

Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique

Département de Mathématiques et informatique

Filière : Mathématique

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques

Option : Analyse Fonctionnelle

Présenté par :

HAKIKI Akila

THEME :

**Croissance des Solutions des Équations Différentielles
Linéaires à Coefficients Fonctions Analytiques d'Ordre
[p,q] dans le Disque Unité**

Soutenu le :

Devant le jury composé de :

LATREUCH Zinelâabidine	MCA	Université de Mostaganem	Président
ANDASMAS Maamar	MCA	Université de Mostaganem	Examineur
BELAÏDI Benharrat	Prof.	Université de Mostaganem	Encadreur

Année Universitaire 2020-2021

Résumé

Dans ce mémoire, on étudie la croissance des solutions des équations différentielles linéaires complexes d'ordre supérieur à coefficients fonctions analytiques d'ordre $[p,q]$ dans le disque unité . Il est composé de deux chapitres:

Le premier chapitre on va citer quelques notations, définitions et résultats de la théorie de Nevanlinna.

La deuxième chapitre est le résultat de l'article de Zeng et Long, tels que on donne des théorème avec leurs démonstration et des exemples.

ملخص

في هذه الأطروحة ندرس نمو حلول المعادلات التفاضلية الخطية الكاملة ذات الترتيب الأعلى مع معاملات الوظيفة التحليلية للرتبة $[p, q]$ في قرص الوحدة. تتكون من فصلين:
الفصل الأول هو تذكير ببعض الرموز والتعريفات ونتائج نظرية نيفانلينا.
الفصل الثاني هو نتيجة مقال تسنغ ولونغ، والذي نقدم فيه النظريات مع البراهين والأمثلة.

Remerciements

Tout d'abord je tiens à remercier ALLAH, le tout puissant et miséricordieux, qui m'a donné la force, l'intelligence et la patience d'accomplir ce modeste travail.

Je tiens à exprimer mes plus vifs remerciements à mon directeur de thème, Monsieur BELAÏDI Benharrat, Professeur à l'université de Mostaganem pour la confiance qu'il m'a accordé en acceptant de diriger ce travail, pour ses multiples conseils, sa disponibilité et ses encouragements.

Je remercie aussi Monsieur LATREUCH Zinelâabidine, Maître de conférences à l'université de Mostaganem, qui me fera l'honneur de présider le jury d'examen de mon mémoire.

Je remercie avec autant de ferveur Monsieur ANDASMAS Maamar, Maître de conférences à l'université de Mostaganem, qui a bien voulu accepter d'examiner ce travail.

Je remercie également l'ensemble professoral ayant contribué, de près ou de loin, à ma formation et mon évolution.

Je n'oublie pas de remercier mes collègues de la promotion 2^{ème} année Master Analyse Fonctionnelle.

Merci à tous et à toutes.

Table des matières

Introduction	2
1 Quelques notions de base de la théorie de Nevanlinna	3
1.1 La fonction caractéristique de Nevanlinna	4
1.2 Premier théorème fondamental de Nevanlinna	5
1.3 L'ordre et l'ordre inférieur d'une fonction méromorphe ou analytique dans le disque unité	10
1.4 Type et type inférieur d'une fonction méromorphe ou analytique dans le disque unité	11
1.5 La notion d'ordre $[p, q]$ d'une fonction méromorphe ou analytique dans le disque unité	13
1.6 La notion de type $[p, q]$ d'une fonction méromorphe ou analytique dans le disque unité	14
1.7 La mesure linéaire et la mesure logarithmique	15
1.8 Lemmes préliminaires	15
1.8.1 Lemme de la dérivée logarithmique	15
2 Croissance des solutions des équations différentielles linéaires à coefficients fonctions analytiques d'ordre $[p, q]$ dans le disque unité	20
2.1 Preuve du Théorème 2.0.7	23
2.2 Preuve du Théorème 2.0.8	25
2.3 Preuve du Théorème 2.0.9	25
2.4 Preuve du Théorème 2.0.10	27
2.5 Exemples	28

INTRODUCTION

Dans ce mémoire, on va étudier la croissance des solutions de l'équation différentielle linéaire complexe suivante

$$f^{(k)} + A_{k-1}f^{(k-1)} + \dots + A_1f' + A_0f = 0,$$

où $A_j(z)$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$) sont analytiques dans le disque $D = \{z : |z| < 1\}$. La théorie des équations différentielles complexes a été développée dans le disque unité depuis 1980, voir [15]. En 2000, Heittokangas [10] a étudié les équations différentielles linéaires complexes dans le disque unité à coefficients fonctions analytiques. Après le travail de Heittokangas beaucoup de chercheurs ont étudié les équations différentielles linéaires, voir [1, 2, 3, 4, 6, 12, 14, 17, 19, 20] dans disque unité. Récemment, Zemirni et Belaïdi ont introduit un nouveau concept de $[p, q]$ type et ont étudié la croissance des solutions des équations différentielles complexes du second ordre à coefficients fonctions analytiques dans D , voir [20]. Dans ce travail, on étudie la croissance des solutions de certaines équations différentielles linéaires à coefficients fonctions analytiques dans le disque unité. On obtient quelques estimations sur le $[p, q]$ -ordre en utilisant le nouveau concept du $[p, q]$ -type. Ce travail est une synthèse de l'article [19] : Zeng, Sangui ; Long, Jianren. Higher order complex differential equations with analytic coefficients in the unit disc. J. Math. Res. Appl. 40 (2020), no. 4, 387–396.

Le mémoire est composé de deux chapitres, d'une conclusion et d'une bibliographie contenant 20 références.

Dans le premier chapitre, nous présentons quelques définitions et résultats de théorie de Nevanlinna qui joue un rôle très important dans l'étude des propriétés des solutions des équations différentielles complexes. Ensuite, on donnera les lemmes auxiliaires dont nous aurons besoin au deuxième chapitre.

Dans le deuxième chapitre, on donne les résultats de l'article de Zeng et Long avec leurs démonstrations.

Quelques notions de base de la théorie de Nevanlinna

Dans ce chapitre, on va citer quelques définitions, notations de base et les résultats principaux de la théorie de Nevanlinna sur les fonctions méromorphes qu'on aura besoin par la suite, voir ([5], [8], [9], [13], [16], [18]). Ensuite, on donnera les lemmes nécessaires pour la démonstration des résultats du deuxième chapitre.

Définition 1.0.1 [13] *Pour $x \geq 0$, on définit*

$$\ln^+ x = \max(0, \ln x) = \begin{cases} \ln x & \text{si } x > 1, \\ 0 & \text{si } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Lemme 1.0.1 [13] *On a les propriétés suivantes*

$$\ln x \leq \ln^+ x \quad (x \geq 0),$$

$$\ln^+ x \leq \ln^+ y \quad (0 \leq x \leq y),$$

$$\ln x = \ln^+ x - \ln^+ \frac{1}{x} \quad (x \geq 0),$$

$$|\ln x| = \ln^+ x + \ln^+ \frac{1}{x} \quad (x \geq 0),$$

$$\ln^+ \left(\prod_{j=1}^n x_j \right) \leq \sum_{j=1}^n \ln^+ x_j \quad (x_j \geq 0, \forall j = 1, \dots, n),$$

$$\ln^+ \left(\sum_{j=1}^n x_j \right) \leq \sum_{j=1}^n \ln^+ x_j + \ln n \quad (x_j \geq 0, \forall j = 1, \dots, n).$$

1.1 La fonction caractéristique de Nevanlinna

Définition 1.1.1 [13] Soit f une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$ n'étant pas identiquement égal à $a \in \mathbb{C}$. On désigne par $i(z, a, f)$ la multiplicité de a -point de f à z . Ainsi, on définit

$$n(r, a, f) = n\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = \sum_{\substack{|z| \leq r \\ f(z)=a}} i(z, a, f).$$

C'est à-dire, $n(r, a, f)$ est le nombre de racines de $f(z) = a$ dans $|z| \leq r$, chaque racine étant comptée avec son ordre de multiplicité, pour les pôles de f , nous définissons

$$n(r, \infty, f) = n(r, f) = \sum_{\substack{|z| \leq r \\ f(z)=\infty}} i(z, \infty, f).$$

Définition 1.1.2 [13] (**Fonction a -points**) Soit f une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$, on définit la fonction a -points de f par

$$N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = N(r, a, f) = \int_0^r \frac{n(t, a, f) - n(0, a, f)}{t} dt + n(0, a, f) \ln r, \text{ si } f \not\equiv a \in \mathbb{C}$$

et

$$N(r, \infty, f) = N(r, f) = \int_0^r \frac{n(t, \infty, f) - n(0, \infty, f)}{t} dt + n(0, \infty, f) \ln r.$$

Définition 1.1.3 [13] (**Fonction de proximité**) Soit f une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$ n'étant pas identiquement égal à $a \in \mathbb{C}$. On définit la fonction de proximité de f par

$$m\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = m(r, a, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \left| \frac{1}{f(re^{i\varphi}) - a} \right| d\varphi, \text{ si } f \not\equiv a \in \mathbb{C}$$

et

$$m(r, f) = m(r, \infty, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ |f(re^{i\varphi})| d\varphi.$$

Définition 1.1.4 [13] (**Fonction caractéristique**) Soit f une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$. Alors la fonction caractéristique $T(r, f)$ de Nevanlinna est définie par

$$T(r, f) = m(r, f) + N(r, f).$$

Exemple 1.1.1 Soit $f(z) = \exp\left(\frac{i}{1-z^2}\right)$. On calcule la fonction caractéristique de f . Cette fonction est analytique dans le disque unité, donc $N(r, f) = 0$. Alors

$$T\left(r, \exp\left(\frac{i}{1-z^2}\right)\right) = m\left(r, \exp\left(\frac{i}{1-z^2}\right)\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \left| \exp \left(\frac{i}{1 - (re^{i\varphi})^2} \right) \right| d\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \exp \left(\frac{-r^2 \sin 2\varphi}{1 + r^4 - 2r^2 \cos 2\varphi} \right) d\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \left(\frac{-r^2 \sin 2\varphi}{1 + r^4 - 2r^2 \cos 2\varphi} \right) d\varphi.
\end{aligned}$$

En utilisant le changement de variable $y = \cos 2\varphi$, on obtient

$$\begin{aligned}
T \left(r, \exp \left(\frac{i}{1 - z^2} \right) \right) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \left(\frac{r^2}{1 + r^4 - 2r^2 y} \right) dy \\
&= -\frac{1}{8\pi} \ln(1 + r^4 - 2r^2 y) \Big|_{-1}^1 \\
&= \frac{1}{4\pi} \ln \left(\frac{1 + r^2}{1 - r^2} \right).
\end{aligned}$$

