REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM
FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

THESE

DE DOCTORAT LMD

Option

Analyse Fonctionnelle

Intitulée

Etude de la croissance et de la distribution des valeurs des solutions de certaines équations différentielles complexes

Présentée par Amina FERRAOUN

Soutenue le 22 Juin 2016, devant le jury composé de

Président : Dr MEDEGHRI Ahmed (Professeur à l'université de Mostaganem).

Examinateur : Dr BENDOUKHA Berrabah (Professeur au Centre Universitaire de Naama).

Examinateur : Dr SENOUCI Abdelkader (Professeur à l'université de Tiaret).

Examinateur : Dr HAMOUDA Saada (Professeur à l'université de Mostaganem).

Examinateur : Dr AZIZ Hamani Karima (Maître de Conférences A à l'université de Mostaganem).

Encadreur : Dr BELAÏDI Benharrat (Professeur à l'université de Mostaganem).

Remerciements

On dit souvent que le trajet est aussi important que la destination. Les huit années de maîtrise m'ont permis de bien comprendre la signification de cette phrase toute simple. Ce parcours, en effet, ne s'est pas réalisé sans défis et sans soulever de nombreuses questions pour lesquelles les réponses nécessitent de longues heures de travail.

Je tiens à la fin de ce travail à remercier ALLAH le tout puissant de m'avoir donné la foi et de m'avoir permis d'en arriver là.

Je remercie infiniment le professeur Benharrat BELAÏDI, mon directeur de thèse dont la disponibilité, le savoir faire et le soutien ne m'ont jamais fait défaut et pour la confiance qu'il m'a accordée.

Je remercie aussi Monsieur MEDEGHRI Ahmed, Professeur à l'université de Mostaganem, qui me fera l'honneur de présider le jury d'examination de cette thèse.

Je remercie avec autant de ferveur les examinateurs : BENDOUKHA Berrabah, Professeur au Centre Universitaire de Naama, SENOUCI Abdelkader, Professeur à l'université de Tiaret, HAMOUDA Saada, Professeur à l'université de Mostaganem et AZIZ Hamani Karima, Maître de Conférences A à l'université de Mostaganem qui ont bien voulu accepter d'examiner ce travail.

Mes remerciements vont également à mes chers parents et mes chères soeurs.

Table des matières

INTRODUCTION

Les origines de la théorie de la distribution des valeurs des fonctions méromorphes remontent aux théorèmes classiques de Sokhotskii-Casorati (1868), Weierstrass (1876) et Picard (1879). Ce dernier a établi le fameux résultat "une fonction entière transcendante prend tout nombre complexe comme valeur, sauf peut-être un", puis Hadamard (1893), Borel (1897) et Blumenthal (1910) ont essayé d'entraîner une description quantitative et étendre le résultat de Picard aux fonctions méromorphes. C'était R. Nevanlinna, qui a obtenu une telle tentative en (1925) en établissant la théorie de la distribution des valeurs des fonctions méromorphes qui a été salué par H. Weyl (1943) comme «l'un des rares grands événements mathématiques de notre siècle».

Depuis une trentaine d'années, cette théorie est devenue un outil indispensable dans l'étude des propriétés des solutions des équations différentielles complexes, en particulier la croissance et l'oscillation des solutions. Plusieurs groupes actifs de mathématiciens dans des pays différents ont joué un rôle remarquable dans ce domaine tels que : S. Bank [1], I. Laine [45], Z. X. Chen [14-19], G. G. Gundersen [27, 28] et B. Belaïdi [3-7]. Des résultats importants ont été établis.

Cette thèse est composée d'une introduction et de cinq chapitres.

Le premier chapitre est un ensemble de définitions, des résultats et quelques notions préliminaires de la théorie de R. Nevanlinna dont on aura besoin dans les chapitres suivants.

Dans le deuxième chapitre, on s'intéresse à l'étude de la croissance des solutions des équations différentielles linéaires non homogènes d'ordre supérieur à coefficients fonctions entières dont le coefficient dominant admet un ordre inférieur $< \frac{1}{2}$. Nous améliorons quelques résultats de L. Wang et H. Liu [55], et nous obtenons l'estimation de l'hyper ordre et l'hyper exposant de convergence des zéros et des zéros distincts des ces solutions.

Dans le troisième chapitre, on étudie la croissance des solutions des équations différentielles linéaires

$$A_k(z)f^{(k)} + A_{k-1}(z)f^{(k-1)} + \cdots + A_1(z)f' + A_0(z)f = 0, \tag{1}$$

et

$$A_k(z)f^{(k)} + A_{k-1}(z)f^{(k-1)} + \cdots + A_1(z)f' + A_0(z)f = F(z), \tag{2}$$

avec $A_j(z)$ $(j = 0, 1, \cdots, k)$ et $F(z)$ des fonctions entières d'ordre p-itératif fini et le coefficient dominant $A_s(z)$ $(s \in \{0, 1, \cdots, k\})$ est une série Lacunaire, nous améliorons les résultats de J. Tu, H. Y. Xu, H. M. Liu et Y. Liu [52], S. Z. Wu et X. M. Zheng [56].

Dans le quatrième chapitre, on s'intéresse à l'étude de la croissance des solutions des équations (1) et (2) et on généralise les résultats du chapitre précédent à l'ordre (p, q) des solutions. On essaye d'améliorer les résultats de L. M. Li et T. B. Cao [46], W. P. Huang, J. L. Zhou, J. Tu et J. H. Ning [37], J. Tu, H. Y. Xu, H. M. Liu et Y. Liu [52], M. L. Zhan et X. M. Zheng [61], S. Z. Wu et X. M. Zheng [56], et nous obtenons des estimations précises de l'ordre $(p+1, q)$ des solutions ainsi l'exposant de convergence des zéros et des zéros distincts.

Dans le cinquième chapitre, on étudie la croissance des solutions de l'équation différentielle linéaire

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z)f^{(k-1)} + \cdots + A_1(z)f' + A_0(z)f = 0, \tag{3}$$

où $A_j(z)$ $(j = 0, 1, \cdots, k-1)$ sont des fonctions entières et méromorphes. On obtient des résultats lorsque les coefficients sont d'ordre zéro, en utilisant les travaux de Chern [20] sur l'ordre logarithmique et on améliore les résultats de W. P. Huang, J. L. Zhou, J. Tu et J. H. Ning [37] et T. B. Cao, K. Liu et J. Wang [11] en utilisant la notion de l'ordre logarithmique inférieur. On étudie aussi les points fixes des solutions de l'équation (3).

Chapitre 1

Eléments de la théorie de R. Nevanlinna

On va citer quelques définitions, notations et résultats dont on aura besoin par la suite, (voir W. K. Hayman [30] et I. Laine [45]).

1.1 Fonction caractéristique de R. Nevanlinna

Théorème 1.1.1 (Formule de Jensen) ([30, 45]) *Soit f une fonction méromorphe telle que $f(0) \neq 0, \infty$ et $a_1, a_2, \cdots$ (respectivement $b_1, b_2, \cdots$) ses zéros (respectivement ses pôles), chacun étant compté avec son ordre de multiplicité. Alors*

$$\log\ |f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\ \left|f(re^{i\varphi})\right| d\varphi + \sum_{|b_j|<r} \log \frac{r}{|b_j|} - \sum_{|a_j|<r} \log \frac{r}{|a_j|}.$$

Preuve. On démontre le théorème dans le cas où f ne possède ni zéros ni pôles sur le cercle $|z| = r$. Considérons la fonction

$$g(z) = f(z) \prod_{|a_j|<r} \frac{r^2 - \overline{a_j}z}{r(z - a_j)} / \prod_{|b_j|<r} \frac{r^2 - \overline{b_j}z}{r(z - b_j)}.$$

Alors $g \not\equiv 0, \infty$ dans le disque $|z| < r$ et $\log\ |g(z)|$ est une fonction harmonique. D'après la formule de la moyenne d'une fonction harmonique, on a

$$\log\ |g(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\ \left|g(re^{i\varphi})\right| d\varphi. \tag{1.1.1}$$

D'autre part,

$$|g(0)| = |f(0)| \prod_{|a_j|<r} \frac{r}{|a_j|} / \prod_{|b_j|<r} \frac{r}{|b_j|},$$

d'où

$$\log|g(0)| = \log|f(0)| + \sum_{|a_j|<r} \log\frac{r}{|a_j|} - \sum_{|b_j|<r} \log\frac{r}{|b_j|}. \tag{1.1.2}$$

Pour $z = re^{i\varphi}$, on a

$$\left|\frac{r^2 - \overline{a_j}z}{r(z-a_j)}\right| = \left|\frac{r^2 - \overline{a_j}re^{i\varphi}}{r(re^{i\varphi}-a_j)}\right| = 1$$

et

$$\left|\frac{r^2 - \overline{b_j}z}{r(z-b_j)}\right| = \left|\frac{r^2 - \overline{b_j}re^{i\varphi}}{r(re^{i\varphi}-b_j)}\right| = 1.$$

D'où $|g(re^{i\varphi})| = |f(re^{i\varphi})|$. De (1.1.1) et (1.1.2), on obtient la formule de Jensen.

Définition 1.1.1 ([30, 45]) Pour tout réel $x > 0$, on définit

$$\log^+ x = \max(\log x, 0) = \begin{cases} \log x, & \text{si } x > 1, \\ 0, & \text{si } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Lemme 1.1.1 ([30, 45]) *On a les inégalités suivantes*

(a) $\log x \leq \log^+ x$.

(b) $\log^+ x \leq \log^+ y$ (si $0 < x \leq y$).

(c) $\log x = \log^+ x - \log^+ \frac{1}{x}$.

(d) $|\log x| = \log^+ x + \log^+ \frac{1}{x}$.

(e) $\log^+(\prod_{i=1}^{n} x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \log^+ x_i$.

(f) $\log^+(\sum_{i=1}^{n} x_i) \leq \log n + \sum_{i=1}^{n} \log^+ x_i$.

Preuve. Montrons (c)-(f).

(c) On a

$$\begin{aligned} \log^+ x - \log^+ \frac{1}{x} &= \max\{\log x, 0\} - \max\{\log\frac{1}{x}, 0\} \\ &= \max\{\log x, 0\} + \min\{-\log\frac{1}{x}, 0\} \\ &= \log x. \end{aligned}$$

(d) On a

$$\begin{aligned} \log^+ x + \log^+ \frac{1}{x} &= \max\{\log x, 0\} + \max\{\log\frac{1}{x}, 0\} \\ &= \max\{\log x, 0\} + \max\{-\log x, 0\} \\ &= \max\{\log x, 0\} - \min\{\log x, 0\} \\ &= |\log x| . \end{aligned}$$

(e) Si $\prod_{i=1}^{n} x_i \leq 1$, alors l'inégalité est triviale. Supposons que $\prod_{i=1}^{n} x_i > 1$. Alors

$$\begin{aligned}\log^+(\prod_{i=1}^{n} x_i) &= \log(\prod_{i=1}^{n} x_i)\\ &= \sum_{i=1}^{n} \log x_i\\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \log^+ x_i;\ \text{d'après (a).}\end{aligned}$$

(f) On a d'après (b) et (e)

$$\begin{aligned}\log^+(\sum_{i=1}^{n} x_i) &\leq \log^+(n \max_{1\leq i\leq n} x_i)\\ &\leq \log n + \log^+(\max_{1\leq i\leq n} x_i)\\ &\leq \log n + \sum_{i=1}^{n} \log^+ x_i.\end{aligned}$$

Définition 1.1.2 (Fonction a-points) ([30, 45]) Soit f une fonction méromorphe. Pour tout nombre complexe a, on désigne par $n(t,a,f)$ le nombre de racines de l'équation $f(z) = a$ situées dans le disque $|z| \leq t$. Chaque racine étant comptée un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité et par $n(t,\infty,f)$ le nombre de pôles de la fonction f dans le disque $|z| \leq t$. Posons

$$N(r,a,f) = \int_0^r \frac{n(t,a,f) - n(0,a,f)}{t} dt + n(0,a,f)\log r,\ \ a \neq \infty$$

et

$$N(r,\infty,f) = N(r,f) = \int_0^r \frac{n(t,\infty,f) - n(0,\infty,f)}{t} dt + n(0,\infty,f)\log r.$$

$N(r,a,f)$ est appelée fonction $a-$points de la fonction f dans le disque $|z| \leq r$.

Lemme 1.1.2 ([30, 45]) *Soit f une fonction méromorphe avec $a-$points $a_1, a_2, \cdots, a_n$ dans le disque $|z| \leq r$ tel que $0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \cdots \leq |a_n| \leq r$, chacun étant compté avec son ordre de multiplicité. Alors*

$$\int_0^r \frac{n(t,a,f)}{t} dt = \int_0^r \frac{n(t,a,f) - n(0,a,f)}{t} dt = \sum_{0<|a_j|\leq r} \log \frac{r}{|a_j|}.$$

Preuve. Posons $|a_j| = r_i$ $(i = 1, \cdots, n)$. Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{0<|a_j|\leq r} \log \frac{r}{|a_j|} &= \sum_{i=1}^{n} \log \frac{r}{r_i} = \log \frac{r}{r_1 r_2 \cdots r_n} = n \log r - \sum_{i=1}^{n} \log r_i \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} i(\log r_{i+1} - \log r_i) + n(\log r - \log r_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} i \int_{r_i}^{r_{i+1}} \frac{dt}{t} + n \int_{r_n}^{r} \frac{dt}{t} \\
&= \int_0^r \frac{n(t, a, f)}{t} dt.
\end{aligned}$$

Proposition 1.1.1 ([30, 45]) *Soit f une fonction méromorphe avec le développement de Laurent à l'origine*

$$f(z) = \sum_{i=m}^{\infty} c_i z^i, \ \ c_m \neq 0, \ \ m \in \mathbb{Z}.$$

Alors

$$\log|c_m| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log\left|f(re^{i\theta})\right| d\theta + N(r, f) - N(r, \frac{1}{f}).$$

Preuve. Définissons la fonction h par

$$h(z) = f(z) z^{-m}.$$

Il est clair que $m = n(0, 0, f) - n(0, \infty, f)$ et $h(0) \neq 0, \infty$. En effet, si $m > 0$, alors $n(0, \infty, f) = 0$ et $m = n(0, 0, f)$; si $m < 0$, alors $n(0, \infty, f) = -m$ et $n(0, 0, f) = 0$; et finalement si $m = 0$, alors $n(0, 0, f) = n(0, \infty, f) = 0$. Donc les fonctions h et f ont les mêmes pôles et les mêmes zéros dans $0 < |z| \leq r$. La formule de Jensen et le Lemme 1.1.2 impliquent

$$\begin{aligned}
\log|c_m| &= \log|h(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log\left|f(re^{i\varphi}) r^{-m}\right| d\varphi + \sum_{|b_j|<r} \log \frac{r}{|b_j|} - \sum_{|a_j|<r} \log \frac{r}{|a_j|} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log\left|f(re^{i\varphi})\right| d\varphi - (n(0, 0, f) - n(0, \infty, f)) \log r \\
&\quad + \int_0^r \frac{n(t, \infty, f) - n(0, \infty, f)}{t} dt - \int_0^r \frac{n(t, 0, f) - n(0, 0, f)}{t} dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log\left|f(re^{i\varphi})\right| d\varphi + N(r, f) - N(r, \frac{1}{f}).
\end{aligned}$$

Définition 1.1.3 (Fonction de proximité) ([30, 45]) Soit f une fonction méromorphe non constante et a un nombre complexe. Alors, on définit la fonction de proximité de la fonction f par

$$m(r,a,f) = m(r, \frac{1}{f-a}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta})-a|} d\theta,\ a \neq \infty$$

et

$$m(r,\infty,f) = m(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \left|f(re^{i\theta})\right| d\theta.$$

Définition 1.1.4 (Fonction caractéristique) ([30, 45]) On définit la fonction caractéristique de R. Nevanlinna de la fonction f par

$$T(r,\infty,f) = T(r,f) = m(r,f) + N(r,f).$$

Exemple 1.1.1 Pour la fonction $f(z) = e^{-z}$, nous avons $n(t,f) = 0$ car f n'admet pas des pôles, par conséquent

$$N(r,f) = 0.$$

De plus

$$\begin{aligned} m(r,f) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log^+ \left|e^{-r\cos\theta}\right| d\theta \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \log^+ \left|e^{-r\cos\theta}\right| d\theta \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-r\cos\theta) d\theta \\ &= \frac{r}{\pi}. \end{aligned}$$

Donc

$$T(r,f) = m(r,f) + N(r,f) = \frac{r}{\pi}.$$

1.2 Premier théorème fondamental de R. Nevanlinna

Théorème 1.2.1 ([30, 45]) *Soit f une fonction méromorphe et $a \in \mathbb{C}$ avec le développement de Laurent de $f(z) - a$ à l'origine*

$$f(z) - a = \sum_{i=m}^{\infty} c_i z^i, \ c_m \neq 0, \ m \in \mathbb{Z}, \ a \in \mathbb{C}.$$

Alors

$$T(r, \frac{1}{f-a}) = T(r, f) - \log|c_m| + \varphi(r, a),$$

où

$$|\varphi(r, a)| \leq \log^+|a| + \log 2.$$

Preuve. Si $a = 0$, alors d'après le Lemme 1.1.1 (c) et la Proposition 1.1.1, on a

$$\log|c_m| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+\left|f(re^{i\varphi})\right| d\varphi - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\varphi})|} d\varphi + N(r, f) - N(r, \frac{1}{f})$$

et

$$\log|c_m| = m(r, f) - m(r, \frac{1}{f}) + N(r, f) - N(r, \frac{1}{f}),$$

donc

$$m(r, \frac{1}{f}) - N(r, \frac{1}{f}) = m(r, f) + N(r, f) - \log|c_m|.$$

D'où

$$T(r, \frac{1}{f}) = T(r, f) - \log|c_m| \text{ où } \varphi(r, 0) = 0. \tag{1.2.1}$$

Montrons le cas général $a \neq 0$. Posons $h = f - a$. Alors

$$N(r, \frac{1}{h}) = N(r, \frac{1}{f-a}), \ N(r, h) = N(r, f)$$

et

$$m(r, \frac{1}{h}) = m(r, \frac{1}{f-a}).$$

De plus

$$\log^+|h| = \log^+|f-a| \leq \log^+|f| + \log^+|a| + \log^+ 2,$$

$$\log^+|f| = \log^+|f-a+a| = \log^+|h+a| \leq \log^+|h| + \log^+|a| + \log^+ 2.$$

En intégrant ces deux inégalités, on trouve que

$$m(r,h) \leq m(r,f) + \log^+|a| + \log^+ 2,$$

$$m(r,f) \leq m(r,h) + \log^+|a| + \log^+ 2.$$

Posons

$$\varphi(r,a) = m(r,h) - m(r,f).$$

Alors

$$|\varphi(r,a)| \leq \log^+|a| + \log^+ 2.$$

En appliquant (1.2.1) pour h, on aura

$$\begin{aligned} T(r,\frac{1}{h}) &= m(r,\frac{1}{h}) + N(r,\frac{1}{h}) \\ &= m(r,h) + N(r,h) - \log|c_m| \\ &= m(r,f) + N(r,f) + \varphi(r,a) - \log|c_m| \\ &= T(r,f) + \varphi(r,a) - \log|c_m|. \end{aligned}$$

Remarque 1.1.1 Le premier théorème fondamental peut être formulé comme suit

$$T(r,\frac{1}{f-a}) = T(r,f) + O(1),$$

pour tout nombre complexe $a \neq \infty$.

