REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS DE MOSTAGANEM

FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE

Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'étude

Pour l'obtention du diplôme de MASTER

Spécialité: Mathématiques

Option: Analyse Fonctionnelle

THEME

Croissance des solutions des équations différentielles du troisième ordre

Soutenu le : 26 juin 2012

Présenté par

Melle : Fatima ATTIA

Devant le jury :

Mr Benharrat BELAÏDI	**Professeur**	Université de Mostaganem	Encadreur.
Mr Ahmed MEDEGHRI	**Professeur**	Université de Mostaganem	Président.
Mme Hafida BENDAHMANE	**M.A**	Université de Mostaganem	Examinatrice.

Année universitaire : 2011/2012

Remerciements

Merci Mon Dieu pour cet accomplissement honorable et fatidique.

Mes remerciements les plus chaleureux vont à mes parents qui n'ont jamais cessé de croire en moi, m'ont soutenue et tant donné..

Je tiens aussi à exprimer toute ma reconnaissance et toute ma gratitude envers mon Professeur Monsieur

Benharrat BELAIDI, pour avoir encadré ce travail et pour la confiance qu'il m'a accordée.

Mes remerciements s'étendent également à Monsieur.Ahmed MEDEGHRI, Professeur à l'université de Mostaganem, qui me fera l'honneur de présider le jury d'examination de mon mémoire.

Je remercie avec autant de ferveur Mme Hafida BENDAHMANE, qui a toujours cru en moi, soutenu et encouragé et qui a bien voulu accepter d'examiner ce modeste travail.

Je remercie également l'ensemble professoral ayant contribué , de près ou de loin, à ma formation et mon évolution.

Je n'oublie pas de remercier mes collègues de la promotion $2^{ème}$ année Mathématiques-Master et un remerciement vif et chaleureux pour Mlle Rabab BOUABDELLI pour l'aide inestimable, la générosité débordante et la gentillesse inouîe qu'elle a eu à mon égard.

Je tiens à remercier tout particulièrement et à témoigner toute ma reconnaissance aux lumignons de mon coeur : Halla, Zara, Alice, Atika, Imène, Salima, Mimicha, Mimoussa, Many et Yacine pour leur amour, leur soutien et tout ce qu'ils m'ont fait vivre et apportée.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Les équations différentielles linéaires dans le domaine complexe sont un secteur des Mathématiques admettant plusieurs approches. Parmi ces approches, la théorie locale est peut-être la plus étudiée. Ses résultats de base : Le Théorème d'existence et d'unicité, la structure linéaire de base des solutions, la singularité, etc. Ces résultats nous sont familiers et nous aident à mieux comprendre notre approche. Cette dernière est différente, elle se trouve dans la théorie des fonctions. C'est l'application de la théorie de la distribution des valeurs des fonctions méromorphes qui nous donne un aperçu sur les propriétés des solutions des équations différentielles. Cette direction, fondée par le célèbre mathématicien Rolph Nevanlinna, est apparue à partir de 1929 (Voir [17]). Le premier qui a effectué des études systématiques sur les applications de la théorie de Nevanlinna sur les équations complexes, est H. Wittich dès 1942 (Voir [17]).Actuellement, la théorie globale des équations différentielles complexes en liaison avec la théorie de Nevanlinna est devenue beaucoup plus utilisée. Pendant les trois dernières décennies, plusieurs groupes actifs de mathématiciens dans divers pays ont joué un rôle remarquable dans ce domaine. Des résultats importants ont été établis. Cette théorie représente, à présent, un outil indispensable dans l'étude des propriétés des solutions des équations différentielles complexes. Notre travail de recherche portera sur l'ordre de croissance ainsi que l'hyper ordre des solutions d'équations différentielles d'ordre 3.D'abord un bref historique. Pour l'équation différentielle de deuxième ordre

$$f'' + e^{-z} f' + A(z) f = 0, \tag{1}$$

où $A(z)$ $(\not\equiv 0)$ est une fonction entière d'ordre fini. Toute solution de l'équation (1) est une fonction entière. De plus, si f_1, f_2 sont deux solutions méromorphes linéairement indépendantes de (1), il y a au moins une des solutions f_1, f_2 qui doit être d'ordre infini (Voir[9]). De là, la plupart des solutions de (1) auront l'ordre infini. Nous posons la question : Quelle condition sur $A(z)$ garantira que chaque solution $f \not\equiv 0$ de l'équation (1) est d'ordre infini ? Plusieurs auteurs tels que : B. Belaidi, M. Frei, M. Ozawa,G. Gundersen, J. K. Langley, I. Amemiya et M. Ozawa ont étudié ce problème pour le cas où $A(z)$ est une fonction entière transcendante ou un polynôme non constant. Ils ont prouvé qu'avec l'ordre $\sigma(A(z)) \neq 1$, chaque solution $f \not\equiv 0$ de l'équation (1) est d'ordre infini. Gundersen a montré dans [9, p.419] que si $degP(z) \neq degQ(z)$ pour l'équation différentielle

$$f'' + A_1(z)e^{P(z)}f' + A_0(z)e^{Q(z)}f = 0, \tag{2}$$

où $P(z), Q(z)$ sont des polynômes non constants et $A_1(z), A_0(z)$ $(\not\equiv 0)$ sont des fonctions entières telles que $\sigma(A_1) < degP(z), \sigma(A_0) < degQ(z)$, alors chaque solution non constante de (2) est d'ordre infini.Si $\sigma(A(z)) = 1$ dans l'équation (1) ou $degP(z) = degQ(z)$ dans (2), on peut avoir des solutions non constantes d'ordre fini. Par exemple $f(z) = e^z + 2$ satisfait l'équation

$$f'' + \frac{1}{2}e^z f' - \frac{1}{2}e^z f = 0.$$

Naturellement, la question qui se pose est : Quelles conditions sur $A(z)$ quand $\sigma(A(z)) = 1$ (quand $degP(z) = degQ(z)$) garantiront que chaque solution de (1) (de (2)) soit d'ordre infini ? K. H. Kwon [15], a examiné le cas où $degP(z) = degQ(z)$ pour l'équation (2). Il a démontré que si $P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0, Q(z) = b_n z^n + b_{n-1}z^{n-1} + ... + b_1 z + b_0$, sont deux polynômes non constants,tels que $a_n b_n \neq 0$ et $\arg(a_n) \neq \arg(b_n)$ ou $a_n = cb_n\,(0 < c < 1)$, alors toute solution $f \not\equiv 0$ de l'équation (2) est d'ordre infini.Z. X. Chen [4, Théorème 3] a étudié ce problème sur l'équation différentielle linéaire de deuxième ordre

$$f'' + e^{az}f' + Q(z)f = 0 \tag{3}$$

,où $Q(z) = A_0(z)e^{bz}$ est un polynôme non constant avec $a \neq b$ et $A_0(z)$ $(\not\equiv 0)$ est un polynôme. Il a trouvé que chaque solution $(f \not\equiv 0)$ de (3) est d'ordre infini.Dans [6] Z. X. Chen et K. H.

Shon étudièrent le problème pour l'équation

$$f'' + A_1(z)e^{az}f' + A_0(z)e^{bz}f = 0, \tag{4}$$

où $A_1(z)$, $A_0(z)$ $(\not\equiv 0)$ sont des fonctions méromorphes telles que $\sigma(A_i) < 1$ et $\arg a \neq \arg b$ ou $a = cb$ $(0 < c < 1)$. Ils ont montré que toute solution méromorphe $(f \not\equiv 0)$ de (4) est d'ordre infini.Le second chapitre de ce mémoire est consacré aux notions préliminaires que sont les définitions propres aux éléments de la théorie de R.Nevanlinna tels que la fonction caractéristique de R.Nevanlinna, l'ordre de croissance d'une fonction, l'hyper ordre et aux éléments de la théorie de Wiman-Valiron dont on retient l'indice central. On poursuit avec les lemmes utilisés par la suite dans les démonstartions des théorèmes présentés. Quant au troisième chapitre, on y expose les Théorèmes de Frei[7], Langley[16] et Chen[4] sous forme d'une introduction relatant quelques caractéristiques des équations différentielles d'ordre 2, suivis par les résultats améliorant ces derniers et qu'on résume dans le fait que sous certaines conditions précises, un certain nombre de solutions de l'équation différentielle de troisième ordre suivante

$$f''' + h_2e^{-z}f'' + h_1e^{z}f' + h_0f = F \tag{5}$$

est d'ordre infini et a un hyper ordre $\sigma_2(f) = 1$. Ces résultats seront prouvés et joins d'exemples illustratifs.