1.2 Premier théorème fondamental de Nevanlinna

Théorème 1.2.1 [13] *"Jensen"* Soit f une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$ telle que $f(0) \neq 0, \infty$ et $a_1, a_2, \dots$ (resp. $b_1, b_2, \dots$) ses zéros (resp. ses pôles) chacun étant compté avec son ordre de multiplicité. Alors

$$\ln |f(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(re^{i\varphi})| d\varphi + \sum_{|b_j| < r} \ln \frac{r}{|b_j|} - \sum_{|a_j| < r} \ln \frac{r}{|a_j|}.$$

Preuve. Supposons que f est une fonction méromorphe ne possédant ni zéros ni pôles sur $|z| = r$. On pose

$$g(z) = f(z) \frac{\prod_{|a_j| < r} \frac{r^2 - \bar{a}_j z}{r(z - a_j)}}{\prod_{|b_j| < r} \frac{r^2 - \bar{b}_j z}{r(z - b_j)}}$$

On a $g \neq 0, \infty$ dans le disque $|z| \leq r$ et $\ln |g(z)|$ est une fonction harmonique. D'après la formule de la moyenne d'une fonction harmonique, on a

$$\ln |g(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |g(re^{i\varphi})| d\varphi. \quad (1.2.1)$$

D'autre part

$$|g(0)| = |f(0)| \frac{\prod_{|a_j| < r} \frac{r}{|a_j|}}{\prod_{|b_j| < r} \frac{r}{|b_j|}}, \quad (1.2.2)$$

d'où

$$\ln |g(0)| = \ln |f(0)| + \sum_{|a_j| < r} \ln \frac{r}{|a_j|} - \sum_{|b_j| < r} \ln \frac{r}{|b_j|}.$$

Pour $z = re^{i\varphi}$, on a pour tout a_j et b_j

$$\left| \frac{r^2 - \overline{a_j}z}{r(z - a_j)} \right| = \left| \frac{r^2 - \overline{b_j}z}{r(z - b_j)} \right| = \left| \frac{r^2 - \overline{a_j}re^{i\varphi}}{r(re^{i\varphi} - a_j)} \right| = \left| \frac{r^2 - \overline{b_j}re^{i\varphi}}{r(re^{i\varphi} - b_j)} \right| = 1.$$

D'où $|g(re^{i\varphi})| = |f(re^{i\varphi})|$. De (1.2.1) et (1.2.2), on obtient la formule de Jensen. $\square$

Lemme 1.2.1 [13] *Soit f une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$ avec a -points $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ (chaque étant compté avec son ordre de multiplicité dans le disque $|z| \leq r$) tels que $0 < |\alpha_1| \leq |\alpha_2| \dots |\alpha_n| \leq r$. Alors*

$$\int_0^r \frac{n(r, a, f)}{t} dt = \int_0^r \frac{n(t, \infty, f) - n(0, \infty, f)}{t} dt = \sum_{0 < |\alpha_j| \leq r} \ln \frac{r}{|\alpha_j|}.$$

Proposition 1.2.1 [13] *Soit f une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$ avec le développement de Laurent autour de l'origine*

$$f(z) = \sum_{j=m}^{+\infty} c_j z^j, \quad c_m \in \mathbb{C}^*, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Alors

$$\ln |c_m| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(re^{i\varphi})| d\varphi + N(r, f) - N(r, \frac{1}{f}).$$

Théorème 1.2.2 [13] **"Premier théorème fondamental de Nevanlinna"** *Soit f une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$ avec le développement de Laurent de $f(z) - a$ autour de l'origine*

$$f(z) - a = \sum_{j=m}^{+\infty} c_j z^j, \quad c_m \in \mathbb{C}^*, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Alors

$$T\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = T(r, f) - \ln |c_m| + \varphi(r, a),$$

où

$$|\varphi(r, a)| \leq \ln^+ |a| + \ln 2.$$

Preuve. Si $a = 0$, alors d'après la Proposition 1.2.1 et Lemme 1.0.1, on a :

$$\begin{aligned} \ln |c_m| &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ |f(re^{i\varphi})| d\varphi - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{|f(re^{i\varphi})|} d\varphi + N(r, f) - N\left(r, \frac{1}{f}\right) \\ &= m(r, f) - m\left(r, \frac{1}{f}\right) + N(r, f) - N\left(r, \frac{1}{f}\right), \end{aligned}$$

donc

$$m\left(r, \frac{1}{f}\right) + N\left(r, \frac{1}{f}\right) = m(r, f) + N(r, f) + \ln |c_m|,$$

d'où

$$T\left(r, \frac{1}{f}\right) = T(r, f) - \ln |c_m|, \quad (1.2.3)$$

où $\varphi(r, f) \equiv 0$. Étudions le cas général $a \neq 0$. Posons $h = f - a$. Alors

$$N\left(r, \frac{1}{h}\right) = N\left(r, \frac{1}{f-a}\right), \quad N(r, f) = N(r, h), \quad m\left(r, \frac{1}{h}\right) = m\left(r, \frac{1}{f-a}\right).$$

De plus

$$\ln^+ |h| = \ln^+ |f - a| \leq \ln^+ |f| + \ln^+ |a| + \ln 2,$$

$$\ln^+ |f| = \ln^+ |f - a + a| = \ln^+ |h + a| \leq \ln^+ |h| + \ln^+ |a| + \ln 2.$$

En intégrant ces deux inégalités, on trouve que

$$\begin{aligned} m(r, h) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ |h(re^{i\varphi})| d\varphi \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\ln^+ |f(re^{i\varphi})| + \ln^+ |a| + \ln 2) d\varphi \\ &= m(r, f) + \ln^+ |a| + \ln 2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} m(r, f) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ |f(re^{i\varphi})| d\varphi \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\ln^+ |h(re^{i\varphi})| + \ln^+ |a| + \ln 2) d\varphi \end{aligned}$$

$$= m(r, h) + \ln^+ |a| + \ln 2.$$

Posons $\varphi(r, a) := m(r, h) - m(r, f)$. Alors $|\varphi(r, a)| \leq \ln^+ |a| + \ln 2$. En appliquant (1.2.3) pour h , on aura

$$\begin{aligned} T\left(r, \frac{1}{f-a}\right) &= T\left(r, \frac{1}{h}\right) = m\left(r, \frac{1}{h}\right) + N\left(r, \frac{1}{h}\right) = m(r, h) + N(r, h) - \ln |c_m| \\ &= m(r, f) + N(r, f) + \varphi(r, a) - \ln |c_m| \\ &= T(r, f) - \ln |c_m| + \varphi(r, a). \end{aligned}$$

□

Remarque 1.2.1 *Une autre version du premier théorème fondamental de Nevanlinna*

$$T\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = T(r, f) + O(1), \quad r \rightarrow +\infty$$

pour tout $a \in \mathbb{C}$.

Proposition 1.2.2 [12] *Soient $f, f_1, f_2, \dots, f_n$ des fonctions méromorphes dans $\mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{C}^*$. Alors*

$$T(r, \sum_{j=1}^n f_j) \leq \sum_{j=1}^n T(r, f_j) + \ln n, \quad (n \in \mathbb{N}^*),$$

$$T(r, \prod_{j=1}^n f_j) \leq \sum_{j=1}^n T(r, f_j), \quad (n \in \mathbb{N}^*),$$

$$T(r, f^n) = nT(r, f), \quad (n \in \mathbb{N}),$$

$$T(r, f+a) = T(r, f) + O(1),$$

$$T(r, af) = T(r, f) + O(1),$$

$$T(r, f(az)) = T(|a|r, f).$$

Proposition 1.2.3 [13, 18] *Soit f une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$ et $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que $ad - bc \neq 0$. Alors*

$$T(r, \frac{af+b}{cf+d}) = T(r, f) + O(1); \quad f \not\equiv -\frac{d}{c}.$$

Preuve. Puisque $g(z) = \frac{af+b}{cf+d}$, alors $f(z) = \frac{-df+b}{cf-a}$. Donc, il suffit de montrer que

$$T(r, g) \leq T(r, f) + O(1).$$

Si $c = 0$, alors

$$\begin{aligned} T(r, g) &= T\left(r, \frac{af+b}{d}\right) \\ &\leq \ln^+ \left| \frac{a}{d} \right| + T(r, f) + \ln^+ \left| \frac{b}{d} \right| + \ln 2 = T(r, f) + O(1). \end{aligned}$$

Si $c \neq 0$, alors en utilisant le premier théorème fondamental

$$\begin{aligned} T\left(r, \frac{af+b}{cf+d}\right) &= T\left(r, \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2} \frac{1}{f+\frac{d}{c}}\right) \\ &\leq \ln^+ \left| \frac{a}{c} \right| + \ln^+ \left| \frac{bc-ad}{c^2} \right| + T\left(r, \frac{1}{f+\frac{d}{c}}\right) + \ln 2 \\ &= T\left(r, \frac{1}{f+\frac{d}{c}}\right) + O(1) = T\left(r, f + \frac{d}{c}\right) + O(1) \\ &\leq \ln^+ \left| \frac{d}{c} \right| + T(r, f) + O(1) = T(r, f) + O(1). \end{aligned}$$

□

Exemple 1.2.1 La fonction $f(z) = \tan(3iz)$ étant méromorphe dans le disque unité. D'après la proposition précédente

$$\begin{aligned} T(r, f) &= T(r, \tan(3iz)) = T(3r, \tan(z)) = T(3r, e^{2iz}) + O(1) \\ &= \frac{6r}{\pi} + O(1). \end{aligned}$$

Théorème 1.2.3 [9] Si f est une fonction analytique dans le disque $|z| \leq r$ et $M(r, f) = \max \{|f(z)| : |z| = r\}$, alors

$$T(r, f) \leq \ln^+ M(r, f) \leq \frac{R+r}{R-r} T(R, f), \quad (0 \leq r < R).$$

1.3 L'ordre et l'ordre inférieur d'une fonction méromorphe ou analytique dans le disque unité

Définition 1.3.1 [10, 16] *Soit f est une fonction analytique dans le disque $D = \{z : |z| < 1\}$. Alors l'ordre et l'ordre inférieur de f sont définis respectivement par*

$$\begin{aligned}\sigma_M(f) &= \lim_{r \rightarrow 1^-} \sup \frac{\ln^+ \ln^+ M(r, f)}{-\ln(1-r)}, \\ \mu_M(f) &= \lim_{r \rightarrow 1^-} \inf \frac{\ln^+ \ln^+ M(r, f)}{-\ln(1-r)}.\end{aligned}$$

