REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

UNIVERSITE ABD EL HAMID IBN BADIS DE MOSTAGANEM

FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET D'INFORMATIQUE

DEPARTEMENT DE MATHMEMATIQUES

MEMOIRE

DE MASTER EN MATHEMATIQUES

Option: Analyse Harmonique

Intitulé

Une condition suffisante sur une fonction engendrant une A.M.R.

Présenté par

Melle Halima Salem Zohra

Soutenu le 19/06/2013 devant le jury:

President:	**Mr. Sidi Mohamed Bahri**	**MCA**	**U. Mostaganem**
Examinateur:	**Mr. Ould Ali**	**MCA**	**U. Mostaganem**
Encadreur:	**Mr. Sadek Gala**	**Pr**	**U. Mostaganem**

Une condition suffisante sur une fonction engendrant une A.M.R.

Halima Salem Zohra

Universite de Mostaganem

20 juin 2013

L'objectif de ce travail

L'objet de ce travail est de répondre à la question "quelles conditions une fonction

$$\varphi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \tag{1}$$

engendre-t-elle une analyse multi-résolution?"

Analyse multi-résolution

Definitions

Une analyse multi-résolution est une suite de sous-espaces fermés $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R})$ qui vérifie les propriétés suivante:

1. $V_j \subset V_{j+1}$, $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$ et $\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$,

Definitions

Une analyse multi-résolution est une suite de sous-espaces fermés $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R})$ qui vérifie les propriétés suivante:

1. $V_j \subset V_{j+1}$, $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$ et $\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$,
2. $f(x) \in V_j$ si et seulement si $f(2x) \in V_{j+1}$,

Analyse multi-résolution

Definitions

Une analyse multi-résolution est une suite de sous-espaces fermés $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R})$ qui vérifie les propriétés suivante:

1. $V_j \subset V_{j+1}$, $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$ et $\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$,
2. $f(x) \in V_j$ si et seulement si $f(2x) \in V_{j+1}$,
3. V_0 a une base de Riesz de la forme $\varphi(x-k)$, $k \in \mathbb{Z}$, avec φ à valeurs réelles. Le plus souvent on impose à φ d'être à décroissance rapide à l'infini.

Analyse multi-résolution

Definitions

Une analyse multi-résolution est une suite de sous-espaces fermés $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R})$ qui vérifie les propriétés suivante:

1. $V_j \subset V_{j+1}$, $\bigcap\limits_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$ et $\bigcup\limits_{j\in\mathbb{Z}} V_j$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$,
2. $f(x) \in V_j$ si et seulement si $f(2x) \in V_{j+1}$,
3. V_0 a une base de Riesz de la forme $\varphi(x-k)$, $k \in \mathbb{Z}$, avec φ à valeurs réelles. Le plus souvent on impose à φ d'être à décroissance rapide à l'infini.
4. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x^k\varphi \in L^2(\mathbb{R})$.

Remark

La fonction φ est appelée fonction d'échelle d'une A.M.R.

Remark

Les espaces V_j se déduisent par dilatation de l'espace V_0

$$V_j = \mathrm{Vect}\left\{\varphi_{j,k} : x \longmapsto 2^{\frac{j}{2}}\varphi\left(2^j x - k\right) / k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Analyese multi-résolution

Remark

Une base d'ondelettes est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$ *de la forme* $\left(\varphi_{j,k}\right)$, $j,\ k \in \mathbb{Z}$ *où*

$$\varphi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \varphi\left(2^j x - k\right),$$

avec φ *une fonction de carré intégrable à valeurs réelles.*

Analyese multi-résolution

- La transformation en ondelettes orthogonales est alors définie par

$$f \longmapsto \left\langle f, \varphi_{j,k} \right\rangle, \quad j, \; k \in \mathbb{Z},$$

- La transformation en ondelettes orthogonales est alors définie par

$$f \longmapsto \left\langle f, \varphi_{j,k} \right\rangle, \quad j,\ k \in \mathbb{Z},$$