Chapitre 2

Notions préliminaires

Dans ce chapitre, nous allons citer des définitions indispensables. On en distingue essentiellement les éléments de la théorie de R. Nevanlinna ainsi que ceux de la théorie de Wiman.Valiron.

2.1 Eléments de la théorie de R. Nevanlinna

Définition 2.1.1 (Fonction caractéristique de R. Nevanlinna) *Soit f une fonction méromorphe non constante et a un nombre complexe ou $a = \infty$. Alors, on définit $m(r, a, f)$ la fonction de proximité de la fonction f au point a par*

$$m(r,a,f) = m(r, \frac{1}{f-a}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta}) - a|} d\theta \ si \ a \neq \infty,$$

$$m(r,\infty,f) = m(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \left|f(re^{i\theta})\right| d\theta \ si \ a = \infty,$$

où $\ln^+ x = \max(0, \ln x)$ pour $x > 0$.

Et on définit $N(r, a, f)$ la fonction $a-$points de la fonction f dans le disque $|z| \leq r$ par

$$N(r,a,f) = N(r, \frac{1}{f-a}) = \int_0^r \frac{n(t,a,f) - n(0,a,f)}{t} dt + n(0,a,f)\ln r \ si \ a \neq \infty,$$

$$N(r,\infty,f) = N(r,f) = \int_0^r \frac{n(t,\infty,f) - n(0,\infty,f)}{t} dt + n(0,\infty,f)\ln r \ si \ a = \infty,$$

et

$$\overline{N}(r,a,f) = \overline{N}(r, \frac{1}{f-a}) = \int_0^r \frac{\overline{n}(t,a,f) - \overline{n}(0,a,f)}{t} dt + \overline{n}(0,a,f)\ln r \ si \ a \neq \infty,$$

$$\overline{N}(r,\infty,f)=\overline{N}(r,f)=\int_0^r \frac{\overline{n}(t,\infty,f)-\overline{n}(0,\infty,f)}{t}dt+\overline{n}(0,\infty,f)\ln r \;\; si\ a=\infty,$$

où :

$n(t,a,f)$ *désigne le nombre des zéros de l'équation* $f(z)=a$ *dans le disque* $|z|\leq t$ *, chaque racine étant comptée avec son ordre de multiplicité ;*

$n(t,\infty,f)$ *désigne le nombre des pôles de la fonction* $f(z)$ *dans le disque* $|z|\leq t$ *, chaque pôle étant compté avec son ordre de multiplicité ;*

$\overline{n}(t,a,f)$ *désigne le nombre des zéros distincts de l'équation* $f(z)=a$ *dans le disque* $|z|\leq t$ *;*

et :

$\overline{n}(t,\infty,f)$ *désigne le nombre des pôles distincts de la fonction* $f(z)$ *dans le disque* $|z|\leq t$*.*

On pose : $N(r,\infty,f)=N(r,f)$ *et* $m(r,\infty,f)=m(r,f)$*.*

On définit $T(r,f)$ *la fonction caractéristique de R. Nevanlinna de la fonction* f *par*

$$T(r,f)=m(r,f)+N(r,f).$$

Théorème 2.1.1 (Premier théorème fondamental de R. Nevanlinna) *Soit* f *une fonction méromorphe non constante. Alors pour tout nombre complexe* a*, on a*

$$m(r,a,f)+N(r,a,f)=T(r,f)+\varepsilon(r,a),$$

où $\varepsilon(r,a)=O(1)\ (r\to\infty)$*.*

Définition 2.1.2 (L'ordre et l'hyper ordre) *Soit* f *une fonction méromorphe. On définit l'ordre* $\sigma(f)$ *de la fonction* f *par*

$$\sigma(f)=\limsup_{r\to+\infty}\frac{\log T(r,f)}{\log r},$$

et on définit l'hyper ordre $\sigma_2(f)$ *de la fonction* f *par*

$$\sigma_2(f)=\limsup_{r\to+\infty}\frac{\log\log T(r,f)}{\log r}.$$

Exemple1.1.1

i) Soit $f(z) = e^z$. Nous avons $n(t, f) = 0$ car f n'admets pas de pôles, par conséquent

$$N(r, f) = 0.$$

De plus

$$\begin{aligned} m(r,f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \left|e^{r\cos\theta}\right| d\theta \\ m(r,f) &= \frac{1}{2\pi}(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (r\cos\theta)\, d\theta + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} (r\cos\theta)\, d\theta) = \frac{r}{2\pi}(1+1) = \frac{r}{\pi}. \end{aligned}$$

Donc

$$T(r, f) = \frac{r}{\pi}.$$

D'où

$$\sigma\left(e^z\right) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log T(r,f)}{\log r} = 1.$$

ii) Soient $P(z) = az^p + ...$un polynôme de degré $p > 0$ et $f(z) = e^{p(z)}$, alors

$$T(r,f) \sim \frac{|a|}{\pi} r^p \, (r \to \infty)\, ;$$

D'où

$$\sigma\left(e^{P(z)}\right) = p,$$

$$\sigma\left(e^{z^2}\right) = 2, \sigma\left(e^{z^3+2z^2-1}\right) = 3.$$

iii) Soit $f(z) = \exp\left(e^z\right)$, alors $([12, p.84, Lemma 4.3])$

$$T(r,f) \sim \frac{e^z}{\left(2\pi^3 r\right)^{\frac{1}{3}}} \, (\text{quand } r \to \infty)\, .$$

D'où

$$\sigma\left(e^{e^z}\right) = \infty.$$

Exemple 1.1.2

$$\sigma_2\left(e^z\right) = 0, \;\; \sigma_2\left(\exp\left(e^z\right)\right) = 1, \;\; \sigma_2\left(\exp\left(e^{z^2}\right)\right) = 2.$$

Définition 2.1.3 (La mesure linéaire et la mesure logarithmique) *Supposons que* $E \subset [1, +\infty)$, *on désigne par* $m(E)$ *la mesure linéaire de l'ensemble* E *et par* $lm(E)$ *la mesure logarithmique de l'ensemble* E, *avec*

$$m(E) = \int_1^{+\infty} \chi_E(t)dt,$$

et

$$lm(E) = \int_1^{+\infty} \frac{\chi_E(t)}{t}dt,$$

où $\chi_E(t)$ *est la fonction caractéristique de l'ensemble* E.

Exemple 1.1.3

i) La mesure linéaire de l'ensemble $E = [1, e] \subset [1, +\infty)$ est

$$m(E) = \int_1^{+\infty} \chi_E(t)dt = \int_1^{e} dt = e - 1$$

ii) La mesure logarithmique de l'ensemble $E = [1, e^3] \subset [1, +\infty)$ est

$$lm(E) = \int_1^{+\infty} \frac{\chi_E(t)}{t}dt = \int_1^{e^3} \frac{dt}{t} = 3.$$

iii) La mesure linéaire d'un ensemble fini E est nulle, $m(E) = 0$.

