

**UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM  
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES**

**Mémoire de fin d'étude**

Pour l'obtention du diplôme de master

**Spécialité :** Analyse Fonctionnelle

**Thème :**

surfaces minimale dans l'espace Hyperbolique

**Présenté par :**

FEDDAG AICHA

**Soutenu le .**

**Les membres de jury**

<b>Président</b>	Mme AZIZ HAMANI	<b>U. MOSTAGANEM.</b>
<b>Examineur</b>	Mr FETTOUCH	<b>U. MOSTAGANEM.</b>
<b>Encadreur</b>	Mr L.BELARBI	<b>U. MOSTAGANEM.</b>

**Année Universitaire 2017-2018**

---

# Dédicace

---

---

# Remerciements

---

Tout d'abord, Louange A Allah, le Tout Puissant de m'avoir donné le courage et la volonté d'avoir réaliser ce travail

Je tiens exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur BELARBI LAKEHAL. Son encadrement a été exceptionnel. Je le remercie chaleureusement pour son écoute, sa patience pour ses conseils toujours avisés et ses remarques pertinentes, ainsi qu'a l'intérêt qu'il a porté à toutes mes questions.

J'exprime également toute ma profonde gratitude à Madame AZIZ HAMANI KARIMA A qui me fait l'honneur de bien vouloir présider le jury de ce mémoire.

Je tiens à exprimer ma vive reconnaissance à Monsieur FETTOUCH HOUARI pour sa disponibilité et ses remarques pertinentes qui ont permis d'améliorer le manuscrit.

J'adresse également mes remerciements à tous les enseignants qui nous ont donné les bases de la science.

J'adresse également remerciements envers mes amis et mes collègues pour leur soutien

Mes remerciements sont adressés également à tous les enseignants de département de mathématiques

En fin, je remercie tous ceux et celles qui m'ont aidé de loin ou de près pour l'élaboration de ce travail et tout la famille de département de mathématiques.

# Table des matières

<b>Résumé</b>	<b>3</b>
<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>1 Préliminaire</b>	<b>5</b>
1.1 Variété topologique : . . . . .	5
1.2 Carte . . . . .	5
1.3 Atlas . . . . .	6
1.4 Variété Différentielle : . . . . .	7
1.5 Champ de vecteurs : . . . . .	7
1.6 Espace tangent : . . . . .	7
1.7 Variétés Riemanniennes . . . . .	8
1.7.1 Métrique Riemannienne : . . . . .	8
1.7.2 La connexion linéaire : . . . . .	9
1.7.3 La connexion de Levi-Civita : . . . . .	9
1.7.4 Symboles de Christoffel d'une variété Riemannienne : . . . . .	10
1.7.5 Géodésiques : . . . . .	10
1.7.6 Geodésique et Complétion : . . . . .	11
1.8 Courbure : . . . . .	11
1.8.1 Tenseur de courbure : . . . . .	11
1.8.2 La torsion : . . . . .	11
1.8.3 La courbure de Ricci : . . . . .	12
1.8.4 La courbure scalaire : . . . . .	12
1.8.5 La courbure de Gauss : . . . . .	12
1.8.6 La courbure moyenne : . . . . .	12
<b>2 Première et deuxième formes fondamentales</b>	<b>13</b>
2.1 La Première forme fondamentale : . . . . .	13
2.1.1 Expression dans une base locale . . . . .	13
2.2 La deuxième forme fondamentale : . . . . .	14

---

2.2.1	Normale unitaire : . . . . .	14
2.2.2	Expression dans une base locale : . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Surfaces minimales translation dans l'espace hyperbolique</b>	<b>17</b>
3.1	Type I . . . . .	18
3.2	Type II . . . . .	20
3.3	Classification des surfaces minimales de translation de type I : . . . . .	22
3.4	Classification des surfaces minimales de translation de type II : . . . . .	25
	<b>Conclusion</b>	<b>28</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>30</b>

---

# RÉSUMÉ

---

Ce travail est consacré à l'étude et la classification des surfaces minimales de translation sur l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^3$ .

Il y a deux type de surfaces de translation le premier type  $I$  sont des surfaces de translation paramétrisée par  $X(x, y) = (x, y, f(x) + g(y))$ , et le deuxième type sont des surfaces de translation paramétrisée par  $X(x, z) = (x, f(x) + g(z), z)$ .

Alors d'après Lopez il n'y a pas des surfaces minimales de translation de type  $I$  dans l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^3$ , et les seules surfaces minimales de translation de type  $II$  dans l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^3$  sont les surfaces totalement géodésiques.

---

---

# INTRODUCTION

---

En géométrie différentielle, une surface est dite minimale quand elle minimise son aire tout en respectant certaines conditions à son bord, et sa courbure moyenne elle est nulle partout, et pour classifié ces surfaces il faut résoudre une équation aux dérivées partielles .

Dans ce mémoire nous avons étudié la classification des surfaces minimales de translation dans l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^3$ , dans deux types de surfaces, le premier type sont des surfaces de translation paramétrisé par  $X(x, y) = (x, y, f(x) + g(y))$ , et le deuxième type sont des surfaces de translation paramétrisé par  $X(x, z) = (x, f(x) + g(z), z)$ , cette étude elle est faite par Professeur Rafel Lopez de l'université de Granada, Espagne, dans son papier "Minimal translation surfaces in hyperbolic space, Beitr Algebra Geom, Volume 52, Issue 1, pp 105–112, April (2011)" .

L'espace  $\mathbb{H}^3$  muni de la métrique

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{z^2}$$

Ce mémoire est réparti en trois chapitres, dans le premier chapitre nous rappelons certain nombre de définitions d'une variété topologique, carte, atlas, application différentiable entre deux variétés, homéomorphisme, difféomorphisme.

Nous rappelons aussi la définition d'un vecteur tangent et l'espace tangent et champs de vecteur. Nous introduisons la notion d'une métrique Riemannienne et la connexion linéaire, la connexion de Levi-Civita, géodésiques et géodésique et Complétion, la courbure de Ricci et la courbure de Gauss, la courbure moyenne.

Dans le deuxième chapitre nous rappelons la définition de première et deuxième forme fondamentales et on a donné des exemples, et utilité de ces deux formes.

Le dernier chapitre, nous procéderons à l'étude des surfaces minimales de translation dans l'espace Hyperbolique  $\mathbb{H}^3$  dans les deux types, nous avons refait et détaillé les calculs de R.Lopez, et le fruit de ce travail est les deux théorèmes suivantes :

théorème1 : Il n'y a pas des surfaces minimales de translation de type  $I$  dans l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^3$ .

Et théorème2 : Les seules surfaces minimales de translation de type  $II$  dans l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^3$  sont les surfaces totalement géodésiques et les plans.

# Préliminaire

---

Dans ce chapitre on donne quelques rappels et définitions des outils mathématiques de géométrie différentielle, et géométrie Riemannienne comme la notion de variété, espace tangent, métrique Riemannienne, variété Riemannienne, connexion de Levi-Civita, et la notions de courbures.

## 1.1 Variété topologique :

**Définition 1.1.1** : Une variété topologique  $M$  de dimension  $n$  est un espace topologique non vide, séparé (au sens de Hausdorff) et à chaque point  $p \in M$ , il existe un ouvert  $U$  de  $M$  contenant  $p$  et un homéomorphe un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

$$\phi : U \longrightarrow W \subset \mathbb{R}^n$$

Où  $W$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$

**Définition 1.1.2** : On dit que  $\Omega$  est un espace topologique séparé si et seulement si  $\forall (x, y) \in \Omega^2 : \exists v_x$  et  $v_y$  voisinage de  $x$  et  $y$  (respectivement) tels que  $v_x \cap v_y = \emptyset$ .

## 1.2 Carte

**Définition 1.2.1** : Soit  $M$  une variété topologique, et  $U \subset M$ . On dit que le couple  $(U, \varphi)$  est une carte si et seulement si :

- $$\left\{ \begin{array}{l} (1) U \text{ ouvert de } M. \\ (2) \varphi(U) \text{ est un ouvert de } \mathbb{R}^n \\ (3) \varphi : U \rightarrow \varphi(U) \text{ est une application homéomorphe.} \end{array} \right.$$

**Définition 1.2.2** : Un homéomorphisme est une application bijective, continue dont l'inverse est continue. Où bien une application bijective de classe  $C^\infty$  et son inverse de classe  $C^\infty$ .

## 1.3 Atlas

**Définition 1.3.1** : Une atlas de classe  $C^k$  ( $1 \leq k \leq +\infty$ ) sur une variété topologique  $M$  est une famille des cartes  $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$  telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \bigcup_{i=1}^n U_i = M. \\ (2) \text{ les cartes } (U_i, \varphi_i) \text{ sont compatibles deux à deux} \end{array} \right. .$$

**Définition 1.3.2** : (Deux cartes compatibles)

Soit  $M$  une variété topologique et soient  $(U, \varphi)$  et  $(V, \psi)$  deux cartes de  $M$ .