- avec la formule de reconstruction

$$f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left\langle f, \varphi_{j,k} \right\rangle \varphi_{j,k},$$

- La transformation en ondelettes orthogonales est alors définie par

$$f \longmapsto \left\langle f, \varphi_{j,k} \right\rangle, \quad j, \ k \in \mathbb{Z},$$

- avec la formule de reconstruction

$$f = \sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left\langle f, \varphi_{j,k} \right\rangle \varphi_{j,k},$$

- et la formule de Plancherel

$$\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\left\langle f, \varphi_{j,k} \right\rangle\right|^2.$$

- La réponse de la question précédente est fournie par le théorème suivant, essentiellement dû à S. Mallat (théorème 7.2, p. 266), mais on emploiera une méthode différente de celle du S. Mallat. Donc, nous proposons ici une condition suffisante portant sur une fonction φ vérifiant (1) pour qu'elle engendre une A.M.R.

Theorem

Soit $\varphi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ à valeurs réelles. Une condition suffisante pour que l'on ait φ engendre une A.M.R., est que la transformée de Fourier de φ

$$\hat{\varphi}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \exp(-ix\omega)\, dx$$

vérifie

$$\hat{\varphi}(0) \neq 0.$$

Analyese multi-résolution

Lemma

Pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$,

$$f_j \longrightarrow f \quad \text{dans} \;\; L^2(\mathbb{R}) \;\; \text{quand} \;\; j \longrightarrow +\infty,$$

où f_j *est la projection orthogonale de* f *sur* V_j.

Analyese multi-résolution

Remark

La projection orthogonale $P_{V_j}f = f_j$ *de* $f \in L^2(\mathbb{R})$ *sur* V_j *se calcule par la formule*

$$\begin{aligned} P_{V_j}f &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left\langle f, \varphi_{k,j} \right\rangle \varphi_{k,j} \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} C_k(f)\, \varphi_{k,j} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} C_k(f) &= \int_{\mathbb{R}} f(t)\, \varphi_{k,j}(t)\, dt \\ &= (f * \tilde{\varphi}_k)\left(2^k j\right) \end{aligned}$$

où

$$\tilde{\varphi}_k(x) = 2^{\frac{-k}{2}} \varphi\left(2^{-k}x\right).$$

Supposons que φ engendre une A.M.R orthonormée, telle que

$$..... \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset ....$$

Comme $\underset{j\in\mathbb{Z}}{\cup} V_j$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ et $P_{V_j}f$ est la projection orthogonale de f sur V_j, on a par la relation (1.1):

$$\lim_{j\longrightarrow\infty} \left\| f - P_{V_j}f \right\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0, \quad \text{pour tout } f \in L^2(\mathbb{R}).$$

En particulier, cette équation est vraie pour f définie par:

$$\hat{f}(\omega) = \chi_{[-\pi,\pi]}(\omega).$$

Alors:

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = 1.$$

Par conséquent, il existe une entier $n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que la fonction:

$$f_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{n,k} \rangle \varphi_{n,k} \qquad \text{pour tout } n \geq n_0$$

vérifie

$$\|f - f_n\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq \frac{1}{2}.$$

Puisque f est la somme de deux vecteurs orthogonaux $f_n \in V_j$ et $(f - f_n) \perp V_j$, on sait par le théorème de Pythagore que

$$\|f - f_n\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} - \|f_n\|^2_{L^2(\mathbb{R})} .$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \|f_n\|^2_{L^2(\mathbb{R})} &= \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} - \|f - f_n\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\geq 1 - \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

En utilisant l'orthogonalité de $\left(\varphi_{n,k}\right)_{k\in\mathbb{Z}}$, on obtient

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\left\langle f, \varphi_{n,k}\right\rangle\right|^2 \geq \frac{1}{2}.$$