2.2 Eléments de la théorie de Wiman-Valiron

Définition 2.2.1 (L'indice central) *Soit* $f(z) = \sum\limits_{n \geq 0} a_n r^n$ *une fonction entière. Pour tout* $r > 0$ *la série* $\sum\limits_{n \geq 0} |a_n| r^n$ *est convergente. D'où* $\lim\limits_{n \to +\infty} |a_n| r^n = 0$ *et le terme maximal* $\mu(r, f) = \{\max |a_n| r^n, n \in \mathbb{N}\}$ *est bien défini.*

On définit l'indice central par

$$\nu(r, f) = \max \{m : |a_m| r^m = \mu(r, f)\}$$

Exemple 1.2.1

Soit $P(z) = a_n z^n + ... + a_0, a_n \neq 0$

Alors, $\mu(r, P) = \max \{|a_j| r^j : j = 0, 1..., n\} = |a_n| r^n$, r assez grand. Et par conséquent

$$\nu(r, P) = \max \{m : |a_m| r^m = |a_n| r^n\} = n.$$

Lemme 2.2.1 *Soit $\nu(r)$ l'indice central de f. Alors*

i)

$$\log \mu(r) = \log |a_0| + \int_0^r \frac{\nu(t)}{t} dt, \qquad a_0 \neq 0,$$

ii) Pour $r < R$,

$$M(r, f) < \mu(r) \left\{ v(R) + \frac{R}{R-r} \right\}.$$

2.3 Lemmes préliminaires

Dans cette partie du Chapitre 1, nous présentons des lemmes nécessaires aux démonstrations des théorèmes données dans le chapitre suivant.

Lemme 2.3.1 *([10]) Soit f une fonction méromorphe et transcendante avec $\sigma(f) = \sigma < \infty$, $H = \{(k_1, j_1), (k_2, j_2), ..., (k_q, j_q)\}$ un ensemble fini de paires d'entiers distinctes vérifiant $k_i > j_i \geq 0$, pour $i = 1, ..., q$. Et soit $\varepsilon > 0$ une constante donnée. Alors il existe un ensemble $E \subset [0, 2\pi)$ ayant une mesure linéaire nulle, tel que si $\psi \in [0, 2\pi) \backslash E$, alors il existe une constante $R_0 = R_0(\psi) > 1$ telle que pour tout z vérifiant $\arg z = \psi$ et $|z| \geq R_0$ et pour tout $(k, j) \in H$, on a*

$$\left| \frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)} \right| \leq |z|^{(k-j)(\sigma-1+\varepsilon)}. \tag{2.3.1}$$

Lemme 2.3.2 *([5]) Considérons $h(z)e^{z}$ et $h(z)e^{-z}$, où h est une fonction entière non nulle avec $\sigma(h) = a < 1$, $z = re^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi)$. Alors, pour tout ε donné $(0 < \varepsilon < 1 - a)$, il existe un ensemble $E \subset [0, 2\pi)$ ayant une mesure linéaire nulle, et pour r suffisamment grand on aura*

i) Si $\theta \in \left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)\right) \backslash E$, alors

$$\exp\{(1-\varepsilon) r \cos\theta\} \leq \left| h e^{re^{i\theta}} \right| \leq \exp\{(1+\varepsilon) r \cos\theta\}, \tag{2.3.2}$$

$$\exp\{(1+\varepsilon) r (-\cos\theta)\} \leq \left| h e^{-re^{i\theta}} \right| \leq \exp\{(1-\varepsilon) r (-\cos\theta)\}, \tag{2.3.3}$$

ii) Si $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \backslash E$, alors

$$\exp\{(1+\varepsilon) r \cos\theta\} \leq \left| h e^{re^{i\theta}} \right| \leq \exp\{(1-\varepsilon) r \cos\theta\}, \tag{2.3.4}$$

$$\exp\{(1-\varepsilon) r (-\cos\theta)\} \leq \left| h e^{-re^{i\theta}} \right| \leq \exp\{(1+\varepsilon) r (-\cos\theta)\}, \tag{2.3.5}$$

Preuve

Par (2.3.1), pour tout ε donné $(0<\varepsilon<1-a)$, il existe un ensemble $E\subset[0,2\pi)$ ayant une mesure linéaire nulle, tel que pour un $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\backslash E$, il existe un $R_0(\theta)>1$, et pour tout $z=re^{i\theta}$ vérifiant $r>R_0$, on a

$$\frac{h'\left(re^{i\theta}\right)}{h\left(re^{i\theta}\right)}\leq r^{a-1+\frac{\varepsilon}{2}}, \tag{2.3.6}$$

Prenons l'intégrale curviligne, $C=\{w:\arg w=\theta,R_0\leq|w|=t\leq r\}$, on a

$$\log h\left(re^{i\theta}\right)=\int_{R_0}^{r}\frac{h\prime\left(te^{i\theta}\right)}{h\left(te^{i\theta}\right)}e^{i\theta}dt+\log h\left(R_0e^{i\theta}\right). \tag{2.3.7}$$

Par (2.3.6) et (2.3.7) on obtient

$$\left|\log h\left(re^{i\theta}\right)\right|\leq Mr^{a+\frac{\varepsilon}{2}}+M\leq r^{a+\varepsilon},$$

Où $M>0$ est une constante, et

$$\left|\log\left|h\left(re^{i\theta}\right)\right|\right|\leq\left|\log h\left(re^{i\theta}\right)\right|\leq r^{a+\varepsilon},$$

D'où

$$\exp\left\{-r^{a+\varepsilon}\right\}\leq\left|h\left(re^{i\theta}\right)\right|\leq\exp\left\{r^{a+\varepsilon}\right\}. \tag{2.3.8}$$

Par $|e^z|=e^{r\cos\theta}$ et (2.3.8), on obtient

$$\exp\left\{-r^{a+\varepsilon}+r\cos\theta\right\}\leq\left|h\left(re^{i\theta}\right)e^{re^{i\theta}}\right|\leq\exp\left\{r^{a+\varepsilon}+r\cos\theta\right\}. \tag{2.3.9}$$

Si $\theta\in(\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right))\backslash E$, alors $\cos\theta>0$, par $0<\varepsilon<1-a$ et (2.3.9), on sait que (2.3.2) est vérifiée pour r suffisamment grand.

En utilisant la même preuve ci dessus , on trouve que (2.3.3) est vérifiée ainsi que (2.3.4) et (2.3.5) de (ii).

Lemme 2.3.3 *([5]) Soit $f(z)$ une fonction entière.Si $\left|f^{(k)}(z)\right|$ est non borné sur le rayon $\arg z=\theta$, alors il existe une suite infinie de points $z_n=r_ne^{i\theta}\,(n=1,2,...)$, où $r_n\to\infty$, tel que $f^{(k)}(z_n)\to\infty$ et*

$$\left|\frac{f^{(j)}(z_n)}{f^{(k)}(z_n)}\right|\leq|z_n|^{k-j}(1+o(1))(j=0,...,k-1). \tag{2.3.10}$$

Preuve

Posons $M(r,\theta,f^{(k)}) = \max\left\{\left|f^{(k)}(z)\right| : |z| \leq r, \arg z = \theta\right\}$. Alors, il existe une suite infinie de points $z_n = r_n e^{i\theta}$, $r_n \to \infty$ telle que pour tout n, on a $M(r_n,\theta,f^{(k)}) = \left|f^{(k)}(z_n)\right| \to \infty$ quand $n \to +\infty$. Pour tout n, par $(k-j)$ intégrations itérées le long du segment $L_1 : z = re^{i\theta}, 0 \leq r \leq |z_n|$

$$f^{(j)}(z_n) = f^{(j)}(0) + f^{(j+1)}(0)\frac{z_n}{1!} + ... + \frac{1}{(k-j-1)!}f^{(k-1)}(0)\, z_n^{k-j-1} + \int_0^{z_n} ... \int_0^{z_n} f^{(k)}(t)\, dt.$$

