UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET SCIENCES DE LA NATURE ET DE LAVIE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de Master

Spécialité : Modélisation, Contrôle et Optimitation

Thème

Recherche d'un majorant minimal de deux opérateurs positifs

Présenté par

Houari Kesser

Soutenu le 24 /05/2017

Devant le jury

Mr	**Président**	**U. MOSTAGANEM.**
Mr	**Examinateur**	**U. MOSTAGANEM.**
Mme Hammou	**Encadreur**	**U. MOSTAGANEM.**

Remerciements

Je ne remercierais jamais assez tous mes enseignants, qui grâce à eux j'ai pu achever mon cycle universitaire durant ces années d'études.

De ce fait je tiens à exprimer toute ma gratitude à mon encadreur pour avoir proposé et dirigé ce thème avec une grande disponibilité.

Mes remerciments s'adressent également aux membres de jury qui ont accepté d'examiner cet humble travail.

Sans oublier ma famille et mes amis pour tout leurs soutien et encouragement.

Table des matières

INTRODUCTION

En analyse fonctionnelle, la classe des opérateurs positifs est un outil essentiel à l'étude de différents problèmes de la théorie des opérateurs. Cette importance à ètè confirmée par plusieurs travaux de recherche.

La notion d'opérateurs positifs est définie par une relation d'ordre partiel sur l'ensemble des opérateurs bornés, ce qui nous ramène à l'étude du concept du majorant.

Dans cette optique beaucoup de travaux on été menés, nous citerons :

- (C. Akmann et N. Weaver[4]) il ont démontre que la borne supérieure d'une famille $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ d'opérateurs qui commutent dans l'algèbre de Van Neumann qu'ils génèrent , n'est pas toujours un majorant minimal dans l'ensemble des opérateurs bornés $B(H)$.

- (A. Aslanov [5]) qui a montré l'existence du majorant minimal de deux opérateurs positifs.

Dans ce travail on s'interesse a la recherche d'un majorant minimal T de deux opérateurs positifs

R et S soumis a des contraintes particulieres $(0 \leq R, S \leq I)$

Notre manuscrit se compose de quatre chapitres dont le contenu est comme suit :

- Le chapitre 1 est consacré aux rappels des différentes notions mathématiques dont on a besoin : Produit scalaire ; Norme ; espace de Hilbert ; Système orthogonal et système orthonormal ;Idéal Bilatère.

- Le chapitre 2 est réservé aux opérateurs linéaires bornées sur les espaces de Hilbert.

- Dans le chapitre 3 on donne une méthode pour montrer l'existence de la racine carrée d'un opérateur positif.

- Dans le chapitre 4 on donne le résultat principal de notre travail qui consiste à caractériser le majorant minimal de deux opérateurs positifs soumis aux contraintes $(0 \leq R, S \leq I)$.

Chapitre 1

Chapitre1 :Rappel de notions de base

1.1 Produit scalaire

Définition 1.1.1 *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Un produit scalaire sur E noté $\lessdot, \gtrdot$ est une forme sesquilinéaire, hermitienne,definie positive :*

$$h : \underset{(u,v)}{E \times E} \underset{\longrightarrow}{\rightarrow} \underset{h(u,v)=\langle u,v \rangle}{\mathbb{C}.} \tag{1.1.1}$$

Pour tout u,$v, w \in E$, α, $\beta \in \mathbb{C}$, on a

$i\rfloor$ Sesquilinéaire :

$$h(\alpha u + \beta v, w) = \alpha h(u, w) + \beta h(v, w). \tag{1.1.2}$$

$$h(u, \alpha v + \beta w) = \overline{\alpha} h(u, w) + \overline{\beta} h(v, w). \tag{1.1.3}$$

$ii\rfloor$ Hermitienne :

$$h\,(u, v) = \overline{h\,(u, v)}$$

$iii\rfloor$ Définie positive :

$$\begin{aligned} h\,(u, u) &\geq 0 \qquad (1.1.4) \\ \text{et } h\,(u, u) &= 0_E \Leftrightarrow u = 0_E\ . \end{aligned}$$

1.2 Norme

Définition 1.2.1 *On appelle norme sur l'espace vectoriel E noté $\| \, . \, \|_E$, toute application de E dans $\mathbb{R}^+$ telle que :*

$i\rfloor$ $\forall u \in E : \| u \|_E = 0 \Leftrightarrow u = 0_E$.

$ii\rfloor$ $\forall u \in E$, $\forall \alpha \in \mathbb{C} : \| \alpha u \|_E = | \alpha | \| u \|_E$.

$iii\rfloor$ $\forall u, v \in E : \| u + v \|_E \leq \| u \|_E + \| v \|_E$.

Remarque 1.2.1 *Pour tout produit scalaire sur E ,on associe la norme :*

$$\| \, . \, \|_E = \sqrt{\lessdot, \gtrdot_E}. \tag{1.2.1}$$

Définition 1.2.2 *Soient E un $\mathbb{C}$- espace vectoriel muni d'une norme $\| \, . \, \|_E$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs dans E . la suite $(x_n)_{n\in N}$ est dite de Cauchy si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon \rangle 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} \quad \textit{tel que } \forall n, m \geq N_0 : \quad \| x_n - x_m \|_E \, \langle \varepsilon \ . \tag{1.2.2}$$

Remarque 1.2.2 *Si toute suite de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ converge dans E pour $\|.\|_E$, alors E est dit complet et il est appelé espace de Banach.*

1.3 Espace de Hilbert

Définition 1.3.1 *Un espace préhilbertien est un espace vectoriel E , muni d'un produit scalaire.*

Théorème 1.3.1 *(Cauchy Shwartz)* [2]
Soit $(E, \lessdot, \gtrdot)$ un espace préhilbertien, on a alors

$$| \langle u, v \rangle |^2 \leq \| u \|^2 \| v \|^2, \forall u, v \in E \ . \tag{1.3.1}$$

On a l'égalité si et seulment si u et v sont liés.

Définition 1.3.2 *On appelle espace de Hilbert noté H tout espace préhilbertien $(H, \lessdot, \gtrdot)$ complet pour la norme définie par le produit scalaire.*

Exemple 1.3.1 *Tout espace préhilbertien $(E, \lessdot, \gtrdot)$ de dimension finie est un espace de Hilbert.*

Corollaire 1.3.1 [2]

1) Pour tout sous espace vectoriel fermé F d'un espace de Hilbert H, on a la décomposition en somme directe ortogonale : $H = F \oplus F^{\perp}$.

2) Soit F un sous espace vectoriel d'un espace de Hilbert H alors $\overline{F} = F^{\perp\perp}$ et on a (F dense dans H) $\Leftrightarrow$ ($F^{\perp} = \{0_H\}$).

1.4 Système orthogonal et système orthonormal

Définition 1.4.1 *Soit $(e_i)_{i \in J}$ une famille de vecteurs de l'espace de Hilbert H :*

1) *On dit que $(e_i)_{i \in J}$ est orthogonal si*

$$\langle e_i, e_j \rangle = 0, \forall i, j \in J, i \neq j. \tag{1.4.1}$$

2) *On dit que le systeme est orthonormal si*

$$\begin{aligned} \langle e_i, e_j \rangle &= 0, \forall i, j \in J, i \neq j \ . \\ et \ \langle e_i, e_i \rangle &= 1. \end{aligned} \tag{1.4.2}$$

Lemme 1.4.1 *Soient H un espace de Hilbert et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de vecteurs telles que :*

$\underset{n \longrightarrow \infty}{x_n} \longrightarrow x_0$ *et* $\underset{n \longrightarrow \infty}{y_n} \longrightarrow y_0$. *Alors :*

1. $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \langle x_n, y_n \rangle = \left\langle \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} x_n, \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} y_n \right\rangle = \langle x_0, y_0 \rangle$.

2. $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \|x_n\|_H = \left\| \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} x_n \right\|_H = \|x_0\|_H$.

Preuve.

1. D'après l'inégalité de Cauchy-Shwartz on a :

$|\langle x_n - x_0, y_n - y_0 \rangle| \leq \|x_n - x_0\|_H \|y_n - y_0\|_H \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0$, car $\underset{n \longrightarrow \infty}{x_n} \longrightarrow x_n$ et $\underset{n \longrightarrow \infty}{y_n} \longrightarrow y_0$

Donc

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \langle x_n - x_0, y_n - y_0 \rangle = 0.$$

D'où

$$\begin{aligned}
\lim_{n\longrightarrow\infty}\langle x_n - x_0, y_n - y_0\rangle &= 0 \\
&\Longleftrightarrow \lim_{n\longrightarrow\infty}\left[\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_0, y_0\rangle\right] = 0 \\
&\Longleftrightarrow \lim_{n\longrightarrow\infty}\langle x_n, y_n\rangle = \langle x_0, y_0\rangle = \left\langle \lim_{n\longrightarrow\infty} x_n, \lim_{n\longrightarrow\infty} y_n \right\rangle .
\end{aligned}$$

2. Pour montrer la deuxième propriété du lemme il suffit d'utiliser l'égalité $\|x_n\|_H^2 = \langle x_n, x_n\rangle_H$ et le premier résultat. $\square$

1.5 Idéal Bilatere

Définition 1.5.1 *Soit* $(A, +, \bullet)$ *un anneau et* I *un sous ensemble de* A *,* I *est un idéal à gauche (respectivement à droite) de* A *si et seulement si :*

- I *est un sous group abelien de* A *pour la loi* $+$ *.*

- Pour tout élément a *de* A *et* x *de* I *, on a* ax *(respectivement* xa*) sont dans* I *.*

Définition 1.5.2 *Soit* A *un anneau et* I *un sous ensemble de* A *.* I *est un idéal Bilatère de* A *si et seulment si* I *est à la fois idéal à gauche et à droit de* A *.*

On utilisera de manière générale le mot idéal pour idéal bilatère.

