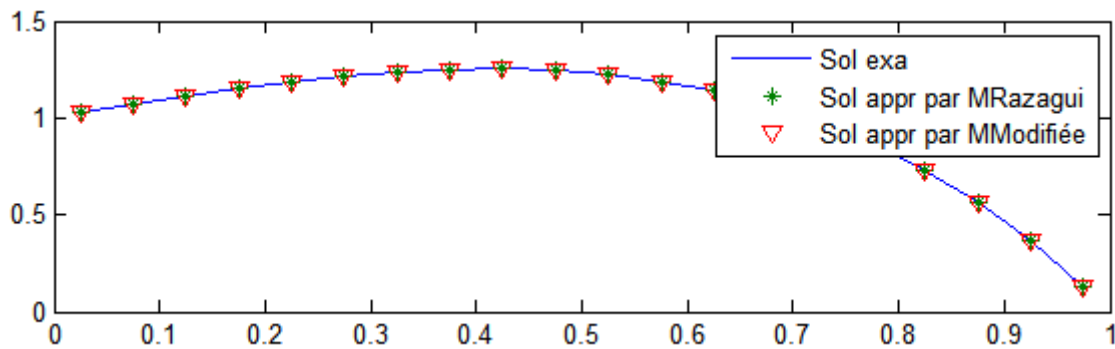


FIGURE 3.2 – Le graphe de solution exacte et solution approchée (mat RAZAGUI et mat modif).

Commentaire : Au vu de ces résultats, les graphes des solutions approchées s'accordent bien avec le graphe de la solution exacte.

2-La résolution du problème stationnaire par la méthode des différences finies

Le système algébrique qui découle de l'application de la méthode des différences finies, est obtenu directement de (3.29)

$$\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{\Delta x^2} - 2 \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} + u_j = f_j; j = 1; \dots; M,$$

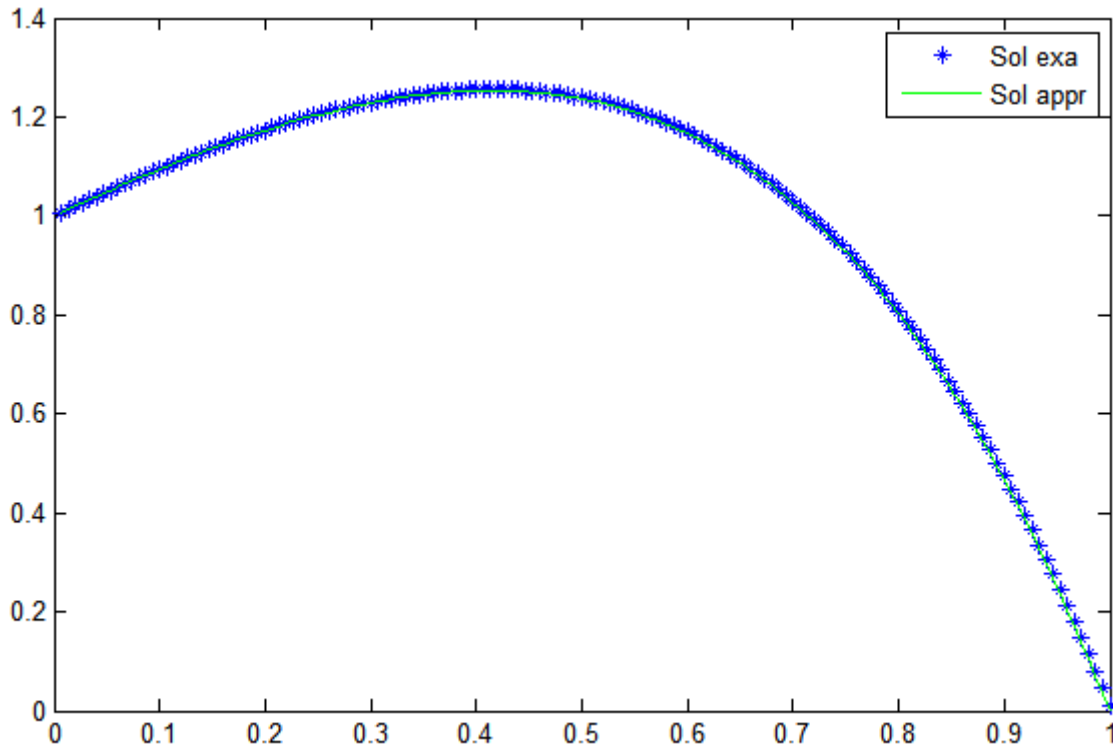
où u_j est la solution approchée de $u(x_j)$.

