UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM

FACULTÉ DES SCIENCES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MEMOIRE

DE MAGISTER EN MATHÉMATIQUES

Applications de l' analyse harmonique réelle à l' étude des équations de Navier-Stokes

Présenté par

Benbernou Samia

Soutenu le 05 / 11 / 2007 devant le Jury

Amina LAHMAR-BENBERNOU	**Président**	**Prof.**	**U. MOSTAGANEM**
Berrabah BENDOUKHA	**Encadreur**	**M.C**	**U. MOSTAGANEM**
Sadek GALA	**Co-encadreur**	**M.C**	**U. MOSTAGANEM**
Noureddine BENHAMIDOUCHE	**Examinateur**	**Prof.**	**U. M' SILA**
Mohamed BELKHELFA	**Examinateur**	**M.C**	**C.U.MASCARA**

Dédicaces

Je dédie ce travail à la mémoire de mon défunt père qui a tant voulu me voir réussir

A ma très chère mère

A mes soeurs et frère

A mon mari

A Hakim et Rayène.

Remerciements

Je voudrai remercier en premier lieu Messieurs Berrabah Bendoukha et Sadek Gala Maîtres de Conférences à l' Université de Mostaganem pour m' avoir proposé un thème de recherche intéressant et porteur. Ils ont su par leurs conseils permanents et leur présence tout au long de la réalisation de ce travail me faire connaitre de manière enthousiasmante le domaine de l' analyse harmonique.
Ma gratitude va également à Monsieur Noureddine Benhamidouche Professeur à l' Université de M' Sila qui m' honore en acceptant de faire partie de mon Jury de soutenance. Je ne peux oublier d' adresser tous mes sentiments d' admiration à ma soeur ainée le Professeur Madame Lahamar-Benbebernou Amina. C' est pour moi un immense plaisir de la voir présider ce Jury.

Résumé

Le but de ce mémoire est l' application de quelques outils de l' analyse harmonique réelle à l' étude des équations de Navier-Stokes $n-$dimensionnelles dans l' espace $\mathbb{R}^n$ tout entier $(n \geq 3)$:

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u - (u.\nabla)\, u - \nabla p \\ \nabla . u = 0 \\ (t,x) \in (0,T) \times \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{0.0.1}$$

où les inconnues sont le vecteur vitesse $u(t,x) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et la pression $p(t,x) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. ∇ est l' opérateur différentiel $(\partial_{x_1}, ..., \partial_{x_n})$ noté vectoriellement, $\nabla.u$ est la divergence du champ u, Δ est l' opérateur de Laplace $(\nabla.\nabla)$ tandis que $(u.\nabla)$ est l' opérateur de dérivation partielle $u_1\partial_{x_1} + ...u_n\partial_{x_n}$.

Le point de départ de l' étude est la notion même de solution. Dès qu' on sort du cadre classique, où toutes les dérivations sont à considérer au sens fort, il y a plus d' une façon de définir une solution faible et les mots "faible" et "mild" utilisés dans la littérature en sont une preuve. De plus, il est usuel d' associer à un problème de Cauchy différentiel une formulation intégrale et de transposer le problème initial sur celle-ci. Le système de Navier-Stokes devient alors (après avoir appliqué formellement l' opérateur $\mathbb{P}$ de projection sur le champs des vecteurs à divergence nulle) :

$$u(t) = e^{t\Delta} u_0 - \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta} \mathbb{P}\,(u.\nabla)\, u(\tau) d\tau.$$

Là encore, l' équivalence entre les deux approches n' est pas toujours évidente (pour plus de détails voir [9]).

Rappelons que les équations de Navier-Stokes sur $(0,T) \times \mathbb{R}^n$ décrivant l' évolution de la vitesse d' un fluide newtonien incompressible, homogène et visqueux $u(t,x)$, sont données en l' absence de force extérieure au système (0.0.1).

Le système de Navier-Stokes est donc un système d' équations aux dérivées partielles non linéaires d' évolution, portant sur la vitesse et la pression du fluide. La présence de $-\nabla p$ dans le membre de droite de (0.0.1) assure que la divergence de u reste nulle au cours du temps.

En prenant la divergence de la première équation dans (0.0.1), on s' aperçoit sans peine que la pression est reliée au champ de vitesses par l' équation de Poisson

$$-\Delta p = \text{div } \left[(u.\nabla)\, u \right]. \tag{0.0.2}$$

Cette équation de Poisson peut être résolue par exemple de la manière suivante : l' incompressibilité du système nous donne que

$$(u.\nabla)\, u = \sum_j \partial_j \left(u^j u \right),$$

Donc (0.0.2) s' écrit sous la forme

$$-\Delta p = \sum_{j,k} \partial_j \partial_k \left(u^j u^k \right)$$

ou encore

$$p = (-\Delta)^{-1} \sum_{j,k} \partial_j \partial_k \left(u^j u^k \right).$$

Nous pouvons donc définir le projecteur de Leray

$$\mathbb{P} = Id - \nabla \Delta^{-1} \nabla.$$

et considérer le système équivalent suivant

$$\partial_t u = \Delta u - \mathbb{P} \left[(u.\nabla)\, u \right].$$

On remarque que ce nouveau système ne porte plus que sur le champ de vitesses (de divergence nulle).

Le projecteur de Leray $\mathbb{P}$ est orthogonal dans L^2 et comme u est de divergence nulle, on a

$$\langle u, \mathbb{P} \left[(u.\nabla)\, u \right] \rangle = \langle u, (u.\nabla)\, u \rangle.$$

Par intégration par parties on peut écrire

$$\begin{aligned}
\langle u, (u.\nabla)\, u \rangle &= \sum_{j,k \in \{1,\ldots,n\}^2} \left\langle u^j, u^k \partial_k u^j \right\rangle \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k \in \{1,\ldots,n\}} \int_{\mathbb{R}^n} u^k \partial_k |u|^2 \, dx \\
&= -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} (\text{div } u)\, |u|^2 \, dx = 0.
\end{aligned}$$

Le terme non linéaire du système de Navier-Stokes est donc antisymmétrique dans L^2, indépendament de la dimension de l' espace. La connaissance du champ de vitesses u permet finalement d' obtenir la pression par l' équation de Poisson (0.0.2).

Le premier chapitre est consacré à l' étude des solutions milds, c' est à dire des solutions faibles qui sont de plus continues en temps et à valeurs dans un espace de Banach E de distributions ($u(t,x) \in C([0,T], E)$). Deux questions naturelles se posent :

1. Si on considère une donnée initiale $u_0 \in E$, existe-t-il une solution $u(t,x)$ dans $C([0,T], E)$?
2. En cas d' existence, cette solution est-elle unique ?

Il y a une différence remarquable dans la façon d' aborder ces deux questions. Ceci est dû à la présence de la non-linéarité. En effet, même en remplaçant $(u.\nabla) u$ par $\nabla (u \otimes u)$ (grâce à la condition de divergence nulle), il n' est pas toujours possible de faire un produit de distributions. Lorsqu' on se demande s' il existe une fonction $u(t,x) \in C([0,T], E)$ qui vérifie les équations de Navier-Stokes, on a le droit de rechercher une solution plus régulière, de façon à pouvoir donner un sens au terme $(u \otimes u)$ même si a priori le produit n' est pas défini sur E. Par contre, lorsqu' on se pose la question de l' unicité dans $C([0,T], E)$, on est obligé de se restreindre aux espaces E où le produit est bien défini. La condition discriminante sera

$$E \hookrightarrow L^2_{loc}.$$

Le résultat éssentiel de ce chapitre est l' unicité des solutions milds de Navier-Stokes dans l' espace $C([0,T), L^n(\mathbb{R}^n)^n)$.

Le chapitre 2 est consacré à la généralisation du résultat d' unicité des solutions faibles au sens de Leray pour les équations de Navier-Stokes au cas des espaces de multiplicateurs $C\left([0,T), \dot{X}_1(\mathbb{R}^n)^n\right)$.

Les résultats obtenus dans ce mémoire ont fait l' objet de deux publications.

1. On the regularity of weak solutions to the Navier-Stokes equations, Advances and Applications in Fluid Mechanics, 1 : 2 (2007), 147-180.
2. Remark on uniqueness of weak solutions to the Navier-Stokes equations, Analysis (International mathematical journal of analysis and its applications), à paraître.

Table des matières

Chapitre 1

Unicité dans $L^n(\mathbb{R}^n)$ pour les équations de Navier-Stokes

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, on se propose de donner une nouvelle preuve du théorème d' unicité des solutions "mild" de l' équation de Navier-Stokes [11] dans l' espace $C([0,T), L^n(\mathbb{R}^n)^n)$.
Les équations de Navier-Stokes dans le cas d' un fluide visqueux, incompressible et homogène remplissant tout l' espace (en l' absence de forces extérieures et en prenant les constantes de densité et de viscosité égales à 1) sont données par le système :

$$\left\{ \begin{array}{c} \partial_t u = \Delta u - (u.\nabla) u - \nabla p \\ \nabla.u = 0 \end{array} \right. \tag{1.1.1}$$

où $u(t,x) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est le vecteur vitesse de l' élément de fluide à l' instant t et à la position x, $p(t,x) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est la pression (inconnue) dont le rôle est de maintenir la divergence de u égale à 0 (cette condition de divergence nulle exprime l' incompressibilité du fluide).
Lorsqu' on étudie les solutions faibles de (1.1.1) (les dérivations sont alors prises au sens des distributions), on remplace le terme $(u.\nabla) u$ par $\nabla. (u \otimes u) = (\nabla.u) u + (u.\nabla) u$.

Définition 1.1.1 *Soit $T \in]0,+\infty]$ fixé. Une solution faible sur $]0,T[$ de l' équation de Navier-Stokes est un champ de vecteurs $u(t,x) \in (L^2_{loc}(]0,T[\times\mathbb{R}^n))^n$ qui vérifie dans $\mathcal{D}'(]0,T[\times\mathbb{R}^n)$:*

$$\left\{ \begin{array}{c} \nabla.u = 0 \\ \textit{il existe } p \in \mathcal{D}'(]0,T[\times\mathbb{R}^n) \ \textit{ telle que } \ \partial_t u = \Delta u - (u.\nabla) u - \nabla p. \end{array} \right. \tag{1.1.2}$$

Le théorème que nous allons démontrer est le suivant.

Théorème 1.1.1 (Unicité $L^n(\mathbb{R}^n)$) *Soit $T > 0$ fixé. Si u et v sont deux solutions de l' équation de Navier-Stokes sur $(0,T) \times \mathbb{R}^n$ telles que*

$$u(t), v(t) \in C\left([0,T); L^n(\mathbb{R}^n)^n\right) \quad et \quad u(0,.) = v(0,.) = 0,$$

alors $u = v$.