Proposition 1.2.1 ([30, 45]) *Soient f, f_1, $f_2, \cdots, f_n$ des fonctions méromorphes et $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ telles que $ad - bc \neq 0$. Alors*
1) $T(r, \prod_{i=1}^{n} f_i) \leq \sum_{i=1}^{n} T(r, f_i)$, $(n \geq 1)$.
2) $T(r, f^n) = nT(r,f)$, $(n \in \mathbb{N})$.
3) $T(r, \sum_{i=1}^{n} f_i) \leq \sum_{i=1}^{n} T(r, f_i) + \log n$.
4) $T(r, \frac{af+b}{cf+d}) = T(r,f) + O(1)$; $f \not\equiv -\frac{d}{c}$.

Preuve. 1) On a

$$m(r, \prod_{i=1}^{n} f_i) \leq \sum_{i=1}^{n} m(r, f_i)$$

et

$$N(r, \prod_{i=1}^{n} f_i) \leq \sum_{i=1}^{n} N(r, f_i),$$

donc

$$T(r, \prod_{i=1}^{n} f_i) = m(r, \prod_{i=1}^{n} f_i) + N(r, \prod_{i=1}^{n} f_i) \leq \sum_{i=1}^{n} m(r, f_i) + \sum_{i=1}^{n} N(r, f_i) \leq \sum_{i=1}^{n} T(r, f_i).$$

2) On a $|f^n| = |f|^n \leq 1$ équivaut à $|f| \leq 1$. Si $|f| \leq 1$, alors $m(r, f^n) = 0$ et $N(r, f^n) = nN(r, f)$. Donc

$$T(r, f^n) = N(r, f^n) = nN(r, f) = n(N(r, f) + m(r, f)) = nT(r, f).$$

Si $|f| > 1$, alors

$$\begin{aligned} T(r, f^n) &= m(r, f^n) + N(r, f^n) \\ &= nm(r, f) + nN(r, f) \\ &= nT(r, f). \end{aligned}$$

3) On a

$$\begin{aligned} T(r, \sum_{i=1}^{n} f_i) &\leq N(r, \sum_{i=1}^{n} f_i) + m(r, \sum_{i=1}^{n} f_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} N(r, f_i) + \sum_{i=1}^{n} m(r, f_i) + \log n \\ &= \sum_{i=1}^{n} T(r, f_i) + \log n. \end{aligned}$$

4) Si $c = 0$, alors

$$\begin{aligned} T(r, \frac{af + b}{d}) &= T(r, \frac{a}{d}f + \frac{b}{d}) \\ &= T(r, \frac{a}{d}f) + O(1) \\ &= T(r, f) + O(1). \end{aligned}$$

Si $c \neq 0$, alors on écrit

$$\begin{aligned} \frac{af + b}{cf + d} &= \frac{a(f + \frac{b}{a})}{c(f + \frac{d}{c})} = \frac{a}{c} \frac{f + \frac{d}{c} + \frac{b}{a} - \frac{d}{c}}{f + \frac{d}{c}} \\ &= \frac{a}{c} \left[1 + \frac{bc - ad}{ac} \frac{1}{f + \frac{d}{c}} \right] \\ &= \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2} \frac{1}{f + \frac{d}{c}}. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
T(r,\frac{af+b}{cf+d}) &= T(r,\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c^2}\frac{1}{f+\frac{d}{c}}) \\
&= T(r,\frac{bc-ad}{c^2}\frac{1}{f+\frac{d}{c}})+O\,(1) \\
&= T(r,\frac{1}{f+\frac{d}{c}})+O(1) \\
&= T(r,f+\frac{d}{c})+O(1) \\
&= T(r,f)+O(1).
\end{aligned}$$

Exemple 1.2.1 Soit $g(z)=\frac{2e^z+3}{5e^z+7}$. Alors

$$\begin{aligned}
T(r,g) &= T(r,\frac{2e^z+3}{5e^z+7}) \\
&= T(r,e^z)+O(1) \\
&= \frac{r}{\pi}+O(1).
\end{aligned}$$

Théorème 1.2.2 [45, 59] *Soit $R(u)$ une fonction rationnelle de degré d et $f(z)$ une fonction méromorphe. Alors*

$$T(r,R(f))=dT(r,f(z))+O(1).$$

Exemple 1.2.2 Soit $f(z)=\cos^2 z$. Alors

$$\begin{aligned}
T(r,f) &= T(r,\cos^2 z) \\
&= 2T(r,\cos z) \\
&= 2[2T(r,e^{iz})+O(1)] \\
&= 2[\frac{2r}{\pi}+O(1)] \\
&= \frac{4r}{\pi}+O(1).
\end{aligned}$$

Lemme 1.2.1 (La dérivée logarithmique) ([30, 60]) Soit f une fonction méromorphe transcendante. Alors

$$m(r,\frac{f'}{f})=S(r,f)=o(T(r,f)),$$

où $S(r,f)=O(\log T(r,f)+\log r)$ à l'extérieur d'un ensemble $E\subset(0,+\infty)$ de mesure linéaire finie.

1.3 La croissance et la distribution des valeurs d'une fonction entière ou méromorphe

1.3.1 L'ordre de croissance et l'hyper-ordre d'une fonction

Définition 1.3.1 ([30, 45, 60]) Soit f est une fonction méromorphe. L'ordre de croissance et l'hyper-ordre de f sont définis respectivement par

$$\sigma(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log T(r,f)}{\log r},$$

$$\sigma_2(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log T(r,f)}{\log r},$$

où $T(r,f)$ est la fonction caractéristique de f. Si f une fonction entière, alors l'ordre de croissance et l'hyper-ordre de f sont définis respectivement par

$$\sigma(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log M(r,f)}{\log r},$$

$$\sigma_2(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log\log M(r,f)}{\log r},$$

où $M(r,f) = \max_{|z|=r} |f(z)|$.

Exemple 1.3.1 La fonction $f(z) = e^{\frac{1}{2}z^2}$est d'ordre $\sigma(f) = 2$ et d'hyper-ordre $\sigma_2(f) = 0$.

Exemple 1.3.2 La fonction $g(z) = \exp(\exp z)$ est d'ordre $\sigma(g) = \infty$ et d'hyper-ordre $\sigma_2(g) = 1$.

Définition 1.3.2 ([30, 60]) Soit f une fonction méromorphe. L'ordre inférieur et l'hyper-ordre inférieur de f sont définis respectivement par

$$\mu(f) = \underline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log T(r,f)}{\log r},$$

$$\mu_2(f) = \underline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log T(r,f)}{\log r}.$$

Si f est une fonction entière , alors l'ordre inférieur et l'hyper-ordre inférieur de f sont définis respectivement par

$$\mu(f) = \underline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log M(r,f)}{\log r},$$

$$\mu_2(f) = \underline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log\log M(r,f)}{\log r}.$$

Exemple 1.3.3 Soit $f(z) = \frac{e^z}{z}$. Alors $\mu(f) = 1$ et $\mu_2(f) = 0$.

1.3.2 L'ordre p-itératif, l'ordre p-itératif inférieur et le type p-itératif d'une fonction

Si l'hyper-ordre d'une fonction entière ou méromorphe est infini, on définit l'ordre p-itératif de cette fonction.

Définition 1.3.3 ([43, 45]) Soit f une fonction méromorphe. L'ordre p-itératif de f est défini par

$$\sigma_p(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log_p T(r,f)}{\log r}.$$

Si f est une fonction entière, alors l'ordre p-itératif de f est défini par

$$\sigma_p(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log_{p+1} M(r,f)}{\log r}.$$

Définition 1.3.4 ([35]) L'ordre p-itératif inférieur d'une fonction entière f est défini par

$$\mu_p(f) = \underline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log_p T(r,f)}{\log r} = \underline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log_{p+1} M(r,f)}{\log r}.$$

Définition 1.3.5 ([3, 12]) Soit f une fonction entière. Alors le type p-itératif de f, avec $0 < \sigma_p(f) < \infty$, est défini par

$$\tau_p(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log_p M(r,f)}{r^{\sigma_p(f)}}.$$

1.3.3 L'ordre (p,q), l'ordre (p,q) inférieur et le type (p,q) d'une fonction

Si l'ordre p-itératif d'une fonction entière ou méromorphe est infini, on définit l'ordre (p,q) de cette fonction. Pour cela, on définit pour $r \in [0,+\infty)$, $\exp_1 r = e^r$ et $\exp_{p+1} r = \exp(\exp_p r)$, $p \in \mathbb{N}$. Pour tout r suffisamment grand, on définit $\log_1 r = \log r$ et $\log_{p+1} r = \log(\log_p r)$, $p \in \mathbb{N}$. On note aussi $\exp_0 r = r = \log_0 r$, $\log_{-1} r = \exp_1 r$ et $\exp_{-1} r = \log_1 r$.

Définition 1.3.6 ([41, 42, 47]) L'ordre (p,q) d'une fonction méromorphe f est définit par

$$\sigma_{(p.q)}(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log_p T(r,f)}{\log_q r}.$$

Si f est une fonction entière, alors

$$\sigma_{(p.q)}(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log_{p+1} M(r,f)}{\log_q r}.$$

Remarque 1.3.1 (i) $\sigma_{(p,1)}(f) := \sigma_p(f)$ est l'ordre p-itératif de f. En particulier, $\sigma_{(1,1)}(f) = \sigma(f)$ et $\sigma_{(2,1)}(f) = \sigma_2(f)$ sont l'ordre et l'hyper-ordre de f, respectivement.
(ii) $\sigma_{(1,2)}(f) = \sigma_{\log}(f)$ est l'ordre logarithmique de f, (voir [20]).
(iii) Il est évident que l'ordre logarithmique de n'importe quelle fonction rationnelle non-constante f est égal à 1, et ainsi, toute fonction méromorphe transcendante dans le plan admet un ordre logarithmique supérieur à 1. Cependant, une fonction d'ordre logarithmique égal à 1 n'est pas nécessairement une fonction rationnelle. De plus, toute fonction méromorphe d'ordre logarithmique fini dans le plan admet un ordre nul.
Exemple 1.3.4 Soit $f(z) = \exp(\exp z)$. Alors, on a

$$M(r, f) = e^{e^r}.$$

D'où

$$\sigma_{(2.1)}(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log_3 M(r, f)}{\log r} = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log\log e^{e^r}}{\log r} = 1.$$

Définition 1.3.7 ([36]) L'ordre (p, q) inférieur d'une fonction méromorphe f est définit par

$$\mu_{(p.q)}(f) = \underline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log_p T(r, f)}{\log_q r}.$$

Si f est une fonction entière, alors

$$\mu_{(p.q)}(f) = \underline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log_{p+1} M(r, f)}{\log_q r}.$$

Remarque 1.3.2 $\mu_{(1,2)}(f) = \mu_{\log}(f)$ est l'ordre logarithmique inférieur de f.

Définition 1.3.8 ([41, 42]) Le type (p, q) d'une fonction méromorphe f avec $0 < \sigma_{(p,q)}(f) < +\infty$ est défini par

$$\tau_{(p.q)}(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log_{p-1} T(r, f)}{(\log_{q-1} r)^{\sigma_{(p,q)}(f)}}.$$

Si f est une fonction entière, alors

$$\tau_{(p.q)}(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log_p M(r, f)}{(\log_{q-1} r)^{\sigma_{(p,q)}(f)}}$$

Définition 1.3.9 ([36]) Le type (p, q) inférieur d'une fonction méromorphe f avec $0 < \mu_{(p,q)}(f) < +\infty$ dans le plan est défini par

$$\underline{\tau}_{(p.q)}(f) = \underline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log_{p-1} T(r, f)}{(\log_{q-1} r)^{\mu_{(p,q)}(f)}}.$$

Si f est une fonction entière, alors

$$\underline{\tau}_{(p.q)}(f) = \underline{\lim}_{r\rightarrow+\infty} \frac{\log_p M(r,f)}{(\log_{q-1} r)^{\mu_{(p,q)}(f)}}$$

Remarque 1.3.3 $\tau_{(1,1)}(f) = \tau(f)$ est le type de f, $\underline{\tau}_{(1,1)}(f) = \underline{\tau}(f)$ est le type inférieur de f, $\tau_{(1,2)}(f) = \tau_{\log}(f)$ est le type logarithmique de f et $\underline{\tau}_{(1,2)}(f)$ est le type logarithmique inférieur de f.

Définition 1.3.10 ([43]) L'indice de croissance de l'ordre $i(f)$ d'une fonction méromorphe f est défini par

$$i(f) = \begin{cases} 0, & \text{si } f \text{ rationnelle,} \\ \min\{j \in \mathbb{N} : \sigma_j(f) < +\infty\}, & \text{si } f \text{ transcendante et } \sigma_j(f) < +\infty \text{ pour } j \in \mathbb{N} \\ +\infty, & \text{si } \sigma_{(j.1)}(f) = +\infty, \text{ pour tout } j \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1.3.4 L'exposant de convergence, l'exposant de convergence p-itératif et le (p,q)-exposant de convergence des zéros d'une fonction

Définition 1.3.11 ([43, 45]) L'exposant et l'hyper exposant de convergence des zéros d'une fonction méromorphe f sont définis respectivement par

$$\lambda(f) = \overline{\lim}_{r\rightarrow+\infty} \frac{\log N(r,\frac{1}{f})}{\log r}, \ \lambda_2(f) = \overline{\lim}_{r\rightarrow+\infty} \frac{\log\log N(r,\frac{1}{f})}{\log r}.$$

L'exposant et l'hyper exposant de convergence des zéros distincts d'une fonction méromorphe f sont définis respectivement par

$$\overline{\lambda}(f) = \overline{\lim}_{r\rightarrow+\infty} \frac{\log \overline{N}(r,\frac{1}{f})}{\log r}, \ \overline{\lambda}_2(f) = \overline{\lim}_{r\rightarrow+\infty} \frac{\log\log \overline{N}(r,\frac{1}{f})}{\log r}.$$

Remarque 1.3.4 L'exposant de convergence des zéros de la fonction $\frac{1}{f}$ est aussi dit exposant de convergence des pôles de la fonction f.

Exemple 1.3.5 L'exposant de convergence de la fonction $f(z) = e^z - 1$ est égal à 1.