En réarrangeant les termes, on obtient

$$\left(\frac{1}{\Delta x} + \frac{1}{\Delta x^2} \right) u_{j-1} + \left(1 - \frac{2}{\Delta x^2} \right) u_j + \left(-\frac{1}{\Delta x} + \frac{1}{\Delta x^2} \right) u_{j+1} = f_j; j = 1; \dots; M.$$

On note

$$\begin{aligned} \alpha &= \left(\frac{1}{\Delta x} + \frac{1}{\Delta x^2} \right), \\ \beta &= \left(1 - \frac{2}{\Delta x^2} \right), \\ \gamma &= \left(-\frac{1}{\Delta x} + \frac{1}{\Delta x^2} \right). \end{aligned}$$



Le graphe de la solution exacte et la solution approchée pour M=150

Commentaire : Il est clair que la méthode des différences finies converge, mais on remarque que cette convergence est lente car l'erreur est de l'ordre de 5×10^{-2} pour un maillage fin correspondant à un pas $\Delta x = 0,0067$.

3.2 Résolution du problème évolutif

On considère le problème de diffusion suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = 2(t - t^2 - 1) \exp(2x) \\ u(0, x) = \exp(2x) \\ u(t, 0) = (t^2 + 1) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = 2(t^2 + 1). \end{cases} \quad (3.33)$$

1-La résolution par la méthode combinée

Le système algébrique associé à ce problème, est tiré du système (3.21) où l'on remplace par

$$\begin{aligned} e &= 1, a = 1, b = -1, c_1 = 0; f(t, x) = 2(t - t^2 - 1) \exp(2x) \\ u_0(x) &= \exp(2x); \varphi_1(t) = (t^2 + 1) \text{ et } \varphi_2(t) = 2(t^2 + 1), \end{aligned}$$

on obtient, ainsi le système

$$\begin{aligned} (P^2 + \Delta t P - \Delta t I d)^T C(t_i) &= \\ (P^2)^T C(t_{i-1}) - \Delta t (F(t_i) - X \varphi_2'(t_i) - \varphi_1'(t_i) d - \varphi_2(t_i) d) & \\ C(0) &= ((P^2)^T)^{-1} (U_0 - X \varphi_2(0) - d \varphi_1(0)). \end{aligned}$$

Les résultats numériques obtenus sont résumés dans les tableaux suivants

M = 5	N = 10	N = 15	N = 20
Matrice de Razzaghi	0.0586	0.0480	0.0418
Matrice modifiée	0.0590	0.0486	0.0424

M = 7	N = 10	N = 15	N = 20
Matrice de Razzaghi	0.0823	0.0674	0.0585
Matrice modifiée	0.0823	0.0674	0.0585

M = 10	N = 10	N = 15	N = 20
Matrice de Razzaghi	0.1113	0.0912	0.0793
Matrice modifiée	0.1113	0.0912	0.0793

Commentaires : A l'heure actuelle, ces résultats numérique sont insatisfaisants. On pense que cela provient du fait que la matrice de ce système algébrique à savoir, $P^2 + \Delta t P - \Delta t I d$, est mal conditionnée.