Les solutions "mild" dans L^p pour les équations de Navier-Stokes sont les solutions faibles $\overrightarrow{u}$ sur $(0,T)$ qui vérifient de plus

$$u(t) \in C\left([0,T); L^p(\mathbb{R}^n)^n\right).$$

En dimension $n = 3$, T. Kato [21] a démontré l' existence de telles solutions pour $p \geq 3$ et leur unicité pour $p > 3$. L' idée essentielle de T. Kato est d' exprimer la solutions de l' équation de Navier-Stokes sous forme intégrale [21]. La première étape dans ce sens consiste à éliminer la pression p en projetant l' équation considérée sur les champs de vecteurs à divergence nulle. Cette technique (très utilisées) remonte au travaux pionniers de J. Leray [29] sur les solutions faibles $u(t,x) \in L^\infty\left(]0,T[, L^2(\mathbb{R}^3)^3\right)$.
En prenant la divergence de (1.1.1), on obtient l' équation

$$\Delta p + \nabla.\left(\nabla.\left(u \otimes u\right)\right) = 0$$

ce qui permet d' éliminer p en introduisant l' opérateur

$$\mathbb{P}f = f - \nabla\Delta^{-1}(\nabla.f) = (Id + \mathcal{R}\otimes\mathcal{R})\, f$$

où

$$\mathcal{R} = \frac{1}{\sqrt{-\Delta}}\nabla$$

est le vecteur des transformations de Riesz

$$\mathcal{R} = (\mathcal{R}_1, ..., \mathcal{R}_d), \quad \widehat{\mathcal{R}_j f} = i\frac{\xi_j}{|\xi|}\widehat{f}.$$

On obtient alors le système :

$$\left\{ \begin{array}{c} \partial_t u = \Delta u - \mathbb{P}\nabla.\left(u \otimes u\right) \\ \nabla.u = 0 \end{array} \right. \tag{1.1.3}$$

dont la solution est donnée par

$$\left\{ \begin{array}{c} u(t) = e^{t\Delta}u_0 - \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta}\mathbb{P}\nabla.\left(u \otimes u\right)(\tau)d\tau \\ \nabla.u = 0 \end{array} \right. . \tag{1.1.4}$$

1.2 La théorie classique des équations de Navier-Stokes $(1934 - 1984)$

La théorie des équations de Navier-Stokes dans $\mathbb{R}^3$ repose essentiellement sur deux papiers : l' article phare de Leray de 1934 [29] sur l' existence des solutions faibles en tout temps pour une donnée initiale L^2 et de l' article de Kato de 1984 [21] sur l' existence de solutions milds globales pour une donnée initiale L^3 de norme suffisament petite. Le problème de l' unicité des solutions faibles de Leray est toujours ouvert ; celui des solutions milds L^3 a récemment connu de nombreux travaux.

Remarque 1.2.1 *L' énergie associée à l' équation de Navier-Stokes est donnée par*

$$E(t,u) = \frac{1}{2}\left\|u\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \int_0^t \left\|\nabla u(\tau)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} d\tau.$$

Cette dernière relation est utulisée des solutions faibles. Pour les solutions mild, il existe une autre approche [8], [21]. En fait, nous pouvons éléminer la pression p en projetant les équations de Navier-Stokes sur les champs de vecteurs à divergence nulle.
On a la proposition suivante.

Proposition 1.2.1 (formulation intégrale des équations de Navier-Stokes) *Soit* $u(t,x) \in C\left([0,+\infty); L^n\left(\mathbb{R}^n\right)^n\right)$. *Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(A) $u(t,x)$ *est solution faible des équations de Navier-Stokes ;*

(B) $\nabla.u = 0$ *et* $\partial_t u = \Delta u - \mathbb{P}\nabla.\left(u \otimes u\right)$

(C) *il existe* $u_0 \in \mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^n\right)$, $\nabla.u_0 = 0$ *et*

$$u(t) = e^{t\Delta}u_0 - \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta}\mathbb{P}\nabla.\left(u \otimes u\right)(\tau)d\tau.$$

La preuve de la proposition 1.2.1 repose éssentiellement sur la décomposition de Littlewood-Paley (voir [10]).

1.3 Unicité des solutions "mild" dans l' espace $L^n(\mathbb{R}^n)$

Nous nous intéressons dans cette section à l' unicité des solutions "mild" dans $F = C([0,T); L^n(\mathbb{R}^n)^n)$. Rappelons que l' existence de solutions "mild" a été établie à l' aide d' un théorème de point fixe dans le sous espace

$$F_* = \left\{ u \in F : \sqrt{t}u \in (L^\infty([0,T) \times \mathbb{R}^n))^n,\ \lim_{t\to 0} \sqrt{t}u = 0 \right\}.$$

L' unicité dans F_* est donc immédiate et le problème est de s' affranchir de la contrainte $\sqrt{t}u \in (L^\infty([0,T) \times \mathbb{R}^n))^n$.

Soit $T > 0$ fixé. On considère le problème d' unicité pour les solutions $u(t,x) \in C([0,T); L^n(\mathbb{R}^n)^n)$ du système de Navier-Stokes incompressible sous forme intégrale :

$$\begin{cases} u(t) = e^{t\Delta}u_0 + B(u,u)(t) \quad \text{pour} \quad t \in [0,T), \\ u(0,.) = u_0, \end{cases} \tag{1.3.1}$$

où $u_0 \in L^n(\mathbb{R}^n)^n$ avec $\nabla.u_0 = 0$, Δ est le Laplacian dans $\mathbb{R}^n$ et B est la forme bilinéaire symétrique définie par :

$$B(u,v)(t) = -\int_0^t e^{(t-\tau)\Delta}\mathbb{P}\nabla.(u \otimes v)(\tau)d\tau,$$

$\mathbb{P}$ est le projecteur de Leray.

Récemment, Furioli, Lemarié-Rieusset et Terraneo ont montré l' unicité pour des données initiales arbitraires [9].

Théorème 1.3.1 ([9], [10]) *Si u et v sont des solutions "mild" de (1.3.1) sur $C([0,T); L^n(\mathbb{R}^n)^n)$ avec $n \geq 3$, alors $u = v$ sur $[0,T)$.*

Si la forme bilinéaire B est continue sur $C([0,T); L^n(\mathbb{R}^n)^n)$, la démonstration de ce théorème devient immédiate. Mais ce n' est pas le cas (voir [11]). L' idée dans [9] est d' estimer $u - v$ dans $L^\infty((0,T); Z)$ où Z est un espace "proche" de $L^n(\mathbb{R}^n)^n$. Ils ont pris pour Z un espace de Besov et ont utilisé l' analyse microlocale. Une simplification de cette preuve donnée par Meyer [33] utilise comme espace Z l' espace de Lorentz $L^{n,\infty}$ qui a l' avantage de contenir L^n. La forme bilinéaire B est bicontinue sur $C([0,T); L^{n,\infty}(\mathbb{R}^n)^n)$, la continuité en 0 étant à interpréter au sens de la topologie faible$-*$ de $L^{n,\infty}(\mathbb{R}^n)^n$. D' autres résultats d' unicité sont aussi à mentionner : Lions-Masmoudi [30].

Théorème 1.3.2 ([30], [31]) *Si u et v sont deux solutions faibles des équations de Navier-Stokes et ont la même valeur initiale dans $C\left([0,T);L^n\left(\mathbb{R}^n\right)^n\right)$ avec $n \geq 3$, alors $u = v$.*

Théorème 1.3.3 ([30], [31]) *Si u et v sont deux solutions faibles des équations de Navier-Stokes et ont la même valeur initiale dans $L^\infty\left([0,T);L^n\left(\mathbb{R}^n\right)^n\right)$ avec $n \geq 4$, alors $u = v$.*

L' idée de la démonstration proposée dans ce chapitre est de travailler directement sur l' espace $C\left([0,T);L^n\left(\mathbb{R}^n\right)^n\right)$ et repose essentiellement sur deux idées. La première est d' utiliser les estimations de régularité maximale L^p bien connue pour le Laplacian $-\Delta$. La seconde repose sur la décomposition du champs de vecteur $u \in C\left([0,T);L^n\left(\mathbb{R}^n\right)^n\right)$ en une partie $u_1 \in C\left([0,T);L^n\left(\mathbb{R}^n\right)^n\right)$ de norme $\|u_1\|_{C([0,T);L^n(\mathbb{R}^n)^n)} < \epsilon$ et un terme borné $u_2 \in L^\infty\left([0,T)\times\mathbb{R}^n\right)$ dont la norme L^∞ est suffisament grande et d' estimer $B(.,.)$ pour chaque terme différement en utilisant la régularité maximal. La combinaison de ces deux idées, a en outre permis de donner une démonstration courte et simple de l' unicité dans l' espace $C\left([0,+\infty);L^n\left(\mathbb{R}^n\right)^n\right)$ (voir [11]).

1.4 Lemmes fondamentaux

Les inégalités classiques sur les espaces de Lebesgue $L^p\left(\mathbb{R}^n\right)$ que nous utiliserons sont les suivantes :

1. **Inégalité de Hölder** : pour $1 \leq p \leq \infty$ et $1 \leq q \leq \infty$ avec $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} \leq 1$, on a

$$\|fg\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}.$$

2. **Inégalité de Young** : pour $1 \leq p \leq \infty$ et $1 \leq q \leq \infty$ avec $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} \geq 1$, on a

$$\|f*g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1.$$

Pour démontrer le résultat principal de ce chapitre, il nous faut comprendre l' action du noyau de la chaleur $e^{t\Delta}$ sur les espaces de Lebesgue. Cela nous permet en particulier d' obtenir les estimations $L^p - L^q$ pour le noyau de la chaleur. L' opérateur $e^{t\Delta}$ est un opérateur de convolution avec un noyau $t^{-\frac{n}{2}}G\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$ où $G \in L^1 \cap L^\infty$. On en déduit le lemme suivant.

Lemme 1.4.1 (Estimations $L^p - L^q$) *Soient deux réels p et q tels que $1 < p \leq q < \infty$. Alors il existe une constante C tel que pour tout $t > 0$ et tout champ de vecteur $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, on a*

$$\left\| e^{t\Delta} f \right\|_{L^q} \leq \frac{C}{t^{\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}} \|f\|_{L^p},$$

et

$$\left\| \nabla e^{t\Delta} f \right\|_{L^q} \leq \frac{C}{t^{\frac{1}{2}+\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}} \|f\|_{L^p}.$$

Soit $T > 0$ fixé, on utilise la notation

$$\|g\|_{p,q,T} = \left(\int_0^T \|g\|^q_{L^p\left(\mathbb{R}^d\right)^d} dt \right)^{\frac{1}{q}}, \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad 1 \leq q \leq \infty$$

qui désigne la norme dans l' espace $L^q\left((0,T); L^p\left(\mathbb{R}^n\right)^n\right)$ avec des modifications si $q = \infty$.

Lemme 1.4.2 *Soient $1 < p, q < \infty$, $0 < T < \infty$. Si $g \in L^q\left((0,T); L^p\left(\mathbb{R}^n\right)^n\right)$, la fonction $\overrightarrow{u}$*

$$u(t) = e^{t\Delta} u_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta} \mathbb{P} g(\tau) d\tau,$$

appartienne à $L^q\left((0,T); L^p\left(\mathbb{R}^n\right)^n\right)$ et résout le problème de Cauchy suivant

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= \mathbb{P} g \qquad \textit{presque pour tout } t \in (0,T), \\ u(0,.) &= 0. \end{aligned} \tag{1.4.1}$$

De plus, cette solution u vérifie

$$\|\Delta u\|_{p,q,T} \leq C \|g\|_{p,q,T} \tag{1.4.2}$$

avec $C = C(p,n,q) > 0$ indépendente de g et T.

Pour la preuve, nous renvoyons le lecteur à Giga-Sohr [17], théorème 2.7, (voir aussi Sohr [39]). Giga et Sohr ont montré le lemme ci-dessus dans [17], en supposant que Ω est un domaine extérieur (c' est-à-dire, un domaine où son complémentaire dans $\mathbb{R}^n$ est un ensemble compact non vide). Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, le lemme se démontre de façon analogue.