Chapitre 2 :Opérateurs linéaires bornés sur les espaces de Hilbert

Définition 2.0.3 *Soit H un $\mathbb{C}-$espace de Hilbert et soit $T : H \to H$ une application :*

$$T \text{ est linéaire} \Leftrightarrow \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C},\ \forall x, y \in H, T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y). \tag{2.0.1}$$

Définition 2.0.4 *Soit H un $\mathbb{C}-$espace de Hilbert et soit $T : H \to H$ une application linéaire :*

$$(T \text{ est continue en } x_0 \in H) \Leftrightarrow \forall \varepsilon \rangle 0,\ \exists \delta_0 \rangle 0,\ \forall x \in H,\ \ \| x - x_0 \|_H \langle \delta_0 \Rightarrow \| T(x) - T(x_0) \|_H \langle \varepsilon. \tag{2.0.2}$$

Définition 2.0.5 *Soient H un $\mathbb{C}-$espace de Hilbert et soit $T : H \to H$ une application linéaire, T continue sur H si elle est continue en tout $x \in H$.*

Proposition 2.0.1 [1]
soit $T : H \to H$ une application linéaire et Soit H un $\mathbb{C}-$espace de Hilbert , alors les assertions suivants sont équivalents :
1) T est borné.
2) T est continue sur tout H.
3) T est continue en $x = 0_H$.

Définition 2.0.6 *Soient H_1, H_2 deux $\mathbb{C}-$espace de Hilbert. Toute application linéaire et continue $T : H_1 \to H_2$ s'appelle un Opérateur.*

On considére les notations suivantes :

- on note $\mathcal{L}(H_1, H_2)$ l'ensemble des Opérateures définis de H_1 sur H_2.

$\mathcal{L}(H_1, H_2)$ est un espace vectoriel.

- Si $H_1 = H_2$ alors $\mathcal{L}(H_1, H_2) = \mathcal{L}(H)$.
- on note $\ker T$, le noyau de l'opérateur $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$

$$\ker T = \{x \in H_1 : Tx = 0_{H_2}\} = T^{-1}(0_{H_2}). \tag{2.0.3}$$

- $\operatorname{Im} T$ est l'image de H_1 par T c'est-à-dire :

$$\operatorname{Im} T = \{y \in H_2 : y = T(x), x \in H_1\} = T(H_1). \tag{2.0.4}$$

Définition 2.0.7 *Soit $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, A est dit borné si :*

$$\sup_{\|x\|_X \leq 1} \| A(x) \|_Y \langle \infty. \tag{2.0.5}$$

L'ensemble des opérateurs bornés de X dans Y est noté $B\ (X, Y)$ ou $B\,(X)$ si $X = Y$.

Remarque 2.0.1

$$\sup_{\|x\|_X \leq 1} \| A(x) \|_Y \langle \infty \Leftrightarrow \sup_{x \in X} \| T(x) \|_Y \langle \infty. \tag{2.0.6}$$

Proposition 2.0.2 [1]

Soit $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, A est borné si :

$$\exists \alpha \rangle 0, \quad \| A(x) \|_Y \leq \alpha \| x \|_X, \forall x \in X. \tag{2.0.7}$$

2.1 Norme de $\mathcal{L}(H)$

On définit les normes de $\mathcal{L}(H)$ par :

$\| T \|_{op} = \| T \|_{\mathcal{L}(H)}$ tel que :

$$\begin{aligned} \| \quad T \|_{op} &= \sup \{ \| T(x) \|_H , \forall x \in H, \| x \|_H \leq 1 \} \\ &= \inf \{ k \geqslant 0, \| T(x) \|_H \leq k \| x \|_{H_1} , \forall x \in H \} \\ &= \sup \left\{ \frac{\| T(x) \|_H}{\| x \|_H} , \forall x \in H - \{0_H\} \right\}. \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

Théorème 2.1.1 [2]

Soient H_1 et H_2 deux espace de Hilbert. Alors $\mathcal{L}(H_1, H_2)$ est un espace de Banach complet.

2.2 Adjoint d'un opérateur

Définition 2.2.1 *Soient H_1 et H_2 deux espace de Hilbert et $A \in B(H_1, H_2)$, alors il existe un unique opérateur noté A^* tel que $A^* \in B(H_2, H_1)$ appelé adjoint de A , qui vérifie la relation suivante :*

$$\forall x \in H_1, \ y \in H_2 : \ \langle Ax, y \rangle_{H_2} = \langle x, A^* y \rangle_{H_1}. \tag{2.2.1}$$

Définition 2.2.2 *Soit H un $\mathbb{C}-$espace de Hilbert et soit $T \in B(H)$. Alors T est auto adjoint (Hermitienne) si et seulement si :*

$$T = T^*. \tag{2.2.2}$$

On note par $A(H)$ l'ensemble des opérateurs auto adjoints.

Lemme 2.2.1 [2]

Soit H un $\mathbb{C}-$espace de Hilbert et soit $T, R, S \in B(H)$, alors :

1] *T^*T et TT^* sont auto adjoints.*

2] *si $T = R + iS$ auto adjoint alors R et S le sont aussi.*

2.3 Théorie spéctrale des opérateurs linéaires bornés

2.3.1 Spectre d'un operateur

Soit H un $\mathbb{C}-$espace de Hilbert et soit $T \in B(H)$ et $I \in B(H)$ l'opérateur d'identité

Définition 2.3.1 *Le spectre de T noté $\sigma(T)$ est définie par :*

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda I) \text{ n'est pas inversible}\}. \tag{2.3.1}$$

Lemme 2.3.1 *Soit H un $\mathbb{C}-$espace de Hilbert et soit $T \in B(H)$ le spectre de T^* noté $\sigma(T^*)$ est défini par :*

$$\sigma(T^*) = \left\{\overline{\lambda} : \lambda \in \sigma(T)\right\}. \tag{2.3.2}$$

Définition 2.3.2 *Soient X, Y deux espace de Hilbert et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'opérateurs dans $B(X,Y)$, on définit*

les trois types de convergence suivants :

1) Convergence en norme :

$(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en norme vers l'opérateur A si et seulement si :

$$\|A_n - A\|_{B(X,Y)} \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ et on écrit } A_n \rightrightarrows A. \tag{2.3.3}$$

2) Convergence forte :

$(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers l'opérateur A si et seulement si :

$$\|A_n(x) - A(x)\|_Y \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ ,}\forall x \in X \text{ et on écrit } A_n \xrightarrow{s} A. \tag{2.3.4}$$

3) Convergence faible :

$(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers l'opérateur A si et seulement si :

$$\langle A_n(x), y\rangle \longrightarrow \langle A(x), y\rangle \text{ , } \forall x \in X \text{ ,}\forall y \in Y \text{ et on écrit } A_n \xrightarrow{w} A. \tag{2.3.5}$$

2.4 Opérateurs Compact

Définition 2.4.1 *Soient X etY deux espaces vectoriels normés, une application linéaire $T : X \longrightarrow Y$ est compact si pour toute suite $(x_n)_{n\in N}$ bornée dans X on peut extraire une sous suite $\left(x_{n(k)}\right)_k$ telle que $\left(Tx_{n(k)}\right)_k$ converge dans Y.*

l'ensemble des applications Compacts est noté $\Bbbk(X,Y)$.

Théorème 2.4.1 *Soientt X et Y deux espaces vectoriels normés et $T \in \mathbb{k}(X,Y)$, alors T est borné.*

Preuve.

On raisonne par l'absurde :

On suppose que T n'est pas borné c'est -à-dire :

$$\forall k \rangle 0 \ , \parallel T(x) \parallel_Y \geq k \parallel x \parallel_X, \forall x \in X \quad \parallel x \parallel_X \leq 1.$$

D'où ,$\forall n \geq 1$ il existe une suite $(X_n)_{n\in N} \subset B_X(0,1)$ telle que :

$$\parallel T(x_n) \parallel_Y \geq n \Longleftrightarrow \parallel T(x_n) \parallel_Y \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty.$$

Comme $(X_n)_{n\in N}$ est bornée par la compacité de T il existe une sous suite $\left(X_{n(k)}\right)_k$ tele que $\left(Tx_{n(k)}\right)_k$ converge dans Y , mais ce ci contredit.

D'ou T est borné. □

Théorème 2.4.2 [2]

Soient X , Y et Z des espaces vectoriels normés :

1) Si $S \in \mathbb{k}(X,Y)$, $T \in \mathbb{k}(X,Y)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, alors $(\alpha S + \beta T)$ est compact et de plus $\mathbb{k}(X,Y)$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}(X,Y)$.

2) Si $S \in B(X,Y)$, $T \in B(Y,Z)$ et au moins l'un des deux opérateurs est compact alors $TS \in \mathbb{k}(X,Z)$.

3) Soient H un espace de Hilbert et $T \in B(H)$ alors :

$$T \text{ est compact } \Leftrightarrow T^* \text{ est compact }. \tag{2.4.1}$$

Définition 2.4.2 *Un opérateur $T : X \longrightarrow Y$ est dit de rang fini si*

$$\dim(\operatorname{Im} T) \langle +\infty. \tag{2.4.2}$$

Théorème 2.4.3 *Soient X etY deux espaces vectoriels normés et $T \in B(X,Y)$.*

(a) Si T est de rang fini alors il est compact.