Par suite, en utilisant l'inégalité triangulaire et l'estimation $\left|f^{(k)}(z)\right| \leq \left|f^{(k)}(z_n)\right|$ sur le segment L_1 on obtient

$$\left|f^{(j)}(z_n)\right| \leq \left|f^{(j)}(0)\right| + \left|f^{(j+1)}(0)\right| |z_n| + ... + \frac{1}{(k-j-1)!}\left|f^{(k-1)}(0)\right| |z_n|^{k-j-1} + \frac{1}{(k-j)!}\left|f^{(k)}(z_n)\right| |z_n|^{k-j}.$$

D'où, on aura pour $z_n \to \infty$

$$\left|\frac{f^{(j)}(z_n)}{f^{(k)}(z_n)}\right| \leq \frac{1}{(k-j)!}(1+o(1))\,|z_n|^{k-j} \qquad (j = 0, ..., k-1).$$

Lemme 2.3.4 *([15,p 214]) Soit $f(z)$ une fonction analytique dans la région*

$$D = \{z/\alpha < \arg z < \beta,\ r_0 < |z| < \infty\},$$

et continue sur $\overline{D} = D \cup C$ (C est la frontière de D). Si pour tout ε donné assez petit, $\varepsilon > 0$, il existe $R(\varepsilon) > 0$ tel que pour $|z| \geq R(\varepsilon), z \in D$, on a

$$|f(z)| < \exp\left\{\varepsilon\, |z|^{\frac{\pi}{\beta-\alpha}}\right\},$$

et pour $z \in C$ on a

$$|f(z)| \leq M \quad (M > 0 \text{ est une constante}).$$

Alors $|f(z)| \leq M$ est vérifiée pour tout $z \in D$.

Lemme 2.3.5 *([5]) Soit $f(z)$ une fonction entière avec $\sigma(f) = \sigma < \infty$. Avec un ensemble $E \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle tel que pour tout rayon $\arg z = \theta_0 \in [0, 2\pi) \setminus E$, $\left|f(re^{i\theta_0})\right| \leq Mr^k$ ($M = M(\theta_0) > 0$ est une constante, $k (> 0)$ est une constante indépendante de θ_0), alors $f(z)$ est un polynôme et $\deg f \leq k$.*

Preuve

Comme E est de mesure linéaire nulle, on peut choisir les points $\theta_j \in [0, 2\pi) \backslash E$ $(j = 1, ..., n, n+1)$ tels que

$$0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq ... \leq \theta_n \leq 2\pi, \theta_{n+1} = \theta_1 + 2\pi,$$

et

$$\max \{\theta_{j+1} - \theta_j \backslash 1 \leq j \leq n\} < \frac{\pi}{\sigma + 1},$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ donné, par $\sigma(f) = \sigma$, il existe $R(\varepsilon) > 0$ tel que $\left|\frac{f(z)}{z^k}\right| \leq \exp\left\{\varepsilon |z|^{\sigma+1}\right\}$. Dans les secteurs $H_j = \{z \backslash \theta_j \leq \arg z \leq \theta_{j+1}, |z| \geq R\}$ $(j = 1, ..., n)$,

$$\left|\frac{f(z)}{z^k}\right| \leq \exp\left\{\varepsilon |z|^{\overline{(\theta_{j+1}-\theta_j)}^{\pi}}\right\},$$

est vérifiée, et sur les rayons $\arg z = \theta_j, \theta_{j+1}$,

$$\left|\frac{f(z)}{z^k}\right| \leq M,$$

est vérifiée.

Par le Lemme 2.3.4, on a $\left|\frac{f(z)}{z^k}\right| \leq M$ est vérifiée sur tout H_j, d'où $|f(z)| \leq M |z|^k$ est vérifiée sur tout le plan. Donc, $f(z)$ est un polynôme avec $\deg f \leq k$.

Lemme 2.3.6 *([10]) Soit f une fonction transcendante méromorphe et soit $\alpha > 1$ une constante donnée. Alors il existe un ensemble $E \subset (1, +\infty)$ ayant une mesure logarithmique finie et une constante $\beta > 0$ qui dépend seulement de α et (m, n) $(m, n \in \{0, ..., k\}$, et $m < n)$ tels que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin [0, 1] \cup E$, on a*

$$\left|\frac{f^{(n)}(z)}{f^{(m)}(z)}\right| \leq \beta \left(\frac{T(\alpha r, f)}{r} (\log^\alpha r) \log T(\alpha r, f)\right)^{n-m}. \tag{2.3.11}$$

Lemme 2.3.7 *([3]) Soit $g(z)$ une fonction entière d'ordre infini avec l'hyper ordre $\sigma_2(g) = \sigma$, et $\nu(r)$ l'indice central de g, alors*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log \log \nu(r)}{\log r} = \sigma_2(g) = \sigma.$$

Preuve

Posons $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. On peut supposer, sans perte de généralité, que $|a_0| \neq 0$.
Par (i) du Lemme 2.2.1, le terme maximal $\mu(r)$ de g vérifie

$$\log \mu(2r) = \log |a_0| + \int_0^{2r} \frac{\nu(t)}{t} dt \geq \log |a_0| + \nu(r) \log 2. \tag{2.3.12}$$

Par l'inégalité de Cauchy, on obtient

$$\mu(2r) \leq M(2r, g). \tag{2.3.13}$$

Cela et (2.3.12)engendrent

$$\nu(r) \log 2 \leq \log M(2r, g) + C, \tag{2.3.14}$$

où C $(C > 0)$ est une constante. On en déduit

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log \log \nu(r)}{\log r} \leq \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log \log \log M(r, g)}{\log r} = \sigma_2(g) = \sigma. \tag{2.3.15}$$

Par ailleurs, par (ii) du Lemme 2.2.1 , on a

$$M(r, g) < \mu(r) \{v(2r) + 2\} = \left|a_{v(r)}\right| r^{v(r)} \{v(2r) + 2\}. \tag{2.3.16}$$

D'où

$$\begin{aligned} \log M(r, g) &\leq v(r) \log r + \log v(2r) + C_1, \\ \log \log M(r, g) &\leq \log v(r) + \log \log v(2r) + \log \log r + C_2 \\ &\leq \log v(2r) \left[1 + \frac{\log \log v(2r)}{\log v(2r)}\right] + \log \log r + C_3, \end{aligned} \tag{2.3.17}$$

où $C_j (> 0)$ $(j = 1, 2, 3)$ sont des constantes. Ainsi

$$\sigma_2(g) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log \log \log M(r, g)}{\log r} \leq \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log \log \nu(2r)}{\log 2r} = \frac{\log \log \nu(r)}{\log r}. \tag{2.3.18}$$

Le lemme résulte de (2.3.15) et (2.3.18).

Lemme 2.3.8 *([5]) Soit $f(z)$ une fonction entière avec $\sigma(f) = \infty$ et $\sigma_2(f) = \alpha < +\infty$, soit un ensemble $E \subset [1, +\infty)$ ayant une mesure logarithmique finie. Alors il existe une suite* *infinie de points* $\left\{z_k = r_k e^{i\theta_k}\right\}$ *tel que* $|f(z_k)| = M(r_k, f)$, $\theta_k \in [0, 2\pi)$, $\lim\limits_{r_k\to\infty} \theta_k = \theta_0 \in [0, 2\pi)$, $r_k \notin E, r_k \to \infty$, *et pour tout* $\varepsilon > 0$ *donné on a, pour* r_k *suffisamment grand*

$$\lim_{r_k\to\infty} \frac{\log \nu(r_k)}{\log r_k} = \infty, \tag{2.3.19}$$

$$\exp\left\{r_k^{\alpha-\varepsilon}\right\} < \nu(r_k) < \exp\left\{r_k^{\alpha+\varepsilon}\right\}, \tag{2.3.20}$$

où $\nu(r)$ *est l'indice central de* $f(z)$.