Définition 1.3.12 ([43]) L'exposant de convergence p-itératif des zéros d'une fonction f est défini par

$$\lambda_p(f) = \overline{\lim}_{r\rightarrow+\infty} \frac{\log_p N(r,\frac{1}{f})}{\log r}.$$

L'exposant de convergence p-itératif des zéros distincts d'une fonction f est défini par

$$\overline{\lambda}_p(f) = \overline{\lim}_{r\rightarrow+\infty} \frac{\log_p \overline{N}(r,\frac{1}{f})}{\log r}.$$

Définition 1.3.13 ([43]) Le degré de finitude de l'exposant de convergence p-itératif des zéros d'une fonction méromorphe f est défini par

$$i_{\lambda}(f)=\begin{cases}0, & \text{si } n(r,\frac{1}{f})=O(\log r),\\ \min\{j\in\mathbb{N}:\lambda_j(f)<+\infty\}, & \text{si } \lambda_j(f)<+\infty \text{ pour } j\in\mathbb{N},\\ +\infty, & \text{si } \lambda_j(f)=+\infty, \text{ pour tout } j\in\mathbb{N}.\end{cases}$$

Remarque 1.3.5 De même, on peut définir le degré de finitude $i_{\overline{\lambda}}(f)$ de $\overline{\lambda}_p(f)$.

Définition 1.3.14 ([47]) Le (p,q)-exposant de convergence des zéros (resp. des zéros distincts) d'une fonction méromorphe f sont définis respectivement par

$$\lambda_{(p.q)}(f)=\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\log_p N(r,\frac{1}{f})}{\log_q r},$$

et

$$\bar{\lambda}_{(p.q)}(f)=\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\log_p \overline{N}(r,\frac{1}{f})}{\log_q r}.$$

Remarque 1.3.6 $\lambda_{(1,2)}(f):=\lambda_{\log}(f)$ est l'exposant logarithmique de convergence des zéros de f, (voir [20]) et $\overline{\lambda}_{(1,2)}(f)=\overline{\lambda}_{\log}(f)$ est l'exposant logarithmique de convergence des zéros distincts de f.

1.3.5 La mesure linéaire, la mesure logarithmique et la densité des ensembles

Définition 1.3.15 ([18, 19]) La mesure linéaire d'un ensemble $E\subset[0,+\infty)$ est définie par

$$m(E)=\int_0^{+\infty}\chi_E(t)dt,$$

où $\chi_E(t)$ est la fonction caractéristique de l'ensemble E et la mesure logarithmique d'un ensemble $F\subset[1,+\infty)$ est définie par

$$m_l(F)=\int_1^{+\infty}\frac{\chi_F(t)}{t}dt.$$

Exemple 1.3.6 La mesure linéaire de l'ensemble $E=[1,2]\subset[0,+\infty)$ est

$$m(E)=\int_0^{+\infty}\chi_E(t)dt=\int_1^{2}dt=1.$$

La mesure logarithmique de l'ensemble $F = [e, e^4] \subset [1, +\infty)$ est

$$m_l(F) = \int_1^{+\infty} \frac{\chi_F(t)}{t} dt = \int_e^{e^4} \frac{dt}{t} = 3.$$

Définition 1.3.16 ([18, 19]) La densité inférieure et la densité supérieure d'un sous ensemble $H \subset [0, +\infty)$ sont définies respectivement par

$$\underline{dens} H = \varliminf_{r \to +\infty} \frac{\int_0^r \chi_H(t) dt}{r} = \varliminf_{r \to +\infty} \frac{m(H \cap [0, r])}{r},$$

$$\overline{dens} H = \varlimsup_{r \to +\infty} \frac{\int_0^r \chi_H(t) dt}{r} = \varlimsup_{r \to +\infty} \frac{m(H \cap [0, r])}{r}.$$

Exemple 1.3.7 La densité inférieure et la densité supérieure de l'ensemble $E = [1, 2] \subset [0, +\infty)$ sont

$$\overline{dens} E = \underline{dens} E = 0.$$

Définition 1.3.17 ([18, 19]) La densité logarithmique inférieure et la densité logarithmique supérieure d'un sous ensemble $H \subset [0, +\infty)$ sont définies respectivement par

$$\underline{\log dens} H = \varliminf_{r \to +\infty} \frac{m(H \cap [1, r])}{\log r},$$

$$\overline{\log dens} H = \varlimsup_{r \to +\infty} \frac{m(H \cap [1, r])}{\log r}.$$

1.4 Eléments de la théorie de Wiman-Valiron

Définition 1.4.1 (L'indice central) ([45]) Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une fonction entière. Pour tout $r > 0$ la série $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| r^n$ est convergente. D'où $\lim_{n \to +\infty} |a_n| r^n = 0$ et le terme maximal $\mu(r) = \max\{|a_n| r^n; \ n \in \mathbb{N}\}$ est bien défini. On définit l'indice central de la fonction f par

$$\nu_f(r) = \max\{m : \mu(r) = |a_m| r^m\}.$$

Proposition 1.4.1 ([45]) *Soit f une fonction entière d'ordre $\sigma(f)$. Alors*

$$\sigma(f) = \varlimsup_{r \to +\infty} \frac{\log \nu_f(r)}{\log r} = \varlimsup_{r \to +\infty} \frac{\log \log M(r, f)}{\log r}.$$

Proposition 1.4.2 ([18]) *Soit f une fonction entière d'ordre infini et d'hyper-ordre $\sigma_2(f)$. Alors*

$$\sigma_2(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log \nu_f(r)}{\log r} = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log\log M(r,f)}{\log r},$$

où $M(r,f) = \max_{|z|=r} |f(z)|$.

Exemple 1.4.1 Soit $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$, $a_n \neq 0$. Alors $\mu(r) = \max\{|a_j| r^j ; j = 0, \cdots, n\} = |a_n| r^n$, r assez grand, et par conséquent

$$\nu_P(r) = \max\{m : |a_m| r^m = |a_n| r^n\} = n.$$

1.5 Théorème de factorisation de Hadamard

Définition 1.5.1 (Produits canonique) ([45, 60]) Soit f une fonction méromorphe transcendante et soient $z_1, z_2, \cdots$ ses zéros avec $0 < |z_1| \leq |z_2| \leq \cdots$. Soit p l'entier minimal tel que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^{p+1}},$$

converge. On appelle

$$E(u,0) = 1 - u,$$

$$E(u,p) = (1-u)e^{u+\frac{u^2}{2}+\cdots+\frac{u^p}{p}}, \quad p = 1, 2, \cdots$$

des facteurs principaux. Le produit infini

$$P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E(\frac{z}{z_n}, p),$$

converge uniformément dans chaque domaine fini dans $\mathbb{C}$ et par suite $P(z)$ est entier et s'appelle le produit canonique de f formé à partir des zéros de f . L'entier p est appelé le genre du produit canonique.

Théorème 1.5.1 ([60]) *Soit f une fonction méromorphe d'ordre fini $\sigma(f)$ telle que*

$$f(z) = c_k z^k + c_{k+1} z^{k+1} + \cdots, \ (c_k \neq 0),$$

au voisinage de $z = 0$ *et soient* $\{a_1, a_2 \cdots .\}$ *et* $\{b_1, b_2 \cdots .\}$ *les zéros et les pôles de* f *dans* $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, *respectivement. Alors*

$$f(z) = z^k e^{Q(z)} \frac{P_1(z)}{P_2(z)},$$

avec $P_1(z)$ *et* $P_2(z)$ *sont des produits canonique de* f *formés à partir des zéros et des pôles non-nuls de* f *et* $Q(z)$ *est un polynôme de degré* $\leq \sigma(f)$.

Chapitre 2

Estimation de l'hyper-ordre des solutions méromorphes des équations différentielles complexes d'ordre supérieur

2.1 Introduction et résultats

Plusieurs auteurs ont étudié la croissance des solutions de l'équation différentielle linéaire d'ordre supérieur

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z)f^{(k-1)} + \cdots + A_1(z)f' + A_0(z)f = F(z), \tag{2.1.1}$$

où $A_j(z)$ $(j = 0, 1, \cdots, k-1)$, $F(z)(\not\equiv 0)$ sont des fonctions entières (ou fonctions méromorphes) et ils ont obtenu des résultats intéressants, (voir par exemple [6], [7], [12], [34], [45], [54], [55], [62]). Dans [55], Wang, Liu ont étudié les propriétés des solutions de l'équation (2.1.1) quand il existe un coefficient $A_s(z)$ $(0 \leq s \leq k-1)$ vérifiant la condition $\mu(A_s) < \frac{1}{2}$ et ils ont obtenu le résultat suivant.

Théorème A ([55]) *Supposons que $A_0(z), \cdots, A_{k-1}(z)$, $F(z)$ sont des fonctions méromorphes d'ordre fini. S'il existe $s \in \{0, 1, \cdots, k\}$ tel que*

$$b = \max\{\sigma(A_j), (j \neq s), \sigma(F), \lambda(\frac{1}{A_s})\} < \mu(A_s) < \frac{1}{2},$$

alors

(i) *Toute solution méromorphe transcendante $f(z)$, dont les pôles sont de multiplicité uniformément bornée, de (2.1.1) vérifie $\mu(A_s) \leq \sigma_2(f) \leq \sigma(A_s)$. En outre, si $F \not\equiv 0$, alors on a $\mu(A_s) \leq \bar{\lambda}_2(f) = \lambda_2(f) = \sigma_2(f) \leq \sigma(A_s)$.*

(ii) *Si* $s \geq 2$, *alors toute solution méromorphe non transcendante* $f(z)$ *de* (2.1.1) *est un polynôme de degré* $\deg f \leq s-1$. *Si* $s = 0$ *ou* 1, *alors toute solution non constante* (2.1.1) *est transcendante.*

Quand $F(z)$ est d'ordre infini, Wang, Liu ont considéré l'équation différentielle linéaire

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z)f^{(k-1)} + \cdots + A_1(z)f' + A_0(z)f = Qe^P, \tag{2.1.2}$$

où $A_j(z)$ $(j = 0, 1, \cdots, k-1)$, $Q(z)(\not\equiv 0)$ sont des fonctions entières et P est une fonction entière transcendante et ils ont obtenu le résultat suivant.

Théorème B ([55]) *Supposons que* $A_0(z), \cdots, A_{k-1}(z)$, $Q(z)(\not\equiv 0)$ *sont des fonctions méromorphes d'ordre fini,* P *est une fonction entière transcendante telle que*

$$\max\{\sigma(P), \sigma(Q), \sigma(A_j), (1 \leq j \leq k), \lambda(\frac{1}{A_0})\} < \mu(A_0) < \frac{1}{2}.$$

Alors toute solution $f(z)$ *de* (2.1.2) *est transcendante, et toute solution méromorphe* $f(z)$*, dont les pôles sont de multiplicité uniformément bornée, de* (2.1.2) *vérifie* $\mu(A_0) \leq \bar{\lambda}_2(f) = \lambda_2(f) = \sigma_2(f) \leq \sigma(A_0)$.

Pour $k \geq 2$, on considère l'équation différentielle linéaire

$$A_k(z)f^{(k)} + A_{k-1}(z)f^{(k-1)} + \cdots + A_1(z)f' + A_0(z)f = F(z), \tag{2.1.3}$$

où $A_j(z), (j = 0, 1, \cdots, k), F(z)$ sont des fonctions entières telles que $A_0(z)A_k(z)F(z) \not\equiv 0$. Il est connu que si $A_k(z) \equiv 1$, alors toutes les solutions de (2.1.3) sont des fonctions entières, mais quand $A_k(z)$ est une fonction entière non constante, alors l'équation (2.1.3) peut avoir des solutions méromorphes. Par exemple l'équation

$$zf''' + 4f'' + \left(-1 - \frac{1}{2}z^2 - z\right)e^{-z}f' + \left(\left(1 - \frac{1}{2}z^2 + 2z\right)e^{-2z} + ze^{-3z}\right)f$$
$$= \left(-1 - \frac{1}{2}z^2 - z\right)e^{-z} + \left(z - \frac{1}{2}z^3 + 2z^2\right)e^{-2z} + z^2e^{-3z}$$

admet une solution méromorphe $f(z) = \frac{1}{z^2}e^{e^{-z}} + z$. D'après les résultats des deux théorèmes précédents, on pose la question : peut-on avoir les mêmes propriétés que dans le Théorème A pour l'équation différentielle linéaire (2.1.3) s'il existe un coefficient $A_s(z)$ $(0 \leq s \leq k)$ sous la condition $\mu(A_s) < \frac{1}{2}$? et deuxièmement, qu'est-ce qu'on peut dire sur la croissance des solutions méromorphes de l'équation différentielle linéaire

$$A_k(z)f^{(k)} + A_{k-1}(z)f^{(k-1)} + \cdots + A_1(z)f' + A_0(z)f = Qe^P, \tag{2.1.4}$$

lorsque $A_j(z), (j = 0, 1, \cdots, k)$, $Q(z)(\not\equiv 0)$ sont des fonctions entières et P est une fonction entière transcendante ?

Dans ce chapitre, nous répondons à ces questions en généralisant les résultats précédents dans les théorèmes suivants.

Théorème 2.1.1 ([21]) *Supposons que* $A_0(z), \cdots, A_k(z)$, $F(z)$ *sont des fonctions entières d'ordre fini. S'il existe* $s \in \{0, 1, \cdots, k\}$ *tel que*

$$\alpha = \max\{\sigma(A_j), (j \neq s), \sigma(F)\} < \mu(A_s) < \frac{1}{2}, \tag{2.1.5}$$

alors

(i) *Toute solution méromorphe transcendante* $f(z)$*, telle que* $\lambda\left(\frac{1}{f}\right) < \mu(f)$*, de* (2.1.3) *vérifie* $\mu(A_s) \leq \sigma_2(f) \leq \sigma(A_s)$*. En outre, si* $F \not\equiv 0$*, alors on a* $\mu(A_s) \leq \bar{\lambda}_2(f) = \lambda_2(f) = \sigma_2(f) \leq \sigma(A_s)$*.*

(ii) *Si* $s \geq 2$*, alors toute solution rationnelle* $f(z)$ *de* (2.1.3) *est un polynôme de degré* $\deg f \leq s - 1$*. Si* $s = 0$ *ou* 1*, alors toute solution non constante* (2.1.3) *est transcendante.*

Corollaire 2.1.1 ([21]) *Supposons que* $A_0(z), \cdots, A_k(z)$, $F(z)$ *sont des fonctions entières. S'il existe* $s \in \{0, 1, \cdots, k\}$ *tel que*

$$\alpha = \max\{\sigma(A_j), (j \neq s), \sigma(F)\} < \mu(A_s) = \sigma(A_s) < \frac{1}{2}.$$

Alors toute solution méromorphe transcendante $f(z)$*, telle que* $\lambda\left(\frac{1}{f}\right) < \mu(f)$*, de* (2.1.3) *vérifie* $\bar{\lambda}_2(f) = \lambda_2(f) = \sigma_2(f) = \sigma(A_s)$*, et toute solution rationnelle* $f(z)$ *de* (2.1.3) *est un polynôme de degré* $\deg f \leq s - 1$*.*

Théorème 2.1.2 ([21]) *Supposons que $A_0(z), \cdots, A_k(z)$, $Q(z)(\not\equiv 0)$ sont des fonctions entières d'ordre fini, P est une fonction entière transcendante telle que*

$$\max\{\sigma(P), \sigma(Q), \sigma(A_j), (1 \leq j \leq k)\} < \mu(A_0) < \frac{1}{2}. \tag{2.1.6}$$

Alors toute solution $f(z)$ de (2.1.4) est transcendante, et toute solution méromorphe $f(z)$, telle que $\lambda\left(\frac{1}{f}\right) < \mu(f)$, de (2.1.4) vérifie $\mu(A_0) \leq \bar{\lambda}_2(f) = \lambda_2(f) = \sigma_2(f) \leq \sigma(A_0)$.

Corollaire 2.1.2 ([21]) *Supposons que $A_0(z), \cdots, A_k(z)$, $Q(z)(\not\equiv 0)$ sont des fonctions entières d'ordre fini, P est une fonction entière transcendante telle que*

$$\max\{\sigma(P), \sigma(Q), \sigma(A_j), (1 \leq j \leq k)\} < \mu(A_0) = \sigma(A_0) < \frac{1}{2}. \tag{2.1.7}$$

Alors toute solution $f(z)$ de (2.1.4) est transcendante, et toute solution méromorphe $f(z)$, telle que $\lambda\left(\frac{1}{f}\right) < \mu(f)$, de (2.1.4) vérifie $\bar{\lambda}_2(f) = \lambda_2(f) = \sigma_2(f) = \sigma(A_0)$.