(b) Si l'une des dimensions $\dim(X)$ *ou* $\dim(Y)$ *est finie, alors T est compact.*

Preuve.

(a) Comme T est de rang finie , Alors l'espace $Z = \mathrm{Im}\,(T)$ est normée de dimension finie, En autre pour tout suite $(x_n)_{n\in N}$ borné de X , la suite $(Tx_n)_n$ est borné dans Z par le theoréme de Bolzano–Weierstrass (Tout suite borné dans un compact admet une sous suite convergente) on peut extraire une sous suite $\left(x_{n(k)}\right)_k$ tele que $\left(Tx_{n(k)}\right)_k$ converge dans Z .D'où T est compact.

(b) (i)Si $\dim(X) \lessdot +\infty$ et $r(T) \leq \dim(X)$ alors $\dim(\mathrm{Im}\,T) \lessdot +\infty$,donc d'aprés la propriété (a) on a $rg\,(T) \lessdot +\infty$ donc T est compact.

(ii) Si $\dim(Y) \lessdot +\infty$ il est claire que $\dim(\mathrm{Im}\,T) \subset Y$ est finie par suite T est de rang finie donc compact. □

Exemple 2.4.1 *Soit l'opérateur* T

$$T : \underset{f}{L^2[-\pi,\pi]} \underset{\longmapsto}{\longrightarrow} \underset{Tf}{L^2[-\pi,\pi]}. \tag{2.4.3}$$

Tel que $Tf(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x-y)\, f(y)\, dy.$

Montrons que T *est compact*

1) La linéairité de T.

On a T *est linéaire car* :$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\forall f_1, f_2 \in L^2[-\pi,\pi]$

$$\begin{aligned} T(\alpha f_1 + \beta f_2)(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x-y)(\alpha f_1 + \beta f_2)(y)\, dy \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x-y)\,\alpha f_1(y)\, dy + \cos(x-y)\,\beta f_2(y)\, dy \\ &= \alpha \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x-y)\, f_1(y)\, dy + \beta \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x-y)\, f_2(y)\, dy \quad \textit{(par la linéairité de l'intégrale)} \\ &= \alpha Tf_1(x) + \beta Tf_2(x). \end{aligned} \tag{2.4.4}$$

D'ou T *est linéaire.*

2) On sait que

$$\mathrm{Im}\,T = \left\{Tf(x), f \in L^2[-\pi,\pi], x \in [-\pi,\pi]\right\}. \tag{2.4.5}$$

Soit $x \in [-\pi, \pi]$, $f \in L^2[-\pi, \pi]$

$$\begin{aligned} Tf(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x-y) f(y)\, dy \qquad (2.4.6) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)) f(y)\, dy \\ &= \cos(x) \int_{-\pi}^{\pi} \cos(y) f(y)\, dy + \sin(x) \int_{-\pi}^{\pi} \sin(y) f(y)\, dy \\ &= \theta\cos(x) + \lambda\sin(x)\,, \text{ avec } \theta = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(y) f(y)\, dy, \quad \lambda = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(y) f(y)\, dy. \end{aligned}$$

comme $Tf \in L^2[-\pi, \pi]$,*alors* $Tf(x) = \frac{a_0}{2} \sum_{n\geq 0} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$.
D'ou $\operatorname{Im} T$ *est engendré par* $\{\sin(x), \cos(x)\}$,*alors* $\dim \operatorname{Im} T = 2 \lessdot +\infty$, *d'ou* T *est compact.*

Théorème 2.4.4 *Soient X un espace vectoriel normé , Y un espace de Banach et soit $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'opérateurs compact $(T_k \in \Bbbk(X,Y), \forall k \in \mathbb{N})$ qui converge vers un opérateur T borné alors T est compact.*

Preuve.

Soit $(T_k)_k$ une suite d'opérateur compact qui converge vers T borné, et montrons que T est compact.

Soit $(x_n)_n$ une suite bornée de X on doit demontrer que $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous suite qui converge dans Y.

On a T_0 compact,donc il existe $\left(x_{n(0,r)}\right)_r$ une sous suite de $(x_n)_n$ tel que $\left(T_0 x_{n(0,r)}\right)_r$ converge dans Y, et par la compacité de T_1 , il existe $\left(x_{n(1,r)}\right)_r$ une sous suite de $\left(x_{n(0,r)}\right)_r$ tel que $\left(T_1 x_{n(1,r)}\right)_r$ converge dans Y.

Par reccurrence on trouve pour tout $j \in \mathbb{N}$, il existe une suite $\left(x_{n(j,r)}\right)_r$ tel que :$\forall k \leq j$, la suite $\left(T_k x_{n(j,r)}\right)_r$, converge dans Y.

Posons $n(r,r) = n(r)$, donc $\forall k \in \mathbb{N}$ finie , la suite $\left(T_k x_{n(r)}\right)_r$ converge dans Y , $r \longrightarrow +\infty$, donc $\left(T_k x_{n(r)}\right)$ est de cauchy dans Y c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon \gtrdot 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall p,q \geq N_0 : \quad \| T_k x_{n(p)} - T_k x_{n(q)} \|_Y \langle \frac{\varepsilon}{3}.$$

On montre que $\left(T_k x_{n(r)}\right)_r$ est de cauchy dans Y .

Soit $\varepsilon \geqslant 0$,soient $p, q \in \mathbb{N}$, $p \geqslant q \geqslant N_0$.

On a

$$\begin{aligned}
\| \quad & T x_{n(p)} - T x_{n(q)} \|_Y = \| T x_{n(p)} - T_k x_{n(p)} + T_k x_{n(p)} - T_k x_{n(q)} + T_k x_{n(q)} - T x_{n(q)} \|_Y \\
\leq \quad & \left\| T_k x_{n(p)} - T x_{n(p)} \right\|_Y + \left\| T_k x_{n(p)} - T_k x_{n(q)} \right\|_Y + \left\| T_k x_{n(q)} - T x_{n(q)} \right\|_Y .
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
\left\| T_k x_{n(p)} - T x_{n(p)} \right\|_Y &= \left\| (T_k - T) x_{n(p)} \right\|_Y \\
&\leq \| T_k - T \|_{op} . \left\| x_{n(p)} \right\|_X \\
&\leq M . \frac{\varepsilon}{3M} \ \text{ car } \left(\left\| x_{n(p)} \right\|_X \leq M, M \geqslant 0 \text{ et } \| T_k - T \|_{op} \longrightarrow 0 \right) .
\end{aligned}$$

D'où $\| T x_{n(p)} - T x_{n(q)} \|_Y \leq \varepsilon$ c'est-à-dire $\left(T x_{n(r)}\right)_r$ est de Cauchy. Donc $\left(T x_{n(r)}\right)_r$ converge dans Y.

Par suite T est compact. □

2.5 Opérateur de Hilbert Schmidt

Définition 2.5.1 *Soit H un espace de Hilbert de dimension infinie et soit $\{e_n\}_{n \in N^*}$ une base orthonormal de H , $T : H \longrightarrow H$ un opérateur bornée, Alors T est dit opérateur de Hilbert Schmidt si et seulement si :*

$$\sum_{n \geq 1} \| T e_n \|_H^2 \langle +\infty \ . \tag{2.5.1}$$

Théorème 2.5.1 *Soient H un espace de Hilbert de dimension infinie et $\{e_n\}_{n \in N^*}$, $\{f_n\}_{n \in N^*}$ deux bases orthonormals de H et soit $T : H \longrightarrow H$ un opérateur borné, alors :*

1. $\sum_{n \geq 1} \| T e_n \|_H^2 = \sum_{n \geq 1} \| T^* f_n \|_H^2 = \sum_{n \geq 1} \| T f_n \|_H^2$.
2. (T est de Hilbert Schmidt)$\Longleftrightarrow$(T^*est de Hilbert Schmidt).
3. (T est de Hilbert Schmidt)$\Longrightarrow$(T est compact).

4. l'espace des opérateurs de Hilbert Schmidt est un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}(H)$.

Preuve.

(1) Soient H un espace de Hilbert de dimension infinie et $\{e_n\}_{n\in N^*}$ et $\{f_m\}_{m\in N^*}$ deux base orthnormals de H , on sait que $\forall x \in H$:

(a)

$$\| x \|_H^2 = \sum_{n\geq 1} |\langle x, e_n\rangle|^2 \,(\text{égalité de Perseval}).$$

Alors :

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1} \| Te_n \|_H^2 &= \sum_{n\geq 1}\left(\sum_{m\geq 1} |\langle Te_n, f_m\rangle|^2\right)\\ &= \sum_{m\geq 1}\left(\sum_{n\geq 1} |\langle e_n, T^* f_m\rangle|^2\right)\\ &= \sum_{m\geq 1} \| T^* f_m \|_H^2 .\end{aligned}$$

D'où : $\sum_{n\geq 1} \| Te_n \|_H^2 = \sum_{m\geq 1} \| T^* f_m \|_H^2$.

(b)

$$\begin{aligned}\sum_{m\geq 1} \| T^* f_m \|_H^2 &= \sum_{m\geq 1}\left(\sum_{n\geq 1} |\langle T^* f_m, f_n\rangle|^2\right)\\ &= \sum_{n\geq 1}\left(\sum_{m\geq 1} |\langle f_m, T f_n\rangle|^2\right)\\ &= \sum_{n\geq 1} \| T f_n \|_H^2 .\end{aligned}$$

D'ou : $\sum_{m\geq 1} \| T^* f_m \|_H^2 = \sum_{n\geq 1} \| T f_n \|_H^2$.

