

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM
FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES



*MEMOIRE DE MASTER
EN MATHEMATIQUES*

OPTION : Modélisation, Contrôle et Optimisation

Sujet

*LA CROISSANCE DES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS
DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES ET LEURS APPLICATIONS*

Présenté par Sabrina Taf

Soutenu le 06/06/2012 devant le Jury
Abdessamad AMIR Président MCA U. MOSTAGANEM
Zoubir DAHMANI Examineur MCA U. MOSTAGANEM
Benharrat BELAÏDI Encadreur Prof. U. MOSTAGANEM

2011/2012

Remerciements

Tout d'abord je remercie DIEU le tout puissant de m'avoir donné le courage, la volonté, la patience et la santé durant ces deux années de recherche et que grâce à Lui ce travail de mémoire a pu être réalisé. Je lui dois tout.

Je remercie vivement Monsieur Benharrat BELAÏDI, pour avoir accepté de diriger mon mémoire, pour son soutien et pour son encadrement, sa grande disponibilité et son aide permanent au cours de ce travail.

Je remercie aussi le président du jury Monsieur A. AMIR et Monsieur Z. DAHMANI membre du jury ainsi que les professeurs de l'université de Mostaganem pour leur aide pendant ma formation.

Je remercie aussi Mlle Soumia BELARBI et Zain LATREUCH pour leurs aides et leurs suggestions et tous ceux qui nous connaissent de près ou de loin.

Je dédie ce travail à :

*A mes chers parents et mes soeurs et à toute ma famille,

*A tous mes proches et amies, qui m'ont toujours soutenue et encouragée au cours de la réalisation de ce mémoire.

Merci à tous et à toutes.

Table des matières

1	INTRODUCTION	i
1.1	Plan de ce travail :	1
2	NOTIONS ET LEMMES PRÉLIMINAIRES	2
2.1	La théorie de Nevanlinna :	2
2.2	La densité des ensembles :	14
2.3	Le terme maximal et l'indice central :	15
2.4	Lemmes préliminaires	15
3	LA CROISSANCE DES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS DIFFÉREN- TIELLES LINÉAIRES	18
3.1	Introduction et résultats	18
3.2	Preuve des Théorèmes	21
3.2.1	Preuve du Théorème 3.1.1	21
3.2.2	Preuve du Théorème 3.1.2	23
3.2.3	Preuve du Théorème 3.1.3	24
4	APPLICATIONS :ESTIMATION DE LA CROISSANCE DES FONCTIONS ENTIÈRES	26
4.1	Introduction et résultats	26
4.2	Preuve des Théorèmes	27

4.2.1	Preuve du Théorème 4.1.1	27
4.2.2	Preuve du Théorème 4.1.2	27

INTRODUCTION

Les origines de la théorie de la distribution des valeurs des fonctions méromorphes revient aux théorèmes classiques de Sokhotskii-Casorati (1868), Weierstrass (1876) et Picard (1879). Dans la dernière décennie du *XIX* ième et les deux premières décennies des *XX*-ème siècles, ces théorèmes ont subi des développements par le biais des études sur la répartition des zéros des fonctions entières effectuées principalement par l'école française (Hadamard, Borel, Valiron et autres). La machine analytique intrinsèquement liée à des fonctions méromorphes a été construit dans les années 20 du *XX* siècle par le mathématicien finlandais Rolf Nevanlinna. Après son travail, la théorie de la distribution des valeurs acquise, en quelque sorte, une forme complète. Les principaux résultats classiques de la théorie des fonctions entières ont été inclus dans la théorie de Nevanlinna d'une manière naturelle.

La théorie de la distribution des valeurs des fonctions méromorphes occupe l'un des lieux centraux dans l'analyse complexe. De nombreux travaux sont consacrés à l'étude de ses liens avec d'autres domaines des mathématiques (topologie, géométrie différentielle, théorie de la mesure, la théorie du potentiel et d'autres), l'extension de ses conclusions à de plus larges classes de fonctions (fonctions méromorphes dans les régions planes arbitraires et les surfaces de Riemann, les fonctions algébroides, fonctions de plusieurs variables, courbes méromorphes), ainsi que ses applications, principalement à la théorie analytique des équations différentielles.

1.1 Plan de ce travail :

Ce mémoire se compose de quatre parties essentielles :

Dans la seconde partie, on va citer des rappels et des définitions sur la théorie de R.Nevanlinna et quelques préliminaires qu'on aura besoin par la suite.

Dans la troisième partie intitulée : "la croissance des équations différentielles linéaires", nous montrons quelques propriétés des solutions de ces équations, en améliorant les résultats de Lian-Zhong Yang.

Dans la dernière partie, on donne quelques applications sur la croissance des fonctions entières.



NOTIONS ET LEMMES PRÉLIMINAIRES

Dans cette partie, nous exposons les définitions et les concepts fondamentaux nécessaires à l'étude des équations différentielles linéaires complexes, ainsi que certains théorèmes liés à ces derniers, et les lemmes dont on a besoin, commençons par la théorie de Nevanlinna[9]

2.1 La théorie de Nevanlinna :

La théorie de Nevanlinna, développée par R. et F. Nevanlinna dans les années 1920, concerne la distribution des valeurs des fonctions holomorphes et méromorphes.

La théorie de Nevanlinna est principalement lié à l'étude des fonctions méromorphes c'est-à-dire dont les seuls points singuliers à distance finis sont des pôles, est donc le quotient de deux fonctions entières ou polynômes.

Le théorème fondamental de l'algèbre affirme que tout polynôme à coefficients complexes de degré k admet k racines comptées avec multiplicité. Il existe de nombreuses démonstrations plus ou moins équivalentes utilisant des outils d'analyse complexe.

Théorème (Principe du maximum) :

Soit Ω un ouvert connexe de \mathbb{C} . Si f une fonction holomorphe sur Ω a un maximum local en $a \in \Omega$, elle est constante, ou bien soit f une fonction analytique non constante sur un domaine D . Du théorème de l'image ouverte on déduit immédiatement :

- le module de f ne possède pas de maximum local dans D (donc, si D est borné, le maximum de $|f|$ se trouve sur la frontière de D);
- si f ne s'annule pas sur D alors $|f|$ ne possède pas non plus de minimum local dans D ;
- la partie réelle de f ne possède dans D ni maximum local, ni minimum local.

d'après le principe de maximum, nous savons que la valeur maximale atteinte par $|f|$ sur un disque de rayon R centrée à l'origine se trouve sur la frontière. Donc, nous obtenons la proposition suivante au sujet de la croissance de f .

$$\sup_{|z| \leq R} |f(z)| = O(R^n) \quad \text{quand } R \rightarrow \infty.$$

Définition : une fonction entière f est une fonction analytique sur le plan complexe tout entier.

Théorème (Liouville) : Toute fonction entière bornée est une constante.

Définition : Les fonctions transcendentes sont des fonctions qui ne sont pas algébriques.

Par exemple les fonctions exponentielles e^z , $\sin z$, $\cos z$, ainsi que les fonctions trigonométriques.