On dit que les deux cartes sont compatibles si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) U \cap V = \emptyset. \\ \text{où bien} \\ (2) \psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \longrightarrow U \cap V \longrightarrow \psi(U \cap V) \text{ est un difféomorphisme.} \end{array} \right.$$

**Définition 1.3.3** :  $f : E \longrightarrow F$  application. On dit que  $f$  est difféomorphisme si et seulement si :  $f$  est continue, bijective et de classe  $C^\infty$  ; et son inverse  $f^{-1}$  de classe  $C^\infty$ .

**Exemple 1.3.1** : Soit  $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$  le cercle unité de  $\mathbb{R}^2$ .

on considère les parties  $V_1$  et  $V_2$  telle que  $V_1 = S^1 - \{(0, 1)\}$  et  $V_2 = S^1 - \{(0, -1)\}$  et les applications :

$$\begin{array}{ll} \Psi_1 : V_1 \longrightarrow \mathbb{R}. & \Psi_2 : V_2 \longrightarrow \mathbb{R}. \\ (x, y) \longmapsto \frac{x}{1-y} & \text{et } (x, y) \longmapsto \frac{x}{1+y} \end{array} .$$

on a :

\*  $V_1$  et  $V_2$  sont des ouverts de  $\mathbb{R}$  car  $C_{S^1}^{V_2} = \{(0, -1)\}$  et  $C_{S^1}^{V_1} = \{(0, 1)\}$  sont des fermés de  $S^1$ .

\*  $\Psi_1(V_1) = ]\frac{-1}{1-a}, \frac{1}{1-a}[$  ;  $\Psi_2(V_2) = ]\frac{-1}{1-a}, \frac{1}{1-a}[$  sont des ouverts de  $\mathbb{R}$ .

\*  $\Psi_1 : V_1 \longrightarrow \Psi_1(V_1)$  et  $\Psi_2 : V_2 \longrightarrow \Psi_2(V_2)$  sont des applications continue et surjective + injective = bijectif sont continue.

$$\begin{array}{ll} \Psi_2^{-1} : \Psi_2(V_2) \longrightarrow V_2 & \Psi_1^{-1} : \Psi_1(V_1) \longrightarrow V_1 \\ X \longmapsto \left( \frac{2X}{1+X^2}, \frac{1-X^2}{1+X^2} \right) & \text{et } X \longmapsto \left( \frac{2X}{1+X^2}, \frac{X^2-1}{1+X^2} \right) \end{array} .$$

donc  $\Psi_1 : V_1 \longrightarrow \Psi_1(V_1)$  et  $\Psi_2 : V_2 \longrightarrow \Psi_2(V_2)$  elles sont homéomorphisme .

alors  $(V_2, \Psi_2)$  et  $(V_1, \Psi_1)$  elles sont des cartes de  $S^1$

on a :

$$* V_1 \cup V_2 = S^1 ; \quad V_1 \cap V_2 = V_1 \setminus \{(0, -1)\} = V_2 \setminus \{(0, 1)\} \neq \emptyset .$$

$$* \Psi_1(V_1 \cap V_2) = \left] \frac{-1}{1-a}, 0 \right[ \cup \left] 0, \frac{1}{1-a} \right[ .$$

$$\begin{aligned} * \Psi_1 \circ \Psi_2^{-1} : \Psi_2 ( V_1 \cap V_2 ) &\longmapsto V_1 \cap V_2 \longmapsto \Psi_1 ( V_1 \cap V_2 ). \\ &] \frac{-1}{1-a}, 0[ \cup ] 0, \frac{1}{1-a} [ \longmapsto \left( \frac{2X}{1+X^2}, \frac{1-X^2}{1+X^2} \right) \longmapsto \Psi_1 \left( \frac{2X}{1+X^2}, \frac{X^2-1}{1+X^2} \right). \\ \Psi_1 \circ \Psi_2^{-1} &= \frac{1}{X} \text{ de classe } C^\infty . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \Psi_2 \circ \Psi_1^{-1} : \Psi_1 ( V_1 \cap V_2 ) &\longmapsto V_1 \cap V_2 \longmapsto \Psi_2 ( V_1 \cap V_2 ). \\ &] \frac{-1}{1-a}, 0[ \cup ] 0, \frac{1}{1-a} [ \longmapsto \left( \frac{2X}{1+X^2}, \frac{-1+X^2}{1+X^2} \right) \longmapsto \Psi_1 \left( \frac{2X}{1+X^2}, \frac{1-X^2}{1+X^2} \right) . \end{aligned}$$

$$\Psi_2 \circ \Psi_1^{-1}(X) = \frac{1}{X}.$$

l'application de changement de carte est bijective d'où les deux cartes sont compatibles, alors  $A = \{(V_1, \Psi_1), (V_2, \Psi_2)\}$  est un Atlas de  $S^1$ .

## 1.4 Variété Différentielle :

**Définition 1.4.1** : Soit  $M$  une variété topologique et  $A$  un atlas sur  $M$ , on dit que le couple  $(M, A)$  est une variété différentielle.

## 1.5 Champ de vecteurs :

**Définition 1.5.1** : Un champ de vecteur sur  $M$  est toute application

$$X : M \rightarrow TM$$

de classe  $C^\infty$ , qui à tout point  $x \in M$  associe un vecteur tangent  $V_x \in T_x M$  l'ensemble des champs de vecteur sur  $M$  est noté  $\chi(M) = \{Y/Y \text{ est un champ de vecteur sur } M\}$ .

**Définition 1.5.2** : On définit la somme de deux champs de vecteurs comme étant le champ de vecteur

$$*(X + Y)(m) = X(m) + Y(m).$$

\*Et la multiplication par une fonction  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  comme

$$(f \cdot X)(m) = f(m) X(m).$$

**Remarque 1.5.1** : Le produit de deux champs de vecteurs  $X$  et  $Y$  n'est pas un champ de vecteur.

**Exemple 1.5.1** : Dans  $\mathbb{R}^2$ ; si  $X = \frac{\partial}{\partial x}$  et  $Y = \frac{\partial}{\partial y}$  alors  $X.Y = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$ .

## 1.6 Espace tangent :

Soit  $M$  une variété différentiable de classe  $C^\infty$ .

**Définition 1.6.1** (*Vecteur tangent*) : On appelle vecteur tangent à  $\gamma$  en  $m$  si  $\gamma : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  une courbe sur  $M$  tel que  $\gamma(0) = m$  et la fonction  $\gamma'(0) : D \subset F(m) \rightarrow \mathbb{R}$  définit par

$$\gamma'(0)(f) = \frac{d(f \circ \gamma)}{dt} / t = 0.$$

où  $F(m) = \{f : v_m \rightarrow \mathbb{R}^n, f \in C^\infty\}$  l'algèbre des fonction différentiables sur le voisinage  $v_m$  d'un point  $m$ .

**Définition 1.6.2 :** Sur les courbes différentiables  $\gamma : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ , on définit une relation d'équivalence

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \iff \gamma_1'(0)(f) = \gamma_2'(0)(f) \text{ pour tout } f \text{ de } D \subset F(m)$$

Cette relation signifie qu'on considère deux courbes  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  comme équivalentes si elles ont le même vecteur tangent en 0 dans  $\mathbb{R}^n$ , sur n'importe quelle carte locale.

**Définition 1.6.3 :** L'espace tangent en  $x$  à  $M$ , que l'on note  $T_x M$ , est l'ensemble des classes d'équivalences dans l'ensemble des courbes pour cette relation.

## 1.7 Variétés Riemanniennes

### 1.7.1 Métrique Riemannienne :

Soit  $M$  une variété différentielle et  $m \in M$ ,  $T_m M$  espace tangent de  $M$  en  $m$ .

**Définition 1.7.1 :** Une métrique Riemannienne dans  $T_m M$  est un produit scalaire (forme bilinéaire) symétrique définie positive. On note  $g$  où  $g_m$  telle que :

$$g : T_m M \times T_m M \longrightarrow C^\infty(M) \\ (X, Y) \longmapsto g(X, Y)$$

$C^\infty(M)$  : L'ensemble des applications définies sur  $M$  et à valeur dans  $\mathbb{R}$  de classe  $C^\infty$ .

**Notation 1 :**

\* Si  $X$  et  $Y$  sont deux champs de vecteurs sur  $M$  tel que  $X = \sum_i X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  et  $Y = \sum_j Y_j \frac{\partial}{\partial x_j}$

alors on a : 
$$g(X, Y) = \sum_{i,j} g_{ij} X_i Y_j.$$

\* Etant donnée une variété Riemannienne  $(M, g)$  on définit

a) La longueur d'un vecteur  $X \in T_m M$  est définie par 
$$\|x\|_g = \sqrt{g(X, X)}$$

b) L'angle entre les deux champs de vecteurs  $X$  et  $Y$  est donnée comme

$$\cos \beta = \frac{g(X, Y)}{\|x\|_g \|y\|_g} \quad X, Y \text{ non nuls.}$$

**Exemple 1.7.1 :**

$$M = \mathbb{R}^3$$

$g_0$  : la métrique euclidienne définie sur  $\mathbb{R}^3$ .

$$g_0 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \\ = (dx_1, dx_2, dx_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix}.$$

$$g = g_0 = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Définition 1.7.2 :** Soit  $M$  une variété différentielle et  $m \in M$ ,  $g$  est la métrique définie sur  $T_m M$ .  $\forall m \in M$ , on dit que  $(M, g)$  Variété Riemannienne.

