UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de fin d'étude
Pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques
Cycle LMD
Spécialité :AF
Thème : Croissance des Solutions Méromorphes des Équations aux Différences

Présenté par : NAER Houria
Soutenu le 14 juin 2018

Les membres de jury

Président	LATREUCH Zinelâabidine	MCB	**U. MOSTAGANEM.**
Examinateur	ANDASMAS Maamar	MCB	**U. MOSTAGANEM.**
Encadreur	BELAÏDI Benharrat	Pr	**U. MOSTAGANEM.**

Dédicace

Au nom de Dieu le tout miséricordieux, le très miséricordieux.

Notre devoir est rendu grâce à Dieu qui nous a donné la patience et le courage pour terminer ce modeste travail.

Nous dédions ce travail à nos parents, nos soeurs et frères et à toute notre famille, aussi qu'à tous ceux qui de prés ou de loin ont contribué à la réalisation de ce travail.

Remerciements

Je tiens à remercier Monsieur BELAÏDI Benharrat professeur à l'université de Mostaganem, qui a accepté de
diriger ce mémoire, et a mis à notre disposition tous les moyens nécessaires ainsi que ses conseils et sa présence pendant la réalisation de ce travail ;

Monsieur LATREUCH Zinelâabidine maître de conférences B à l'université de Mostaganem, qui m'a fait l'honneur de présider ce jury ;
Monsieur ANDASMAS Maamar, maître de conférences B à l'université de Monstaganem, qui accepté d'expertiser ce travail et me fait l'honneur d'être examinateur ;
Tous les enseignants que j'ai rencontré durant mon chemin dans l'université.
Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à tous mes proches et amis, qui m'ont toujours soutenus et encouragés au cours de la réalisation de ce mémoire.

Merci à tous et à toutes.

Table des matières

INTRODUCTION

L'apparition de la théorie de R. Nevanlinna, en 1925, qui représente la théorie moderne et complète de la distribution des valeurs d'une fonction méromorphe dans le plan complexe et qui est considéré comme l'un des rares événements mathématiques du vingtième siècle, a donné des outils trés efficaces pour l'étude de la croissance et l'oscillation des solutions des équations différentielles linéaires et non linéaires dans le plan complexe. Pour une introduction de cette théorie voir $[9, 12]$.

Ce travail se compose d'une intoduction et deux chapitres. Dans le premier chapitre on présente les notations standards et les résultats principaux de la théorie de Nevanlinna, voir par exemple $[7, 9, 14, 16]$.

Dans, le deuxième chapitre, on va étudier la croissance des solutions méromorphes des équations aux différences linéaires homogènes et non homogènes de la forme

$$A_n(z) f(z+n) + ... + A_1(z) f(z+1) + A_0(z) f(z) = 0$$

et

$$A_n(z) f(z+n) + ... + A_1(z) f(z+1) + A_0(z) f(z) = F(z)$$

où $A_j(z)$, $j = 0, 1, ..., n$, $F(z)$ sont des fonctions entières.

Chapitre 1

Quelques éléments de la théorie de R. Nevanlinna

Dans ce chapitre, on va citer quelques définitions de base de la théorie de Nevanlinna sur les fonctions méromorphes, et présenter quelques propriétés sur la croissance des fonctions méromorphes.

1.1 Fonction caractéristique de R. Nevanlinna

1.1.1 La formule de Jensen.

Théorème 1.1.1 [9, 12] *Soit f une fonction méromorphe telle que $f(0) \neq 0, \infty$ et soit $a_1, a, \ldots$ (resp. $b_1, b_2, \ldots$) ses zéros (resp. ses pôles), chacun étant compté avec son ordre de multiplicité. Alors*

$$\ln|f(0)| = \int_0^{2\pi} \ln\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right| d\varphi + \sum_{|b_j|< r} \ln\frac{r}{|b_j|} - \sum_{|a_j|< r} \ln\frac{r}{|a_j|},$$

Preuve : On démontre le théorème dans le cas où f n'admet ni zéros ni pôles sur le cercle $|z| = r$. Considérons la fonction

$$g(z) = f(z) \prod_{|a_j|< r} \frac{r^2 - \overline{a_j} z}{r(z - a_j)} / \prod_{|b_j|< r} \frac{r^2 - \overline{b_j} z}{r(z - b_j)}.$$

On a $g \neq 0, \infty$ dans le disque $|z| \leq r$ et $\ln|g(z)|$ est une fonction harmonique. D'aprés la formule de la moyenne, on a

$$\ln|g(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln\left|g\left(re^{i\varphi}\right)\right| d\varphi. \tag{1.1.1}$$

D'autre part,

$$|g(0)| = |f(0)| \prod_{|a_j|< r} \frac{r}{|a_j|} / \prod_{|b_j|< r} \frac{r}{|b_j|}$$

d'où

$$\ln |g(0)| = \ln |f(0)| + \sum_{|a_j|< r} \frac{r}{|a_j|} - \sum_{|b_j|< r} \frac{r}{|b_j|}, \tag{1.1.2}$$

Pour $z = re^{i\varphi}$, on a

$$\left| \frac{r^2 - \overline{a_j}z}{r(z - a_j)} \right| = \left| \frac{r^2 - \overline{a_j}re^{i\varphi}}{r(re^{i\varphi} - a_j)} \right| = \left| \frac{e^{i\varphi}(re^{-i\varphi} - \overline{a_j})}{re^{i\varphi} - a_j} \right| = 1$$

et

$$\left| \frac{r^2 - \overline{b_j}z}{r(z - b_j)} \right| = \left| \frac{r^2 - \overline{b_j}re^{i\varphi}}{r(re^{i\varphi} - b_j)} \right| = \left| \frac{e^{i\varphi}\left(re^{-i\varphi} - \overline{b_j}\right)}{re^{i\varphi} - b_j} \right| = 1.$$

D'où $|g(re^{i\varphi})| = |f(re^{i\varphi})|$. De $(1.1.1)$ et $(1.1.2)$, on obtient la formule de Jensen.

Définition 1.1.1 [12] *Pour tout réel $x > 0$, on définit*

$$\ln^+ x = \max(\ln x, 0) = \begin{cases} \ln x, & si \quad x > 1 \\ 0, & si \quad 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Lemme 1.1.1 $[5, 12]$ *On a les inégalitées suivantes*

a)

$$\ln x \leq \ln^+ x.$$

b)

$$\ln^+ x \leq \ln^+ y \ \ (si\ 0 < x \leq y).$$

c)

$$\ln x = \ln^+ x - \ln^+ \frac{1}{x}.$$

d)

$$|\ln x| = \ln^+ x + \ln^+ \frac{1}{x}.$$

e)

$$\ln^+ \left(\prod_{i=1}^{n} x_i \right) \leq \sum_{i=1}^{n} \ln^+ x_i.$$

f)

$$\ln^+ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) \leq \sum_{i=1}^{n} \ln^+ x_i + \ln n.$$

Preuve. Montrons $(c) - (f)$.
(c) On a

$$\begin{aligned} \ln^+ x - \ln^+ \frac{1}{x} &= \max\{\ln x, 0\} - \max\left\{\ln \frac{1}{x}, 0\right\} \\ &= \max\{\ln x, 0\} - \max\{-\ln x, 0\} \\ &= \max\{\ln x, 0\} + \min\{\ln x, 0\} \\ &= \ln x. \end{aligned}$$

(d) On a

$$\begin{aligned}\ln^+ x+\ln^+\frac{1}{x} &= \max\{\ln x,0\}+\max\left\{\ln\frac{1}{x},0\right\}\\ &= \max\{\ln x,0\}+\max\{-\ln x,0\}\\ &= \max\{\ln x,0\}-\min\{\ln x,0\}\\ &= |\ln x|.\end{aligned}$$

(e) Si $\prod_{i=1}^n x_i \leq 1$, alors l'inégalité est triviale. Supposons que $\prod_{i=1}^n x_i > 1$. Alors

$$\begin{aligned}\ln^+\left(\prod_{i=1}^n x_i\right) &= \ln\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)\\ &= \sum_{i=1}^n \ln x_i\\ &\leq \sum_{i=1}^n \ln^+ x_i,\ \text{d'aprés } (a).\end{aligned}$$

(f) On a d'aprés (b) et (e)

$$\begin{aligned}\ln^+\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) &\leq \ln^+\left(n\max_{1\leq i\leq n} x_i\right)\\ &\leq \ln n+\ln^+\left(\max_{1\leq i\leq n} x_i\right)\\ &\leq \ln n+\sum_{i=1}^n \ln^+ x_i.\end{aligned}$$

1.1.2 Fonction a-points

Définition 1.1.2 [9, 12] *Soit f une fonction méromorphe. Pour tout nombre complexe a, on désigne par $n(t,a,f)$ le nombre de racines de l'équation $f(z)=a$ situées dans le disque $|z|\leq t$ et par $n(t,\infty,f)$ le nombre de pôles de la fonction f dans le disque $|z|\leq t$. Chaque racine ou pôle étant compté un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité. Posons*

$$N(r,a,f)=N\left(r,\frac{1}{f-a}\right)=\int_0^r \frac{n(t,a,f)-n(0,a,f)}{t}dt+n(0,a,f)\ln r \quad ,\ f\not\equiv a\in\mathbb{C}$$

et

$$N(r,\infty,f)=N(r,f)=\int_0^r \frac{n(t,\infty,f)-n(0,\infty,f)}{t}dt+n(0,\infty,f)\ln r.$$

$N(r,a,f)$ est appelée fonction a-points de la fonction f dans le disque $|z|\leq r$.