Définition (Méromorphe) : Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} . Une fonction méromorphe f sur Ω est une fonction définie et holomorphe sur un ouvert $\Omega \setminus P(f)$ telle que :

1/ $P(f) \subset \Omega$ est un ensemble discret, fermé dans Ω ,

2/ tout $a \in P(f)$ est une singularité polaire de f .

Les éléments de $P(f)$ sont les pôles de f . On note $M(\Omega)$ l'ensemble des fonctions méromorphes sur Ω .

Remarque : Si $f \in M(\Omega)$, alors au voisinage de tout point $a \in \Omega$, f s'écrit comme quotient de deux fonctions holomorphes.

Théorème (Théorème fondamental de l'algèbre) :

Tout polynôme non constant, à coefficients complexes, admet au moins une racine.

La théorie des fonctions entière permet, par le théorème de Liouville, de démontrer de manière simple et élégante le théorème fondamental de l'algèbre.

Théorème de Picard (voir [9], [10]) : Toute fonction entière non constante prend, sur le plan complexe, toutes les valeurs sauf au plus une.

Un exemple du théorème de Picard est la fonction exponentielle e^z , qui omet les valeurs 0 et ∞ . Lorsque r est grand, le cercle $|z| = r$ est mappé à de nombreuses valeurs proches de ∞ (quand $\operatorname{Re} z$ est grand) et les valeurs de nombreux proches de 0 (lorsque $\operatorname{Re} z$ est très négative).

Théorème de Weierstrass : Soit (a_n) une suite de nombres complexes tous non nuls tels que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty.$$

Alors, toute fonction entière qui s'annule exactement en chaque a_n et a un zéro d'ordre m à l'origine est de la forme

$$f(z) = e^{g(z)} z^m \prod_{n=1}^{\infty} E_n \left(\frac{z}{a_n} \right),$$

où g est une fonction entière et les facteurs canoniques E_n sont définis par

$$E_k(z) = (1 - z) e^{z + z^2/2 + \dots + z^k/k}.$$

Définition : Soit f une fonction entière. Alors, l'ordre de croissance de f est donné par

$$\rho_f = \inf \left\{ \rho > 0 : |f(z)| \leq A e^{B|z|^\rho} \right\},$$

où $A, B > 0$ sont des constantes.

Définition 2.1.1 Pour tout nombre réel > 0 , on définit

$$\ln^+ x = \max(0; \ln x) = \begin{cases} \ln x & \text{si } x > 1 \\ 0 & \text{si } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Les propriétés de bases du logarithme tronqué sont contenues dans le lemme suivant :

Lemme 2.1.1 On a

$$\ln x \leq \ln^+ x,$$

$$\ln^+ x \leq \ln^+ y \text{ pour } 0 < x \leq y,$$

$$\ln x = \ln^+ x - \ln^+ \frac{1}{x},$$

$$|\ln x| = \ln^+ x - \ln^+ \frac{1}{x},$$

$$\ln^+ \sum_{i=1}^n x_i \leq \ln n + \sum_{i=1}^n \ln^+ x_i,$$

$$\ln^+ \left(\prod_{i=1}^n x_i \right) \leq \sum_{i=1}^n \ln^+ x_i,$$

$$|\ln^+ |x_1| - \ln^+ |x_2|| \leq \left| \ln \left| \frac{x_1}{x_2} \right| \right|,$$

$$|\ln^+ |x_1| - \ln^+ |x_2|| \leq \ln^+ |x_1 - x_2| + \ln 2.$$

Théorème 2.1.1 (*Jensen*) (voir [9]) Soit f une fonction méromorphe telle que $f(0) \neq 0, \infty$, et soit a_1, a_2, \dots (resp. b_1, b_2, \dots) désigne ses zéros (resp. pôles), chacun pris en compte en fonction de sa multiplicité. Alors

$$\ln |f(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(re^{i\varphi})| d\varphi + \sum_{|b_j| < r} \ln \frac{r}{|b_j|} - \sum_{|a_i| < r} \ln \frac{r}{|a_i|}. \quad (2.1)$$

La nouveauté importante de la théorie de Nevanlinna consiste à introduire une nouvelle fonction $T(r, f)$, appelée fonction caractéristique qui caractérise la croissance pour les fonctions méromorphes dans un disque ou au voisinage de l'infini. Elle se définit à partir de deux termes $m(r, f)$ et $N(r, f)$:

Définition 2.1.2 (*Fonction a -points*) (voir [9], [10]) Soit f une fonction méromorphe. Pour tout nombre complexe a , on désigne par $n(t, a, f)$ le nombre de racines de l'équation $f(z) = a$ situées dans le disque $|z| \leq t$, chaque racine étant comptée avec son ordre de multiplicité et par $n(t, \infty, f)$ le nombre de pôles de la fonction f dans le disque $|z| \leq t$.

Posons

$$N(r, a, f) = \int_0^r \frac{n(t, a, f) - n(0, a, f)}{t} dt + n(0, a, f) \ln r, \quad a \neq \infty \quad (2.2)$$

et

$$N(r, \infty, f) = N(r, f) = \int_0^r \frac{n(t, \infty, f) - n(0, \infty, f)}{t} dt + n(0, \infty, f) \ln r, \quad (2.3)$$

$N(r, f)$ est appelée fonction a-points de la fonction f dans le disque $|z| \leq r$.

Le terme $N(r, f)$ est lié au nombre de fois que la fonction f atteint l'infini dans le cercle de rayon r . Si $n(r, a)$ désigne le nombre des racines comprises dans le cercle $|z| = r$ de l'équation $f(z) = a$ (a pouvant valoir 1), chaque racine étant comptée autant de fois que son ordre l'indique.

Remarque 2.1.1 . *La fonction $N(r, f)$ est utile car elle est liée, d'une manière naturelle, à la formule de Jensen (2.1). La formule de Jensen peut être écrite comme*

$$N\left(r, \frac{1}{f}\right) - N(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(re^{i\varphi})| d\varphi - \ln |c_\lambda|.$$

Proposition 2.1.1 *Soit f une fonction méromorphe avec le développement de Laurent à l'origine*

$$f(z) = \sum_{i=m}^{\infty} c_i z^i, \quad c_m \neq 0, m \in \mathbb{Z},$$

Alors

$$\ln |c_m| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(re^{i\varphi})| d\varphi - N\left(r, \frac{1}{f}\right) + N(r, f).$$

Définition 2.1.3 (*Fonction de proximité*) (voir [9], [10]) *Pour la fonction méromorphe f on définit*

$$\begin{aligned} m(r, a, f) &= m\left(r, \frac{1}{f-a}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \left| \frac{1}{f(re^{i\varphi}) - a} \right| d\varphi, \quad a \neq \infty \end{aligned}$$

si $f \not\equiv a \in \mathbb{C}$, et

$$m(r, \infty, f) = m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ |f(re^{i\varphi})| d\varphi. \quad (2.4)$$

$m(r, a, f)$ est appelée fonction de proximité de la fonction f au point a .