2-L'analyse de la méthode des différences finies

Le système discret (3.32) associé à ce problème devient

$$\begin{aligned}
 u_1^i &= 2\Delta x(t_i^2 + 1) + (t_i^2 + 1) \\
 (1 + 2\frac{\Delta t}{\Delta x^2})u_1^i + (\frac{\Delta t}{2\Delta x} - \frac{\Delta t}{\Delta x^2})u_2^i &= u_1^{i-1} + \Delta t f_1^i + (\frac{\Delta t}{\Delta x^2} + \frac{\Delta t}{2\Delta x})(t_i^2 + 1) \\
 -(\frac{\Delta t}{\Delta x^2} + \frac{\Delta t}{2\Delta x})u_1^i + (1 + 2\frac{\Delta t}{\Delta x^2})u_2^i + (\frac{\Delta t}{2\Delta x} - \frac{\Delta t}{\Delta x^2})u_3^i &= u_2^{i-1} + \Delta t f_2^i \\
 -(\frac{\Delta t}{\Delta x^2} + \frac{\Delta t}{2\Delta x})u_2^i + (1 + 2\frac{\Delta t}{\Delta x^2})u_3^i + (\frac{\Delta t}{2\Delta x} - \frac{\Delta t}{\Delta x^2})u_4^i &= u_3^{i-1} + \Delta t f_3^i \\
 &\vdots \\
 -(\frac{\Delta t}{\Delta x^2} + \frac{\Delta t}{2\Delta x})u_{M-3}^i + (1 + 2\frac{\Delta t}{\Delta x^2})u_{M-2}^i + (\frac{\Delta t}{2\Delta x} - \frac{\Delta t}{\Delta x^2})u_{M-1}^i &= u_{M-2}^{i-1} + \Delta t f_{M-2}^i \\
 -(\frac{\Delta t}{\Delta x^2} + \frac{\Delta t}{2\Delta x})u_{M-2}^i + (1 + 2\frac{\Delta t}{\Delta x^2})u_{M-1}^i + (\frac{\Delta t}{2\Delta x} - \frac{\Delta t}{\Delta x^2})u_M^i &= u_{M-1}^{i-1} + \Delta t f_{M-1}^i,
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

avec

$$f_j^i = 2(t_i - t_i^2 - 1) \exp(2x_j),$$

et

$$U^{(0)} = (\exp(2x_1), \exp(2x_2), \dots, \exp(2x_M))^T.$$

Proposition 3.1 *Le système linéaire (3.34) est convergeant si $\frac{\Delta t}{2\Delta x} \leq \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$.*

Preuve Il suffit de vérifier selon le théorème de LAX, qu'il est consistant et stable.

L'erreur de consistence, lors de l'approche de l'équation du problème, notée $\bar{E}_{\Delta x, \Delta t}$, est définie par

$$\begin{aligned}
 \bar{E}_{\Delta t, \Delta x}(t_i, x_j) &= \frac{\partial u}{\partial t}(t_i, x_j) - \frac{u(t_i, x_j) - u(t_{i-1}, x_j)}{\Delta t} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}(t_i, x_j) - \frac{u(t_i, x_{j+1}) - u(t_i, x_{j-1})}{2\Delta x} \right) \\
 &- \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_i, x_j) - \frac{u(t_i, x_{j+1}) - 2u(t_i, x_j) + u(t_i, x_{j-1}))}{\Delta x^2} \right), \forall i \geq 1 \text{ et } 1 \leq j \leq M-1,
 \end{aligned}$$

et elle vérifie l'inégalité

$$\left\| \bar{E}_{\Delta t, \Delta x} \right\|_{\infty} = \max_{i,j} \left| \bar{E}_{\Delta t, \Delta x}(t_i, x_j) \right| \leq \bar{c}_1 \Delta t + \bar{c}_2 \Delta x^2.$$

L'erreur de consistance, lors de l'approche de la condition (cod3), notée $\bar{E}_{\Delta x}$ est définie par

$$\bar{E}_{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}(t_i, 0) - \frac{u(t_i, x_1) - u(t_i, 0)}{\Delta x},$$

elle vérifie donc

$$\left\| \bar{E}_{\Delta x} \right\| = \max_{i,j} \left| \bar{E}_{\Delta x}(t_i) \right| \leq \bar{c}_3 \Delta x.$$

Donc l'erreur de consistance, notée $E_{\Delta t, \Delta x}$, vérifie

$$\left\| E_{\Delta t, \Delta x} \right\| = \max_{i,j} \left\{ \bar{E}_{\Delta t, \Delta x}(t_i, x_j), \bar{E}_{\Delta x}(t_i) \right\} \leq c_1 \Delta t + c_2 \Delta x$$