**Définition 1.7.3 :** On appelle variété Riemannienne toute variété munie d'une métrique Riemannienne.

**Exemple 1.7.2 :**

$(\mathbb{R}^3, g)$  est une variété riemannienne.

### 1.7.2 La connèxion linéaire :

Soit  $(M, g)$  une variété Riemannienne et  $\chi(M)$  : l'ensemble des champs de vecteurs sur  $M$ .

**Définition 1.7.4 :** Soit  $M$  une variété différentiable est un application  $\nabla$  telle que

$$\begin{aligned} \nabla : \chi(M) \times \chi(M) &\longrightarrow \chi(M) \\ (X, Y) &\longmapsto \nabla_X Y, \end{aligned}$$

on dit que  $\nabla$  est un connexion si elle vérifie les conditions suivantes :

1)  $\nabla$  est  $\mathbb{R}$ -bilinéaire.

2) pour tout  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ , on

$$\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y \text{ et } \nabla_X (fY) = f \nabla_X Y + X(f) Y.$$

**Expression en coordonnées locales :**

$$X = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x_i}, Y = \sum_{j=1}^n Y_j \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

$$\nabla_X Y = \sum_i \left[ \sum_j X_j \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} + \sum_{j,k} \Gamma_{jk}^i Y_k X_j \right] \frac{\partial}{\partial x_i}$$

où  $\Gamma_{jk}^i$  appelle Symboles de Christoffel .

$$\text{i-e) } \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^n \Gamma_{jk}^i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

$$\Gamma_{jk}^i : \text{la } i\text{-ème composante de } \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

### 1.7.3 La connèxion de Levi-Civita :

**Définition 1.7.5 :** Il existe une seule application  $\nabla$  tels que :

$$\begin{aligned} \nabla : \chi(M) \times \chi(M) &\longrightarrow \chi(M) \\ (X, Y) &\longmapsto \nabla_X Y \end{aligned}$$

vérifiant :

$$i) \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y].$$

$$ii) Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \text{ tels que } X, Y \text{ et } Z \in \chi(M).$$

### 1.7.4 Symboles de Christoffel d'une variété Riemannienne :

La formule de Kosul :

$$2g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) + g([X, Y], Z) + g([X, Z], Y) - g([Y, Z], X) \quad (*)$$

tel que :  $X, Y, Z \in \chi(M)$  .

On utilisant la formule (\*) pour :  $X = \frac{\partial}{\partial x_j}$ ,  $Y = \frac{\partial}{\partial x_i}$ ,  $Z = \frac{\partial}{\partial x_l}$  ,  
on obtient :

$$\begin{aligned} 2g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_l}\right) &= \frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ji}}{\partial x_l} \\ &\Downarrow \\ 2g\left(\sum_{i=1}^n \Gamma_{ji}^k \frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_l}\right) &= \frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ji}}{\partial x_l} \\ &\Downarrow \\ 2 \sum_{i=1}^n \Gamma_{ji}^k g\left(\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_l}\right) &= \frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ji}}{\partial x_l} \quad (\Delta) \\ (\Delta) \Rightarrow \Gamma_{ji}^k &= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n g^{il} \left\{ \frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ji}}{\partial x_l} \right\} \end{aligned}$$

Où  $(g^{ij})$  est la matrice inverse de  $(g_{ij})$

**Remarque 1.7.1** : Pour tout  $(i, j, k)$  on a  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ , car

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} \\ &= \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k} - \sum_{k=1}^n \Gamma_{ji}^k \frac{\partial}{\partial x_k} \\ &= \sum_{k=1}^n (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k) \frac{\partial}{\partial x_k} \end{aligned}$$

### 1.7.5 Géodésiques :

Les géodésiques sont des courbes particulières dans un espace Riemannien qui réalisent le minimum de distance entre deux points.

**Définition 1.7.6** : Soit  $(M, g)$  une variété Riemannienne muni d'une connexion de Levi-Civita  $\nabla$ ,

soit  $C : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  une courbe de classe  $C^\infty$ , alors on dit que la courbe  $C$  est une géodésique si et seulement si elle vérifiant  $\nabla_{C'} C' = 0$ , ou  $C'$  est le vecteur dérivée de la courbe  $C$ .

Ecrire en coordonnées locales  $C(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ , les géodésiques  $C(t)$  se lisent comme les solutions de l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} = 0.$$

### 1.7.6 Géodésique et Complétion :

**Définition 1.7.7 :**  $(M, g)$  est géodésiquement complétée si et seulement si toute géodésique

$C : [a, b] \rightarrow M$  peut être prolongée en géodésique définie sur  $\mathbb{R}$  entier.

**Exemple 1.7.3 :** Le demi plan  $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} / \text{Im}(z) > 0\}$

muni de la métrique canonique de  $\mathbb{R}^2$  (i-e) :  $ds^2 = dx^2 + dy^2$  n'est pas complétée mais la métrique  $ds^2 = \frac{1}{y^2} (dx^2 + dy^2)$  il devient complétée.

## 1.8 Courbure :

### 1.8.1 Tenseur de courbure :

**Définition 1.8.1 :** On définit sur  $(M, g)$  la fonction  $K$  biquadratique de courbure comme suit :

$$\begin{aligned} K(u, v) &= R(u, v, u, v) \\ &= \langle R(u, v)v, u \rangle \\ &= g(R(u, v)v, u) \end{aligned}$$

pour tout  $(u, v) \in \chi(M) \times \chi(M)$

\*Si  $u$  et  $v$  est une base orthonormée d'un plan  $P$ , on définit alors sa courbure sectionnelle par :

$$K(P) = K(u, v).$$

\*Si  $u$  et  $v$  n'est pas orthonormée, alors :

$$K(u; v) = \frac{g(R(u, v)v, u)}{g(u, u)g(v, v) - g^2(u; v)}.$$

### 1.8.2 La torsion :

$$\begin{aligned} T : \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow \chi(M) \\ (X, Y) &\rightarrow T(X, Y) \end{aligned}$$

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y].$$

Si  $\nabla$  est la connexion du Levi-Civita, Alors  $T = 0$  (free torsion).

### 1.8.3 La courbure de Ricci :

**Définition 1.8.2** : C'est un 2 - tenseur symétrique en point  $m$ , on note  $Ric(X, Y)$  : la trace de l'endomorphisme

$$\begin{aligned} T_m M &\longmapsto T_m M \\ V &\longrightarrow R(V, X)Y \end{aligned}$$

Si  $\{e_i\}$  est une base orthonormée de  $T_m M$  alors :

$$\begin{aligned} Ric_m(X, Y) &= \sum_{i=1}^n R(X, e_i, Y, e_i) \\ &= \sum_{i=1}^n g(R(X, e_i)e_i, Y) \\ &= \sum_{i=1}^n \langle R(X, e_i)e_i, Y \rangle. \end{aligned}$$

### 1.8.4 La courbure scalaire :

**Définition 1.8.3** : C'est une fonction  $M \longrightarrow \mathbb{R}$  noté  $k$  tel que  $k(m)$  est la trace de l'endomorphisme symétrique associée à  $Ric_m$  :

phisme symétrique associée à  $Ric_m$  :

$$\begin{aligned} k(m) &= \sum_{i,j} R(e_i, e_j, e_i, e_j) \\ &= \sum_{i,j} k(e_i, e_j) \\ &= 2Trace. \end{aligned}$$

### 1.8.5 La courbure de Gauss :

$$K = \frac{ln - m^2}{EG - F^2}$$

Si  $K = 0$  , on dit que la surface est plate

### 1.8.6 La courbure moyenne :

$$H = \frac{lG + En - 2Fm}{2(EG - F^2)}$$

Si  $H = 0$  , on dit que la surface est minimale.

# Première et deuxième formes fondamentales

---

Dans ce chapitre, Nous rappelons les notions de première et deuxième formes fondamentales dans une variété Riemannienne .

## 2.1 La Première forme fondamentale :

Considérons une surface paramétrée par la fonction  $X = x(u, v)$  et  $(M^3, g)$  une variété Riemannienne. elle est régulier d'une surface de classe  $C^m$  ( $m \geq 1$ ) .tele que

$$\begin{aligned} X : U \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow (M^3, g) \\ (u, v) &\longmapsto (x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

On note  $dx^2$  la métrique Riemannienne telle que  $dx^2 = g(dx_u, dx_u).dx^2 + 2g(dx_u, dx_v).dx^2 + g(dx_v, dx_v).dx^2$

**Définition 2.1.1** : *La première forme fondamentale en un point  $m$  d'une surface  $X$  est dans une première approche, une écriture formelle de la métrique riemannienne dans variété riemannienne  $(g(\cdot))$  restriction au plan tangte  $T_m X$ .*

On note la première forme fondamentale par :  $I$ .