Preuve

Par le Lemme 2.3.7 et $\sigma_2(f) = \alpha$, on a

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log\log \nu(r)}{\log r} = \sigma_2(f) = \alpha < \infty.$$

Il existe une suite finie de points $\{r'_k\}$ $(r'_k \to \infty)$ vérifiant $\overline{\lim\limits_{r'_k\to\infty}} \frac{\log\log \nu(r'_k)}{\log r'_k} = \alpha$. Sachant que $lmE = \delta < \infty$, alors il existe un point $r_k \in [r'_k, (\delta+1) r'_k] \setminus E$.

Comme

$$\frac{\log\log \nu(r_k)}{\log r_k} \geq \frac{\log\log \nu(r'_k)}{\log\left[(\delta+1) r'_k\right]} = \frac{\log\log \nu(r'_k)}{\log r'_k \left[1 + \frac{\log(\delta+1)}{\log r'_k}\right]},$$

alors on a

$$\lim_{r_k\to\infty} \frac{\log\log \nu(r_k)}{\log r_k} = \alpha.$$

D'où (2.3.20) est vérifiée. Par (2.3.20), on sait que (2.3.19) est vérifiée.

On prend, à présent, $z_k = r_k e^{i\theta_k}, \theta_k \in [0, 2\pi)$ tel que $|f(z_k)| = M(r_k, f)$. Il existe une substitution $\left\{\theta_{k_j}\right\}$ de $\{\theta_k\}$ tel que $\lim\limits_{j\to\infty} \theta_k = \theta_0 \in [0, 2\pi)$.

Lemme 2.3.9 *([5]) Soit* $f(z)$ *une fonction entière transcendante. Alors il existe un ensmble* $E \subset (1, +\infty)$ *ayant une mesure logarithmique finie tel que pour* z *vérifiant* $|z| = r \notin [0, 1] \cup E$ *et* $|f(z)| = M(r, f)$, *on a*

$$\frac{f(z)}{f^{(s)}(z)} \leq 2r^s \,(s \in \mathbb{N}). \tag{2.3.21}$$

Preuve

De la théorie de Wiman-Valiron ([10, 11, 13, 16]), on a

$$\frac{f^{(s)}(z)}{f(z)} = \left(\frac{\nu(r)}{z}\right)^s (1 + o(1)). \tag{2.3.22}$$

où $|z| = r \notin [0,1] \cup E, E \subset (1, +\infty)$ est de mesure logarithmique finie tel que $|f(z)| = M(r, f)$ et $\nu(r)$ est l'indice central de $f(z)$. Comme f est transcendante, $\nu(r) \to \infty \, (r \to \infty)$.
D'où, pour z, $|z| = r \notin [0,1] \cup E$ et $|f(z)| = M(r, f)$, par (2.3.22) on obtient (2.3.21).

Lemme 2.3.10 *([5]) Soit $H_j \, (j = 0, 1, 2)$ une fonction entière avec $\sigma(H_j) \leq \sigma < \infty$. Si $f(z)$ est une solution de l'équation différentielle*

$$f''' + H_2 f'' + H_1 f' + H_0 f = 0, \tag{2.3.23}$$

alors $\sigma_2(f) \leq \sigma$.

Preuve

Soit f une solution de l'équation (2.3.23) alors

$$\frac{-f'''}{f} = H_2 \frac{f''}{f} + H_1 \frac{f'}{f} + H_0,$$

et

$$\left| \frac{-f'''}{f} \right| = \left| H_2 \frac{f''}{f} + H_1 \frac{f'}{f} + H_0 \right| \leq |H_2| \left| \frac{f''}{f} \right| + |H_1| \left| \frac{f'}{f} \right| + |H_0|.$$

Comme $\sigma(H_j) \leq \sigma < \infty$, alors

$$|H_j| \leq \exp\left\{ r^{\sigma+\varepsilon} \right\}, \quad (j = 0, 1, 2). \tag{2.3.24}$$

De (2.3.22) et (2.3.24), on obtient

$$\begin{aligned}
\left| \frac{v(r)}{r} \right|^3 &\leq 3e^{r^{\sigma+\varepsilon}} \left| \frac{v(r)}{r} \right|^2, \\
v(r) &\leq 3re^{r^{\sigma+\varepsilon}}, \\
\log\log \nu(r) &\leq \log\left[\log 3r + r^{\sigma+\varepsilon}\right], \\
\sigma_2(f) &= \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log\log \nu(r)}{\log r} \leq \sigma + \varepsilon,
\end{aligned}$$

$\varepsilon > 0$ étant arbitraire, on obtient

$$\sigma_2(f) \leq \sigma.$$

Chapitre 3

L'ordre et l'hyper ordre des solutions des équations différentielles linéaires d'ordre 3

3.1 Introduction

En 1962, $Frei$ étudia les équations différentielles d'ordre 2 et prouva le résultat suivant.

Théorème 3.1.1 *([7]) Si l'équation*

$$f'' + e^{-z} f' + Cf = 0. \tag{3.1.1}$$

où $C (\neq 0)$ est une constante complexe, admet une solution $f \not\equiv 0$ d'ordre fini, alors $C = -k^2$, où k est un entier positif. Inversement, pour tout entier positif k , l'équation avec $C = -k^2$ admet une solution f qui est polynômiale en e^z de degré k .

Amemiya & Ozawa[1] , Ozawa [19]et Gundersen[8] ont étudié le cas où $Q(z)$ est un polynôme particulier. Langley prouva le résultat suivant pour le cas où $Q(z)$ est un polynôme général.

Théorème 3.1.2 *([16]) Soit $Q(z)$ un polynôme non constant. Alors toutes les solutions non triviales de l'équation*

$$f'' + Ae^{-z} f' + Q(z) f = 0. \tag{3.1.2}$$

sont d'ordre infini, pour toute constante non nulle A.

On sait que la "majorité" des solutions des équations linéaires avec des coefficients fonctions transcendantes sont d'ordre infini. Ainsi, le problème de l'évaluation précise de la croissance des solutions ayant un ordre infini fut posé. Chen l'eut étudié et a obtenu le résultat suivant.

Théorème 3.1.3 *([4]) Soient, a un nombre complexe non nul, $Q(z)$ un polynôme non constant. Alors, toute solution $f(\not\equiv 0)$ de l'équation*

$$f'' + e^{az} f' + Q(z) f = 0. \tag{3.1.3}$$

a un ordre infini et $\sigma_2(f) = 1$.

3.2 Résultats

Dans cette partie, on étudiera l'ordre et l'hyper ordre des solutions des équations différentielles du troisième ordre, homogènes et non homogènes, en élaborant des résultats améliorant grandement ceux obtenus en $[4-9, 16, 19]$.

Théorème 3.2.1 *([5]) Soient h_1, h_2 deux fonctions entières non nulles avec $\sigma(h_j) < 1$ $(j = 1, 2)$, h_0 un polynôme non constant. Si F est une fonction entière avec $\sigma(F) < 1$, alors toute solution non constante de l'équation différentielle*

$$f''' + h_2 e^{-z} f'' + h_1 e^z f' + h_0 f = F \tag{3.2.1}$$

est d'ordre infini. De plus, si F est transcendante, ou $F \equiv 0$, alors toute solution non nulle de (3.2.1) a un ordre infini.

Théorème 3.2.2 *([5]) Soient h_1, h_2 deux polynômes non nuls, h_0 un polynôme non constant, F une fonction entière avec $\sigma(F) < 1$. Alors toute solution non constante de (3.2.1) est d'ordre infini et $\sigma_2(f) = 1$.*
De plus, si F est transcendante ou $F \equiv 0$, alors toute solution non nulle de (3.2.1) a un ordre infini et $\sigma_2(f) = 1$.

3.3 Preuve du Théorème 3.2.1

Pour commencer, on suppose que $f(z)$ est une solution transcendante de (3.2.1).