(2) Supposons que T est de Hilbert Schmidt , de (1) nous avons

$$\sum_{n\geq 1} \| Te_n \|_H^2 = \sum_{m\geq 1} \| T^* f_m \|_H^2 . \tag{2.5.2}$$

En posant $(e_n)_n = (f_m)_m$

$$\begin{aligned}(T \text{ est de Hilbert Schmidt}) &\Longleftrightarrow \sum_{n\geq 1} \| Te_n \|_H^2 \lessdot +\infty \\ &\Longleftrightarrow \sum_{n\geq 1} \| T^* e_n \|_H^2 \lessdot +\infty \\ &\Longleftrightarrow (T^* \text{ est de Hilbert Schmidt}).\end{aligned}$$

(3) Sopposons que T est de Hilbert schmidt, Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une base orthnormal de H , Alors $\forall x \in H$, $x = \sum\limits_{n\geq 1} \langle x, e_n \rangle\, e_n$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit un opérateur borné T_k sur H par :

$$T_k x = \sum_{n\geq 1} \langle x, e_n \rangle\, T(e_n).$$

Il est clair que rang $(T_k) \leq k$, donc $(T_k)_k$ est une suite d'opérateurs bornés de rang fini donc , c'est une suite d'opérateur compact,de plus,$\forall x \in H$:

$$\begin{aligned}\|(T_k - T)\, x\|_H &= \left\| \sum_{n\geq 1}^{k} \langle x, e_n \rangle\, T(e_n) - \sum_{n\geq 1} \langle x, e_n \rangle\, T(e_n) \right\|_H \\ &\leq \sum_{n=k+1}^{+\infty} |\langle x, e_n \rangle|\, \|Te_n\|_H \\ &\leq \left(\sum_{n=k+1}^{k} |\langle x, e_n \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n\geq k+1} \|Te_n\|_H^2 \right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(Cauchy Shwartz)} \\ &\leq \|x\| \left(\sum_{n\geq k+1} \|Te_n\|_H^2 \right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Donc :

$$\|T_k - T\|_{op} \leq \left(\sum_{n\geq k+1} \|Te_n\|_H^2 \right)^{\frac{1}{2}} \underset{k \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0 .$$

C'est-à-dire que $\lim\limits_{k\longrightarrow +\infty} T_k = T$ dans $\mathcal{L}(H)$, par le théorème 2.2.2, T est compact.

(4) Soient $\alpha \in \mathbb{k}$, S et T deux opérateurs bornée de Hilbert Schmidt.

Soit $\{e_n\}_{n\in N^*}$ est une base orthonormal de H :

i) (αT) est de Hilbert Schmidt ?

$$\sum_{n\geq 1} \| \alpha T e_n \|_H^2 = |\alpha|^2 \sum_{n\geq 1} \| T e_n \|_H^2 \langle +\infty \quad \text{car } T \text{ est de Hilbert Schmidt.}$$

D'ou (αT) est de Hilbert Schmidt.

ii) $(S+T)$ est de Hilbert Schmidt ?

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 1} \| \quad (S+T)\, e_n \|_H^2 &\leq 2 \sum_{n\geq 1} \left(\| S e_n \|_H^2 + \| T e_n \|_H^2 \right) \\ &\leq \ +\infty \quad \text{car } T \text{ et } S \text{ sont de Hilbert Schmidt.} \end{aligned}$$

par suit l'espace des opérateurs de Hilbert Schmidt est un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}(H)$. □

Définition 2.5.2 *Soit H un espace de Hilbert de dimension infinie et soit $\{e_n\}_{n\in N^*}$ une base orthonormal de H , $T : H \longrightarrow H$ un opérateur borné, alors T est dit opérateur de Schatten si et seulement si :*

$$\sum_{n\geq 1} \| T e_n \|_H^p \langle +\infty \ . \tag{2.5.3}$$

2.6 Théore spéctrale des opérateurs compact

Dans cette partie on considère H un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$, de dimension infinie , S un opérateur compact.

Définition 2.6.1 *le spectre ponctuel de S est défini par :*

$$\sigma_p(S) = \{\lambda, \text{valeur propre de } S\}\,. \tag{2.6.1}$$

Définition 2.6.2 *l'ensemble resolvant de S est défini par :*

$$\rho(S) = \mathbb{C} \backslash \sigma(S). \tag{2.6.2}$$

2.7 Projection orthogonal

Définition 2.7.1 *Soit H un espace de Hilbert, une projection orthogonale sur H est un opérateur $P \in B(H)$, tel que*

$$P = P^2 = P^*. \tag{2.7.1}$$

Chapitre 3

Chapitre3 :Opérateurs positifs

Définition 3.0.2 *Soient H un $\mathbb{C}-$espace de Hilbert et $S \in B(H)$. S est dit positif si et seulment si il est auto adjoint et pour tout $x \in H$ on a :*

$$\langle Sx, x\rangle \geq 0. \tag{3.0.1}$$

Théorème 3.0.1 [2]
Si H est un $\mathbb{C}-$espace de Hilbert et $S \in B(H)$ auto adjoint, S est positif si et seulment si $\sigma(S) \subseteq [0, +\infty[$.

Remarque 3.0.1 *Si S est un opérateur positif, alors pour tout x dans H on a :*

$$\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R} \text{ car } \forall x \in H \text{ ; } \langle Ax, x\rangle = \langle x, A^*x\rangle = \langle x, Ax\rangle = \overline{\langle Ax, x\rangle}. \tag{3.0.2}$$

Exemple 3.0.1

Soit H un $\mathbb{C}-$espace de Hilbert et soient $R, S \in B(H)$ positifs, soit $T \in B(H)$ et soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$
(a) L'opérateur nul et L'opérateur identité sont des operateurs positifs.
(b) T^*T est positif.
(c) $R + S$ et αS sont positifs.

Définition 3.0.3 *Soient A et B deux opérateurs positifs sur H . On dit que A est inférieur ou égal à B (noté $A \leq B$) et B un majorant de A si et seulement si :*

$$\langle (B - A)(x), x\rangle \geq 0 \ \forall x \in H \ . \tag{3.0.3}$$

Remarque 3.0.2 *La relation* $(\leq)$ *est une relation d'ordre partiel sur* $B(H)$.

Définition 3.0.4 *Soient* T *et* B *deux opérateurs positifs tels que* $T \leq B$.
B *est dit majorant minimal de* T *si et seulement si :*

$$\forall C \in B(H) \text{ tel que : } C \geq 0 \text{ et } T \leq C \Rightarrow B \leq C \ . \tag{3.0.4}$$

Proposition 3.0.1

Soient A , B et C trois opérateurs positifs sur H . Alors on a les proposition suivantes :

(1) $A \geq 0$,$B \geq 0 \Rightarrow A - B \leq A$.

(2) $A \leq B \Rightarrow \| A \|_{B(H)} \leq \| B \|_{B(H)}$.

(3) $B \geq 0 \Rightarrow B^n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

(4) $\forall n \in \mathbb{N}^* : C \leq Id \Rightarrow C^n \leq Id$.

(5) $C^2 \leq Id \Rightarrow C \leq Id$.

(6) Si A est inversible , Alors A^{-1} est positif.

Preuve. (1) Soit $x \in H$,Alors :

$$\begin{aligned} A &\geq 0, B \geq 0 \Leftrightarrow \langle Ax, x\rangle \geq 0 \text{ et } \langle Bx, x\rangle \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \langle Ax, x\rangle \geq 0 \text{ et } -\langle Bx, x\rangle \leq 0 \\ &\Rightarrow \langle Ax, x\rangle - \langle Bx, x\rangle \leq \langle Ax, x\rangle \\ &\Rightarrow \langle (A-B)(x), x\rangle \leq \langle Ax, x\rangle \\ &\Leftrightarrow \langle [A-(A-B)]\,(x), x\rangle \geq 0 \\ &\Leftrightarrow A - B \leq A \end{aligned}$$

(2) Soit $x \in H$, on a donc :

$$\begin{aligned} 0 &\leq A \leq B \Longleftrightarrow 0 \leq \langle Ax, x\rangle \leq \langle Bx, x\rangle \leq \| B \|_{B(H)} \times \| x \|^2 \\ Alors &: \\ [\langle Ax, x\rangle]^2 &\leq [\langle Bx, x\rangle]^2 \\ &\leq \| B \|_{B(H)}^2 \times \| x \|^4 \\ D'ou &: \\ \sup_{\|x\|\leq 1} \left\{[\langle Ax, x\rangle]^2\right\} &\leq \| B \|_{B(H)}^2 \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité ci-dessous qu'on démontrera dans la preuve du lemme (2.3) (équation(2.4)) :

$$\| A \|_{B(H)}^2 \leq \left\{ \sup_{\|x\|\leq 1} \langle Ax, x\rangle \right\}^2$$

Et comme :

$$\left\{ \sup_{\|x\|\leq 1} \langle Ax, x\rangle \right\}^2 \leq \sup_{\|x\|\leq 1} \left\{ \left[\langle Ax, x\rangle\right]^2 \right\}$$

On déduit que :

$$\| A \|_{B(H)}^2 \leq \| B \|_{B(H)}^2 \Longleftrightarrow \| A \|_{B(H)} \leq \| B \|_{B(H)}$$

(3) Montrons par récurrence que :

$$B \geq 0 \Longleftrightarrow B^n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Soit $x \in H$.