### 2.1.1 Expression dans une base locale

Considérons  $X$  une surface riemannienne  $(M, g)$  paramétrée par la fonction  $x(u, v)$ . En un point donné, les vecteurs tangents sont notés  $x_u$  et  $x_v$  ; le plan tangent est généré par cette base locale  $(x_u, x_v)$ , et tout vecteur tangent en ce point peut donc s'écrire comme une combinaison linéaire de ces deux vecteurs.

Alors la métrique riemannienne s'écrit :

$$I(ax_u + bx_v, cx_u + dx_v) = (ac)g(x_u, x_u) + (ad + bc)g(x_u, x_v) + (bd)g(x_v, x_v)$$

Les valeurs

$$E = g(x_u, x_u), F = g(x_u, x_v), G = g(x_v, x_v)$$

sont appelées les coefficients de la première forme fondamentale.

On peut écrire ceci sous la forme d'un tenseur :

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

**L'utilité de la première forme fondamentale :** On utilise la première fondamentale pour calculer des aires et des longueurs de courbes tracées sur  $U$ , peut aussi calculer les angles entre des vecteurs tangents. C'est l'outil qui sert à étudier la géométrie de  $U$ .

## 2.2 La deuxième forme fondamentale :

La deuxième forme fondamentale, notée  $II$ , est une forme quadratique sur l'espace tangent de l'hypersurface d'une variété riemannienne.

Soit une surface  $X$  paramétrée par  $x(u, v)$ . En un point  $P$  donné, le plan tangent (lorsqu'il est défini) est généré par les vecteurs tangents  $x_u$  et  $x_v$ , et le vecteur normal est défini comme étant le vecteur unitaire  $N$  colinéaire à  $x_u \wedge x_v$ . Dans le repère  $(P, x_u, x_v, N)$ , si la surface est localement lisse.

### 2.2.1 Normale unitaire :

**Définition 2.2.1 :** Soit une surface définie par un par des fonctions  $x, y, z$  de classe  $C^1$ . Le point de paramètre  $(u, v)$  est dit régulier lorsque les vecteurs dérivés partiels en ce point sont indépendants. On peut alors former leur produit vectoriel qui constitue un vecteur normal à la surface (non nécessairement unitaire). Lien avec le gradient

note  $N$  qui donné par : 
$$N = \frac{(x_u \wedge x_v)}{\|x_u \wedge x_v\|_g}$$

### Définition 2.2.2 :

On considère une hypersurface orientée d'une variété riemannienne.

Soit  $N$  le champ de normales associé à cette hypersurface.

En notant  $\nabla_v w$  la dérivée covariante de la variété ambiante, on pose :

$$II(v, w) = -g(\nabla_v N, w) = g(N, \nabla_v w)$$

Le signe de la seconde forme fondamentale dépend du choix de la direction de  $n$  (l'orientation de l'hypersurface).

On peut généraliser le concept de seconde forme fondamentale aux espaces de codimension arbitraire. Dans ce cas, c'est une forme quadratique sur l'espace tangent, à valeurs dans le fibré normal :

$$II(v, w) = g(\nabla_v w)^\perp.$$

avec  $(\nabla_v w)^\perp$  la projection orthogonale de la dérivée covariante  $\nabla_v w$  sur le fibré normal.

### 2.2.2 Expression dans une base locale :

Considérons  $X$  une surface riemannienne  $(M, g)$  paramétrée par la fonction  $x(u, v)$ . En un point donné, les vecteurs tangents sont notés  $x_u$  et  $x_v$  ; le plan tangent est généré par cette base locale  $(x_u, x_v)$ , et tout vecteur tangent en ce point peut donc s'écrire comme une combinaison linéaire de ces deux vecteurs.

Alors la métrique riemannienne s'écrit :

$$II = ldx^2 + 2mdxdy + ndy^2$$

Les valeurs

$$l = g(\nabla_{x_u}x_u, N), \quad m = g(\nabla_{x_u}x_v, N), \quad n = g(\nabla_{x_v}x_v, N)$$

sont appelées les coefficients de la deuxième forme fondamentale.

**Exemple 2.2.1** : Soit

$$\begin{aligned} X : U \subset \mathbb{R}^2 &\longmapsto SL(2, \mathbb{R}) \\ (x, y) &\longrightarrow (x, y, f(x, y)) \end{aligned}$$

$SL(2, \mathbb{R})$  une variété Riemannienne muni d'une métrique :

$$g_{SL(2, \mathbb{R})} = \left(\frac{dx}{2y}\right)^2 + \left(\frac{dy}{2y}\right)^2 + \left(\frac{dx}{2y} + dz\right)^2$$

Et de base orthonormé :

$$E_1 = 2y \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z}, \quad E_2 = 2y \frac{\partial}{\partial y}, \quad E_3 = \frac{\partial}{\partial z}$$

La connexion de Levi-Civita :

$$\begin{aligned} \nabla_{E_1}E_1 &= \frac{4(1-y)}{y}E_2. & \nabla_{E_1}E_2 &= -6yE_1 + (4y-1) & \nabla_{E_1}E_3 &= -\frac{1}{y}E_2. \\ \nabla_{E_2}E_1 &= -E_1 + (4y-2)E_3. & \nabla_{E_2}E_2 &= 2E_1 + 2E_3. & \nabla_{E_2}E_3 &= -E_1. \\ \nabla_{E_3}E_1 &= -2E_1. & \nabla_{E_3}E_2 &= -E_1 & \nabla_{E_3}E_3 &= 0. \end{aligned}$$

L'espace tangent :

$$e_1 = X_x = (1, 0, f_x) = \frac{\partial}{\partial x} + f_x \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{2y} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2y}E_1 + \left(\frac{1}{2y} + f_x\right)E_3.$$

$$e_2 = X_y = (0, 1, f_y) = \frac{\partial}{\partial y} + f_y \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2y}E_2 + f_yE_3.$$

et on a

$$\begin{aligned} \nabla_{e_1}e_1 &= \left(\frac{1}{y^3} - \frac{1}{y}f_x - \frac{3}{y^2} - \frac{1}{y^2}f_x\right)E_2 + f_{xx}E_3. \\ \nabla_{e_1}e_2 &= \frac{-g'}{(f+g)^2}E_1 - \frac{f'}{(f+g)^2}E_2 - \frac{f'g'}{(f+g)^2}E_3 = \nabla_{e_2}e_1. \\ \nabla_{e_2}e_2 &= \frac{-2g'}{(f+g)^2}E_2 + \frac{g''(f+g) - g'^2 + 1}{(f+g)^2}E_3. \end{aligned}$$

donc le vecteur normale unitaire donnée par

$$N = \frac{X_x \wedge X_y}{\|X_x \wedge X_y\|} = \frac{-\frac{1}{2y} \left( \frac{1}{2y} + f_x \right) E_1 - \frac{f_y}{2y} E_2 + \frac{1}{4y^2} E_3}{\frac{1}{2y} \sqrt{\left( f_x + \frac{1}{2y} \right)^2 + f_y^2 + \frac{1}{4y^2}}} = \frac{-\left( \frac{1}{2y} + f_x \right) E_1 - f_y E_2 + \frac{1}{2y} E_3}{\left( f_x + \frac{1}{2y} \right)^2 + f_y^2 + \frac{1}{2y}}$$

Les coefficients de la première forme fondamentale :

$$E = g(X_x, X_x) = g\left(\frac{1}{2y} E_1 + \left(\frac{1}{2y} + f_x\right) E_3, \frac{1}{2y} E_1 + \left(\frac{1}{2y} + f_x\right) E_3\right) = \frac{1}{4y^2} + \left(f_x + \frac{1}{2y}\right)^2.$$

$$G = g(X_y, X_y) = g\left(\frac{1}{2y} E_2 + f_y E_3, \frac{1}{2y} E_2 + f_y E_3\right) = \frac{1}{4y^2} + f_y^2.$$

$$F = g(X_x, X_y) = g\left(\frac{1}{2y} E_1 + \left(\frac{1}{2y} + f_x\right) E_3, \frac{1}{2y} E_2 + f_y E_3\right) = f_y \left(f_x + \frac{1}{2y}\right)$$