Notons que:

$$\begin{aligned} \left\langle f, \varphi_{n,k}\right\rangle &= \frac{1}{2\pi}\left\langle \hat{f}, \hat{\varphi}_{n,k}\right\rangle \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2^{\frac{n}{2}}\chi_{[-2^{-n}\pi, 2^{-n}\pi]}(w)\,\overline{\hat{\varphi}}(w)\,dw \end{aligned}$$

est le coefficient de Fourier à l'ordre k de la fonction: $2^{\frac{n}{2}}\chi_{[-2^{-n}\pi,2^{-n}\pi]}\overline{\hat{\varphi}}$ définie sur $[-\pi,\pi]$ car $[-2^{-n}\pi, 2^{-n}\pi] \subseteq [-\pi,\pi]$ pour $n \geq 0$

D'après la formule de Parseval pour les séries de Fourier, on en déduit que pour tout $n \geq \max(0, n_0)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\left\langle f, \varphi_{n,k} \right\rangle\right|^2 = \left\| 2^{\frac{n}{2}} \chi_{[-2^{-n}\pi, 2^{-n}\pi]} \overline{\hat{\varphi}} \right\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= \int_{-2^{-n}\pi}^{2^{-n}\pi} 2^n \left| \overline{\hat{\varphi}(w)} \right|^2 dw, \qquad n \geq 1. \end{aligned}$$

Comme φ est intégrable et $\hat{\varphi}$ est continue, il en résulte par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue que

$$\left|\hat{\varphi}(0)\right|^2 > 0.$$

Corollary

Soit $\varphi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ *une fonction d'échelle qui engendre une A.M.R. et supposons de plus que* $\hat{\varphi}(\omega)$ *est continue en* 0*. Alors,*

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dx \right| = 1.$$

Soit P_{V_j} la projection orthogonale sur V_j et soit g une fonction non nulle de $L^2(\mathbb{R})$ sachant que $\operatorname{supp}(\hat{g}) \subset [-1, 1]$.
En utilisant l'orthonormalité du système

$$\left\{\varphi_{j,k}\right\}_{j,k\in\mathbb{Z}} = \left\{2^{\frac{j}{2}}\varphi\left(2^j x - k\right)\right\}_{k\in\mathbb{Z}},$$

on déduit que

$$\left\|P_{V_j}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \frac{1}{4\pi^2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|\int_{-1}^{1}\hat{g}(\omega)\,\overline{\hat{\varphi}}\left(2^{-j}\omega\right)\exp\left(i2^{-j}k\omega\right)d\omega\right|^2.$$

L'intégrale apparaissant entre la valeur absolue:

$$\int_{-1}^{1} \hat{g}(\omega)\,\overline{\hat{\varphi}}\left(2^{-j}\omega\right)\exp\left(i2^{-j}k\omega\right)d\omega$$

au membre de droite, considérée comme le $(-k)^{-éme}$ coefficient de Fourier de la fonction $\sqrt{2\pi}\hat{g}(\omega)\,\overline{\hat{\varphi}}\left(2^{-j}\omega\right)$ sur l'interval $[-1,1]$. Alors,

$$\left\|P_{V_j}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\left|\hat{g}(\omega)\right|^2\left|\hat{\varphi}\left(2^{-j}\omega\right)\right|^2 d\omega. \tag{2}$$

En passant à la limite dans la relation (2), on obtient l'égalité:

$$\lim_{j \longrightarrow +\infty} \left\| P_{V_j} \right\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \|g\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \tag{3}$$

D'autre part, en utilisent la continuité de $\hat{\varphi}$ en 0 et la formule de Plancherel, on trouve

$$\lim_{j \longrightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} |\hat{g}(\omega)|^2 \left|\hat{\varphi}\left(2^{-j}\omega\right)\right|^2 d\omega = \|g\|^2 |\hat{\varphi}(0)|^2 . \tag{4}$$

Finalement, on obtient

$$|\hat{\varphi}(0)|^2 = 1$$

et donc

$$|\hat{\varphi}(0)| = 1,$$

Merci pour votre attention

Remerciement

Je tiens tout d'abord à remercier « Dieu» le tout puissant de je avoir donné le courage, la force pour réaliser ce travail de fin d'étude.