- pour $n = 2$ on a :

$$\begin{aligned} \left\langle B^2 x, x\right\rangle &= \langle B\left[Bx\right], x\rangle \\ &= \langle Bx, B^* x\rangle \\ &= \langle Bx, Bx\rangle \\ &= \| B \|^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

- supposons que :

$$B \geq 0 \Longleftrightarrow B^n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}^* \,;\, 2 \leq n \leq N_0$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \left\langle B^{N_0+1} x, x\right\rangle &= \left\langle B(B^{N_0} x), x\right\rangle & \\ &= \left\langle B^{N_0} x, B^* x\right\rangle & B = B^* \\ &= \left\langle B^{N_0} x, Bx\right\rangle & \\ &= \left\langle B^{N_0-1}\left[Bx\right], Bx\right\rangle & \\ &= \left\langle B^{N_0-1} Y, Y\right\rangle & (Y = Bx) \in H \ ,\ B^{N_0-1} \geq 0 \\ &\geq 0 & \end{aligned}$$

Finalement

$$B \geq 0 \Longleftrightarrow B^n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

(4) Montrant par récurrence que :

$$C \leq Id \Rightarrow C^n \leq Id \ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Ce qui revient donc à montrer que :

$$Id - C \geq 0 \Rightarrow Id - C^n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Soit $x \in H$.

pour $n = 2$, On a :

$$\begin{aligned}
\left\langle \left(Id - C^2\right) x, x\right\rangle &= \left\langle x - C^2 x, x\right\rangle \\
&= \langle x, x\rangle - \left\langle C^2 x, x\right\rangle \\
&= \| x \|^2 - \left\langle C^2 x, x\right\rangle \\
&\geq \| x \|^2 - \| C \|^2_{B(H)} \times \| x \|^2 \qquad \left(\left|\left\langle C^2 x, x\right\rangle\right| \leq \| C \|^2_{B(H)} \times \| x \|^2\right) \\
&\geq \left(1 - \| C \|^2_{B(H)}\right) \times \| x \|^2
\end{aligned}$$

Et d'aprés la propriété (2) on a :

$$\begin{aligned}
C &\leq Id \Rightarrow \| C \|_{B(H)} \leq \| Id \|_{B(H)} = 1 \\
&\Rightarrow \| C \|^2_{B(H)} \leq 1
\end{aligned}$$

Donc on obtient :

$$\left\langle \left(Id - C^2\right) x, x\right\rangle \geq \alpha \times \| x \|^2 \quad \text{avec } \alpha = \left(1 - \| C \|^2_{B(H)}\right) \geq 0$$

D'ou :

$$\left\langle \left(Id - C^2\right) x, x\right\rangle \geq 0 \quad \forall x \in H$$

- Supposons que :

$$C \leq Id \Rightarrow C^n \leq Id \ \forall n \in \mathbb{N}^* ; \ 2 \leq n \leq N_0$$

On a donc pour tout $x \in H$:

$$\begin{aligned}
\left\langle \left(Id - C^{N_0+1}\right) x, x\right\rangle &= \langle x, x\rangle - \left\langle C^{N_0+1} x, x\right\rangle \\
&= \| x \|^2 - \left\langle C \left[C^{N_0}\right] x, x\right\rangle \\
&= \| x \|^2 - \left\langle C^{N_0} x, C^* x\right\rangle \\
&= \| x \|^2 - \left\langle C^{N_0-1} \left[Cx\right], Cx\right\rangle \qquad (C^* = C) \\
&= \| x \|^2 - \left\langle C^{N_0-1} Y, Y\right\rangle \qquad (Y = Cx \in H)
\end{aligned}$$

Comme :

$$\begin{aligned}
\left|\left\langle C^{N_0-1} Y, Y\right\rangle \right| &\leq \| C^{N_0-1} \|_{B(H)} \times \| Y \|^2 \\
&\leq \| C \|_{B(H)}^{N_0-1} \times \| Y \|^2 \\
&\leq \| Y \|^2 \qquad \forall Y \in H
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
\| \quad Y \|^2 =& \| Cx \|^2 \\
\leq & \ C \|_{B(H)} \times \| x \|^2 \\
\leq & \ \| x \|^2 \qquad \forall x \in H
\end{aligned}$$

On a finalement :

$$\begin{aligned}
\left\langle \left(Id - C^{N_0+1}\right) x, x\right\rangle &\geq \| x \|^2 - \| Y \|^2 \\
&\geq 0 \qquad \forall x \in H
\end{aligned}$$

D'où :

$$C \leq Id \Rightarrow C^n \leq Id \ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

(5) pour prouver cette propriété montrons que :

$$Id \lessdot C \Rightarrow Id \lessdot C^2$$

On a :

$$Id \lessdot C \Longleftrightarrow (C - Id) \gtrdot 0$$

Donc d'aprés la propriété (3) :

$$\begin{aligned}(C - Id) &\geqslant 0 \Rightarrow (C - Id)^2 \geqslant 0 \\ &\Longleftrightarrow C^2 - 2C + Id \geqslant 0 \\ &\Longleftrightarrow C^2 \geqslant 2C - Id\end{aligned}$$

Et comme $Id \leqslant C$, on obtient : $C^2 \geqslant Id$.

(6) soit $y \in H$ alors :

$$\begin{aligned}\left\langle A^{-1}y, y\right\rangle &= \langle x, Ax\rangle \qquad \text{avec } x \in H \\ &\geq 0\end{aligned}$$

□

3.1 Racine carrée d'un opérateur positif

Proposition 3.1.1

Soit A un opérateur positif sur un espace de Hilbert H, alors il existe un unique opérateur positif X noté $\sqrt{A}$ tel que :

$$X^2 = A. \tag{3.1.1}$$

Pour démontrer cette proposition on aura besoin des lemmes suivants :

Lemme 3.1.1 *Soit A un opérateur positif, alors :*

$$\| Ax \|^4 \leq \left\langle A^2x, Ax\right\rangle \times \langle Ax, x\rangle \qquad \forall x \in H. \tag{3.1.2}$$

Preuve. soit A un opérateur positif et λ un nombre réel. On a alors :
pour tout $x \in H$.

$$\begin{aligned}
\langle A\left[x+\lambda A(x)\right], \left[x+\lambda A(x)\right]\rangle &= \left\langle Ax+\lambda A^2(x), \left[x+\lambda A(x)\right]\right\rangle \\
&= \quad \langle Ax, \left[x+\lambda A(x)\right]\rangle + \left\langle \lambda A^2(x), \left[x+\lambda A(x)\right]\right\rangle \\
&= \langle Ax, x\rangle + \overline{\lambda}\,\langle A(x), A(x)\rangle + \lambda\left\langle A^2(x), \left[x+\lambda A(x)\right]\right\rangle \\
&= \langle Ax, x\rangle + \lambda\,\langle A(x), A(x)\rangle + \lambda\left\langle A^2(x), x\right\rangle + \lambda^2\left\langle A^2(x), A(x)\right\rangle \\
&= \langle Ax, x\rangle + \lambda\,\langle A(x), A(x)\rangle + \lambda\,\langle A(x), A^*x\rangle + \lambda^2\left\langle A^2(x), A(x)\right\rangle \\
&= \langle Ax, x\rangle + \lambda\,\langle A(x), A(x)\rangle + \lambda\,\langle A(x), Ax\rangle + \lambda^2\left\langle A^2(x), A(x)\right\rangle \\
&= \lambda^2\,\langle A\left[A(x)\right], A(x)\rangle + 2\lambda\,\langle A(x), A(x)\rangle + \langle Ax, x\rangle \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

Ce trinôme étant de signe constant doit avoir un discriminant négatif ou nul, ce qui nous donne :

$$\langle A(x), A(x)\rangle^2 - \left\langle A^2(x), A(x)\right\rangle \times \langle A(x), x\rangle \leq 0 \qquad \forall x \in H$$

donc :

$$\langle A(x), A(x)\rangle^2 \leq \left\langle A^2(x), A(x)\right\rangle \times \langle A(x), x\rangle \qquad \forall x \in H$$

D'ou :

$$\parallel A \parallel^4 \leq \left\langle A^2x, Ax\right\rangle \times \langle Ax, x\rangle \qquad \forall x \in H$$

□

3.2 Convergence des suites d'opérateurs positifs majorées par l'identité

Lemme 3.2.1 *Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'opérateurs positifs tels que :*

$$0 \leq A_1 \leq A_2 \leq ... \leq A_n \leq ... \leq Id. \qquad (I)$$

Alors :

pour tout $x \in H$, la suite $(A_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est de Cauchy et on peut définir l'opérateur positif :

$$A : \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & H \\ x & \longmapsto & A(x) = .\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} A_n(x) \end{array}. \qquad (3.2.1)$$

Tel que :

$$\|A\|_{B(H)} \leq 1. \tag{3.2.2}$$

Preuve.