2.2 Lemmes préliminaires

Lemme 2.2.1 ([27]) *Soit f une fonction méromorphe transcendante dans le plan $\mathbb{C}$ et soit $\alpha > 1$, une constante donnée. Alors il existe un ensemble $E_1 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie et une constante $B > 0$ qui dépend uniquement de α et (m, n) $(m, n \in \{0, 1, \cdots, k\})$ $m < n$ tels que pour tout z avec $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_1$, on a*

$$\left|\frac{f^{(n)}(z)}{f^{(m)}(z)}\right| \leq B \left(\frac{T(\alpha r, f)}{r} (\log^{\alpha} r) \log T(\alpha r, f)\right)^{n-m}.$$

Lemme 2.2.2 ([15]) *Soit $f(z) = \frac{g(z)}{d(z)}$ une fonction méromorphe, telle que $g(z)$ et $d(z)$ sont des fonctions entières vérifiant $\mu(g) = \mu(f) = \mu \leq \sigma(g) = \sigma(f) \leq +\infty$ et $\lambda(d) = \sigma(d) = \lambda(\frac{1}{f}) < \mu$. Alors il existe un ensemble $E_2 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_2$ et $|g(z)| = M(r, g)$ on a*

$$\left|\frac{f(z)}{f^{(s)}(z)}\right| \leq r^{2s}, \ (s \in \mathbb{N}).$$

Lemme 2.2.3 ([28]) *Soient $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ et $h : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ des fonctions monotones croissantes telles que $g(r) \leq h(r)$ pour tout $r \notin E_3 \cup [0, 1]$, où $E_3 \subset (1, +\infty)$ est un ensemble* *de mesure logarithmique finie. Alors, pour tout* $\alpha > 1$*, il existe* $r_0 = r_0(\alpha) > 0$ *tel que* $g(r) \leq h(\alpha r)$ *pour tout* $r > r_0$.

Lemme 2.2.4 ([15]) *Soit* $f(z) = \frac{g(z)}{d(z)}$ *une fonction méromorphe, avec* $g(z)$ *et* $d(z)$ *des fonctions entières telles que* $\mu(g) = \mu(f) = \mu \leq \sigma(g) = \sigma(f) \leq +\infty$ *et* $\lambda(d) = \sigma(d) = \lambda(\frac{1}{f}) < \mu$*. Alors il existe un ensemble* $E_4 \subset (1, +\infty)$ *de mesure logarithmique finie tel que pour tout* z *vérifiant* $|z| = r \notin [0,1] \cup E_4$ *et* $|g(z)| = M(r,g)$*, on a*

$$\frac{f^{(n)}(z)}{f(z)} = \left(\frac{\nu_g(r)}{z}\right)^n (1 + o(1)), \quad (n \geq 1),$$

où $\nu_g(r)$ *est l'indice central de* $g(z)$.

Lemme 2.2.5 ([14]) *Soit* $g(z)$ *une fonction entière d'ordre* $\sigma(g) = \alpha < \infty$*. Alors pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe un ensemble* $E_5 \subset [1, +\infty)$ *d'une mesure linéaire finie et mesure logarithmique finie, tel que pour tout* z *vérifiant* $|z| = r \notin [0,1] \cup E_5$*, on a*

$$\exp\{-r^{\alpha+\varepsilon}\} \leq |g(z)| \leq \exp\{r^{\alpha+\varepsilon}\}.$$

Lemme 2.2.6 ([19]) *Soit* $g(z)$ *une fonction entière d'ordre infini, avec l'hyper ordre* $\sigma_2(g) = \sigma$*, et* $\nu_g(r)$ *est l'indice central de* $g(z)$*. Alors*

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log \nu_g(r)}{\log r} = \sigma.$$

Lemme 2.2.7 ([2]) *Soit* $g(z)$ *une fonction entière avec* $0 \leq \mu(g) < 1$*. Alors pour tout* $\alpha \in (\mu(g), 1)$*, il existe un ensemble* $E_6 \subset [0, \infty)$ *tel que*

$$\overline{\log dens} E_6 \geq 1 - \frac{\mu(g)}{\alpha},$$

où $E_6 = \{r \in [0,\infty) : m(r) > M(r)\cos \pi\alpha\}$, $m(r) = \inf_{|z|=r} \log|g(z)|$, $M(r) = \sup_{|z|=r} \log|g(z)|$.

Lemme 2.2.8 *Soit* $f(z)$ *une fonction entière telle que* $\mu(f) < \frac{1}{2}$*. Alors pour tout* $\varepsilon > 0$ *donné , il existe un ensemble* $E_7 \subset (1, +\infty)$ *avec* $\overline{\log dens} E_7 > 0$*, tel que pour tout* z *vérifiant* $|z| = r \in E_7$*, on a*

$$|f(z)| \geq \exp\{r^{\mu(f)-\varepsilon}\}.$$

Preuve. Soit $\alpha_0 = \frac{\frac{1}{2}+\mu(f)}{2}$. Alors d'après le Lemme 2.2.7, il existe un ensemble H avec $\overline{\log dens}H \geq 1 - \frac{\mu(f)}{\alpha_0}$, tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \in H$, on a

$$\log|f(z)| \geq \cos(\pi\alpha_0)\log M(r,f). \tag{2.2.1}$$

D'après la définition de l'ordre inférieur, pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe $r_1 > 0$ tel que pour $r > r_1$, on a

$$\log M(r,f) \geq r^{\mu(f)-\frac{\varepsilon}{2}}. \tag{2.2.2}$$

Comme

$$\frac{\cos(\pi\alpha_0)r^{\mu(f)-\frac{\varepsilon}{2}}}{r^{\mu(f)-\varepsilon}} \to +\infty,\ \ (r \to +\infty), \tag{2.2.3}$$

alors, de (2.2.1)-(2.2.3), il existe $r_2(\geq r_1)$, tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \in H\backslash[0,r_2]$, on obtient

$$|f(z)| \geq \exp\{\cos(\pi\alpha_0)r^{\mu(f)-\frac{\varepsilon}{2}}\} \geq \exp\{r^{\mu(f)-\varepsilon}\}.$$

Posons $E_7 = H \cap [r_2, +\infty]$, alors $\overline{\log dens}E_7 > 0$.

2.3 Preuve du Théorème 2.1.1

(i) Supposons que $f(z)$ est une solution méromorphe transcendante de (2.1.3) telle que $\lambda\left(\frac{1}{f}\right) < \mu(f)$. De (2.1.3), on obtient

$$|A_s(z)| \leq \left|\frac{f}{f^{(s)}}\right| \left[|A_k(z)|\left|\frac{f^{(k)}}{f}\right| + |A_{k-1}(z)|\left|\frac{f^{(k-1)}}{f}\right| + \cdots + |A_{s+1}(z)|\left|\frac{f^{(s+1)}}{f}\right|\right.$$

$$\left. + |A_{s-1}(z)|\left|\frac{f^{(s-1)}}{f}\right| + \cdots + |A_1(z)|\left|\frac{f'}{f}\right| + |A_0(z)| + \left|\frac{F}{f}\right|\right]. \tag{2.3.1}$$

D'après le Lemme 2.2.1, il existe une constante $B > 0$ et un ensemble $E_1 \subset (1,\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin [0,1] \cup E_1$, on a

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right| \leq Br\left(T(2r,f)\right)^{k+1},\ \ 1 \leq j \leq k. \tag{2.3.2}$$

Comme $\lambda\left(\frac{1}{f}\right) < \mu(f)$, alors d'après le théorème de factorisation de Hadamard, f peut être définie par $f(z) = \frac{g(z)}{d(z)}$, avec $g(z)$ et $d(z)$ sont des fonctions entières vérifiant

$$\mu(g) = \mu(f) = \mu \leq \sigma(g) = \sigma(f),\ \sigma(d) = \lambda\left(\frac{1}{f}\right) < \mu.$$

Alors d'après le Lemme 2.2.2, il existe un ensemble $E_2 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour tout $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_2$ et $|g(z)| = M(r, g)$ et pour r suffisamment grand, on a

$$\left| \frac{f(z)}{f^{(s)}(z)} \right| \leq r^{2s}. \tag{2.3.3}$$

De (2.1.5), pour tout ε donné $(0 < 2\varepsilon < \mu(A_s) - \alpha)$, on obtient pour r suffisamment grand

$$|A_j(z)| \leq \exp\{r^{\alpha+\varepsilon}\}, \ (j \neq s), \ |F(z)| \leq \exp\{r^{\alpha+\varepsilon}\}. \tag{2.3.4}$$

D'après le Lemme 2.2.8, pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe un ensemble $E_7 \subset (1, +\infty)$ avec $\overline{\log dens} E_7 > 0$, tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \in E_7$, on a

$$|A_s(z)| \geq \exp\{r^{\mu(A_s)-\varepsilon}\}. \tag{2.3.5}$$

Comme $\sigma(d) = \lambda\left(\frac{1}{f}\right) < \mu(f) = \mu(g)$, alors pour tout ε $(0 < 2\varepsilon < \mu(f) - \lambda\left(\frac{1}{f}\right))$ et pour r suffisamment grand, on a

$$\left| \frac{F(z)}{f(z)} \right| = \left| \frac{d(z)}{g(z)} \right| |F(z)| = \left| \frac{d(z)}{M(r,g)} \right| |F(z)| \leq \frac{\exp\{r^{\lambda(\frac{1}{f})+\varepsilon}\}}{\exp_p\{r^{\mu(f)-\varepsilon}\}} \exp\{r^{\alpha+\varepsilon}\} \leq \exp\{r^{\alpha+\varepsilon}\}. \tag{2.3.6}$$

Soit $E_8 = E_7 - ([0, 1] \cup E_1 \cup E_2)$, alors on a $\overline{\log dens} E_8 > 0$. Donc, en substituant (2.3.2)-(2.3.6) dans (2.3.1), pour tout z vérifiant $|z| = r \in E_8$ et $|g(z)| = M(r, g)$, on obtient

$$\exp\{r^{\mu(A_s)-\varepsilon}\} \leq B(k + 2) r^{2s+1} (T(2r, f))^{k+1} \exp\{r^{\alpha+\varepsilon}\}. \tag{2.3.7}$$

De (2.3.7) et le Lemme 2.2.3, on obtient

$$\mu(A_s) - \varepsilon \leq \sigma_2(f).$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, alors on a

$$\mu(A_s) \leq \sigma_2(f).$$

Maintenant, on démontre que $\sigma_2(f) \leq \sigma(A_s)$. Nous pouvons écrire (2.1.3) comme

$$-A_k(z)\frac{f^{(k)}}{f} = A_{k-1}(z)\frac{f^{(k-1)}}{f} + \cdots + A_{s+1}(z)\frac{f^{(s+1)}}{f}$$

$$+A_s(z)\frac{f^{(s)}}{f} + A_{s-1}(z)\frac{f^{(s-1)}}{f} + \cdots + A_1(z)\frac{f'}{f} + A_0(z) - \frac{F(z)}{f(z)}. \tag{2.3.8}$$

D'après le Lemme 2.2.4, il existe un ensemble $E_4 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour tout $|z| = r \notin [0,1] \cup E_4$ et $|g(z)| = M(r,g)$, on a

$$\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)} = \left(\frac{\nu_g(r)}{z}\right)^j (1 + o(1)), \quad (j = 1, \cdots, k)\,. \tag{2.3.9}$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ donné, pour r suffisamment grand, on a

$$|A_j(z)| \leq \exp\{r^{\sigma(A_s)+\varepsilon}\},\ j = 0, \cdots, k-1, \tag{2.3.10}$$

D'après le Lemme 2.2.5, pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe un ensemble $E_5 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin [0,1] \cup E_5$, on a

$$|A_k(z)| \geq \exp\{-r^{\sigma(A_k)+\varepsilon}\} \geq \exp\{-r^{\sigma(A_s)+\varepsilon}\}. \tag{2.3.11}$$

De (2.3.8) et (2.3.9), on a

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\nu_g(r)}{z}\right)^k (1+o(1)) &= \frac{1}{A_k(z)}\left[\sum_{j=1}^{k-1} A_j(z)\left(\frac{\nu_g(r)}{z}\right)^j (1+o(1))\right. \\ &\qquad \left. + A_0(z) - \frac{F(z)}{f(z)}\right], \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \left|\left(\frac{\nu_g(r)}{z}\right)^k\right| |1+o(1)| \leq \frac{1}{|A_k(z)|}&\left[\sum_{j=1}^{k-1} |A_j(z)| \left|\left(\frac{\nu_g(r)}{z}\right)^j\right| |1+o(1)|\right. \\ &\left. + |A_0(z)| + \left|\frac{F(z)}{f(z)}\right|\right]. \end{aligned} \tag{2.3.12}$$

De (2.3.6) et (2.3.10)-(2.3.12) pour tout z vérifiant $|z| = r \notin [0,1] \cup E_4 \cup E_5$ et $|g(z)| = M(r,g)$, on obtient

$$\left(\frac{\nu_g(r)}{r}\right) |1+o(1)| \leq (k+1)\,|1+o(1)| \exp\{r^{\sigma(A_s)+\varepsilon}\},$$

d'où,

$$\overline{\lim_{r \to +\infty}} \frac{\log\log \nu_g(r)}{\log r} \leq \sigma(A_s) + \varepsilon. \tag{2.3.13}$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, alors de (2.3.13) et le Lemme 2.2.6, on obtient

$$\sigma_2(g) \leq \sigma(A_s),$$

d'où

$$\sigma_2(f) \leq \sigma(A_s).$$

Ainsi, on a

$$\mu(A_s) \leq \sigma_2(f) \leq \sigma(A_s).$$

Soit $F \not\equiv 0$. Maintenant, nous prouvons $\bar{\lambda}_2(f) = \lambda_2(f) = \sigma_2(f)$. De (2.1.3), on a

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{F}\left(A_k\frac{f^{(k)}}{f} + A_{k-1}\frac{f^{(k-1)}}{f} + \cdots + A_1\frac{f'}{f} + A_0\right). \tag{2.3.14}$$

Si f admet comme zéro z_0 d'ordre $\gamma(> k)$, alors F admet nécessairement comme zéro z_0 d'ordre $\gamma - k$. D'où, on obtient

$$n(r, \frac{1}{f}) \leq k\overline{n}(r, \frac{1}{f}) + n(r, \frac{1}{F}),$$

$$N(r, \frac{1}{f}) \leq k\overline{N}(r, \frac{1}{f}) + N(r, \frac{1}{F}). \tag{2.3.15}$$

De (2.3.15), on obtient d'après le lemme de la dérivée logarithmique [30]

$$m(r, \frac{1}{f}) \leq m(r, \frac{1}{F}) + \sum_{j=0}^{k} m(r, A_j) + O(\log rT(r, f)), (r \notin E), \tag{2.3.16}$$

où E est un ensemble de mesure linéaire finie. De (2.3.15) et (2.3.16), on obtient

$$T(r, f) \leq k\overline{N}(r, \frac{1}{f}) + T(r, F) + \sum_{j=0}^{k} T(r, A_j) + O(\log rT(r, f)), (r \notin E). \tag{2.3.17}$$

Pour r suffisamment grand et pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$O(\log rT(r, f)) = o(T(r, f)), \tag{2.3.18}$$

$$T(r, F) + \sum_{j=0}^{k} T(r, A_j) \leq (k+2)r^{\sigma(A_s)+\varepsilon}. \tag{2.3.19}$$

D'où, de (2.3.17), (2.3.18) et (2.3.19), pour $r \notin E$ suffisamment grand, on obtient

$$(1 - o(1))\,T(r, f) \leq k\overline{N}(r, \frac{1}{f}) + (k+2)r^{\sigma(A_s)+\varepsilon},$$

d'où

$$\sigma_2(f) \leq \bar{\lambda}_2(f).$$

Comme $\bar{\lambda}_2(f) \le \sigma_2(f)$, on obtient

$$\mu(A_s) \le \bar{\lambda}_2(f) = \lambda_2(f) = \sigma_2(f) \le \sigma(A_s).$$

(ii) Supposons que $f(z)$ est une solution rationnelle de (2.1.3). Si $f(z)$ est une fonction rationnelle, qui a un pôle à z_0 de degré $m \ge 1$, ou $f(z)$ est un polynôme de degré $\deg f \ge s$, alors $f^{(s)}(z) \not\equiv 0$. De (2.1.3), on obtient

$$|A_s(z)| \le \left[|A_k(z)| \left| \frac{f^{(k)}}{f^{(s)}} \right| + |A_{k-1}(z)| \left| \frac{f^{(k-1)}}{f^{(s)}} \right| + \cdots + |A_{s+1}(z)| \left| \frac{f^{(s+1)}}{f^{(s)}} \right| \right.$$

$$\left. + |A_{s-1}(z)| \left| \frac{f^{(s-1)}}{f^{(s)}} \right| + \cdots + |A_1(z)| \left| \frac{f'}{f^{(s)}} \right| + |A_0(z)| + \left| \frac{1}{f^{(s)}} \right| |F| \right]. \tag{2.3.20}$$

Alors, en substituant (2.3.4) et (2.3.5) dans (2.3.20), on obtient

$$\exp\{r^{\mu(A_s)-\varepsilon}\} \le (k+1) r^M \exp\{r^{\alpha+\varepsilon}\},$$

où M est une constante. C'est une contradiction. D'où, $f(z)$ est un polynôme de degré $\deg f \le s-1$.

Si $s = 0$ ou 1 et $f(z)$ est une solution polynomiale de (2.1.3), alors de (i), on obtient $\deg f \le s-1$, d'où, $f(z)$ doit être une constante. Par conséquent, de (i), toute solution non constante $f(z)$ de (2.1.3) est transcendante.