Si f est une fonction méromorphe sur D , alors l'ordre et l'ordre inférieur de f sont définis respectivement par

$$\begin{aligned}\sigma(f) &= \lim_{r \rightarrow 1^-} \sup \frac{\ln^+ T(r, f)}{-\ln(1-r)}, \\ \mu(f) &= \lim_{r \rightarrow 1^-} \inf \frac{\ln^+ T(r, f)}{-\ln(1-r)}.\end{aligned}$$

Exemple 1.3.1 *D'après l'Exemple 1, pour $f(z) = \exp\left(\frac{i}{1-z^2}\right)$, nous avons*

$$T(r, f) = \frac{1}{4\pi} \ln \left(\frac{1+r^2}{1-r^2} \right).$$

Alors

$$\begin{aligned}\sigma(f) &= \lim_{r \rightarrow 1^-} \sup \frac{\ln^+ T(r, f)}{-\ln(1-r)} \\ &= \lim_{r \rightarrow 1^-} \sup \frac{\ln^+ \left(\frac{1}{4\pi} \ln \left(\frac{1+r^2}{1-r^2} \right) \right)}{-\ln(1-r)} = 0.\end{aligned}$$

Et pour $\sigma_M(f)$, on a

$$M(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)| = \exp\left(\frac{1}{1-r^2}\right).$$

Alors

$$\begin{aligned}\sigma_M(f) &= \lim_{r \rightarrow 1^-} \sup \frac{\ln^+ \ln^+ M(r, f)}{-\ln(1-r)} \\ &= \lim_{r \rightarrow 1^-} \sup \frac{\ln^+ \ln^+ \exp\left(\frac{1}{1-r^2}\right)}{-\ln(1-r)} = 1.\end{aligned}$$

Proposition 1.3.1 *Soient f, g deux fonctions méromorphes non constantes. Alors*

$$\begin{aligned}\sigma(f \cdot g) &\leq \max(\sigma(f), \sigma(g)) \\ \sigma(f + g) &\leq \max(\sigma(f), \sigma(g)) \\ \text{si } \sigma(g) < \sigma(f), \text{ alors } \sigma(f + g) &= \sigma(f \cdot g) = \sigma(f)\end{aligned}$$

Preuve. 1) Posons $\rho(f) = \rho_1$ et $\rho(g) = \rho_2$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ et r suffisamment grand, on a

$$\begin{aligned}T(r, f + g) &\leq T(r, f) + T(r, g) + \ln 2 \\ &\leq r^{\rho_1 + \varepsilon} + r^{\rho_2 + \varepsilon} + \ln 2 \leq 2r^{\max\{\rho_1, \rho_2\} + \varepsilon} + \ln 2.\end{aligned}$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on obtient $\rho(f + g) \leq \max\{\rho_1, \rho_2\}$.

2) De même on obtient

$$T(r, fg) \leq T(r, f) + T(r, g) \leq 2r^{\max\{\rho_1, \rho_2\} + \varepsilon}$$

d'où $\rho(fg) \leq \max\{\rho_1, \rho_2\}$.

3) Supposons que $\rho(g) < \rho(f)$. Alors $\rho(f + g) \leq \max\{\rho(f), \rho(g)\} = \rho(f)$. De la relation

$$T(r, f) = T(r, f + g - g) \leq T(r, f + g) + T(r, g) + \ln 2,$$

on obtient

$$\rho(f) \leq \max\{\rho(f + g), \rho(g)\} = \rho(f + g), \text{ d'où } \rho(f + g) = \rho(f).$$

Ensuite de la relation

$$\begin{aligned}T(r, f) &= T\left(r, \frac{fg}{g}\right) \leq T(r, fg) + T\left(r, \frac{1}{g}\right) \\ &= T(r, fg) + T(r, g) + O(1),\end{aligned}$$

on obtient $\rho(f) \leq \max\{\rho(fg), \rho(g)\} = \rho(fg)$, d'où $\rho(fg) = \rho(f)$. □

1.4 Type et type inférieur d'une fonction méromorphe ou analytique dans le disque unité

Définition 1.4.1 [12] *Soit f une fonction méromorphe dans le disque D , d'ordre $0 < \sigma < \infty$, le type et le type inférieur de f sont définis respectivement par*

$$\begin{aligned}\tau(f) &= \lim_{r \rightarrow 1^-} \sup (1 - r)^\sigma T(r, f), \\ \underline{\tau}(f) &= \lim_{r \rightarrow 1^-} \inf (1 - r)^\sigma T(r, f).\end{aligned}$$

Si f est une fonction analytique sur D , alors le type et le type inférieur de f sont définis respectivement par

$$\begin{aligned}\tau_M(f) &= \lim_{r \rightarrow 1^-} \sup (1-r)^{\sigma_M} \ln^+ M(r, f), \\ \underline{\tau}_M(f) &= \lim_{r \rightarrow 1^-} \inf (1-r)^{\sigma_M} \ln^+ M(r, f).\end{aligned}$$

Exemple 1.4.1 Soit $f(z) = \exp\left(\frac{1}{1-z}\right)^2$, on a

$$M(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)| = \exp\left(\frac{1}{1-r}\right)^2 \text{ et } T(r, f) = \frac{2-r^2}{1-r^2}.$$

Alors

$$\sigma_M(f) = 2 \text{ et } \tau_M(f) = 1,$$

et

$$\sigma(f) = 1 \text{ et } \tau(f) = \frac{1}{2}.$$

Définition 1.4.2 [6] Soit f une fonction méromorphe dans le disque D , et soit

$$D(f) = \lim_{r \rightarrow 1^-} \sup \frac{T(r, f)}{-\ln(1-r)}.$$

Si $D(f) < \infty$ on dit que f est de degré fini (ou est non admissible); si $D(f) = \infty$ on dit que f est de degré infini (ou est admissible). Soit f une fonction analytique sur D , et

$$D_M(f) = \lim_{r \rightarrow 1^-} \sup \frac{\ln^+ M(r, f)}{-\ln(1-r)},$$

où $M(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)|$. Si $D_M(f) < \infty$ on dit que f est de degré fini (ou est non admissible); si $D_M(f) = \infty$ on dit que f est de degré infini (ou est admissible).

Définition 1.4.3 [6] Soit f une fonction méromorphe dans le disque D . On définit l'ordre n -itératif de croissance de la fonction f par

$$\sigma_n(f) = \lim_{r \rightarrow 1^-} \sup \frac{\ln_n^+ T(r, f)}{-\ln(1-r)}.$$

Remarque 1.4.1 Soit $x \in [0, \infty[$, on note par $\ln_0(x) = x$, $\ln_1^+(x) = \ln^+(x) = \max(0, \ln(x))$, $\ln_{n+1}(x) = \ln \ln_n(x)$ et $\exp_0(x) = x$, $\exp_1(x) = \exp(x)$, $\exp_{n+1}(x) = \exp \exp_n(x)$. De plus, nous désignons par $\log_{-1}(x) = \exp(x)$, $\exp_{-1}(x) = \ln(x)$.

Définition 1.4.4 [6] *L'indice de croissance d'une fonction méromorphe f est défini par*

$$i(f) = \begin{cases} 0 & \text{si } f \text{ non admissible,} \\ \min \{n \in \mathbb{N} : \sigma_n(f) < \infty\} & \text{si } f \text{ admissible,} \\ \infty & \text{si pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad \sigma_n(f) = \infty. \end{cases}$$

Si f est une fonction analytique, nous définissons

$$i_M(f) = \begin{cases} 0 & \text{si } f \text{ non admissible,} \\ \min \{n \in \mathbb{N} : \sigma_{M,n}(f) < \infty\} & \text{si } f \text{ admissible,} \\ \infty & \text{si pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad \sigma_{M,n}(f) = \infty. \end{cases}$$

1.5 La notion d'ordre $[p, q]$ d'une fonction méromorphe ou analytique dans le disque unité

Définition 1.5.1 ([1], [12]) *Soient p, q deux entiers tels que $p \geq q \geq 1$ et f une fonction méromorphe sur le disque unité. Alors l'ordre $[p, q]$ et l'ordre inférieur $[p, q]$ de f sont définis respectivement par*

$$\begin{aligned} \sigma_{[p,q]}(f) &= \lim_{r \rightarrow 1^-} \sup \frac{\ln_p^+ T(r, f)}{\ln_q(\frac{1}{1-r})}, \\ \mu_{[p,q]}(f) &= \lim_{r \rightarrow 1^-} \inf \frac{\ln_p^+ T(r, f)}{\ln_q(\frac{1}{1-r})}. \end{aligned}$$

Si f est une fonction analytique sur D , nous définissons aussi

$$\begin{aligned} \sigma_{[p,q],M}(f) &= \lim_{r \rightarrow 1^-} \sup \frac{\ln_{p+1}^+ M(r, f)}{\ln_q(\frac{1}{1-r})}, \\ \mu_{[p,q],M}(f) &= \lim_{r \rightarrow 1^-} \inf \frac{\ln_{p+1}^+ M(r, f)}{\ln_q(\frac{1}{1-r})}. \end{aligned}$$

Définition 1.5.2 *Une fonction pour laquelle l'ordre $[p, q]$ et l'ordre inférieur $[p, q]$ sont les mêmes est dite de croissance régulière et la fonction qui n'est pas de croissance régulière est dite de croissance irrégulière.*

Proposition 1.5.1 [1, 4, 14] *Soit f une fonction analytique dans D . Alors, on a les trois assertions*

- (i) *Si $p = q$, alors $\sigma_{[p,q]}(f) \leq \sigma_{[p,q],M}(f) \leq \sigma_{[p,q]}(f) + 1$,*
- (ii) *Si $p = q \geq 2$ et $\sigma_{[p,q]}(f) \leq 1$, alors $\sigma_{[p,q]}(f) \leq \sigma_{[p,q],M}(f) \leq 1$,*
- (iii) *Si $p = q \geq 2$ et $\sigma_{[p,q]}(f) \geq 1$ où $p > q \geq 1$, alors $\sigma_{[p,q]}(f) = \sigma_{[p,q],M}(f)$.*

Proposition 1.5.2 [17] *Soit f une fonction analytique dans D . Alors les trois assertions sont vérifiées*