Je tiens remercier mon encadreur *Sadek Gala*, pour son soutient constant, son encouragement, sa disponibilité et son conseil précieux tout au long de ce travail.

Je n'oublie pas de remercier également le président *Sidi Mohamed Bahri* et l'examinateur *Ould Ali.*

Un grand merci à tous mes professeurs qui m'ont aidé tout au long chemin pour que je sois ce que je suis aujourd'hui.

Naturellement, je tiens à remercier ma famille surtout mon père et ma mère pour leur soutient et leur courage. Je remercie aussi mes amis et toutes les personnes qui ont contribue de loin ou de prés à la réalisation de ce travail.

0.0.1 Rappel

Base de Riesz

Une famille de vecteurs $\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est une base de Riesz d'un espace de Hilbert si et seulement si est

1. Linéairement Independent,
2. $\exists \gamma, \beta \in \mathbb{R}$ avec $\alpha \leq \beta$

$$\gamma \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x_n \right)^{\frac{1}{2}} \leq \beta \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Décroissance rapide

On dit une fonction $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ est à décroissance rapide si pour tout entiers positifs α et β

$$\lim_{|t| \longrightarrow +\infty} \left| t^{\alpha} f^{(\beta)}(t) \right| = 0.$$

Base orthonormées

Une système orthonormé $\{\varphi_n\}$ est dites base orthonormée s'il est complet.
On sait qu'il y a une analogie formelle entre transformation de Fourier et transformation en ondelettes. Aussi est-il légitime de se demander s'il est possible de trouver une fonction φ que nous appellerons ondelette discrète telle que :

$$\forall j, k \in \mathbb{Z}, \quad \varphi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \varphi\left(2^j x - k\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

et pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t)\, \varphi_{j,k}(t)\, dt \right) \varphi_{j,k}(x).$$

La réponse est affirmative.
Nous rappelons dans ce mémoire les propriétés des analyses multi-résolutions dont nous aurons besoin par la suite. La notion d'analyse multi-résolution a été introduite en 1986 par S. Mallat [2] et la plupart des propriétés que nous utiliserons sont démontrées dans le livre d'Y. Meyer [3] et la thèse d'A. Cohen [1].

Définition 0.1 *:*

Une analyse multi-résolution est une suite de sous-espaces fermés $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R})$ qui vérifie les propriétés suivantes :

(1.1) $V_j \subset V_{j+1}$, $\underset{j \in \mathbb{Z}}{\cap} V_j = \{0\}$ et $\underset{j \in \mathbb{Z}}{\cup} V_j$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$,

(1.2) $f(x) \in V_j$ si et seulement si $f(2x) \in V_{j+1}$,

(1.3) V_0 a une base de Riesz de la forme $\varphi(x-k)$, $k \in \mathbb{Z}$, avec φ à valeurs réelles. Le plus souvent on impose à φ d'être à décroissance rapide à l'infini.

(1.4) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x^k \varphi \in L^2(\mathbb{R})$.

Remarque 0.1 *:*

i) La fonction φ est appelée fonction d'échelle d'une A.M.R.

ii) Les espaces V_j se déduisent par dilatation de l'espace V_0

$$V_j = \mathrm{Vect}\left\{\varphi_{j,k} : x \longmapsto 2^{\frac{j}{2}} \varphi\left(2^j x - k\right) / k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

iii) Une base d'ondelettes est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$ de la forme $\left(\varphi_{j,k}\right)$, $j,\, k \in \mathbb{Z}$ où

$$\varphi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \varphi\left(2^j x - k\right),$$

avec φ une fonction de carré intégrable à valeurs réelles.
La transformation en ondelettes orthogonales est alors définie par

$$f \longmapsto \left\langle f, \varphi_{j,k} \right\rangle, \quad j,\ k \in \mathbb{Z},$$

avec la formule de reconstruction :