Lemme 1.4.3 ([11]) *Soit $1 < p, q < \infty$, $0 < T < \infty$ et soit u une solution de (1.4.1). Alors pour tout $g \in L^q\left((0,T); L^p(\mathbb{R}^n)^{n^2}\right)$ il existe une solution unique $v = (-\Delta)^{-\frac{1}{2}} u$ dans $L^q((0,T); L^p(\mathbb{R}^n)^n)$ de*

$$\partial_t v - \Delta v = \mathbb{P}(-\Delta)^{-\frac{1}{2}} \nabla . g, \qquad \text{presque pour tout } t \in (0,T), \quad v(0) = 0. \tag{1.4.3}$$

De plus, u vérifie les estimations suivantes :

$$\|\nabla u\|_{p,q,T} \leq C \|g\|_{p,q,T},$$

et

$$\|u\|_{\frac{pn}{n-p},q,T} \leq C \|g\|_{p,q,T} \qquad (1 < p < d) \tag{1.4.4}$$

avec $C = C(p,n,q) > 0$ indépendente de g et T.

Preuve. En appliquant l' opérateur $(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}$ à l' équation (1.4.1), on obtient

$$\partial_t v - \Delta v = \mathbb{P}(-\Delta)^{-\frac{1}{2}} \nabla . g.$$

Ainsi le théorème de régularité maximale de Giga et Sohr (Lemme 1.4.2) garantit l' existence d' une solution unique $v \in L^q((0,T); L^p(\mathbb{R}^n)^n)$ de (1.4.3) pour tout $T > 0$. De plus, le théorème de Calderón-Zygmund sur les intégrales singulières [11] et (1.4.2) entraînent

$$\begin{aligned}
\|\nabla u\|_{p,q,T} &= \left\|\nabla (-\Delta)^{\frac{1}{2}} v\right\|_{p,q,T} \\
&= \|\Delta v\|_{p,q,T} \\
&\leq C \|g\|_{p,q,T}
\end{aligned}$$

où C est indépendente de T. L' inégalité de Sobolev entraîne que

$$\|f\|_{\frac{pn}{n-p}} \leq C_{p,n} \|\nabla f\|_p .$$

On a alors pour tout $t \in [0,T)$

$$\begin{aligned}
\int_0^T \|u(\tau)\|^q_{L^{\frac{pn}{n-p}}} d\tau &\leq C \int_0^T \|\nabla u(\tau)\|^q_{L^p} d\tau \\
&\leq C \int_0^T \|g(\tau)\|^q_{L^p} d\tau,
\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration. $\square$

Lemme 1.4.4 (Inégalité de Gronwall (version intégrale)) *Soit $g(t) \in C([0,T])$ positive et vérifiant*

$$g(t) \leq A + B \int_0^t g(s)ds, \quad A \in \mathbb{R}, \quad B > 0.$$

Alors

$$g(t) \leq Ae^{-Bt}, \quad t \in [0,T].$$

En particulier, si $A = 0$, alors

$$g(t) = 0.$$

Remarque 1.4.1 *Le lemme de Gronwall s' interprète en disant qu 'à partir d' une inégalité intégrale portant sur g, on trouve une inégalité sur g. Ce lemme sert souvent dans la théorie des équations différentielles, notamment pour obtenir des majorations de solutions.*

Preuve. On pose

$$h(t) = \int_0^t g(s)ds \in C^1([0,T]).$$

On a donc

$$\frac{d}{dt}[h(t)] = g(t) \leq A + Bh(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left[h(t)e^{-Bt}\right] = e^{-Bt}[g(t) - Bh(t)] \leq Ae^{-Bt}.$$

Ceci implique

$$\begin{aligned} h(t)e^{-Bt} &\leq A \int_0^t e^{-Bs}ds + h(0) \\ &\leq A\frac{1-e^{-Bt}}{B} \quad (\text{car } h(0) = 0) \end{aligned}$$

et revenant à l' équation sur $g(t)$ on en déduit (car $B > 0$) :

$$\begin{aligned} g(t) &\leq A + Bh(t) \\ &\leq A + B\left[A\frac{1-e^{-Bt}}{B}\right]e^{Bt} \\ &\leq Ae^{-Bt}, \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration du lemme. $\square$

On aura aussi besoin du lemme classique suivant.

Lemme 1.4.5 *Si g est une fonction continue et positive sur $[a,b]$, alors*

$$\int_a^b g(t)dt = 0 \quad \Rightarrow \quad g = 0 \quad sur \quad [a,b].$$

1.5 Démonstration du théorème d' unicité 1.1.1

Tous les outils sont maintenant en place pour démontrer l' unicité des solutions du système de Navier-Stokes. Rappelons que l' idée principale est de décomposer u et v en une somme de termes aux quels s' appliquent les lemmes précédents.

Preuve. Nous suivons la preuve de Lions-Masmoudi [31]. A cet effet, nous avons besoin du fait suivant : pour $u \in C\left([0,T); L^n\left(\mathbb{R}^n\right)^n\right)$ et $\epsilon > 0$, il existe une décomposition

$$u = u_1 + u_2$$

sachant que pour tout $T > 0$,

$$\|u_1\|_{C([0,T);L^n(\mathbb{R}^n)^n)} \leq \epsilon, \qquad \sup_{(t,x)\in(0,T)\times\mathbb{R}^n} |u_2(t,x)| < K(\epsilon). \tag{1.5.1}$$

On peut simplement choisir

$$u_2(x,t) = \begin{cases} u(x,t) & \text{pourr} \quad |u(t,x)| < K, \\ 0 & \text{pourr} \quad |u(t,x)| \geq K, \end{cases}$$

où K est suffisamment grand. De même, pour $v \in C\left([0,T); L^n\left(\mathbb{R}^n\right)^n\right)$

$$v = v_1 + v_2$$

de sorte que pour tout $T > 0$,

$$\|v_1\|_{C([0,T);L^n(\mathbb{R}^n)^n)} \leq \epsilon, \qquad \sup_{(t,x)\in(0,T)\times\mathbb{R}^n} |v_2(t,x)| < K(\epsilon). \tag{1.5.2}$$

Si u et v sont deux solutions dans $C\left([0,T); L^n\left(\mathbb{R}^n\right)^n\right)$ de l' équation de Navier-Stokes avec la même donnée initiale, alors la différence $w = u - v$ est une solution de l' équation intégrale

$$w(t) = -\int_0^t e^{(t-\tau)\Delta}\mathbb{P}\nabla.\left(w \otimes u + v \otimes w\right)(\tau)d\tau.$$

Posons

$$w_1(t) = -\int_0^t e^{(t-\tau)\Delta}\mathbb{P}\nabla.\left(w \otimes u_1 + v_1 \otimes w\right)(\tau)ds,$$

et

$$w_2(t) = -\int_0^t e^{(t-\tau)\Delta}\mathbb{P}\nabla.\left(w\otimes u_2 + v_2\otimes w\right)(\tau)d\tau.$$

Utilisant le fait que l' operateur de convolution $e^{(t-\tau)\Delta}\mathbb{P}\nabla.$ a un noyau intégrable dont la norme est $O\left((t-\tau)^{-\frac{1}{2}}\right)$, on obtient par l' utilisation des estimations (1.5.1), (1.5.2) et l' inégalité de Hölder à plusieurs reprises par rapport à la variable t,

$$\begin{aligned}
& \left\|w_2(t)\right\|_{L^n} \\
\leq\ & c\int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\left\|\left(w\otimes u_2 + v_2\otimes w\right)(\tau)\right\|_{L^n} d\tau \\
\leq\ & c\int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\left\|w(\tau)\right\|_{L^n}\left(\left\|u_2(\tau)\right\|_{L^\infty} + \left\|v_2(\tau)\right\|_{L^\infty}\right) d\tau \\
\leq\ & c\,K(\epsilon)\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}}\left\|w(\tau)\right\|_{L^n} d\tau \\
\leq\ & c\,K(\epsilon)\left(\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{2}{3}}\,d\tau\right)^{\frac{3}{4}}\left(\int_0^t \left\|w(\tau)\right\|_{L^n}^4 d\tau\right)^{\frac{1}{4}} \\
\leq\ & c\,K(\epsilon)t^{\frac{1}{4}}\left(\int_0^t \left\|w(\tau)\right\|_{L^n}^4 d\tau\right)^{\frac{1}{4}},
\end{aligned}$$

où c désigne une constante indépendente de w et t.

En prenant la racine quatrième de cette inégalité puis en intégrant sur $(0,T)$, on obtient

$$\int_0^T \left\|w_2(s)\right\|_{L^n}^4 ds \leq cT\left(K(\epsilon)\right)^4\int_0^T\left(\int_0^\tau \left\|w(s)\right\|_{L^n}^4 ds\right)d\tau. \tag{1.5.3}$$

Maintenant, nous utilisons les estimations (1.5.1), (1.5.2), (1.4.4) du lemme 1.4.3 avec $p=\frac{n}{2}$ et on obtient :

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \left\|w_1(\tau)\right\|_{L^n}^4 d\tau \\
\leq\ & c\int_0^T \left\|\left(w\otimes u_1 + v_1\otimes w\right)(\tau)\right\|_{L^{\frac{n}{2}}}^4 d\tau \\
\leq\ & c\int_0^T \left(\left\|u_1(\tau)\right\|_{L^n}^4 + \left\|v_1(\tau)\right\|_{L^n}^4\right)\left\|w(\tau)\right\|_{L^n}^4 d\tau \quad \text{(inégalité de Hölder)} \\
\leq\ & c\left(\left\|u_1\right\|_{C([0,T];L^n(\mathbb{R}^n)^n)} + \left\|v_1\right\|_{C([0,T];L^n(\mathbb{R}^n)^n)}\right)\int_0^T \left\|w(\tau)\right\|_{L^n}^4 d\tau \\
\leq\ & c\,\epsilon\int_0^T \left\|w(\tau)\right\|_{L^n}^4 d\tau,
\end{aligned}$$

la deuxième inégalité est obtenue en appliquant l' inégalité fondamentale

$$(a+b)^\alpha \leq 2^{\alpha-1}\left(a^\alpha + b^\alpha\right) \quad \text{dès que } \ a,b\geq 0 \ \text{ et } \ \alpha\geq 1.$$

Donc, si on prend ϵ assez petit, alors d' après (1.5.3) et l'inégalité ci-dessus, on a

$$\int_0^T \|w(\tau)\|_{L^n}^4 \, d\tau \leq cT \ \ (K(\epsilon))^4 \int_0^T \left(\int_0^\tau \|w(s)\|_{L^n}^4 \, ds \right) d\tau, \qquad 0 \leq \tau \leq T,$$

En appliquant le lemme de Gronwall, on obtient finalement le résultat recherché. □

Remarque 1.5.1 *On peut étendre ce résultat au cas des espaces de multiplicateurs singuliers. En fait, la preuve du théorème 1.1.1 s' adapte immédiatement au cas des espaces de multiplicateurs singuliers. Plus précisement, on a :*

Théorème 1.5.1 *Soit* $0 < T \leq \infty$*. Supposons que* u *et* v *sont deux solutions de (1.1.1) dans l' espace* $C\left([0, T); \dot{X}_1 \left(\mathbb{R}^n\right)^n\right)$*. Alors* $u = v$ *sur* $[0, T)$*.*