- (i) *Si $p = q$, alors $\mu_{[p,q]}(f) \leq \mu_{[p,q],M}(f) \leq \mu_{[p,q]}(f) + 1$,*
- (ii) *Si $p = q \geq 2$ et $\mu_{[p,q]}(f) \leq 1$, alors $\mu_{[p,q]}(f) \leq \mu_{[p,q],M}(f) \leq 1$,*
- (iii) *Si $p = q \geq 2$ et $\mu_{[p,q]}(f) \geq 1$ où $p > q \geq 1$, alors $\mu_{[p,q]}(f) = \mu_{[p,q],M}(f)$.*

1.6 La notion de type $[p, q]$ d'une fonction méromorphe ou analytique dans le disque unité

Définition 1.6.1 [12] Soient p, q deux entiers tels que $p \geq q \geq 1$ et f une fonction méromorphe sur le disque unité d'ordre $[p, q]$ et d'ordre inférieur $[p, q]$ vérifient $0 < \sigma = \sigma_{[p,q]}(f) < \infty$, $0 < \mu = \mu_{[p,q]}(f) < \infty$. Alors on définit le type $[p, q]$ et le type inférieur $[p, q]$ de f respectivement par

$$\tau_{[p,q]}(f) = \lim_{r \rightarrow 1^-} \sup \frac{\ln_{p-1}^+ T(r, f)}{(\ln_{q-1}(\frac{1}{1-r}))^\sigma},$$

$$\underline{\tau}_{[p,q]}(f) = \lim_{r \rightarrow 1^-} \inf \frac{\ln_{p-1}^+ T(r, f)}{(\ln_{q-1}(\frac{1}{1-r}))^\mu}.$$

Si f est une fonction analytique sur D d'ordre $[p, q]$ et d'ordre inférieur $[p, q]$ vérifient $0 < \sigma_M = \sigma_{[p,q],M}(f) < \infty$, $0 < \mu_M = \mu_{[p,q],M}(f) < \infty$, alors on définit le type $[p, q]$ et le type inférieur $[p, q]$ de f respectivement par

$$\tau_{[p,q],M}(f) = \lim_{r \rightarrow 1^-} \sup \frac{\ln_p^+ M(r, f)}{(\ln_{q-1}(\frac{1}{1-r}))^{\sigma_M}},$$

$$\underline{\tau}_{[p,q],M}(f) = \lim_{r \rightarrow 1^-} \inf \frac{\ln_p^+ M(r, f)}{(\ln_{q-1}(\frac{1}{1-r}))^{\mu_M}}.$$

Proposition 1.6.1 [17, 19] Soit f une fonction analytique dans D . On a les deux assertions suivantes

- (i) Si $p = q \geq 2$ et $\sigma_{[p,q]}(f) \geq 1$ où $p > q \geq 1$, alors $\tau_{[p,q]}(f) = \tau_{[p,q],M}(f)$,
- (ii) Si $p = q \geq 2$ et $\mu_{[p,q]}(f) \geq 1$ où $p > q \geq 1$, alors $\underline{\tau}_{[p,q]}(f) = \underline{\tau}_{[p,q],M}(f)$.

Définition 1.6.2 [20] Soient $p > 2$ et f une fonction méromorphe dans D avec $0 < \sigma = \sigma_{[p,q]}(f) < \infty$ et $0 < \tau = \tau_{[p,q]}(f) < \infty$. Alors on définit le nouveau type $\tau_{[p,q]}^*(f)$ par

$$\tau_{[p,q]}^*(f) = \lim_{r \rightarrow 1^-} \sup \frac{\ln_{p-2}^+ T(r, f)}{e^{\tau(\ln_{q-1}(\frac{1}{1-r}))^\sigma}}.$$

Si f est une fonction analytique dans D avec $0 < \sigma_M = \sigma_{M[p,q]}(f) < \infty$ et $0 < \tau_M = \tau_{M[p,q]}(f) < \infty$, alors on définit le nouveau type $\tau_{M[p,q]}^*(f)$ par

$$\tau_{M[p,q]}^*(f) = \lim_{r \rightarrow 1^-} \sup \frac{\ln_{p-1}^+ M(r, f)}{e^{\tau_M(\ln_{q-1}(\frac{1}{1-r}))^{\sigma_M}}}.$$

Proposition 1.6.2 [19] Soit f une fonction analytique dans D . On a les deux assertions suivantes

- (i) Si $p = q \geq 2$ et $\sigma_{[p,q]}(f) \geq 1$ où $p > q \geq 1$, alors $\tau_{[p,q]}^*(f) = \tau_{[p,q],M}^*(f)$,
- (ii) Si $p = q \geq 2$ et $\mu_{[p,q]}(f) \geq 1$ où $p > q \geq 1$, alors $\underline{\tau}_{[p,q]}^*(f) = \underline{\tau}_{[p,q],M}^*(f)$.

Exemple 1.6.1 Soit $f(z) = \exp\left(\exp\left(\frac{2}{1-z}\right)^3\right)$. On a

$$M(r, f) = \exp\left(\exp\left(\frac{2}{1-r}\right)^3\right),$$

donc pour $p = 3$ et $q = 2$, on obtient

$$\sigma_{[3,2],M}(f) = \sigma_{[3,2]}(f) = 1, \quad \tau_{[3,2],M}(f) = \tau_{[3,2]}(f) = 3, \quad \tau_{M[3,2]}^*(f) = \tau_{M[3,2]}^*(f) = 8.$$

1.7 La mesure linéaire et la mesure logarithmique

Définition 1.7.1 [16] La mesure linéaire d'un ensemble $E \subset [0, \infty)$ est définie par

$$m(E) = \int_0^{+\infty} \chi_E(t) dt,$$

où $\chi_E(t)$ est la fonction indicatrice de l'ensemble E et la mesure logarithmique d'un ensemble $F \subset [1, \infty)$ est définie par

$$lm(F) = \int_1^{+\infty} \frac{\chi_F(t)}{t} dt.$$

Définition 1.7.2 La mesure logarithmique d'un ensemble $E \subset [0, 1)$ dans le disque unité est définie par

$$lm(E) = \int_0^1 \frac{\chi_E(t)}{1-t} dt.$$

Définition 1.7.3 Une fonction $a(z)$ est appelée fonction de petite croissance par rapport à une fonction méromorphe f si $T(r, a) = S(r, f)$, c-à-d $T(r, f) = o(T(r, f))$ quand $r \rightarrow +\infty$ à l'extérieur d'un ensemble H de mesure linéaire finie.

1.8 Lemmes préliminaires

1.8.1 Lemme de la dérivée logarithmique

Lemme 1.8.1 [9, 10] Soit f une fonction méromorphe non constante dans D . Alors

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) = S(r, f), \quad r \notin E,$$

où $E \subset [0, 1)$ est un ensemble de mesure logarithmique finie

$$S(r, f) = O\left(\ln^+ T(r, f) + \ln\left(\frac{1}{1-r}\right)\right),$$

$$\text{et } \int_E \frac{dt}{1-t} < \infty.$$

Corollaire 1.8.1 [9, 10] *Soit f une fonction méromorphe non constante dans D . Alors*

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = S(r, f), \quad r \notin E,$$

où $k \in \mathbb{N}^*$ et $E \subset [0, 1)$ un ensemble de mesure logarithmique finie

$$S(r, f) = O\left(\ln^+ T(r, f) + \ln\left(\frac{1}{1-r}\right)\right),$$

et $\int_E \frac{dt}{1-t} < \infty$.

Preuve. On démontre le lemme par récurrence. Pour $k = 1$, la relation est vraie

$$m(r, \frac{f'}{f}) = S(r, f).$$

Supposons ensuite que nous avons

$$m(r, \frac{f^{(k)}}{f}) = S(r, f).$$

Alors

$$m(r, f^{(k)}) = m(r, \frac{f^{(k)}}{f} \cdot f) \leq m(r, f) + m(r, \frac{f^{(k)}}{f}) = m(r, f) + S(r, f).$$

Si z_0 est un pôle d'ordre p pour f , alors z_0 est un pôle d'ordre $k + p \leq (1 + k)p$ de $f^{(k)}$.
Donc

$$N(r, f^{(k)}) \leq (1 + k)N(r, f).$$

Par conséquent

$$T(r, f^{(k)}) = m(r, f^{(k)}) + N(r, f^{(k)}) \leq (1 + k)T(r, f) + S(r, f).$$

Ce qui implique

$$m\left(r, \frac{(f^{(k)})'}{f^{(k)}}\right) = S(r, f^{(k)}) = S(r, f),$$

donc

$$m(r, \frac{f^{(k+1)}}{f}) \leq m(r, \frac{f^{(k)}}{f}) + m\left(r, \frac{(f^{(k)})'}{f^{(k)}}\right) = S(r, f) + S(r, f^{(k)}) = S(r, f).$$

□

Lemme 1.8.2 [20] *Soient $p \geq 2$ et f une fonction méromorphe non constante dans D telle que*

$$0 < \sigma_{[p,q]}(f) = \sigma < \infty; \quad 0 < \tau = \tau_{[p,q]}(f) < \infty; \quad 0 < \tau^* = \tau_{[p,q]}^*(f) < \infty.$$

Alors pour tout $\tau^ > \beta$ donné, il existe un sous ensemble $E \subset [0, 1)$ de mesure logarithmique infinie tel que pour tout $r \in E$ nous avons*

$$\log_{p-2} T(r, f) > \beta e^{\tau(\log_{q-1}(\frac{1}{1-r}))^\rho}.$$

Preuve. Par la définition du type $\tau_{[p,q]}^*(f)$ de f , il existe une suite croissante $\{r_n\}_{n=1}^\infty \subset [0, 1)$

satisfaisant $\frac{1}{n} + (1 - \frac{1}{n})r_n < r_{n+1}$, $r_n \rightarrow 1^-$ et

$$\tau^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln_{p-2}^+ T(r_n, f)}{e^{\tau(\ln_{q-1}(\frac{1}{1-r_n}))^\sigma}}.$$

Alors il existe un nombre entier n_1 tel que pour tout $n > n_1$ et pour tout $0 < \varepsilon < \tau^*$, nous avons

$$\log_{p-2} T(r_n, f) > (\tau^* - \varepsilon) e^{\tau(\ln_{q-1}(\frac{1}{1-r_n}))^\rho}, \quad (1.8.1)$$

et pour $r \in [r_n, \frac{1}{n} + (1 - \frac{1}{n})r_n]$, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\tau(\ln_{q-1}(1 - \frac{1}{n})(\frac{1}{1-r}))^\sigma}}{e^{\tau(\ln_{q-1}(\frac{1}{1-r}))^\sigma}} = 1.$$