Montrons d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'opérateur A_n est continu et $\|A\|_{B(H)} \leq 1$.

i) D'une part ; on a d'aprés l'équation (I) :

Pour tout $x \in H$.

$$0 \leq \langle A_1(x), x\rangle \leq \langle A_2(x), x\rangle \leq ... \leq \langle A_n(x), x\rangle \leq ... \leq \langle Id(x), x\rangle = \langle x, x\rangle = \|x\|^2.$$

Donc pour tout $x \in H$ tel que $\|x\| \leq 1$ on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : 0 \leq \langle A_n(x), x\rangle \leq 1.$$

D'où :

$$\sup_{\|x\|\leq 1} \{\langle A_n(x), x\rangle, \forall n \in \mathbb{N}^*\} \leq 1. \tag{2}$$

ii) D'autre part on a d'aprés le lemme (3.1.1) :

$$\| A_n(x) \|^4 \leq \left\langle A_n^2(x), A_n(x)\right\rangle \times \langle A_n(x), x\rangle \qquad \forall x \in H, \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{3}$$

En utilisant cette inégalité et en posant $y = \frac{A_n(x)}{\|A_n(x)\|}$ (pour $A_n \neq 0$), on obtient :

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \| \quad & A_n(x) \|^4 \leq \left\langle A_n^2(x), A_n(x)\right\rangle \times \langle A_n(x), x\rangle && \forall\, x \in H\,;\, x \neq 0 \\ = \quad & \langle A_n(x), x\rangle \times \left\langle A_n\left(\frac{A_n(x)}{\|A_n(x)\|}\right), \frac{A_n(x)}{\|A_n(x)\|}\right\rangle \times \|A_n(x)\|^2 && \forall\, x \in H\,;\, x \neq 0\,. \end{aligned}$$

Donc on a :

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\| \quad A_n \|_{B(H)}^4 &= \left\{ \sup_{\|x\|\leq 1} \| A_n(x) \| \right\}^4 \leq \sup_{\|x\|\leq 1} \left(\| A_n(x) \|^4 \right) \\
&\leq \sup_{\|x\|\leq 1} \langle A_n(x), x\rangle \times \sup_{\|y\|\leq 1} \langle A_n(y), y\rangle \times \sup_{\|x\|\leq 1} \| A_n(x) \|^2 \\
&\leq \left\{ \sup_{\|x\|\leq 1} \langle A_n(x), x\rangle \right\}^2 \times \| A_n \|_{B(H)}^2 .
\end{aligned}$$

D'où :

$$\| A_n \|_{B(H)} \leq \left\{ \sup_{\|x\|\leq 1} \langle A_n(x), x\rangle \right\} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*. \qquad (4)$$

Des deux inégalités (2) et (4) on déduit que :

$$\|A\|_{B(H)} \leq 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Alors l'opérateur A_n est continu pour tout entier naturel non nul.

Soit l'opérateur $A_{m,n}$ définit par :

$$A_{m,n} = A_n - A_m \quad \forall n, m \in \mathbb{N}^* \text{ tels que} ;\, n > m.$$

On remarque que $A_{m,n}^* = (A_n - A_m)^* = A_n^* - A_m^* = A_n - A_m = A_{m,n}$, alors $A_{m,n}$est auto-adjoint et on a :

$$\begin{aligned}
0 \quad &\leq \quad A_m \leq A_n \Longleftrightarrow 0 \leq \langle A_m(x), x\rangle \leq \langle A_n(x), x\rangle && \forall\, x \in H \\
&\Longleftrightarrow \quad 0 \leq \langle A_n(x), x\rangle - \langle A_m(x), x\rangle && \forall\, x \in H \\
&\Longleftrightarrow \quad 0 \leq \langle A_n(x) - A_m(x), x\rangle && \forall\, x \in H \\
&\Longleftrightarrow \quad 0 \leq \langle A_{m,n}(x), x\rangle && \forall\, x \in H.
\end{aligned}$$

Donc l'opérateur $A_{m,n}$ est positif et d'aprés le lemme (3.1.1) on a pour tout $x \in H$:

$$\begin{aligned}
\| \quad A_{m,n}(x) \|^4 &\leq \left\langle A_{m,n}^2(x), A_{m,n}(x)\right\rangle \times \langle A_{m,n}(x), x\rangle \\
&\leq \langle A_{m,n}(x), x\rangle \left\|A_{m,n}^2(x)\right\| \|A_{m,n}(x)\| && \text{(Cauchy -Shwartz)} \\
&\leq \langle A_{m,n}(x), x\rangle \|A_{m,n}\|_{B(H)}^3 \|x\|^2 \\
&\leq \langle A_{m,n}(x), x\rangle \|x\|^2 && (\|A_{m,n}\|_{B(H)} \leq 1).
\end{aligned}$$

D'où :

$\forall\ x \in H, \forall n, m \in \mathbb{N}^*$ tels que $n > m$:

$$\left\| A_n(x) - A_m(x) \right\|^4 \leq \langle A_n(x) - A_m(x), x \rangle \times \|x\|^2 . \qquad (5)$$

Considérons la suite de fonctions réelles $(\vartheta_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ telles que $\vartheta_n(x) = \langle A_n(x), x \rangle\ \forall\ x \in H$.

On remarque que pour tout $x \in H$ on a :

$$\begin{aligned} \vartheta_{n+1}(x) - \vartheta_n(x) &= \langle A_{n+1}(x), x \rangle - \langle A_n(x), x \rangle \\ &= \langle A_{n+1}(x) - A_n(x), x \rangle \\ &= \langle A_{n,n+1}(x), x \rangle \\ &\geq 0 \qquad\qquad (A_{m,n} \geq 0) . \end{aligned}$$

Donc :

$$\forall\ x \in H : \vartheta_{n+1}(x) - \vartheta_n(x) \geq 0 \qquad (6)$$

D'autre part, pour tout $x \in H$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\begin{aligned} |\vartheta_n(x)| &= |\langle A_n(x), x \rangle| \\ &\leq \|A_n(x)\| \times \|x\| \\ &\leq \|A_n\|_{B(H)} \times \|x\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 \qquad\qquad \left(\|A_n\|_{B(H)} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}^* \right) . \end{aligned}$$

Alors :

$$\forall\ x \in H, \forall n \in \mathbb{N}^* : |\vartheta_n(x)| \leq \|x\|^2 . \qquad (7)$$

Des deux inégalité (6) et (7) on déduit que la suite $(\vartheta_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante au sens large et bornée par $\|x\|^2$ pour tout $x \in H$, donc elle est convergent,d'où elle est de Cauchy dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire :

$\forall\, x \in H, \forall \varepsilon > 0, \forall n, m \in \mathbb{N}^*$ avec $n \rangle m, \exists N_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que$\forall n, m \geq N_0 : |\vartheta_n(x) - \vartheta_m(x)| = |\langle A_n(x) - A_m(x)$

En utilisant cette inégalité et inégalité (5) on obtient :

$$\forall\ x \in H\ \|A_n(x) - A_m(x)\|^4 \leq \langle A_n(x) - A_m(x), x \rangle\, \|x\|^2 \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0 .$$

D'où :

$\forall\, x \in H, \forall \varepsilon > 0, \forall n, m \in \mathbb{N}^*$avec $n > m, \exists N_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que$\forall n, m \geq N_0 : \|A_n(x) - A_m(x)\| \leq \varepsilon.$

Donc la suite $\{A_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est de Cauchy dans H qui est complet, alors elle est convergente et on peut définir l'opérateurs A par la simple limite comme suit :

$$A(x) = \lim_{n\longrightarrow\infty} A_n(x).$$

Nous avons alors pour tout $x, y \in H$:

$$\begin{aligned}
\langle A(x), y\rangle &= \left\langle \lim_{n\longrightarrow\infty} A_n(x), y \right\rangle \\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty} \langle A_n(x), y\rangle \\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty} \langle x, A_n(y)\rangle \qquad\qquad (A_n^* = A_n) \\
&= \left\langle x, \lim_{n\longrightarrow\infty} A_n(y) \right\rangle \\
&= \langle x, A(y)\rangle.
\end{aligned}$$

Donc l'opérateur A est auto-adjoint et on remarque que pour $x = y$:

$$\langle A(x), x\rangle = \lim_{n\longrightarrow\infty} \langle A_n(x), x\rangle \geq 0.$$

D'où A est positif et comme nous avons pour tout $x \in H$:

$$\begin{aligned}
\|A(x)\|^2 &= \langle A(x), A(x)\rangle \\
&= \left\langle \lim_{n\longrightarrow\infty} A_n(x), \lim_{n\longrightarrow\infty} A_n(x) \right\rangle \\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty} \langle A_n(x), A_n(x)\rangle \\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty} \|A_n(x)\|^2 \\
&\leq \lim_{n\longrightarrow\infty} \left(\|A_n\|^2_{B(H)} \times \|x\|^2 \right) \\
&\leq \|x\|^2 \qquad\qquad \left(\|A_n\|_{B(H)} \leq 1 \forall n \in \mathbb{N}^* \right).
\end{aligned}$$

Alors :

$$\|A\|_{B(H)} \leq 1.$$

□

Chapitre 4

Chapitre 4 :Caractérisation d'un majorant minimal

Dans ce chapitre on donne explicitement le majorant minimal de deux opérateurs positifs sous les contraintes : $R, S \leq T \leq I$.

Soit H un espace de Hilbert et soit $T \in B(H)$ un opérateur positif compact , on indexe ses valeurs propres sous la forme $(\lambda_k(T))_{k\geq 1}$ où $\lambda_1(T) \geq \lambda_2(T) \geq ... \geq \lambda_n(T) \geq 0$.

On désigne par $B_p(H)$ $(p \geq 1)$ la classe de Schatten d'ordre p .

Théorème 4.0.1 [3]

Soient R et S deux opérateurs positifs appartenant à $B_p(H)$ $(p \geq 1)$, tels que $0 \leq R, S \leq I$, alors il existe un opérateur positif T appartenant à $B_p(H)$ tel que

$$R, S \leq T \leq I. \tag{4.0.1}$$

Preuve.