Chapitre 2

Unicité des solutions faibles pour les équations de Navier-Stokes

2.1 Introduction

Considérons les équations de Navier-Stokes sur $(0,T)\times\mathbb{R}^d$ avec $0<T<\infty$ et $n\geq 3$:

$$\begin{aligned}\partial_t u+(u.\nabla)\,u-\Delta u+\nabla p &= 0, && (x,t)\in\mathbb{R}^n\times(0,\infty),\\ \nabla.u &= 0, && (x,t)\in\mathbb{R}^n\times(0,\infty),\\ u(x,0) &= u_0(x), && x\in\mathbb{R}^n.\end{aligned}\tag{2.1.1}$$

Dans leurs célèbres papiers, Leray [29] et Hopf [18] ont construit une solution faible u de (2.1.1) pour une donnée initiale $u_0\in L^2_\sigma$. La solution est dite faible au sens de Leray-Hopf. Dans le cas général le problème d 'unicité des solutions faibles de Leray-Hopf est encore ouvert. De plus, on ne sait pas si en dimension supérieure ou égale à trois, l' inégalité d' énergie

$$\|u(t)\|^2_{L^2}+2\int_0^t\|\nabla u(s)\|^2_{L^2}\,ds\leq\|u_0\|^2_{L^2}$$

est à elle seule suffisante pour affirmer l' unicité de telles solutions. Foias [6] et Serrin [37] ont établi l' unicité des solutions faibles, en dimension n, sous la condition supplémentaire :

$$u\in L^\alpha\left((0,\infty);L^q\right)\quad\text{avec}\quad\frac{2}{\alpha}+\frac{n}{q}=1\quad\text{et}\quad q>n.\tag{2.1.2}$$

Le théorème de Serrin [37] établit l' unicité des solutions de Leray. L' estimation 2.6.2) est invariante par rapport au changement d' échelle de l' équation. En dimension supérieure

ou egale à 3, on ne sait construire que des solutions locales (en temps) ou globales mais à donnée initiale petite (voir [6], [32] ou [36]). Masuda [32] a obtenu un résultat d' unicité dans la classe $L^\infty\left((0,T);L^n\left(\mathbb{R}^n\right)\right)$ qui correspond au cas critique $q=n$. Enfin, Kozono et Sohr [25] ont aussi montré que l' unicité reste valable dans la classe $L^\infty\left((0,T);L^n\right)$.
Le but de ce chapitre est de donner un critère d'unicité des solutions faibles dans la classe $L^2\left((0,T)\,;\dot{X}_1(\mathbb{R}^n)^n\right)$ contenant les classes précédentes. Le résultat ainsi obtenu sera une généralisation des résultats de Serrin, Kozono et Sohr.

2.2 Les espaces de BMO et de Hardy $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$

Pour un exposé complet sur l'espace BMO et ses propriétés, nous renvoyons au livre de E. Stein [41]. Nous rappelons quand même quelques notions nécessaires pour la suite du travail. L'espace BMO (Bounded Mean Oscillation) est le dual de l'espace de Hardy $\mathcal{H}^1$ et est défini de la façon suivante :

Définition 2.2.1 *Une fonction $g\in L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^n\right)$ appartient à BMO s'il existe $A>0$ tel que :*

$$\sup_B \frac{1}{|B|}\int\limits_{y\in B(x,R)} |g(y)-a|\,dy \leq A<\infty$$

où $B=B(x,R)$ est une boule de $\mathbb{R}^n$ et

$$a=\frac{1}{|B(x,R)|}\int\limits_{y\in B(x,R)} g(y)dy$$

On observe immédiatement que les fonctions constantes appartiennent à BMO. De plus, si on pose $\|g\|_{BMO}=\inf A$, alors pour toute constante $C\in\mathbb{R}$, on a $\|C\|_{BMO}=0$. Ce qui permet de considérer BMO non pas comme un espace de fonctions, mais comme un espace de fonctions modulo les fonctions constantes. Il est évident que $L^\infty\subset BMO$ et $\|g\|_{BMO}\leq 2\,\|g\|_{L^\infty}$, mais les deux espaces ne coïncident pas car la fonction $g(x)=\log|x|$ appartient à BMO mais pas à L^∞.
Rappelons aussi la définition et certaines propriétés principales de l' espace de Hardy $\mathcal{H}^p(\mathbb{R}^n)$ introduite par E. Stein et G. Weiss [42]. Le lecteur trouvera un exposé exhaustif sur ce sujet dans [7].

Définition 2.2.2 ([7]) *Soit $0 < p < \infty$, et soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ vérifiant $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi dx = 1$. Une distribution tempérée $f \in \mathcal{H}^p(\mathbb{R}^n)$ si*

$$f^*(x) = \sup_{t>0} |(\varphi_t * f)(x)| \in L^p(\mathbb{R}^n), \tag{2.2.1}$$

où $\varphi_t(x) = t^{-d}\varphi(t^{-1}x)$.

Fefferman et Stein [7] ont montré que cet espace ne dépend pas du choix de φ. On sait déjà que si $f \in \mathcal{H}^p(\mathbb{R}^n)$, alors (2.2.1) est vraie pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ vérifiant $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi dx = 1$. La semi-norme de $\mathcal{H}^p(\mathbb{R}^n)$ est définie, aux constantes près, par

$$\|f\|_{\mathcal{H}^p(\mathbb{R}^n)} = \|f^*(x)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f^*(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Il est bien connu d' après ([7], [41]) que si $1 \leq p < \infty$, alors $\mathcal{H}^p$ est un espace de Banach :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^p(\mathbb{R}^n) &= L^p(\mathbb{R}^n) \quad \text{pour} \quad 1 < p < \infty, \\ \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n) &\subset L^1(\mathbb{R}^n), \end{aligned}$$

et que $\mathcal{H}^p(\mathbb{R}^n)$, $0 < p < 1$, sont des espaces semi-Banach pour la semi-norme $\|.\|_{\mathcal{H}^p(\mathbb{R}^n)}$.
Le fait crucial pour notre but est la continuité de la transformation de Riesz R_j sur tout l' espace $\mathcal{H}^p$. Rappelons que l' espace de Hardy $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$ est

$$\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in L^1(\mathbb{R}^n) : f^* \in L^1(\mathbb{R}^d) \right\}.$$

On peut caractériser $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$ par le fait que $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et que $R_j f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq j \leq n$. On vérifie alors immédiatement que $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$ est un espace de Banach normé par

$$\|f\|_{\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)} \cong \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + \sum_{j=1}^{d} \|R_j f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

D' autre part, toute fonction $f \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$ est obligatoirement d' intégrale nulle, c' est-à-dire :

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = 0. \tag{2.2.2}$$

En effet, l' hypothèse $f \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$ implique les transformées de Fourier

$$\widehat{f}(\xi) = \int f(x)e^{-ix\xi}dx \quad \text{et} \quad \widehat{R_j f}(\xi) = \frac{i\xi_j}{|\xi|}\widehat{f}(\xi), \quad (j = 1, ..., n),$$

sont continues sur $\mathbb{R}^n$. D' autre part, la condition $R_j f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ implique la continuité en 0 des transformées de Fourier $\frac{i\xi_j}{|\xi|}\widehat{f}(\xi)$. Ceci ne peut se faire que si $\widehat{f}(0) = 0$ et la relation (2.2.2) est démontré.

Remarque 2.2.1 *On a dit que toute fonction $f \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$ est obligatoirement d' intégrale nulle. Contrairement à ce qui se passe pour les espaces L^p, $1 < p < \infty$, la condition d' appartenir à $\mathcal{H}^1$ ne peut s' écrire sous la forme d' une inégalité simple portant sur le module de f. En d' autres termes, appartenir à $\mathcal{H}^1$ ne concerne pas seulement la taille de la fonction mais traduit un équilibre entre les grandes valeurs positives ou négatives de la fonction. L' exemple suivant justifie cette remarque. En dimension 1, la fonction*

$$f(x) = \frac{1}{x \log^2 |x|}$$

quand $|x| \leq \frac{1}{2}$ et égale à 0 pour $|x| > \frac{1}{2}$ appartient à $\mathcal{H}^1(\mathbb{R})$ tandis que $|f(x)|$ n' appartient pas $\mathcal{H}^1(\mathbb{R})$ pour la raison évidente que l' intégrale de $|f(x)|$ n' est pas nulle et aussi pour une raison plus profonde il n' existe aucune fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $|f| + \varphi$ appartienne à $\mathcal{H}^1(\mathbb{R})$; alors que l' on peut visiblement pour un choix correcte de φ satisfaire à la condition d' intégrale nulle. En revanche à notre propos, on vérifie facilement que toute fonction φ appartenant à la classe $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ de Schwartz et d' intégrale nulle appartient à $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$.

On a le résultat fondamental suivant.

Théorème 2.2.1 (Fefferman) *L' espace dual de $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$ est $BMO(\mathbb{R}^n)$. Plus précisement, L est une forme linéaire continue sur $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si elle peut être représentée sous la forme*

$$L(f) = \int_{\mathbb{R}^n} fg$$

pour une certaine fonction g dans BMO. De plus, pour toute fonction $g \in BMO$ et toute fonction $f \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^d)$ on a

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} fg dx \right| \leq c(n) \|f\|_{\mathcal{H}^1} \|g\|_{BMO} . \tag{2.2.3}$$

Soit $\gamma > 1$. On définit la fonction maximale de f dépendant de γ par

$$M_\gamma f(x) = \sup_{t>0} \left(\frac{1}{|B_t(x)|} \int_{B_t(x)} |f(y)|^\gamma \, dy \right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 2.2.1 *Si $\gamma < p \leq \infty$, alors*

$$M_\gamma : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n) \quad \text{est borné.}$$

Pour la preuve voir [40].

Dans [4], Coifman, Lions, Meyer and Semmes ont montré que les espaces de Hardy sont utilisés pour analyser la régularité des diverses quantités non-linéaires par la théorie de compacité par compensation due à L. Murat [35] et F. Tartar [43]. Ces espaces jouent un rôle très important dans l'étude de la régularité des solutions des équations aux dérivées partielles. En particulier, ils ont montré que pour des exposants p, q tels que $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et des vecteurs $u \in L^p(\mathbb{R}^n)^n$, $v \in L^q(\mathbb{R}^n)^n$ tels que $\nabla.u = 0$, curl $v = 0$ au sens des distributions, le produit scalaire $u.v \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$. Plus précisément, il existe une constante C telle que

$$\|u.v\|_{\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{L^p} \|v\|_{L^q}.$$

Le but de cette section est de montrer un résultat similaire concernant le lemme du div-curl sans hypothèses sur la cancellation, à savoir que la divergence et la rotation ne sont pas nécessairement nulle, et qui implique div $(uv) \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$.

La formule décrite par le théorème ci-dessous est due esentiellement à S. Gala [15].

Théorème 2.2.2 *On suppose $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On suppose qu' un champ de vecteurs $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$, $u_j \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq j \leq n$, et un champ de vecteurs $v = (v_1, v_2, ..., v_n)$, $v_j \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq j \leq n$. Alors, il existe une constante $C(n)$ telle que*

$$\|div \ (uv)\|_{\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)} \leq C(n) \left(\|u\|_{L^p} \|\nabla v\|_{L^q} + \|div \ u\|_{L^p} \|v\|_{L^q} \right). \tag{2.2.4}$$

Lemme 2.2.2 *On suppose $1 < p < \infty$, $1 < q < d$ et $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{n} + 1$. Si $u \in L^p(\mathbb{R}^n)^n$ est un champ de vecteurs tel que $\nabla.u = 0$ et $\nabla v \in L^q(\mathbb{R}^n)$ alors, $u.\nabla v \in \mathcal{H}^r(\mathbb{R}^n)$ et*

$$\|u.\nabla v\|_{\mathcal{H}^r(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{L^p} \|\nabla v\|_{L^q}.$$

2.3 L' espace $H^s(\mathbb{R}^n)$: structure hilbertienne et dualité

Nous présentons ici une version des espaces de Sobolev sur $\mathbb{R}^n$. Pour une version très élaborée voir par exemple le livre de Triebel [46].