Alors pour tout $0 < \beta < \tau^* - \varepsilon$, il existe un entier positif n_2 tel que pour tout $n \geq n_2$ et pour tout $r \in [r_n, \frac{1}{n} + (1 - \frac{1}{n})r_n]$, nous avons

$$\frac{e^{\tau(\ln_{q-1}(1 - \frac{1}{n})(\frac{1}{1-r}))^\sigma}}{e^{\tau(\ln_{q-1}(\frac{1}{1-r}))^\sigma}} > \frac{\beta}{\tau^* - \varepsilon}. \quad (1.8.2)$$

Par (1.8.1) et (1.8.2), pour chaque $n \geq n_3 = \max\{n_1; n_2\}$ et pour tout $r \in [r_n, \frac{1}{n} + (1 - \frac{1}{n})r_n]$, on a

$$\log_{p-2} T(r, f) \geq \beta e^{\tau(\ln_{q-1}(\frac{1}{1-r}))^\sigma}.$$

Soit $E = \bigcup_{n=n_3}^\infty [r_n, \frac{1}{n} + (1 - \frac{1}{n})r_n]$. Alors

$$\int_E \frac{dt}{1-t} = \sum_{n=n_3}^\infty \int_{r_n}^{\frac{1}{n} + (1 - \frac{1}{n})r_n} \frac{dt}{1-t} = \sum_{n=n_3}^\infty \log \frac{m}{m-1} = \infty.$$

□

Lemme 1.8.3 [11] *Soit f une solution de l'équation*

$$f^{(k)} + A_{k-1}f^{(k-1)} + \dots + A_1f' + A_0f = 0, \quad (1.8.3)$$

dans $D_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$, avec $0 < R \leq \infty$, et soit $n_c \in \{1, \dots, k-1\}$ le nombre des coefficients non nuls $A_j(z)$, $j = 0, \dots, k-1$, et soit $\theta \in [0, 2\pi)$ et $\varepsilon > 0$. Si $z_\theta = ve^{i\theta} \in D_R$ tel que $A_j(z_\theta) \not\equiv 0$ pour un certain $j = 0, \dots, k-1$, alors pour tout $v < r < R$, on a

$$|f(re^{i\theta})| \leq M \exp \left(n_c \int_v^r \max_{j=0, \dots, k-1} |A_j(te^{i\theta})|^{\frac{1}{k-j}} dt \right),$$

où $M > 0$ est une constante satisfaisant

$$M \leq (1 + \varepsilon) \max_{j=0, \dots, k-1} \left(\frac{|f^{(j)}(z_\theta)|}{(n_c)^j \max_{n=0, \dots, k-1} |A_n(z_\theta)|^{\frac{j}{k-n}}} \right).$$

Lemme 1.8.4 [1] *Soit $A_0(z), A_1(z), \dots, A_{k-1}(z)$ des fonctions analytiques d'ordre $[p, q]$ dans D . Alors toute solution non triviale f de (1.8.3) satisfait*

$$\sigma_{[p+1, q]}(f) = \sigma_{[p+1, q], M}(f) \leq \max \{ \sigma_{[p, q], M}(A_j) : j = 0, \dots, k-1 \}.$$

Preuve. Soit $f \not\equiv 0$ une solution de l'équation différentielle (1.8.3) et soit $\theta \in [0, 2\pi)$ telle que $|f(re^{i\theta})| = M(r, f)$. Par Lemme 1.8.3, on a

$$\begin{aligned} M(r, f) &\leq M \exp \left(n_c \int_v^r \max_{j=0, \dots, K-1} |A_j(te^{i\theta})|^{\frac{1}{k-j}} dt \right) \\ &\leq M \exp \left(n_c \int_v^r \max_{j=0, \dots, K-1} |M(r, A_j)|^{\frac{1}{k-j}} dt \right) \\ &\leq M \exp \left(n_c(r-v) \max_{j=0, \dots, k-1} |M(r, A_j)| \right). \end{aligned}$$

Posons $\sigma_1 = \max \{ \sigma_{[p, q], M}(A_j) : j = 0, \dots, k-1 \}$. D'après la définition de l'ordre $[p, q]$, pour tout $\varepsilon > 0$ donné et r suffisamment grand, nous avons

$$M(r, A_j) \leq \exp_{p+1}(\sigma_1 + \varepsilon) \ln_q \left(\frac{1}{1-r} \right).$$

Alors

$$M(r, f) \leq M \exp \left(n_c(r-v) \exp_{p+1}(\sigma_1 + \varepsilon) \ln_q \left(\frac{1}{1-r} \right) \right),$$

comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, alors d'après (iii) la Proposition 1.5.1, on obtient

$$\sigma_{[p+1, q]}(f) = \sigma_{[p+1, q], M}(f) \leq \max \{ \sigma_{[p, q], M}(A_j) : j = 0, \dots, k-1 \}.$$

□

Lemme 1.8.5 [20] *Soient $p \geq 2$ et f une fonction méromorphe non constante dans D telle que $0 < \mu_{[p,q]}(f) = \mu < \infty$, $0 < \tau = \tau_{[p,q]}(f) < \infty$, $0 < \tau^* = \tau_{[p,q]}^*(f) < \infty$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe un sous ensemble $E \subset [0, 1)$ de mesure logarithmique infinie tel que pour tout $r \in E$, nous avons*

$$T(r, f) \leq \exp_{p-2} \left\{ (\tau^* + \varepsilon) e^{\tau((\log_{q-1}(\frac{1}{1-r}))^\mu)} \right\}.$$

Lemme 1.8.6 [5] *Soit k et j deux entiers satisfaisant $k > j \geq 0$, et soit $\varepsilon > 0$ et $d \in (0, 1)$. Si f est une fonction méromorphe dans D telle que $f^{(j)}$ n'est pas identiquement nulle, alors*

$$\left| \frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)} \right| \leq \left(\left(\frac{1}{1-r} \right)^{2+\varepsilon} \max \left\{ \log \left(\frac{1}{1-r} \right), T(s(r), f) \right\} \right)^{k-j}, \quad r \notin E,$$

où $s(r) = 1 - d(1 - r)$ et l'ensemble $E \subset [0, 1)$ est de mesure logarithmique finie.

Croissance des solutions des équations différentielles linéaires à coefficients fonctions analytiques d'ordre $[p, q]$ dans le disque unité

Dans ce chapitre, on présente les résultats de Zeng et Long avec leurs démonstrations.

Considérons l'équation différentielle

$$f^{(k)} + A_{k-1}f^{(k-1)} + \cdots + A_1f' + A_0f = 0, \quad (2.0.1)$$

où $A_j(z)$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$) sont analytiques dans le disque $D = \{z : |z| < 1\}$. Plusieurs chercheurs ont étudié la croissance des solutions de l'équation (2.0.1) dans le disque D en utilisant le concept du $[p, q]$ ordre [1, 2, 3, 4, 12, 14, 19, 20].

Théorème 2.0.1 [14] *Soient $p \geq q \geq 1$ et $A_0(z), A_1(z), \dots, A_{k-1}(z)$ des fonctions analytiques dans D vérifiant*

$$\max \{ \sigma_{[p,q]}(A_j) : j \neq 0 \} \leq \sigma_{[p,q]}(A_0) < \infty.$$

Alors toute solution non triviale f de (2.0.1) satisfait $\sigma_{[p,q]}(f) = \infty$ et

$$\sigma_{[p,q]}(A_0) \leq \sigma_{[p+1,q]}(f) \leq \max \{ \sigma_{[p,q],M}(A_j) : j = 0, \dots, k-1 \}$$

De plus, si $p > q$ alors

$$\sigma_{[p+1,q]}(f) = \sigma_{[p,q]}(A_0).$$

Théorème 2.0.2 [17] *Soient $p \geq q \geq 1$ et $A_0(z), A_1(z), \dots, A_{k-1}(z)$ des fonctions analytiques dans D vérifiant*

$$\max \{ \sigma_{[p,q],M}(A_j) : j \neq 0 \} < \mu_{[p,q],M}(A_0) < \infty.$$

Alors toute solution non triviale f de (2.0.1) satisfait $\sigma_{[p,q]}(f) = \infty$ et

$$\mu_{[p+1,q]}(f) = \mu_{[p,q],M}(A_0).$$

Théorème 2.0.3 [17] Soient $p \geq q \geq 1$ et $A_0(z), A_1(z), \dots, A_{k-1}(z)$ des fonctions analytiques dans D vérifiant

$$\begin{aligned} \max \{ \sigma_{[p,q],M}(A_j) : j \neq 0 \} &\leq \sigma_{[p,q],M}(A_0) < \infty, \\ \max \{ \tau_{[p,q],M}(A_j) : \sigma_{[p,q],M}(A_j) &= \sigma_{[p,q],M}(A_0), j \neq 0 \} < \tau_{[p,q],M}(A_0). \end{aligned}$$

Alors toute solution non triviale f de (2.0.1) satisfait $\sigma_{[p,q]}(f) = \infty$ et

$$\sigma_{[p+1,q]}(f) = \sigma_{[p,q],M}(A_0).$$

Théorème 2.0.4 [12] Soient p, q deux entiers tels que $p > q \geq 2$ et $A_0(z), A_1(z), \dots, A_{k-1}(z)$ des fonctions analytiques dans D avec $0 < \mu = \mu_{[p,q]}(A_0) < \sigma_{[p,q]}(A_0) < \infty$. Supposons que

$$\begin{aligned} \max \{ \sigma_{[p,q]}(A_j) : j \neq 0 \} &\leq \mu_{[p,q]}(A_0) < \infty, \\ \max \{ \tau_{[p,q]}(A_j) : \sigma_{[p,q]}(A_j) &= \mu_{[p,q]}(A_0), j \neq 0 \} < \tau_{[p,q]}(A_0) = \tau < \infty. \end{aligned}$$

Alors toute solution non triviale f de (2.0.1) satisfait

$$\mu_{[p+1,q]}(f) = \mu_{[p,q]}(A_0) \leq \sigma_{[p,q]}(A_0) = \sigma_{[p+1,q]}(f).$$

Récemment, Zemirni et Belaïdi [20] ont étudié la croissance des solutions des équations différentielles complexes du second ordre à coefficients fonctions analytiques dans le disque unité en utilisant un nouveau concept de $[p, q]$ type.

