

\*

**UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM**  
**FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET SCIENCES DE LA NATURE ET**  
**DE LAVIE**  
**DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES**

**Mémoire de Master**

**Spécialité : Modélisation, Contrôle et Optimisation**

**Thème**

Résolution numérique de l'équation de Fredholm de première espèce

**Présenté par**

Bessaad hafsa

Besseghir hayet

**Soutenu le 29 /05/2016**

**Devant le jury**

|                          |                  |                       |
|--------------------------|------------------|-----------------------|
| <b>Mr Bouzit hamid</b>   | <b>Président</b> | <b>U. MOSTAGANEM.</b> |
| <b>Mr Belhamiti omar</b> | <b>Examineur</b> | <b>U. MOSTAGANEM.</b> |
| <b>Mme Ablaoui naïma</b> | <b>Encadreur</b> | <b>U. MOSTAGANEM.</b> |

# Table des matières

|   |           |
|---|-----------|
| Liste des Tableaux  | i         |
| Liste des Figures   | i         |
| Introduction  | ii        |
| <b>1 Préliminaire</b>   | <b>1</b>  |
| 1.1 Définitions (Rappels)   | 1         |
| 1.2 Propriétés fondamentales des fonctions de $L^2([a, b])$                       | 3         |
| <b>2 Les équations Intégrales</b>   | <b>4</b>  |
| 2.1 Introduction  | 4         |
| 2.2 Equation intégrale de Fredholm  | 4         |
| 2.3 Equation intégrale de Volterra  | 6         |
| 2.4 Equation intégrale d'Abel   | 6         |
| 2.5 Opérateur intégral linéaire   | 7         |
| 2.6 Théorème de Picard (résolution des équations intégrales)                      | 8         |
| 2.6.1 Méthode pour calculer les nombres caractéristiques et les fonctions propres | 9         |
| 2.6.2 Théorème de Picard  | 16        |
| <b>3 Méthodes approchées de Résolution</b>  | <b>19</b> |

---

|       |   |           |
|-------|---|-----------|
| 3.1   | Théorème de point fixe de Banach : . . . . .            | 19        |
| 3.2   | Méthode des approximations successives : . . . . .      | 19        |
| 3.3   | La Méthode des Ondelettes de Legendre (MWL) : . . . . . | 21        |
| 3.3.1 | Polynôme de Legendre : . . . . .                        | 21        |
| 3.3.2 | Les ondelettes : . . . . .                              | 22        |
| 3.3.3 | Les ondelettes de Legendre : . . . . .                  | 22        |
| 3.3.4 | Approximation de fonction : . . . . .                   | 23        |
| 3.3.5 | Méthode de Galarkin . . . . .                           | 23        |
| 3.3.6 | Méthode de collocation par points . . . . .             | 25        |
| 3.4   | Résultats numériques : . . . . .                        | 25        |
| 3.4.1 | Méthode des approximations successives : . . . . .      | 25        |
| 3.4.2 | Méthode de Galerkin : . . . . .                         | 28        |
| 3.4.3 | Méthode de collocation par points : . . . . .           | 29        |
|       | <b>Conclusion</b>                                       | <b>30</b> |
|       | <b>Bibliographie</b>                                    | <b>31</b> |
| 4     | <b>Annexe</b>   | <b>32</b> |

## Liste des Tableaux

---

**Tableau 1 :** Les résultats de la solution par la méthode des approximations successives pour différentes valeurs de  $\lambda$ .

**Tableau 2 :** Les résultats de la solution par la méthode des approximations successives pour  $\lambda = \frac{1}{2}$  et  $N = 9$ .

**Tableau 3 :** Les résultats de la solution par la méthode des approximations successives pour l'exemple (2).

**Tableau 4 :** Les résultats de la solution par la méthode de Galerkin pour l'exemple (2).

**Tableau 5 :** Les résultats de la solution par la méthode de Collocation pour l'exemple (2).

## Liste des Figures

---

**Figure 1 :** Graphe de la solution par Méthode des approximations successives de l'exemple (1).

**Figure 2 :** Graphe de la solution par Méthode des approximations successives de l'exemple (2).

**Figure 3 :** Graphe de la solution par Méthode de Galerkin de l'exemple (2).

**Figure 4 :** Graphe de la solution par Méthode de Collocation de l'exemple (2).

---

# INTRODUCTION

---

La théorie des équations intégrales qui s'est développée très rapidement à la suite des travaux de Volterra et de Fredholm, constitue aujourd'hui une importante branche de l'analyse mathématique .

J. Fourier (1768-1830) est le premier mathématicien qui a découvert ce genre d'équations intégrales (dû au fait qu'il a obtenu la formule de la transformation de Fourier).

En 1837, J. Liouville (1809-1882) a publié une discussion sur la relation entre les équations intégrales et les équations différentielles dans lesquelles il montrait qu'une solution particulière d'une équation différentielle linéaire est obtenue en résolvant une équation intégrale.

En 1887, V. Volterra (1860-1940) a établi la méthode de résolution des équations intégrales par les noyaux itérés. En outre, il a étendu la théorie d'équations intégrales aux équations intégrales-différentielles et aux équations intégrales singulières.

Ensuite en 1900 Fredholm (1866-1927) a étudié la méthode pour résoudre les équations intégrales (de deuxième espèce).

Les méthodes de résolution numériques jouent un rôle très important dans plusieurs domaines scientifiques comme les mathématiques appliquées, la physique mathématique, et beaucoup de problèmes faisant intervenir les équations différentielles ordinaires, aux dérivées partielles et intégrales.

Dans ce mémoire, nous allons traiter la résolution des équations intégrales de Fredholm de 1<sup>ère</sup> espèce, qui se divise en quatre chapitres :

Dans le 1<sup>ier</sup> chapitre, nous rappelons brièvement quelques notions et résultats préliminaires qui nous seront utiles dans les chapitres ultérieures.

Dans le 2<sup>ème</sup> chapitre, nous présentons une classification entre les équations intégrales et nous exposons une méthode exacte pour résoudre l'équation intégrale de Fredholm de première espèce (théorème de Picard).

Dans le 3<sup>ème</sup> chapitre, nous résolvons numériquement l'équation intégrale linéaire de Fredholm de première espèce, par la méthode des approximations successives et la méthode des

ondelettes de Legendre .

Dans l'Annexe, nous présentons les trois programmes sur matlab pour tester ces méthodes approchées.



# Préliminaire

---

Dans ce chapitre, nous rappelons les notions mathématiques de base

## 1.1 Définitions (Rappels)

### Définition 1.1.1 (*Produit scalaire*)

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

Un produit scalaire sur  $E$  est une application de  $E \times E$  dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et possédant les propriétés suivantes :

pour tout  $x, y, z$  dans  $E$  et  $\alpha, \beta$  dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ,

i)  $\langle x, x \rangle \geq 0$  et  $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$ .

ii)  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ .

iii)  $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \bar{\alpha} \langle x, z \rangle + \bar{\beta} \langle y, z \rangle$ .

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé un espace préhilbertien.

**Remarque 1.1.1** *Un produit scalaire sur  $E$  définit une norme sur  $E$  appelée norme induite par la formule suivante*

$$\|x\|_E = \sqrt{\langle x, x \rangle} .$$

### Définition 1.1.2 (*Espace de Banach*)

Un espace vectoriel normé complet est appelé un espace de Banach .

**Remarque 1.1.2** *On dit qu'un espace vectoriel normé est complet lorsque toute suite de Cauchy est convergente.*

**Définition 1.1.3 (Espace de Hilbert)**

Un espace de Hilbert est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, et qui est complet pour la norme associée à ce produit scalaire.

**Définition 1.1.4 (Système orthonormal) (voir [2])**

Un système  $(e_n)_n$  de vecteurs d'un espace préhilbertien  $E$  est dit orthogonal si

$$\langle e_n, e_m \rangle = 0 \text{ pour } n \neq m.$$

Il est dit orthonormal si en plus

$$\langle e_n, e_n \rangle = 1.$$

**Définition 1.1.5 (Système complet) (voir [2])**

Un système orthonormal  $(e_n)_n$  de vecteurs d'un espace préhilbertien  $E$  est dit complet ou topologiquement total si l'ensemble des combinaisons linéaires finies des vecteurs du système orthonormal  $(e_n)_n$  est partout dense dans  $E$ .

Un système orthonormal complet d'un espace hilbertien  $E$  est encore appelé une base hilbertienne de  $E$ .

**Définition 1.1.6** *Une fonction  $f(x)$  de signe arbitraire est sommable (intégrable) sur  $[a, b]$  si et seulement si  $\int_a^b |f(x)| dx$  est finie.*

**Définition 1.1.7 (voir [2])** *On appelle  $L^2(E)$  l'espace vectoriel des fonctions mesurables  $f$  définies sur  $E$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ) tel que  $|f|^2$  soit intégrable.*

Il est muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx, \text{ pour } f, g \in L^2(E), \quad (1.1.1)$$

pour lequel la quantité notée  $\|\cdot\|_{L^2(E)}$  et définie par

$$\|f\|_{L^2(E)} = \sqrt{\langle f, f \rangle}, \quad (1.1.2)$$

est une norme dans  $L^2(E)$ , qu'on note aussi  $\|f\|_{L^2(E)} = \|f\|_0$ .