On va étudier maintenant la stabilité en norme $\| \cdot \|_{\infty}$. De l'équation (3.31) associée à un second membre f nul, on a

$$\alpha_2 u_j^i = u_j^{i-1} - \alpha_1 u_{j-1}^i - \alpha_3 u_{j+1}^i; i \geq 1,$$

ou encore

$$|\alpha_2| |u_j^i| \leq |u_j^{i-1}| + |\alpha_1| |u_{j-1}^i| + |\alpha_3| |u_{j+1}^i|; i \geq 1,$$

avec

$$\alpha_1 = - \left(\frac{\Delta t}{\Delta x^2} + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \right), \alpha_2 = 1 + 2 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \text{ et } \alpha_3 = \frac{\Delta t}{2\Delta x} - \frac{\Delta t}{\Delta x^2}.$$

Sachant que

$$|u_j^i| \leq \|U^{(i)}\|_{\infty}; \text{ pour tout } i \text{ et } j,$$

on vérifie sans peine que

$$(|\alpha_2| - |\alpha_1| - |\alpha_3|) \|U^{(i)}\|_{\infty} \leq \|U^{(i-1)}\|_{\infty}; i \geq 1.$$

Si $\frac{\Delta t}{2\Delta x} \leq \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$, il est facile de voir que $|\alpha_2| - |\alpha_1| - |\alpha_3| = 1$. Ce qui établit la stabilité.

Remarque 3.2 1. On peut dire que ce système discret, est inconditionnellement stable, car le pas Δx sensé tendre vers zéro, la condition $\frac{\Delta t}{2\Delta x} \leq \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$, est toujours vérifiée.
2. Plusieurs autres schémas numériques sont proposés dans [3]. On a choisi celui on l'on applique un régressif par rapport au temps pour (théoriquement) sa stabilité inconditionnelle.

Des résultats numériques obtenus pour différents pas de temps et d'espace Δt et Δx sont résumés dans les tableaux 5, 6 et 7.

Pour $N = 10$, $\Delta t = 0.1$

M	15	30	50	100	150
Δx	0.0667	0.0333	0.02	0.01	0.0067
ErrMax	0.772	0.1445	0.0472	0.110	0.0048
CPU(s)	0.15	0.37	0.8	2.9	6.32

3. RÉSOLUTION PAR LA MÉTHODE DES DIFFÉRENCES FINIES

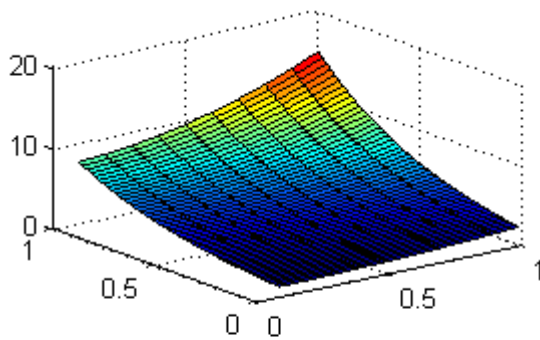
Pour $N = 20$, $\Delta t = 0.05$

M	30	50	100	150	200
Δx	0.0333	0.02	0.01	0.0067	0.005
ErrMax	0.5596	0.1537	0.033	0.014	0.0077
CPU(s)	1.995	3.165	12.556	28.278	47.857

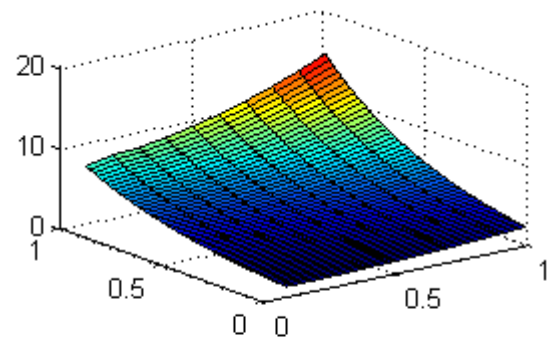
Pour $N = 50$, $\Delta t = 0.02$

M	100	130	150	180	200
Δx	0.01	0.0077	0.0067	0.0056	0.005
ErrMax	0.17	0.0891	0.0639	0.0424	0.0336
CPU(s)	110	163.33	160.39	225.85	281.37

Voici quelques graphes représentant la solution exacte et approchée correspondantes à certains résultats de ces tableaux