Définition 2.1.4 (*Fonction caractéristique*) (voir [5], [6], [9], [10]) *La fonction caractéristique d'une fonction méromorphe f est définie par*

$$T(r, f) = m(r, f) + N(r, f). \quad (2.5)$$

Exemple 1 *Pour la fonction*

$$f(z) = e^z$$

on a

$$m(r, f) = \frac{r}{\pi}, \quad N(r, f) = 0.$$

D'où

$$T(r, f) = \frac{r}{\pi}$$

Exemple 2 *Soit la fonction*

$$f(z) = e^{a_n z^n}$$

on a

$$m(r, f) = \frac{|a_n| r^n}{\pi}, \quad N(r, f) = 0.$$

Donc

$$T(r, f(z)) = \frac{|a_n| r^n}{\pi}.$$

Théorème 2.1.2 (*Premier théorème fondamental*) (voir [9]) *Soient f une fonction méromorphe, $a \in \mathbb{C}$, et soit*

$$f(z) - a = \sum_{i=m}^{\infty} c_i z^i, \quad c_m \neq 0, \quad m \in \mathbb{Z},$$

le développement de Laurent de la fonction $f - a$ à l'origine. Alors

$$T\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = T(r, f) - \ln |c_m| + \varphi(r, a), \quad (2.6)$$

où

$$|\varphi(r, a)| \leq \ln 2 + \ln^+ |a|.$$

Remarque 2.1.2 *Le premier théorème principal peut être exprimé en*

$$T\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = T(r, f) + O(1),$$

pour tout $a \in \mathbb{C}$. Notez que le terme d'erreur borné $O(1)$ dépend de $a \in \mathbb{C}$.

Théorème 2.1.3 (voir [8], [9]) *Soit f une fonction méromorphe non constante. Alors*

$$m(r, a) + N(r, a) = T(r, f) + \varepsilon(r, a) \quad (2.7)$$

pour tout nombre complexe $a \neq \infty$, où $\varepsilon(r, a) = O(1)$ quand $r \rightarrow \infty$.

Ce théorème caractérise donc l'invariance, à un terme borné près, de la somme $m(r, a) + N(r, a)$. En outre, le terme $m(r, a)$ étant en général assez petit, ce théorème donne une limite supérieure au terme $N(r, a)$.

Proposition 2.1.2 *Soient f, f_1, f_2, \dots, f_n des fonctions méromorphes et $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ telles que $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Alors*

(a) $m(r, f) > 0$, donc $N(r, f) \leq T(r, f)$,

(b) $m(r, f_1 \dots f_n) \leq \sum_{i=1}^n m(r, f_i)$,

(c) $m\left(r, \sum_{i=1}^n f_i\right) \leq \sum_{i=1}^n m(r, f_i) + \ln^+ n$,

(d) si $r > 0$ ou $f(0) \neq \infty$, alors $N(r, f) > 0$, donc $m(r, f) \leq T(r, f)$.

(e) $N(r, f_1 \dots f_n) \leq \sum_{i=1}^n N(r, f_i)$,

(f) $N\left(r, \sum_{i=1}^n f_i\right) \leq \sum_{i=1}^n N(r, f_i)$,

(g) $T(r, f) > 0$ dès que $r > 1$ ou $f(0) \neq \infty$,

$$(h) \quad T(r, f_1 \dots f_n) \leq \sum_{i=1}^n T(r, f_i) \quad \text{pour } r \geq 1,$$

$$(i) \quad T(r, f^n) = nT(r, f), \quad n \in \mathbb{N},$$

$$(j) \quad T\left(r, \sum_{i=1}^n f_i\right) \leq \sum_{i=1}^n T(r, f_i) + \log^+ n, \quad \text{pour } r \geq 1,$$

$$(k) \quad T\left(r, \frac{\alpha f + \beta}{\gamma f + \delta}\right) = T(r, f) + O(1),$$

si $f \neq \frac{-\delta}{\gamma}$.

$$(l) \quad m(r, f), N(r, f) \text{ et } T(r, f) \text{ sont continues,}$$

$$(m) \quad N(r, f) \text{ et } T(r, f) \text{ sont croissantes.}$$

Preuve. Les points (a), (b) et (c) s'obtiennent en intégrant les inégalités correspondantes sur \log^+ . La continuité de $m(r, f)$ en un rayon r s'obtient en considérant un voisinage compact $\{z : r - \varepsilon \leq |z| \leq r + \varepsilon\}$ qui ne contient pas de pôle de f . Alors $\log^+ f$ est bornée sur ce voisinage, donc le théorème de continuité sous le signe somme s'applique : $m(r, f)$ est continue dans l'intervalle $]r - \varepsilon; r + \varepsilon[$. On exprime ensuite $N(r, f)$ comme une somme sur tous les pôles de f :

$$N(r, f) = \int_0^r \frac{n(t, \infty, f) - n(0, \infty, f)}{t} dt + n(0, \infty, f) \ln r.$$

□

Tous les termes sont croissants, donc $N(r, f)$ l'est aussi. Ils sont tous continus, donc $N(r, f)$ l'est aussi.

Enfin, tous sont positifs sauf éventuellement celui zéro : il est cependant positif ou nul dès que $r > 0$ ou $f(0) \neq \infty$, et cela prouve (d). Les points (e) et (f) s'obtiennent en majorant les multiplicités d'un pôle a de $f_1 \dots f_n$ ou de $f_1 + \dots + f_n$ par la somme des multiplicités de ce point pour les fonctions f_1, \dots, f_n

Pour obtenir les propriétés (g), (h), (j), (k), (l) sur $T(r, f)$, il suffit de sommer les propriétés correspondantes sur m et N . On ne peut pas obtenir le point (m) de la même façon, car bien que $N(r, f)$ soit croissante, $m(r, f)$ ne l'est pas forcément. (Par exemple, si $f : z \rightarrow \frac{-1}{z^2}$, alors $m(r, f)$ n'est pas croissante)

Pour la propriétés (i) il est facile de voir que $|f^n| = |f|^n \leq 1$ ssi $|f| \leq 1$.

Il ne reste plus qu'à montrer que $T(r, f)$ est croissante. Pour chaque θ on applique le premier théorème de Nevanlinna [9] $\left(\log |c_f| + T_{\frac{1}{f}}(R) = T_f(R)\right)$ à la fonction $z \rightarrow f(z) - \exp i\theta$ (qui a les mêmes pôles que f); c_m coefficient de

$$f(z) - \exp(i\theta) :$$

Or on a

$$\int_0^{2\pi} \log^+ |b - e^{i\theta}| \frac{d\varphi}{2\pi} = \log^+ |b| ,$$

pour tout b (la preuve est donnée plus bas). En intégrant l'égalité qui précède, et en permutant les intégrales du second membre par le théorème de Fubini, il vient donc :

$$\int_0^{2\pi} \left[\log |c_m| + N_{\frac{1}{f - \exp i\theta}}(r) \right] \frac{d\varphi}{2\pi} = N_f(r) + \left[\int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\varphi})| \frac{d\varphi}{2\pi} \right] = T_f(r) .$$

Comme $\log |c_m|$ est une constante, et que $N_{\frac{1}{f - \exp i\theta}}(r)$ est croissante en r , on déduit que T_f est aussi croissante.