Définition 2.3.1 (espaces de Sobolev) *Soit $s \in \mathbb{R}$. On dit qu'une distribution u dans $\mathbb{R}^n$ appartient à l'espace $H^s(\mathbb{R}^n)$ si u est tempérée, si $\widehat{u}$ est une fonction localement sommable, et si on a*

$$\int \left(1+|\varsigma|^2\right)^s |\widehat{u}(\varsigma)|^2 \, d\varsigma < +\infty \tag{2.3.1}$$

Lemme 2.3.1 *Les espaces H^s sont hilbertisables : munis du produit scalaire*

$$< u, v >_s = \int \left(1+|\varsigma|^2\right)^s \widehat{u}(\varsigma) \overline{\widehat{v}(\varsigma)} d\varsigma \tag{2.3.2}$$

ou de tout autre produit scalaire donnant une norme équivalente à la norme

$$\|u\|_{H^s}^2 = \left\| \left(1+|\varsigma|^2\right)^{\frac{s}{2}} \widehat{u} \right\|_{L^2}^2 . \tag{2.3.3}$$

Ce sont des espaces de Hilbert.

On va définir maintenant la version homogène des espaces de Sobolev.

Définition 2.3.2 *On définit l'espace de Sobolev homogène $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$ comme étant la fermeture de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ muni de la norme*

$$\|u\|_{\dot{H}^s}^2 = \int |\varsigma|^{2s} |\widehat{u}(\varsigma)|^2 \, d\varsigma < +\infty$$

Nous avons le résultat important de densité suivant :

Lemme 2.3.2 *L'injection $\mathcal{S} \to H^s$ est continue, $\mathcal{D}$ est dense dans H^s ; L'injection de H^s dans $\mathcal{S}'$ est continue.*

De même, on a les injections continues

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset \dot{H}^s(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) .$$

Finalement, on a le théorème d'injection (de Sobolev) suivant :

$$\dot{H}^s \subset L^q \quad \text{pour } 0 \leq s < \frac{n}{2} \quad \text{et } \frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{s}{n}$$

et que cette injection est continue.

2.4 Les espaces X_r

Nous allons présenter maintenant des espaces de multiplicateurs singuliers sur les espaces de Sobolev, introduits récemment par P. G. Lemarié-Rieusset dans ces travaux [27] généralisant le théorème d'unicité de J. Serrin [36]. Nous commençons par donner la définition suivante.

Définition 2.4.1 *Pour tout $r \geq 0$, on définit*

$$\begin{aligned} X_r \overset{def}{=} \mathcal{M}\left(H^r \to L^2\right) &= \left\{f \in L^2_{loc} : \ \forall g \in H^r \quad fg \in L^2\right\}, \\ \dot{X}_r \overset{def}{=} \mathcal{M}\left(\dot{H}^r \to L^2\right) &= \left\{f \in L^2_{loc} : \ \forall g \in \dot{H}^r \quad fg \in L^2\right\}. \end{aligned}$$

Il s'agit des espaces de Banach normés par :

$$\|f\|_{X_r} = \sup_{\|g\|_{H^r} \leq 1} \|fg\|_{L^2}$$

$$\|f\|_{\dot{X}_r} = \sup_{\|g\|_{\dot{H}^r} \leq 1} \|fg\|_{L^2}$$

On a $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \|f(x+x_0)\|_{X_r} &= \|f\|_{X_r}, \\ \|f(x+x_0)\|_{\dot{X}_r} &= \|f\|_{\dot{X}_r} \\ \|f(\lambda x_0)\|_{X_r} &\leq \frac{1}{\lambda^r}\|f\|_{X_r} \quad , \ 0 < \lambda \leq 1, \\ \|f(\lambda x_0)\|_{\dot{X}_r} &\leq \frac{1}{\lambda^r}\|f\|_{\dot{X}_r}, \ \ \lambda > 0. \end{aligned}$$

Etant donné que l'opérateur de multiplication par une fonction réelle est auto-adjoint, il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} \|f\|_{X_r} &= \sup_{\|g\|_{L^2} \leq 1} \|fg\|_{H^{-r}}, \\ \|f\|_{\dot{X}_r} &= \sup_{\|g\|_{L^2} \leq 1} \|fg\|_{\dot{H}^{-r}}. \end{aligned}$$

On peut établir quelques inclusions fonctionnelles. Commençons par les espaces de Lebesgue qui provient tout simplement des injections de Sobolev et des inégalités de Hölder.

$$\begin{aligned} &L^{\frac{n}{r}} \subset X_r \ , \ 0 \leq r < \frac{n}{2} \ , \ 0 \leq t \leq r, \\ &L^{\frac{n}{r}} \subset \dot{X}_r \ , \ 0 \leq r < \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

2.5 Espaces de Lorentz

Nous allons rappeler dans ce paragraphe la définition des espaces de Lorentz, ainsi que quelques propriétés. Le lecteur intéressé pourra trouver un développement exhaustif et appronfondi sur le sujet dans ([1], [42], [19]).

Les espaaces de Lorentz constituent une généralisation des espaces de Lebesgue. Leur intérêt réside (entre autres) dans le fait qu'ils permettent de préciser beaucoup d'estimation établies dans les espaces de Lebesgue.

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^n$ à valeurs réels dans $\mathbb{R}$, mesurable par rapport à la mesure de Lebesgue $|.|$, finie presque partout. Nous rappelons la définition de la fonction de distribution $\lambda_f(s)$ et la fonction réarrangement décroissant f^* de f.

Définition 2.5.1 (fonction de distribution) *La fonction réangeant $\lambda_f(s)$ de f est définie pour tout $s > 0$ par*

$$\lambda_f(s) = \left|\left\{x \in \mathbb{R}^d : |f(x)| > s\right\}\right|$$

Définition 2.5.2 (fonction réarrangement décroissant) *La fonction réarrangement décroissant $f^*(t)$ de f est définie par*

$$f^*(t) = \inf \{s > 0 : \lambda_f(s) \leq t\}$$

Il est facile de voir que f^* est décroissante. Par ailleurs, on parle de réarrangement car la fonction de distribution de f coïncide avec celle de f^*, à savoir $\lambda_f(s) = \lambda_{f^*}(s)$. En effet, grâce aux définitions de f^* et de λ_f, on a

$$f^*\left(\lambda_f(s)\right) \leq s$$

et donc $\lambda_{f^*}(s) \leq \lambda_f(s)$ car f^* est décroissante. De plus, si l'inégalité était stricte $\lambda_{f^*}(s) < \lambda_f(s)$, on obtiendrait l'absurde

$$\lambda_f(s) > t' > \lambda_{f^*}(s) = \sup \{t > 0 : \lambda_f(s) > t\} \geq t'.$$

Cela nous permet alors de réecrire la norme d'une fonction dans l'espace de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^n, dx)$

comme la norme dans $L^p([0,+\infty],dt)$ de la fonction f^* associée ; plus précisement,

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\,dx &= \int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_0^{|f(x)|} pt^{p-1}dtdx = \int\limits_0^{\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varkappa_{\lambda_f(t)} pt^{p-1}dtdx \\ &= \int\limits_0^{\infty} pt^{p-1}\lambda_f(t)dt = \int\limits_0^{\infty} pt^{p-1}\lambda_{f^*}(t)dt \\ &= \int\limits_0^{\infty}\left(t^{\frac{1}{p}}f^*(t)\right)^p\frac{dt}{t} \end{aligned} \tag{2.5.1}$$

Venons à la définition de l'espace de Lorentz.

Définition 2.5.3 (espaces de Lorentz) *Soient* p,q *deux réels tels que* $p\in\,]0,+\infty[$ *et* $q\in\,]0,+\infty]$. *Les espaces de Lorentz* $L^{p,q}$ *sont définis de la façon suivante :*

$$L^{p,q}(\mathbb{R}^n)=\{f \text{ mesurable : } \|f\|^*_{L^{p,q}}<+\infty\}$$

où

$$\|f\|^*_{L^{p,q}}=\begin{cases}\left(\frac{q}{p}\int\limits_0^{\infty}\left[t^{\frac{1}{p}}f^*(t)\right]^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} & \text{pour } 0<p<+\infty \ \ , \ \ 0<q<+\infty \\ \sup_{t>0}\left[t^{\frac{1}{p}}f^*(t)\right] & \text{pour } 0<p<+\infty \ \ , \ \ q=+\infty\end{cases}$$

La fonction $f\to\|f\|^*_{L^{p,q}}$ n'est pas une norme car on n'a pas

$$(f+g)^*(t)\le f^*(t)+g^*(t)$$

il suffit par exemple de considérer $f(x)=1-x$ et $g(x)=x$ sur $\mathbb{R}$ mais seulement

$$(f+g)^*(t)\le f^*(\frac{t}{2})+g^*(\frac{t}{2})$$

Elle est cependant une quasi-norme car elle vérfie les propriétés suivantes

(i) $\|f\|^*_{L^{p,q}}\ge 0$ et $\|f\|^*_{L^{p,q}}=0$ si et seulement si $f=0$;

(ii) $\|\lambda f(x)\|^*_{L^{p,q}}=\lambda\|f\|^*_{L^{p,q}}$ pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$;

(iii) $\|f+g\|^*_{L^{p,q}}\le C\,(\|f\|^*_{L^{p,q}}+\|g\|^*_{L^{p,q}})$, $C\ge 1$;

et donc $L^{p,q}$ est un espace vectoriel réel quasi-normé. La quasi-norme permet de définir les ouverts d'une façon naturelle et une topologie qui est compatible avec la structure d'espace vectoriel. Les espaces de Lorentz $L^{p,q}$ sont métrisables, complets et pour $q<+\infty$ séparables.

L'égalité (2.5.1) montre que $L^{p,p} = L^p$ et on verra plus loin que $L^{p,q_1} \subset L^{p,q_2}$ lorsque $0 < q_1 \leq q_2 \leq +\infty$. Par ailleurs, l'espace $L^{p,\infty}$ coïncide avec l'epace de Marcinkiewicz $L^{p,*}$ défini par

$$L^{p,*} = \{f \text{ mesurable : } \|f\|_{L^{p,*}} < +\infty\},$$

où

$$\|f\|_{L^{p,*}} = \sup_{t>0} t \left|\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t\}\right|^{\frac{1}{p}}.$$

En effet, $\forall t > 0$ on a

$$\begin{aligned} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) &= t^{\frac{1}{p}} \inf\{s > 0 : \lambda_f(s) \leq t\} \\ &\leq t^{\frac{1}{p}} \inf\left\{s > 0 : \frac{(\|f\|_{L^{p,*}})^p}{s^p} \leq t\right\} \\ &= \|f\|_{L^{p,*}}, \end{aligned}$$

et donc $L^{p,*} \subset L^{p,\infty}$. Inversement, $\forall s > 0$

$$\begin{aligned} s\left(\lambda_f(s)\right)^{\frac{1}{p}} &= s\left(\lambda_{f^*}(s)\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq s\left|\left\{t > 0 : \frac{\|f\|_{L^{p,*}}}{t^{\frac{1}{p}}} > s\right\}\right|^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \|f\|^*_{L^{p,q}}. \end{aligned}$$

Pour $1 < p < +\infty$, $1 \leq q \leq +\infty$ et $p = q = 1$, les espaces $L^{p,q}$ sont de plus des espaces de Banach.