1.1.3 Fonction de proximité

Définition 1.1.3 [9, 12] *Soit f une fonction méromorphe non constante et a un nombre complexe. Alors, on définit la fonction de proximité de la fonction f par*

$$m(r,a,f) = m\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{\left|f\left(re^{i\varphi}-a\right)\right|} d\varphi, \ f \not\equiv a \in \mathbb{C}$$

et

$$m(r,\infty,f) = m(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right| d\varphi.$$

1.1.4 Fonction caractéristique de R. Nevanlinna

Définition 1.1.4 [9, 12] *On définit la fonction caractéristique de R. Nevanlinna de la fonction f par*

$$T(r,f) = m(r,f) + N(r,f).$$

Cette fonction joue un rôle très important dans la théorie de la distribution des valeurs des fonctions méromorphes.

Lemme 1.1.2 [9, 12] *Soient $f, f_1, f_2, ..., f_n$ des fonctions méromorphes et a, b, c, d des constantes complexes telles que $ad - cb \neq 0$, alors*

a)

$$m\left(r, \sum_{i=1}^{n} f_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} m(r,f_i) + \ln n.$$

b)

$$m\left(r, \prod_{j=1}^{n} f_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n} m(r,f_j).$$

c)

$$N\left(r, \sum_{i=1}^{n} f_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} N(r,f_i).$$

d)

$$N\left(r, \prod_{i=1}^{n} f_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} N(r,f_i).$$

e)

$$T\left(r, \sum_{i=1}^{n} f_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} T(r,f_i) + \ln n, \ n \geq 1.$$

f)

$$T\left(r, \prod_{i=1}^{n} f_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} T(r,f_i), \ n \geq 1.$$

$g)$

$$T(r, f^n) = nT(r, f), \ n \in \mathbb{N}^*.$$

$h)$

$$T\left(r, \frac{af+b}{cf+d}\right) = T(r, f) + O(1), \ f \not\equiv \frac{-d}{c}.$$

Preuve. Montrons $(e) - (h)$
(e) On a

$$m\left(r, \sum_{i=1}^{n} f_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} m(r, f_i) + \ln n$$

et

$$N\left(r, \sum_{i=1}^{n} f_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} N(r, f_i)$$

donc

$$\begin{aligned} T\left(r, \sum_{i=1}^{n} f_i\right) &= m\left(r, \sum_{i=1}^{n} f_i\right) + N\left(r, \sum_{i=1}^{n} f_i\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} T(r, f_i) + \ln n. \end{aligned}$$

$f)$ On a

$$m\left(r, \prod_{j=1}^{n} f_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n} m(r, f_j)$$

et

$$N\left(r, \prod_{i=1}^{n} f_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} N(r, f_i),$$

donc

$$\begin{aligned} T\left(r, \prod_{i=1}^{n} f_i\right) &= m\left(r, \prod_{j=1}^{n} f_j\right) + N\left(r, \prod_{i=1}^{n} f_i\right) \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} m(r, f_j) + \sum_{i=1}^{n} N(r, f_i) \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} T(r, f_i). \end{aligned}$$

$g)$ On a $|f^n| = |f|^n \leq 1$ équivant à $|f| \leq 1$. Si $|f| \leq 1$, alors $m(r, f^n) = 0$ et $N(r, f^n) = nN(r, f)$. Donc

$$T(r, f^n) = N(r, f^n) = n(N(r, f) + m(r, f)) = nT(r, f).$$

Si $|f| > 1$, alors

$$\begin{aligned} T\left(r, f^n\right) &= m\left(r, f^n\right) + N\left(r, f^n\right) \\ &= nm\left(r, f\right) + nN\left(r, f\right) \\ &= nT\left(r, f\right) \end{aligned}$$

$h)$ Si $c = 0$, alors

$$\begin{aligned} T\left(r, \frac{af+b}{d}\right) &= T\left(r, \frac{a}{d}f + \frac{b}{d}\right) \\ &= T\left(r, \frac{a}{d}f\right) + O\left(1\right) \\ &= T\left(r, f\right) + O\left(1\right) \end{aligned}$$

Si $c \neq 0$, alors on écrit

$$\frac{af+b}{cf+d} = \frac{a\left(f+\frac{d}{c}\right) + b - \frac{ad}{c}}{c\left(f+\frac{d}{c}\right)} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2}\frac{1}{f+\frac{d}{c}}.$$

D'où

$$\begin{aligned} T\left(r, \frac{af+b}{cf+d}\right) &= T\left(r, \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2}\frac{1}{f+\frac{d}{c}}\right) \\ &= T\left(r, \frac{bc-ad}{c^2}\frac{1}{f+\frac{d}{c}}\right) + O\left(1\right) \\ &= T\left(r, \frac{1}{f+\frac{d}{c}}\right) + O\left(1\right) \\ &= T\left(r, f\right) + O\left(1\right). \end{aligned}$$

Exemple 1.1.1 *Soit* $f\left(z\right) = thz = \frac{e^{2z}-1}{e^{2z}+1}$, *on a*

$$\begin{aligned} T\left(r, \frac{e^{2z}-1}{e^{2z}+1}\right) &= T\left(r, e^{2z}\right) + O\left(1\right) \\ &= \frac{2r}{\pi} + O\left(1\right). \end{aligned}$$

Exemple 1.1.2 [5] *Soit la fonction* $f\left(z\right) = \frac{e^z}{z}$, *on calcule la fonction caractéristique de Nevanlinna. On a* $z = 0$ *est un pôle simple. Alors*

$$\begin{aligned} N\left(r, f\right) &= \int_0^r \frac{n\left(t, \infty, f\right) - n\left(0, \infty, f\right)}{t} dt + n\left(0, \infty, f\right)\ln r \\ &= \int_0^r \frac{1-1}{t} dt + \ln r = \ln r, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
m(r,f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right| d\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \left|\frac{e^{re^{i\varphi}}}{re^{i\varphi}}\right| d\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{e^{r\cos\varphi}}{r}\right) d\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r\cos\varphi \ d\varphi - \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln r \ d\varphi \\
&= \frac{r}{\pi}\sin\varphi \,|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\ln r}{2} \\
&= \frac{r}{\pi} - \frac{\ln r}{2}
\end{aligned}
$$

D'où

$$
\begin{aligned}
T(r,f) &= m(r,f) + N(r,f) \\
&= \frac{r}{\pi} - \frac{\ln r}{2} + \ln r \\
&= \frac{r}{\pi} + \frac{\ln r}{2}.
\end{aligned}
$$

Exemple 1.1.3 [5] *Soit* $P(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ *un polynôme non constant de degré* $n \geq 1$ *tels que* a_j $(j = 0, 1, ..., n)$ *sont des nombres complexes avec* $a_n \neq 0$, *et soit* $f(z) = e^{P(z)}$. *Calculons* $T\left(r, e^{P(z)}\right)$.

Posons $a_n = |a_n| e^{i\phi}$ et $z = re^{i\varphi}$. Alors

$$P(z) = a_n z^n + \cdots + a_0 = |a_n| r^n e^{i(n\varphi+\phi)} + O\left(r^{n-1}\right),$$

$$\operatorname{Re} P(z) = |a_n| r^n \cos(\phi + n\varphi) + O\left(r^{n-1}\right).$$

On a f est une fonction entière, alors $n(t,f) = 0$ et $N(r,f) \equiv 0$. Calculons $m(r,f)$. On a

$$m(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right| d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left({}^+e^{|a_n|r^n\cos(\phi+n\varphi)+O\left(r^{n-1}\right)}\right) d\varphi$$

$$\overset{\psi=\phi+n\varphi}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{\phi}^{2n\pi+\phi} \ln^+\left(e^{|a_n|r^n\cos\psi+O(1)}\right) d\psi = \frac{1}{2n\pi}\int_0^{2n\pi} \ln^+\left(e^{|a_n|r^n\cos\psi+O\left(r^{n-1}\right)}\right) d\psi$$

$$= \frac{1}{2n\pi}\sum_{j=0}^{n-1}\int_{2j\pi}^{2(j+1)\pi} \ln^+\left(e^{|a_n|r^n\cos\psi+O\left(r^{n-1}\right)}\right) d\psi = \frac{1}{2n\pi} n \int_0^{2\pi} \ln^+\left(e^{|a_n|r^n\cos\psi+O(1)}\right) d\psi$$

$$= \frac{|a_n| r^n}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi d\psi + O\left(r^{n-1}\right) = \frac{|a_n| r^n}{\pi} + O\left(r^{n-1}\right).$$

D'où

$$T(r,f) = m(r,f) = \frac{|a_n| r^n}{\pi} + O\left(r^{n-1}\right) \sim \frac{|a_n|}{\pi} r^n \left(r \to +\infty\right).$$

Proposition 1.1.1 [12] *Soit f une fonction méromorphe avec le développement de Laurent de f autour de l'origine*

$$f(z) = \sum_{i=m}^{\infty} c_i z^i, \quad c_m \neq 0, \ m \in \mathbb{Z}.$$

Alors

$$\ln|c_m| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta + N(r,f) - N\left(r, \frac{1}{f}\right).$$

1.2 Premier théorème fondamental de Nevanlinna

Théorème 1.2.1 [9, 12] *Soit f une fonction méromorphe non constante et $a \in \mathbb{C}$. Soit le développement de Laurent de la fonction $f(z) - a$ autour du point d'origine*

$$f(z) - a = \sum_{i=m}^{\infty} c_i z^i, \quad c_m \neq 0, \ m \in \mathbb{Z}.$$

Alors

$$T(r,a,f) = T\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = T(r,f) - \ln|c_m| + \varphi(r,a),$$

où

$$|\varphi(r,a)| \leq \ln^+|a| + \ln 2.$$

Preuve. 1) Montrons le théorème pour $a = 0$. D'aprés Proposition 1.1.1, on a

$$\ln|c_m| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta + N(r,f) - N\left(r, \frac{1}{f}\right),$$

d'après les propriétés de $\left(\ln^+\right)$, on obtient

$$\begin{aligned} \ln|c_m| &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|} d\theta + N(r,f) - N\left(r, \frac{1}{f}\right) \\ &= m(r,f) - m\left(r, \frac{1}{f}\right) + N(r,f) - N\left(r, \frac{1}{f}\right) \\ &= T(r,f) - T\left(r, \frac{1}{f}\right). \end{aligned}$$

Donc

$$T\left(r, \frac{1}{f}\right) = T(r,f) - \ln|c_m|,$$

avec $\varphi(r,0) = 0$.