**Théorème 1.1.1 de Riesz-Fischer** : (voir [2])

L'espace vectoriel normé  $L^2(E)$  est complet.

## 1.2 Propriétés fondamentales des fonctions de $L^2([a, b])$ :

1. Le produit de deux fonctions de carré intégrable est une fonction intégrable.
2. Le produit scalaire de deux fonctions  $f(x) \in L^2([a, b])$ ,  $g(x) \in L^2([a, b])$  est le nombre

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

3.  $L^2([a, b])$  est un espace de Hilbert .
4. Une suite de fonctions  $(\varphi_n)_n$  est dite convergente en moyenne vers une fonction  $\varphi$  si et seulement si la suite numérique

$$\|\varphi_n - \varphi\|^2 = \int_a^b |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^2 dx,$$

converge vers 0.

# Les équations Intégrales

---

## 2.1 Introduction :

Une équation intégrale est une équation dans laquelle l'inconnue, généralement une fonction d'une ou plusieurs variables, apparaît sous le signe intégral.

Les équations intégrales les plus fréquemment utilisées sont les équations de Volterra et celles de Fredholm.

Ces équations sont classées selon les deux caractéristiques suivantes :

i) limites d'intégrations ( les bornes d'intégration) :

- Si les deux sont fixées, alors cette équation est de Fredholm.
- Si l'une est variable, c'est l'équation de Volterra.

ii) la position de la fonction inconnue :

- On dit qu'une équation est de première espèce si la fonction inconnue est seulement à l'intérieur de l'intégrale.

- Si l'inconnue est à l'intérieur et l'extérieur de l'intégrale, alors cette équation intégrale est de seconde espèce.

Sauf indication, pour cette partie on se réfère à ([4])

## 2.2 Equation intégrale de Fredholm :

**Définition 2.2.1** *On appelle équation intégrale linéaire de Fredholm de première espèce une équation de la forme*

$$\int_a^b k(x, t)\varphi(t)dt = f(x) \quad a \leq x \leq b \quad (2.2.1)$$

où  $\varphi$  est la fonction inconnue,  $k(x, t)$  et  $f(x)$  sont des fonctions données,  $x$  et  $t$  deux variables réelles parcourant l'intervalle  $[a, b]$ .

La fonction  $k(x, t)$  est appelée le noyau de l'équation intégrale (2.2.1)

Si le second membre  $f(x) \neq 0$ , l'équation (2.2.1) est dite non homogène, dans le cas contraire, l'équation (2.2.1) s'écrit

$$\int_a^b k(x, t)\varphi(t)dt = 0$$

et on dit qu'elle est homogène.

**Exemple 2.2.1** (*équation intégrale linéaire de Fredholm de première espèce*)

$$\int_0^1 (3x - 2)t\varphi(t)dt = x^3 + 3x - 1$$

pour cet exemple,  $k(x, t) = (3x - 2)t$ ;  $t, x \in [0, 1]$  et  $f(x) = x^3 + 3x - 1$ ,  $x \in [0, 1]$ .

**Définition 2.2.2** *Une équation intégrale de la forme*

$$\int_a^b k(x, t, \varphi(t))dt = f(x)$$

où  $\varphi$  est la fonction inconnue, s'appelle équation intégrale non linéaire de Fredholm de première espèce.

**Définition 2.2.3** *On appelle équation intégrale linéaire de Fredholm de seconde espèce une équation de la forme*

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b k(x, t)\varphi(t)dt = f(x)$$

où  $\varphi(x)$  est la fonction inconnue,  $k(x, t)$  et  $f(x)$  sont des fonctions données, et  $\lambda$  est un paramètre numérique.

**Exemple 2.2.2** (*équation intégrale linéaire de Fredholm de seconde espèce*)

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b (5x^2 - 3)t^2 \varphi(t) dt = \exp(x).$$

## 2.3 Equation intégrale de Volterra :

**Définition 2.3.1** *Une équation à une inconnue  $\varphi(x)$ , de la forme*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t) \varphi(t) dt,$$

où  $f(x)$ ,  $k(x, t)$  sont des fonctions connues et  $\lambda$  est un paramètre numérique, est appelée équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce .

La fonction  $k(x, t)$  est le noyau de l'équation de Volterra .

Si  $f(x) = 0$ , cette équation s'écrit

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x k(x, t) \varphi(t) dt$$

et s'appelle équation homogène de Volterra de seconde espèce .

Une équation, à une inconnue  $\varphi(x)$ , de la forme

$$\int_a^x k(x, t) \varphi(t) dt = f(x)$$

est appelée équation intégrale de Volterra de première espèce.

## 2.4 Equation intégrale d'Abel :

**Définition 2.4.1** *On appelle équation intégrale d'Abel une équation de la forme :*

$$\int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^\alpha} dt = f(x),$$

où  $\alpha$  est une constante comprise entre 0 et 1 ( $0 < \alpha < 1$ ).

## 2.5 Opérateur intégral linéaire :

**Définition 2.5.1** *Un opérateur intégral linéaire  $A$  est un opérateur qui admet la formulation suivante*

$$(A\varphi)(x) = \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt,$$

la fonction  $k$  est appelée noyau de l'opérateur  $A$ .

**Remarque 2.5.1** *Si  $k$  est une fonction continue de  $[a, b] \times [a, b]$ , l'opérateur  $A$  est appelé opérateur intégral à noyau continu  $k$ .*

**Théorème 2.5.1** *(voir [1]) Si le noyau  $k(x, t) \in L^2([a, b] \times [a, b])$ , alors l'opérateur  $A$  est bien défini de  $L^2([a, b])$  sur  $L^2([a, b])$ .*

La fonction  $(A\varphi)(x)$  est définie pour presque tout  $x \in [a, b]$  si  $k(x, \cdot) \in L^2([a, b])$ .

**Théorème 2.5.2** *(voir [1]) Si le noyau  $k(x, t)$  est continu sur  $[a, b] \times [a, b]$ , alors la fonction  $(A\varphi)(x)$  est continue sur  $[a, b]$ , pour tout  $\varphi \in L^2([a, b])$ .*

**Définition 2.5.2** *On dit que  $\phi$  est une fonction propre d'un opérateur  $A$  associée à la valeur propre  $\lambda$  si*

$$A\phi = \lambda\phi$$

**Définition 2.5.3** *(Noyau dégénéré)*

On appelle noyau dégénéré un noyau de la forme

$$k(x, t) = \sum_{k=1}^n a_k(x)b_k(t).$$

**Définition 2.5.4** *(Noyau symétrique)*

Le noyau  $k$  est dit symétrique si

$$k(x, t) = k(t, x); \quad x, t \in [a, b].$$

**Définition 2.5.5** (*Nombre caractéristique et fonction propre*)

On dit que  $\lambda$  est un nombre caractéristique du noyau  $k(x, t)$  associé à la fonction propre  $\phi$  si

$$\phi(x) = \lambda \int_a^b k(x, t)\phi(t)dt \quad (2.5.1)$$

**Théorème 2.5.3** (*de Fredholm*)(voir[1]) :

On considère l'équation intégrale homogène

$$\lambda \int_0^1 k(x, t)\phi(t)dt = \phi(x) \quad \text{qui s'écrit aussi } \lambda A\phi = \phi$$

où  $k(x, t) \in L^2([a, b] \times [a, b])$  est supposé réel et symétrique, alors

il existe au moins une valeur propre de  $A$ ,

les valeurs propres sont réelles,

deux fonctions propres correspondant à deux valeurs propres distinctes sont orthogonales,

l'ensemble des valeurs propres de  $A$  est fini, ou admet 0 comme unique point d'accumulation,

à une valeur propre donnée correspond un ensemble fini de fonctions propres linéairement indépendantes,

l'ensemble des fonctions propres peut être orthogonalisé et structuré en une famille ortho-normée. Cette famille est totale dans l'espace  $A(L^2([a, b]))$ .

**2.6 Théorème de Picard (résolution des équations intégrales) :**

La résolution des équations intégrales de Fredholm de première espèce nécessite le calcul des nombres caractéristiques et des fonctions propres associés à un noyau. Nous commencerons cette section par exposer deux méthodes de calcul de ces derniers.