Prouvons enfin que

$$\int_0^{2\pi} \log^+ |b - e^{i\theta}| \frac{d\varphi}{2\pi} = \log^+ |b| .$$

Si $|b| > 1$, alors la fonction $z \rightarrow \log(b - z)$ est holomorphe sur \overline{D} (disque unité fermé), donc sa partie réelle $z \rightarrow \log |b - z|$ est harmonique, d'où

$$\int_0^{2\pi} \log^+ |b - e^{i\theta}| \frac{d\varphi}{2\pi} = \log |b - 0| .$$

Si $|b| < 1$, alors la fonction $z \rightarrow \log(bz - 1)$ est holomorphe sur \overline{D} , donc sa partie réelle $z \rightarrow \log|bz - 1|$ est harmonique, d'où

$$\int_0^{2\pi} \log^+ |b - e^{i\theta}| \frac{d\varphi}{2\pi} = \int_0^{2\pi} \log^+ |be^{-i\theta} - 1| \frac{d\varphi}{2\pi} = \log |b \times 0 - 1| = 0.$$

Le cas $|b| = 1$ s'obtient par continuité.

Définition 2.1.5 (*L'ordre et l'hyper - ordre*) (voir [2], [3]) Soit f une fonction entière.

Alors l'ordre et l'hyper-ordre de f sont définis respectivement par

$$\sigma(f) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log M(r, f)}{\log r},$$

$$\sigma_2(f) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log \log M(r, f)}{\log r},$$

où $M(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)|$. Si f est une fonction méromorphe, alors l'ordre et l'hyper-ordre de f sont définis par

$$\sigma(f) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r},$$

$$\sigma_2(f) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log T(r, f)}{\log r},$$

où $T(r, f)$ est la fonction caractéristique de R.Nevanlinna de la fonction f .

Théorème 2.1.4 Soit $R(u)$ une fonction rationnelle de degré d et $f(z)$ une fonction méromorphe, alors

$$T(r, R(f)) = dT(r, f(z)) + O(1). \quad (2.8)$$

Théorème 2.1.5 Soit $P(u)$ est un polynôme de degré p et $f(z)$ une fonction méromorphe, alors

$$T(r, P(f(z))) = pT(r, f(z)) + O(1),$$

$$m(r, P(f(z))) = pm(r, f(z)) + O(1),$$

$$N(r, P(f(z))) = pN(r, f(z))$$

Corollaire 2.1.1 Si $R(z)$ est une fonction rationnelle de degré d , alors

$$T(r, R(z)) = p \ln r + O(1), \quad (2.9)$$

car $T(r, z) = \ln^+ r$, d'après (2.8)

Exemple 3 *Soit la fonction*

$$f(z) = \cos z$$

alors

$$T(r, \cos z) = \frac{2r}{\pi} + O(1),$$

donc

$$\sigma(f) = 1 \quad \text{et} \quad \sigma_2(f) = 0$$

Exemple 4 *Soit la fonction*

$$f(z) = \cosh z$$

alors

$$T(r, \cosh z) = \frac{2r}{\pi} + O(1),$$

donc

$$\sigma(f) = 1 \quad \text{et} \quad \sigma_2(f) = 0.$$

Dans certaines parties de la théorie de Nevanlinna, ainsi que dans la théorie des équations différentielles complexes, il sera fréquent de rencontrer avec des quantités qui sont de la croissance $o(T(r, f))$ quand $r \rightarrow \infty$ en dehors d'un ensemble exceptionnel de mesure linéaire finie, f étant une fonction méromorphe. Ces quantités seront notées par $S(r, f)$. Notez que l'ensemble exceptionnel peut être différent pour des quantités différentes. En outre, la somme finie de nombreuses quantités de type $S(r, f)$ est de nouveau de type $S(r, f)$. Même plus, c'est vrai :

Définition 2.1.6 *Soit la fonction $S(r, f) = o(T(r, f))$ à l'extérieur d'un ensemble de mesure linéaire finie.*

Proposition 2.1.3 *Soit f une fonction méromorphe. Alors la famille*

$$S(f) := \{g \text{ méromorphe} / T(r, g) = S(r, f)\}$$

est un champ et une algèbre.

Définition 2.1.7 (*Exposant de convergence des zéros*) (voir [7]) Soit f une fonction méromorphe. Alors on définit l'exposant de convergence des zéros de la fonction f par

$$\lambda(f) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r},$$

où

$$N\left(r, \frac{1}{f}\right) = \int_0^r \frac{n\left(t, \frac{1}{f}\right) - n\left(0, \frac{1}{f}\right)}{t} dt + n\left(0, \frac{1}{f}\right) \log r;$$

et par

$$\bar{\lambda}(f) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r},$$

l'exposant de convergence des zéros distincts de la fonction f , où

$$\bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) = \int_0^r \frac{\bar{n}\left(t, \frac{1}{f}\right) - \bar{n}\left(0, \frac{1}{f}\right)}{t} dt + \bar{n}\left(0, \frac{1}{f}\right) \log r;$$

avec :

- * $n\left(t, \frac{1}{f}\right)$ est le nombre des zéros de la fonction f situées dans le disque $|z| \leq t$.
- * $\bar{n}\left(t, \frac{1}{f}\right)$ désigne le nombre des zéros distincts de la fonction f situées dans le disque $|z| \leq t$.

Remarque 2.1.3 Soit f une fonction méromorphe. On définit l'hyper exposant de convergence des zéros et l'hyper exposant de convergence des zéros distincts de la fonction f respectivement par

$$\lambda_2(f) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r}$$

$$\bar{\lambda}_2(f) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log \bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r},$$

2.2 La densité des ensembles :

Définition 2.2.1 (*Mesure d'un ensemble*) (voir [6]) On définit la mesure linéaire d'un ensemble $E \subset [0, \infty)$ par

$$m(E) = \int_0^{+\infty} \chi_E(t) dt,$$

où $\chi_E(t)$ est la fonction caractéristique de l'ensemble E . La mesure logarithmique d'un ensemble $F \subset [1, \infty)$ est définie par

$$lm(F) = \int_1^{+\infty} \frac{\chi_F(t)}{t} dt.$$

Exemple 5 La mesure linéaire de l'ensemble $E = [a, b] \subset [0, \infty)$ est

$$m(E) = \int_0^{+\infty} \chi_E(t) dt = \int_a^b dt = b - a.$$

La mesure logarithmique de l'ensemble $F = [e^4, e^6] \subset [1, \infty)$ est

$$lm(F) = \int_1^{+\infty} \frac{\chi_F(t)}{t} dt = \int_{e^4}^{e^6} \frac{dt}{t} = 2.$$

Définition 2.2.2 (voir [3], [6]) La densité supérieur d'un sous ensemble $E \subset [0, \infty)$ est définie par

$$\overline{dens}E = \limsup_{r \rightarrow \infty} \left(\int_0^r \chi_E(t) dt \right) / r,$$

et la densité inférieur de $E \subset [0, \infty)$ est définie par

$$\underline{dens}E = \liminf_{r \rightarrow \infty} \left(\int_0^r \chi_E(t) dt \right) / r.$$

Définition 2.2.3 De même on définit la densité logarithmique supérieur d'un sous ensemble $H \subset [1, \infty)$ par

$$\overline{\log dens}H = \limsup_{r \rightarrow \infty} \left(\int_1^r \frac{\chi_H(t)}{t} dt \right) / \log r$$

et la densité logarithmique inférieur de $H \subset [1, \infty)$ est définie par

$$\underline{\log dens}H = \liminf_{r \rightarrow \infty} \left(\int_1^r \frac{\chi_H(t)}{t} dt \right) / \log r$$

où $\chi(t)$ est la fonction caractéristique d'un ensemble.