2) Montrons le théorème pour $a \neq 0$. Posons $h = f - a$, alors

$$\begin{aligned} N\left(r, \frac{1}{h}\right) &= N\left(r, \frac{1}{f-a}\right), \\ N(r,h) &= N(r, f-a) = N(r,f), \\ m\left(r, \frac{1}{h}\right) &= m\left(r, \frac{1}{f-a}\right), \end{aligned}$$

de plus

$$\begin{aligned} \ln^+|h| &= \ln^+|f-a| \leq \ln^+|f| + \ln^+|a| + \ln 2. \\ \ln^+|f| &= \ln^+|f-a+a| = \ln^+|h+a| \\ &\leq \ln^+|h| + \ln^+|a| + \ln 2. \end{aligned}$$

En intégrant les deux membres de 0 à 2π, on trouve

$$\begin{aligned} m(r,h) &\leq m(r,f) + \ln^+|a| + \ln 2. \\ m(r,f) &\leq m(r,h) + \ln^+|a| + \ln 2. \end{aligned}$$

Posons

$$\varphi(r,a) = m(r,h) - m(r,f).$$

Alors

$$|\varphi(r,a)| \leq \ln^+|a| + \ln 2.$$

D'après le 1$^{\text{er}}$cas, on a

$$\begin{aligned} T\left(r, \frac{1}{h}\right) &= m\left(r, \frac{1}{h}\right) + N\left(r, \frac{1}{h}\right) \\ &= T(r,h) - \ln|c_m| \\ &= m(r,h) + N(r,h) - \ln|c_m| \\ &= m(r,f) + \varphi(r,a) + N(r,f) - \ln|c_m| \\ &= T(r,f) - \ln|c_m| + \varphi(r,a). \end{aligned}$$

Ainsi

$$T(r,a,f) = T\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = T(r,f) - \ln|c_m| + \varphi(r,a),$$

où

$$|\varphi(r,a)| \leq \ln^+|a| + \ln 2$$

Remarque Le premier théorème fondamental peut être exprimé comme suit :

$$T\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = T(r,f) + O(1), \ r \to +\infty$$

pour tout $a \in \mathbb{C}$.

1.3 La croissance et la distribution des valeurs d'une fonction entière ou méromorphe

1.3.1 L'ordre et le type de croissance d'une fonction méromorphe

Définition 1.3.1 [12] *Soit f une fonction méromorphe, on définit l'ordre de f par*

$$\sigma(f) = \limsup_{r \longmapsto \infty} \frac{\ln T(r, f)}{\ln r}.$$

Remarque 1.3.1 *Si f une fonction entière, on remplace $T(r, f)$ par $\ln M(r, f)$, où*

$$M(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)|$$

alors l'ordre de f est définit par

$$\sigma(f) = \limsup_{r \longmapsto \infty} \frac{\ln \ln M(r, f)}{\ln r}$$

d'après la définition de la limite supérieure , pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $r_0 > 0$ tel que pour tout $r > r_0$, on ait

$$M(r, f) \leq e^{r^{\sigma+\varepsilon}}.$$

Remarque 1.3.2 *L'ordre inférieur $\mu(f)$ de f est définit de même mais avec la limite inférieure au lieu de la limite supérieure*

$$\mu(f) = \liminf_{r \longmapsto \infty} \frac{\ln T(r, f)}{\ln r}$$

ce qui implique que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\ r_0 > 0$, tel que $\forall r > r_0$, on ait

$$T(r, f) \geq r^{\mu(f)-\varepsilon}.$$

Exemple 1.3.1 *Soit $f(z) = e^z$. On a*

$$T(r, f) = \frac{r}{\pi}$$

d'où

$$\sigma(e^z) = \limsup_{r \longmapsto \infty} \frac{\ln \frac{r}{\pi}}{\ln r} = 1, \quad \mu(f) = \liminf_{r \longmapsto \infty} \frac{\ln \frac{r}{\pi}}{\ln r} = 1.$$

Exemple 1.3.2 *Soit $f(z) = e^{z^2}$, on a*

$$T(r, f) = \frac{r^2}{\pi},$$

d'où

$$\sigma\left(e^{z^2}\right) = \limsup_{r \longmapsto \infty} \frac{\ln \frac{r^2}{\pi}}{\ln r} = 2, \ \mu(f) = 2.$$

Exemple 1.3.3 *Soit* $P(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ *un polynôme non constant de degré* $n \geq 1$*, tel que* $a_j\,(j = 0, 1, ..., n)$ *sont des nombres complexes avec* $a_n \neq 0$*, et soit* $f(z) = e^{P(z)}$*. On a*

$$T(r, f) \sim \frac{|a_n| r^n}{\pi}, \; r \to +\infty$$

d'où

$$\sigma\left(e^{P(z)}\right) = \limsup_{r \longmapsto \infty} \frac{\ln \frac{|a_n| r^n}{\pi}}{\ln r} = n = \deg(P(z)), \quad \mu\left(e^{P(z)}\right) = n.$$

Définition 1.3.2 *Soit* f *une fonction méromorphe d'ordre* σ $(0 < \sigma < \infty)$*, on définit le type de* f *par*

$$\tau(f) = \limsup_{r \longmapsto \infty} \frac{T(r, f)}{r^\sigma}$$

ce qui implique que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, r_0 > 0$, *tel que* $\forall r > r_0$, *on ait*

$$T(r, f) \leq (\tau + \varepsilon) r^\sigma.$$

Remarque 1.3.3 *Le type inférieur* $\underline{\tau}(f)$ *de* f *est définit de même mais avec la limite inférieure au lieu de la limite supérieure*

$$\underline{\tau}(f) = \liminf_{r \longmapsto \infty} \frac{T(r, f)}{r^\sigma}.$$

Exemple 1.3.4 *Pour la fonction* $f(z) = e^z$*, on a*

$$\tau(f) = \limsup_{r \longmapsto \infty} \frac{T(r, f)}{r^\sigma} = \limsup_{r \longmapsto \infty} \frac{\frac{r}{\pi}}{r^1} = \frac{1}{\pi}.$$

Définition 1.3.3 [17] *Une fonction méromorphe* $f(z)$ *est dite de croissance régulière si*

$$\sigma(f) = \mu(f).$$

Exemple 1.3.5 *On a* $f(z) = e^z$ *est de croissance régulière car*

$$\sigma(e^z) = \mu(e^z) = 1.$$

Proposition 1.3.1 [7, 13] *Soit* f *et* g *deux fonctions méromorphes. Alors*

1.

$$\begin{aligned} \sigma(f+g) &\leq \max\{\sigma(f), \sigma(g)\} \\ \sigma(fg) &\leq \max\{\sigma(f), \sigma(g)\} \end{aligned}$$

2. Si $\sigma(g) < \sigma(f)$, alors

$$\sigma(f+g) = \sigma(fg) = \sigma(f).$$

Lemme 1.3.1 [15] *Soient* f *et* g *des fonctions méromorphes dans le plan complexe telles que* $0 < \sigma(f), \sigma(g) < \infty$ *et* $0 < \tau(f), \tau(g) < \infty$*. Alors nous avons :*

(i) Si $\sigma(f) < \sigma(g)$, alors on a

$$\tau(f+g) = \tau(fg) = \tau(f).$$

(ii) Si $\sigma(f) = \sigma(g)$ et $\tau(f) \neq \tau(g)$, alors on obtient

$$\sigma(f+g) = \sigma(fg) = \sigma(f) = \sigma(f).$$

1.3.2 La mesure linéaire et la mesure logarithmique.

Définition 1.3.4 [18] *On définit la mesure linéaire d'un ensemble $E \subset [0, \infty)$ par*

$$m(E) = \int_0^{+\infty} \chi_E(t) \ dt,$$

où $\chi_E(t)$ est la fonction indicatrice de l'ensemble E.
La densité supérieure d'un ensemble $E \subset (0, +\infty)$ est définie par

$$\overline{dens} E = \limsup_{r \longmapsto \infty} \frac{m(E \cap [0, r])}{r}.$$

La mesure logarithmique d'un ensemble $F \subset [1, +\infty)$ est définie par

$$lm(F) = \int_1^{+\infty} \frac{\chi_F(t)}{t}.$$

La densité logarithmique supérieure d'un ensemble $F \subset [1, +\infty)$ est définie par

$$\overline{\log dens}(F) = \limsup_{r \longmapsto \infty} \frac{lm(E \cap [1, r])}{\log r}.$$

1) La mesure linéaire de l'ensemble $E = [2, 3] \cup [4, 5] \subset [0, +\infty)$ est

$$m(E) = \int_0^{+\infty} \chi_E(t) \ dt = \int_2^3 dt + \int_4^5 dt = 2.$$

2) La mesure logarithmique de l'ensemble $F = [1, e] \subset [1, +\infty)$ est

$$lm(F) = \int_1^{+\infty} \frac{\chi_F(t)}{t} dt = \int_1^e \frac{dt}{t} = 1.$$

3) La densité supérieure de l'ensemble $E = [1, +\infty)$ est

$$\overline{dens}\ H = \limsup_{r \longmapsto \infty} \frac{m(E \cap [0, r])}{r} = 1.$$

4) La densité logarithmique supérieure de l'ensemble $F = [e, +\infty)$ est

$$\overline{\log dens}(F) = \limsup_{r \longmapsto \infty} \frac{lm([e, +\infty) \cap [1, r])}{\log r} = 1.$$

Lemme 1.3.2 $[1, 4]$ *Soit H un ensemble de nombres reéls positifs et $\chi_H(t)$ la fonction caractéristique de l'ensemble H. Alors, pour tout $H \subset [1, +\infty)$ nous avons :*

$i)$ Si $lm(H) = +\infty$ alors $m(H) = +\infty$.
$ii)$ Si $\overline{dens} H > 0$ alors $m(H) = +\infty$.
$iii)$ Si $\overline{\log dens} H > 0$ alors $lm(H) = +\infty$.