2.4 Preuve du Théorème 2.1.2

D'après les hypothèses, on sait que toute solution méromorphe de (2.1.4) est d'ordre infini. Alors, toute solution méromorphe de (2.1.4) est transcendante. Supposons que $f(z)$ est une solution méromorphe transcendante, telle que $\lambda\left(\frac{1}{f}\right) < \mu(f)$. Soit $f = ge^P$. Donc, on obtient

$$\bar{\lambda}_2(g) = \bar{\lambda}_2(f), \quad \lambda_2(g) = \lambda_2(f). \tag{2.4.1}$$

En substituant $f = ge^P$ dans (2.1.4), on obtient

$$g^{(k)} + B_{k-1}(z) g^{(k-1)} + \cdots + B_1(z) g' + B_0(z) g = \frac{Q}{A_k(z)}, \tag{2.4.2}$$

où

$$B_{k-1} = \frac{A_{k-1}}{A_k} + kP', \tag{2.4.3}$$

$$B_{k-j} = \frac{A_{k-j}}{A_k} + (k-j+1)\frac{A_{k-j+1}}{A_k}P'$$

$$+ \sum_{m=2}^{j} \frac{A_{k-j+m}}{A_k}\left[\binom{k-j+m}{m}(P')^m + D_m(P')\right],\ j = 2, \cdots, k \tag{2.4.4}$$

et $D_m(P')$ est un polynôme différentiel en P' de degré m, ses coefficients sont constants. De (2.1.6), (2.4.3) et (2.4.4), on a

$$\mu(B_0) = \mu(A_0), \quad \lambda(\frac{1}{B_0}) = \lambda(A_1) \leq \sigma(A_1) < \mu(A_0), \tag{2.4.5}$$

$$\sigma(\frac{Q}{A_k}) \leq \max\{\sigma(A_k), \sigma(Q)\} < \mu(A_0),\ \sigma(B_j) < \mu(A_0),\ j = 1, \cdots, k-1. \tag{2.4.6}$$

De (2.1.6), (2.4.2), (2.4.5), (2.4.6) et le Théorème A, on obtient

$$\mu(A_0) \leq \bar{\lambda}_2(g) = \lambda_2(g) = \sigma_2(g) \leq \sigma(A_0). \tag{2.4.7}$$

Comme $\sigma_2(e^P) = \sigma(P) < \mu(A_0) \leq \sigma_2(g)$, alors on obtient $\sigma_2(f) = \sigma_2(g)$. Ainsi, de (2.4.1) et (2.4.7), on obtient

$$\mu(A_0) \leq \bar{\lambda}_2(f) = \lambda_2(f) = \sigma_2(f) \leq \sigma(A_0).$$

Chapitre 3

Croissance des solutions des équations différentielles complexes à coefficients séries Lacunaire d'ordre p-itératif fini

3.1 Introduction et résultats

Pour la croissance des solutions des équations différentielles linéaires d'ordre supérieur

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z)f^{(k-1)} + \cdots + A_1(z)f' + A_0(z)f = 0, \tag{3.1.1}$$

et

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z)f^{(k-1)} + \cdots + A_1(z)f' + A_0(z)f = F(z), \tag{3.1.2}$$

où $A_j(z)$ $(j = 0, 1, \cdots, k-1)$, $F(z)$ sont des fonctions entières, plusieurs auteurs ont obtenu des résultats importants, (voir par exemple [3], [4], [8], [10], [29], [35], [43], [51]). Dans [50], Tu, Jiang et Zheng ont étudié la croissance des solutions de l'équation (3.1.2) lorsque le coefficient dominant $A_d(z)$ $(0 \leq d \leq k-1)$ est d'ordre maximal et une série de Fabry.

Théorème A ([50]) *Soient $A_j(z)$ $(j = 0, 1, \cdots, k-1)$, $F(z)$ des fonctions entières vérifiant* $\max\{\sigma(A_j)\ (j \neq d), \sigma(F)\} < \sigma(A_d) < \infty$ $(0 \leq d \leq k-1)$. *Supposons que* $A_d(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_{\lambda_n} z^{\lambda_n}$ *est une série lacunaire telle que la suite des exposants $\{\lambda_n\}$ vérifie la condition de Fabry*

$$\frac{\lambda_n}{n} \to \infty \ (n \to \infty),$$

alors, on a

(i) *Toute solution transcendante $f(z)$ de* (3.1.2) *vérifie* $\sigma_2(f) = \sigma(A_d)$.

(ii) *Si* $F(z) \not\equiv 0$, *alors toute solution transcendante* $f(z)$ *de* (3.1.2) *vérifie* $\bar{\lambda}_2(f) = \lambda_2(f) = \sigma_2(f) = \sigma(A_d)$.

(iii) *Si* $f(z)$ *est une solution polynomiale de* (3.1.2), *alors* $f(z)$ *doit être un polynôme de degré inférieur à* d.

(iv) *Si* $d = 1$, *alors toute solution non constante* $f(z)$ *de* (3.1.2) *vérifie* $\sigma_2(f) = \sigma(A_d)$.

Dans [52], Tu, Xu, Liu et Liu ont amélioré le résultat précédent et ils ont obtenu ce qui suit lorsque le coefficient $A_d(z)$ $(0 \leq d \leq k-1)$ est dominant et étant une série Lacunaire.

Théorème B ([52]) *Soient* $A_j(z)$ $(j = 0, 1, \cdots, k-1)$, $F(z)$ *des fonctions entières d'ordre p-itératif fini vérifiant*

$$\max\{\sigma_p(A_j)\ \ (j \neq d)\} \leq \sigma_p(A_d) < \infty$$

et

$$\max\{\tau_p(A_j) : \sigma_p(A_j) = \sigma_p(A_d)\} < \tau_p(A_d)\ (0 \leq d \leq k-1).$$

Supposons que $A_d(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_{\lambda_n} z^{\lambda_n}$ *est une fonction entière elle que la suite des exposants* $\{\lambda_n\}$ *vérifie*

$$\frac{\lambda_n}{n} > (\log n)^{2+\eta}\ (\eta > 0, n \in \mathbb{N}), \tag{3.1.3}$$

alors, on a

(i) *Si* $\sigma_p(F) < \sigma_p(A_d)$ *ou* $\sigma_p(F) = \sigma_p(A_d)$ *et* $\tau_p(F) < \tau_p(A_d)$, *alors toute solution transcendante* $f(z)$ *de* (3.1.2) *vérifie* $\sigma_{p+1}(f) = \sigma_p(A_d)$. *En outre, si* $F(z) \not\equiv 0$, *alors toute solution transcendante* $f(z)$ *de* (3.1.2) *vérifie* $\bar{\lambda}_{p+1}(f) = \lambda_{p+1}(f) = \sigma_{p+1}(f) = \sigma_p(A_d)$;

(ii) *Si* $\sigma_p(F) > \sigma_p(A_d)$ *et* $\sigma_{p+1}(F) \leq \sigma_p(A_d)$, *alors toutes les solutions de* (3.1.2) *vérifient* $\sigma_p(f) \geq \sigma_p(F)$ et $\sigma_{p+1}(f) \leq \sigma_p(A_d)$;

(iii) *Si* $\sigma_{p+1}(F) > \sigma_p(A_d)$, *alors toutes les solutions de* (3.1.2) *vérifient* $\sigma_{p+1}(f) = \sigma_{p+1}(F)$ *et* $\bar{\lambda}_{p+1}(f) = \lambda_{p+1}(f) = \sigma_{p+1}(F)$ *pour toutes les solutions de* (3.1.2) *avec au plus une solution exceptionnelle* f_0 *vérifiant* $\lambda_{p+1}(f_0) < \sigma_{p+1}(F)$.

Théorème C ([52]) *Soient* $A_j(z)$ $(j = 0, 1, \cdots, k-1)$, $F(z)$ *des fonctions entières d'ordre* *p-itératif fini vérifiant*

$$\max\{\sigma_p(A_j)\ \ (j\neq d)\,, \sigma_p(F)\} < \mu_p(A_d) = \sigma_p(A_d) = \sigma < \infty\ (0\leq d\leq k-1).$$

Supposons que $A_d = \sum_{n=0}^{\infty} c_{\lambda_n} z^{\lambda_n}$ *est une fonction entière elle que la suite des exposants* $\{\lambda_n\}$ *vérifie la condition* (3.1.3), *alors toute solution transcendante* $f(z)$ *de* (3.1.2) *vérifie* $\mu_{p+1}(f) = \sigma_{p+1}(f) = \sigma$. *En outre, si* $F(z)\not\equiv 0$, *alors toute solution transcendante* $f(z)$ *de* (3.1.2) *vérifie* $\overline{\underline{\lambda}}_{p+1}(f) = \underline{\lambda}_{p+1}(f) = \bar{\lambda}_{p+1}(f) = \lambda_{p+1}(f) = \sigma$.

Remarque 3.1.1 Supposons que $A_d(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{\lambda_n} z^{\lambda_n}$ est une fonction entière d'ordre infini telle que la suite des exposants $\{\lambda_n\}$ vérifie la condition (3.1.3), alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} c_{\lambda_n} z^{\lambda_n}$ est appelée série Lacunaire.

Récemment, Wu et Zheng [56] ont considéré les équations différentielles linéaires

$$A_k(z)f^{(k)} + A_{k-1}(z)f^{(k-1)} + \cdots + A_1(z)f' + A_0(z)f = 0, \tag{3.1.4}$$

et

$$A_k(z)f^{(k)} + A_{k-1}(z)f^{(k-1)} + \cdots + A_1(z)f' + A_0(z)f = F(z), \tag{3.1.5}$$

où $A_0(z)A_k(z)F(z)\not\equiv 0$ et $A_j(z)\ (j=0,1,\cdots,k)$, $F(z)$ sont des fonctions entières et ils ont obtenu le résultat suivant lorsque le coefficient $A_k(z)$ est d'ordre maximal et étant une série de Fabry.

Théorème D ([56]) *Supposons que* $k\geq 2$, $A_j(z)\ (j=0,1,\cdots,k)$ *sont des fonctions entières vérifiant* $A_k(z)A_0(z)\not\equiv 0$ *et* $\sigma(A_j)<\sigma(A_k)<\infty\ (j=0,1,\cdots,k-1)$. *Supposons que* $A_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{\lambda_n} z^{\lambda_n}$ *et la suite des exposants* $\{\lambda_n\}$ *vérifie la condition*

$$\frac{\lambda_n}{n}\to\infty\ (n\to\infty). \tag{3.1.6}$$

Alors toute solution rationnelle $f(z)(\not\equiv 0)$ *de* (3.1.4) *est un polynôme de degré* $\deg f\leq k-1$ *et toute solution méromorphe transcendante* $f(z)$, *dont les pôles sont de multiplicité uniformément bornée, de* (3.1.4) *telle que* $\lambda\left(\frac{1}{f}\right) < \mu(f)$, *vérifie*

$$\bar{\lambda}(f-\varphi) = \lambda(f-\varphi) = \sigma(f) = \infty,\ \bar{\lambda}_2(f-\varphi) = \lambda_2(f-\varphi) = \sigma_2(f) = \sigma(A_k),$$

où φ *est une fonction méromorphe d'ordre fini et n'est pas solution de* (3.1.4).

Remarque 3.1.2 Supposons que $A_k(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_{\lambda_n} z^{\lambda_n}$ est une fonction entière d'ordre fini telle que la suite des exposants $\{\lambda_n\}$ vérifie la condition (3.1.6), alors la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_{\lambda_n} z^{\lambda_n}$ est appelée série de Fabry.

Maintenant, le but de ce chapitre est de généraliser les résultats du Théorèmes B-D pour les équations (3.1.4) et (3.1.5), où $A_k(z) \not\equiv 0$, $A_0(z) \not\equiv 0$, $F(z) \not\equiv 0$ et $A_j(z)$ $(j = 0, 1, \cdots, k)$, $F(z)$ sont des fonctions entières et le coefficient dominant est un certain $A_s(z)$ $(0 \leq s \leq k)$ d'ordre maximal et étant une série Lacunaire. Nous avons obtenu les résultats suivants.

Théorème 3.1.1 ([22]) Soient $A_j(z)$ $(j = 0, 1, \cdots, k)$ *avec* $A_k(z)A_0(z) \not\equiv 0$ *des fonctions entières d'ordre p-itératif fini vérifiant*

$$\max\{\sigma_p(A_j),\ j \neq s\} \leq \sigma_p(A_s) < \infty,\ (0 \leq s \leq k)$$

et

$$\max\{\tau_p(A_j) : \sigma_p(A_j) = \sigma_p(A_s)\} < \tau_p(A_s) = \tau\ (0 < \tau < \infty).$$

Supposons que $A_s(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_{\lambda_n} z^{\lambda_n}$ *et la suite des exposants* $\{\lambda_n\}$ *vérifie* (3.1.3). *Alors toute solution rationnelle* $f(z)(\not\equiv 0)$ *de* (3.1.4) *est un polynôme de degré* $\deg f \leq s - 1$ *et toute solution méromorphe* $f(z)$ *de* (3.1.4) *telle que* $\lambda_p\left(\frac{1}{f}\right) < \mu_p(f)$, *vérifie*

$$\sigma_{p+1}(f) = \sigma_p(A_s).$$

Théorème 3.1.2 ([22]) *Soient* $A_j(z)$ $(j = 0, 1, \cdots, k)$ *avec* $A_k(z)A_0(z) \not\equiv 0$ *des fonctions entières d'ordre p-itératif fini vérifiant*

$$\max\{\sigma_p(A_j),\ j \neq s\} < \mu_p(A_s) = \sigma_p(A_s) = \sigma < \infty,\ (0 \leq s \leq k).$$

Supposons que $A_s(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_{\lambda_n} z^{\lambda_n}$ *et la suite des exposants* $\{\lambda_n\}$ *vérifie* (3.1.3), *alors toute solution rationnelle* $f(z)(\not\equiv 0)$ *de (3.1.4) est un polynôme de degré* $\deg f \leq s - 1$ *et toute solution méromorphe* $f(z)$ *de* (3.1.4) *telle que* $\lambda_p\left(\frac{1}{f}\right) < \mu_p(f)$, *vérifie*

$$\mu_{p+1}(f) = \sigma_{p+1}(f) = \sigma_p(A_s) = \sigma.$$

Théorème 3.1.3 ([22]) *Soient* $A_j(z)$ $(j = 0, 1, \cdots, k)$ *avec* $A_k(z)A_0(z) \not\equiv 0$ *des fonctions entières d'ordre p-itératif fini vérifiant les hypothèses du Théorème 3.1.1 et soit* $F(z) \not\equiv 0$ *une fonction entière d'ordre p-itératif fini.*
(i) *Si* $\sigma_p(F) < \sigma_p(A_s)$ *ou* $\sigma_p(F) = \sigma_p(A_s)$ *et* $\tau_p(F) < \tau_p(A_s)$, *alors toute solution rationnelle* $f(z)$ *de* (3.1.5) *est un polynôme de degré* $\deg f \leq s-1$ *et toute solution méromorphe transcendante* $f(z)$ *de* (3.1.5) *telle que* $\lambda_p\left(\frac{1}{f}\right) < \mu_p(f)$, *vérifie* $\sigma_{p+1}(f) \geq \sigma_p(A_s)$.
(ii) *Si* $\sigma_p(F) > \sigma_p(A_s)$ et $\sigma_{p+1}(F) \leq \sigma_p(A_s)$, *alors toute solution méromorphe transcendante* $f(z)$ *de* (3.1.5) *telle que* $\lambda_p\left(\frac{1}{f}\right) < \mu_p(f)$, *vérifie* $\sigma_p(f) \geq \sigma_p(F)$ *et* $\sigma_{p+1}(f) \leq \sigma_p(A_s)$.
(iii) *Si* $\sigma_{p+1}(F) > \sigma_p(A_s)$, *alors toute solution méromorphe transcendante* $f(z)$ *de* (3.1.5) *telle que* $\lambda_p\left(\frac{1}{f}\right) < \mu_p(f)$, *vérifie* $\sigma_{p+1}(f) = \sigma_{p+1}(F)$.

3.2 Lemmes préliminaires

Lemme 3.2.1 ([27]) *Soit* f *une fonction méromorphe transcendante dans le plan* $\mathbb{C}$ *et soit* $\alpha > 1$, *une constante donnée. Alors il existe un ensemble* $E_1 \subset (1, +\infty)$ *de mesure logarithmique finie et une constante* $B > 0$ *qui dépend uniquement de* α *et* (m, n) $(m, n \in \{0, 1, \cdots, k\})$ $m < n$ *tels que pour tout* z *avec* $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_1$, *on a*

$$\left|\frac{f^{(n)}(z)}{f^{(m)}(z)}\right| \leq B\left(\frac{T(\alpha r, f)}{r}(\log^{\alpha} r)\log T(\alpha r, f)\right)^{n-m}.$$

Lemme 3.2.2 ([29]) *Soit* $p \geq 1$ *un entier, et soit* $f(z) = \frac{g(z)}{d(z)}$ *une fonction méromorphe, telle que* $g(z)$ *et* $d(z)$ *sont des fonctions entières vérifiant*

$$\mu_p(g) = \mu_p(f) = \mu \leq \sigma_p(g) = \sigma_p(f) \leq +\infty, \sigma_p(d) = \lambda_p\left(\frac{1}{f}\right) = \beta < \mu.$$

Alors il existe un ensemble E_2 *de mesure logarithmique finie tel que pour tout* $|z| = r \notin E_2$ *et* $|g(z)| = M(r, g)$ *et pour* r *suffisamment grand, on obtient*

$$\left|\frac{f(z)}{f^{(s)}(z)}\right| \leq r^{2s}, \ (s \geq 1 \ \textit{entier}).$$

Lemme 3.2.3 ([28]) *Soient* $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *et* $h : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *des fonctions monotones croissantes telles que* $g(r) \leq h(r)$ *pour tout* $r \notin E_3 \cup [0, 1]$, *où* $E_3 \subset (1, +\infty)$ *est un ensemble de mesure logarithmique finie. Alors, pour tout* $\alpha > 1$, *il existe* $r_0 = r_0(\alpha) > 0$ *tel que* $g(r) \leq h(\alpha r)$ *pour tout* $r > r_0$.