2.3 Le terme maximal et l'indice central :

Définition 2.3.1 (*Le terme maximale*) (voir [3]) Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une fonction entière, $\mu(r)$ le terme maximal de f , i.e

$$\mu(r) = \max \{|a_n| r^n; n = 0, 1, 2, \dots\}. \quad (2.10)$$

Définition 2.3.2 (*L'indice central*) (voir [3]) L'indice central de la fonction f est défini par

$$\nu_f(r) = \max \{m; \mu(r) = |a_m| r^m\}. \quad (2.11)$$

Exemple 6 Soit le polynôme

$$p(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i, \quad a_n \neq 0,$$

on a

$$\mu(r) = |a_n| r^n \quad \text{et} \quad \nu_p(r) = n \quad \text{pour } r \text{ assez grand.}$$

2.4 Lemmes préliminaires

Nous avons besoins des lemmes suivants pour la preuve des théorèmes.

Lemme 2.4.1 (voir [9, p : 50 – 51]) Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une fonction entière, $\mu(r)$ est le terme maximal de f , i.e

$$\mu(r) = \max \{|a_n| r^n; n = 0, 1, 2, \dots\}, \quad (2.10)$$

et soit $\nu(r)$ l'indice central de f , i.e

$$\nu(r) = \max \{m; \mu(r) = |a_m| r^m\}. \quad (2.11)$$

Alors nous avons

$$\limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log \nu(r)}{\log r} = \sigma_2(f),$$

où $\sigma_2(f)$ est l'hyper-ordre de f .

Lemme 2.4.2 Soient $F(r)$ et $G(r)$ des fonctions croissantes sur $(0, +\infty)$. Si $F(r) \leq G(r)$ pour $r \notin E \cup [0, 1]$, où l'ensemble $E \subset (1, +\infty)$ est de mesure logarithmique finie, alors, pour une constante $\alpha > 1$, il existe une valeur $r_0 > 0$ telle que $F(r) \leq G(\alpha r)$ pour $r > r_0$.

Preuve.

□

Comme E est de mesure logarithmique finie $\int_1^{+\infty} \frac{E(t)}{t} dt = \log \text{meas} E < +\infty$,

alors

$$\int_1^{+\infty} \frac{E(t)}{t} dt \rightarrow 0,$$

où $\log \text{meas} E$ est la mesure logarithmique de E , et

$$E(t) = \begin{cases} 1 & , \text{ si } t \in E, \\ 0 & , \text{ si } t \notin E. \end{cases}$$

Donc, il existe $r_0 > 1$ tel que

$$\int_r^{\alpha r} \frac{E(t)}{t} dt < \log \alpha; \quad \text{lorsque } r > r_0.$$

Comme

$$\log(\alpha r) - \log(r) = \log \alpha,$$

on a

$$(r, r\alpha) - E \cap (r, +\infty) \neq \emptyset,$$

et ainsi nous pouvons choisir

$$r' \in (r, r\alpha) - E \cap (r, +\infty).$$

Par l'hypothèse du lemme 2.2, on obtient

$$F(r) \leq F(r') \leq G(r') \leq G(\alpha r).$$

D'où le résultat.

Lemme 2.4.3 *Lemme de la dérivée logarithmique (voir [13, p 38], [5, p 36 – 56]) Soit f une fonction méromorphe non constante dans le plan complexe fini, et k un entier positif. Alors pour $1 \leq r \leq R < +\infty$,*

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) \leq C \left(\log^+ T(R, f) + \log^+ \frac{1}{R-r} + \log R + 1 \right), \quad (2.12)$$

où C est une constante positif ne dépendant que k et f .

Lemme 2.4.4 (voir [4]) *Soit f une fonction transcendante méromorphe d'ordre fini σ . Soit $\Gamma = \{(k_1, j_1), (k_2, j_2), \dots, (k_m, j_m)\}$ un ensemble fini de couples de nombres entiers distincts d'entiers satisfaisant $k_i > j_i \geq 0$ pour $i = 1, \dots, m$ et soit $\varepsilon > 0$ une constante donnée. Alors il existe un ensemble $E \subset [1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie, tel que pour tout z vérifiant $|z| \notin [0, 1] \cup E$ et tout $(k, j) \in \Gamma$, on a*

$$\left| \frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)} \right| \leq |z|^{(k-j)(\sigma-1+\varepsilon)}. \quad (2.14)$$

Lemme 2.4.5 (voir [4]) *Soit f une fonction méromorphe transcendante, et soit $\alpha > 1$ une constante donnée. Alors il existe un ensemble $E \subset [1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie et une constante $C > 0$, qui ne dépend que de α et $k = 1, 2, \dots, m$ tel que pour tout z vérifiant $|z| \notin [0, 1] \cup E$, on a*

$$\left| \frac{f^{(k)}(z)}{f(z)} \right| \leq C \left\{ \frac{T(\alpha r, f)}{r} (\log r)^\alpha \log T(\alpha r, f) \right\}^k, \quad (2.15)$$

pour tout $k = 1, 2, \dots, m$.

Lemme 2.4.6 (voir Wiman – Valiron, [11], [6]) *Soit f une fonction entière transcendante et soit z un point tel que $|f(z)| = M(r, f)$. Alors pour tout $|z|$ en dehors d'un ensemble E de r de mesure logarithmique finie, on a*

$$\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)} = \left(\frac{\nu_f(r)}{z} \right)^k (1 + O(1)), \quad r \notin E, \quad (2.16)$$

où k est un nombre entier positif.

LA CROISSANCE DES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

3.1 Introduction et résultats

Dans l'étude des équations différentielles complexes, la croissance d'une solution est une propriété importante. Pour les équations différentielles linéaires de la forme

$$f^{(n)} + a_{n-1}(z) f^{(n-1)} + \dots + a_0(z) f = 0, \quad (3.1)$$

où $a_0(z), a_1(z), \dots, a_{n-1}(z)$ sont des polynômes, il est bien connu que toute solution entière de l'équation (3.1) doit être d'ordre fini([9]).

Pour une équation différentielle linéaire du second ordre

$$f'' + A(z) f' + B(z) f = 0, \quad (3.2)$$

où A et $B \neq 0$ sont des fonctions entières, les résultats suivants ont été obtenus.