Preuve :

$i)$ Puisque nous avons $\frac{\chi_H(t)}{t} \leq \chi_H(t)$ pour tout $H \subset [1, +\infty)$ alors

$$m(H) \geq lm(H).$$

Nous pouvons facilement prouver les résultats $ii)$ et $iii)$ par l'application de la définition de la limite et les propriétés $lm(H \cap [1, r]) \leq lm(H)$ et $m(H \cap [0, r]) \leq m(H)$.

1.3.3 Exposant de convergence d'une fonction méromorphe

Définition 1.3.5 [13] *Soit f une fonction méromorphe. On définit l'exposant de convergence des zéros de la fonction f par*

$$\lambda(f) = \lim_{r\to+\infty} \sup \frac{\log N\left(r,\frac{1}{f}\right)}{\log r},$$

où

$$N\left(r,\frac{1}{f}\right) = \int_0^r \frac{n\left(t,\frac{1}{f}\right) - n\left(0,\frac{1}{f}\right)}{t} + n\left(0,\frac{1}{f}\right)\log r,$$

telle que $n\left(0,\frac{1}{f}\right)$ désigne le nombre des zéros de la fonction f situés dans le disque $|z| \leq t$. D'une manière analogue, on définit l'exposant de convergence des zéros distincts de la fonction f par

$$\overline{\lambda}(f) = \lim_{r\to+\infty} \sup \frac{\log \overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)}{\log r}$$

où

$$\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right) = \int_0^r \frac{\overline{n}\left(t,\frac{1}{f}\right) - \overline{n}\left(0,\frac{1}{f}\right)}{t} + \overline{n}\left(0,\frac{1}{f}\right)\log r,$$

telle que $\overline{n}\left(0,\frac{1}{f}\right)$ désigne le nombre des zéros distincts de la fonction f situés dans le disque $|z| \leq t$.

Exemple 1.3.6 *Comme la fonction $f(z) = e^z$ n'a pas de zéros, alors*

$$\lambda(e^z) = \overline{\lambda}(e^z) = 0.$$

1.3.4 Produit canonique

Théorème 1.3.1 [12] *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$une suite de nombres complexes non nuls et d'exposant de convergence fini λ et soit k un nombre entier non-négatif$> \lambda -1$. Alors le produit canonique*

$$\prod_{n=1}^{\infty} E_k\left(\frac{z}{a_n}\right),$$

où

$$\begin{cases} E_0(z) := 1 - z \\ E_m(z) := (1-z)\exp\left(z + \frac{z^2}{2} + ... + \frac{z^m}{m}\right), \ m \in \mathbb{N} \end{cases}$$

définit une fonction entière ayant des zéros exactement aux points a_n, chaque zéro étant compté avec son ordre de multiplicité.

Théorème 1.3.2 [11] *L'ordre d'un produit canonique est égal à l'exposant de convergence des zéros.*

Exemple 1.3.7 *La fonction gamma est définie par*

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{\frac{z}{n}},$$

où

$$\gamma := \lim_{r \to \infty} \left[1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \log n\right],$$

donc

$$\sigma(\Gamma(z)) \quad = \lambda(\Gamma(z)) = 1.$$

Chapitre 2

Sur la croissance des solutions méromorphes des équations aux différences

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on étudie la croissance des solutions méromorphes des équations aux différences linéaires homogènes ou non homogènes de la forme

$$A_n(z) f(z+n) + ... + A_1(z) f(z+1) + A_0(z) f(z) = 0 \tag{2.1}$$

et

$$A_n(z) f(z+n) + ... + A_1(z) f(z+1) + A_0(z) f(z) = F(z), \tag{2.2}$$

où $A_j(z)$, $j = 0, 1, ..., n$, $F(z)$ sont des fonctions entières.

Dans [6], Chiang et Feng ont considéré la croissance des solutions méromorphes des équations aux différences (2.1) et ils ont obtenu le théorème suivant.

Théorème 2.A (voir [6], Théorème 9.2) Soient $A_0(z), A_1(z), ..., A_n(z)$ des fonctions entières telles qu'il existe un nombre entier l $(0 \leq l \leq n)$ vérifiant

$$\max_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq l}} \{\sigma(A_j)\} < \sigma(A_l). \tag{2.1.1}$$

Si $f(z) \not\equiv 0$ est une solution méromorphe de l'équation (2.1), alors $\sigma(f) \geq \sigma(A_l) + 1$.

Lorsque les coefficients dans (2.1) sont des polynômes, ils ont obtenu le résultat suivant

Théorème 2.B (voir [6], Théorème 9.2) Soient $P_0(z), P_1(z), ..., P_n(z)$ des polynômes tels qu'il existe un entier l $(0 \leq l \leq n)$ vérifiant

$$\max_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq l}} \{\deg(P_j)\} < \deg(P_l).$$

Si $f(z) \not\equiv 0$ est une solution méromorphe de l'équation

$$P_n(z) f(z+n) + ... + P_1(z) f(z+1) + P_0(z) f(z) = 0, \tag{2.3}$$

alors $\sigma(f) \geq 1$.

Dans le Théorème 2.A, les coefficients de (2.1) vérifient la condition $\max_{0\leq j\neq l\leq n}\{\sigma(A_j)\} < \sigma(A_l)$. Si la condition est remplacée par $\max_{0\leq j\neq l\leq n}\{\sigma(A_j)\} = \sigma(A_l)$, quels seront les résultats ? A ce sujet, Laine et Yang [13] ont obtenu le théorème suivant .

Théorème 2.C (voir [13], Théorème 5.2) Soient $A_0(z), A_1(z), ..., A_n(z)$, des fonctions entières d'ordre fini, telles qu'il existe un coefficient d'ordre maximal $\sigma = \max_{0\leq j\neq l\leq n}\{\sigma(A_j)\}$ et ayant un type supérieur au type des autres coefficients. Alors, toute solution méromorphe $f(z) \not\equiv 0$ de (2.1) vérifie, $\sigma(f) \geq \sigma + 1$.

Remarque 2.1.1 *Dans* [13] *Laine et Yang ont posé la question : Est-il possible que toutes les solutions méromorphes $f(z)$ de* (2.1) *vérifient $\sigma(f) \geq 1 + \max_{0\leq j\leq n}\{\sigma(A_j)\}$, si l'équation* (2.1) *n'a pas de coefficient dominant ?*

Mais l'exemple suivant montre que $f(z)$ peut satisfaire $\sigma(f) \geq 1 + \max_{0\leq j\leq n}\{\sigma(A_j)\}$ s'il n'y a pas de coefficient dominant.

Exemple Soit $f(z) = e^z + z$ est une solution de l'équation

$$[(e-1)z-1] f(z+2) - \left[\left(e^2-1\right)z-2\right] f(z+1) + \left[\left(e^2-2\right)z + \left(e^2-2e\right)\right] f(z) = 0$$

cette équation n'a pas de coefficient dominant et tous les coefficients ont l'ordre 0, mais $\sigma(f) = 1$ satisfait la conclution du Théorème 2.C.

Dans ce qui suit, on continue à considérer les estimations de l'ordre de croissance des solutions méromorphes des équations aux différences linéaires d'ordre supérieur. Dans un premier temps, nous considérons l'ordre inférieur des solutions méromorphes des équations aux différences linéaires homogènes.

Théorème 2.1.1 [21] *Soient $A_0(z), A_1(z), ..., A_n(z)$, des fonctions entières telles qu'il existe un nombre entier l $(0 \leq l \leq n)$ verifiant*

$$\max\{\sigma(A_j), j = 0, ..., n, \ j \neq n\} \leq \mu(A_l) < \infty, \tag{2.1.2}$$

et

$$\max\{\tau(A_j) : \sigma(A_j) = \mu(A_l), j = 0, ..., n, \ j \neq n\} \leq \underline{\tau}(A_l), \tag{2.1.3}$$

où

$$\underline{\tau}(A_l) = \liminf_{r\longmapsto\infty} \frac{\log M(r, A_l)}{r^{\mu(A_l)}} \qquad et \qquad \tau(A_j) = \limsup_{r\longmapsto\infty} \frac{\log M(r, A_j)}{r^{\sigma(A_j)}}$$

désignent le type inferieur de $A_l(z)$ et le type de $A_j(z)$ respectivement. Si $f(z) \not\equiv 0$ est une solution méromorphe de (2.1), *alors $\mu(f) \geq \mu(A_l) + 1$.*

Lorsque les coefficients de (2.1) sont des polynômes nous obtenons un résultat similaire au Théorème 2.1.1, qui est aussi un raffinement du Théorème 2. B.

Théorème 2.1.2 [21] *Soient* $P_0(z)$, $P_1(z)$, ..., $P_n(z)$, *des polynômes tels qu'il existe un entier* l $(0 \leq l \leq n)$ *vérifiant*

$$\max\{\deg(P_j),\ j = 0, ..., n,\ j \neq l\ \} \leq \deg(P_l), \tag{2.1.4}$$

et

$$\sum_{j\in J} |a_j| < |a_l|, \tag{2.1.5}$$

où $J = \{j \in \{0, ..., n\} \setminus \{l\} : \deg(P_j) = \deg(P_l)\}$, *et* a_j, $j = 0, ..., n$, *sont les coefficients principaux de* $P_j(z)$, $j = 0, ..., n$, *respectivement. Si* $f(z) \not\equiv 0$ *est une solution méromorphe de* (2.3), *alors* $\mu(f) \geq 1$.