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left\langle f, \varphi_{j,k} \right\rangle \varphi_{j,k},$$

et la formule de Plancherel :

$$\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left|\left\langle f, \varphi_{j,k} \right\rangle\right|^2.$$

La question qui se pose à quelles conditions une fonction

$$\varphi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \tag{0.1}$$

engendre-t-elle une analyse multi-résolution ? La réponse est fournie par le théorème suivant, essentiellement dû à S. Mallat (Théorème 7.2, p. 266), mais on emploiera une méthode différente de celle du S. Mallat. Donc, nous proposons ici une condition suffisante portant sur une fonction φ vérifiant (0.1) pour qu'elle engendre une analyse multi-résolution.

Théorème 0.1 *:*

Soit $\varphi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ à valeurs réelles. Une condition suffisante pour que l'on ait φ engendre une A.M.R., est que la transformée de Fourier de φ

$$\hat{\varphi}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \exp(-ix\omega)\, dx$$

vérifie

$$\hat{\varphi}(0) \neq 0.$$

La démonstration de ce résultat repose sur le lemme suivant :

Lemme 0.1 *:*

Pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$,

$$f_j \longrightarrow f \quad \text{dans} \quad L^2(\mathbb{R}) \quad \text{quand} \quad j \longrightarrow +\infty,$$

où fj est la projection orthogonale de f sur V_j.

Remarque 0.2 *:*

La projection orthogonale $P_{V_j} f = f_j$ de $f \in L^2(\mathbb{R})$ sur V_j se calcule par la formule :

$$\begin{aligned} P_{V_j} f &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{k,j} \rangle \varphi_{k,j} \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} C_k(f)\, \varphi_{k,j}, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} C_k(f) &= \int_{\mathbb{R}} f(t)\, \varphi_{k,j}(t)\, dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(t)\, 2^{\frac{-k}{2}} \varphi\left(\frac{t-j}{2^k}\right) dt \\ &= (f * \tilde{\varphi}_k)\left(2^k j\right), \end{aligned}$$

où

$$\tilde{\varphi}_k(x) = 2^{\frac{-k}{2}} \varphi\left(2^{-k} x\right).$$

Preuve. (Lemme 0.1) $\square$

Fixons $f \in L^2(\mathbb{R})$ et choisissons un nombre $\epsilon > 0$.

Comme $\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$, on peut trouver un nombre $n \in \mathbb{N}$ et une fonction $g \in V_n$ tels que

$$\|f - g\|_{L^2(\mathbb{R})} < \epsilon.$$

Puisque g est automatiquement dans V_k pour tout $k \geq n$, alors

$$f_k = P_{V_k} f \in V_k \text{ converge vers } f$$

sachant que

$$\|f - f_k\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|f - g\|_{L^2(\mathbb{R})} < \epsilon, \quad \text{pour tout} \quad k \geq n.$$

D'où le lemme est démontré.

0.1 Preuve du théorème :

Supposons que φ engendre une A.M.R orthonormée, telle que

$$..... \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset ....$$

Comme $\underset{j\in\mathbb{Z}}{\cup} V_j$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ et $P_{V_j}f$ est la projection orthogonale de f sur V_j, on a par la relation (1.1) :

$$\lim_{j\longrightarrow\infty} \left\|f - P_{V_j}f\right\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0, \quad \text{pour tout } f \in L^2(\mathbb{R}).$$