Théorème A (voir [9]) Soit E un ensemble de nombres complexes satisfaisant $\overline{\text{dens}} \{ |z|; z \in E \} > 0$, et soit $A(z)$ et $B(z)$ sont des fonctions entières telles que pour les constantes $\alpha, \beta > 0$, on a

$$|A(z)| \leq \exp \left\{ o(1) |z|^\beta \right\},$$

et

$$|B(z)| \geq \exp \left\{ (1 + o(1)) \alpha |z|^\beta \right\},$$

quand $z \rightarrow \infty$ pour $z \in E$. Alors, toute solution $f \neq 0$ de l'équation (3.2) satisfait $\sigma(f) = +\infty$ et $\sigma_2(f) \geq \beta$.

Théorème B (voir [3]) Soit E un ensemble de nombres complexes satisfaisant $\overline{\text{dens}}\{ |z|; z \in E \} > 0$, et soit $A(z)$ et $B(z)$ des fonctions entières avec

$$\sigma(A) \leq \sigma(B) = \sigma < +\infty,$$

telles que pour une constante $C > 0$ et pour tout $\varepsilon > 0$,

$$|A(z)| \leq \exp \{ o(1) |z|^{\sigma-\varepsilon} \},$$

et

$$|B(z)| \geq \exp \left\{ (1 + o(1)) \alpha |z|^{\sigma-\varepsilon} \right\},$$

quand $z \rightarrow \infty$ pour $z \in E$. Alors, toute solution $f \neq 0$ de l'équation (3.2) satisfait $\sigma(f) = +\infty$ et $\sigma_2(f) = \sigma(\beta)$.

Théorème C (voir [14]) Soit $\phi(z)$ un polynôme non constant et k un entier positif. Alors, toute solution F de l'équation différentielle

$$f^{(k)} - e^{\phi(z)} f = 1, \tag{3.3}$$

est une fonction entière d'ordre infini.

Théorème D (voir [12]) Soit $\phi(z)$ un polynôme non constant. Alors, toute solution de l'équation différentielle

$$f' - e^{\phi(z)} f = z - 1,$$

est d'ordre infini.

Théorème 3.1.1 Soit E un ensemble de nombres complexes satisfaisant $\overline{\text{dens}}\{ |z|; z \in E \} > 0$, et soient $A_0(z), A_1(z), \dots, A_n(z)$ des fonctions entières telles que, pour certaines constantes $\alpha > \beta \geq 0$, on a

$$|A_0(z)| \geq e^{\alpha|z|^\mu},$$

et

$$|A_j(z)| \leq e^{\beta|z|^\mu}; \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

quand $z \rightarrow \infty$ pour $z \in E$. Alors, toute solution méromorphe ou entière $f \neq 0$ de l'équation

$$A_n(z) f^{(n)} + A_{n-1}(z) f^{(n-1)} + \dots + A_0(z) f = 0, \quad (3.4)$$

satisfait $\sigma(f) = +\infty$ et $\sigma_2(f) \geq \mu$.

Théorème 3.1.2 Soit E un ensemble de nombres complexes satisfaisant $\overline{\text{dens}}\{|z|; z \in E\} > 0$, et soient $A_0(z), A_1(z), \dots, A_{n-1}(z)$ et $A_n(z) = 1$ des fonctions entières telles que

$$\max\{\sigma(A_j); j = 1, 2, \dots, n-1\} \leq \sigma(A_0) = \sigma < +\infty,$$

et pour certaines constantes $\alpha > \beta \geq 0$ on a, pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit,

$$|A_0(z)| \geq e^{\alpha|z|^{\sigma-\varepsilon}},$$

et

$$|A_j(z)| \leq e^{\beta|z|^{\sigma-\varepsilon}}, \quad j = 1, \dots, n,$$

quand $z \rightarrow \infty$ pour $z \in E$. Alors, toute solution $f \neq 0$ de l'équation (3.4) satisfait $\sigma(f) = +\infty$ et $\sigma_2(f) = \sigma(A_0)$.

Théorème 3.1.3 Soient A_0 et A_1 des fonctions entières avec A_1 transcendante, k un entier positif. Supposons que

$$M(r, A_0) = O\left\{M(r, A_1)^\lambda\right\}, \quad 0 < \lambda < +\infty.$$

Alors, toute solution F de l'équation différentielle

$$F^{(k)} - A_1 F = A_0 \quad (3.5)$$

satisfait $\sigma_2(F) = \sigma(A_1)$, avec au plus une solution exceptionnelle d'ordre fini.

Corollaire 3.1.1 Soit $\Phi(z)$ une fonction entière non constante et k un entier positif. Alors, toute solution F de l'équation différentielle

$$F^{(k)} - e^{\Phi(z)} F = 1,$$

satisfait $\sigma_2(F) = \sigma(e^\Phi)$, avec au plus une exception.

Corollaire 3.1.2 Soit $\Phi(z)$ une fonction entière non constante et k un entier positif, et soit p et q des polynômes non nuls. Alors toute solution F de l'équation différentielle

$$F^{(k)} - pe^{\Phi(z)}F = q,$$

satisfait $\sigma_2(F) = \sigma(e^{\Phi})$ avec au plus une exception.

Remarque 3.1.1 un exemple montrant qu'il peut y avoir une solution exceptionnelle est donnée par $f(z) = e^z$, ce qui satisfait $f' - e^{-z}f = e^z - 1$. Ici, $\sigma_2(f) = 0$ et $\sigma(e^{-z}) = 1$. Nous ne savons pas qu'il existe une solution exceptionnelle dans les corollaires du théorème 3.3.

3.2 Preuve des Théorèmes

3.2.1 Preuve du Théorème 3.1.1

Supposons que $f \neq 0$ est une solution méromorphe de l'équation (3.4) avec $\sigma(f) = \sigma < +\infty$.

Alors d'après (3.4), on a

$$\frac{A_n}{A_0} \frac{f^{(n)}}{f} + \frac{A_{n-1}}{A_0} \frac{f^{(n-1)}}{f} + \cdots + \frac{A_1}{A_0} \frac{f'}{f} + 1 = 0. \quad (3.6)$$

D'après le Lemme 2.4, il existe un ensemble $E_0 \subset [1, +\infty)$ avec une mesure logarithmique finie, tel que pour tout z satisfaisant $|z| \notin [0, 1] \cup E_0$, et pour $k = 1, 2, \dots, n$, nous avons

$$\left| \frac{f^{(k)}(z)}{f(z)} \right| \leq |z|^{k(\sigma-1+\varepsilon)}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (3.7)$$

D'autre part, d'après les conditions du Théorème 3.1.1, il existe un ensemble E_1 de nombres complexes avec $\overline{\text{dens}}\{|z|; z \in E\} > 0$ tel que pour tout $z \in E_1$, on a

$$|A_0(z)| \geq e^{\alpha|z|^\mu}, \quad (3.8)$$

et

$$|A_j(z)| \leq e^{\beta|z|^\mu}; \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (3.9)$$

quand $z \rightarrow \infty$. Alors de (3.7), (3.8) et (3.9), on a

$$\left| \frac{A_k}{A_0} \right| \left| \frac{f^{(k)}}{f} \right| \leq e^{(\beta-\alpha)|z|^\mu} |z|^{k(\sigma-1+\varepsilon)}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Puisque E est de mesure logarithmique finie, la densité de E est égal à zéro. Par conséquent, de (3.6), il existe un ensemble E avec une densité supérieure positive telle que

$$1 \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{A_i}{A_0} \right| \left| \frac{f^{(i)}}{f} \right| \leq n e^{(\beta-\alpha)|z|^\mu} |z|^{n(\sigma-1+\varepsilon)}, \quad z \in \overline{E}.$$