### 2.6.1 Méthode pour calculer les nombres caractéristiques et les fonctions propres :

Cas d'un noyau dégénéré :

Nous rappelons que le noyau  $k(x, t)$  d'une équation intégrale de Fredholm est dégénéré s'il est de la forme

$$k(x, t) = \sum_{k=1}^n a_k(x)b_k(t)$$

les fonctions  $a_k(x)$  et  $b_k(t)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) sont supposées continues dans l'intervalle  $[a, b]$  et linéairement indépendantes. Les nombres caractéristiques et les fonctions propres sont calculés comme suit :

$$\phi(x) = \lambda \int_a^b \left[ \sum_{k=1}^n a_k(x)b_k(t) \right] \phi(t) dt \quad (2.6.1)$$

récrivons (2.6.1) :

$$\phi(x) = \lambda \sum_{k=1}^n a_k(x) \int_a^b b_k(t) \phi(t) dt \quad (2.6.2)$$

et introduisons les notations

$$\int_a^b b_k(t) \phi(t) dt = C_k \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (2.6.3)$$

l'égalité (2.6.2) devient alors

$$\phi(x) = \lambda \sum_{k=1}^n C_k a_k(x) \quad (2.6.4)$$

avec  $C_k$  des constantes inconnues (puisque la fonction  $\phi(x)$  est inconnue).

Portons (2.6.4) dans (2.6.3), nous obtenons :

$$\int_a^b b_m(t) \left[ \lambda \sum_{k=1}^n C_k a_k(t) \right] dt = C_m \quad (m = 1, 2, \dots, n)$$

Les fonctions  $a_m(x)$  ( $m = 1, 2, \dots, n$ ) étant linéairement indépendantes, il en résulte que :

$$C_m - \lambda \sum_{k=1}^n C_k \int_a^b b_m(t) a_k(t) dt = 0 \quad (m = 1, 2, \dots, n).$$

En introduisant la notation :

$$a_{km} = \int_a^b a_k(t) b_m(t) dt,$$



donc

$$\phi(x) = \lambda \cos^2 x \int_0^\pi \cos(2t)\phi(t)dt + \lambda \cos 3x \int_0^\pi \cos^3(t)\phi(t)dt.$$

Introduisons les notations

$$C_1 = \int_0^\pi \cos(2t)\phi(t)dt \quad C_2 = \int_0^\pi \cos^3(t)\phi(t)dt; \quad (2.6.6)$$

nous avons alors

$$\phi(x) = C_1 \lambda \cos^2 x + C_2 \lambda \cos 3x. \quad (2.6.7)$$

En portant (2.6.7) dans (2.6.6), nous obtenons un système linéaire de deux équations homogènes :

$$\begin{cases} C_1(1 - \lambda \int_0^\pi (\cos^2 t \cos 2t)dt) - C_2 \lambda \int_0^\pi \cos 3t \cos 2t dt = 0 \\ -C_1 \lambda \int_0^\pi (\cos^5 t)dt + C_2(1 - \lambda \int_0^\pi \cos^3 t \cos 3t dt) = 0. \end{cases} \quad (2.6.8)$$

Puisque

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \cos^2 t \cos(2t)dt &= \frac{\pi}{4}, & \int_0^\pi \cos(3t) \cos(2t)dt &= 0, \\ \int_0^\pi \cos^5 t dt &= 0, & \int_0^\pi \cos^3 t \cos(3t)dt &= \frac{\pi}{8}, \end{aligned}$$

le système (2.6.8) s'écrit

$$\begin{cases} (1 - \frac{\lambda\pi}{4})C_1 = 0, \\ (1 - \frac{\lambda\pi}{8})C_2 = 0. \end{cases} \quad (2.6.9)$$

L'équation permettant de trouver les nombres caractéristiques est

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{\lambda\pi}{4} & 0 \\ 0 & 1 - \frac{\lambda\pi}{8} \end{vmatrix} = 0.$$

Les nombres caractéristiques sont  $\lambda_1 = \frac{4}{\pi}$ ,  $\lambda_2 = \frac{8}{\pi}$ .

Lorsque  $\lambda = \frac{4}{\pi}$ , le système (2.6.9) se met sous la forme suivante :

$$\begin{cases} 0.C_1 = 0, \\ \frac{1}{2}.C_2 = 0, \end{cases}$$

d'où  $C_2 = 0$ ,  $C_1$  étant arbitraire, la fonction propre correspondante est  $\phi_1(x) = C_1 \lambda \cos^2 x$ . Nous prenons  $\phi_1(x) = \cos^2 x$ .

lorsque  $\lambda = \frac{8}{\pi}$ , le système s'écrit

$$\begin{cases} (-1).C_1 = 0, \\ 0.C_2 = 0, \end{cases}$$

d'où  $C_1 = 0$ ,  $C_2$  étant arbitraire, la fonction propre associée est  $\phi_2(x) = C_2 \lambda \cos 3x$ . Nous prenons  $\phi_2(x) = \cos 3x$ .

Ainsi, les nombres caractéristiques sont

$$\lambda_1 = \frac{4}{\pi}, \quad \lambda_2 = \frac{8}{\pi},$$

et les fonctions propres associées

$$\phi_1(x) = \cos^2 x, \quad \phi_2(x) = \cos 3x.$$

### Une autre méthode pour calculer les nombres caractéristiques et les fonctions propres :

Nous nous intéressons dans cette méthode au noyau  $k(x, t)$  qui s'écrit sous forme

$$k(x, t) = \begin{cases} f_1(x, t) & a \leq t \leq x, \\ f_2(x, t) & x \leq t \leq b. \end{cases}$$

D'après la définition des nombres caractéristiques et des fonctions propres nous avons :

$$\phi(x) = \lambda \int_a^b k(x, t) \phi(t) dt.$$

Mettons l'équation proposée sous la forme

$$\phi(x) = \lambda \int_a^x f_1(x, t) \phi(t) dt + \lambda \int_x^b f_2(x, t) \phi(t) dt \quad (2.6.10)$$

Deux dérivées successives de (2.6.10), permettent de trouver une équation différentielle d'ordre deux dépendante de la fonction propre  $\phi(x)$ , ses dérivées et le nombre caractéristique  $\lambda$  du noyau  $k(x, t)$ .

La résolution de cette équation différentielle donne les nombres caractéristiques et les fonctions propres correspondantes.

**Exemple 2.6.2** Soit le noyau  $k(x, t)$

$$k(x, t) = \begin{cases} (1-x)t & 0 \leq t \leq x, \\ x(1-t) & x \leq t \leq 1. \end{cases}$$

nous savons que :

$$\phi(x) = \lambda \int_a^b k(x, t) \phi(t) dt$$

alors

$$\phi(x) = \lambda \int_0^x (1-x)t\phi(t)dt + \lambda \int_x^1 x(1-t)\phi(t)dt. \quad (2.6.11)$$

où

$$\phi(x) = \lambda(1-x) \int_0^x t\phi(t)dt + \lambda x \int_x^1 (1-t)\phi(t)dt. \quad (2.6.12)$$

En dérivant les deux membres de (2.6.12), il vient

$$\begin{aligned} \phi'(x) &= -\lambda \int_0^x t\phi(t)dt + \lambda(1-x)x\phi(x) + \lambda \int_x^1 (1-t)\phi(t)dt - \lambda(1-x)x\phi(x) \\ &= -\lambda \int_0^x t\phi(t)dt + \lambda \int_x^1 (1-t)\phi(t)dt. \end{aligned}$$

Dérivons une deuxième fois :

$$\phi''(x) = -\lambda x\phi(x) - \lambda(1-x)\phi(x)$$

ou

$$\phi''(x) = -\lambda\phi(x).$$

L'égalité (2.6.12) permet de trouver les conditions aux bords

$$\phi(0) = 0, \quad \phi(1) = 0.$$

La résolution de l'équation intégrale (2.6.11) se ramène donc à la résolution du problème aux limites

$$\phi''(x) + \lambda\phi(x) = 0, \quad (2.6.13)$$

$$\phi(0) = 0, \quad \phi(1) = 0. \quad (2.6.14)$$

Trois cas sont à envisager :

**1) si  $\lambda = 0$  :**

L'équation (2.6.13) s'écrit alors  $\phi''(x) = 0$ .

Sa solution générale est  $\phi(x) = c_1x + c_2$ .

Compte tenu des conditions aux limites (2.6.14), nous obtenons le système pour déterminer les inconnues  $c_1$  et  $c_2$

$$\begin{cases} c_2 = 0, \\ c_1 + c_2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0, \\ c_2 = 0. \end{cases}$$

L'équation intégrale (2.6.11) n'admet donc que la solution évidente

$$\phi(x) = 0,$$

qui est un cas à exclure.

Si  $\lambda \neq 0$ , à l'équation différentielle ordinaire (2.6.13), est associée l'équation caractéristique

$$r^2 + \lambda = 0.$$

**2) si  $\lambda < 0$ ,** les racines de l'équation caractéristique sont

$$r = \pm\sqrt{-\lambda} \quad \text{car } -\lambda > 0.$$

La solution générale de (2.6.13) est de la forme

$$\phi(x) = c_1 e^{(\sqrt{-\lambda}x)} + c_2 e^{(-\sqrt{-\lambda}x)},$$

Les coefficients  $c_1$  et  $c_2$ , sont à déterminer.