Supposons que $1 \in \sigma(R)$,On pose E=ker$(I - R)$ et on décompose R et S par rapport à la somme directe orthogonale $H = E \oplus E^{\perp}$.

On remarque que R et S peuvent s'ecrit sous la forme

$$R = \begin{bmatrix} I_E & 0 \\ 0 & R_1 \end{bmatrix} \text{ et } S = \begin{bmatrix} A & L \\ L^* & B \end{bmatrix}. \tag{4.0.2}$$

Si $R, S \leq T \leq I$, T est nécessairement de la forme

$$T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & X \end{bmatrix}. \tag{4.0.3}$$

Donc on peut trouver T si et seulment si les deux conditions suivant sont vérifiées :

(1) $$R_1 \leq X \leq I_{E^\perp}$$

et

(2) $$\begin{bmatrix} I_E - A & -L \\ -L^* & X - B \end{bmatrix} \geq 0.$$

On voit que (2) équivant sucussivement à :

$t^2 \langle (I_E - A)\, x \mid x \rangle - 2t \operatorname{Re} \langle Ly \mid x \rangle + \langle (X - B)\, y \mid y \rangle \geq 0 \quad \forall (x, y, t) \in E \times E^\perp \times \mathbb{R};$

$\Longleftrightarrow [\operatorname{Re} \langle Ly \mid x \rangle]^2 \leq \langle (I_E - A)\, x \mid x \rangle \langle (X - B)\, y \mid y \rangle \qquad \forall (x, y) \in E \times E^\perp;$

$\Longleftrightarrow |\langle Ly \mid x \rangle|^2 \leq \langle ((1+\varepsilon)\, I_E - A)\, x \mid x \rangle \langle (X - B)\, y \mid y \rangle \; \forall (x, y, \varepsilon) \in E \times E^\perp \times \mathbb{R}_+^*;$

$\Longleftrightarrow I_E - A \geq 0, \left| \left\langle [(1+\varepsilon)\, I_E - A]^{\frac{-1}{2}} Ly \mid x \right\rangle \right|^2 \leq \|x\|^2 \langle (X - B)\, y \mid y \rangle \; \forall (x, y, \varepsilon) \in E \times E^\perp \times \mathbb{R}_+^*;$

$\Longleftrightarrow I_E - A \geq 0, \left\| [(1+\varepsilon)\, I_E - A]^{\frac{-1}{2}} Ly \right\|^2 \leq \langle (X - B)\, y \mid y \rangle \; \forall (y, \varepsilon) \in E^\perp \times \mathbb{R}_+^*;$

$\Longleftrightarrow I_E - A \geq 0, X - B \geq 0$, $L^* [(1+\varepsilon)\, I_E - A]^{-1} L \leq X - B \quad \forall \varepsilon > 0;$ (3)

$\Longleftrightarrow I_E - A \geq 0$ et $X \geq B + \lim\limits_{\varepsilon \longrightarrow 0} L^* [(1+\varepsilon)\, I_E - A]^{-1} L$ $\qquad (*)$

Cette limite à un sens car il s'agit d'une suite croissante d'opérateurs positifs dans $\mathbb{R}_+^*$ et est une norme uniformement borneé , (d'aprés (3)) , il est nessairement converge vers 0, posons $k = \lim\limits_{\varepsilon \longrightarrow 0} L^* [(1+\varepsilon)\, I_E - A]^{-1} L$, utilisant le fait que $I - S \geq 0$, de la même manière on obtient

$$I_{E^\perp} - B \geq \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} L^* [(1+\varepsilon)\, I_E - A]^{-1} L \tag{4.0.4}$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ (utiliser de la même manière que $I - S \geq 0$).

Si on pose $S_1 = B + k$, on voit que l'on doit trouver X tel que

$$I_E \geq X \geq R_1, S_1 \qquad \left(X \in B_P\left(E^\perp\right)\right) \tag{4.0.5}$$

Et

$$\begin{aligned} R_1 &= P_{E^\perp} R P_{E^\perp} \in B_P(H) \text{ (idéal Bilatère)} & (4.0.6) \\ S_1 &= B + k = P_{E^\perp} S P_{E^\perp} + k \in B_P(H) \end{aligned}$$

On a

$$S = \begin{bmatrix} A & L \\ L^* & B \end{bmatrix} \tag{4.0.7}$$

Donc

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|S\| I - S = \begin{bmatrix} \|S\| I_E - A & -L \\ -L^* & \|S\| I_{E^\perp} - B \end{bmatrix} & (4.0.8) \\ (*) &\Longrightarrow \|S\| I_{E^\perp} \geq B + \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} L^* \left[(\|S\| + \varepsilon) I_E - A \right]^{-1} L \end{aligned}$$

Comme $\left[(\|S\| + \varepsilon) I_E - A \right]^{-1} \geq \left[(1 + \varepsilon) I_E - A \right]^{-1}$, On en déduit que

$$\|S\| I_{E^\perp} \geq B + k = S_1 \tag{4.0.9}$$

D'où :

$$\|S_1\| \leq \|S\| \tag{4.0.10}$$

On a donc ramené le problème au cas où $\|R\| \lessdot 1$ et $0 \leq R, S$, $S \leq I$.

Si $1 \in \sigma(S_1)$, $(S_1 \longrightarrow S)$, on décompose cette fois les opérateurs par rapport à la somme directe orthgonale $H = \ker(I - S) \oplus \overline{\operatorname{Im}(I - S)}$.

En utilisant le même procédé on se ramène au cas où il faut trouver $X \in B_P\left(E^\perp\right)$ tel que

$$I \geq X \geq R_1, S_1 \text{ avec } \|R_1\| \leq \|R\| \lessdot 1 \quad (**) \text{ et } \|S_1\| \lessdot 1 \tag{4.0.11}$$

On a donc réduit le problème au cas où $0 \leq R, S \in B_P(H)$, $\|R\| \lessdot 1$ et $\|S_1\| \lessdot 1$.

Si $n \geq 1$,on pose

$$E_n = \bigcup_{k \leq n} \left[\ker(\lambda_k(S) I - S) + \ker(\lambda_k(R) I - R) \right]. \tag{4.0.12}$$

Décomposons R et S par rapport à la somme directe orthogonal $H = E_n \oplus E_n^{\perp}$:

$$R = \begin{bmatrix} R_n^{'} & U_n \\ U_n^* & R_n^{''} \end{bmatrix} \text{ et } S = \begin{bmatrix} S_n^{'} & V_n \\ V_n^* & S_n^{''} \end{bmatrix}. \tag{4.0.13}$$

On cherche T de la forme :

$$T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & X_n \end{bmatrix} \tag{4.0.14}$$

Donc

$$\begin{aligned} X_n &\geq R_n^{''} + U_n^* \left(I - R_n^{'}\right)^{-1} U_n \qquad (4.0.15) \\ X_n &\geq S_n^{''} + V_n^* \left(I - S_n^{'}\right)^{-1} V_n \\ X_n &\leq I \end{aligned}$$

Posons

$$Y_n = R_n^{''} + S_n^{''} + U_n^* \left(I - R_n^{'}\right)^{-1} U_n + V_n^* \left(I - S_n^{'}\right)^{-1} V_n, \tag{4.0.16}$$

On voit donc que $Y_n \geq 0$ et $Y_n \in B_P\left(E^{\perp}\right)$.

$$\begin{aligned} I - R_n^{'} &= P_n (I - R) P_n \qquad (4.0.17) \\ &\Longrightarrow I - R_n^{'} \geq (1 - \|R\|) I_{E_n} \\ &\Longrightarrow \left\|\left(I - R_n^{'}\right)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1 - \|R\|} \end{aligned}$$

De même pour S on trouve :

$$\left\|\left(I - S_n^{'}\right)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1 - \|S\|} \tag{4.0.18}$$

Où

$$\|Y_n\| \leq \left\|R_n^{''}\right\| + \left\|S_n^{''}\right\| + \frac{\|U_n\|^2}{1 - \|R\|} + \frac{\|V_n\|^2}{1 - \|S\|} \tag{4.0.19}$$

Comme $R = \begin{bmatrix} R_n^{'} & U_n \\ U_n^* & R_n^{''} \end{bmatrix} \geq 0$,On trouve $|\langle U_n y \mid x \rangle|^2 \leq \left\langle R_n^{'} x \mid x \right\rangle \left\langle R_n^{''} y \mid y \right\rangle$, pour tout $(x, y) \in E_n \times E_n^{\perp}$, alors $\|U_n\| \leq \sqrt{\|R_n^{'}\|}\sqrt{\|R_n^{''}\|}$.

De même, on a $\|V_n\| \leq \sqrt{\|S_n'\|}\sqrt{\|S_n''\|}$.

D'où :

$$\begin{aligned} \|Y_n\| &\leq \left\|R_n''\right\| + \left\|S_n''\right\| + \frac{\|R_n'\| \, \|R_n''\|}{1-\|R\|} + \frac{\|S_n'\| \, \|S_n''\|}{1-\|S\|} \\ &\leq \lambda_{n+1}(R) + \lambda_{n+1}(S) + \frac{\lambda_{n+1}(R)}{1-\|R\|} + \frac{\lambda_{n+1}(S)}{1-\|S\|} \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned} \tag{4.0.20}$$

Alors :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \|Y_n\| = 0. \tag{4.0.21}$$

Donc pour terminé la preuve du théorème il suffit de choisir n tel que $\|Y_n\| \leq 1$ et de poser $X_n = Y_n$. □

4.1 Application

Objectif : On veut chercher le majorant minimal de deux projecteurs S et R, selon l'algorithme donné par le theorème précédent.