Théorème 2.0.5 [20] Soient p, q deux entiers tels que $p \geq 2, 1 \leq q \leq p$ et $A(z), B(z)$ deux fonctions analytiques dans D vérifiant

$$0 < \sigma_{[p,q]}(A) = \sigma_{[p,q]}(B) = \sigma < \infty,$$

$$0 < \tau_{[p,q]}(A) = \tau_{[p,q]}(B) = \tau < \infty$$

et

$$0 < \tau_{[p,q]}^*(A) < \tau_{[p,q]}^*(B) = \tau^* < \infty.$$

Alors toute solution non triviale f de l'équation

$$f'' + A(z)f' + B(z)f = 0 \tag{2.0.2}$$

satisfait $\sigma_{[p,q]}(f) = +\infty$ et

$$\sigma_{[p,q]}(B) \leq \sigma_{[p+1,q]}(f) \leq \max \{ \sigma_{M,[p,q]}(A); \sigma_{M,[p,q]}(B) \}.$$

De plus, si $p > q$ alors

$$\sigma_{[p+1,q]}(f) = \sigma_{[p,q]}(B).$$

Théorème 2.0.6 [20] Soient p, q deux entiers tels que $p \geq 2$, $1 \leq q \leq p$ et $A(z)$, $B(z)$ deux fonctions analytiques dans D vérifiant

$$0 < \mu_{[p,q]}(A) = \mu_{[p,q]}(B) = \mu < \infty,$$

$$0 < \tau_{[p,q]}(A) = \tau_{[p,q]}(B) = \tau < \infty$$

et

$$0 < \tau_{[p,q]}^*(A) < \tau_{[p,q]}^*(B) = \tau^* < \infty.$$

Alors toute solution non triviale f de l'équation (2.0.2) satisfait

$$\sigma_{[p,q]}(f) = +\infty, \text{ and } \sigma_{[p+1,q]}(f) \geq \mu_{[p,q]}(B).$$

Ce nouveau concept a été utilisé par Zeng et Long pour étudier la croissance des solutions de l'équation (2.0.1). Ils ont obtenu les résultats suivants.

Théorème 2.0.7 [19] Soient $p > 2$ et $A_0(z), A_1(z), \dots, A_{k-1}(z)$ des fonctions analytiques dans D vérifiant

- (i) $0 < \max \{ \sigma_{[p,q]}(A_j) : j \neq 0 \} \leq \sigma_{[p,q]}(A_0) < \infty$,
- (ii) $0 < \max \{ \tau_{[p,q]}(A_j) : \sigma_{[p,q]}(A_j) = \sigma_{[p,q]}(A_0), j \neq 0 \} \leq \tau_{[p,q]}(A_0) < \infty$,
- (iii) $0 < \max \left\{ \tau_{[p,q]}^*(A_j) : \tau_{[p,q]}(A_j) = \tau_{[p,q]}(A_0), \sigma_{[p,q]}(A_j) = \sigma_{[p,q]}(A_0), j \neq 0 \right\} < \tau_{[p,q]}^*(A_0) < \infty$.

Alors toute solution non triviale f de (2.0.1) satisfait $\sigma_{[p,q]}(f) = \infty$ et

$$\sigma_{[p,q]}(A_0) \leq \sigma_{[p+1,q]}(f) \leq \max \{ \sigma_{[p,q],M}(A_j) : j = 0, \dots, k-1 \}.$$

De plus, si $p > q$, on a

$$\sigma_{[p+1,q]}(f) = \sigma_{[p,q]}(A_0).$$

Théorème 2.0.8 [19] Soient $p > 2$ et $A_0(z), A_1(z), \dots, A_{k-1}(z)$ des fonctions analytiques dans D vérifiant

- (i) $0 < \max \{ \mu_{[p,q]}(A_j) : j \neq 0 \} \leq \mu_{[p,q]}(A_0) < \infty$,
- (ii) $0 < \max \{ \tau_{[p,q]}(A_j) : \mu_{[p,q]}(A_j) = \mu_{[p,q]}(A_0), j \neq 0 \} \leq \tau_{[p,q]}(A_0) < \infty$,
- (iii) $0 < \max \left\{ \tau_{[p,q]}^*(A_j) : \tau_{[p,q]}(A_j) = \tau_{[p,q]}(A_0), \mu_{[p,q]}(A_j) = \mu_{[p,q]}(A_0), j \neq 0 \right\} < \tau_{[p,q]}^*(A_0) < \infty$.

De plus, supposons qu'il existe un ensemble de mesure logarithmique infinie tel que la conclusion du Lemme 1.8.5 est satisfaite pour tous les coefficients $A_j(z)$ ($j \neq 0$). Alors toute solution non triviale f de (2.0.1) satisfait

$$\sigma_{[p,q]}(f) = \infty \text{ et } \mu_{[p,q]}(A_0) \leq \sigma_{[p+1,q]}(f).$$

Théorème 2.0.9 [19] Soient $p > 2$ et $A_0(z), A_1(z), \dots, A_{k-1}(z)$ des fonctions analytiques dans D vérifiant

- (i) $0 < \max \{ \sigma_{[p,q]}(A_j) : j \neq s \} \leq \sigma_{[p,q]}(A_s) < \infty$,
- (ii) $0 < \max \{ \tau_{[p,q]}(A_j) : \sigma_{[p,q]}(A_j) = \sigma_{[p,q]}(A_s), j \neq s \} \leq \tau_{[p,q]}(A_s) < \infty$,
- (iii) $0 < \max \left\{ \tau_{[p,q]}^*(A_j) : \tau_{[p,q]}(A_j) = \tau_{[p,q]}(A_s), \sigma_{[p,q]}(A_j) = \sigma_{[p,q]}(A_s), j \neq s \right\} < \tau_{[p,q]}^*(A_s) < \infty$.

Alors toute solution non triviale f de (2.0.1) pour laquelle $f^{(n)}$ a juste un nombre fini de zéros pour tout $n < s$ ($n = 0, \dots, s-1$) vérifie $\sigma_{[p,q]}(f) = \infty$ et

$$\sigma_{[p,q]}(A_s) \leq \sigma_{[p+1,q]}(f) \leq \max \{ \sigma_{[p,q],M}(A_j) : j = 0, \dots, k-1 \}.$$

De plus, si $p > q$, on a

$$\sigma_{[p+1,q]}(f) = \sigma_{[p,q]}(A_s).$$

Théorème 2.0.10 [19] Soient $p > 2$ et $A_0(z), A_1(z), \dots, A_{k-1}(z)$ des fonctions analytiques dans D vérifiant

- (i) $0 < \max \{ \mu_{[p,q]}(A_j) : j \neq s \} \leq \mu_{[p,q]}(A_s) < \infty$,
- (ii) $0 < \max \{ \tau_{[p,q]}(A_j) : \mu_{[p,q]}(A_j) = \mu_{[p,q]}(A_s), j \neq s \} \leq \tau_{[p,q]}(A_s) < \infty$,
- (iii) $0 < \max \left\{ \tau_{[p,q]}^*(A_j) : \tau_{[p,q]}(A_j) = \tau_{[p,q]}(A_s), \mu_{[p,q]}(A_j) = \mu_{[p,q]}(A_s), j \neq s \right\} < \tau_{[p,q]}^*(A_s) < \infty$.

De plus, supposons qu'il existe un ensemble de mesure logarithmique infinie tel que la conclusion du Lemme 1.8.5 est satisfaite pour tous les coefficients $A_j(z)$ ($j \neq s$). Alors toute solution non triviale f de (2.0.1) pour laquelle $f^{(n)}$ a juste un nombre fini de zéros pour tout $n < s$ ($n = 0, \dots, s-1$) vérifie $\sigma_{[p,q]}(f) = \infty$ et

$$\mu_{[p,q]}(A_s) \leq \sigma_{[p+1,q]}(f).$$

2.1 Preuve du Théorème 2.0.7

Si $f \not\equiv 0$, on peut écrire (2.0.1) sous la forme

$$-A_0(z) = \frac{f^{(k)}}{f} + \frac{f^{(k-1)}}{f} A_{k-1}(z) + \dots + \frac{f'}{f} A_1(z),$$

d'où

$$m(r, A_0) \leq \sum_{i=1}^k m\left(r, \frac{f^{(i)}}{f}\right) + \sum_{j=1}^{k-1} m(r, A_j) + \ln k. \quad (2.1.1)$$

D'après le Lemme 1.8.1, il existe un ensemble $E \subset [0, 1)$ de mesure logarithmique finie, tel que pour tout $r \in [0, 1) \setminus E$, on a

$$m(r, A_0) \leq O(\ln^+ T(r, f) + \ln(\frac{1}{1-r})) + \sum_{k=1}^{k-1} m(r, A_j) + \ln k. \quad (2.1.2)$$

D'après les conditions du Théorème 2.0.7, soit σ, τ, τ^* des nombres positifs finis vérifiant $\sigma_{[p,q]}(A_0) = \sigma$, $\tau_{[p,q]}(A_0) = \tau$, $\tau_{[p,q]}^*(A_0) = \tau^*$, il existe deux constantes réelles α et β satisfaisant

$$0 < \max \{ \tau_{[p,q]}^*(A_j) : \tau_{[p,q]}(A_j) = \tau_{[p,q]}(A_0), \sigma_{[p,q]}(A_j) = \sigma_{[p,q]}(A_0), j \neq 0 \} < \alpha < \beta < \tau^* < \infty.$$

Donc pour tout $r \rightarrow 1^-$, nous avons

$$m(r, A_j) \leq \exp_{p-2} \alpha e^{\tau(\log_{q-1}(\frac{1}{1-r}))^\rho}. \quad (2.1.3)$$

En vertu du Lemme 1.8.2, il existe un ensemble $E_1 \subset [0, 1)$ de mesure logarithmique infinie tel que pour tout $r \in E_1$, on a

$$m(r, A_0) \geq \exp_{p-2} \beta e^{\tau(\log_{q-1}(\frac{1}{1-r}))^\rho}. \quad (2.1.4)$$

De (2.1.2), (2.1.3) et (2.1.4), pour tout $r \in E_1 \setminus E$, nous avons

$$\exp_{p-2} \beta e^{\tau(\log_{q-1}(\frac{1}{1-r}))^\rho} \leq O(\ln^+ T(r, f) + \ln(\frac{1}{1-r})) + K \exp_{p-2} \alpha e^{\tau(\log_{q-1}(\frac{1}{1-r}))^\rho}.$$

Puisque $\beta > \alpha$, alors pour $p > 2$ et $r \rightarrow 1^-$, on a

$$(1 - o(1)) \exp_{p-2} \beta e^{\tau(\log_{q-1}(\frac{1}{1-r}))^\rho} \leq O(\ln^+ T(r, f) + \ln(\frac{1}{1-r})),$$

ce qui implique

$$\exp_{p-2} \beta e^{\tau(\log_{q-1}(\frac{1}{1-r}))^\rho} \leq O(\ln^+ T(r, f) + \ln(\frac{1}{1-r})).$$