Lemme 3.2.4 ([22]) *Soit* $f(z) = \frac{g(z)}{d(z)}$ *une fonction méromorphe, avec* $g(z)$ *et* $d(z)$ *des fonctions entières telles que* $\mu_p(g) = \mu_p(f) = \mu \leq \sigma_p(g) = \sigma_p(f) \leq +\infty$, $i(d) < p$ *ou* $i(d) = p$ *et* $\sigma_p(d) = \lambda_p\left(\frac{1}{f}\right) = \beta < \mu$. *Soit* z *un point avec* $|z| = r$ *pour lequel* $|g(z)| = m(r,g)$ *et* $\nu_g(r)$ *est noté l'indice central de* $g(z)$. *Alors l'estimation*

$$\frac{f^{(n)}(z)}{f(z)} = \left(\frac{\nu_g(r)}{z}\right)^n (1+o(1)), \quad (n \geq 1),$$

est satisfaite pour tout $|z| = r$ *à l'extérieur d'un ensemble* E_4 *de* r *de mesure logarithmique finie.*

Lemme 3.2.5 ([63]) *Soit* $p \geq 1$ *un entier, et soit* $f(z)$ *une fonction entière telle que* $i(f) = p$, $\sigma_p(f) = \sigma < +\infty$. *Alors, il existe des fonctions entières* $\beta(z)$ *et* $D(z)$ *telles que*

$$f(z) = \beta(z)\, e^{D(z)}\ ,\ \ \sigma_p(f) = \max\left\{\sigma_p(\beta), \sigma_p\left(e^{D(z)}\right)\right\}$$

et

$$\sigma_p(\beta) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log_p N(r, \frac{1}{f})}{\log r}.$$

De plus, pour tout $\varepsilon > 0$ *donné, on a*

$$|\beta(z)| \geq \exp\left\{-\exp_{p-1}\left\{r^{\sigma_p(\beta)+\varepsilon}\right\}\right\} \ \ (r \notin E_5),$$

où $E_5 \subset (1,+\infty)$ *est un ensemble de* r *de mesure linéaire finie.*

Lemme 3.2.6 *Soient* $p \geq 1$ *un entier et* $f(z)$ *une fonction entière telle que* $i(f) = p$, $\sigma_p(f) = \sigma < +\infty$. *Alors, il existe un ensemble* $E_6 \subset (1,+\infty)$ *de* r *de mesure linéaire finie tel que pour tout* $\varepsilon > 0$ *donné, on a*

$$\exp\left\{-\exp_{p-1}\left\{r^{\sigma+\varepsilon}\right\}\right\} \leq |f(z)| \leq \exp_p\left\{r^{\sigma+\varepsilon}\right\} \ \ (r \notin E_6).$$

Preuve. Quand $p = 1$, le lemme est dû à Chen dans [14] . Ainsi, on suppose que $p \geq 2$. Il est clair que $|f(z)| \leq \exp_p\{r^{\sigma+\varepsilon}\}$. D'après le Lemme 3.2.5, il existe des fonctions entières $\beta(z)$ et $D(z)$ telles que

$$f(z) = \beta(z)\, e^{D(z)} \ \text{ et } \ \sigma_p(f) = \max\left\{\sigma_p(\beta), \sigma_p\left(e^{D(z)}\right)\right\}.$$

Comme $\sigma_{p-1}(D) = \sigma_p\left(e^{D(z)}\right) \leq \sigma_p(f)$ et $\left|e^{D(z)}\right| \geq e^{-|D(z)|}$, pour $|z| = r$ suffisamment grand , on a

$$\left|e^{D(z)}\right| \geq e^{-|D(z)|} \geq \exp\left\{-\exp_{p-1}\left\{r^{\sigma_p(f)+\frac{\varepsilon}{2}}\right\}\right\}.$$

D'après le Lemme 3.2.5, il se ensuit que

$$|f(z)| = |\beta(z)|\left|e^{D(z)}\right| \geq \exp\left\{-\exp_{p-1}\left\{r^{\sigma_p(\beta)+\frac{\varepsilon}{2}}\right\}\right\}\exp\left\{-\exp_{p-1}\left\{r^{\sigma+\frac{\varepsilon}{2}}\right\}\right\}$$

$$\geq \exp\left\{-\exp_{p-1}\left\{r^{\sigma+\frac{\varepsilon}{2}}\right\}\right\}\exp\left\{-\exp_{p-1}\left\{r^{\sigma+\frac{\varepsilon}{2}}\right\}\right\} = \exp\left\{-2\exp_{p-1}\left\{r^{\sigma+\frac{\varepsilon}{2}}\right\}\right\}$$

$$\geq \exp\left\{-\exp_{p-1}\left\{r^{\sigma+\varepsilon}\right\}\right\}, \quad (r \notin E_6),$$

où $E_6 \subset (1, +\infty)$ de r de mesure linéaire finie.

Lemme 3.2.7 ([49]) *Soient $p, q \geq 1$ des entiers et $f(z)$ une fonction entière telle que $i(f) = p+1$, $\sigma_{p+1}(f) = \sigma$, $i_\mu(f) = q+1$, $\mu_{q+1}(f) = \mu$. Soit $\nu_f(r)$ l'indice central de $f(z)$. Alors*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log_{p+1}\nu_f(r)}{\log r} = \sigma, \quad \underline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log_{q+1}\nu_f(r)}{\log r} = \mu.$$

Lemme 3.2.8 ([44]) *Soient $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_{\lambda_n} z^{\lambda_n}$ une fonction entière et la suite des exposants $\{\lambda_n\}$ vérifie la condition* (3.1.3). *Alors pour tout $\varepsilon > 0$ donné,*

$$\log L(r, f) > (1-\varepsilon)\log M(r, f)$$

est satisfaite à l'extérieur d'un ensemble H de densité logarithmique 0*, où $M(r, f) = \sup\limits_{|z|=r} |f(z)|$, $L(r, f) = \inf\limits_{|z|=r} |f(z)|$.*

Lemme 3.2.9 ([52]) *Soit $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_{\lambda_n} z^{\lambda_n}$ une fonction entière vérifiant $\sigma_p(f) = \sigma$, $0 < \sigma < \infty$ et $\tau_p(f) = \tau < \infty$ telle que la suite des exposant $\{\lambda_n\}$ vérifie* (3.1.3). *Alors pour tout $\beta < \tau$ donné, il existe un ensemble E_7 de mesure logarithmique infinie tel que pour tout $|z| = r \in E_7$, on a*

$$|f(z)| > \exp_p\{\beta r^\sigma\}.$$

Lemme 3.2.10 *Soit $f(z)$ une fonction entière avec $\sigma_p(f) = \sigma$, $0 < \sigma < \infty$. Alors, pour tout $0 < \beta < \sigma$ donné, il existe un ensemble E_8 de densité logarithmique supérieure positive tel que pour tout $|z| = r \in E_8$, on a*

$$\log_p M(r, f) > r^\beta,$$

où $M(r,f)=\sup\limits_{|z|=r}|f(z)|$.

Preuve. D'après la définition d'ordre p-itératif, il existe une suite $\{r_n\}$ tend vers ∞ telle que pour tout $\varepsilon>0$ donné, on a

$$M(r_n,f)>\exp_p\{r_n^{\sigma-\varepsilon}\}.$$

Comme $0<\beta<\sigma$, on peut choisir $\varepsilon>0$ suffisamment petit et α pour vérifier $1<\alpha<\frac{\sigma-\varepsilon}{\beta}$. Alors, pour tout $r\in[r_n,r_n^{\alpha}](n\geq 1)$, on a

$$\log_p M(r,f)\geq \log_p M(r_n,f)>r_n^{\sigma-\varepsilon}\geq r^{\frac{\sigma-\varepsilon}{\alpha}}>r^{\beta}.$$

Supposons $E_8=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[r_n,r_n^{\alpha}]$, donc

$$\overline{\log dens}E_8=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{m_l(E_8\cap[1,r])}{\log r}\geq\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{m_l(E_8\cap[1,r_n^{\alpha}])}{\log r_n^{\alpha}}$$

$$\geq\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{m_l([r_n,r_n^{\alpha}])}{\log r_n^{\alpha}}=\frac{\alpha-1}{\alpha}>0.$$

Lemme 3.2.11 *Soit* $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_{\lambda_n}z^{\lambda_n}$ *une fonction entière vérifiant* $\sigma_p(f)=\sigma$, $0<\sigma<\infty$. *Si la suite des exposants* $\{\lambda_n\}$ *vérifie la condition* (3.1.3), *alors pour tout* $0<\beta<\sigma$ *donné, il existe un ensemble* E_9 *de densité logarithmique supérieure positive tel que pour tout* $|z|=r\in E_9$, *on a*

$$|f(z)|>\exp_p\{r^{\beta}\}.$$

Preuve. D'après le Lemme 3.2.8, pour tout $\varepsilon(0<\varepsilon<1)$ donné, il existe un ensemble H avec $\underline{\log dens}H=1$ tel que pour tout $r\in H$, on a

$$\log L(r,f)>(1-\varepsilon)\log M(r,f). \tag{3.2.1}$$

D'après le Lemme 3.2.10, il existe un ensemble E_8 avec $\overline{\log dens}E_8>0$ tel que pour tout $r\in E_8$, on a

$$M(r,f)>\exp_p\{r^{\sigma-\frac{\varepsilon}{2}}\}. \tag{3.2.2}$$

Comme $0<\beta<\sigma$, on choisit ε suffisamment petit pour vérifier $0<\varepsilon<\min\{\sigma-\beta,1\}$. De (3.2.1) et (3.2.2), on a pour tout $r\in H\cap E_8$

$$|f(z)|>L(r,f)>[M(r,f)]^{1-\varepsilon}>\left(\exp_p\{r^{\sigma-\frac{\varepsilon}{2}}\}\right)^{1-\varepsilon}>\exp_p\{r^{\sigma-\varepsilon}\}>\exp_p\{r^{\beta}\}.$$

Notons que l'ensemble $E_9 = H \cap E_8$ a une densité logarithmique supérieure positive. En effet, on a

$$\overline{\log dens}(H \cap E_8) + \overline{\log dens}(H \cup E_8) \geq \underline{\log dens} H + \overline{\log dens} E_8.$$

Ainsi

$$\overline{\log dens} E_9 \geq \underline{\log dens} H + \overline{\log dens} E_8 - 1 = \overline{\log dens} E_8 > 0.$$

Lemme 3.2.12 ([35]) *Soit $f(z)$ une fonction entière avec $\mu_p(f) = \mu < \infty$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe un ensemble $E_{10} \subset (1, \infty)$ de mesure logarithmique infinie tel que pour tout $|z| = r \in E_{10}$, on a*

$$M(r, f) < \exp_p\{r^{\mu+\varepsilon}\}.$$

Lemme 3.2.13 ([43]) *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe avec $i(f) = p \geq 1$. Alors $\sigma_p(f') = \sigma_p(f)$.*

3.3 Preuve du Théorème 3.1.1

Supposons que $f(z)(\not\equiv 0)$ est une solution rationnelle de (3.1.4). Si $f(z)$ est une fonction rationnelle, qui a un pôle à z_0 de degré $m \geq 1$, ou $f(z)$ est un polynôme de degré $\deg f \geq s$, alors $f^{(s)}(z) \not\equiv 0$. Comme $\max\{\sigma_p(A_j), j \neq s\} < \sigma_p(A_s) < \infty$, alors

$$\sigma_p(0) = \sigma_p(A_k(z)f^{(k)} + A_{k-1}(z)f^{(k-1)} + \cdots + A_1(z)f' + A_0(z)f) = \sigma_p(A_s) > 0,$$

c'est une contradiction. Si $\max\{\sigma_p(A_j), j \neq s\} = \sigma_p(A_s)$ et $\max\{\tau_p(A_j) : \sigma_p(A_j) = \sigma_p(A_s)\} < \tau_p(A_s) = \tau$, alors on choisi α_0, β_0 vérifiant $\max\{\tau_p(A_j) : \sigma_p(A_j) = \sigma_p(A_s)\} < \alpha_0 < \beta_0 < \tau$. D'après le Lemme 3.2.9, il existe un ensemble E_7 de mesure logarithmique infinie tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \in E_7$, on a

$$|A_s(z)| > \exp_p\{\beta_0 r^{\sigma_p(A_s)}\} \tag{3.3.1}$$

et pour r suffisamment grand

$$|A_j(z)| < \exp_p\{\alpha_0 r^{\sigma_p(A_s)}\}, \ j \neq s. \tag{3.3.2}$$

Comme $f(z)$ est une fonction rationnelle, alors f peut être définie $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, avec $P(z)$ et $Q(z)$ sont des polynômes. De (3.1.4), on a

$$|A_s(z)| \leq |A_k(z)| \left|\frac{f^{(k)}}{f^{(s)}}\right| + |A_{k-1}(z)| \left|\frac{f^{(k-1)}}{f^{(s)}}\right| + \cdots + |A_{s+1}(z)| \left|\frac{f^{(s+1)}}{f^{(s)}}\right|$$

$$+|A_{s-1}(z)|\left|\frac{f^{(s-1)}}{f^{(s)}}\right|+\cdots+|A_1(z)|\left|\frac{f'}{f^{(s)}}\right|+|A_0(z)|\left|\frac{f}{f^{(s)}}\right|. \tag{3.3.3}$$

Ainsi, de (3.3.1)-(3.3.3), pour tout z vérifiant $|z|=r\in E_7$, on a

$$\exp_p\{\beta_0 r^{\sigma_p(A_s)}\}\leq kr^M\exp_p\{\alpha_0 r^{\sigma_p(A_s)}\},$$

où M est une constante. C'est une contradiction. D'où, $f(z)$ est un polynôme de degré $\deg f\leq s-1$.

Maintenant, on suppose que $f(z)$ est une solution méromorphe transcendante de (3.1.4) telle que $\lambda_p\left(\frac{1}{f}\right)<\mu_p(f)$. D'après le Lemme 3.2.1, il existe une constante $B>0$ et un ensemble $E_1\subset(1,\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour tout z vérifiant $|z|=r\notin[0,1]\cup E_1$, on a

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right|\leq B\left(T(2r,f)\right)^{k+1},\quad 1\leq j\leq k. \tag{3.3.4}$$

Comme $\lambda_p\left(\frac{1}{f}\right)<\mu_p(f)$, alors d'après le théorème de factorisation de Hadamard, f peut être définie par $f(z)=\frac{g(z)}{d(z)}$, avec $g(z)$ et $d(z)$ sont des fonctions entières vérifiant

$$\mu_p(g)=\mu_p(f)=\mu\leq\sigma_p(g)=\sigma_p(f),\ \sigma_p(d)=\lambda_p\left(\frac{1}{f}\right)=\beta<\mu.$$

Alors d'après le Lemme 3.2.2, il existe un ensemble E_2 de mesure logarithmique finie tel que pour tout $|z|=r\notin E_2$ et $|g(z)|=M(r,g)$ et pour r suffisamment grand, on a

$$\left|\frac{f(z)}{f^{(s)}(z)}\right|\leq r^{2s}. \tag{3.3.5}$$

Si $\max\{\sigma_p(A_j),j\neq s\}<\sigma_p(A_s)$,alors on peut choisir γ,δ pour vérifier $\max\{\sigma_p(A_j),j\neq s\}<\gamma<\delta<\sigma_p(A_s)$. D'après le Lemme 3.2.11, il existe un ensemble E_9 de mesure logarithmique infinie tel que pour tout z vérifiant $|z|=r\in E_9$, on a

$$|A_s(z)|>\exp_p\{r^\delta\} \tag{3.3.6}$$

et pour r suffisamment grand

$$|A_j(z)|\leq\exp_p\{r^\gamma\},\ j\neq s. \tag{3.3.7}$$

De (3.1.4), on a

$$|A_s(z)|\leq\left|\frac{f}{f^{(s)}}\right|\left[|A_k(z)|\left|\frac{f^{(k)}}{f}\right|+|A_{k-1}(z)|\left|\frac{f^{(k-1)}}{f}\right|+\cdots+|A_{s+1}(z)|\left|\frac{f^{(s+1)}}{f}\right|\right.$$

$$+ |A_{s-1}(z)| \left|\frac{f^{(s-1)}}{f}\right| + \cdots + |A_1(z)| \left|\frac{f'}{f}\right| + |A_0(z)|\Bigg]. \tag{3.3.8}$$