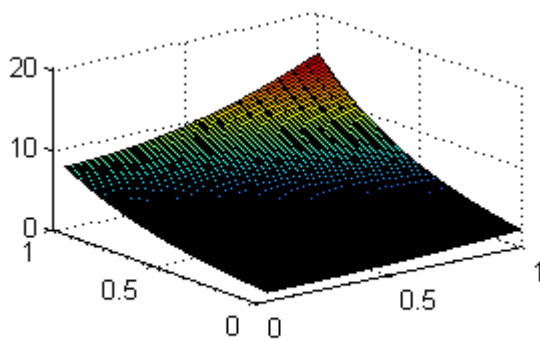


la solution exacte

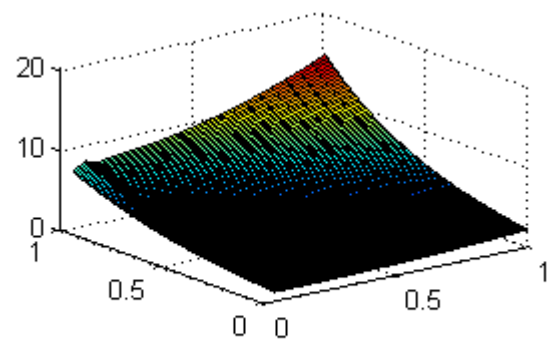


la solution approchée

FIGURE 3.3 – $\Delta t = 0,1$ et $\Delta x = 0.02$.



la solution exacte



la solution approchée

FIGURE 3.4 – $\Delta t = 0,05$ et $\Delta x = 0.01$.

Conclusion

Suite aux résultats numériques obtenus sur le problème stationnaire, on conclut que :

1- La méthode des ondelettes est nettement plus précise que celle des différences finies.

2- L'introduction de la matrice modifiée n'a pas été à la hauteur de nos espérances. Les résultats numériques associés à celle-ci n'ont pas été améliorés en les comparant à ceux donnés par la matrice de Razzaghi.

Pour le problème d'évolution, on ne peut tirer aucune conclusion à partir du moment où les résultats obtenus ne sont pas satisfaisants.

Comme perspective, il serait intéressant de faire intervenir la matrice d'intégration exacte pour la résolution des problèmes aux limites.

Bibliographie

- [1] **N. Ablaoui-Lahmar, O. Belhamiti**, Numerical Study of Convection-Reaction-Diffusion Equation by the Legendre Wavelet Finite difference method, *Advances in Nonlinear Variational Inequalities*, Vol. 19 (2016), Numb. 2, 94-112. [22](#)
- [2] **Ablaoui-Lahmar**, Sur l'analyse multi-résolution en ondelettes bidimensionnelles et application pour la simulation des problèmes biologiques. Thèse de doctorat, Université Abdel Hamid Ben Badis de Mostaganem (UMAB), 2016. [7](#), [8](#), [9](#)
- [3] **G. Allaire**, Analyse numérique et optimisation : une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique, Deuxième Editions de L'Ecole Polytechnique, Ellipse octobre 2013. [4](#), [13](#), [32](#)
- [4] **I. Aziz, S. Ul-Islam, B. Sarler**, Wavelets collocation method for the numerical solution of elliptic BV problems, *Applied Mathematical Modelling*, 37 (2013), 676-694. [9](#)
- [5] **R. Courant and D. Hilbert**, *Methods of Mathematical Physics. Volume 1*. Interscience Publishers, INC., New York. [6](#), [9](#)
- [6] **L. Guillope**, Analyse fonctionnelle. Approximations Hilbertiennes et développements en série. Ecole polytechnique de l'université de Nantes (2008). www.math.sciences.univ-nantes.fr/guillope/seii1-af/ [5](#), [6](#)
- [7] **Kamel Mohamed**, Simulation numérique en volume finis, de problèmes d'écoulements multidimensionnels raides, par un schéma de flux à deux pas. Thèse de doctorat, Mathématiques [math]. Université Paris-Nord -Paris XIII, 2005. [4](#)
- [8] **M. Razzaghi and S. Yousefi**, The Legendre wavelets operational matrix of integration. *International Journal of Systems Science*, 32 (2001), 495-502. [4](#), [14](#), [15](#)