Les deux exemples suivants illustrent l'exactitude des Théorèmes 2.1.1 et 2.1.2

Exemple 2.1.1 *La fonction* $f(z) = e^{z^2}$ *vérifie les équations aux différences*

$$e^{-4z-4} f(z+2) + e^{-2z-1} f(z+1) - 2f(z) = 0$$

et

$$e^{-4z-4} f(z+2) - f(z) = 0,$$

où les coefficients satisfont aux hypothèses $(2.1.2)$ *et* $(2.1.3)$. *Nous avons* $\mu(f) = 2 = \mu(A_2) + 1$, *ce qui montre que le Théoème 2.1.1 est vrai.*

Exemple 2.1.2 *La fonction* $f_1(z) = e^{z\log 2}$ *vérifie l'équation aux différence*

$$(z+1) f(z+2) - 2f(z+1) - 4zf(z) = 0,$$

et la fonction $f_2(z) = e^z + 1$ *satisfait l'équation*

$$(z+2) f(z+2) - (e+1)\left(z^2+1\right) f(z+1) - e\left(z^2+1\right) f(z) = 0.$$

Il est clair que les hypothèses $(2.1.4)$ *et* $(2.1.5)$ *sont satisfaites. Nous avons* $\mu(f_1) = \mu(f_2) = 1$, *ce qui montre que le Théorème 2.1.2 est vrai.*

Les théorèmes suivants étudient l'ordre des solutions méromorphes de (2.1) dans le cas où il y a plus d'un coefficient ayant un ordre maximal.

Théorème 2.1.3 [21] *Soit* H *un ensemble complexe satisfaisant* $\overline{\log dens}\{r = |z| : z \in H\} > 0$, *et soit* $A_j(z)$, $j = 0, 1, ..., n$, *des fonctions entières telles que* $\max\{\sigma(A_j),\ j = 0, ..., n\} \leq \alpha_1$. *S'il existe une constante positive* α_2 $(\alpha_2 < \alpha_1)$ *et un entier* l $(0 \leq l \leq n)$ *tels que pour tout* ε *donné* $(0 < \varepsilon < \alpha_1 - \alpha_2)$, *on ait*

$$|A_l(z)| \geq \exp\left\{r^{\alpha_1-\varepsilon}\right\},\ z \in H, \tag{2.1.6}$$

$$|A_j(z)| \leq \exp\{r^{\alpha_2}\},\ z \in H,\ j = 0, ..., n,\ j \neq l, \tag{2.1.7}$$

alors toute solution méromorphe $f(z) \not\equiv 0$ *de* (2.1) *satisfait* $\sigma(f) \geq \alpha_1 + 1 = \sigma(A_l) + 1$.

Théorème 2.1.4 [21] *Soient* $A_0(z), A_1(z), ..., A_n(z)$, *des fonctions entières. S'il existe un nombre entier* l $(0 \leq l \leq n)$ *tel que* $\max_{0 \leq j \leq n} \{\sigma(A_j)\} \leq \sigma(A_l)$ *et*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\sum_{j\neq l} m(r, A_j)}{m(r, A_l)} < 1, \tag{2.1.8}$$

alors toute solution méromorphe $f(z) \not\equiv 0$ *de* (2.1) *satisfait* $\sigma(f) \geq \sigma(A_l) + 1$

L'exemple suivant illustre l'exactitude des Théorèmes 2.1.3 et 2.1.4.

Exemple 2.1.3 *La fonction* $f(z) = e^{z^2-3z}$ *vérifie l'équation*

$$e^{-z} f(z+2) + e^{z} f(z+1) - 2e^{3z-2} f(z) = 0,$$

où $A_2(z) = e^{-z}$, $A_1(z) = e^{z}$, $A_0(z) = -2e^{3z-2}$ *vérifient* $\sigma(A_2) = \sigma(A_1) = \sigma(A_0) = 1.$
(i) $l = 2$, $H = \{z : \arg z = \pi\}$, $H_1 = \{r = |z| : z \in H\} = \{r, \ r > 0\}$, *donc*

$$\overline{dens} H_1 = \lim_{r\to\infty} \frac{m(H_1 \cap [0, r])}{r} = \frac{r}{r} = 1 > 0.$$

De plus, $A_i(z)$, $i = 0, 1, 2$, *vérifie les hypothèses* (2.1.6) *et* (2.1.7), *nous avons* $\sigma(f) = 2 = \sigma(A_2) + 1$.
(ii) $l = 0$, *il est clair que* $A_i(z)$, $i = 0, 1, 2$, *vérifient l'hypothèse* (2.1.8). *Par conséquent, nous avons aussi* $\sigma(f) = 2 = \sigma(A_0) + 1$.

Deuxièmement, nous considérons la croissance des solutions entières des équations aux différences linéaires non homogènes

$$A_n(z) f(z+n) + ... + A_1(z) f(z+1) + A_0(z) f(z) = F(z).$$

Notez que les résultats ci-dessus peuvent ne pas être applicables à l'équation homogène auquel (2.1) est l'équation homogène correspondante (voir l'Exemple 2.1.4). Mais nous pouvons obtenir des résultats similaires avec quelques conditions supplémentaires.

Théorème 2.1.5 [21] *Soient* $A_0(z), A_1(z), ..., A_n(z), (F(z) \neq 0)$ *des fonctions entières telles qu'il existe un nombre entier* l $(0 \leq l \leq n)$ *tel que*

$$b = \max\{\sigma(A_j) \ , j = 0, ..., n, \ j \neq l \ , \sigma(F)\} < \sigma(A_l) < \frac{1}{2}, \tag{2.1.9}$$

alors toute solution entière non triviale f *de* (2.2) *satisfait* $\sigma(f) \geq \sigma(A_l) + 1$.

Théorème 2.1.6 [21] *Soient* $A_0(z), A_1(z), ..., A_n(z), F(z)$ *des fonctions entières telles qu'il existe un nombre entier* $l\,(0 \leq l \leq n)$ *tel que*

$$b = \max\{\sigma(A_j) \ , j = 0, ..., n, \ j \neq l \ , \sigma(F)\} < \sigma(A_l) < \infty. \tag{2.1.10}$$

Supposons aussi que $A_l = \sum_{n=1}^{\infty} c_{\lambda_n} z^{\lambda_n}$ *satisfait que la suite des exposants* $\{\lambda_n\}$ *verifie la condition de Fabry gap*

$$\frac{\lambda_n}{n} \to \infty, \tag{2.1.11}$$

alors toute solution entière non triviale f *de* (2.2) *satisfait* $\sigma(f) \geq \sigma(A_l) + 1$.

Théorème 2.1.7 [21] *Soient* $P_0\ (z)\ , P_1\ (z)\ , ..., P_n\ (z)\,,$ *des polynômes tels qu'il existe un entier* l $(0 \leq l \leq n)$ *vérifiant* $(2.1.4)$ *et* $(2.1.5)\,.$ *Si* $f\ (z)$ *est une solution entière transcendante de l'équation*

$$P_n\ (z)\ f\ (z+n) + ... + P_1\ (z)\ f\ (z+1) + P_0\ (z)\ f\ (z) = F\ (z)\,, \tag{2.1.12}$$

alors nous avons $\mu\ (f) \geq 1.$

Exemple 2.1.4 *La fonction* $f\ (z) = e^z$ *vérifie l'équation*

$$f\ (z+2) - ef\ (z+1) + f\ (z) = e^z,$$

et

$$f\ (z+2) - ef\ (z+1) + e^{-z}f\ (z) = 1.$$

Bien qu'il n'y ait qu'un seul coefficient dominant tel que les hypothèses des Théorèmes 2.1.1, $2.1.3 - 2.1.4$ *soient vérifiées, nous ne pouvons pas obtenir des résultats similaires dans le cas de l'équation non homogène.*

Exemple 2.1.5 *La fonction* $f\ (z) = \frac{1}{\Gamma(z)} + 1$ *satisfait l'équation*

$$z\ (z+1)\ f\ (z+2) - zf\ (z+1) = z^2,$$

où les coefficients polynômiaux satisfont l'hypothèse (2.1.4). *Par conséquent, nous avons* $\mu\ (f) = \sigma\ (f) = 1,$ *ce qui montre que Théorème* 2.2.7 *est vrai.*

Exemple 2.1.6 *La fonction* $f\ (z) = z$ *vérifie l'équation*

$$zf\ (z+2) - (z+1)\ f\ (z+1) + z^2 f\ (z) = z^3 + 1,$$

où les coefficients polynomiaux satisfont l'hypothèse (2.1.4), *cet exemple montre que l'équation* (2.1.12) *peut avoir des solutions non transcendantes.*

2.2 Lemmes préliminaires

Lemme 2.2.1 (*voir* [6] .) *Soient* $f\ (z)$ *une fonction méromorphe,* $\eta\ (\neq 0)\,,\ \eta_{1,}\eta_2\,(\eta_1 \neq \eta_2)$ *sont des nombres complexes, et soit* $\gamma > 1,$ *et* $\varepsilon > 0$ *des constantes réelles données. Alors il existe un sous ensemble* $E_1 \subset (1, +\infty)$ *de mesure logarithmique finie,*
(a) *et une constante* A *dépendant uniquement de* γ *et* η *telle que pour tout* $|z| = r \notin (E_1 \cup [0,1])\,,$ *nous avons*

$$\left|\log\left|\frac{f\ (z+\eta)}{f\ (z)}\right|\right| \leq A\left(\frac{T\ (\gamma r, f)}{r} + \frac{n\ (\gamma r)}{r}\log^{\gamma} r \log^{+} n\ (\gamma r)\right); \tag{2.2.1}$$