D'où, en substituant (3.3.4)-(3.3.7) dans (3.3.8), on obtient pour tout z vérifiant $r \in E_9 \backslash (E_1 \cup E_2 \cup [0, 1])$

$$\exp_p\{r^\delta\} \le B \exp_p\{r^\gamma\} r^{2s} kT(2r, f)^{k+1}. \tag{3.3.9}$$

Comme δ est arbitrairement proche de $\sigma_p(A_s)$, alors de (3.3.9) et Lemme 3.2.3, on obtient

$$\sigma_{p+1}(f) \ge \sigma_p(A_s).$$

Si $\max\{\sigma_p(A_j), j \ne s\} = \sigma_p(A_s)$ et $\max\{\tau_p(A_j) : \sigma_p(A_j) = \sigma_p(A_s)\} < \tau_p(A_s) = \tau$, alors de (3.3.1), (3.3.2), (3.3.4), (3.3.5) et (3.3.8), pour tout z vérifiant $r \in E_7 \backslash (E_1 \cup E_2 \cup [0, 1])$, on obtient

$$\exp_p\{\beta_0 r^{\sigma_p(A_s)}\} \le B \exp_p\{\alpha_0 r^{\sigma_p(A_s)}\} r^{2s} kT(2r, f)^{k+1}. \tag{3.3.10}$$

De (3.3.10) et Lemme 3.2.3, on a

$$\sigma_{p+1}(f) \ge \sigma_p(A_s).$$

Maintenant, on démontre que $\sigma_{p+1}(f) \le \sigma_p(A_s)$. De (3.1.4) on a

$$-A_k(z)\frac{f^{(k)}}{f} = A_{k-1}(z)\frac{f^{(k-1)}}{f} + \cdots + A_{s+1}(z)\frac{f^{(s+1)}}{f}$$

$$+A_s(z)\frac{f^{(s)}}{f} + A_{s-1}(z)\frac{f^{(s-1)}}{f} + \cdots + A_1(z)\frac{f'}{f} + A_0(z). \tag{3.3.11}$$

D'après le Lemme 3.2.4, il existe un ensemble $E_4 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour tout $|z| = r \notin E_4$ et $|g(z)| = M(r, g)$, on a

$$\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)} = \left(\frac{\nu_g(r)}{z}\right)^j (1 + o(1)), \quad (j = 0, \cdots, k). \tag{3.3.12}$$

Comme $\max\{\sigma_p(A_j), j \ne s\} \le \sigma_p(A_s) < \infty$, alors pour r suffisamment grand, on obtient

$$|A_j(z)| \le \exp_p\{r^{\sigma_p(A_s)+\varepsilon}\}, \ \ (j = 0, \cdots, k). \tag{3.3.13}$$

D'après le Lemme 3.2.6, il existe un ensemble $E_6 \subset (1, +\infty)$ de mesure linéaire finie (et donc de mesure logarithmique finie) tel que pour tout $|z| = r \notin E_6$, on a

$$|A_k(z)| \ge \exp\left\{-\exp_{p-1}\{r^{\sigma_p(A_k)+\varepsilon}\}\right\} \ge \exp\left\{-\exp_{p-1}\{r^{\sigma_p(A_s)+\varepsilon}\}\right\}. \tag{3.3.14}$$

De (3.3.11) et (3.3.12), pour tout z vérifiant $|z| = r \notin (E_4 \cup E_6)$ et $|g(z)| = M(r,g)$, on a

$$-A_k(z)\left(\frac{\nu_g(r)}{z}\right)^k (1+o(1)) = A_{k-1}(z)\left(\frac{\nu_g(r)}{z}\right)^{k-1}(1+o(1))$$

$$+\cdots + A_{s+1}(z)\left(\frac{\nu_g(r)}{z}\right)^{s+1}(1+o(1)) + A_s(z)\left(\frac{\nu_g(r)}{z}\right)^{s}(1+o(1))$$

$$+A_{s-1}(z)\left(\frac{\nu_g(r)}{z}\right)^{s-1}(1+o(1)) + \cdots + A_1(z)\left(\frac{\nu_g(r)}{z}\right)(1+o(1)) + A_0(z),$$

donc,

$$|A_k(z)|\left|\left(\frac{\nu_g(r)}{z}\right)^k\right||1+o(1)| \leq |A_{k-1}(z)|\left|\left(\frac{\nu_g(r)}{z}\right)^{k-1}\right||1+o(1)|$$

$$+\cdots + |A_{s+1}(z)|\left|\left(\frac{\nu_g(r)}{z}\right)^{s+1}\right||1+o(1)| + |A_s(z)|\left|\left(\frac{\nu_g(r)}{z}\right)^{s}\right||1+o(1)|$$

$$+|A_{s-1}(z)|\left(\frac{\nu_g(r)}{z}\right)^{s-1}|1+o(1)| + \cdots + |A_1(z)|\left(\frac{\nu_g(r)}{z}\right)|1+o(1)| + |A_0(z)|. \quad (3.3.15)$$

De (3.3.13)-(3.3.15) pour tout z vérifiant $|z| = r \notin (E_4 \cup E_6)$ et $|g(z)| = M(r,g)$, on a

$$\exp\left\{-\exp_{p-1}\{r^{\sigma_p(A_s)+\varepsilon}\}\right\}\left(\frac{\nu_g(r)}{r}\right)|1+o(1)| \leq k\,|1+o(1)|\exp_p\{r^{\sigma_p(A_s)+\varepsilon}\},$$

d'où,

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log_{p+1}\nu_g(r)}{\log r} \leq \sigma_p(A_s) + \varepsilon. \quad (3.3.16)$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, alors de (3.3.16) et le Lemme 3.2.7, on obtient

$$\sigma_{p+1}(g) \leq \sigma_p(A_s),$$

donc,

$$\sigma_{p+1}(f) = \sigma_{p+1}(g) \leq \sigma_p(A_s).$$

Ainsi, on obtient

$$\sigma_{p+1}(f) = \sigma_p(A_s).$$

3.4 Preuve du Théorème 3.1.2

Supposons que $f(z)(\not\equiv 0)$ est une solution rationnelle de (3.1.4). Par le même raisonnement que dans la démonstration du Théorème 3.1.1, il est clair que $f(z)$ est un polynôme de degré $\deg f \leq s-1$. Maintenant, on suppose que $f(z)$ est une solution méromorphe transcendante de (3.1.4) telle que $\lambda_p\left(\frac{1}{f}\right) < \mu_p(f)$. D'après le Théorème 3.1.1, on a $\sigma_{p+1}(f) = \sigma_p(A_s) = \sigma$. Alors, nous avons seulement besoin de prouver que $\mu_{p+1}(f) = \mu_p(A_s) = \sigma$. Comme $\max\{\sigma_p(A_j)\ (j \neq s)\} < \sigma$, il existe des constantes α_1, β_1 vérifiant $\max\{\sigma_p(A_j)$ $(j \neq s)\} < \alpha_1 < \beta_1 < \sigma$. Donc, pour r suffisamment grand

$$|A_j(z)| \leq \exp_p\{r^{\alpha_1}\},\ j \neq s. \tag{3.4.1}$$

De plus, on a $A_s(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_{\lambda_n} z^{\lambda_n}$ telle que la suite des exposants $\{\lambda_n\}$ vérifie (3.1.3) et $\mu_p(A_s) = \sigma_p(A_s) = \sigma$. Alors, d'après le Lemme 3.2.11, il existe un ensemble E_9 de mesure logarithmique infinie tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \in E_9$, on a

$$|A_s(z)| > \exp_p\{r^{\beta_1}\}. \tag{3.4.2}$$

Ainsi, en substituant (3.4.1), (3.4.2), (3.3.4), (3.3.5) dans (3.3.8), pour tout z vérifiant $|z| = r \in E_9 \backslash ([0,1] \cup E_1 \cup E_2)$, on obtient

$$\exp_p\{r^{\beta_1}\} \leq B \exp_p\{r^{\alpha_1}\} r^{2s} k T(2r, f)^{k+1}. \tag{3.4.3}$$

Comme β_1 est arbitrairement proche de σ, alors de (3.4.3) et le Lemme 3.2.3, on obtient

$$\mu_{p+1}(f) \geq \sigma = \mu_p(A_s).$$

D'autre part, de (3.1.4), on a

$$|A_k(z)| \left|\frac{f^{(k)}}{f}\right| \leq |A_{k-1}(z)| \left|\frac{f^{(k-1)}}{f}\right| + \cdots + |A_{s+1}(z)| \left|\frac{f^{(s+1)}}{f}\right| + |A_s(z)| \left|\frac{f^{(s)}}{f}\right|$$

$$+ |A_{s-1}(z)| \left|\frac{f^{(s-1)}}{f}\right| + \cdots + |A_1(z)| \left|\frac{f'}{f}\right| + |A_0(z)|. \tag{3.4.4}$$

D'après le Lemme 3.2.12, pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe un ensemble $E_{10} \subset (1, \infty)$ de mesure logarithmique infinie tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \in E_{10}$, on a

$$|A_j(z)| \leq \exp_p\{r^{\mu_p(A_s)+\varepsilon}\},\ j = 0, \cdots, k. \tag{3.4.5}$$

D'après le Lemme 3.2.6, il existe un ensemble $E_6 \subset (1,+\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour tout $|z| = r \notin E_6$, on a

$$|A_k(z)| \geq \exp\left\{-\exp_{p-1}\{r^{\sigma_p(A_k)+\varepsilon}\}\right\}$$

$$\geq \exp\left\{-\exp_{p-1}\{r^{\sigma_p(A_s)+\varepsilon}\}\right\} = \exp\left\{-\exp_{p-1}\{r^{\mu_p(A_s)+\varepsilon}\}\right\}. \tag{3.4.6}$$

De (3.3.12), (3.4.4)-(3.4.6), pour tout z vérifiant $|z| = r \in E_{10} \backslash (E_4 \cup E_6)$ et $|g(z)| = M(r,g)$, on a

$$\exp\left\{-\exp_{p-1}\{r^{\mu_p(A_s)+\varepsilon}\}\right\}\left(\frac{\nu_g(r)}{r}\right)^k |1+o(1)| \leq$$

$$\exp_p\{r^{\mu_p(A_s)+\varepsilon}\}\left(\frac{\nu_g(r)}{r}\right)^{k-1} |1+o(1)| + \cdots + \exp_p\{r^{\mu_p(A_s)+\varepsilon}\}\left(\frac{\nu_g(r)}{r}\right)^{s+1} |1+o(1)|$$

$$+\exp_p\{r^{\mu_p(A_s)+\varepsilon}\}\left(\frac{\nu_g(r)}{r}\right)^{s} |1+o(1)| + \exp_p\{r^{\mu_p(A_s)+\varepsilon}\}\left(\frac{\nu_g(r)}{r}\right)^{s-1} |1+o(1)|$$

$$+\cdots+\exp_p\{r^{\mu_p(A_s)+\varepsilon}\}\left(\frac{\nu_g(r)}{r}\right) |1+o(1)| + \exp_p\{r^{\mu_p(A_s)+\varepsilon}\},$$

et pour tout z vérifiant $|z| = r \in E_{10} \backslash (E_4 \cup E_6)$ et $|g(z)| = M(r,g)$, on obtient

$$\exp\left\{-\exp_{p-1}\{r^{\mu_p(A_s)+\varepsilon}\}\right\}\left(\frac{\nu_g(r)}{r}\right) |1+o(1)| \leq k\,|1+o(1)| \exp_p\{r^{\mu_p(A_s)+\varepsilon}\}, \tag{3.4.7}$$

d'où,

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{\log_{p+1}\nu_g(r)}{\log r} \leq \mu_p(A_s) + \varepsilon. \tag{3.4.8}$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, alors de (3.4.8) et le Lemme 3.2.7, on a

$$\mu_{p+1}(g) \leq \mu_p(A_s),$$

donc,

$$\mu_{p+1}(f) = \mu_{p+1}(g) \leq \mu_p(A_s).$$

Ainsi, on obtient

$$\mu_{p+1}(f) = \mu_p(A_s) = \sigma.$$

3.5 Preuve du Théorème 3.1.3

(i) Supposons que $f(z)$ est une solution rationnelle de (3.1.5). Il est clair que $f(z)$ est un polynôme de degré $\deg f \leq s-1$.

Maintenant, on suppose que $f(z)$ est une solution méromorphe transcendante de (3.1.5) telle que $\lambda_p\left(\frac{1}{f}\right) < \mu_p(f)$. De (3.1.5), on a

$$|A_s(z)| \leq \left|\frac{f}{f^{(s)}}\right| \left[|A_k(z)|\left|\frac{f^{(k)}}{f}\right| + |A_{k-1}(z)|\left|\frac{f^{(k-1)}}{f}\right| + \cdots + |A_{s+1}(z)|\left|\frac{f^{(s+1)}}{f}\right|\right.$$

$$\left. + |A_{s-1}(z)|\left|\frac{f^{(s-1)}}{f}\right| + \cdots + |A_1(z)|\left|\frac{f'}{f}\right| + |A_0(z)| + \left|\frac{F}{f}\right|\right]. \tag{3.5.1}$$

Si $\max\{\sigma_p(A_j), j \neq s, \sigma_p(F)\} < \sigma_p(A_s)$, alors on choisit α_2, β_2 vérifiant $\max\{\sigma_p(A_j)\ (j \neq s),\ \sigma_p(F)\} < \alpha_2 < \beta_2 < \sigma_p(A_s)$. D'après le Lemme 3.2.11, il existe un ensemble E_9 de mesure logarithmique infinie tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \in E_9$, on a

$$|A_s(z)| > \exp_p\{r^{\beta_2}\} \tag{3.5.2}$$

et pour r suffisamment grand

$$|A_j(z)| \leq \exp_p\{r^{\alpha_2}\} \quad (j \neq s)\,, \quad |F(z)| \leq \exp_p\{r^{\alpha_2}\}. \tag{3.5.3}$$

Comme $\lambda_p\left(\frac{1}{f}\right) < \mu_p(f)$, alors d'après le théorème de factorisation de Hadamard, f peut être définie par $f(z) = \frac{g(z)}{d(z)}$, avec $g(z)$ et $d(z)$ sont des fonctions entières vérifiant

$$\mu_p(g) = \mu_p(f) = \mu \leq \sigma_p(g) = \sigma_p(f),\ \ \sigma_p(d) = \lambda_p\left(\frac{1}{f}\right) = \beta < \mu.$$

Comme $\sigma_p(d) = \lambda_p\left(\frac{1}{f}\right) < \mu_p(f) = \mu_p(g)$, alors pour tout ε $(0 < 2\varepsilon < \mu_p(f) - \lambda_p\left(\frac{1}{f}\right))$ et pour r suffisamment grand on a

$$\frac{1}{|f(z)|} = \left|\frac{d(z)}{g(z)}\right| \leq \frac{\exp_p\{r^{\sigma_p(d)+\varepsilon}\}}{\exp_p\{r^{\mu_p(f)-\varepsilon}\}} \leq 1. \tag{3.5.4}$$

D'où, en substituant (3.3.4), (3.3.5), (3.5.2), (3.5.3) et (3.5.4) dans (3.5.1), pour tout z vérifiant $r \in E_9 \backslash (E_1 \cup E_2 \cup [0,1])$, on obtient

$$\exp_p\{r^{\beta_2}\} \leq B \exp_p\{r^{\alpha_2}\} r^{2s} (k+1) \left[T(2r,f)\right]^{k+1}. \tag{3.5.5}$$

Comme β_2 est arbitrairement proche de $\sigma_p(A_s)$, de (3.5.5) et le Lemme 3.2.3, on obtient

$$\sigma_{p+1}(f) \geq \sigma_p(A_s).$$

Si $\max\{\sigma_p(A_j)\ (j \neq s),\ \sigma_p(F)\} = \sigma_p(A_s)$ et $\max\{\tau_p(A_j), \tau_p(F) : \sigma_p(A_j) = \sigma_p(A_s) = \sigma_p(F)\} < \tau_p(A_s) = \tau$, alors on choisit α_3, β_3 vérifiant

$$\max\{\tau_p(A_j), \tau_p(F) : \sigma_p(A_j) = \sigma_p(A_s) = \sigma_p(F)\} < \alpha_3 < \beta_3 < \tau.$$

D'après le Lemme 3.2.9, il existe un ensemble E_7 de mesure logarithmique infinie tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \in E_7$, on a

$$|A_s(z)| > \exp_p\{\beta_3 r^{\sigma_p(A_s)}\} \tag{3.5.6}$$

et pour r suffisamment grand

$$|A_j(z)| < \exp_p\{\alpha_3 r^{\sigma_p(A_s)}\},\ j \neq s, \tag{3.5.7}$$

$$|F(z)| < \exp_p\{\alpha_3 r^{\sigma_p(A_s)}\}. \tag{3.5.8}$$

D'où, en substituant (3.3.4), (3.3.5), (3.5.4) et (3.5.6)-(3.5.8) dans (3.5.1), pour tout z vérifiant $r \in E_7 \backslash (E_1 \cup E_2 \cup [0,1])$, on a

$$\exp_p\{\beta_3 r^{\sigma_p(A_s)}\} \leq B \exp_p\{\alpha_3 r^{\sigma_p(A_s)}\} r^{2s}(k+1)\left[T(2r,f)\right]^{k+1}. \tag{3.5.9}$$