Les coefficients de la forme fondamentale :

$$w = \left(f_x + \frac{1}{2y}\right)^2 + f_y^2 + \frac{1}{2y}$$

$$l = g(\nabla_{e_1} e_1, N) = g\left(\left(\frac{1}{y^3} - \frac{1}{y} f_x - \frac{3}{y^2} - \frac{1}{y^2} f_x\right) E_2 + f_{xx} E_3, \frac{-\left(\frac{1}{2y} + f_x\right)}{\left(f_x + \frac{1}{2y}\right)^2 + f_y^2 + \frac{1}{2y}} E_1 - \frac{f_y}{\left(f_x + \frac{1}{2y}\right)^2 + f_y^2 + \frac{1}{2y}} E_2 + \frac{\frac{1}{2y}}{\left(f_x + \frac{1}{2y}\right)^2 + f_y^2 + \frac{1}{2y}} E_3\right)$$

$$= \frac{1}{w} \left[ \frac{-1}{2y} f_y \left( \frac{1}{2y^3} - \frac{1}{y} f_x - \frac{3}{2y^2} - \frac{1}{y^2} f_x \right) + \frac{1}{4y^2} f_{xx} \right]$$

$$n = g(\nabla_{e_2} e_2, N) = g\left(-\frac{1}{y^2} E_2 + \frac{1}{2y^2} E_1 - \frac{1}{2y} f_y E_1 + \frac{1}{2y^2} E_3 + f_{yy} E_3 - \frac{1}{2y} f_y E_1, \frac{-\left(\frac{1}{2y} + f_x\right)}{\left(f_x + \frac{1}{2y}\right)^2 + f_y^2 + \frac{1}{2y}} E_1 - \frac{f_y}{\left(f_x + \frac{1}{2y}\right)^2 + f_y^2 + \frac{1}{2y}} E_2 + \frac{\frac{1}{2y}}{\left(f_x + \frac{1}{2y}\right)^2 + f_y^2 + \frac{1}{2y}} E_3\right)$$

$$= \frac{1}{w} \left[ \frac{1}{2y^2} \left(-f_x + \frac{1}{2y}\right) \left(f_y - \frac{1}{2y}\right) + \frac{1}{4y^3} f_y + \frac{1}{4y^2} \left(\frac{1}{2y^2} + f_{yy}\right) \right]$$

$$m = g(\nabla_{e_1} e_2, N) = g\left(\left(-\frac{1}{y^2} - \frac{1}{2y} f_x\right) E_1 - \frac{1}{y^3} f_y E_2 + \frac{y-1}{y^2} E_3, \frac{-\left(\frac{1}{2y} + f_x\right)}{\left(f_x + \frac{1}{2y}\right)^2 + f_y^2 + \frac{1}{2y}} E_1 - \frac{f_y}{\left(f_x + \frac{1}{2y}\right)^2 + f_y^2 + \frac{1}{2y}} E_2 + \frac{\frac{1}{2y}}{\left(f_x + \frac{1}{2y}\right)^2 + f_y^2 + \frac{1}{2y}} E_3\right)$$

$$= \frac{1}{w} \left[ -\frac{1}{2y} f_y \frac{1}{4y^4} + \frac{1}{2y^3} f_x + \frac{1}{4y^2} f_x^2 + \frac{1}{8y^3} f_x + \frac{1}{4y^2} f_y + \frac{1}{4y^2} (y-1) \right]$$

# Surfaces minimales translation dans l'espace hyperbolique

---

Dans ce chapitre on étudier les surfaces minimales de translation dans l'espace hyperbolique, d'après les résultats de Rafael Lopez [8] .

L'espace hyperbolique définie par :

$$\mathbb{H}^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z > 0\}$$

muni d'une métrique  $ds^2 = \frac{dx^2+dy^2+dz^2}{z^2}$ . la base orthonormé  $\{E_1, E_2, E_3\}$  on peut facilement vérfier que satisfait  $g(E_i, E_j) = \delta_{ij}$ , ici désigne les symboles de kronecker :  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$  dans  $\mathbb{H}^3$  est donné par :

$$E_1 = z \frac{\partial}{\partial x}, E_2 = z \frac{\partial}{\partial y}, E_3 = z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Les symboles Cristoffel  $\Gamma_{ij}^k$  et La connexion Levi-Civita  $\nabla$  sont explicitement donné par :

$$\Gamma_{ij}^1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{z} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{z} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Gamma_{ij}^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{z} \\ 0 & -\frac{1}{z} & 0 \end{pmatrix} \quad \Gamma_{ij}^3 \begin{pmatrix} \frac{1}{z} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{z} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{z} \end{pmatrix}$$

Et de la connexion de Levi-Civita :

$$\begin{array}{lll} \nabla_{E_1} E_1 & = & E_3. & \nabla_{E_1} E_2 & = & 0 & \nabla_{E_1} E_3 & = & -E_1. \\ \nabla_{E_2} E_1 & = & 0. & \nabla_{E_2} E_2 & = & E_3. & \nabla_{E_2} E_3 & = & -E_2. \\ \nabla_{E_3} E_1 & = & 0. & \nabla_{E_3} E_2 & = & 0 & \nabla_{E_3} E_3 & = & 0. \end{array}$$

Nous avons les crochets de Lie :

$$\begin{aligned} [E_1, E_1] &= [E_1, E_2] = [E_2, E_1] = [E_2, E_2] = [E_3, E_1] [E_3, E_2] = 0 \\ [E_1, E_3] &= E_1, [E_2, E_3] = E_2, [E_3, E_3] = E_3 \end{aligned}$$

La tenseur de courbure :

$$R(E_1, E_2) E_2 = -E_1; R(E_2, E_1) E_1 = -E_1,$$

**Définition 3.0.3** : Une surface  $\Sigma$  dans l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^3$  (le demi-espace de Poincaré) est une surface de translation s'il est donné par une immersion  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^3$ , écrit comme

$$X(x, y) = (x, y, f(x) + g(y)) \quad (\text{type I}) \quad (1)$$

$$X(x, z) = (x, f(x) + g(z), z) \quad (\text{type II}) \quad (2)$$

où  $f$  et  $g$  sont des fonctions lisses dans  $\mathbb{R}$ .

### 3.1 Type I

Soit une surface  $\Sigma$  note type I paramétrée par :

$$\Sigma : X(x, y) = (x, y, f(x) + g(y)) \quad (\text{type I})$$

Les vecteurs tangents  $X_x = \frac{\partial X}{\partial x}$  et  $X_y = \frac{\partial X}{\partial y}$  sont décrits par :

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial x} + f' \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{z} E_1 + \frac{f'}{z} E_3.$$

$$e_2 = \frac{\partial}{\partial y} + g' \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{z} E_2 + \frac{g'}{z} E_3.$$

la connexion de la surface  $\Sigma$  :

$$\frac{D}{dx} E_1 = \frac{1}{z} E_3.$$

$$\frac{D}{dy} E_1 = 0.$$

$$\frac{D}{dx} E_2 = 0.$$

$$\frac{D}{dy} E_2 = \frac{1}{z} E_3.$$

$$\frac{D}{dx} E_3 = -\frac{1}{z} E_1.$$

$$\frac{D}{dy} E_3 = -\frac{1}{z} E_2.$$

la base de l'espace hyperbolique donnée par :

$$\nabla_{e_1} e_1 = \frac{-2f'}{(f+g)^2} E_1 + \frac{f''(f+g) - f'^2 + 1}{(f+g)^2} E_3.$$

$$\nabla_{e_1} e_2 = \frac{-g'}{(f+g)^2} E_1 - \frac{f'}{(f+g)^2} E_2 - \frac{f'g'}{(f+g)^2} E_3 = \nabla_{e_2} e_1.$$

$$\nabla_{e_2} e_2 = \frac{-2g'}{(f+g)^2} E_2 + \frac{g''(f+g) - g'^2 + 1}{(f+g)^2} E_3.$$

Les coefficients de la première forme fondamentale donnée par :

$$E = \frac{1 + f'^2}{(f + g)^2}.$$

$$G = \frac{1 + g'^2}{(f + g)^2}.$$

$$F = \frac{f'g'}{(f + g)^2}.$$

Prenez le vecteur normal unitaire  $N$  à  $\Sigma$ . A savoir que  $N$  est le long d'un champ vectoriel de  $\Sigma$  qui satisfait :

$$X_x \wedge X_y = \left( \frac{1}{z} E_1 + \frac{f'}{z} E_3 \right) \wedge \left( \frac{1}{z} E_2 + \frac{g'}{z} E_3 \right) \text{ tele que}$$

$$\begin{aligned} E_1 \wedge E_2 &= E_3. \\ E_2 \wedge E_3 &= E_1. \\ E_3 \wedge E_1 &= E_2. \end{aligned}$$

donc

$$X_x \wedge X_y = -\frac{f'}{z^2} E_1 - \frac{g'}{z^2} E_2 + \frac{1}{z^2} E_3$$

$$\text{et } \|X_x \wedge X_y\| = \frac{1}{z^2} \sqrt{f'^2 + g'^2 + 1}$$

$$N = \frac{X_x \wedge X_y}{\|X_x \wedge X_y\|} = \left( -\frac{f'}{\sqrt{f'^2 + g'^2 + 1}}, -\frac{g'}{\sqrt{f'^2 + g'^2 + 1}}, \frac{1}{\sqrt{f'^2 + g'^2 + 1}} \right)$$

Les coefficients de la deuxième forme fondamentale de cet vecteur normal unitaire est donnée par :

$$\begin{aligned} l &= \frac{f''(f+g) + f'^2 + 1}{\sqrt{f'^2 + g'^2 + 1} (f+g)^2} \cdot \\ n &= \frac{g''(f+g) + g'^2 + 1}{\sqrt{f'^2 + g'^2 + 1} (f+g)^2} \cdot \\ m &= \frac{g'f'}{\sqrt{f'^2 + g'^2 + 1} (f+g)^2} \cdot \end{aligned}$$

On Calculons la courbure intrinsèque de Gauss ( $K_{int}$ ) telque :  $K_{int} = \frac{ln-m^2}{EG-F^2} + K(e_1, e_2)$

Le crochet  $[e_1, e_2] = e_1 e_2 - e_2 e_1 = 0$ .