Par conséquent

$$\sigma_{[p,q]}(f) = \infty$$

et

$$\sigma_{[p+1,q]}(f) \geq \sigma_{[p,q]}(A_0) = \sigma.$$

D'autre part, d'après le Lemme 1.8.4, on a

$$\sigma_{[p+1,q]}(f) \leq \max \{ \sigma_{[p,q],M}(A_j) : j = 0, \dots, k-1 \}.$$

Cela implique que

$$\sigma_{[p,q]}(A_0) \leq \sigma_{[p+1,q]}(f) \leq \max \{ \sigma_{[p,q],M}(A_j) : j = 0, \dots, k-1 \}.$$

Si $p > q$, on a

$$\max \{ \sigma_{[p,q],M}(A_j) : j = 0, \dots, k-1 \} = \sigma_{[p,q]}(A_0).$$

Par conséquent, nous concluons que

$$\sigma_{[p+1,q]}(f) = \sigma_{[p,q]}(A_0).$$

2.2 Preuve du Théorème 2.0.8

Supposons $f \not\equiv 0$. D'après les conditions du Théorème 2.0.8, soit $\mu, \underline{\tau}, \underline{\tau}^*$ des nombres positifs finis vérifiant $\mu_{[p,q]}(A_0) = \mu$, $\tau_{[p,q]}(A_0) = \underline{\tau}$, $\tau_{[p,q]}^*(A_0) = \underline{\tau}^*$. Alors il existe une constante réelle α satisfaisant

$$0 < \max \{ \underline{\tau}_{[p,q]}^*(A_j) : \underline{\tau}_{[p,q]}(A_j) = \underline{\tau}_{[p,q]}(A_0), \mu_{[p,q]}(A_j) = \mu_{[p,q]}(A_0), j \neq 0 \} < \alpha < \underline{\tau}^* < \infty.$$

Pour tout ε donné satisfaisant $0 < \varepsilon < \frac{\underline{\tau}^* - \alpha}{2}$, il existe $r_0 \in [0, 1)$, tel que pour tout $r \in (r_0, 1)$, nous avons

$$m(r, A_0) \geq \exp_{p-2}(\underline{\tau}^* - \varepsilon) e^{\tau(\log_{q-1}(\frac{1}{1-r}))^\mu}. \quad (2.2.1)$$

En vertu du Lemme 1.8.5, il existe un ensemble $E_1 \subset [0, 1)$ de mesure logarithmique infinie tel que pour tout $r \in E_1$, on a

$$m(r, A_j) \leq \exp_{p-2}(\alpha + \varepsilon) e^{\tau(\log_{q-1}(\frac{1}{1-r}))^\mu}. \quad (2.2.2)$$

En substituant (2.2.1) et (2.2.2) dans (2.1.2), pour tout $r \in E_1 \setminus E$, nous avons

$$\exp_{p-2}(\underline{\tau}^* - \varepsilon) e^{\tau(\log_{q-1}(\frac{1}{1-r}))^\mu} \leq O(\ln^+ T(r, f) + \ln(\frac{1}{1-r})) + K \exp_{p-2}(\alpha + \varepsilon) e^{\tau(\log_{q-1}(\frac{1}{1-r}))^\mu}$$

Puisque $\underline{\tau}^* - \varepsilon > \alpha + \varepsilon$, alors pour $p > 2$ et $r \rightarrow 1^-$, on a

$$(1 - o(1)) \exp_{p-2}(\underline{\tau}^* - \varepsilon) e^{\tau(\log_{q-1}(\frac{1}{1-r}))^\mu} \leq O(\ln^+ T(r, f) + \ln(\frac{1}{1-r}))$$

ce qui implique

$$\exp_{p-2}(\underline{\tau}^* - \varepsilon) e^{\tau(\log_{q-1}(\frac{1}{1-r}))^\mu} \leq O(\ln^+ T(r, f) + \ln(\frac{1}{1-r})).$$

Par conséquent

$$\sigma_{[p,q]}(f) = \infty$$

et

$$\mu_{[p,q]}(A_0) \leq \sigma_{[p+1,q]}(f).$$

2.3 Preuve du Théorème 2.0.9

On peut écrire (2.0.1) sous la forme

$$-A_s(z) = \frac{f^{(k)}}{f^{(s)}} + \cdots + \frac{f^{(s+1)}}{f^{(s)}} A_{s+1}(z) + \frac{f^{(s-1)}}{f^{(s)}} A_{s-1}(z) + \cdots + \frac{f'}{f^{(s)}} A_0(z),$$

d'où

$$m(r, A_s) \leq \sum_{0 \leq n < s} m(r, \frac{f(n)}{f(s)}) + \sum_{s < i \leq k} m(r, \frac{f(i)}{f(s)}) + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq s}}^{k-1} m(r, A_j) + \ln k. \quad (2.3.1)$$

D'après le Lemme 1.8.6, il existe un ensemble $E \subset [0, 1)$ de mesure logarithmique finie, tel que pour tout $j > i$ ($j, i \in \mathbb{N}$) et $r \in [0, 1) \setminus E$

$$\left| \frac{f^{(j)}(z)}{f^{(i)}(z)} \right| \leq \left(\left(\frac{1}{1-r} \right)^{2+\varepsilon} \max \left\{ \log \frac{1}{1-r}, T(s(r), f) \right\} \right)^{j-i}.$$

Si $r \rightarrow 1^-$, alors $\log \frac{1}{1-r} > 1$ et $T(s(r), f) = T(r, f)$. Ainsi nous obtenons

$$\begin{aligned} m(r, \frac{f^{(j)}}{f^{(i)}}) &\leq \log^+ \left(\left(\frac{1}{1-r} \right)^{2+\varepsilon} \max \left\{ \log \frac{1}{1-r}, T(s(r), f) \right\} \right)^{j-i} \\ &\leq (j-i)(2+\varepsilon) \log^+ \left(\frac{1}{1-r} \right) + (j-i) \log^+ \log \left(\frac{1}{1-r} \right) + (j-i) \log^+ T(r, f) \\ + (j-s) \ln 2 &\leq O(\log \left(\frac{1}{1-r} \right) + \log^+ T(r, f)), \quad r \rightarrow 1^-. \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

D'autre part, par le premier théorème fondamental de Nevanlinna, pour $n < s$, on obtient

$$T \left(r, \frac{f^{(n)}}{f^{(s)}} \right) = T \left(r, \frac{f^{(s)}}{f^{(n)}} \right) + O(1) = m \left(r, \frac{f^{(s)}}{f^{(n)}} \right) + N \left(r, \frac{f^{(s)}}{f^{(n)}} \right) + O(1).$$

Puisque $f^{(n)}$ a juste un nombre fini de zéros pour tout $n < s$ ($n = 0, \dots, s-1$), par les propriétés des fonctions analytiques et la définition de la fonction de comptage, on obtient

$$N \left(r, \frac{f^{(s)}}{f^{(n)}} \right) = O(1),$$

d'où

$$m \left(r, \frac{f^{(n)}}{f^{(s)}} \right) \leq T \left(r, \frac{f^{(n)}}{f^{(s)}} \right) = m \left(r, \frac{f^{(s)}}{f^{(n)}} \right) + O(1). \quad (2.3.3)$$

D'après les conditions du Théorème 2.0.9, soit σ, τ, τ^* des nombres positifs finis vérifiant $\sigma_{[p,q]}(A_s) = \sigma, \tau_{[p,q]}(A_s) = \tau, \tau_{[p,q]}^*(A_s) = \tau^*$, il existe une constante réelle α satisfaisant

$$0 < \max \left\{ \tau_{[p,q]}^*(A_j) : \tau_{[p,q]}(A_j) = \tau_{[p,q]}(A_s), \sigma_{[p,q]}(A_j) = \sigma_{[p,q]}(A_s), j \neq s \right\} < \alpha < \tau^* < \infty.$$

Pour tout ε donné satisfaisant $0 < \varepsilon < \frac{\tau^* - \alpha}{2}$ et pour tout $r \rightarrow 1^-$, nous avons

$$m(r, A_j) \leq \exp_{p-2}(\alpha + \varepsilon) e^{\tau(\log_{q-1}(\frac{1}{1-r}))^\rho}. \quad (2.3.4)$$

D'après le Lemme 1.8.2, il existe un ensemble $E_1 \in [0, 1)$ de mesure logarithmique infinie tel que pour tout $r \in E_1$, on a

$$m(r, A_s) \geq \exp_{p-2}(\tau^* - \varepsilon) e^{\tau(\log_{q-1}(\frac{1}{1-r}))^\rho}. \quad (2.3.5)$$

De (2.3.1) – (2.3.5), pour tout $r \in E_1 \setminus E$ et $r \rightarrow 1^-$, nous avons

$$\exp_{p-2}(\tau^* - \varepsilon) e^{\tau(\log_{q-1}(\frac{1}{1-r}))^\rho} \leq O(\ln^+ T(r, f) + \ln(\frac{1}{1-r})) + K \exp_{p-2}(\alpha + \varepsilon) e^{\tau(\log_{q-1}(\frac{1}{1-r}))^\rho}.$$

Puisque $\tau^* - \varepsilon > \alpha + \varepsilon$, pour $p > 2$ et $r \rightarrow 1^-$, on a

$$(1 - o(1)) \exp_{p-2}(\tau^* - \varepsilon) e^{\tau(\log_{q-1}(\frac{1}{1-r}))^\rho} \leq O(\ln^+ T(r, f) + \ln(\frac{1}{1-r}))$$

ce qui implique

$$\exp_{p-2}(\tau^* - \varepsilon) e^{\tau(\log_{q-1}(\frac{1}{1-r}))^\rho} \leq O(\ln^+ T(r, f) + \ln(\frac{1}{1-r}))$$

Par conséquent

$$\sigma_{[p,q]}(f) = \infty$$

et

$$\sigma_{[p+1,q]}(f) \geq \sigma_{[p,q]}(A_s) = \sigma$$

D'autre part, d'après le Lemme 1.8.4, on a

$$\sigma_{[p+1,q]}(f) \leq \max \{ \sigma_{[p,q],M}(A_j) : j = 0, \dots, k-1 \}.$$

Cela implique

$$\sigma_{[p,q]}(A_s) \leq \sigma_{[p+1,q]}(f) \leq \max \{ \sigma_{[p,q],M}(A_j) : j = 0, \dots, k-1 \}.$$