D'après les conditions aux limites, nous obtenons

$$\begin{cases} \phi(0) = 0 \\ \phi(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0. \end{cases}$$

L'équation intégrale (2.6.11) admet donc que la solution triviale  $\phi(x) = 0$  (cas à exclure).

**3) si  $\lambda > 0$ ,** les racines de l'équation caractéristique sont

$$r_1 = i\sqrt{\lambda} \quad \text{et} \quad r_2 = -i\sqrt{\lambda}$$

Comme les  $r_i$  sont complexes, alors la solution générale de l'équation intégrale (2.6.11) est de la forme

$$\begin{aligned} \phi(x) &= e^{\operatorname{Re}(r_1)x} [c_1 \cos(\operatorname{Im}(r_1)x) + c_2 \sin(\operatorname{Im}(r_1)x)] \\ &= c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x). \end{aligned}$$

Dans ce cas, les conditions aux limites (2.6.14) donnent :

$$c_1 \cos(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0.$$

donc

$$\phi(x) = c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x), \quad \text{avec } c_2 \neq 0$$

D'autre part,

$$\phi(1) = 0 \Rightarrow c_2 \sin(\sqrt{\lambda}) = 0$$

ce qui implique,

$$\sin(\sqrt{\lambda}) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} = n\pi \quad \forall n,$$

Finalement,

$$\lambda = \lambda_n = n^2\pi^2$$

et l'équation intégrale (2.6.11) admet une infinité de solutions de la forme

$$\phi(x) = c_n \sin(n\pi x),$$

qui sont les fonctions propres de cette équation associées aux nombres caractéristiques

$$\lambda_n = n^2\pi^2.$$

Nous déterminons le coefficient  $c_n$ , telle que la famille de fonctions propres  $\{\phi_n(x)\}_n$  soit orthonormée.

$$\begin{aligned} \langle \phi_n, \phi_m \rangle &= \int_0^1 \phi_n(x) \phi_m(x) dx \\ &= \int_0^1 c_n \sin(n\pi x) c_m \sin(m\pi x) dx \end{aligned}$$

sachant que,

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b)).$$

alors,

$$\langle \phi_n, \phi_m \rangle = \frac{1}{2} c_n c_m \int_0^1 [\cos(\pi x(n-m)) - \cos(\pi x(n+m))] dx \quad (2.6.15)$$

si  $n \neq m$

$$\begin{aligned}\langle \phi_n, \phi_m \rangle &= \frac{1}{2} c_n c_m \left[ \frac{1}{\pi(n-m)} \sin \pi x(n-m) - \frac{1}{\pi(n+m)} \sin \pi x(n+m) \right]_0^1 \\ &= 0.\end{aligned}$$

si  $n = m$ , (2.6.15) devient

$$\begin{aligned}1 &= \langle \phi_n, \phi_n \rangle = \frac{1}{2} c_n^2 \int_0^1 (1 - \cos 2\pi n x) dx \\ &= \frac{1}{2} c_n^2\end{aligned}$$

donc

$$\phi_n(x) = \sqrt{2} \sin(n\pi x), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sous certaines hypothèses, l'existence et l'unicité de la solution de l'équation de Fredholm de première espèce sont assurées par le théorème de Picard, dont voici l'énoncé.

### 2.6.2 Théorème de Picard :

Une équation intégrale de Fredholm de première espèce (2.2.1) admet une solution et une seule dans la classe  $L^2([a, b])$  si

1. le noyau  $k(x, t)$  est réel symétrique

2. la série  $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 f_k^2$  est convergente. Ici  $\lambda_k$  sont les nombres caractéristiques du noyau  $k(x, t)$

et

$$f_k = \int_a^b f(x) \phi_k(x) dx.$$

où  $\phi_k(x)$  sont les fonctions propres de  $k(x, t)$  correspondant aux nombres caractéristiques  $\lambda_k$ .

3. le système de fonctions propres  $\{\phi_k(x)\}_n$  est complet sur  $L^2([a, b])$ .

La solution de l'équation intégrale de Fredholm de première espèce s'obtient dans ce cas comme

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k f_k \phi_k(x).$$

**Exemple 2.6.3** *A l'aide du théorème de Picard, nous cherchons la solution de l'équation intégrale*

$$\int_0^1 k(x, t)\phi(t)dt = \sin^3 \pi x,$$

avec

$$k(x, t) = \begin{cases} (1-x)t, & 0 \leq t \leq x, \\ x(1-t), & x \leq t \leq 1. \end{cases}$$

et  $f(x) = \sin^3 \pi x$ .

Nous savons que, les nombres caractéristiques du noyau  $k(x, t)$  sont

$$\lambda_1 = \pi^2, \lambda_2 = (2\pi)^2, \dots, \lambda_n = (n\pi)^2, \dots,$$

et que les fonctions propres correspondantes sont

$$\phi_1(x) = \sqrt{2} \sin \pi x, \phi_2(x) = \sqrt{2} \sin 2\pi x, \dots, \phi_n(x) = \sqrt{2} \sin n\pi x, \dots$$

Le noyau  $k(x, t)$  est réel et symétrique, c'est à dire  $k(x, t) = k(t, x)$  avec  $0 \leq t \leq 1$ , donc la condition (1) de ce théorème est vérifiée.

A partir de la formule  $f_k = \int_a^b f(x)\phi_k(x)dx$ , nous calculons les  $f_k$

$$f_1 = \int_0^1 \sin^3 \pi x \phi_1(x)dx = \sqrt{2} \int_0^1 \sin^3 \pi x \sin(\pi x)dx = \sqrt{2} \frac{3}{8} \Rightarrow f_1 = \frac{3}{4\sqrt{2}},$$

$$f_2 = \int_0^1 \sin^3 \pi x \phi_2(x)dx = \sqrt{2} \int_0^1 \sin^3 \pi x \sin(2\pi x)dx = 0 \Rightarrow f_2 = 0,$$

$$f_3 = \int_0^1 \sin^3 \pi x \phi_3(x)dx = \sqrt{2} \int_0^1 \sin^3 \pi x \sin(3\pi x)dx = -\frac{1}{4\sqrt{2}} \Rightarrow f_3 = -\frac{1}{4\sqrt{2}},$$

$$f_k = \int_0^1 \sin^3 \pi x \phi_k(x)dx = 0, \quad k \geq 4 \Rightarrow f_k = 0 \quad (k \geq 4).$$

Alors, dans ce cas la série se réduit à une somme finie :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 f_k^2 = \left(\frac{3}{4\sqrt{2}}\right)^2 (\pi^2)^2 + \left(-\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)^2 (3^2 \pi^2)^2 = \frac{45}{16} \pi^4,$$

d'où l'hypothèse **(2)** est vérifiée.

Le système de fonctions propres étant orthonormé complet sur  $L^2([0, 1])$ , la condition **(3)** est remplie elle aussi.

Selon le théorème de Picard, l'équation proposée admet une solution unique de la forme

$$\varphi(x) = \lambda_1 f_1 \varphi_1(x) + \lambda_3 f_3 \varphi_3(x),$$

ce qui donne

$$\varphi(x) = \frac{3\pi^2}{4} (\sin \pi x - 3 \sin 3\pi x).$$

# Méthodes approchées de Résolution :

---

Dans ce chapitre nous proposons deux méthodes de résolution, l'une est basée sur les on-delettes de Legendre et l'autre c'est la méthode des approximations successives qui est la méthode du point fixe.

Nous commençons donc par rappeler le théorème de point fixe de Banach (voir [3]).

## 3.1 Théorème de point fixe de Banach :

Soit  $X$  un espace de Banach et soit  $S : X \rightarrow X$  une application telle que

$$\|Sv_1 - Sv_2\|_X \leq k \|v_1 - v_2\|_X \quad \forall v_1, v_2 \in X, \text{ avec } k < 1.$$

Alors  $S$  admet un point fixe unique  $u \in X$ ,  $u = Su$ .

## 3.2 Méthode des approximations successives :

Soit l'équation (2.2.1) de Fredholm de première espèce qui est définie par

$$\int_a^b k(x, t)\varphi(t)dt = f(x),$$

le noyau  $k(x, t)$  est supposé symétrique, de carré sommable, positif et  $f(x) \in L^2([a, b])$ .

Supposons que (2.2.1) admet une solution unique.

La suite  $\{\varphi_n(x)\}_n$  définie par la relation

$$\varphi_{n+1}(x) = \varphi_n(x) + \lambda \left[ f(x) - \int_a^b k(x, t)\varphi_n(t)dt \right],$$

où l'itération initial  $\varphi_0(x)$  est donnée dans  $L^2([a, b])$  et  $0 < \lambda < 2\lambda_1$  ( $\lambda_1$  étant le plus petit nombre caractéristique du noyau  $k(x, t)$ ), converge alors en moyenne vers la solution de l'équation proposée.