Le courbure sectionnelle  $K$  telque :

$$K(u, v) = R(u, v, u, v) = \langle (R(u, v)v, u) \rangle = g(R(u, v)v, u)$$

pour calculer la courbure sectionnelle il faut calculer premierement la tenseur R telque :

$$R(X, Y)W = \nabla_X \nabla_Y W - \nabla_Y \nabla_X W - \nabla_{[X, Y]} W :$$

$$\begin{aligned} R(e_1, e_2) e_2 &= \nabla_{e_1} \nabla_{e_2} e_2 - \nabla_{e_2} \nabla_{e_1} e_2 - \nabla_{[e_1, e_2]} e_2 : \\ &= \frac{g''(f+g) - g'^2 + 1 + f'g'}{z(f+g)^2} E_1 + \frac{f'}{z(f+g)^2} E_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K(e_1, e_2) &= g(R(e_1, e_2) e_2, e_1) \cdot \\ &= g \left( \frac{g''(f+g) - g'^2 + 1 + f'g'}{z(f+g)^2} E_1 + \frac{f'}{z(f+g)^2} E_3, \frac{1}{z} E_1 + \frac{f'}{z} E_3 \right) \\ &= \frac{g''(f+g) - g'^2 + 1 + f'g'}{(f+g)^4} + \frac{f'^2}{(f+g)^4} \end{aligned}$$

Après cela calculer :  $\frac{ln-m^2}{EG-F^2}$

$$EG - F^2 = \frac{1 + f'^2 + g'^2}{(f + g)^4}$$

$$ln-m^2 = \frac{f''g''(f+g)^2 + g'^2f''(f+g) + f''(f+g) + f'^2g''(f+g) + f'^2 + g''(f+g) + g'^2 + 1}{(f+g)^4(1+f'^2+g'^2)}$$

donc

$$K_{int} = \frac{f''g''(f+g)^2 + g'^2f''(f+g) + f''(f+g) - g'^2g''(f+g) + f'^4 + g'^4 + 2f'^2g'^2 + 2f'^2 + g'^2}{(1+f'^2+g'^2)^2}$$

On calculons La courbure moyenne telque :  $H = \frac{lG+En-2Fm}{2(EG-F^2)}$

$$H = (f + g) \frac{(1 + g'^2) f'' + (1 + f'^2) g''}{(1 + f'^2 + g'^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2}{\sqrt{1 + f'^2 + g'^2}}. \quad (1)$$

**Proposition 3.1.1** :la courbure intrinsèque de Gauss et la courbure moyenne pour les surfaces de translation dans l'espace hyperbolique de type I sont données par :

$$K_{int} = \frac{f''g''(f+g)^2 + g'^2f''(f+g) + f''(f+g) - g'^2g''(f+g) + f'^4 + g'^4 + 2f'^2g'^2 + 2f'^2 + g'^2}{(1+f'^2+g'^2)}$$

Et

$$H = (f + g) \frac{(1 + g'^2) f'' + (1 + f'^2) g''}{(1 + f'^2 + g'^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2}{\sqrt{1 + f'^2 + g'^2}}.$$

## 3.2 Type II

Soit une surface  $\Sigma$  paramétrée par :

$$\Sigma : X(x, y) = (x, f(x) + g(z), z) \quad (\text{type II})$$

Les vecteurs tangents  $X_x = \frac{\partial X}{\partial x}$  et  $X_y = \frac{\partial X}{\partial y}$  sont décrits par

$$\begin{aligned} e_1 &= X_x = \frac{\partial}{\partial x} + f' \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{z} E_1 + \frac{f'}{z} E_2. \\ e_2 &= X_y = g' \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} = \frac{g'}{z} E_2 + \frac{1}{z} E_3. \end{aligned}$$

la connexion de la surface  $\Sigma$  :

$$\begin{aligned} \frac{D}{dx} E_1 &= \frac{1}{z} E_3. & \frac{D}{dz} E_1 &= 0. \\ \frac{D}{dx} E_2 &= \frac{f'}{z} E_3. & \frac{D}{dz} E_2 &= \frac{g'}{z} E_3. \\ \frac{D}{dx} E_3 &= -\frac{1}{z} E_1 - \frac{f'}{z} E_2. & \frac{D}{dz} E_3 &= -\frac{g'}{z} E_2. \end{aligned}$$

et la base de l'espace hyperbolique donnée par :

$$\begin{aligned}\nabla_{e_1}e_1 &= \frac{-zf''}{z^2}E_1 + \frac{(1+f'^2)}{z^2}E_3. \\ \nabla_{e_1}e_2 &= \frac{-1}{z^2}E_1 - \frac{f'}{z^2}E_2 - \frac{f'g'}{z^2}E_3 = \nabla_{e_2}e_1. \\ \nabla_{e_2}e_2 &= \frac{zg'' - 2g'}{z^2}E_2 + \frac{g'^2 - 1}{z^2}E_3.\end{aligned}$$

les coefficients de la première forme fondamentale sont données par :

$$E = \frac{1+f'^2}{z^2}, \quad G = \frac{1+g'^2}{z^2}, \quad F = \frac{f'g'}{z^2}.$$

le vecteur normale unite de  $\Sigma$  :

$$X_x \wedge X_y = \frac{f'}{z^2}E_1 - \frac{1}{z^2}E_2 + \frac{g'}{z^2}E_3$$

et  $\|X_x \wedge X_y\| = \frac{1}{z^2} \sqrt{f'^2 + g'^2 + 1}$

$$N = \frac{X_x \wedge X_y}{\|X_x \wedge X_y\|} = \left( \frac{f'}{\sqrt{f'^2 + g'^2 + 1}}, -\frac{1}{\sqrt{f'^2 + g'^2 + 1}}, \frac{g'}{\sqrt{f'^2 + g'^2 + 1}} \right)$$

Les coefficients de la deuxième forme fondamentale :

$$\begin{aligned}l &= \left( \frac{-zf''}{z^2 \sqrt{f'^2 + g'^2 + 1}} + \frac{g'(f'^2 + 1)}{z^2 \sqrt{f'^2 + g'^2 + 1}} \right). \\ n &= \frac{g'(g'^2 - 1)}{z^2 \sqrt{f'^2 + g'^2 + 1}} - \frac{(g''z - 2g')}{z^2 \sqrt{f'^2 + g'^2 + 1}}. \\ m &= \frac{-g'^2 f'}{z^2 \sqrt{f'^2 + g'^2 + 1}}.\end{aligned}$$

Alors

$$H = -z \left[ \frac{1(1+g'^2)f'' + (1+f'^2)g''}{2(1+f'^2+g'^2)^{\frac{3}{2}}} \right] + \frac{g'}{\sqrt{1+f'^2+g'^2}}.$$

On Calculons la courbure intrinsèque de type  $II$  :

$$EG - F^2 = \frac{1 + f'^2 + g'^2}{z^4}$$

Le crochet  $[e_1, e_2]$  telque  $[e_1, e_2] = e_1e_2 - e_2e_1 = 0$ .

Le courbure sectionnelle  $K$  telque :

$$\begin{aligned}R(e_1, e_2)e_2 &= \nabla_{e_1}\nabla_{e_2}e_2 - \nabla_{e_2}\nabla_{e_1}e_2 - \nabla_{[e_1, e_2]}e_2 : \\ &= -\frac{g'^2 - 1}{z^3}E_1 - \frac{2f'g'^2 - 1}{z^3}E_2 + \frac{2g'^3f' - zf'^2g''g'}{z^3}E_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K(e_1, e_2) &= \frac{g(R(e_1, e_2)e_2, e_1)}{EG - F^2} \\
 &= \frac{g\left(-\frac{g'^2-1}{z^3}E_1 - \frac{2f'g'^2-1}{z^3}E_2 + \frac{2g'^3f'-zf'^2g''g'}{z^3}E_3, \frac{1}{z}E_1 + \frac{f'}{z}E_3\right)}{EG - F^2} \\
 &= \left(\frac{-g'^2 + 1 + f' - 2f'^2g'^2}{z^3}\right) \left(\frac{z^4}{1 + f'^2 + g'^2}\right) \\
 ln - m^2 &= \frac{-zg'^3f'' + g'^4 + g''f''z^2 + zf''g'^3 - g''g'zf'^2 - g''g'z + g'^2f'^2 + g'^2}{z^4(1 + f'^2 + g'^2)}
 \end{aligned}$$

donc

$$K_{int} = \frac{-zg'^3f'' + g'^4 + g''f''z^2 + zf''g'^3 - g''g'zf'^2 - g''g'z + g'^2f'^2 + g'^2 - zg'^2 + z + zf' - 2zf'^2g'^2}{(1 + f'^2 + g'^2)}$$

La courbure moyenne :

$$H = -z \left[ \frac{1(1 + g'^2)f'' + (1 + f'^2)g''}{2(1 + f'^2 + g'^2)^{\frac{3}{2}}} \right] + \frac{g'}{\sqrt{1 + f'^2 + g'^2}}.$$

**Proposition 3.2.1 (2)** : la courbure intrinsèque de Gauss et la courbure moyenne pour les surfaces de translation dans l'espace hyperbolique de type II sont données par :

$$K_{int} = \frac{-zg'^3f'' + g'^4 + g''f''z^2 + zf''g'^3 - g''g'zf'^2 - g''g'z + g'^2f'^2 + g'^2 - zg'^2 + z + zf' - 2zf'^2g'^2}{(1 + f'^2 + g'^2)}$$

Et

$$H = -z \left[ \frac{1(1 + g'^2)f'' + (1 + f'^2)g''}{2(1 + f'^2 + g'^2)^{\frac{3}{2}}} \right] + \frac{g'}{\sqrt{1 + f'^2 + g'^2}}. \quad (2)$$

### 3.3 Classification des surfaces minimales de translation de type I :

**Théorème 3.3.1** : Il n'y a pas des surfaces minimales de translation de type I dans l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^3$ .