On sait que toute solution de cette équation est une fonction entière. On montre que $\sigma(f) = \infty$. Supposons le contraire, c'est à dire, $\sigma(f) = \sigma < \infty$.

Par le Lemme 2.3.1, il existe $E_1 \subset [0, 2\pi)$ ayant une mesure linéaire nulle tel que si $\theta \in [0, 2\pi) \setminus E_1$, alors il existe une constante $R = R(\theta) > 1$ telle que pour tout z vérifiant $\arg z = \theta$ et $|z| \geq R$, on a

$$\left| \frac{f^{(m)}(z)}{f^{(n)}(z)} \right| \leq |z|^M, (3 \geq m > n \geq 0), \tag{3.3.1}$$

où $M\ (> 0)$ est une constante.

Posons $\alpha = \max\{\sigma(h_1), \sigma(h_2), \sigma(F)\}$, alors $\alpha < 1$. Par le Lemme2.3.2, pour tout ε donné $(0 < 6\varepsilon < 1 - \alpha)$, il existe un ensemble $E_2 \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle, $z = re^{i\theta}$, tels que pour r suffisamment grand, on a

a) Si $\theta \in \left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)\right) \setminus E_2$, alors $h_1 e^z$ et $h_2 e^{-z}$ vérifient (2.3.2) et (2.3.3) respectivement ;

b) Si $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \setminus E_2$, alors $h_1 e^z$ et $h_2 e^{-z}$ vérifient (2.3.4) et (2.3.5) respectivement.

Maintenant pour tout $\theta \in \left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)\right) \setminus (E_1 \cup E_2)$, on a pour r suffisamment grand

$$\exp\{(1-\varepsilon) r \cos\theta\} \leq \left| h_1\left(re^{i\theta}\right) e^{re^{i\theta}} \right|, \tag{3.3.2}$$

$$\exp\{(1+\varepsilon) r(-\cos\theta)\} \geq \left| h_2\left(re^{i\theta}\right) e^{-re^{i\theta}} \right|. \tag{3.3.3}$$

Maintenant on démontre que $\left|f'\left(re^{i\theta}\right)\right|$ est borné sur le rayon $\arg z = \theta$. Si $\left|f'\left(re^{i\theta}\right)\right|$ est non borné sur le rayon $\arg z = \theta$, alors par le Lemme 2.3.3, il existe une suite infinie de points $z_q = r_q e^{i\theta} (q = 1, 2, ...)$ telle que lorsque $q \to \infty$, on ait $r_q \to \infty$, $f'(z_q) \to \infty$ et

$$\left| \frac{f(z_q)}{f'(z_q)} \right| \leq r_q (1 + o(1)). \tag{3.3.4}$$

Comme F est une fonction entière avec $\sigma(F) = \sigma$ et $f'(z_q) \to \infty$, on a, pour q suffisamment grand,

$$\left| \frac{F(z_q)}{f\prime(z_q)} \right| \leq |F(z_q)| \leq \exp\left\{r_q^{\sigma+\varepsilon}\right\}. \tag{3.3.5}$$

Substituant (3.3.1)-(3.3.5) dans (3.2.1), on obtient

$$\begin{aligned}
\exp\{(1-\varepsilon) r_q \cos\theta\} &\leq \left|h_1(z_q) e^{z_q}\right| \\
&\leq \left|\frac{f'''(z_q)}{f'(z_q)}\right| + \left|h_2(z_q) e^{-z_q} \frac{f''(z_q)}{f'(z_q)}\right| \\
&\quad + \left|h_0(z_q) \frac{f(z_q)}{f'(z_q)}\right| + \left|\frac{F(z_q)}{f'(z_q)}\right| \\
&\leq r_q^M + \exp\{(1+\varepsilon) r_q (-\cos\theta)\} |r_q|^M + r_q^M (1+o(1)) + \exp\left\{r_q^{\sigma+\varepsilon}\right\} \\
&\leq 3 r_q^M \exp\left\{r_q^{\sigma+\varepsilon}\right\} \qquad (3.3.6)
\end{aligned}$$

D'où

$$\exp\left\{\frac{1}{4} r_q \cos\theta\right\} \leq 3 r_q^M \text{ pour } q \text{ suffisamment grand.} \qquad (3.3.7)$$

D'où la contradiction.

Par conéquent $\left|f'\left(re^{i\theta}\right)\right| \leq M$ sur le rayon $\arg z = \theta \in \left([0, 2\pi) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)\right) \setminus (E_1 \cup E_2)$, on obtient facilement

$$\left|f(re^{i\theta})\right| \leq Mr^3. \qquad (3.3.8)$$

sur le rayon $\arg z = \theta$.

A présent, pour tout $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \setminus (E_1 \cup E_2)$, en utilisant le même raisonnement au dessus, on peut prouver que $\left|f''\left(re^{i\theta}\right)\right| \leq M$ est vérifiée sur le rayon $\arg z = \theta$. D'où (3.3.8) est vérifiée sur tout rayon $\arg z = \theta \in [0, 2\pi) \setminus \left(E_1 \cup E_2 \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)\right)$.

Comme $E_1 \cup E_2 \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ est de mesure linéaire nulle, par (3.3.8) et le Lemme1.3.5, on sait que $f(z)$ est polynômiale, ce qui contredit notre hypothèse.

On en déduit que $\sigma(f) = \infty$.

Maintenant on démontre que tout polynôme non constant ne peut être une solution de (3.2.1) .

Supposons que $f(z)$ est un polynôme non constant solution de (3.2.1) alors $\deg f \geq 1$, et $f'(z) \not\equiv 0$.

Pour tout $\theta_0 \in \left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)\right) \setminus (E_1 \cup E_2)$, $\cos\theta_0 > 0$.

Par le Lemme 2.3.2, on a, pour r suffisamment grand.

$$\begin{aligned}
\exp\{(1-\varepsilon)\, r\cos\theta_0\} &\le \left|h_1\left(re^{i\theta_0}\right)e^{re^{i\theta_0}}f'\left(re^{i\theta_0}\right)\right|, && (3.3.9)\\
\left|h_2\left(re^{i\theta_0}\right)e^{-re^{i\theta_0}}f''\left(re^{i\theta_0}\right)\right| &\le \exp\{(1+\varepsilon)\, r(-\cos\theta_0)\}\le 2, && (3.3.10)\\
\left|F\left(re^{i\theta_0}\right)\right| &\le \exp\left\{r^{\sigma+\varepsilon}\right\}, && (3.3.11)\\
\left|h_0\left(re^{i\theta_0}\right)f\left(re^{i\theta_0}\right)\right| &\le r^M. && (3.3.12)
\end{aligned}$$

Par (3.2.1) et (3.3.9)-(3.3.12), on obtient, pour r suffisemment large

$$\exp\{(1-\varepsilon)\, r\cos\theta_0\}\le r^M\exp\left\{r^{\sigma+\varepsilon}\right\}. \tag{3.3.13}$$

D'où, par (3.3.13) on a

$$\exp\left\{\frac{1}{4}r\cos\theta_0\right\}\le r^M,$$

pour r suffisamment grand.

Ce qui est une contradiction.

De plus, si F est transcendante ou $F\not\equiv 0$, f supposée être une solution constante non nulle de (3.2.1), alors le reste de (3.2.1) est un polynôme non nul $h_0 f$, ce qui est une contradiction.

3.4 Preuve du Théorème 3.2.2

Supposons que $f(z)$ est une solution non constante de (3.2.1).

Par le Théorème 3.2.1, on sait que $\sigma(f)=\infty$. Maintenant, on démontre que $\sigma_2(f)=1$.