**Remarque 3.2.1** *La condition  $0 < \lambda < 2\lambda_1$  assure la contraction de l'opérateur*

$$L^2([a, b]) \rightarrow L^2([a, b])$$

$$A : \quad \varphi \quad \rightarrow \quad A\varphi, \quad A\varphi(x) = \varphi(x) + \lambda \left[ f(x) - \int_a^b k(x, t)\varphi(t)dt \right]$$

En effet :

si  $\lambda_1$  est le plus petit nombre caractéristique, alors

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \implies \frac{1}{\lambda_2} \leq \frac{1}{\lambda_1}.$$

$$\begin{aligned} \|A\varphi_1 - A\varphi_2\|_0^2 &= \left\| \varphi_1(x) + \lambda \left[ f(x) - \int_a^b k(x, t)\varphi_1(t)dt \right] - \varphi_2(x) - \lambda \left[ f(x) - \int_a^b k(x, t)\varphi_2(t)dt \right] \right\|_0^2 \\ &\leq \left\| (\varphi_1 - \varphi_2)(x) + \lambda \left( f(x) - \int_a^b k(x, t)\varphi_1(t)dt - f(x) + \int_a^b k(x, t)\varphi_2(t)dt \right) \right\|_0^2 \\ &\leq \left\| (\varphi_1 - \varphi_2)(x) + \lambda \left( -\int_a^b k(x, t)\varphi_1(t)dt + \int_a^b k(x, t)\varphi_2(t)dt \right) \right\|_0^2. \end{aligned}$$

Nous savons que, si  $\lambda$  est un nombre caractéristique du noyau  $k$  dont la fonction propre associée est  $\varphi$ , alors

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b k(x, t)\varphi(t)dt$$

donc

$$\begin{aligned} \|A\varphi_1 - A\varphi_2\|_0^2 &\leq \left\| (\varphi_1 - \varphi_2) + \lambda \left( \frac{\varphi_2}{\lambda_2} - \frac{\varphi_1}{\lambda_1} \right) \right\|_0^2 \\ &\leq \left\| (\varphi_1 - \varphi_2) - \frac{\lambda}{\lambda_1} (\varphi_1 - \varphi_2) \right\|_0^2 \\ &\leq \|\varphi_1 - \varphi_2\|_0^2 - 2\frac{\lambda}{\lambda_1} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_0^2 + \frac{\lambda^2}{\lambda_1^2} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_0^2 \\ &\leq \left( 1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} \right)^2 \|\varphi_1 - \varphi_2\|_0^2. \end{aligned}$$

D'après le Théorème de point fixe de Banach, il faut  $\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)^2 < 1$ , donc

$$\begin{aligned} -1 &< 1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} < 1 \\ \implies 0 &< \lambda < 2\lambda_1. \end{aligned}$$

### 3.3 La Méthode des Ondelettes de Legendre (MWL) :

Avant d'exposer cette méthode, nous commençons par rappeler les polynômes et les ondelettes de Legendre

#### 3.3.1 Polynôme de Legendre :

**Définition 3.3.1** *le polynôme de Legendre est un polynôme défini sur l'intervalle  $[-1, 1]$  par la relation récurrente suivante :*

$$L_{m+1}(t) = \frac{2m+1}{m+1}tL_m(t) - \frac{m}{m+1}L_{m-1}(t); \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

avec :

$$\begin{cases} L_0(t) = 1 \\ L_1(t) = t \end{cases}$$

#### Propriétés :

1. La famille des polynômes de Legendre  $\{L_m\}_n$  est une famille orthogonale, c'est à dire elle vérifie la propriété :

$$\int_{-1}^1 L_m(t)L_n(t)dt = \begin{cases} 0; & m \neq n, \\ \frac{2}{2n+1}; & m = n \end{cases}$$

2. Pour tout entier naturel  $m$  et pour tout  $t$ , nous avons

$$P_m(-t) = (-1)^m P_m(t)$$

en particulier

$$P_m(1) = 1,$$

$$P_m(-1) = (-1)^m,$$

$$P_{2m+1}(0) = 0.$$

Ainsi pour  $m$  pair,  $P_m(x)$  ne contient que des puissances paires de  $x$ , et pour  $m$  impaire,  $P_m(x)$  ne contient que des puissances impaires de  $x$ .

### 3.3.2 Les ondelettes :

**Définition 3.3.2** Les ondelettes sont une famille de fonctions construites à partir de la dilatation et translation d'une fonction unique  $\Psi$  dans l'espace  $L^2(\mathbb{R})$  appelée ondelette mère.

$$\Psi_{a,b}(t) = |a|^{-\frac{1}{2}} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right). \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0.$$

Lorsque le paramètre de dilatation  $|a|$  et de translation  $b$  varient de façon continue, nous avons une famille d'ondelettes continues.

Si les paramètres  $|a|$  et  $b$  prennent des valeurs discrètes comme  $a = a_0^{-k}$ ,  $a_0 > 1$ ,  $b = nb_0 a_0^{-k}$ ,  $b_0 > 1$  et  $n, k$  sont des nombres entiers positifs alors nous avons la famille d'ondelettes discrète suivante

$$\Psi_{k,n}(t) = |a_0|^{\frac{k}{2}} \Psi(a_0^k t - nb_0). \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0$$

### 3.3.3 Les ondelettes de Legendre :

**Définition 3.3.3** les ondelettes de Legendre  $\Psi_{n,m}(t) = \Psi(k, n, m, t)$  sont définies sur l'intervalle  $[0, 1]$  par

$$\Psi_{n,m}(t) = \begin{cases} (m + \frac{1}{2})^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{k}{2}} L_m(2^k t - (2n - 1)) & \text{si } \frac{n-1}{2^{k-1}} \leq t < \frac{n}{2^{k-1}} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.3.1)$$

avec  $n = 1, \dots, 2^{k-1}$  ( $k \in \mathbb{N}^*$ ) représente le nombre de niveaux de la décomposition de l'intervalle  $[0, 1]$  et  $m \geq 0$  est le degré du polynôme de Legendre.

**Remarques :**

1. Le paramètre de dilatation est  $a = 2^{-k}$  et le paramètre de translation est  $b = (2n-1)2^{-k}$ .
2. La famille d'ondelettes de Legendre (3.3.1) est obtenue à travers des translations et dilatations des polynômes de Legendre.
3. Le coefficient  $(m + \frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}$  assure l'orthonormalité

$$\int_0^1 \Psi_{n,m}(t) \Psi_{i,j}(t) dt = \begin{cases} 1 & \text{si } n = i \text{ et } m = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

### 3.3.4 Approximation de fonction :

Toute fonction  $f$  définie sur  $[0, 1]$  peut s'écrire comme suite :(voir [6])

$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} C_{n,m} \Psi_{n,m}(t) \quad (3.3.2)$$

avec :

$$C_{n,m} = \langle f(t), \Psi_{n,m}(t) \rangle = \int_0^1 f(t) \Psi_{n,m}(t) dt.$$

Comme la série (3.3.2) est convergente (voir [6]), sa troncature donne l'approximation de la fonction  $f$  suivante :

$$f(t) \simeq \sum_{n=1}^{2^{k-1}M-1} \sum_{m=0}^{2^{k-1}M-1} C_{n,m} \Psi_{n,m}(t) = C^T \Psi(t)$$

où  $C$  et  $\Psi(t)$  sont des vecteurs de dimension  $2^{k-1}M$  donnés par :

$$C = [C_{1,0}, C_{1,1}, \dots, C_{1,M-1}; C_{2,0}, \dots, C_{2,M-1}; \dots; C_{2^{k-1},0}, \dots, C_{2^{k-1},M-1}]^T$$

$$\Psi(t) = [\Psi_{1,0}(t), \dots, \Psi_{1,M-1}(t); \Psi_{2,0}(t), \dots, \Psi_{2,M-1}(t); \dots; \Psi_{2^{k-1},0}(t), \dots, \Psi_{2^{k-1},M-1}(t)]^T.$$

### 3.3.5 Méthode de Galarkin

Soit (2.2.1) L'équation intégrale de Fredholm de première espèce

$$\int_a^b k(x, t) \varphi(t) dt = f(x) \quad a \leq x \leq b.$$

Elle peut être écrite par l'opérateur

$$K\varphi = f \quad (3.3.3)$$

où l'opérateur

$$K : X \rightarrow X$$

est défini par :

$$(K\varphi)(x) = \int_a^b k(x, t) \varphi(t) dt; \quad a \leq x \leq b.$$

Nous prenons  $X = L^2([0, 1])$ ;

le noyau  $k(., .) \in C([0, 1] \times [0, 1])$  et  $\langle ., . \rangle$  est le produit scalaire dans  $X$ .