Si $p > q$, alors

$$\max \{ \sigma_{[p,q],M}(A_j) : j = 0, \dots, k-1 \} = \sigma_{[p,q]}(A_s)$$

Par conséquent, nous concluons que

$$\sigma_{[p+1,q]}(f) = \sigma_{[p,q]}(A_s).$$

2.4 Preuve du Théorème 2.0.10

D'après les conditions du Théorème 2.0.10, soit σ, τ, τ^* des nombres positifs finis vérifiant $\mu_{[p,q]}(A_s) = \mu$, $\tau_{[p,q]}(A_s) = \tau$, $\tau_{[p,q]}^*(A_s) = \tau^*$, il existe une constante α

$$0 < \max \{ \tau_{[p,q]}^*(A_j) : \tau_{[p,q]}(A_j) = \tau_{[p,q]}(A_s); \mu_{[p,q]}(A_j) = \mu_{[p,q]}(A_s); j \neq s \} < \alpha < \tau^* < \infty.$$

Alors pour tout ε donné satisfaisant $0 < \varepsilon < \frac{\tau^* - \alpha}{2}$, il existe $r_0 \in [0, 1)$, tel que pour tout $r \in (r_0, 1)$, nous avons

$$m(r, A_s) \geq \exp_{p-2}(\underline{\tau}^* - \varepsilon) e^{\tau(\log_{q-1}(\frac{1}{1-r}))^\mu}. \quad (2.4.1)$$

D'après le Lemme 1.8.5, il existe un ensemble $E_1 \subset [0, 1)$ de mesure logarithmique infinie tel que pour tout $r \in E_1$, on a

$$m(r, A_j) \leq \exp_{p-2}(\alpha + \varepsilon) e^{\tau(\log_{q-1}(\frac{1}{1-r}))^\mu}. \quad (2.4.2)$$

En utilisant (2.3.1) – (2.3.3), (2.4.1) et (2.4.2), pour tout $r \in E_1 \setminus E$ et $r \rightarrow 1^-$, nous avons

$$\exp_{p-2}(\underline{\tau}^* - \varepsilon) e^{\tau(\log_{q-1}(\frac{1}{1-r}))^\mu} \leq O(\ln^+ T(r, f) + \ln(\frac{1}{1-r})) + K \exp_{p-2}(\alpha + \varepsilon) e^{\tau(\log_{q-1}(\frac{1}{1-r}))^\mu}.$$

Puisque $\underline{\tau}^* - \varepsilon > \alpha + \varepsilon$, pour $p > 2$ et $r \rightarrow 1^-$, on a

$$(1 - o(1)) \exp_{p-2}(\underline{\tau}^* - \varepsilon) e^{\tau(\log_{q-1}(\frac{1}{1-r}))^\mu} \leq O(\ln^+ T(r, f) + \ln(\frac{1}{1-r})),$$

ce qui implique

$$\exp_{p-2}(\underline{\tau}^* - \varepsilon) e^{\tau(\log_{q-1}(\frac{1}{1-r}))^\mu} \leq O(\ln^+ T(r, f) + \ln(\frac{1}{1-r})).$$

Par conséquent

$$\sigma_{[p,q]}(f) = \infty$$

et

$$\mu_{[p,q]}(A_s) \leq \sigma_{[p+1,q]}(f).$$

2.5 Exemples

Exemple 2.5.1 *Considérons l'équation*

$$f'' + A(z)f' + B(z)f = 0,$$

où

$$A(z) = \exp\left(\frac{1}{1-z}\right) \exp\left[\exp\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-z}\right)\right]$$

et

$$B(z) = \exp\left[\frac{1}{1-z} \exp\left(\frac{1}{1-z}\right)\right].$$

On a

$$M(r, A) = \exp\left(\frac{1}{1-r}\right) \exp\left[\exp\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-r}\right)\right]$$

et

$$M(r, B) = \exp\left[\frac{1}{1-r} \exp\left(\frac{1}{1-r}\right)\right].$$

On prend $p = 3$ et $q = 2$, donc

$$\sigma_{[3,2]}(A) = 1, \quad \tau_{[3,2]}(A) = 1, \quad \tau_{[3,2]}^*(A) = \frac{1}{3}$$

et

$$\sigma_{[3,2]}(B) = 1, \quad \tau_{[3,2]}(B) = 1, \quad \tau_{[3,2]}^*(B) = 1.$$

Alors d'après le Théorème 2.0.7 toute solution $f \not\equiv 0$ de l'équation

$$f'' + A(z)f' + B(z)f = 0,$$

satisfait

$$\sigma_{[3,2]}(f) = \infty \quad \text{et} \quad \sigma_{[4,2]}(f) = \sigma_{[3,2]}(B) = 1.$$

Exemple 2.5.2 Considérons l'équation suivante

$$f^{(3)} + A_2(z)f'' + A_1(z)f' + A_0(z)f = 0,$$

où

$$A_0(z) = \exp\left[\frac{3}{2} \exp\left(\frac{2}{1-z}\right)^2\right],$$

$$A_1(z) = \exp\left[\left(\frac{4}{1+z}\right) \exp\left(\frac{2}{1-z}\right)^2\right],$$

et

$$A_2(z) = \exp\left[\exp\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2\right].$$

On a

$$M(r, A_0) = \exp\left[\frac{3}{2} \exp\left(\frac{2}{1-r}\right)^2\right],$$

$$M(r, A_1) = \exp\left[\left(\frac{4}{1+r}\right) \exp\left(\frac{2}{1-r}\right)^2\right],$$

et

$$M(r, A_2) = \exp\left[\exp\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^2\right].$$

On prend $p = 2$ et $q = 1$, donc

$$\mu_2(A_0) = 2, \quad \tau_2(A_0) = 4, \quad \tau_2^*(A_0) = \frac{3}{2},$$

$$\mu_2(A_1) = 2, \quad \tau_2(A_1) = 4, \quad \tau_2^*(A_1) = 2$$

et

$$\mu_2(A_2) = 2, \quad \tau_2(A_2) = 4, \quad \tau_2^*(A_2) = 1.$$

Alors d'après le Théorème 2.0.8 toute solution $f \not\equiv 0$ de l'équation

$$f^{(3)} + A_2(z) + A_1(z)f' + A_0(z)f = 0,$$

vérifie

$$\sigma_2(f) = \infty \quad \text{et} \quad \sigma_3(f) \geq \mu_2(A_1) = 2.$$

CONCLUSION

Dans ce mémoire, on a étudié la croissance des solutions de certaines équations différentielles linéaires à coefficients fonctions analytiques d'ordre $[p, q]$ dans disque unité en utilisant un nouveau concept du $[p, q]$ type introduit récemment par Zemirni et Belaïdi [20]. Il serait maintenant intéressant d'utiliser ce concept pour étudier les propriétés des solutions des équations différentielles linéaires à coefficients fonctions méromorphes.

Bibliographie

- [1] B. BELAÏDI, *Growth of solutions to linear differential equations with analytic coefficients of $[p,q]$ -order in the unit disc*, Electron. J. Differential Equations 2011, No. 156, 11 pp.
- [2] B. BELAÏDI, *On the $[p,q]$ -order of analytic solutions of linear differential equations in the unit disc*, Novi Sad J. Math. 42 (2012), no. 1, 117–129.
- [3] B. BELAÏDI, *Growth and oscillation theory of $[p,q]$ -order analytic solutions of linear equations in the unit disc*, J. Math. Anal. 3 (2012), no. 1, 1–11.
- [4] B. BELAÏDI, Z. LATREUCH, *Some properties of combination of solutions to second-order linear differential equations with analytic coefficients of $[p,q]$ -order in the unit disc*, J. Comput. Sci. Appl. Math. 1 (2014), 11–18.
- [5] B. BELAÏDI, *Fonctions entières et théorie de Nevanlinna*, Éditions Al-Djazair, 2017.
- [6] T. B. CAO, H. X. YI, *The growth of solutions of linear differential equations with coefficients of iterated order in the unit disc*. J. Math. Anal. Appl. 319 (2006), no. 1, 278–294.
- [7] I. CHYZHYKOV, G. GUNDERSEN, J. HEITTOKANGAS, *Linear differential equations and logarithmic derivative estimates*. Proc. London Math. Soc. (3) 86 (2003), no. 3, 735–754.
- [8] A. A. GOLDBERG, I. V. OSTROVSKII, *Value Distribution of Meromorphic Functions*, Translated from the 1970 Russian original by Mikhail Ostrovskii. With an appendix by

- Alexandre Eremenko and James K. Langley, Transl. Math. Monogr., vol.236, American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.
- [9] W. K. HAYMAN, *Meromorphic functions*, Claredon Press, Oxford, 1964.
- [10] J. HEITTOKANGAS, *On complex differential equations in the unit disc*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. Diss. No. 122 (2000), 54 pp.
- [11] J. HEITTOKANGAS, R. KORHONEN, J. RÄTTYÄ, *Growth estimates for solutions of linear complex differential equations*. Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 29 (2004), no. 1, 233–246.
- [12] H. HU, X. M. ZHENG, *Growth of solutions of linear differential equations with analytic coefficients of $[p, q]$ -order in the unit disc*, Electron. J. Differential Equations 2014, No. 204, 12 pp.
- [13] I. LAINE, *Nevanlinna Theory and Complex Differential Equations*, de Gruyter Studies in Mathematics, 15. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1993.
- [14] Z. LATREUCH, B. BELAÏDI, *Linear differential equations with analytic coefficients of $[p, q]$ -order in the unit disc*, Sarajevo J. Math. 9(21) (2013), no. 1, 71–84.
- [15] C. POMMERENKE, *On the mean growth of the solutions of complex linear differential equations in the disk*, Complex Variables Theory Appl. 1 (1982/83), no. 1, 23–38.
- [16] M. TSUJI, *Potential theory in modern function theory*, Chelsea Publishing Co., New York, 1975.
- [17] J. TU, H. X. HUANG, *Complex oscillation of linear differential equations with analytic coefficients of $[p, q]$ -order in the unit disc*, Comput. Methods Funct. Theory 15 (2015), no. 2, 225–246.
- [18] C. C. YANG, H. X. YI, *Uniqueness Theory of Meromorphic Functions*, Mathematics and its Applications, 557. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 2003.
- [19] S. ZENG, J. LONG, *Higher order complex differential equations with analytic coefficients in the unit disc*. J. Math. Res. Appl. 40 (2020), no. 4, 387–396.

-
- [20] M. A. ZEMIRNI, B. BELAÏDI, *Second order complex differential equations with analytic coefficients in the unit disc*. Appl. Math. Inform. Mech., Ser. A, 2018, 10(1) : 1–16.