Un raffinement des inclusions ci-dessus est valable pour les espaces de Lorentz :

$$L^{\frac{n}{r},\infty} \subset \dot{X}_r\ ,\ 0 < r < \frac{n}{2}$$

où on a utilisé les inclusions de Sobolev et les inégalités de Hölder étendues.

2.6 Les espaces de Morrey-Campanato

On introduit maintenant une classe d'espaces permettant de faire apparaître dans notre cadre des propriétés qui comprendra l'adhérence des fonctions de la classe de Schwartz dans les espaces de Morrey-Companato. Nous rappelons d'abord les définitions ([44], [20])

Définition 2.6.1 *Pour tous p, q tels que $1 < p \leq q \leq +\infty$, on définit l'espace de Morrey-Campanato $\mathcal{M}_{p,q}$ de la façon suivante :*

$$\mathcal{M}_{p,q} = \left\{ f \in L^p_{loc} : \ \|f\|_{\mathcal{M}_{p,q}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \sup_{0 < R \leq 1} R^{n/q - n/p} \left\| f(y) 1_{B(x,R)}(y) \right\|_{L^p(dy)} \right\} \tag{2.6.1}$$

On définit également l'espace de Morrey-Campanato homogène $\dot{\mathcal{M}}_{p,q}$ de la façon suivante :

Définition 2.6.2

$$\dot{\mathcal{M}}_{p,q} = \left\{ f \in L^p_{loc} : \ \|f\|_{\dot{\mathcal{M}}_{p,q}} = \sup_{R > 0} \left\| R^{n/q} f(Ry) \right\|_{L^p(dy)} < +\infty \right\} \tag{2.6.2}$$

pour tout p , q tels que $1 < p \leq q \leq +\infty$ où

$$\|f\|_{\dot{\mathcal{M}}_{p,q}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \sup_{R > 0} \left(R^{n/q - n/p} \int_{B(x,R)} |f(y)|^p \, dy \right)^{1/p} \tag{2.6.3}$$

On vérifie facilement les propriétés suivantes :

$$\|f(\lambda x)\|_{\mathcal{M}_{p,q}} = \frac{1}{\lambda^{\frac{n}{q} - \frac{n}{p}}} \|f\|_{\mathcal{M}_{p,q}} \quad , 0 < \lambda \leq 1.$$
$$\|f(\lambda x)\|_{\dot{\mathcal{M}}_{p,q}} = \frac{1}{\lambda^{\frac{n}{q} - \frac{n}{p}}} \|f\|_{\dot{\mathcal{M}}_{p,q}} \quad , \lambda > 0$$

On a les inclusions suivantes : Pour p, p', q t.q. $1 \leq p \leq p'$, $p \leq q \leq +\infty$ et pour toute fonction f telle que $f \in \dot{\mathcal{M}}_{p,q} \cap L^\infty$:

$$\|f\|_{\dot{\mathcal{M}}_{p', q\frac{p'}{p}}} \leq \|f\|_{L^\infty}^{1 - \frac{p}{p'}} \|f\|_{\dot{\mathcal{M}}_{p,q}}^{\frac{p}{p'}}$$

Pour p, q, p', q' tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \leq 1$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} \leq 1$, $f \in \dot{\mathcal{M}}_{p,q}$, $g \in \dot{\mathcal{M}}_{p',q'}$. Alors

$$fg \in \ \dot{\mathcal{M}}_{p", q"} \text{ avec } \ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{p"}, \ \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = \frac{1}{q"}.$$

Pour tout p tel que $1 \leq p \leq n$, on a

$$\forall \lambda > 0, \|\lambda f(\lambda x)\|_{\dot{\mathcal{M}}_{p,n}} = \|f\|_{\dot{\mathcal{M}}_{p,n}}$$

Nous soulignons les inclusions suivantes : si $p' < p$, on a

$$\mathcal{M}_{p,q} \subset \mathcal{M}_{p',q},$$
$$\dot{\mathcal{M}}_{p,q} \subset \mathcal{M}_{p,q},$$
$$\dot{\mathcal{M}}_{p,q} \subset \mathcal{M}_{p',q},$$

Si $q_2 < q_1$, on a

$$\mathcal{M}_{p,q_1} \subset \mathcal{M}_{p,q_2},$$
$$L^q = \dot{\mathcal{M}}_{q,q} \subset \dot{\mathcal{M}}_{p,q}, \;\; p \leq q$$

On commençons par établir la caractérisation suivante :

Proposition 2.6.1 *Pour $0 \leq r < \frac{n}{2}$, on a*

$$X_r \subseteq \mathcal{M}_{2,\frac{n}{r}},$$
$$\dot{X}_r \subseteq \dot{\mathcal{M}}_{2,\frac{n}{r}}.$$

D'autre part, on a

Proposition 2.6.2 *On a*

$$\mathcal{M}_{\frac{n}{r},\frac{n}{r}} \subset X_r, \qquad r < \frac{n}{2} \ .$$

De plus, pour $2 < p \leq \frac{n}{r}$ et $0 \leq r < \frac{n}{2}$, on a les inclusions suivantes (voir [2], [12]) :

$$L^{\frac{n}{r}}(\mathbb{R}^n) \subset L^{\frac{n}{r},\infty}(\mathbb{R}^n) \subset \dot{\mathcal{M}}_{p,\frac{n}{r}}(\mathbb{R}^n) \subset \dot{X}_r(\mathbb{R}^n) \subset \dot{\mathcal{M}}_{2,\frac{n}{r}}(\mathbb{R}^n) \, .$$

2.7 Enoncé du théorème fondamental.

Soit tout d' abord

$$C^{\infty}_{0,\sigma}(\mathbb{R}^n) = \{\varphi \in C^{\infty}_0(\mathbb{R}^n)^n : \text{div } \varphi = 0\} \subseteq (C^{\infty}_0(\mathbb{R}^n))^n \, .$$

$L^2_\sigma(\mathbb{R}^n)$ est la fermeture de $C^{\infty}_{0,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. En d' autres termes,

$$L^2_\sigma(\mathbb{R}^n) = \overline{C^{\infty}_{0,\sigma}(\mathbb{R}^n)}^{\|\cdot\|_{L^2}} = \left\{u \in L^2(\mathbb{R}^n)^n : \text{div } u = 0\right\},$$

i,e., $u \in L^2_\sigma(\mathbb{R}^n) \Longleftrightarrow \exists\, (\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset C^\infty_{0,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\varphi_k \to u$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)^n$ pour $k \to \infty$, i.e., telle que

$$\|u - \varphi_k\|_{L^2(\mathbb{R}^n)^n} \to 0 \quad \text{quand} \quad k \to \infty;$$

H^r_σ est la fermeture de $C^\infty_{0,\sigma}$ dans $H^r(\mathbb{R}^n)^n$, i.e., $u \in H^r_\sigma(\mathbb{R}^n) \Longleftrightarrow \exists\, (\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset C^\infty_{0,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\varphi_k \to u$ dans $H^r(\mathbb{R}^n)^n$ pour $k \to \infty$, i.e., telle que

$$\|u - \varphi_k\|_{H^r(\mathbb{R}^n)^n} \to 0 \quad \text{quand} \quad k \to \infty.$$

Clairement L^2_σ et H^r_σ sont des sous-espaces fermés de (respectivement) $L^2(\mathbb{R}^n)^n$ et $H^r(\mathbb{R}^n)^n$. Ce sont des espaces de Hilbert séparables.

Maintenant, on rappelle la définition des solutions faibles au sens de Leray-Hopf. Un exposé complet peut être trouvé dans les articles de [23], [25]).

Définition 2.7.1 (Solutions faibles) *Soient $u_0 \in L^2_\sigma$ et $T > 0$. Une fonction mesuarble u est dite une solution faible de (2.1.1) sur $(0,T)$ si u vérifie les propriétés suivantes :*

1 $u \in L^\infty((0,T)\,; L^2_\sigma) \cap L^2\left((0,T)\,; \dot{H}^1_\sigma\right)$ *pour tout $T > 0$;*

(2) *$u(t)$ est continue en temps au sens de la topologie faible de L^2_σ avec*

$$\langle u(t), \phi\rangle \to \langle u_0, \phi\rangle \quad \textit{quand} \quad t \to 0^+$$

pour tout $\phi \in L^2_\sigma$;

(3) *pour tout $0 \le s \le t \le T$, u vérifie l' égalité*

$$\int_s^t \{-\langle u, \partial_\tau \phi\rangle + \langle u.\nabla u, \phi\rangle + \langle \nabla u, \nabla \phi\rangle\}\, d\tau = -\langle u(t), \phi(t)\rangle + \langle u(s), \phi(s)\rangle\,, \tag{2.7.1}$$

pour tout $\phi \in H^1((s,t)\,; H^1_\sigma)$. Ici $\langle .,. \rangle$ désigne le produit scalaire et $\|.\|_{L^2}$ désigne la norme dans $L^2(\mathbb{R}^n)^n$.

Remarque 2.7.1 *Pour u et ϕ comme au dessus, l' intégrale*

$$\int_0^T \langle u.\nabla u, \phi\rangle\, d\tau$$

est bien défini puisque on a d' après l' inégalité de Sobolev

$$\|u\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}} \le C\, \|\nabla u\|_{L^2}$$

sachant que

$$\begin{aligned}\left|\int_0^T \langle u.\nabla u, \phi\rangle \, d\tau\right| &\leq \int_0^T \|u\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}} \|\nabla u\|_{L^2} \|\phi\|_{L^n} \, d\tau \\ &\leq C \sup_{0<t<T} \|\phi\|_{L^n} \int_0^T \|\nabla u\|_{L^2}^2 \, d\tau.\end{aligned}$$

L' existence des solutions faibles a été établi par J. Leray dans [29] pour une donnée initiale dans $L^2_\sigma(\mathbb{R}^n)$. Le résultat est le suivant

Théorème 2.7.1 (Leray - Hopf) *Soient $T > 0$ et $u_0 \in L^2_\sigma(\mathbb{R}^n)$. Il existe une solution faible u sur $(0,T)$ de l' équation (2.1.1) qui vérifie*

$$\|u(t)\|_{L^2}^2 + 2\int_0^t \|\nabla u(s)\|_{L^2}^2 \, ds \leq \|u_0\|_{L^2}^2, \quad 0 \leq t < T. \tag{2.7.2}$$

et

$$\|u(t) - u_0\|_{L^2} \to 0 \quad as \quad t \to +0.$$

Posons

$$\|u\|_{L^s((0,T);L^\gamma)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_{L^\gamma}^s \, dt\right)^{\frac{1}{s}}.$$

Le résultat classique sur l' unicité des solutions faibles dans la classe $L^s\left((0,T);L^\gamma\right)$ a été donné par Foias, Serrin et Masuda [6], [37], [32].

Théorème 2.7.2 (Foias-Serrin-Masuda) *Soit $u_0 \in L^2_\sigma(\mathbb{R}^n)$. Supposons que u et v sont deux solutions faibles de l' équation (2.1.1) sur $(0,T)$. Supposons que u vérifie*

$$u \in L^s\left((0,T);L^\gamma\right) \quad pour \quad \frac{2}{s} + \frac{n}{\gamma} = 1 \quad avec \quad d < \gamma < \infty. \tag{2.7.3}$$

Supposons de plus que v vérifie l' inégalité d' énergie (2.7.2) pour $0 \leq t < T$. Alors on a $u = v$ sur $[0,T)$.