**Preuve.** :

□

Si la surface est minimale, c'est-à-dire  $H = 0$  sur  $\Sigma$ , nous avons à partir de (2) :

$$(f + g) \frac{(1 + g'^2)f'' + (1 + f'^2)g''}{(1 + f'^2 + g'^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2}{\sqrt{1 + f'^2 + g'^2}} = 0. \quad (3)$$

Nous écrivons l'équation (3) sous forme suivant notée (4) :

$$\begin{aligned} (f+g) \frac{(1+g'^2)f'' + (1+f'^2)g''}{(1+f'^2+g'^2)^{\frac{3}{2}}} &= -\frac{2}{\sqrt{1+f'^2+g'^2}} \\ (f+g) [(1+g'^2)f'' + (1+f'^2)g''] &= -\frac{2(1+f'^2+g'^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1+f'^2+g'^2}} \\ (f+g) \left[ \frac{f''}{(1+f'^2)} + \frac{g''}{(1+g'^2)} \right] &= -2 \frac{1+f'^2+g'^2}{(1+f'^2)(1+g'^2)}. \end{aligned} \quad (4)$$

On dérive deux fois l'équation (4) par rapport  $x$  et  $y$  :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ (f+g) \left[ \frac{f''}{(1+f'^2)} + \frac{g''}{(1+g'^2)} \right] \right] = f' \left( \frac{f''}{(1+f'^2)} + \frac{g''}{(1+g'^2)} \right) + g \left( \frac{f''}{(1+f'^2)} \right)' (x).$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[ -2 \frac{1+f'^2+g'^2}{(1+f'^2)(1+g'^2)} \right] &= \frac{-2}{(1+g'^2)} \left( \frac{2f'f''(1+f'^2) - 2f''f'(1+g'^2+f'^2)}{(1+f'^2)^2} \right) \\ &= \frac{4}{(1+g'^2)} \left( \frac{f''f'g'^2}{(1+f'^2)^2} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[ f' \left( \frac{f''}{(1+f'^2)} + \frac{g''}{(1+g'^2)} \right) + g \left( \frac{f''}{(1+f'^2)} \right)' (x) \right] = f' \left( \frac{g''}{(1+g'^2)} \right)' (y) + g' \left( \frac{f''}{(1+f'^2)} \right)' (x)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[ -2 \left( \frac{2f'f''g'^2}{(1+f'^2)(1+g'^2)} \right) \right] &= \frac{4}{(1+f'^2)^2} \left( \frac{2f'g'f''g''(1+g'^2) - 2g''g'^3f''f'}{(1+g'^2)^2} \right) \\ &= \left( \frac{8f'g'f''g''}{(1+f'^2)^2(1+g'^2)^2} \right) \end{aligned}$$

$$f' \left( \frac{g''}{(1+g'^2)} \right)' (y) + g' \left( \frac{f''}{(1+f'^2)} \right)' (x) = \left( \frac{8f'g'f''g''}{(1+f'^2)^2(1+g'^2)^2} \right) \quad (5)$$

On divise l'équation (5) sur  $f'g'$  :

$$\frac{f'}{f'g'} \left( \frac{g''}{(1+g'^2)} \right)' (y) + \frac{g'}{f'g'} \left( \frac{f''}{(1+f'^2)} \right)' (x) = \frac{1}{f'g'} \frac{8f'g'f''g''}{(1+f'^2)^2(1+g'^2)^2}$$

Ça signifie

$$\frac{1}{g'} \left( \frac{g''}{(1+g'^2)} \right)' (y) + \frac{1}{f'} \left( \frac{f''}{(1+f'^2)} \right)' (x) = \frac{8f''g''}{(1+f'^2)^2(1+g'^2)^2} \quad (6)$$

Comme le membre de gauche de cette équation est la somme d'une fonction de  $x$  et d'une fonction de  $y$ , une nouvelle différenciation dans (6) par rapport à  $x$  et  $y$  implique que la gauche

le côté disparaît pour tout  $x, y$ . En prenant cela en compte, ces deux différenciations sur les rendements de droite

$$0 = (-4f'f''^2 + (1 + f'^2) f''') (-4g'g''^2 + (1 + g'^2) g''')$$

Nous supposons que  $-4f'f''^2 + (1 + f'^2) f''' = 0$ . On écrit cette équation sous forme suivante

$$\frac{f'''}{f''} = \frac{4f'f''}{(1 + f'^2)} \quad (a)$$

On intègre cette équation différentielle ordinaire (a) et donne :

$$\ln(f'') = 2 \ln(1 + f'^2) + c \Leftrightarrow \exp(\ln(f'')) = \exp(2 \ln(1 + f'^2) + c)$$

$$\Leftrightarrow f'' = a(1 + f'^2)^2. \quad (*)$$

pour certains constante  $a$ . En remplaçant (\*) dans (6), nous avons

$$\frac{1}{g'} \left( \frac{g''}{(1 + g'^2)} \right)' + \frac{1}{f'} \left( a(1 + f'^2)^2 \right)' = 8a \frac{g''}{(1 + g'^2)^2} \quad (7)$$

Laissez-nous distinguer plusieurs cas.

1. Soit  $a = 0$ . Nous faisons le changement suivante :  $f(x) = mx + n$ ,  $m, n \in \mathbb{R}$  et  $g'' = b(1 + g'^2)$  pour certains constante  $b$ .

tel que :

$f'(x) = m$  et  $f''(x) = 0$ . En remplace dans (4) donnée :

$$(mx + n) \left( \frac{b(1 + g'^2)}{(1 + g'^2)} \right) + g \left( \frac{b(1 + g'^2)}{(1 + g'^2)} \right) = -2 \left( \frac{1 + m^2 + g'^2}{(1 + m^2)(1 + g'^2)} \right)$$

implique

$$b((mx + n) + g(y)) = -2 \left( \frac{1 + m^2 + g'^2}{(1 + m^2)(1 + g'^2)} \right)$$

a) Si  $b \neq 0$ , alors  $m = 0$  et nous concluons que

$$b(n + g(y)) = -2 \left( \frac{1 + g'^2}{(1 + g'^2)} \right)$$

$$b(n + g(y)) = -2.$$

Cela implique que  $g$  est une fonction constante, et donc  $g'' = 0$  et  $b = 0$ .

contradiction.

b) Si  $b = 0$ , alors  $g(y) = py + q$ ,  $p, q \in \mathbb{R}$ . tel que :  $g''(y) = 0$ ,  $f''(x) = 0$ ,  $f'(x) = m$ ,  $g'(y) = p$ .

En remplace dans l'équation (4) donnée :

$$0 = -2 \frac{1 + m^2 + p^2}{(1 + p^2)(1 + m^2)}$$

ce qui est une contradiction.

2. On suppose que  $a \neq 0$  et  $2af'' = -b \Rightarrow f'' = \frac{-b}{2a}$

En remplace dans (7) donnée :

$$\frac{1}{g'} \left( \frac{g''}{(1+g'^2)} \right)' - 8a \frac{g''}{(1+g'^2)^2} = b$$

En particulier  $f(x) = \frac{-b}{4a}x^2 + mx + n$ ,  $m, n \in \mathbb{R}$ .

Alors  $g'' = p(1+g'^2)$  pour une constante  $p \in \mathbb{R}$ . De (4) on a  $p(n+g(y)) = -2$ ,

qui conclut que  $g$  est une fonction constante et  $p \neq 0$  : contradiction

avec le fait que  $g'' = p(1+g'^2)$ .

### 3.4 Classification des surfaces minimales de translation de type II :

**Théorème 3.4.1** : Les seules surfaces minimales de translation de type II dans l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^3$  sont les surfaces totalement géodésiques et les plans.