En particulier, cette équation est vraie pour f définie par :

$$\hat{f}(\omega) = \chi_{[-\pi,\pi]}(\omega).$$

Alors la norme de f peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} &= \frac{1}{2\pi}\left\|\hat{f}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \left|\hat{f}(x)\right|^2 dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \left|\chi_{[-\pi,\pi]}(x)\right|^2 dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Par conséquent, il existe une entier $n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que la fonction :

$$f_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left\langle f, \varphi_{n,k}\right\rangle \varphi_{n,k}, \qquad \text{pour tout } n \geq n_0$$

vérifie

$$\|f - f_n\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{2}.$$

Puisque f est la somme de deux vecteurs orthogonaux $f_n \in V_j$ et $(f - f_n) \perp V_j$, on sait par le théorème de Pythagore que

$$\|f - f_n\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} - \|f_n\|^2_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\|f_n\|^2_{L^2(\mathbb{R})} &= \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} - \|f - f_n\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \\
&\geq 1 - \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

En utilisant l'orthogonalité de $\left(\varphi_{n,k}\right)_{k\in\mathbb{Z}}$, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|\left\langle f,\varphi_{n,k}\right\rangle\right|^2 &= \|f_n\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\\ &= \left\|\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left\langle f,\varphi_{n,k}\right\rangle\varphi_{n,k}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\\ &\geq \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Notons que :

$$\begin{aligned}\left\langle f,\varphi_{n,k}\right\rangle &= \frac{1}{2\pi}\left\langle \hat{f},\hat{\varphi}_{n,k}\right\rangle\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\hat{f}\left(w\right)\overline{\hat{\varphi}}_{n,k}\left(w\right)dw\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{\hat{\varphi}}_{n,k}\left(w\right)dw\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}2^{\frac{-n}{2}}\exp\left(-i2^{-n}wk\right)\overline{\hat{\varphi}}\left(2^{-n}w\right)dw\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-2^{-n}\pi}^{2^{-n}\pi}2^{\frac{n}{2}}\exp\left(-iwk\right)\overline{\hat{\varphi}}\left(w\right)dw\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}2^{\frac{n}{2}}\chi_{[-2^{-n}\pi,2^{-n}\pi]}\left(w\right)\overline{\hat{\varphi}}\left(w\right)dw\end{aligned}$$

est le coefficient de Fourier à l'ordre k de la fonction : $2^{\frac{n}{2}}\chi_{[-2^{-n}\pi,2^{-n}\pi]}\overline{\hat{\varphi}}$ définie sur $[-\pi,\pi]$ car $[-2^{-n}\pi,2^{-n}\pi]\subseteq[-\pi,\pi]$ pour $n\geq 0$.
D'après la formule de Parseval pour les séries de Fourier, on en déduit que pour tout $n\geq\max\left(0,n_0\right)$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} &\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|\left\langle f,\varphi_{n,k}\right\rangle\right|^2\\ &= \left\|2^{\frac{n}{2}}\chi_{[-2^{-n}\pi,2^{-n}\pi]}\overline{\hat{\varphi}}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\\ &= \int_{-2^{-n}\pi}^{2^{-n}\pi}2^n\left|\overline{\hat{\varphi}\left(\omega\right)}\right|^2 d\omega.\end{aligned}$$

Comme φ est intégrable et $\hat{\varphi}$ est continue, il en résulte par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue que

$$\begin{aligned}
|\hat{\varphi}(0)|^2 &= \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-2^{-n}\pi}^{2^{-n}\pi} 2^n |\hat{\varphi}(\omega)|^2 \, d\omega \\
&= \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2^n \left|\hat{\varphi}\left(2^{-n}\omega\right)\right|^2 d\omega \\
&\geq \frac{1}{4\pi} > 0,
\end{aligned}$$

et donc nécessairement le théorème est démontré.
Une conséquence remarquable du théorème 0.1 est le résultat suivant :