Comme

$$\lim_{z \rightarrow \infty} e^{(\beta-\alpha)|z|^\mu} |z|^{n(\sigma-1+\varepsilon)} = 0,$$

il s'ensuit que

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \left| \frac{A_k(z)}{A_0(z)} \right| \left| \frac{f^{(k)}(z)}{f(z)} \right| = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n; \quad z \in \overline{E}.$$

En faisant $z \rightarrow \infty$ pour $z \in \overline{E}$ dans la relation (3.4), nous obtenons une contradiction. Donc, ce qui prouve que toute solution méromorphe $f \neq 0$ de l'équation (3.4) est d'ordre infini.

Maintenant soit f est une solution méromorphe d'ordre infini de l'équation (3.4). D'après (3.4) on a

$$|A_0(z)| \leq \sum_{i=1}^n |A_i(z)| \left| \frac{f^{(i)}}{f} \right|. \quad (3.10)$$

Puis, par le Lemme 2.5, il existe un ensemble $E_2 \subset [1, +\infty)$ de mesure logarithmique fini tel que pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_2$, on a

$$\left| \frac{f^{(k)}(z)}{f(z)} \right| \leq C \{T(2r, f)\}^{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (3.11)$$

où $C > 0$ est une constante. D'après les hypothèses du Théorème 3.1, il existe un ensemble E_3 avec $\overline{\text{dens}} \{|z|; z \in E_3\} > 0$ tel que pour tout $z \in E_3$, on a

$$|A_0(z)| \geq e^{\alpha|z|^\mu}, \quad (3.12)$$

et

$$|A_j(z)| \leq e^{\beta|z|^\mu}; \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (3.13)$$

quand $z \rightarrow \infty$. Donc de (3.10), (3.11), (3.12), et (3.13), pour tout z satisfaisant $z \in E_3, |z| \notin [0, 1] \cup E_2$, on obtient

$$e^{\alpha|z|^\mu} \leq n e^{\beta|z|^\mu} \{T(2|z|, f)\}^{n+1},$$

quand $z \rightarrow \infty$. Ainsi, il existe donc un ensemble $E_4 \subset [1, +\infty)$ avec une densité supérieure positive tel que

$$e^{(\alpha-\beta)|z|^\mu} \leq n \{T(2r, f)\}^{n+1},$$

quand $|z| = r \rightarrow +\infty$, $r \in E_4$. Par conséquent

$$\sigma_2(f) = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log T(r, f)}{\log r} \geq \mu.$$

D'où le résultat.

3.2.2 Preuve du Théorème 3.1.2

Supposons que $f \neq 0$ est une solution entière de l'équation (3.4). En utilisant les mêmes arguments que dans le Théorème 3.1.1, on obtient $\sigma(f) = +\infty$.

Maintenant pour tout $\varepsilon > 0$, par le résultat du Théorème 3.1, on a $\sigma_2(f) \geq \sigma - \varepsilon$.

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on obtient $\sigma_2(f) \geq \sigma(A_0) = \sigma$.

En outre, d'après le Lemme 2.6, il existe un ensemble $E \subset [0, +\infty)$ de mesure logarithmique $m_l(E)$ finie. On peut choisir z satisfaisant $|z| = r \notin E$ et $|f(z)| = M(r, f)$ tel que

$$\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)} = \left(\frac{\nu_f(r)}{z} \right)^k (1 + o(1)), \quad r \notin E.$$

Par les conditions du Théorème 3.1.2, pour tout $\varepsilon > 0$ donn il existe une valeur $r_0 > 0$ tel que

$$|A_j(z)| \leq e^{r^{\sigma+\varepsilon}}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n-1; \quad r \geq r_0.$$

De l'équation (3.4), on a

$$\begin{aligned} \left(\frac{\nu_f(r)}{z} \right)^n (1 + o(1)) &\leq e^{r^{\sigma+\varepsilon}} \left(\frac{\nu_f(r)}{z} \right)^{n-1} |1 + o(1)| + e^{r^{\sigma+\varepsilon}} \left(\frac{\nu_f(r)}{z} \right)^{n-2} |1 + o(1)| \\ &\quad \dots + e^{r^{\sigma+\varepsilon}} \left(\frac{\nu_f(r)}{z} \right) |1 + o(1)| + e^{r^{\sigma+\varepsilon}}, \end{aligned} \tag{3.14}$$

tel que z satisfait $|z| \notin [0, 1] \cup E$ et $|f(z)| = M(r, f)$.

De (3.14), on obtient

$$\limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log \nu_f(r)}{\log r} \leq \sigma + \varepsilon.$$

Puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire, nous obtenons d'après le Lemme 2.1 et l'inégalité ci-dessus que $\sigma_2(f) \leq \sigma$. De $\sigma_2(f) \geq \sigma$, on obtient $\sigma_2(f) = \sigma$.

Doù le résultat.

3.2.3 Preuve du Théorème 3.1.3

Soit F une solution de l'équation (3.5). Il est bien connu que F est une fonction entière transcendante. Par le Lemme 2.6, on a

$$\frac{F^{(k)}}{F} = \left(\frac{\nu(r)}{z} \right)^k (1 + o(1)), \quad (3.15)$$

où $|z| = r$, $|F(z)| = M(r, f)$, $r \notin E$, E de mesure logarithmique finie. En combinant avec (3.5), on a

$$\left(\frac{\nu(r)}{z} \right)^k (1 + o(1)) = A_1 + \frac{A_0}{F}, \quad (3.16)$$

et

$$(\nu(r))^k \leq 2r^k \{M(r, A_1)\}^s, \quad r \rightarrow +\infty, \quad r \notin E,$$

où $s = \max\{1, \lambda - 1\}$ est une constante. Ainsi, d'après le Lemme 2.2, il existe un nombre positif r_0 tel que pour tout $r \geq r_0$,

$$\{\nu(r)\}^k \leq 2^{k+1} r^k \{M(2r, A_1)\}^s,$$

nous obtenons

$$\sigma_2(F) \leq \sigma(A_1). \quad (3.17)$$

D'autre part, soient f et g deux solutions distinctes de l'équation (3.5).