(b) *et si en plus* $f\ (z)$ *possède une ordre finie* $\sigma,$ *alors pour tout* $|z| = r \notin (E_1 \cup [0,1])\,,$ *nous avons*

$$\exp\left\{-r^{\sigma-1+\varepsilon}\right\} \leq \left|\frac{f\ (z+\eta)}{f\ (z)}\right| \leq \exp\left\{r^{\sigma-1+\varepsilon}\right\}$$

où

$$\exp\left\{-r^{\sigma-1+\varepsilon}\right\} \leq \left|\frac{f\ (z+\eta_1)}{f\ (z+\eta_2)}\right| \leq \exp\left\{r^{\sigma-1+\varepsilon}\right\}. \tag{2.2.2}$$

Lemme 2.2.2 *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe avec $\mu(f) < \infty$. Pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe un sous ensemble $E_2 \subset (1, +\infty)$ ayant une mesure logarithmique infinie telle que pour tout $r \in E_2$, on a*

$$T(r, f) < r^{\mu(f)+\varepsilon}. \tag{2.2.3}$$

Preuve. Par la définition de l'ordre inférieur, il existe une suite $\{r_n\}$ tendand vers ∞ satisfaisant $\left(1 + \frac{1}{n}\right) r_n < r_{n+1}$ et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log T(r_n, f)}{\log r_n} = \mu(f).$$

Alors pour tout $(\varepsilon > 0)$ donné, il existe un n_1 telle que pour $n \geq n_1$, on a

$$T(r_n, f) \leq r_n^{\mu(f)+\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Soit $E_2 = \cup_{n=n_1}^{\infty} \left[\left(\frac{n}{n+1}\right) r_n,\ r_n\right]$, alors pour tout $r \in E_2$, nous avons

$$T(r, f) \leq T(r_n, f) \leq r_n^{\mu(f)+\frac{\varepsilon}{2}} \leq \left(\frac{n+1}{n} r\right)^{\mu(f)+\frac{\varepsilon}{2}} < r^{\mu(f)+\varepsilon},$$

et $lmE_2 = \sum_{n=n_1}^{\infty} \int_{\frac{n}{n-1} r_n}^{r_n} = \sum_{n=n_1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \infty$. Ainsi le Lemme 2.2.2 est prouvé

Lemme 2.2.3 [21]*Soit $f(z)$ une fonction méromorphe avec $\mu(f) < \infty$, η_1, η_2 étant des nombres complexes distincts, et soit ε (> 0) une constante réelle donnée. Alors il existe un sous ensemble $E_3 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique infinie tel que pour tout $|z| = r \in E_3$, nous avons*

$$\exp\left\{-r^{\mu(f)-1+\varepsilon}\right\} \leq \left|\frac{f(z+\eta_1)}{f(z+\eta_2)}\right| \leq \exp\left\{r^{\mu(f)-1+\varepsilon}\right\}.$$

Lemme 2.2.4 (*voir* [6] .) *Soient η_1, η_2 deux nombres complexes tels que $\eta_1 \neq \eta_2$, et soit $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre fini. Soit σ l'ordre de $f(z)$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, nous avons*

$$m\left(r, \frac{f(z+\eta_1)}{f(z+\eta_2)}\right) = O\left(r^{\sigma-1+\varepsilon}\right).$$

Lemme 2.2.5 (*voir* [2] .) *Soit $f(z)$ une fonction entière d'ordre $\sigma(f) = \sigma < \frac{1}{2}$ et désignant par $A(r) = \inf_{|z|=r} \log|f(z)|$, $B(r) = \sup_{|z|=r} \log|f(z)|$. Si $\sigma < \alpha < 1$, alors*

$$\underline{\log dens}\,\{r : A(r) > (\cos \pi\alpha) B(r)\} \geq 1 - \frac{\sigma}{\alpha}.$$

Lemme 2.2.6 (*voir* [3] .) *Soit $f(z)$ une fonction entière avec $\mu(f) = \mu < \frac{1}{2}$ et $\mu < \sigma = \sigma(f)$. Si $\mu \leq \delta < \min\left\{\sigma, \frac{1}{2}\right\}$ et $\delta < \alpha < \frac{1}{2}$, alors*

$$\overline{\log dens}\left\{r : A(r) > (\cos \pi\alpha) B(r) > r^{\delta}\right\} > C(\sigma, \delta, \alpha),$$

où $C(\sigma, \delta, \alpha)$ est une constante positive qui dépend uniquement de σ, δ, α.

Lemme 2.2.7 [21]*Soit $f(z)$ une fonction entière d'ordre $0 < \sigma(f) = \sigma < \infty$. Alors pour tout $\beta < \sigma$, il existe un ensemble E_4 avec une densité logarithmique supérieure positive tel que pour tout $|z| = r \in E_4$,nous avons*

$$\log M(r,f) > r^{\beta},$$

où $M(r,f) = \max_{|z|=r} |f(z)|$.

Preuve. Par la définition de l'ordre, il existe une suite $\{r_n\}$ tendant vers ∞ telle que pour tout $(\varepsilon > 0)$ donné, nous avons

$$\log M(r,f) > r_n^{\sigma-\varepsilon}.$$

Soit $\beta < \sigma$. Alors nous pouvons choisir ε (suffisamment petit) et α satisfaisant $1 < \alpha < \frac{\sigma-\varepsilon}{\beta}$. Ensuite, pour tout $r \in [r_n, r_n^{\alpha}]$ $(n \geq 1)$, on a

$$\log M(r,f) \geq \log M(r_n,f) > r_n^{\sigma-\varepsilon} \geq r^{\frac{\sigma-\varepsilon}{\alpha}} > r^{\beta}.$$

Posons $E_4 = \cup_{n=1}^{\infty} [r_n, r_n^{\alpha}]$. Alors nous avons

$$\overline{\log dens} E_4 \geq \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{lm(E_4 \cap [1,r])}{\log r} \geq \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{lm(E_4 \cap [1,r_n^{\alpha}])}{\log r_n^{\alpha}} \geq \lim_{n\to\infty} \frac{lm([r_n, r_n^{\alpha}])}{\log r_n^{\alpha}} = \frac{\alpha-1}{\alpha} > 0.$$

Ainsi le Lemme 2.2.7 est prouvé.

Lemme 2.2.8 *(voir [10].) Soit $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{\lambda_n} z^{\lambda_n}$ une fonction entière d'ordre $0 < \sigma(f) = \sigma < \infty$. Si la suite des exposants $\{\lambda_n\}$ vérifie la condition de Fabry gap (2.1.11), alors pour tout $\beta < \sigma(f)$, il existe un ensemble E_6 avec une densité logarithmique supérieure positive telle que pour tout $|z| = r \in E_6$, nous avons*

$$\log L(r,f) > r^{\beta},$$

où $L(r,f) = \min_{|z|=r} |f(z)|$.

2.3 Preuves des Théorèmes 2.1.1-2.1.7

2.3.1 Preuve du Théorème 2.1.1.

On suppose que $f(z)$ est une solution méromophe de (2.1) satisfaisant

$$\mu(f) < \mu(A_l) + 1 < \infty. \tag{2.3.1}$$

Dans la relation (2.1.2) et (2.1.3) notons

$$\sigma = \max\{\sigma(A_j) : \sigma(A_j) \leq \mu(A_l),\ j = 0, ..., n,\ j \neq l\}$$

et

$$\tau = \max\{\tau(A_j) : \sigma(A_j) = \mu(A_l),\ j = 0, ..., n,\ j \neq l\}.$$

Alors pour tout $\varepsilon\,(>0)$ donné et r suffisamment grand, on a

$$|A_j(z)| \leq \exp\left\{r^{\sigma+\varepsilon}\right\} \tag{2.3.2}$$

si $\sigma(A_j) < \mu(A_l)$, et

$$|A_j(z)| \leq \exp\left\{(\tau+\varepsilon)\, r^{\mu(A_l)}\right\} \tag{2.3.3}$$

si $\sigma(A_j) = \mu(A_l)$. De plus, par le Lemme 2.2.3, il existe un sous ensemble $E_3 \subset (1,+\infty)$ ayant une mesure logarithmique infinie telle que pour tout z satisfaisant $|z| = r \in E_3$, on a

$$\left|\frac{f(z+j)}{f(z+l)}\right| \leq \exp\left\{r^{\mu(f)-1+\varepsilon}\right\},\ j=0,...,n,\ j\neq l. \tag{2.3.4}$$

Alors on choisit $\varepsilon\,(>0)$ suffisamment petit tel que

$$\max\{\sigma,\ \mu(f)-1\} + 2\varepsilon < \mu(A_l) \ \text{ et } \tau + 2\varepsilon < \underline{\tau}(A_l). \tag{2.3.5}$$

Maintenant, on divise l'équation (2.1) par $f(z+l)$ pour obtenir

$$\begin{aligned} -A_l(z) &= A_n(z)\frac{f(z+n)}{f(z+l)} + ... + A_{l+1}(z)\frac{f(z+l+1)}{f(z+l)} \\ &\quad + A_{l-1}(z)\frac{f(z+l-1)}{f(z+l)} + ... + A_0(z)\frac{f(z)}{f(z+l)} \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

En substituant $(2.3.2) - (2.3.4)$ dans $(2.3.6)$, on obtient

$$\begin{aligned} |A_l(z)| &\leq |A_n(z)|\left|\frac{f(z+n)}{f(z+l)}\right| + ... + |A_{l+1}(z)|\left|\frac{f(z+l+1)}{f(z+l)}\right| \\ &\quad + |A_{l-1}(z)|\left|\frac{f(z+l-1)}{f(z+l)}\right| + ... + |A_0(z)|\left|\frac{f(z)}{f(z+l)}\right| \\ &\leq \sum_{0\leq j\neq l\leq n}\left|\frac{f(z+j)}{f(z+l)}\right| |A_j(z)| \\ &\leq \exp\left\{r^{\mu(f)-1+\varepsilon}\right\}\sum_{0\leq j\neq l\leq n}|A_j(z)| \\ M(r,A_l) &\leq \exp\left\{r^{\mu(f)-1+\varepsilon}\right\}\left(K_1\exp\left\{r^{\sigma+\varepsilon}\right\} + K_2\exp(\tau+\varepsilon)\, r^{\mu(A_l)}\right),\ r\in E_3,\ K_1,\ K_2\in\mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

par conséquent, nous avons par (2.3.5)

$$\underline{\tau}(A_l) \leq \liminf_{r\longmapsto\infty}\frac{\log M(r,A_l)}{r^{\mu(A_l)}} \leq \tau+\varepsilon < \underline{\tau}(A_l) - \varepsilon,$$

c'est une contradiction. Par conséquent, nous avons $\mu(f) \geq \mu(A_l) + 1$.