Dans cette méthode nous choisissons un sous espace  $X_{d_n}$  de dimension finie  $d_n$ , engendré par  $\{\Psi_i\}_{i=1}^{d_n}$  (la base d'ondelette orthonormale de Legendre) tel que  $X_{d_n} \subset X = L^2([0, 1])$ .

Si l'équation intégrale de Fredholm admet une solution, alors nous notons par  $Y_{d_n}$  une solution approchée de (3.3.3) appartenant au sous espace  $X_{d_n}$ .

Donc nous pouvons l'écrire :

$$Y_{d_n}(t) = \sum_{j=1}^{d_n} \alpha_j \Psi_j(t). \quad (3.3.4)$$

Notons par  $r_{d_n}$  le résidu dans l'approximation de l'équation (3.3.3), c'est à dire :

$$r_{d_n} = KY_{d_n} - f \quad (3.3.5)$$

Les coefficients inconnus  $\alpha_i$  de (3.3.4) sont déterminés tels que

$$\langle r_{d_n}, \varphi_i \rangle = 0 \text{ pour } i = 1, 2, \dots, d_n$$

nous remplaçons  $\varphi_i$  par  $\Psi_i$ , nous obtenons

$$\langle r_{d_n}, \Psi_i \rangle = 0 \text{ pour } i = 1, 2, \dots, d_n$$

ce qui conduit au système.

$$\langle KY_{d_n} - f, \Psi_i \rangle = 0, \quad i = 1, 2, \dots, d_n$$

D'après la linéarité du produit scalaire,

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{d_n} \alpha_j \langle K\Psi_j(t), \Psi_i \rangle = \langle f, \Psi_i \rangle, \quad i = 1, \dots, d_n \\ \Rightarrow & \sum_{j=1}^{d_n} \alpha_j \left\langle \int_0^1 k(x, t) \Psi_j(t) dt, \Psi_i(x) \right\rangle = \langle f(x), \Psi_i(x) \rangle, \quad i = 1, 2, \dots, d_n \\ \Rightarrow & \sum_{j=1}^{d_n} \alpha_j \int_0^1 \int_0^1 k(x, t) \Psi_j(t) \Psi_i(x) dt dx = \int_0^1 f(x) \Psi_i(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots, d_n \\ \Rightarrow & \sum_{j=1}^{d_n} \alpha_j A_{ij} = \beta_i, \quad i = 1, 2, \dots, d_n \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \int_0^1 \int_0^1 k(x, t) \Psi_j(t) \Psi_i(x) dt dx \\ \beta_i &= \int_0^1 f(x) \Psi_i(x) dx \end{aligned}$$

### 3.3.6 Méthode de collocation par points

Par la méthode de collocation par points, nous allons, toujours, chercher une solution approchée dans le même espace  $X_{d_n} \subset X = L^2([0, 1])$ , avec  $\dim X_{d_n} = d_n < \infty$ .

Pour déterminer les coefficients  $(\alpha_j)$  de (3.3.4), nous portons l'expression de cette fonction dans l'équation (3.3.5)

$$r_{d_n}(x) = \sum_{j=1}^{d_n} \alpha_j \int_0^1 k(x, t) \Psi_j(t) dt - f(x), \quad x \in [0, 1],$$

et nous imposons à l'équation d'être exacte dans le sens où le résidu est nul aux points de collocation  $x_1, \dots, x_{d_n} \in [0, 1]$ .

Ce qui conduit systématiquement à la résolution du système linéaire

$$\sum_{j=1}^{d_n} \alpha_j \int_0^1 k(x_i, t) \Psi_j(t) dt = f(x_i), \quad i = 1, \dots, d_n, \quad (3.3.6)$$

qui est de la forme  $A\alpha = \beta$ , avec

$$A_{ij} = \int_0^1 k(x_i, t) \Psi_j(t) dt,$$

$$\beta_i = f(x_i).$$

**Remarque 3.3.1** nous obtenons la relation (3.3.6) à partir du produit scalaire suivant

$$\langle r_{d_n}, \varphi_i \rangle = 0 \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, d_n$$

tell que  $\varphi_i = \delta_i$  (où  $\delta_i$  la mesure de Dirac).

## 3.4 Résultats numériques :

### 3.4.1 Méthode des approximations successives :

La méthode a été testée pour deux exemples.

**Exemple 1** Soit à résoudre l'équation

$$\int_0^1 xt\varphi(t) dt = x,$$

dont la solution exacte est  $\varphi(x) = e^x$ . ( le noyau  $k(x,t) = xt$  et le second membre  $f(x) = x$ ).

En prenant l'itération initiale  $\varphi_0(x) = x + 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!}$ , les résultats obtenus sont

| $\lambda$      | Nombre du point | Erreur | Nombre d'itération | Cpu    |
|----------------|-----------------|--------|--------------------|--------|
| 5              | 5               | 0.0320 | 44                 | 0.1720 |
|                | 9               | 0.0352 | 45                 | 0.1788 |
|                | 11              | 0.0371 | 45                 | 0.1835 |
|                | 15              | 0.0409 | 45                 | 0.1865 |
| $\frac{1}{2}$  | 5               | 0.0320 | 85                 | 0.1783 |
|                | 9               | 0.0352 | 86                 | 0.1810 |
|                | 11              | 0.0371 | 87                 | 0.1842 |
|                | 15              | 0.0491 | 88                 | 0.1869 |
| $\frac{1}{24}$ | 5               | 0.0320 | 922                | 0.2031 |
|                | 9               | 0.0352 | 941                | 0.2046 |
|                | 11              | 0.0371 | 948                | 0.2064 |
|                | 15              | 0.0409 | 958                | 0.2142 |

Tableau 1. tableau de solution pour les différents  $\lambda$

Le choix de l'itération initiale a un impact sur la convergence de la suite itérative. En prenant par exemple  $\varphi_0(x) = x + 1$  nous remarquons que la suite diverge.

Afin de voir l'évolution graphique de la solution approchée, nous prenons les résultats numériques pour  $\lambda = \frac{1}{2}$  et  $N = 9$  étant

| $x_i$  | La solution exacte | La solution approchée |
|--------|--------------------|-----------------------|
| 0      | 1.0000             | 1.0000                |
| 0.1250 | 1.1331             | 1.1357                |
| 0.2500 | 1.2840             | 1.2890                |
| 0.3750 | 1.4549             | 1.4619                |
| 0.5000 | 1.6487             | 1.6562                |
| 0.6250 | 1.8682             | 1.8740                |
| 0.7500 | 2.1170             | 2.1171                |
| 0.8750 | 2.3988             | 2.3876                |
| 1      | 2.7182             | 2.6874                |

Tableau 2. tableau de solution pour  $\lambda = \frac{1}{2}$  et  $N = 9$

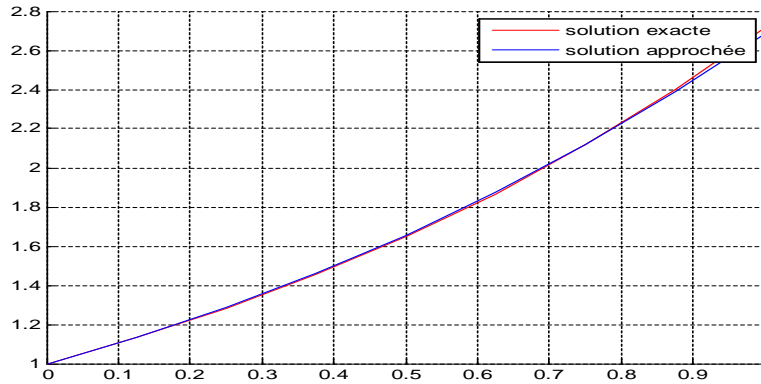


Fig.1. Le graphe de solution pour  $\lambda = \frac{1}{2}$  et  $N = 9$ .

**Exemple 2** Soit à résoudre l'équation

$$\int_0^1 e^{xt} \varphi(t) dt = \frac{e^{x+1} - 1}{x + 1}, \quad (3.4.1)$$

dont la solution exacte est  $\varphi(x) = e^x$ .