**Preuve.**

□

Si la surface est minimale, c'est-à-dire  $H = 0$  sur  $\Sigma$ , nous avons à partir de (1) :

$$-z \left[ \frac{1(1+g'^2)f'' + (1+f'^2)g''}{2(1+f'^2+g'^2)^{\frac{3}{2}}} \right] + \frac{g'}{\sqrt{1+f'^2+g'^2}} = 0. \quad (3)$$

Nous écrivons l'équation (3) sous forme suivant notée (4) :

$$\begin{aligned} z \left[ \frac{1(1+g'^2)f'' + (1+f'^2)g''}{2(1+f'^2+g'^2)^{\frac{3}{2}}} \right] &= \frac{g'}{\sqrt{1+f'^2+g'^2}} \\ z [(1+g'^2)f'' + (1+f'^2)g''] &= \frac{2g'(1+f'^2+g'^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1+f'^2+g'^2}} \\ z \left( \frac{f''}{(1+f'^2)} + \frac{g''}{(1+g'^2)} \right) &= 2g' \frac{1+f'^2+g'^2}{(1+f'^2)(1+g'^2)}. \end{aligned} \quad (4)$$

On dérive l'équation (4) par rapport  $x$  notée (5) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( z \frac{f''}{(1+f'^2)} + \frac{g''}{(1+g'^2)} \right) \right] &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ 2g' \frac{1+f'^2+g'^2}{(1+f'^2)(1+g'^2)} \right] \\ z \left( \frac{f''}{1+f'^2} \right)' &= -4 \frac{f'f''}{(1+f'^2)^2} \frac{g'^3}{1+g'^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

On pose  $a = \frac{g'^3}{z(1+g'^2)}$ , donc l'équation (5) donnée :

$$\left( \frac{f''}{1+f'^2} \right)' = -4a \frac{f'f''}{(1+f'^2)^2} \quad (6)$$

Si  $a = 0$ , Alors  $g(y) = p$  ( $g$  est une fonction constante),  $f(x) = mx + n$ ,  $n, m \in \mathbb{R}$ .  
Donc la surface peut paramétrer comme

$$X(x, y) = (x, mx + n + p, z), \quad (x, z) \in U$$

Cette surface est un plan euclidien vertical, et la surface est un plan totalement géodésique.  
Ceci fait partie de la déclaration de Théorème (2).

A partir de maintenant, nous supposons que  $a \neq 0$  en (6) et nous arriverons à une contradiction. Dans

en particulier,  $g' \neq 0$  et

$$g'^3 - azg'^2 - az = 0 \quad (7)$$

On intégrer l'équation (6) peut l'obtention

$$\frac{f''}{1 + f'^2} = 2a \frac{1}{1 + f'^2} + b, \quad b \in \mathbb{R}$$

En écrit :

$$az = \frac{g'^3}{(1 + g'^2)} \Leftrightarrow g'^3 = az + azg'^2 \quad (**)$$

On dérivée l'équation(\*\*)

$$\begin{aligned} (**) &\Leftrightarrow 3g''g'^2 = a[1 + 2zg'g'' + g'^2] \\ &\Leftrightarrow g''(3g'^2 - 2azg') = a(1 + g'^2) \\ &\Leftrightarrow g'' = \frac{a(1 + g'^2)}{g'(3g'^2 - 2az)} \end{aligned} \quad (8)$$

Observons que  $3g' - 2az \neq 0$  puisque  $a \neq 0$ . En revenant à (4), nous avons

$$z \left( b + 2a \frac{1}{1 + f'^2} + a \frac{1}{g'(3g'^2 - 2az)} \right) = 2g' \frac{1 + f'^2 + g'^2}{(1 + f'^2)(1 + g'^2)}$$

Nous utilisons de nouveau la deuxième équation de (8), obtenant

$$g' \left( (3bg'^3 - 2azbg'^2) + ag' \right) = 2ag'(3g' - 2az) \Leftrightarrow (3bg'^3 - 2azbg'^2) + ag' = 2a(3g' - 2az) \quad (***)$$

On divise l'équation (\*\*\*) sur  $g'$  :

$$\frac{bg' \left( 3g'^3 - 2azg'^2 \right) + ag'}{g'} = \frac{2ag'(3g' - 2az)}{g'} \Leftrightarrow 3bg'^3 - 2azbg'^2 - 5ag' + 4a^2z = 0. \quad (9)$$

Nous supposons d'abord  $b = 0$ . Alors  $-5g' + 4a^2z = 0 \implies g' = \frac{4az}{5}$ . En mettant (7), nous obtenons le polynôme

suisant :  $g'^3 = \frac{64a^3z^3}{125}$  et  $g'^2 = \frac{16a^2z^2}{25}$

$$-\frac{16}{125}a^3z^3 - az = 0$$

$$a \left( -\frac{16}{125} a^2 z^3 - z \right) = 0 \quad (*)$$

donc la solution de l'équation (\*) :  $a = 0$  et  $a = \pm \frac{125}{16z^2}$ .

Cela conduit à une contradiction.

Ainsi, nous supposons  $b \neq 0$  dans (11). Définissez  $X = g'$  dans l'équation (7) et (8)

$$X^3 - azX^2 + az = 0 \quad (\#)$$

$$3bX^3 - 2abzX^2 - 5ag' + 4a^2z = 0 \quad (\#)$$

De l'équation #, nous trouvons

$$(\#) \implies X^3 = az + azX^2$$

En remplace dans (8) :

$$3b(az + azX^2) - 2abzX^2 - 5aX + 4a^2z = 0 \iff abzX^2 + 3abz + 4a^2z - 5aX = 0. \quad (111)$$

On divise l'équation (111) sur  $a$  :

$$bzX^2 + 3bz + 4az - 5X = 0. \quad (10)$$

Dans l'équation (#) on a :

$$(\#) \implies az = X^3 - azX^2 \quad (112)$$

En remplace dans (8), on obtient :

$$bX^3 - 5aX + 4a^2z + 2abz = 0. \quad (11)$$

Nous multiplions l'équation (10) en  $X$  :

$$bX^3 - 5X^2 + 4azX + 3bzX = 0 \quad (113)$$

Et multiplie l'équation (11) en  $-z$ , on obtient :

$$-bzX^3 - 5zaX - 4a^2z^2 - 2abz^2 = 0. \quad (114)$$

En combinant (113) et (114), nous concluons  $\begin{cases} bX^3 - 5X^2 + 4azX + 3bzX = 0 \\ -bzX^3 - 5zaX - 4a^2z^2 - 2abz^2 = 0 \end{cases}$

Par conséquent,

$$-5X^2 + 3z(3a + b)X - 2az^2(2a + b) \quad (12)$$

Dans (10) on a

$$(10) \implies X^2 = \frac{-3bz - 4az + 5X}{bz}.$$

En remplace dans (12), on obtien

$$-5 \left( \frac{-3bz - 4az + 5X}{bz} \right) + \frac{3z^2b(3a + b)X}{bz} - \frac{2abz^3(2a + b)}{bz} = 0$$

Donc

$$X = \frac{(-20a - 15b + 4a^2bz^2 + 2ab^2z^2)z}{(9a + 3b)bz^2 - 25}$$

En remplaçant cette expression de  $X$  dans (10), on obtient une équation polynomiale sur  $z$ , à savoir,

$$4a^2b^3(2a + b)^2z^7 - b^2(16a^3 - 109a^2b - 108ab^2 - 27b^3)z^5 - 125ab^2z^3 = 0$$

et  $z$  dans  $\mathbb{R}$ . Ceci implique  $a = b = 0$ . contradiction.

## CONCLUSION

Le but de ce travail est de classifier et de discuter l'existence des surfaces minimales de translation dans l'espace  $\mathbb{H}^3$ , dans les deux types de surfaces de translation et on a confirmé qu'il n'y a pas des surfaces minimales de translation de type *I* dans l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^3$ , et les seules surfaces minimales de translation de type *II* dans l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^3$  sont les surfaces totalement géodésiques et les plans.

# Bibliographie

- [1] M.T. Anderson, Complete minimal varieties in hyperbolic space. *Invent. Math.* **69**, 477–494 (1982)
- [2] F. Dillen, W. Goemans and I. Van de Woestyne, Translation surfaces of Weingarten type in 3-space. *Bull. Transilv. Univ. Brasov.* **15**, 109–122 (2008).
- [3] F. Dillen, I. Vande Woestyne, L. Verstraelen and J. Walrave, The surface of Scherk in  $E^3$ . A special case in the class of minimal surfaces defined as the sum of two curves. *Bull. Inst. Math. Acad. Sin.* **26**, 257–267 (1998).
- [4] F. Dillen, L. Verstraelen and G. Zafindratafa, A generalization of the translation surfaces of Scherk. In : *Differential geometry in honor of Radu Rosca*, K.U.L., pp. 107–109 (1991).
- [5] B. Guan, J. Spruck, Hypersurfaces of constant mean curvature in hyperbolic space with prescribed asymptotic boundary at infinity. *Am. J. Math.* **122**, 1039–1060 (2000).
- [6] F.H. Lin, On the Dirichlet problem for minimal graphs in hyperbolic space. *Invent. Math.* **96**, 593–612 (1989).
- [7] H. Liu, Translation surfaces with constant mean curvature in 3-dimensional spaces. *J. Geom.* **64**, 141–149 (1999).
- [8] R. López, Minimal translation surfaces in hyperbolic space, *Beitr Algebra Geom*, Volume 52, Issue 1, pp 105–112, April (2011).
- [9] R. Sa Earp and E. Toubiana, Existence and uniqueness of minimal graphs in hyperbolic space. *Asian J. Math.* **4**, 669–694 (2000).