Supposons que $\sigma_2(f)=\sigma<1$. Par le Lemme1.3.6 on sait qu'il existe un ensemble $E_3\subset(1,+\infty)$ de mesure logarithmique finie, et qu'il existe une constante $A>0$ telle que

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f^{(d)}(z)}\right|\le A\,(T(2r,f))^6 \qquad (3\ge j>d\ge 0), \tag{3.4.1}$$

est vérifiée pour $|z|=r\notin E_3$ et r suffisamment grand.

De la théorie de Wiman-Valiron([10, 11, 13, 16]), on a la formule basique suivante

$$\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}=\left(\frac{\nu(r)}{z}\right)^j(1+o(1)) \quad (j=1,2,3), \tag{3.4.2}$$

où z vérifie $|f(z)|=M(r,f)$, $|z|=r\notin[0,1]\cup E_4$, $E_4\subset(1,+\infty)$ est de mesure logarithmique finie, $\nu(r)$ est l'indice central de $f(z)$.

Par le Lemme1.3.8, on peut choisir un point limite $\left\{z_n = r_n e^{i\theta_n}\right\}$ tel que $|f(z_n)| = M(r_n, f)$, $\theta_n \in [0, 2\pi)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \theta_n = \theta_0$, $r_n \notin [0,1] \cup E_3 \cup E_4$, $r_n \to \infty$, pour tout ε_1 donné $(0 < 6\varepsilon_1 < 1-\alpha)$ et pour r_n suffisamment grand, on a

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{\log \nu(r_n)}{\log r_n} &= \infty, &(3.4.3)\\ \exp\left\{r_n^{\sigma-\varepsilon_1}\right\} &\leq \nu(r_n) \leq \exp\left\{r_n^{\sigma+\varepsilon_1}\right\}. &(3.4.4) \end{aligned}$$

Pour θ_0,on distingue trois cas $(i)\, \theta_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, $(ii)\ \theta_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, $(iii)\, \theta_0 \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$.

i) $\theta_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$.

Par l'équation (3.2.1), on a

$$h_1 e^z = \frac{F}{f'} - \left(\frac{f'''}{f'} + h_2 e^{-z}\frac{f''}{f'} + h_0 \frac{f}{f'}\right). \tag{3.4.5}$$

Comme $\cos\theta_0 > 0$ et $\theta_n \to \theta_0$, pour n suffisamment grand on a $\theta_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ et $\cos\theta_n > 0$. Par le Lemme 2.3.2 on sait que θ_n vérifie

$$\begin{aligned} \left|h_1(z_n) e^{z_n}\right| &\geq \exp\left\{(1-\varepsilon_1) r_n \cos\theta_n\right\}, &(3.4.6)\\ \left|h_2(z_n) e^{-z_n}\right| &\leq \exp\left\{(1+\varepsilon_1) r_n(-\cos\theta_n)\right\} \leq 2, &(3.4.7)\\ \left|h_0(z_n)\right| &\leq r_n^M, &(3.4.8) \end{aligned}$$

où $M\,(>0)$ est une constante.

Par le Lemme 2.3.9 on a lorsque $z_n = r_n e^{i\theta_n}$ vérifie $|f(z_n)| = M(r_n, f)$,

$$\frac{f(z_n)}{f'(z_n)} \leq r_n^M. \tag{3.4.9}$$

Par $\sigma(f) = \infty$ et $|f(z_n)| = M(r_n, f)$ et, on a $|f'(z_n)| \geq 1$. Comme F est une fontion entière avec $\sigma(F) = \sigma$, pour n suffisamment grand on a

$$\left|\frac{F(z_n)}{f'(z_n)}\right| \leq |F(z_n)| \leq \exp\left\{r_n^{\sigma+\varepsilon_1}\right\}. \tag{3.4.10}$$

Considérons le point $\{z_n\}$, en substituant (3.4.1),(3.4.6)-(3.4.10) dans (3.4.5) tel que n est suffisamment grand, on obtient

$$\begin{aligned} \exp\left\{(1-\varepsilon_1) r_n \cos\theta_n\right\} &\leq \left|h_1(z_n) e^{z_n}\right| \\ &\leq A\left(T(2r_n, f)\right)^6 + \exp\left\{(1+\varepsilon_1) r_n(-\cos\theta_n)\right\} A\left(T(2r_n, f)\right)^6 \\ &\quad + r_n^{2M} + \exp\left\{r_n^{\sigma+\varepsilon_1}\right\} \\ &\leq 3A r_n^{2M}\left(T(2r_n, f)\right)^6 \exp\left\{r_n^{\sigma+\varepsilon_1}\right\}. &(3.4.11) \end{aligned}$$

Par (3.4.11), on obtient pour n suffisamment grand

$$\exp\left\{\frac{1}{4}r_n\cos\theta_n\right\} \leq 3Ar_n^{2M}\left(T\left(2r_n,f\right)\right)^6. \tag{3.4.12}$$

Par (3.4.12) on a

$$\sigma_2\left(f\right) \geq 1. \tag{3.4.13}$$

ii) $\theta_0 \in \left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$.

On peut utiliser le même raisonnement que dans le cas (i), on obtient pour n suffisamment grand que $\theta_n \in \left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$, $-\cos\theta_n > 0$ et

$$\left|h_2\left(z_n\right)e^{-z_n}\right| \geq \exp\left\{\left(1-\varepsilon_1\right)r_n\left(-\cos\theta_n\right)\right\}, \tag{3.4.14}$$

$$\left|h_1\left(z_n\right)e^{z_n}\right| \leq \exp\left\{\left(1-\varepsilon_1\right)r_n\cos\theta_n\right\} \leq 2, \tag{3.4.15}$$

$$\left|h_0\left(z_n\right)\right| \leq r_n^M, \left|\frac{f\left(z_n\right)}{f''\left(z_n\right)}\right| \leq r_n^M, \tag{3.4.16}$$

$$\left|f''\left(z_n\right)\right| \geq 1,$$

et

$$\left|\frac{F\left(z_n\right)}{f''\left(z_n\right)}\right| \leq \left|F\left(z_n\right)\right| \leq \exp\left\{r_n^{\sigma+\varepsilon_1}\right\}. \tag{3.4.17}$$

Par (3.2.1) et (3.4.14)-(3.4.17), on obtient

$$\exp\left\{\left(1-\varepsilon_1\right)r_n\left(-\cos\theta_n\right)\right\} \leq \left|h_2\left(z_n\right)e^{-z_n}\right| \leq 3Ar_n^{2M}\left(T\left(2r_n,f\right)\right)^6\exp\left\{r_n^{\sigma}+\varepsilon_1\right\}. \tag{3.4.18}$$

Par (3.4.18) on a, pour n suffisamment grand

$$\exp\left\{\frac{1}{4}r_n\left(-\cos\theta_n\right)\right\} \leq 3Ar_n^{2M}\left(T\left(2r_n,f\right)\right)^6. \tag{3.4.19}$$

Par (3.4.19) on a $\sigma_1 \geq 1$.

iii) $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ ou $\theta_0 = \frac{3\pi}{2}$.

On étudie seulement le cas où $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, et le cas $\theta_0 = \frac{3\pi}{2}$ peut être prouvé de façon similaire. Comme $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ et $z_n = r_ne^{i\theta_n}$ vérifie $r_n \to \infty, \theta_n \to \frac{\pi}{2}$ tels que $n \to \infty$, on sait que le rayon $\arg w = \frac{\pi}{2}$ est une ligne asymptotique de $\left\{z_n\right\}$.