Pour mieux comprendre le cadre dans lequel s' inscrit le théorème 2.7.2 et dans lequel nous allons travailler, deux remarques sont nécessaires. Tout d' abord,

1. Dans le théorème 2.7.2, v n' a pas besoin d' appartenir à la classe (2.7.3). D'une part, chaque solution faible u avec (2.7.3) doit satisfaire l' égalité d' énergie

$$\|u(t)\|_{L^2}^2 + 2\int_0^t \|\nabla u(s)\|_{L^2}^2 \, ds = \|u_0\|_{L^2}^2, \quad 0 \le t \le T. \tag{2.7.4}$$

   Il nous semble être une question intéressante si chaque solution faible satisfait l'inégalité d'énergie (2.7.2).

2. La classe (2.7.3) est importante du point de vue d' invariance d' échelle pour les équations de Navier-Stokes. Il est clair que si $u(x,t)$ est une solution de (2.1.1), alors pour tout $\lambda > 0$, $u_\lambda(x,t)$ défini par

$$u_\lambda(x,t) = \lambda u(\lambda x, \lambda^2 t), \quad \text{et} \quad p_\lambda(x,t) = \lambda^2 u(\lambda x, \lambda^2 t).$$

   est aussi une solution de (2.1.1). L' invariance d' échelle implique

$$\|u_\lambda\|_{L^s((0,\infty);L^\gamma)} = \left(\lambda^{1-\left(\frac{2}{s}+\frac{n}{\gamma}\right)} \|u\|_{L^s((0,\infty);L^\gamma)}\right) = \|u\|_{L^s((0,\infty);L^\gamma)} \quad \text{pour tout} \quad \lambda > 0$$

   si et seulement si

$$\frac{2}{s} + \frac{n}{\gamma} = 1.$$

Nous traiterons après le cas critique avec $s = \infty$ et $\gamma = d$ dans (2.7.3).

Théorème 2.7.3 (Masuda [32], Kozono-Sohr [25]) *Soit $u_0 \in L^2_\sigma(\mathbb{R}^n)$. Supposons que u et v sont deux solutions faibles de (2.1.1) sur $(0,T)$. Supposons de plus que*

$$u \in L^\infty((0,T);L^n) \tag{2.7.5}$$

et que v vérifie l' inequalité d' énergie (2.7.2) pour tout $0 \le t < T$. Alors on a $u = v$ sur $[0,T)$.

Remarque 2.7.2 *Masuda [32] a montré que si $u \in L^\infty((0,T);L^n)$ est continue à droite sur $[0,T)$ pour la norme de L^n, alors $u = v$ sur $[0,T)$. Later on, Kozono-Sohr [25] ont montré que toute solution faible dans $L^\infty((0,T);L^n)$ de (2.1.1) sur $(0,T)$ devient nécessairement continue à droite pour la norme de L^n.*

Le même résultat reste vrai pour $\gamma = +\infty$, en remplaçant l' hypothèse

$$u \in L^2 \left((0,T) ; L^\infty \right)$$

par une hypothèse faible

$$u \in L^2 \left((0,T) ; BMO \left(\mathbb{R}^n \right)^n \right).$$

L' hypothèse $u \in L^2 \left((0,T) ; L^\infty \right)$ remplacé par $u \in L^2 \left((0,T) ; BMO \left(\mathbb{R}^n \right)^n \right)$ a été récemment établie dans le même contexte par Kozono et Taniuchi [23]. Plus précisement, on a

Théorème 2.7.4 (Kozono-Taniuchi) *Soit $u_0 \in L^2_\sigma \left(\mathbb{R}^n \right)$. Supposons que u et v sont deux solutions faibles de (2.1.1) sur $(0,T)$. Supposons de plus que*

$$u \in L^2 \left((0,T) ; BMO \left(\mathbb{R}^n \right)^n \right) \tag{2.7.6}$$

et que v vérifie l' inequalité d' énergie (2.7.2) pour tout $0 \leq t < T$. Alors on a $u = v$ sur $[0,T]$.

Remarque 2.7.3 *D' après le théorème 2.7.2, toute solution faible dans $L^2 \left((0,T) ; L^\infty \right)$ est unique. Pour un tour d' horizon des résultats connus, on peut par exemple consulter les traités [36], [27] ainsi que par exemple, les articles [37] et les références internes.*

Notre résultat principal de l' unicité des solutions faibles est le suivant :

Théorème 2.7.5 *Soit $u_0 \in L^2 \left(\mathbb{R}^n \right)^n$ avec $\nabla . u_0 = 0$. Supposons qu' il existe une solution u pour les équations de Navier-Stokes sur $(0,T) \times \mathbb{R}^n$ (pour certain $T \in (0, +\infty]$ avec une donnée initiale u_0 telle que*

$$u \in L^\infty \left((0,T) ; L^2_\sigma \left(\mathbb{R}^n \right)^n \right) \cap L^2 \left((0,T) ; \dot{H}^1_\sigma \left(\mathbb{R}^n \right)^n \right),$$

et

$$\nabla u \in L^2 \left((0,T) ; \dot{X}_1 (\mathbb{R}^n)^n \right).$$

Alors u est l' unique solution au sens de Leray-Hopf solution associée avec u_0 sur $[0,T)$.

Un résultat analogue reste valable quand on remplace l' hypothèse $\nabla u \in L^2 \left((0,T) ; \dot{X}_1 (\mathbb{R}^n)^n \right)$ par $u \in L^2 \left((0,T) ; BMO \left(\mathbb{R}^n \right)^n \right)$. Le corollaire suivant est une conséquence immédiate du théorème 2.7.5 qui établit une condition suffisante en termes des espaces de Lorentz.

Corollaire 2.7.1 *Soit $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)^n$ avec $\nabla.u_0 = 0$. Supposons qu' il existe une solution u pour les équations de Navier-Stokes sur $(0,T) \times \mathbb{R}^n$ (pour certain $T \in (0,+\infty]$ avec une donnée initiale a telle que*

$$u \in L^\infty\left((0,T)\,; L^2_\sigma(\mathbb{R}^n)^n\right) \cap L^2\left((0,T)\,; \dot{H}^1_\sigma(\mathbb{R}^n)^n\right),$$

et

$$\nabla u \in L^2\left((0,T)\,; L^{n,\infty}(\mathbb{R}^n)^n\right),$$

Alors u est l' unique solution au sens de Leray-Hopf associée à u_0 sur $[0,T)$.

Un résultat analogue reste valable quand on remplace l' hypothèse $\nabla u \in L^2\left((0,T)\,; L^{n,\infty}(\mathbb{R}^n)^n\right)$ par $u \in L^2\left((0,T)\,; L^n(\mathbb{R}^n)^n\right)$.

Les lemmes suivants jouent des rôles fondamentaux dans l' estimation du terme nonlinéaire.

Lemme 2.7.1 *Supposons que $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$, $g(x) = (g_i(x))_{i=1}^n$ avec $\nabla.g = 0$ et $g \in L^2(\mathbb{R}^n)^n$. De plus, on suppose que $\nabla h \in \dot{X}_1(\mathbb{R}^n)$. Alors il existe une constante $C(n) > 0$ indépendente de f, g et h telle que*

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} fg.\nabla h dx\right| \leq C \left\|\nabla f\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \left\|g\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)^n} \left\|\nabla h\right\|_{\dot{X}_1(\mathbb{R}^n)} \tag{2.7.7}$$

et

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} \nabla f.gh dx\right| \leq C \left\|\nabla f\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \left\|g\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)^n} \left\|\nabla h\right\|_{\dot{X}_1(\mathbb{R}^n)}. \tag{2.7.8}$$

Le même résultat reste valable si on remplace l' hypothèse $\nabla h \in \dot{X}_1(\mathbb{R}^n)$ par $h \in H^1(\mathbb{R}^n) \cap BMO(\mathbb{R}^n)$. En effet, on sait déjà que

$$h(x) = \log|x| \in BMO$$

et

$$|\nabla h|^2 \leq \frac{1}{|x|^2}.$$

D' après l' inégalité de Hardy sur $\mathbb{R}^n$ $(d \geq 3)$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|f(x)|^2}{|x|^2} dx \leq C(d) \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f|^2 dx, \quad \forall f \in H^1(\mathbb{R}^d).$$

Cette remarque suggère que le lemme sera aussi vrai si on remplace la norme de ∇h dans $\dot{X}_1(\mathbb{R}^d)$ par la norme de h dans BMO. En effet, on a le résultat suivant.

Lemme 2.7.2 *Soit $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$, $g = (g_i(x))_{i=1}^n$ avec $\nabla.g = 0$ et $g \in L^2(\mathbb{R}^n)^n$ et une fonction $h \in H^1(\mathbb{R}^n) \cap BMO(\mathbb{R}^n)$. Alors il existe une constante $C(n) > 0$ indépendente de f, g et h telle que*

$$|\langle g.\nabla f, h\rangle| \leq C \left\|\nabla f\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \left\|g\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)^n} \left\|h\right\|_{BMO(\mathbb{R}^n)} . \tag{2.7.9}$$

Dans ce qui suit, un rôle important sera joué par le lemme suivant.

Lemme 2.7.3 (Inégalité de Poincaré) *Supposons Q est un cube unité de $\mathbb{R}^n$ de côté ρ et f est de classe C^2 sur Q avec $\nabla f \in L^2(Q)$. Alors il existe une constante c indépendente de f telle que*

$$\int_Q |f - m_Q f|^2 \, dy \leq c \; \rho^2 \int_Q |\nabla f(y)|^2 \, dy, \tag{2.7.10}$$

où $m_Q f = \frac{1}{|Q|} \int_Q f(y)dy$ est la moyenne de f sur Q.

Proposition 2.7.1 *Si $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$ et $\nabla f \in \dot{X}_1(\mathbb{R}^n)$, alors*

$$f \in BMO(\mathbb{R}^n).$$

2.8 Preuve du théorème d' unicité généralisé 2.7.5

Nous venons de décrire sommairement les idées et les méthodes qui seront systématiquement utilisées dans ce chapitre. Donc, nous sommes maintenant en mesure de prouver notre principal résultat.