En prenant l'itération initiale  $\varphi_0(x) = x + 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!}$ , les résultats obtenus sont

| $x_i$ | La solution exacte | La solution approchée |
|-------|--------------------|-----------------------|
| 0     | 1.0000             | 1.0000                |
| 0.1   | 1.1052             | 1.1052                |
| 0.2   | 1.2214             | 1.2213                |
| 0.3   | 1.3499             | 1.3495                |
| 0.4   | 1.4918             | 1.4907                |
| 0.5   | 1.6487             | 1.6458                |
| 0.6   | 1.8221             | 1.8160                |
| 0.7   | 2.0138             | 2.0022                |
| 0.8   | 2.2255             | 2.2053                |
| 0.9   | 2.4596             | 2.4265                |
| 1     | 2.7183             | 2.6667                |

Tableau .3. tableau de solution de (3.4.1)

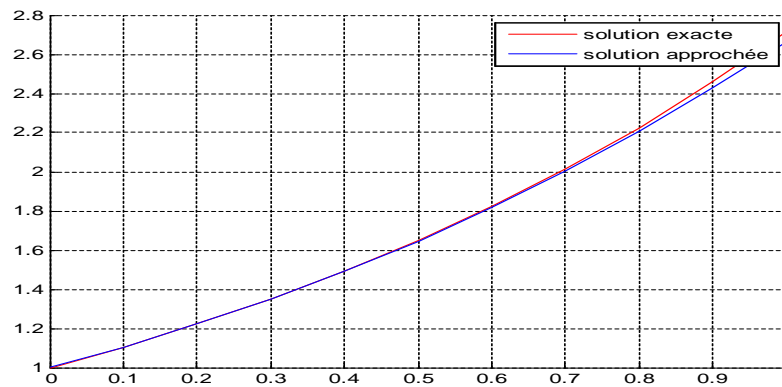


fig .2. Le graphe de solution de (3.4.1)  
'méthode des approximations successives'.

### 3.4.2 Méthode de Galerkin :

Nous reprenons la résolution de (3.4.1) par la méthode de Galerkin.

Les résultats obtenus, avec  $k = 2$  et  $M = 2$ , sont donnés dans le tableau 4.

| $x_i$ | La solution exacte | La solution approchée |
|-------|--------------------|-----------------------|
| 0     | 1.0000             | 1.0801                |
| 0.1   | 1.1052             | 1.1481                |
| 0.2   | 1.2214             | 1.2160                |
| 0.3   | 1.3499             | 1.2840                |
| 0.4   | 1.4918             | 1.3520                |
| 0.5   | 1.6487             | 1.7858                |
| 0.6   | 1.8221             | 1.9461                |
| 0.7   | 2.0138             | 2.1064                |
| 0.8   | 2.2255             | 2.2667                |
| 0.9   | 2.4596             | 2.4270                |
| 1     | 2.7183             | 2.5873                |

Tableau .4. tableau de solution de (3.4.1)

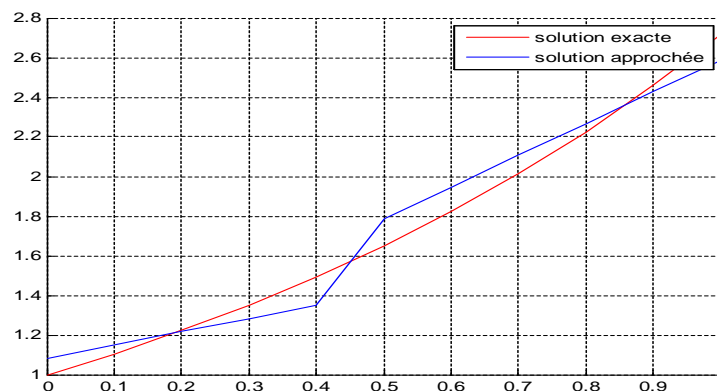


fig .3. Le graphe de solution de (3.4.1)  
'méthode de Galarkin'.

Nous remarquons que la matrice du système  $A\alpha = \beta$  n'est pas "régulière" dans le sens où le déterminant de  $A$  est très petit (de l'ordre  $10^{-30}$  pour  $k = 2$ ,  $M = 3, 4, \dots$ ).

Ce qui, pour nous explique ces résultats peu satisfaisants.

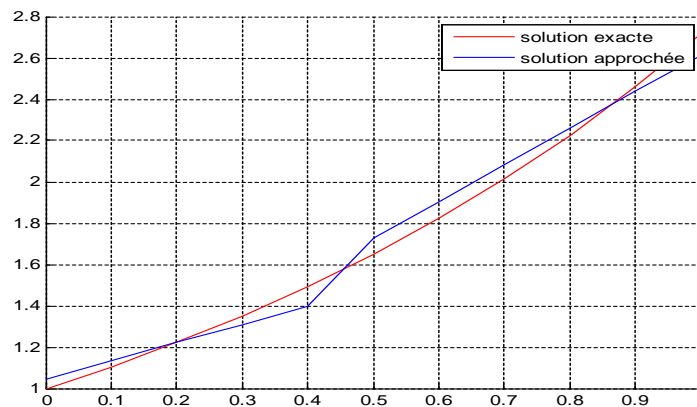
### 3.4.3 Méthode de collocation par points :

Dans cette méthode, nous prenons le même exemple qui est testé dans la méthode de Galerkin.

Nous obtenons les résultats suivants.

| $x_i$ | <i>La solution exacte</i> | <i>La solution approchée</i> |
|-------|---------------------------|------------------------------|
| 0     | 1.000                     | 1.0460                       |
| 0.1   | 1.0152                    | 1.1337                       |
| 0.2   | 1.2214                    | 1.2215                       |
| 0.3   | 1.3499                    | 1.3092                       |
| 0.4   | 1.4918                    | 1.3970                       |
| 0.5   | 1.6487                    | 1.7275                       |
| 0.6   | 1.8221                    | 1.9050                       |
| 0.7   | 2.0138                    | 2.0825                       |
| 0.8   | 2.2255                    | 2.2599                       |
| 0.9   | 2.4596                    | 2.4374                       |
| 1     | 2.7183                    | 2.6149                       |

*Tableau .5. tableau de solution de (3.4.1)*



*fig .4. Le graphe de solution de (3.4.1)  
'méthode de Collocation'.*

Nous remarquons que les mêmes anomalies sont observées pour cette méthode.

---

# CONCLUSION

---

Dans ce travail, nous avons pris connaissance de nouveaux concepts comme les équations intégrales de Fredholm et de Volterra.

Pour la plus part des équations intégrales de Fredholm du premier type, nous ne pouvons pas extraire l'expression explicite de la solution (quand elle existe) car il est difficile de vérifier les hypothèses du théorème de Picard.

Le recourd aux méthodes approchées s'avère nécessaire pour estimer cette solution quand elle existe.

Les trois méthodes : la méthode des approximations successives, la méthode des ondelettes de Legendre-Galerkin et la méthode des ondelettes de Legendre-Collocation par points, ont été facilement appliquées pour estimer la solution de ces équations.

Toute fois, les résultats obtenus sont peu satisfaisants pour des raisons que nous ignorons encore.

# Bibliographie

- [1] J. Bass : Cours de Mathématique, Tome 3, Paris 1971.
- [2] N. Boccara : Analyse Fonctionnelle, Une Introduction pour Physiciens, France, Août, 1984.
- [3] H. Brezis : Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications, Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise, Masson, Paris, 1983.
- [4] M. Krasnov, A. Kissélev and G. Makarenko : Equation Intégrale, MIR, Moscou 1977.
- [5] K.Maleknejad, S.Sohrabi : Numerical solution of Fredholm integral equations of the first kind by using Legendre wavelet.
- [6] S. G. Venkatesh, S. K. Ayyaswamy and Raja Balachandar : Convergence Analysis of Legendre wavelets method for solving Fredholm intégral equation.

# Annexe

---

Cette partie concerne l'implémentation Matlab.

**La méthode des approximations successives :**

**les sous programmes**

**Le noyau**

```
function y = ker(x,t)
    y=x*t;
end
```

**Méthode de simpson ( l'approximation des intégrales )**

```
function y=sim(v0,x,N)
    a=0;
    b=1;
    c=(a+b)/2;
    y=zeros(1,N);
    d=mean(1 :N);
    for i=1 :N
        y(i)=(1/6)*(ker(x(i),0)*v0(1)+4*ker(x(i),1/2)*v0(d)+ker(x(i),1)*v0(N));
    end
end
```

**Le calcul de la solution approchée**

```
function [t,z]=solution(v0,x,N,f,eps,lamda,nmax)
```

```
y=sim(v0,x,N);
v1=v0+lamda*(f-y);
iter=0;
while (norm(v1-v0) >= eps ) & (iter<=nmax)
    v0=v1;
    y=sim(v0,x,N);
    v1=v0+lamda*(f-y);
    iter=iter+1;
end
t=v1;
z=iter;
end
```

### **Le programme principal**

```
tic
clc; clear all; close all;
eps=10(-9);
nmax=1000;
N=9;% nombre de points
lamda=1/2;
x=linspace(0,1,N)
v0=zeros(1,N);
v1=zeros(1,N);
f=x;
g=x+1+(x.^2)/2+(x.^3)/6;% l'itération initial
v0=g;
[t,z]=solution(v0,x,N,f,eps,lamda,nmax);
solex=exp(x)
solapp=t
iter=z
err=norm(solex-solapp)
```

```

hold on
plot(x,solex,'r-')
plot(x,solapp,'b-')
grid
legend('solex','solapp')
title(' La solution approchée et la solution exacte pour lamda=1/2 et N=9 ')
hold off
toc;