Corollaire 0.1 *:*

Soit $\varphi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ une fonction d'échelle qui engendre une A.M.R. et supposons de plus que $\hat{\varphi}(\omega)$ est continue en 0. Alors,

$$\left|\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dx\right| = 1.$$

Preuve. □
Soit P_{V_j} la projection orthogonale sur V_j et soit g une fonction non nulle de $L^2(\mathbb{R})$ sachant que

$$\operatorname{supp}(\hat{g}) \subset [-1, 1].$$

En utilisant l'orthonormalité du système

$$\left\{\varphi_{j,k}\right\}_{j,k\in\mathbb{Z}} = \left\{2^{\frac{j}{2}}\varphi\left(2^j x - k\right)\right\}_{k\in\mathbb{Z}},$$

on déduit que

$$\begin{aligned}
\left\|P_{V_j} g\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})} &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\left\langle g, \varphi_{j,k}\right\rangle\right|^2 \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\left\langle \hat{g}, \hat{\varphi}_{j,k}\right\rangle\right|^2 \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\omega)\, \overline{\hat{\varphi}}_{j,k}(\omega)\, d\omega\right|^2 \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\omega)\, \overline{\hat{\varphi}}\left(2^{-j}\omega\right) \exp\left(i2^{-j}k\omega\right) d\omega\right|^2 \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\int_{-1}^{1} \hat{g}(\omega)\, \overline{\hat{\varphi}}\left(2^{-j}\omega\right) \exp\left(i2^{-j}k\omega\right) d\omega\right|^2.
\end{aligned}$$

L'intégrale apparaissant entre la valeur absolue :

$$\int_{-1}^{1} \hat{g}(\omega)\,\overline{\widehat{\varphi}}\left(2^{-j}\omega\right)\exp\left(i2^{-j}k\omega\right)d\omega$$

au membre de droite, considérée comme le $(-k)^{-ème}$ coefficient de Fourier de la fonction $\sqrt{2\pi}\hat{g}(\omega)\,\overline{\widehat{\varphi}}\left(2^{-j}\omega\right)$ sur l'interval $[-1,1]$. Alors,

$$\begin{aligned}\left\|P_{V_j}g\right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &= \frac{2\pi}{4\pi^2}\int_{-1}^{1}|\hat{g}(\omega)|^2\left|\hat{\varphi}\left(2^{-j}\omega\right)\right|^2 d\omega \qquad (0.2)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}|\hat{g}(\omega)|^2\left|\hat{\varphi}\left(2^{-j}\omega\right)\right|^2 d\omega.\end{aligned}$$

En passant à la limite dans la relation (0.2), on obtient l'égalité :

$$\lim_{j\longrightarrow+\infty}\left\|P_{V_j}g\right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \|g\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \qquad (0.3)$$

car $(\cup V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ sont dense dans $L^2(\mathbb{R})$.
D'autre part, en utilisant la continuité de $\hat{\varphi}$ en 0, on a

$$\lim_{j\longrightarrow+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}|\hat{g}(\omega)|^2\left|\hat{\varphi}\left(2^{-j}\omega\right)\right|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\|\hat{g}\|^2|\hat{\varphi}(0)|^2$$

et par la formule de Plancherel, on a

$$\lim_{j\longrightarrow+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}|\hat{g}(\omega)|^2\left|\hat{\varphi}\left(2^{-j}\omega\right)\right|^2 d\omega = \|g\|^2|\hat{\varphi}(0)|^2. \qquad (0.4)$$

Finalement, on obtient de (0.3) et (0.4),

$$|\hat{\varphi}(0)|^2 = 1$$

et donc

$$|\hat{\varphi}(0)| = 1,$$

ce qui conclut la preuve du corollaire.

Bibliographie

[1] **Cohen, A.**, *Ondelettes, analyses multi-résolutions et traitement numérique du signal*, Thèse, Université Paris IX, 1990.

[2] **Mallat, S.**, *Une exploration des signaux en ondelettes*, Edition de l'Ecole Polytechnique, Palaiseau, 2000.

[3] **Meyer, Y.**, *Ondelettes et opérateurs*, tome 1, Paris Hermann, 1990.