2.3.2 Preuve du Théorème 2.1.2.

Supposons que $f(z)$ est une solution de (2.3) vérifiant $\mu(f) < 1$. On divise l'équation (2.3) par $f(z+l)$ pour obtenir

$$-P_l(z) = P_n(z)\frac{f(z+n)}{f(z+l)} + ... + P_{l+1}(z)\frac{f(z+l+1)}{f(z+l)} + P_{l-1}(z)\frac{f(z+l-1)}{f(z+l)} + ... + P_0(z)\frac{f(z)}{f(z+l)}. \tag{2.3.7}$$

Puisque $\mu(f) < 1$, on peut choisir $\varepsilon\,(>0)$ suffisamment petite tel que $\mu(f) + \varepsilon < 1$. Puis par le Lemme 2.2.3, il existe un sous ensemble $E_3 \subset (1, +\infty)$ ayant une mesure logarithmique infinie tel que pout tout z satisfaisant $|z| = r \in E_3$, on a

$$\left|\frac{f(z+j)}{f(z+l)}\right| \leq \exp\left\{r^{\mu(f)-1+\varepsilon}\right\} = \exp\{o(1)\} = 1 + o(1)\,,\ \ j = 0, ..., n,\ \ j \neq l. \tag{2.3.8}$$

En substituant (2.3.8) dans (2.3.7), on obtient

$$\begin{aligned} |P_l(z)| &\leq |P_n(z)|\left|\frac{f(z+n)}{f(z+l)}\right| + ... + |P_{l+1}(z)|\left|\frac{f(z+l+1)}{f(z+l)}\right| \\ &\quad + |P_{l-1}(z)|\left|\frac{f(z+l-1)}{f(z+l)}\right| + ... + |P_0(z)|\left|\frac{f(z)}{f(z+l)}\right| \\ &\leq \sum_{0\leq j\neq l\leq n} |P_j(z)|\left|\frac{f(z+j)}{f(z+l)}\right| \\ &\leq 1 + o(1)\sum_{0\leq j\neq l\leq n} |P_j(z)| \end{aligned}$$

C'est une contradiction avec les hypothèses (2.1.4) et (2.1.5), alors $\mu(f) \geq 1$.

2.3.3 Preuve du Théorème 2.1.3.

Si $\sigma(f) = \infty$, le résultat est trivial. On suppose que $\sigma(f) < \alpha_1 + 1 = \sigma(A_l) + 1$. Notons $H_1 = \{r = |z| :\ z \in H\}$. Puisque $\overline{\log dens} H_1 > 0$, alors H_1 est un ensemble de r de mesure logarithmique infinie. Par les hypothèses $\sigma(A_l) \leq \alpha_1$ et (2.1.5), il est facile d'obtenir $\sigma(A_l) = \alpha_1$. De plus, d'après le Lemme 2.2.1(b), il existe un sous ensemble $E_1 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour tout $\varepsilon\,(>0)$ donné et pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin ([0,1] \cup E_1)$, nous avons

$$\left|\frac{f(z+j)}{f(z+l)}\right| \leq \exp\left\{r^{\sigma(f)-1+\varepsilon}\right\},\ \ j = 0, ..., n,\ \ j \neq l. \tag{2.3.9}$$

En substituant (2.3.9) et (2.1.6) – (2.1.7) dans (2.3.6), nous avons

$$\exp\left\{r^{\alpha_1-\varepsilon}\right\} \leq |A_l(z)| \leq n\exp\{r^{\alpha_2}\}\exp\left\{r^{\sigma(f)-1+\varepsilon}\right\}, \qquad |z| = r \in H_1 \backslash ([0,1] \cup E_1)\,. \tag{2.3.10}$$

On choisit $0 < \varepsilon < \min\left(\alpha_{1-}\alpha_2, \frac{\alpha_1 - \sigma(f)+1}{2}\right)$, et on divise l'équation (2.3.11) par $\exp\left\{r^{\alpha_1-\varepsilon}\right\}$ pour obtenir

$$1 \leq n \exp\left\{r^{\alpha_2} + r^{\sigma(f)-1+\varepsilon} - r^{\alpha_1-\varepsilon}\right\}$$

Par le passage à la limite, on a

$$1 \leq 0$$

.C'est une contradicion, alors $\sigma(f) \geq \alpha_1 + 1 = \sigma(A_l) + 1$.

2.3.4 Preuve du Théorème 2.1.4.

Si $\sigma(f) = \infty$, le résultat est trivial. On suppose que $\sigma(f) < \infty$. D'après le Lemme 2.2.4, pour r suffisamment grand et tout $\varepsilon\,(>0)$ donné,

$$m\left(r, \frac{f(z+j)}{f(z+l)}\right) = O\left(r^{\sigma(f)-1+\varepsilon}\right). \tag{2.3.11}$$

En substituant (2.3.11) dans (2.3.6), nous avons

$$\begin{aligned} m(r, A_l) &\leq m(r, A_n) + m\left(r, \frac{f(z+n)}{f(z+l)}\right) + ... + m(r, A_0) + m\left(r, \frac{f(z)}{f(z+l)}\right) && (2.3.12) \\ &\leq \sum_{0\leq j\neq l\leq n} m\left(r, \frac{f(z+j)}{f(z+l)}\right) + \sum_{0\leq j\neq l\leq n} m(r, A_j) \\ &\leq O\left(r^{\sigma(f)-1+\varepsilon}\right) + \sum_{0\leq j\neq l\leq n} m(r, A_j). && (2.3.13) \end{aligned}$$

Par l'hypothèse (2.1.8) on a

$$\sum_{0\leq j\neq l\leq n} m(r, A_j) \leq \beta\, m(r, A_l), \qquad \beta < 1$$

donc

$$m(r, A_l) \leq O\left(r^{\sigma(f)-1+\varepsilon}\right) + \beta\, m(r, A_l).$$

Par le passage à la limite supérieure, on a

$$\sigma(A_l) \leq \sigma(f) - 1 + \varepsilon.$$

Puisque $\varepsilon\,(>0)$ est arbitraire, alors $\sigma(f) \geq \sigma(A_l) + 1$.

2.3.5 Preuve du Théorème 2.1.5.

Si $\sigma(f) = \infty$, alors le résultat est trivial. On suppose que $\sigma(f) < \sigma(A_l) + 1$.On divise l'équation (2.2) par $f(z+l)$ pour obtenir

$$\begin{aligned} -A_l(z) &= A_n(z)\frac{f(z+n)}{f(z+l)} + ... + A_{l+1}(z)\frac{f(z+l+1)}{f(z+l)} \\ &+ A_{l-1}(z)\frac{f(z+l-1)}{f(z+l)} + ... + A_0(z)\frac{f(z)}{f(z+l)} - \frac{F(z)}{f(z)}\frac{f(z)}{f(z+l)}. \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

Par le Lemme 2.2.1(b), on a (2.3.9) est vérifiée pour tout $\varepsilon > 0$ donné et pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin ([0,1] \cup E_1)$, où $E_1 \subset (1,+\infty)$ posède une mesure logarithmique finie. Par l'hypothèse (2.1.9), pour $r = |z|$ suffisamment grand

$$|A_j(z)| \leq \exp\left\{r^{b+\varepsilon}\right\}, \quad j = 0, ..., n, \ j \neq l, \quad (2.3.15)$$

et

$$|F(z)| \leq \exp\left\{r^{b+\varepsilon}\right\}.$$

Puisque $M(r,f) > 1$, alors pour $r = |z|$ suffisamment grand, nous avons

$$\frac{|F(z)|}{M(r,f)} \leq |F(z)| \leq \exp\left\{r^{b+\varepsilon}\right\}. \quad (2.3.16)$$

Par le Lemme 2.2.5 (si $\mu(A_l) = \sigma(A_l)$) ou le Lemme 2.2.6 (si $\mu(A_l) < \sigma(A_l)$), il existe un sous ensemble $E_7 \subset (1,+\infty)$ ayant une mesure logarithmique infinie tel que pour tout z satisfaisant $|z| = r \in E_7$, nous avons

$$|A_l(z)| \geq \exp\left\{r^{\sigma(A_l)-\varepsilon}\right\}. \quad (2.3.17)$$

En substituant (2.3.9), (2.3.15) $-$ (2.3.17) dans (2.3.14), pour tout z satisfaisant $|z| = r \in E_7 \setminus ([0,1] \cup E_1)$ et $|f(z)| = M(r,f)$, on a

$$\exp\left\{r^{\sigma(A_l)-\varepsilon}\right\} \leq |A_l(z)| \leq (n+1)\exp\left\{r^{b+\varepsilon}\right\}\exp\left\{r^{\sigma(f)-1+\varepsilon}\right\}. \quad (2.3.18)$$

Maintenant, on choisit $0 < \varepsilon < \min\left\{\frac{\sigma(A_l)-b}{2}, \frac{\sigma(A_l)-\sigma(f)+1}{2}\right\}$, on divise l'équation (2.3.17) par $\exp\left\{r^{\sigma(A_l)-\varepsilon}\right\}$

$$1 \leq \frac{(n+1)\exp\left\{r^{b+\varepsilon}\right\}\exp\left\{r^{\sigma(f)-1+\varepsilon}\right\}}{\exp\left\{r^{\sigma(A_l)-\varepsilon}\right\}}.$$

Par le passage à la limite, on a

$$1 \leq 0.$$

C'est une contradiction, alors $\sigma(f) \geq \sigma(A_l) + 1$.