Preuve. Soit v une autre solution faible de (2.1.1) associée à la condition initiale u_0 sur $(0, T)$ (avec une pression p) telle que

$$v \in L^\infty \left((0, T) ; L^2_\sigma \left(\mathbb{R}^n\right)^n\right) \cap L^2 \left((0, T) ; \dot{H}^1_\sigma \left(\mathbb{R}^n\right)^n\right)$$

et

$$\nabla v \in L^2 \left((0, T) ; \dot{X}_1(\mathbb{R}^n)^n\right).$$

Ensuite, on considère la différence $w \stackrel{\text{déf}}{=} u - v$ qui vérifie l' équation

$$\begin{aligned} \partial_t w - \Delta w + \nabla p_w &= -\left[w.\nabla v + u.\nabla w\right], \\ \operatorname{div} w &= 0, \\ w(x, 0) &= 0. \end{aligned} \tag{2.8.1}$$

Si on prend le produit scalaire $\langle .,. \rangle$ de L^2 avec w, il vient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|_{L^2}^2 + \|\nabla w\|_{L^2}^2 = -\langle w.\nabla v, w\rangle .$$

En fait, puisque

$$\langle u.\nabla w, w\rangle = -\left\langle \nabla.u, |w|^2\right\rangle - \langle u.\nabla w, w\rangle = 0,$$

et

$$\langle \nabla p_w, w\rangle = -\langle p_w, \mathrm{div}\ w\rangle = 0,$$

on obtient ainsi de l' égalité au-dessus

$$\begin{aligned} \|w(t)\|_{L^2}^2 + 2\int_0^t \|\nabla w\|_{L^2}^2\, d\tau &= -2\int_0^t \langle w.\nabla v, w\rangle\, d\tau \\ &= 2\int_0^t \langle w.\nabla w, v\rangle\, d\tau \end{aligned} \tag{2.8.2}$$

pour tout $0 \leq t < T$. En vertu du lemma 2.7.1 avec

$$g = w, \quad \nabla f = \nabla w \quad \text{and} \quad h = v$$

découle directement

$$|\langle w.\nabla w, v\rangle| \leq C\,\|\nabla w\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,\|w\|_{L^2(\mathbb{R}^n)^n}\,\|\nabla v\|_{\dot{X}_1(\mathbb{R}^n)} .$$

Il s' ensuit grâce à l' inégalité de Young $\left(ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}, \quad a, b \geq 0\right)$ que

$$\left|\int_0^t \langle w.\nabla w, v\rangle\right| d\tau \leq \frac{1}{2}\int_0^t \|\nabla w\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2\, d\tau + \frac{C}{2}\int_0^t \|w\|_{L^2(\mathbb{R}^n)^n}^2\,\|\nabla v\|_{\dot{X}_1(\mathbb{R}^n)}^2\, d\tau.$$

De (2.8.2) il suit

$$\|w(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\nabla w\|_{L^2}^2\, d\tau \leq C\int_0^t \|w\|_{L^2(\mathbb{R}^n)^n}^2\,\|\nabla v\|_{\dot{X}_1(\mathbb{R}^n)}^2\, d\tau$$

pour tout $t > 0$. Comme $\nabla v \in L^2\left((0,T)\,;\dot{X}_1(\mathbb{R}^n)^n\right)$ et puisque $w(0) = 0$, il découle aisément du lemme de Gronwall que

$$\|w(t)\|_{L^2}^2 \leq \|w(0)\|_{L^2}^2 \exp\left(C\int_0^t \|\nabla v\|_{\dot{X}_1(\mathbb{R}^n)}^2\, d\tau\right).$$

Alors pour tout $0 \leq t < T$, nous avons

$$\|w(t)\|_{L^2}^2 = 0,$$

ce qui achève l' unicité des solutions faibles.

La preuve du théorème quand

$$u \in L^2\left((0,T)\,; BMO\left(\mathbb{R}^n\right)^n\right)$$

est très similaire. On applique le lemme 2.7.2 avec

$$g = w, \quad \nabla f = \nabla w \quad \text{et} \quad h = v,$$

découle directement

$$|\langle w.\nabla w, v\rangle| \leq C \|\nabla w\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|w\|_{L^2(\mathbb{R}^n)^n} \|v\|_{BMO(\mathbb{R}^n)} .$$

Utilisant encore une fois l' inégalité de Young, nous avons

$$\left|\int_0^t \langle w.\nabla w, v\rangle\right| d\tau \leq \frac{1}{2}\int_0^t \|\nabla w\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau + \frac{C}{2}\int_0^t \|w\|_{L^2(\mathbb{R}^n)^n}^2 \|v\|_{BMO(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau.$$

Il vient, à l' aide de (2.8.2) que

$$\|w(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\nabla w\|_{L^2}^2 d\tau \leq C\int_0^t \|w\|_{L^2(\mathbb{R}^n)^n}^2 \|v\|_{BMO(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau$$

pour tout $0 \leq t < T$. Comme $v \in L^2\left((0,T)\,; BMO\left(\mathbb{R}^d\right)^d\right)$ et puisque $w(0) = 0$, le lemme de Gronwall entraîne

$$\|w(t)\|_{L^2}^2 = 0,$$

pour tout $0 \leq t < T$, ce qui donne l' unicité désirée. $\square$

Bibliographie

[1] Bergh, J. and Löfström, J., Interpolation spaces, An introduction , Springer Verlag, 1976.

[2] Bendoukha, B., Benbernou, S. and Gala, S., Remark on the uniqueness theorem of von Wahl for the Navier-Stokes equations, International Journal of Evolution Equations (à paraître).

[3] Benbernou, S. and Gala, S., Remark on uniqueness of weak solutions to the Navier-Stokes equations, to appear in Analysis.

[4] Coifman, R., Lions, P. L., Meyer ,Y. and Semmes, S., Compensated compactness and Hardy spaces , J. Math. Pures Appl., 72 (1993), 247-286.

[5] Constantin, P., Remarks on the Navier-Stokes equations, New Perspectives in Turbulence, 229-261, Springer-Verlag,New York, 1991.

[6] Foias, C., Une remarque sur l' unicité des solutions des équations de Navier-Stokes endimension n, Bull. Soc. Math. France 89 (1961), 1-8.

[7] Fefferman, C., and Stein, E.M., H^p spaces of several variables, Acta Math. 129(1972), 137-193.

[8] Fujita, H., Kato, T., On the Navier-Stokes initial value problem 1. Arch. Rational Mech. Anal. 16 (1964), 269-315.

[9] Furioli, G., Lemarié-Rieusset, P.G., and Terraneo, E., Sur l' unicité dans $L^3(\mathbb{R}^3)$ des solutions "mild" des équations de Navier-Stokes, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 325 (12) : 1253-1256, 1997.

[10] Furioli, G., Lemarié-Rieusset, P. G., and Terraneo, E., Unicité dans $L^3(\mathbb{R}^3)$ et d' autres espaces fonctionnels limites pour Navier-Stokes, Rev. Mat. Iberoamericana 16 (2000), 605-667.

[11] Gala, S., A note on the uniqueness of mild solutions to the Navier-Stokes equations, Archiv der Mathematik, 88 (5), 2007, pp. 448-454.

[12] Gala, S., A new regularity criterion of Leray weak solutions to the Navier-Stokes equation, to appear in New Zealand Journal of Mathematics.

[13] Gala, S., Bendoukha, B. and Benbernou, S., On the regularity of weak solutions to the Navier-Stokes equations, Advances and Applications in Fluid Mechanics, 1 (2), 2007, pp. 147 - 180.

[14] Gala, S., Multipliers spaces, Muckenhoupt weights and pseudo-differential operators, J. Math. Anal. Appl. 324 (2), 2006, pp. 1262-1273

[15] Gala, S., A note on Div-Curl lemma, Serdica Math. J., $33 : 2 - 3$ (2007), pp. 339-350.

[16] Giga, Y., Solutions for semilinear parabolic equations in L^p and regularity of weak solutions of the Navier-Stokes system. J. differential Eq. 62 (1986), 182-212.

[17] Giga, Y. and Sohr, H., Abstract L^p estimates for the Cauchy problem with applications to the Navier-Stokes equationsin exterior domains, J. Funct. Anal. 102 (1991), 72-94.

[18] Hopf, E., Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamichen Grundgleichungen, Math. Nach. 4 (1950/1951), 213-231.

[19] Hunt, R., On $L(p,q)$ spaces, l'Enseigne. Math., 12 : 249-276, 1967.

[20] Kato, T., Strong L^psolutions of the Navier-Stokes equations in Morrey spaces, Bol. Soc. Bras. Mat. 22,2 (1992) 127-155.

[21] Kato, T., Strong L^p solutions of the Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}^n$, with applications to weak solutions, Mat. Z. 187 (1984), 471-480.

[22] Kozono, H., On well-posedness of the Navier-Stokes equations, In Mathematical fluid mechanics, Birkhauser, Basel, 2001, 207-236.

[23] Kozono, H., Taniuchi,Y., Bilinear estimates in BMO and the Navier-Stokes equations. Math. Z. 235 (2000), 173-194.

[24] Kozono, H., Ogawa, T., and Taniuchi,Y., The critical Sobolev inequalities in Besov spaces and regularity criterion to some semi-linear evolution equations, Math. Z. 242, (2002), 251-278.

[25] Kozono, H., and Sohr, H., Remark on uniqueness of weak solutions to the Navier-Stokes equations, Analysis, 16 (1996), 255-271.

[26] Kozono, H., Shimada, Y., Bilinear estimates in homogeneous Triebel-Lizorkin spaces and the Navier-Stokes equations, Math. Nach., 276 (2004), 63-74.

[27] Lemarié-Rieusset, P.G., Recent developments in the Navier-Stokes problem. Chapman & Hall/ CRC Press, Boca Raton, 2002.

[28] Lemarié-Rieusset, P.G., and Gala.S., Multipliers between Sobolev spaces and fractional differentiation, J. Maths. Anal. Appl., 322 (2006), 1030-1054.

[29] Leray, J., Sur le mouvement d' un liquide visqueux emplissant l'espace. Acta. Math. 63 (1934), 193-248.

[30] Lions, P. L. and Masmoudi, N., Unicité des solutions faibles de Navier-Stokes dans $L^N(\Omega)$, C. R. Acad. Sci. Paris (série I) 327 (1998), 491-496.

[31] Lions, P. L. and Masmoudi, N., Uniqueness of mild solutions of the Navier-Stokes in $L^N(\Omega)$, Comm. Partial Differential Equations, 26 (2001), N°$11-12$, 2211-2226.

[32] Masuda, K., Weak solutions of Navier-Stokes equations, Tohoku Math J., 36 (1984), 623-646.

[33] Meyer, Y., Wavelets, paraproducts and Navier-Stokes equations, Current developments in mathematics, International Press, 1999.

[34] Monniaux, S., Uniqueness of mild solutions of the Navier-Stokes equation and maximal L^p-regularity, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, Math. 328, (1999), 663-668.

[35] Murat, F., Compacité par compensation, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Cl. Sci. (4), Vol.5 (1978), p.489-507.

[36] Serrin, J., On the interior regularity of weak solutions of the Navier stokes equations, Arch. Rational Mech. Anal. 9 (1962), 187 - 195.

[37] Serrin, J., Local behavior of solutions of quasi-linear equations, Acta Math, 111(1964),247-302.

[38] Sohr, H., A regularity class for the Navier stokes equations in Lorentz spaces, J. Evol. Eq.1, (2001), 441-467.

[39] Sohr, H., The Navier-Stokes equations, An Elementary Functional Analytic Approach, Birkhäuser advanced texts, 2001.

[40] Stein, E. M., Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1970.

[41] Stein, E.M., Harmonic Analysis : Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1993.

[42] Stein, E. M. and Weiss, G., Introduction to Fourier Analysison euclidian spaces. Princeton Mathematical series. Princeton University Press,1971.

[43] Tartar, L., Compensated compactness and applications to partial differential equations, Nonlinear analysis and mechanics : Heriot-Watt Symposium, Vol. IV, 136-212, Res. Notes in Math., Vol. 39, Pitman, Boston, Mass.-London, 1979.

[44] Taylor, M.E., Analysis on Morrey spaces and applications to Navier-Stokes equations and other evolutions equations, Comm.P.D.E. 17 (1992), 1407-1456.

[45] Temam, R., Navier-Stokes equations. North-Holland, Amstardam, 1977.

[46] Triebel, H., Theory of function Spaces II, Birkhäuser Verlag, Basel, 1992.