Alors

$$f^{(k)} - A_1 f = A_0,$$

il s'ensuit que

$$A_1 = \frac{(f - g)^{(k)}}{f - g}. \quad (3.18)$$

De (3.18) et le Lemme 2.3, on a

$$\begin{aligned} T(r, A_1) &= m(r, A_1) \\ &\leq C \log^+ T(2r, f - g) + \log^+ \frac{1}{r} + \log 2r + 1, \end{aligned}$$

d'où

$$\log^+ T(r, A_1) \leq \log^+ \log^+ T(2r, f - g) + \log r + M,$$

où M est une constante. De l'inégalité ci-dessus, on obtient

$$\sigma(A_1) \leq \sigma_2(f - g). \quad (3.19)$$

Puisque

$$\sigma_2(f - g) \leq \max\{\sigma_2(f), \sigma_2(g)\},$$

nous savons à partir de (3.19) qu'il y a au plus une solution F de l'équation (3.5) qui ne satisfait pas

$$\sigma(A_1) \leq \sigma_2(F).$$

Avec (3.17) nous complétons la preuve du Théorème 3.1.3.

APPLICATIONS : ESTIMATION DE LA CROISSANCE DES FONCTIONS ENTIÈRES

4.1 Introduction et résultats

Théorème 4.1.1 Soit $a \neq 0$ une valeur finie et k un entier positif, et soit

$$S(f) = \{f / f \text{ partage } a \text{ avec } f^{(k)} \text{ CM et } f \text{ est une fonction entière d'ordre fini}\},$$

$$S_1(f) = \{f / f \text{ partage } a \text{ avec } f^{(k)} \text{ CM et } f \text{ est une fonction entière d'ordre infini}\}.$$

où CM : en comptant les multiplicités.

Alors nous avons

i) pour chaque $f \in S(f)$, $\sigma(f) = 1$.

ii) pour chaque $f \in S_1(f)$, on a $\sigma_2(f)$ est un entier, ou infini avec au plus une exception.

Nous disons que deux fonctions entières f et g ont les mêmes points fixes. Si $f(z) - z$ et $g(z) - z$ ont les mêmes zéros avec les multiplicités. Nous avons le résultat suivant :

Théorème 4.1.2 Soit f une fonction entière d'ordre fini. Si f et f' ont les mêmes points fixes, et $\sigma(f) = 1$. Alors f s'écrit

$$f(z) = Ae^{cz} + \frac{(c-1)z}{c} + \frac{(c-1)}{c^2},$$

où $A \neq 0$ et $c \neq 0$ sont des constants.

4.2 Preuve des Théorèmes

4.2.1 Preuve du Théorème 4.1.1

Soit $f \in S(f)$. Nous savons que f est une fonction entière d'ordre fini, puisque f et $f^{(k)}$ partagent la valeur d'une comptage des multiplicités. Alors

$$\frac{f^{(k)} - a}{f - a} = e^\alpha,$$

où α est un polynôme. Soit $F = \frac{f}{a} - 1$. Alors F satisfait l'équation différentielle suivante

$$F^{(k)} - e^\alpha F = 1. \quad (4.1)$$

Si α n'est pas une constante, alors nous savons à partir de Théorème *C* que F est d'ordre infini. Ce qui contredit que f est d'ordre fini, si α doit être une constante. En résolvant (4.1) nous avons $\sigma(f) = 1$. Ce qui prouve (i).

De même, pour chaque $f \in S_1(f)$, $F = \frac{f}{a} - 1$ donc doit être une solution de l'équation différentielle

$$F^{(k)} - e^\beta F = 1,$$

où β est une fonction entière non constante. Par conséquent, la conclusion de (ii) résulte du Corollaire 3.1.1 du Théorème 3.1.3.

4.2.2 Preuve du Théorème 4.1.2

Soit f une fonction entière d'ordre fini. Puisque f et f' ont les mêmes points fixes, alors

$$\frac{f'(z) - z}{f(z) - z} = e^\alpha, \quad (4.2)$$

où α est un polynôme. Soit $F = f - z$. Alors F satisfait l'équation différentielle suivante

$$F' - e^\alpha F = z - 1.$$

Si α n'est pas une constante, alors nous savons à partir du Théorème *D* que F est d'ordre infini. Ce qui contredit f est d'ordre fini, donc α doit être une constante. Soit $e^\alpha = c$ ($c \neq 0$).

En résolvant (4.2), on a

$$f(z) = Ae^{cz} + \frac{(c-1)z}{c} + \frac{(c-1)}{c^2},$$

où A est une constante. Si $A = 0$, alors f est un point fixe $z = \frac{1-c}{c}$; ce qui contredit que f' n'a pas de point fixe. Donc, $A \neq 0$. Par l'expression de f , nous savons que $\sigma(f) = 1$.
d'où le résultat.

Conclusion

Dans ce mémoire, on a étudié les propriétés des solutions des équations différentielles linéaires à coefficients fonctions entières. La question qui se pose est-il possible de conserver les mêmes résultats dans le cas où les coefficients de l'équation sont méromorphes ?

Bibliographie

- [1] B. Belaïdi, Estimation of the hyper-order of entire solutions of complex linear ordinary differential equations whose coefficients are entire functions. *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.* 2002, no. 5, 8 pp.
- [2] B. Belaïdi, Growth and oscillation of solutions to linear differential equations with entire coefficients having the same order. *Electron. J. Differential Equations* 2009, No. 70, 10 pp.
- [3] Z. X. Chen and C. C. Yang, Some further results on the zeros and growths of entire solutions of second order linear differential equations. *Kodai Math. J.* 22 (1999), no. 2, 273–285.
- [4] G. Gundersen, Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function, plus similar estimates. *J. London Math. Soc.* (2) 37 (1988), no. 1, 88–104.
- [5] W. K. Hayman, *Meromorphic functions*. Oxford Mathematical Monographs Clarendon Press, Oxford 1964.
- [6] W. K. Hayman, The local growth of power series : a survey of the Wiman-Valiron method. *Canad. Math. Bull.* 17 (1974), no. 3, 317–358.
- [7] A. Hinkkanen, On the averages of the counting function of a meromorphic function. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. Dissertationes* No. 26 (1980), 31 pp.
- [8] K. H. Kwon, On the growth of entire functions satisfying second order linear differential equations. *Bull. Korean Math. Soc.* 33 (1996), no. 3, 487–496.
- [9] I. Laine, *Nevanlinna theory and complex differential equations*. de Gruyter Studies in Mathematics, 15. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1993.

-
- [10] A. Goldberg and I. Ostrovskii, Value distribution of meromorphic functions. Translated from the 1970 Russian original by Mikhail Ostrovskii. With an appendix by Alexandre Eremenko and James K. Langley. *Translations of Mathematical Monographs*, 236. American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.
- [11] G. Valiron, *Lectures on the General Theory of Integral Functions*, translated by E. F. Collingwood, Chelsea, New York, 1949.
- [12] J. P. Wang and H. X. YI, Entire functions that have the same fixed points with their first derivatives. *J. Math. Anal. Appl.* 290 (2004), no. 1, 235–246.
- [13] L. Yang, *Value distribution theory*. Translated and revised from the 1982 Chinese original. Springer-Verlag, Berlin ; Science Press Beijing, Beijing, 1993.
- [14] L. Z. Yang, Solution of a differential equation and its applications. *Kodai Math. J.* 22 (1999), no. 3, 458–464.
- [15] L. Z. Yang, Entire functions that share one value with one of their derivatives. *Finite or infinite dimensional complex analysis (Fukuoka, 1999)*, 617–624, *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, 214, Dekker, New York, 2000.