Soient S et R deux projecteurs.

On décompose R sur $H = E \oplus E^{\perp}$ où $E = \ker(I - R)$.

On a $R = \begin{bmatrix} I_E & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ car les valeurs propres de R sont 0 et 1 .

Et on décompose S selon la même décomposition orthogonale sur $H = E \oplus E^{\perp}$

On a $S = \begin{bmatrix} A & L \\ L^* & B \end{bmatrix}$,et utilisant le fait que S est un projecteur, c'est-à-dire $S = S^2 = S^*$ on obtient :

$$\begin{aligned} S &= S^2 \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} A & L \\ L^* & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & L \\ L^* & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & L \\ L^* & B \end{bmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} A & L \\ L^* & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^2+LL^* & AL+LB \\ L^*A+BL^* & L^*L+B^2 \end{bmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

$$A = A^2 + LL^* \tag{4.1.2}$$

$$L = AL + LB \tag{4.1.3}$$

$$L^* = L^*A + BL^* \tag{4.1.4}$$

$$B = L^*L + B^2 \tag{4.1.5}$$

On distingue deux cas :

(1) : si L est réel positif c'est-à-dire le cas où l'on peut identifier $E^{\perp}$ à E :

Alors :

$$\begin{aligned} A &= A^2 + LL^* & (4.1.6)\\ L &= AL + LB & (4.1.7)\\ L^* &= L^*A + BL^* & (4.1.8)\\ B &= L^*L + B^2 & (4.1.9)\\ &\Longleftrightarrow & (4.1.10)\\ A(I-A) &= L^2 \qquad (1) & (4.1.11)\\ AL + LB &= L \qquad (2) &\\ LA + BL &= L \qquad (3) &\\ B(I-B) &= L^2 \qquad (4) & \end{aligned}$$

On aura de (1) et (4) nous donne

$$L = \sqrt{A(I-A)} = \sqrt{B(I-B)}. \tag{4.1.12}$$

Donc de (2) on trouve :

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{A(I-A)} = A\sqrt{A(I-A)} + \sqrt{B(I-B)}B \\ &\Leftrightarrow (I-A)\sqrt{A(I-A)} = \sqrt{B(I-B)}B \\ &\Leftrightarrow A^{\frac{1}{2}}(I-A)^{\frac{3}{2}} = (I-B)^{\frac{1}{2}}B^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Une solution est $B = (I-A)$.
Donc S est de la forme $S = \begin{bmatrix} A & \sqrt{A(I-A)} \\ \sqrt{A(I-A)} & I-A \end{bmatrix}$.
Et d'aprés le theorème on cherche T le majorant minimal qui de la forme $T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & X \end{bmatrix}$,ou $X = B + \lim\limits_{\varepsilon \longrightarrow 0} L^*\left[(1+\varepsilon)(I_E - A)\right]^{-1} L$.
On a :

$$\begin{aligned} X &= B + \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} L^*\left[(1+\varepsilon)(I_E - A)\right]^{-1} L \qquad (4.1.13)\\ &\Longrightarrow X = (I-A) + \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} A^{\frac{1}{2}}(I-A)^{\frac{1}{2}}\left[(1+\varepsilon)(I_E - A)\right]^{-1} A^{\frac{1}{2}}(I-A)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0} L^*\left[(1+\varepsilon)(I_E-A)\right]^{-1} L &= \lim_{\varepsilon\longrightarrow 0} A^{\frac{1}{2}}(I-A)^{\frac{1}{2}}\left[(1+\varepsilon)(I_E-A)\right]^{-1} A^{\frac{1}{2}}(I-A)^{\frac{1}{2}} \\ &= \lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\int\limits_0^1 \frac{t(1-t)}{(1+\varepsilon)-t}\, dE_t.\end{aligned}$$

Si on pose $f_\varepsilon(t)=\frac{t(1-t)}{(1+\varepsilon)-t}$, alors $f_\varepsilon(0)=f_\varepsilon(1)=0$.

De plus f_ε est une suite de fonction decroissante par rapport à ε.

D'aprés le theorème de convergence dominée (si $(f_n)_n \in \mathcal{L}^1$, f_n converge vers f pres que par tout et $\forall n\in\mathbb{N}$ $|f_n|\leq g$ pres que par tout ,$g\in\mathcal{L}^1$alors : $f\in\mathcal{L}^1$, $\lim\limits_n f_n\in\mathcal{L}^1$ et $\lim\limits_n \int\limits_D f_n dx=\int\limits_D \lim\limits_n f_n dx=\int\limits_D f dx$) on aura :

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\int\limits_0^1 \frac{t(1-t)}{(1+\varepsilon)-t}\, dE_t &= \int\limits_0^1 \lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\frac{t(1-t)}{(1+\varepsilon)-t}\, dE_t \\ &= \int\limits_0^1 t dE_t \\ &= A1_{([0,1[)} \\ &= A1_{[0,1[}.\end{aligned} \tag{4.1.14}$$

Finalement

$$\begin{aligned}X &= (I-A)+A1_{[0,1[} \\ &= I-A\left(I-1_{[0,1[}\right) \\ &= I-A.1_{(\{1\})}.\end{aligned}$$

Et $T=\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I-A.1_{(\{1\})}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I-1_{(\{1\})}\end{bmatrix}$.

Remarque 4.1.1 *$T^2=T$, donc on touve aussi un majorant qui est aussi un projecteur.*

(2) : si L est complexe :

$$\begin{aligned} A\left(I-A\right) &= \left|L\right|^2 & (i) \\ AL+LB &= L & (ii) \\ L^*A+BL^* &= L^* & (iii) \\ B\left(I-B\right) &= \left|L\right|^2 & (iiii) \end{aligned} \tag{4.1.15}$$

De (i) on obtient

$$\left|L\right| = \sqrt{A\left(I-A\right)} \tag{4.1.16}$$

D'autre part on a L est complexe , donc :

$$\begin{aligned} L &= \left|L\right|\exp i\theta \text{ et } L^* = \left|L\right|\exp\left(-i\theta\right) \\ &\Longrightarrow L = \sqrt{A\left(I-A\right)}\exp i\theta \text{ et } L^* = \sqrt{A\left(I-A\right)}\exp\left(-i\theta\right) \end{aligned} \tag{4.1.17}$$

D'une part de (i) et $(iiii)$ on a :

$A\left(I-A\right) = B\left(I-B\right)$, alors une solution est $B = I-A$.

Et alors S est de la forme $S = \begin{bmatrix} A & A^{\frac{1}{2}}\left(I-A\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left(i\theta\right) \\ A^{\frac{1}{2}}\left(I-A\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left(-i\theta\right) & I-A \end{bmatrix}$.

Et d'aprés le theorème on cherche T le majorant minimal qui de la forme $T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & X \end{bmatrix}$,ou $X = B + \lim\limits_{\varepsilon\longrightarrow 0} L^*\left[\left(1+\varepsilon\right)\left(I_E-A\right)\right]^{-1}L$.

On a :

$$\begin{aligned} X &= B + \lim_{\varepsilon\longrightarrow 0} L^*\left[\left(1+\varepsilon\right)\left(I_E-A\right)\right]^{-1}L \\ &\Longrightarrow X = \left(I-A\right) + \lim_{\varepsilon\longrightarrow 0} A^{\frac{1}{2}}\left(I-A\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left(-i\theta\right)\left[\left(1+\varepsilon\right)\left(I_E-A\right)\right]^{-1}A^{\frac{1}{2}}\left(I-A\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left(i\theta\right). \end{aligned} \tag{4.1.18}$$

Or :

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon\longrightarrow 0} L^*\left[\left(1+\varepsilon\right)\left(I_E-A\right)\right]^{-1}L &= \lim_{\varepsilon\longrightarrow 0} A^{\frac{1}{2}}\left(I-A\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left(-i\theta\right)\left[\left(1+\varepsilon\right)\left(I_E-A\right)\right]^{-1}A^{\frac{1}{2}}\left(I-A\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left(i\theta\right) \\ &= \lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\int_0^1 \frac{t\left(1-t\right)}{\left(1+\varepsilon\right)-t}\,dE_t. \end{aligned}$$

Finalement on trouve le même resultat de (1).

CONCLUSION

Le theorème principal présenté dans ce travail nous donne une methode exacte pour la recherche d'un majorant minimal de deux opérateurs positifs soumis a des contraintes. Ce qui nous permet d'avoir beaucoup d'applications : par exemple une estimation de la solution de l'équation

$$(R + S)\, u(t) = \vartheta(t)\,.$$

pour $R, S \leq I$.

Bibliographie

[1] T.k.Bacha, Recherche de l'ensemble des majorants minimaux de deux opérateurs positifs, memoire de master (2014).

[2] B.P.Rynne and M.A.Youngson,Linear functional analysis,second edition,Springer-Verlag London Limited (2008).

[3] G. Cassier, M. Ould Ali, On the set of upper bounds for a finite family of self-adjoint operators . prépublication hal-00980617, (2016), 1-14.

[4] C. Akemann and N. Weaver, Minimal upper bounds of commuting operators, Proc. Amer. Math. Soc,124, 1996, 3469-3476.

[5] A. Aslanov, Existence of the Minimum and Maximum of Two Self-Adjoint Operators, Mathematica Balkanica , New Series ; Vol.19, 2005, Fasc3-4, 255-265