2.3.6 Preuve du Théorème 2.1.6.

Si $\sigma(f) = \infty$, alors le résultat est trivial. On suppose que $\sigma(f) < \sigma(A_l) + 1$.On divise l'équation (2.2) par $f(z+l)$ pour obtenir

$$\begin{aligned} A_l(z) &= A_n(z)\frac{f(z+n)}{f(z+l)} + ... + A_{l+1}(z)\frac{f(z+l+1)}{f(z+l)} \\ &+ A_{l-1}(z)\frac{f(z+l-1)}{f(z+l)} + ... + A_0(z)\frac{f(z)}{f(z+l)} - \frac{F(z)}{f(z)}\frac{f(z)}{f(z+l)}. \quad (2.3.19) \end{aligned}$$

Par le Lemme 2.2.1 (b), on a (2.3.9) est vérifiée pour tout $\varepsilon > 0$ donné et pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin ([0,1] \cup E_1)$, où $E_1 \subset (1, +\infty)$ possède une mesure logarithmique finie. Par l'hypothèse (2.1.9), pour $r = |z|$ suffisamment grand

$$|A_j(z)| \leq \exp\left\{r^{b+\varepsilon}\right\}, \quad j = 0, ..., n, \ j \neq l, \tag{2.3.20}$$

et

$$|F(z)| \leq \exp\left\{r^{b+\varepsilon}\right\}.$$

D'aprés le Lemme 2.2.8, il existe un sous ensemble E_6 de densité logarithmique supérieure positive tel que pour tout $r = |z| \in E_6$, nous avons

$$L(r, f) > e^{r^\beta}.$$

Puisque $L(r, f) > e^{r^\beta}$ pour $r = |z|$ suffisamment grand, nous avons

$$\frac{|F(z)|}{L(r,f)} \leq \frac{|F(z)|}{\exp\{r^\beta\}} \leq \exp\left\{r^{b+\varepsilon}\right\}. \tag{2.3.21}$$

En substituant (2.3.9), (2.3.15) $-$ (2.3.17) dans (2.3.14), pour tout z satisfaisant $|z| = r \in E_7 \backslash ([0,1] \cup E_1)$ et $|f(z)| = M(r, f)$, on a

$$\exp\left\{r^{\sigma(A_l)-\varepsilon}\right\} \leq |A_l(z)| \leq (n+1)\exp\left\{r^{b+\varepsilon}\right\}\exp\left\{r^{\sigma(f)-1+\varepsilon}\right\}. \tag{2.3.22}$$

Maintenant, on choisit $0 < \varepsilon < \min\left\{\frac{\sigma(A_l)-b}{2}, \frac{\sigma(A_l)-\sigma(f)+1}{2}\right\}$, on divise l'équation (2.3.17) par $\exp\left\{r^{\sigma(A_l)-\varepsilon}\right\}$

$$1 \leq \frac{(n+1)\exp\left\{r^{b+\varepsilon}\right\}\exp\left\{r^{\sigma(f)-1+\varepsilon}\right\}}{\exp\left\{r^{\sigma(A_l)-\varepsilon}\right\}}.$$

Par le passage à la limite, on a

$$1 \leq 0.$$

C'est une contradiction, alors $\sigma(f) \geq \sigma(A_l) + 1$.

2.3.7 Preuve du Théorème 2.1.7.

Supposons que $f(z)$ est une solution entière transcendante de (2.1.12) vérifiant $\mu(f) < 1$. En divisant l'équation (2.1) par $f(z+l)$ on obtenir

$$\begin{aligned} -P_l(z) &= P_n(z)\frac{f(z+n)}{f(z+l)} + ... + P_{l+1}(z)\frac{f(z+l+1)}{f(z+l)} + P_{l-1}(z)\frac{f(z+l-1)}{f(z+l)} \\ &\quad +... + P_0(z)\frac{f(z)}{f(z+l)} - \frac{F(z)}{f(z)}\frac{f(z)}{f(z+l)}. \end{aligned} \tag{2.3.23}$$

Puisque $\mu(f) < 1$, on a (2.2.8) pour tout ε donné $(0 < \varepsilon < 1 - \mu(f))$ et pour tout z satisfaisant $|z| = r \in E_3$, où $E_3 \subset (1, +\infty)$ posède une mesure logarithmique infinie. Puisque $f(z)$ est transcendante, alors pour $r = |z|$ suffisamment grand

$$\frac{|F(z)|}{M(r,f)} = o(1). \tag{2.3.24}$$

En substituant (2.2.8) et (2.3.24) dans (2.3.23) on obtient pour tout z satisfaisant $|z| = r \in E_3$, $r \to \infty$ et $|f(z)| = M(r,f)$,

$$\begin{aligned} |P_l(z)| &\leq |P_n(z)|\left|\frac{f(z+n)}{f(z+l)}\right| + ... + |P_{l+1}(z)|\left|\frac{f(z+l+1)}{f(z+l)}\right| + |P_{l-1}(z)|\left|\frac{f(z+l-1)}{f(z+l)}\right| \\ &\quad +... + P_0(z)\frac{f(z)}{f(z+l)} - \frac{F(z)}{f(z)}\frac{f(z)}{f(z+l)} \\ &\leq \sum_{0\leq j\neq l\leq n} |P_j(z)|\left|\frac{f(z+j)}{f(z+l)}\right| + \frac{|F(z)|}{|f(z)|}\frac{|f(z)|}{|f(z+l)|} \\ &\leq (1+o(1)) \sum_{0\leq j\neq l\leq n} |P_j(z)|. \end{aligned}$$

C'est une contradiction avec les hypothèses (2.1.4) et (2.1.5), alors $\mu(f) \geq 1$.

CONCLUSION

Dans ce mémoire, on a étudié quelques résultats dus à Xiu-Min Zheng et Jin Tu [21] concernant la croissance et l'oscillation des solutions méromophes des équations aux différences linéaires homogènes et non homgènes à coefficients fonctions entières de la forme

$$A_n(z) f(z+n) + ... + A_1(z) f(z+1) + A_0(z) f(z) = 0$$

et

$$A_n(z) f(z+n) + ... + A_1(z) f(z+1) + A_0(z) f(z) = F(z)$$

Une question naturelle : Est-il possible d'obtenir des résultats similaires lorsque les coefficients $A_j(z)$ $(j = 0, ..., k-1)$ sont des fonctions méromorphes ?

Bibliographie

[1] **M. Andasmas, B. Belaïdi**. On the growth and the zeros of solutions of higher order linear differential equations with meromorphic coefficients. Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) 98(112) (2015), 199–210.

[2] **P. D. Barry**, On a theorem of Besicovith, Quart. J. Math. Oxford 14 (2), (1963), 293-302.

[3] **P. D. Barry**, Some theorems related to the $\cos \pi\rho$ theorem, Proc. Lond. Math. Soc.21 (3) (1970), 334-360.

[4] **B. Belaïdi**. Iterated order of meromorphic solutions of homogeneous and non-homogeneous linear differeations. ROMAI J. 11 (2015), no. 1, 33-46.

[5] **B. Belaïdi**. Fonctions entières et théorie de Nevanlinna. Éditions Al Djazair, 2017.

[6] **Y.M. Chiang, S. J. Feng**, On the Nevanlinna characteristic of $f(z+\eta)$ and difference equations in the complex plane, Ramanujan J.16 (2008),105-129.

[7] **A. A. Goldberg, I. V. Ostrovskii**, Value Distribution of Meromorphic Functions, 2nd edition, Transl. Math. Monogr., American Mathematical Society, 2008.

[8] **R.G. Halburd, R.J. Korhonen**, Difference analogue of the lemma on the logarithmic derivative with applications to difference equations, J. Math. Anal. Appl. 314 (2006), 477-487.

[9] **W.K. Hayman**, Meromorphic Functions, Clarendon Press, Oxford, 1964.

[10] **W.K. Hayman**, Angular value distribution of power series with gaps, Proc. Lond. Math. Soc. 24 (3) (1972), 590-624.

[11] **A. S. B. Holland**, Introduction to the theory of entire functions. Pure and Applied Mathematics, Vol. 56. Academic Press, New York-London, 1973.

[12] **I. Laine**, Nevanlinna Theory and Complex Differential Equations, Walter de Gruyter, Berlin, 1993.

[13] **I. Laine**, Complex differential equations, Handbook of Differential Equations : Ordinary Differential Equations, 4(2008), 269-363.

[14] **I. Laine, C.C. Yang**, Clunie theorems for difference and q-difference polynomials, J. Lond. Math. Soc.76 (2) (2007), 556-566.

[15] **Z. Latreuch, B. Belaïdi**. Growth and oxillation of meromorphic solutions of linear difference equations. Math. Vesnik **66** (2014), no. 2, 213-222.

[16] **R. Nevanlinna**, Analytic Functions, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[17] **L. I. Ronkin**, Functions of compeletly Regular Growth,Translated from the Russian byA. Ronkin and I. Yedvabnik,Math .Appl (Sov. Ser), vol. 81, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1992.

[18] **L. Yang**, Value distribution theory, Springer-Verlag, Berlin , 1993.

[19] **C. C. Yang and H. X. Yi**, Uniqueness Theory of Meromorphic Functions, Kluwer, Dordrecht, 2003.

[20] **X.M. Zheng, Z.X. Chen,** Some properties of meromorphic solutions of q-difference equations, J. Math. Anal. Appl. 361 (2010) 472–480.

[21] **X. M. Zheng, J. Tu,** Growth of meromorphic solutions of linear difference equations. J. Math. Anal. Appl. 384 (2011), no. 2, 349-356.