```

## Méthode de Galarkin

### les sous programmes

#### polynôme de Legendre

```

function lm = legendre_polynomial(x,m)
if m == 0
    lm = 1;
elseif m == 1
    lm = x;
elseif m == 2
    lm = 3/2*x.^2-1/2;
else
    l0 = 1;
    l(1) = x;
    l(2)=3/2*x^2-1/2;
for i=3 :m
    l(i)=((2*(i-1)+1)/i *x)*l(i-1)+((-i+1)/i)*l(i-2);
end
    lm = l(m);
end

```

#### Les ondelettes de Legendre

```

1. function psi = legendre_wavelet(k,n,m,x)
    Lm = legendre_polynomial(2^k *x-2*n+1,m);

```

```

if (x >= (n-1)/2^(k-1)) & (x <= n/2^(k-1))
    psi = sqrt(m+1/2)*2^(k/2)*Lm;
else
    psi = 0;
end
end

```

```

2. function psi = wavelet(k,n,m,x)
    Lm = legendre_polynomial(2^k *x-2*n+1,m);
if n==2^(k-1) & x==1
    psi = sqrt(m+1/2)*2^(k/2)*Lm;
elseif (x >= (n-1)/2^(k-1)) & (x < n/2^(k-1))
    psi = sqrt(m+1/2)*2^(k/2)*Lm;
else
    psi = 0;
end
end

```

### **Le vecteur de l'ondelette de Legendre**

```

function psi = Vect_LW(k,M,x)
for n = 1 :2^(k-1)
    for m=0 :M-1
        psi(m+(n-1)*M+1) =wavelet(k,n,m,x);
    end
end
end

```

### **La matrice d'ondelette de Legendre**

```

function psi = Mat_LW(k,M,x)
p=length(x);
for i = 1 :p
    psi( :,i) = Vect_LW(k,M,x(i));
end

```

## Méthode de simpson ( l'approximation des intégrales )

### 1. Simpson pour une intégrale double

```

function int = simpson2v(e,f,n,m,k,Ker)
phic = legendre_wavelet(k,e,f,(e-1)/2^(k-1));
phid = legendre_wavelet(k,e,f,e/2^(k-1));
phicd = legendre_wavelet(k,e,f,(2*e-1)/2^(k));
phia = legendre_wavelet(k,n,m,(n-1)/2^(k-1));
phib = legendre_wavelet(k,n,m,(n)/2^(k-1));
phiab = legendre_wavelet(k,n,m,(2*n-1)/2^(k));
a = (n-1)/2^(k-1);
b = (n)/2^(k-1);
c = (e-1)/2^(k-1);
d = (e)/2^(k-1);
g1 = Ker(c,a)*phia*phic + 4*Ker(.5*(c+d),a)*phicd*phia + Ker(d,a)*phid*phia;
g2 = Ker(c,.5*(a+b))*phic*phiab + 4*Ker(.5*(c+d),.5*(a+b))*phiab*phicd + Ker(d,.5*(a+b))*phid*phia;
g3 = Ker(c,b)*phic*phib + 4*Ker(.5*(c+d),b)*phicd*phib + Ker(d,b)*phid*phib;
int = (1/36)*(d-c)*(b - a)*(g1 + 4*g2 + g3);
end

```

### 2. simpson pour une intégrale simple

```

function int = simpson(n,m,k,g)
a = (n-1)/2^(k-1);
b = (n)/2^(k-1);
c=(a+b)/2;
phia = legendre_wavelet(k,n,m,a);
phib = legendre_wavelet(k,n,m,b);
phiab = legendre_wavelet(k,n,m,c);
int = (1/6)*(b - a)*(g(a)*phia + 4*g((a+b)/2)*phiab +g(b)*phib);
end

```

### Construction des matrices

```

function [A,B] = ConstMatricesAB(k,M,g,Ker)
dn = 2^(k-1)*M;
A = zeros(dn);
B = zeros(dn,1);
for n = 1 :2^(k-1)
    for m = 0 :M-1
        for e = 1 :2^(k-1)
            for f = 0 :M-1
                A(((n-1)*M+m+1),((e-1)*M+f+1)) = simpson2v(e,f,n,m,k,Ker);
            end
        end
    end
    B(((n-1)*M+m+1),1) =simpson(n,m,k,g);
end
end
end

```

### calcul de la solution approchée

```

function y = AppxSol(k,M,g,Ker,x)
[A,B]=ConstMatricesAB(k,M,g,Ker)
alpha = inv(A)*B;
y = alpha'* Mat_LW(k,M,x);%*(1/2^(k-1));
end

```

### Le programme principal

```

clc; clear all; close all;
format short,
k =3;
M = 3;
dn = 2^(k-1)*M;
x = linspace(0,1,6)
g = @(x)(exp(x+1)-1)/(x+1);
Ker = @(x,t)exp(x*t);
solex=exp(x)

```

```

solapp = AppxSol(k,M,g,Ker,x)
err=norm(solex-solapp)
hold on
plot(x,solex,'-')
plot(x,solapp,'r-')
grid
legend('solex','solapp')
hold off

```

## Méthode de Collocation par points

### les sous programmes

#### polynôme de Legendre

```

function lm = legendre_polynomial(x,m)
if m == 0
    lm = 1;
elseif m == 1
    lm = x;
elseif m == 2
    lm = 3/2*x.^2-1/2;
else
    l0 = 1;
    l(1) = x;
    l(2)=3/2*x.^2-1/2;
for i=3 :m
    l(i)=((2*(i-1)+1)/i *x)*l(i-1)+((-i+1)/i)*l(i-2);
end
lm = l(m);
end

```

#### Les ondelettes de Legendre

```

1. function psi = legendre_wavelet(k,n,m,x)

```

```

    Lm = legendre_polynomial(2^k *x-2*n+1,m);
if (x>=(n-1)/2^(k-1)) & (x <= n/2^(k-1))
    psi = sqrt(m+1/2)*2^(k/2)*Lm;
else
    psi = 0;
end
end

```

**2. function psi = wavelet(k,n,m,x)**

```

    Lm = legendre_polynomial(2^k *x-2*n+1,m);
if n==2^(k-1) & x==1
    psi = sqrt(m+1/2)*2^(k/2)*Lm;
elseif (x>=(n-1)/2^(k-1))&(x < n/2^(k-1))
    psi = sqrt(m+1/2)*2^(k/2)*Lm;
else
    psi = 0;
end
end

```

**Le vecteur de l'ondelette de Legendre**

```

function psi = Vect_LW(k,M,x)
for n =1 :2^(k-1)
    for m=0 :M-1
        psi(m+(n-1)*M+1) =wavelet(k,n,m,x);
    end
end
end

```

**La matrice d'ondelette de Legendre**

```

function psi = Mat_LW(k,M,x)
    p=length(x);
for i =1 :p
    psi( :,i) = Vect_LW(k,M,x(i));
end

```

end

### Méthode de simpson ( l'approximation des intégrales )

```
function int=simpson(e,f,noy,x,k)
phia = legendre_wavelet(k,e,f,(e-1)/2^(k-1));
phib = legendre_wavelet(k,e,f,e/2^(k-1));
phiab = legendre_wavelet(k,e,f,(2*e-1)/2^(k));
a = (e-1)/2^(k-1);
b = (e)/2^(k-1);
int=1/6*(1/2^(k-1))*(noy(x,a)*phia+4*noy(x,(a+b)/2)*phiab+noy(x,b)*phib);
end
```

### Construction des matrices

```
function [A,B] = ConstMatricesAB(k,M,g,noy,x)
dn = 2^(k-1)*M;
A=zeros(dn);
B=zeros(dn,1);
for n=1 :2^(k-1)
  for m=0 :M-1
    for e=1 :2^(k-1)
      for f=0 :M-1
        A(((n-1)*M+m+1),((e-1)*M+f+1))=simpson(e,f,noy,x((n-1)*M+m+1),k);
      end
    end
    B((n-1)*M+m+1)=g(x((n-1)*M+m+1));
  end
end
end
end
```

### Le calcul de la solution approchée

```
function y=approximate_solution(k,M,g,noy,x)
[A,B]= ConstMatricesAB(k,M,g,noy,x);
alpha=inv(A)*B;
```

```
y=alpha'*Mat_LW(k,M,x)
```

```
end
```

### **Le programme principal**

```
clc ; clear all ; close all ;
```

```
k=1 ;
```

```
M=2 ;
```

```
dn = 2^(k-1)*M ; % le nombre de points de collocation de la discrétisation
```

```
x = linspace(0,1,dn) % les points de collocation
```

```
noy=@(x,t)exp(x*t) ;
```

```
g=@(x)(exp(x+1)-1)/(x+1) ;
```

```
solex=@(x)exp(x) ;
```

```
solex=solex(x)
```

```
solapp=approximate_solution(k,M,g,noy,x)
```

```
err=norm(solex-solapp)
```

```
hold on
```

```
plot(solex,'-')
```

```
plot(solapp,'r-')
```

```
grid
```

```
legend('solex','solapp')
```

```
hold off
```