D'où il existe $N > 0$ tel que lorsque $n > N$, par $\mathrm{Re}\left\{\pm r_n e^{i\theta_0}\right\} = 0$ on a pour $j = 1, 2$,

$$-1 < \mathrm{Re}\left\{\pm r_n e^{i\theta_n}\right\} < 1,\ \frac{1}{e} < \left|e^{\pm z_n}\right| < e,\ r^{M_1} \leq \left|h_j\left(z_n\right) e^{\pm z_n}\right| \leq r^{M_2},$$

Où M_1, M_2 sont deux entiers positifs. Par (3.2.1),(3.4.2) on a

$$\begin{aligned}\left(\frac{\nu\left(r_n\right)}{z_n}\right)^3\left(1+o\left(1\right)\right) &= \frac{F\left(z_n\right)}{f\left(z_n\right)} \\ &-\left\{\ h_2\left(z_n\right) e^{-z_n}\left(\frac{\nu\left(r_n\right)}{z_n}\right)^2\left(1+o\left(1\right)\right)\right. \\ &\left.+h_1\left(z_n\right) e^{z_n}\left(\frac{\nu\left(r_n\right)}{z_n}\right)\left(1+o\left(1\right)\right)+h_0\left(z_n\right)\ \right\}. \qquad (3.4.20)\end{aligned}$$

Comme $\sigma\left(f\right) = \infty$, on a $M\left(r_n, f\right) \geq \exp\left\{r_n^3\right\}$, et pour r_n suffisamment grand

$$\frac{F\left(z_n\right)}{f\left(z_n\right)} \leq \exp\left\{r_n^{\sigma+\varepsilon_1} - r_n^3\right\} \to 0. \qquad (3.4.21)$$

Par (3.4.19)-(3.4.21) on obtient

$$\nu\left(r_n\right)\left(1+o\left(1\right)\right) \leq r^M. \qquad (3.4.22)$$

Les relations (3.4.22) et (3.4.3) se contredisent, ce qui prouve que le cas (iii) ne peut se produire.

Dans les cas (i) et (ii), on a prouvé que $\sigma_2\left(f\right) \geq 1$. En combinant avec le Lemme 2.3.10, on trouve que $\sigma_2\left(f\right) = 1$.

De plus, si F est transcendante ou $F \equiv 0$, on utilise le même raisonnement qu'en la preuve du Théorème 3.2.1 et on aura prouvé que toute constante non nulle ne peut être une solution de (3.2.1).

3.5 Exemples

Exemple 3.5.1 Soit l'équation

$$f''' + \frac{sh\sqrt{z}}{\sqrt{z}} e^{-z} f'' + \frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}} e^{z} f' + (z^3+4) f = 0 \qquad (3.5.1)$$

On remarque que les conditions du Théorème 3.2.1 sont vérifiées. En effet, $\frac{sh\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$, $\frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$sont des fonctions entières telles que $\sigma(\frac{sh\sqrt{z}}{\sqrt{z}}) = \sigma(\frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}) = \frac{1}{2}$, (z^3+4) est un pôlynome non constant et de plus, $F \equiv 0$.

Alors,d'après le Théorème 3.2.1, toute solution non nulle de (3.5.1) est d'ordre infini.

Exemple 3.5.2 Soit l'équation

$$f''' + ze^{-z}f'' + (z^4 + 2)e^z f' + (z^2 - z + 1)f = \cos\sqrt{z} \tag{3.5.2}$$

On constate que les conditions du Théorème 3.2.2 sont vérifiées. En effet, z, $(z^4 + 2)$ sont deux polynômes non nuls, $(z^2 - z + 1)$ est un pôlynome non constant. De plus F est une fonction entière avec $\sigma(F) < 1$, et est transcendante.

Alors, d'après le Théorème 3.2.2, toute solution non nulle de (3.5.2) a un ordre infini et son hyper ordre $\sigma_2(f) = 1$.

Chapitre 4

Conclusion

Nous avons traîté dans ce mémoire les caractéristiques que sont l'ordre et l'hyper ordre des solutions des équations différentielles d'ordre 3 dans le cas où les fonctions coefficients sont des fonctions entières. Et cela ouvre la porte pour plusieurs perspectives.Les questions suivantes se posent : Conserve-t-on ces mêmes caractéristiques dans le cas où les fonctions coefficients sont des fonctions méromorphes ?. Peut-on généraliser les résultats obtenus pour des fonctions méromorphes ? Et sous quelles conditions cette généralisation serait possible ? En effet, les résultats obtenus peuvent être généralisés sous certaines conditions posées sur l'ordre, l'ordre inférieur et l'exposent de convergence dont la condition

$$\max\left\{\sigma\left(B\right),\lambda\left(\frac{1}{A}\right)\right\}<\mu\left(A\right)\leq\sigma\left(A\right)<\frac{1}{2}$$

,pour l'équation différentielle du second ordre

$$f^{''}+A\left(z\right)f^{'}+B\left(z\right)f=0,$$

étudiée par Chen[2].

Cela nous amènera aussi à réfléchir sur le cas des équations différentielles d'ordre supérieur et me donne sans doute un avant-gout de ce que réserve la recherche scientifique.

Bibliographie

[1] Amemyiya I, Ozawa M.Non-existence of finite order solutions of $w'' + e^{-r}w' + Q(z)w = 0$,Hokkaido Math J,1981,10 :1-17.

[2] Chen. Zongxuan The growth of Solutions of second order linear differential equations with meromophic coefficients Kodai Math. J.22 (1999), 208-221.

[3] Chen Zongxuan, Yang Chungchun. Some further results on the zeros and growth of entire solutions of second order linear differential equations, Kodai Maths J,1999,22 :273-285.

[4] Chen Zongxuan. The growth of solutions of the differential equation $f''+e^{-z}f'+Q(z)f = 0$.Sciencein China Ser A, 2001,31 :775-784(in Chinese).

[5] Chen Zongxuan. Growth of solutions of three order differential equations. Appl. Math, J.Chinese Univ. Ser.B, 2005,20(1) :35-44.

[6] Chen Zongxuan and K. H. Shon, On the growth and fixed points of solutions of second order differential equations with meromorphic coefficients, Acta Mathematica Sinica Engl. Ser.21 (2005), no 4,753-764.

[7] Frei M.Uber die subnormalen losungen der differentialgleichung $w''+e^{-r}w'+(konst.)w = 0$, Comment Math Helv, 1962,36 :1-8.

[8] Gundersen G. On the question of whether $f'' + e^{-z}f\prime + B(z)f = 0$ can admit a solution $f \not\equiv 0$ of finite order, Proc Roy Soc Edinburgh,102A,1986,9-17.

[9] Gundersen G. Finite order solutions of second order linear differential equations, Trans Amer Math Soc, 1988,305 :415-429.

[10] Gundersen G Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function, plus similar estimates, J London Math Soc, 1988,37(2) :88-104.

[11] Hille E.Ordinary Differential Equations in the Complex Domain, New York :Wiley,1976.

[12] Hayman W.Meromorphic Function, Oxford : Clarendon Press, 1964.

[13] Hayman W.The local growth of power series : a survey of the Wiman-Valiron method, Canad Math Bull, 1974,17 :317-358.

[14] He Yuzan, Xiao Xiuzhi. Algebroid Functions and Ordinary differnetial Equations Beijing : Science Press, 1988(in Chinese).

[15] K. H. Kwon, Nonexistence of finite order solutions of certain second order linear differential equations, Kodai Math. J. 19(1996), 378-387.

[16] Langley J K. On complex oscillation and a problem of Ozawa, Kodai Math J,1986,9 :430-439.

[17] Laine I.Nevanlinna Theory and Complex Differential Equations, Berlin : W. de Gruyter,1993.

[18] Markushevich A I.Theory of Functions of a Complex Variable, Vol.2 translated by R. A. Silverman, Englewood Cliffs NJ : Prentice-Hall, 1965.

[19] Ozawa M.On a solution of $w'' + e^{-r}w' + (az+b)w = 0$,Kodai Math J,1980,3 :295-309.

[20] Valiron G. Lectures on the General Theory of Integral Functions, New York : Chelsea, 1949.

[21] Yi Hongxun, Yang Chungchun. The Uniqueness Theory of Meromorphic Functions, Beijing : Science Press, 1995(in Chinese).