De (3.5.9) et le Lemme 3.2.3, on obtient

$$\sigma_{p+1}(f) \geq \sigma_p(A_s).$$

(ii) On suppose que $f(z)$ est une solution méromorphe transcendante de (3.1.5) telle que $\lambda_p\left(\frac{1}{f}\right) < \mu_p(f)$ et $\{f_1, f_2, \cdots, f_k\}$ est une base de solutions méromorphes de (3.1.5). D'après le Théorème 3.1.1, on obtient $\sigma_{p+1}(f_j) = \sigma_p(A_s)$, $(j = 1, 2, \cdots, k)$. Par la théorie élémentaire des équations différentielles, toutes les solutions de (3.1.5) peuvent être représentées sous la forme

$$f(z) = f_0(z) + B_1 f_1(z) + B_2 f_2(z) + \cdots + B_k f_k(z), \tag{3.5.10}$$

avec $B_1, \cdots, B_k \in \mathbb{C}$ et la fonction f_0 est sous la forme

$$f_0(z) = C_1(z)f_1(z) + C_2(z)f_2(z) + \cdots + C_k(z)f_k(z), \tag{3.5.11}$$

avec $C_1(z), \cdots, C_k(z)$ sont des fonctions méromorphes convenables satisfaisant

$$C_j' = F.G_j(f_1, \cdots, f_k). [W(f_1, \cdots, f_k)]^{-1}, \ j = 1, 2, \cdots, k, \tag{3.5.12}$$

avec $G_j(f_1, \cdots, f_k)$ sont des polynômes différentiels dans $f_1, \cdots, f_k$ et leurs dérivés avec des coefficients constants, et $W(f_1, \cdots, f_k)$ est le Wronskien de $f_1, \cdots, f_k$. Comme le Wronskien $W(f_1, \cdots, f_k)$ est un polynôme différentiel dans $f_1, \cdots, f_k$, il est facile d'obtenir

$$\sigma_{p+1}(W) \leq \max\{\sigma_{p+1}(f_j) : j = 1, 2, \cdots, k\} = \sigma_p(A_s). \tag{3.5.13}$$

De plus, on a $G_j(f_1, \cdots, f_k)$ sont des polynômes différentiels dans $f_1, \cdots, f_k$ et leurs dérivés avec des coefficients constants, alors

$$\sigma_{p+1}(G_j) \leq \max\{\sigma_{p+1}(f_j) : j = 1, 2, \cdots, k\} = \sigma_p(A_s), \ (j = 1, 2, \cdots, k). \tag{3.5.14}$$

D'après le Lemme 3.2.13, (3.5.12), (3.5.13) et (3.5.14), for $j = 1, \cdots, k$, on a

$$\sigma_{p+1}(C_j) = \sigma_{p+1}(C_j') \leq \max\{\sigma_{p+1}(F), \sigma_p(A_s)\} = \sigma_p(A_s). \tag{3.5.15}$$

Ainsi, de (3.5.10), (3.5.11) et (3.5.15), on obtient

$$\sigma_{p+1}(f) \leq \max\{\sigma_{p+1}(C_j), \sigma_{p+1}(f_j) : j = 1, 2, \cdots, k\} = \sigma_p(A_s).$$

Comme $\sigma_p(F) > \sigma_p(A_s)$, alors de (3.1.5), par une simple considération d'ordre, on obtient $\sigma_p(f) \geq \sigma_p(F)$. D'où, $\sigma_p(f) \geq \sigma_p(F)$ et $\sigma_{p+1}(f) \leq \sigma_p(A_s)$.

(iii) D'après le Lemme 3.2.13 et (3.5.12)-(3.5.14), for $j = 1, \cdots, k$, on a

$$\sigma_{p+1}(C_j) = \sigma_{p+1}(C_j') \leq \max\{\sigma_{p+1}(F), \sigma_p(A_s)\} = \sigma_{p+1}(F). \tag{3.5.16}$$

De (3.5.10), (3.5.11) et (3.5.16), on a

$$\sigma_{p+1}(f) \leq \max\{\sigma_{p+1}(C_j), \sigma_{p+1}(f_j) : j = 1, 2, \cdots, k\} \leq \sigma_{p+1}(F).$$

De (3.1.5), par une simple considération d'ordre, on obtient $\sigma_{p+1}(f) \geq \sigma_{p+1}(F)$. D'où $\sigma_{p+1}(f) = \sigma_{p+1}(F)$.

Chapitre 4

Croissance des solutions des équations différentielles complexes à coefficients séries Lacunaire d'ordre (p, q) fini

4.1 Introduction et résultats

Pour la croissance des solutions des équations différentielles linéaires complexes d'ordre supérieur

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z)f^{(k-1)} + \cdots + A_1(z)f' + A_0(z)f = 0, \qquad (4.1.1)$$

et

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z)f^{(k-1)} + \cdots + A_1(z)f' + A_0(z)f = F(z), \qquad (4.1.2)$$

où $A_j(z)$ $(j = 0, 1, \cdots, k-1)$, $F(z)$ sont des fonctions entières, plusieurs auteurs ont obtenu des résultats importants, (voir par exemple [3], [37], [45], [46], [47], [49], [52], [56], [58], [61]). Dans [52], Tu, Xu, Liu et Liu ont considéré l'équation (4.1.2) et ils ont obtenu des résultats sur les propriétés des solutions de (4.1.2) lorsqu'un coefficient $A_d(z)$ $(0 \leq d \leq k-1)$ est dominant et étant une série Lacunaire.

Théorème A ([52]) *Soient $A_j(z)$ $(j = 0, 1, \cdots, k-1)$, $F(z)$ des fonctions entières d'ordre p-itératif fini vérifiant*

$$\max\{\sigma_p(A_j) \ \ (j \neq d)\} \leq \sigma_p(A_d) < \infty$$

et

$$\max\{\tau_p(A_j) : \sigma_p(A_j) = \sigma_p(A_d)\} < \tau_p(A_d) \ (0 \leq d \leq k-1).$$

Supposons que $A_d(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{\lambda_n} z^{\lambda_n}$ *est une fonction entière telle que la suite des exposants* $\{\lambda_n\}$ *vérifie*

$$\frac{\lambda_n}{n} > (\log n)^{2+\eta} \ (\eta > 0, n \in \mathbb{N}), \tag{4.1.3}$$

alors, on a

(i) *Si* $\sigma_p(F) < \sigma_p(A_d)$ *ou* $\sigma_p(F) = \sigma_p(A_d)$ *et* $\tau_p(F) < \tau_p(A_d)$, *alors toute solution transcendante* $f(z)$ *de* (4.1.2) *vérifie* $\sigma_{p+1}(f) = \sigma_p(A_d)$. *En outre, si* $F(z) \not\equiv 0$, *alors toute solution transcendante* $f(z)$ *de* (4.1.2) *vérifie* $\bar{\lambda}_{p+1}(f) = \lambda_{p+1}(f) = \sigma_{p+1}(f) = \sigma_p(A_d)$.

(ii) *Si* $\sigma_p(F) > \sigma_p(A_d)$ *et* $\sigma_{p+1}(F) \leq \sigma_p(A_d)$, *alors toutes les solutions de* (4.1.2) *vérifient* $\sigma_p(f) \geq \sigma_p(F)$ et $\sigma_{p+1}(f) \leq \sigma_p(A_d)$.

(iii) *Si* $\sigma_{p+1}(F) > \sigma_p(A_d)$, *alors toutes les solutions de* (4.1.2) *vérifies* $\sigma_{p+1}(f) = \sigma_{p+1}(F)$ *et* $\bar{\lambda}_{p+1}(f) = \lambda_{p+1}(f) = \sigma_{p+1}(F)$ *pour toutes les solutions de* (4.1.2) *avec au plus une solution exceptionnelle* f_0 *vérifiant* $\lambda_{p+1}(f_0) < \sigma_{p+1}(F)$.

Théorème B ([52]) *Soient* $A_j(z)$ $(j = 0, 1, \cdots, k-1)$, $F(z)$ *des fonctions entières d'ordre p-itératif fini vérifiant*

$$\max\{\sigma_p(A_j) \ \ (j \neq d)\,, \sigma_p(F)\} < \mu_p(A_d) = \sigma_p(A_d) = \sigma < \infty \ (0 \leq d \leq k-1).$$

Supposons que $A_d(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{\lambda_n} z^{\lambda_n}$ *est une fonction entière telle que la suite des exposants* $\{\lambda_n\}$ *vérifie la condition* (4.1.3). *Alors toute solution transcendante* $f(z)$ *de* (4.1.2) *vérifie* $\mu_{p+1}(f) = \sigma_{p+1}(f) = \sigma$. *En outre, si* $F(z) \not\equiv 0$, *alors toute solution transcendante* $f(z)$ *de* (4.1.2) *vérifie* $\underline{\bar{\lambda}}_{p+1}(f) = \underline{\lambda}_{p+1}(f) = \bar{\lambda}_{p+1}(f) = \lambda_{p+1}(f) = \sigma$.

Dans le résultat suivant, Zhan et Zheng [61] ont étudié la croissance des solutions de (4.1.2) lorsque les coefficients sont des fonctions méromorphes et ils ont étendu les résultats du Théorème A à l'ordre (p, q).

Théorème C ([61]) *Supposons que* $A_j(z)$ $(j = 0, 1, \cdots, k-1)$, $F(z)$ *sont des fonctions méromorphes vérifiant qu'il existe* $d \in \{0, 1, \cdots, k-1\}$ *telles que*

$$\sigma_1 = \max\{\sigma_{(p,q)}(A_j), (j \neq d), \sigma_{(p,q)}(F)\} < \mu_{(p,q)}(A_d) \leq \sigma_{(p,q)}(A_d) < \infty.$$

Supposons que $A_d(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{\lambda_n} z^{\lambda_n}$ *est aussi une fonction entière telle que la suite des exposants* $\{\lambda_n\}$ *vérifie la condition* (4.1.3). *Si* $f(z)$ *est une solution méromorphe de* (4.1.2) *vérifiant* $\lambda_{(p,q)}(\frac{1}{f}) < \mu_{(p,q)}(A_d)$*, alors, on a les résultats suivants.*

(a) *Si* $f(z)$ *est une solution rationnelle, alors* $f(z)$ *doit être un polynôme de degré* $\deg f \leq d - 1$.

(b) *Si* $f(z)$ *est une solution transcendante, alors* $f(z)$ *vérifie* $\mu_{(p+1,q)}(f) = \mu_{(p,q)}(A_d) \leq \sigma_{(p+1,q)}(f) = \sigma_{(p,q)}(A_d)$. *En outre, si* $F(z) \not\equiv 0$*, alors on a* $\underline{\overline{\lambda}}_{(p+1,q)}(f) = \mu_{(p+1,q)}(f) = \mu_{(p,q)}(A_d) \leq \sigma_{(p,q)}(A_d) = \sigma_{(p+1,q)}(f) = \bar{\lambda}_{(p+1,q)}(f)$.

Dans [46], Li et Cao ont considéré l'équation (4.1.2) avec des coefficients méromorphes d'ordre (p, q) fini et ils ont obtenu les résultats suivants.

Théorème D ([46]) *Supposons que* $A_j(z)$ $(j = 0, 1, \cdots, k-1)$, $F(z) \not\equiv 0$ *sont des fonctions méromorphes dans le plan vérifiant*

$$\max\{\sigma_{(p,q)}(A_j), \lambda_{(p,q)}(\frac{1}{A_0}), \sigma_{(p+1,q)}(F) : j = 1, 2, \cdots, k-1\} < \sigma_{(p,q)}(A_0),$$

alors toutes les solutions méromorphes $f(z)$*, dont les pôles sont de multiplicité uniformément bornée,* de (4.1.2), *vérifie*

$$\bar{\lambda}_{(p+1,q)}(f) = \lambda_{(p+1,q)}(f) = \sigma_{(p+1,q)}(f) = \sigma_{(p,q)}(A_0),$$

avec au plus une solution exceptionnelle f_0 *vérifiant* $\sigma_{(p+1,q)}(f_0) < \sigma_{(p,q)}(A_0)$.

Théorème E ([46]) *Soient* $A_j(z)$ $(j = 0, 1, \cdots, k-1)$, $F(z) \not\equiv 0$ *sont des fonctions méromorphes dans le plan vérifiant*

$$\max\{\sigma_{(p,q)}(A_j) : j = 0, 1, \cdots, k-1\} < \sigma_{(p+1,q)}(F).$$

Supposons que toutes les solutions de (4.1.2) *sont des fonctions méromorphes, dont les pôles sont de multiplicité uniformément bornée, alors on a* $\sigma_{(p+1,q)}(f) = \sigma_{(p+1,q)}(F)$ *pour toutes les solutions de* (4.1.2).

En ce qui concerne les équations différentielles linéaires

$$A_k(z)f^{(k)} + A_{k-1}(z)f^{(k-1)} + \cdots + A_1(z)f' + A_0(z)f = 0, \tag{4.1.4}$$

et

$$A_k(z)f^{(k)} + A_{k-1}(z)f^{(k-1)} + \cdots + A_1(z)f' + A_0(z)f = F(z), \tag{4.1.5}$$

où $k \geq 2$, $A_j(z), j = 0, 1, \cdots, k$, $F(z)$ sont des fonctions entières, $A_0(z)A_k(z)F(z) \not\equiv 0$, de nombreux auteurs ont étudié les propriétés de leurs solutions et ils ont obtenu des résultats intéressants, (voir par exemple [22], [25], [29], [56]). Il est bien connu que si $A_k(z) \equiv 1$, alors toutes les solutions de (4.1.4) et (4.1.5) sont des fonctions entières, mais quand $A_k(z)$ est une fonction entière non constante, alors l'équation (4.1.4) ou (4.1.5) peut avoir des solutions méromorphes. En effet, l'équation

$$zf''' + 4f'' + (-1 - \frac{1}{2}z^2 - z)e^{-z}f' + ((1 - \frac{1}{2}z^2 + 2z)e^{-2z} + ze^{-3z})f = 0$$

admet une solution méromorphe $f(z) = \frac{1}{z^2}e^{e^{-z}}$ et l'équation

$$z^3f''' - z^3f'' - 2z^2f' - (z^3 + 3z^2 - 6)f = (z^2 - 6)\sin z$$

admet une solution méromorphe $f(z) = \frac{\cos z}{z}$. Dans [56], Wu et Zheng ont considéré les équations (4.1.4) et (4.1.5), et ils ont obtenu le résultat suivant lorsque le coefficient $A_k(z)$ est d'ordre maximal et une série de Fabry.

Théorème F ([56]) *Supposons que $k \geq 2$, $A_j(z)$ $(j = 0, 1, \cdots, k)$ sont des fonctions entières vérifiant $A_k(z)A_0(z) \not\equiv 0$ et $\sigma(A_j) < \sigma(A_k) < \infty$ $(j = 0, 1, \cdots, k-1)$. Supposons que $A_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{\lambda_n} z^{\lambda_n}$ et la suite des exposants $\{\lambda_n\}$ vérifie la condition*

$$\frac{\lambda_n}{n} \to \infty \ (n \to \infty). \tag{4.1.6}$$

Alors toute solution rationnelle $f(z)(\not\equiv 0)$ de (4.1.4) est un polynôme de degré $\deg f \leq k-1$ et toute solution méromorphe transcendante $f(z)$, dont les pôles sont de multiplicité uniformément bornée, de (4.1.4) telle que $\lambda\left(\frac{1}{f}\right) < \mu(f)$, vérifie

$$\bar{\lambda}(f - \varphi) = \lambda(f - \varphi) = \sigma(f) = \infty, \ \bar{\lambda}_2(f - \varphi) = \lambda_2(f - \varphi) = \sigma_2(f) = \sigma(A_k),$$

où φ est une fonction méromorphe d'ordre fini et n'est pas solution de (4.1.4).

D'où, on pose les questions suivantes : Que pouvons-nous dire au sujet de la croissance des solutions d'équations de la forme (4.1.4) et (4.1.5) lorsque le coefficient $A_k(z)$ est d'ordre (p,q) maximal et une série Lacunaire et peut on avoir des résultats similaires aux Théorèmes D, E et F en utilisant le concept de l'ordre (p,q) ?

Récemment, Huang, Zhou, Tu et Ning [37], ont considéré l'équation (4.1.2) avec des conditions différentes sur le coefficient arbitraire $A_d(z)$ $(0 \leq d \leq k-1)$ et ils ont obtenu le résultat suivant.

Théorème G ([37]) *Soient $A_j(z)$ $(j = 0, 1, \cdots, k-1)$, $F(z)$ des fonctions entières. Supposons qu'il existe $d \in \{1, \cdots, k-1\}$ tel que $\max\{\sigma(A_j), \sigma(F) : j \neq d\} \leq \sigma(A_d) < \infty$, $\max\{\tau(A_j) : \sigma(A_j) = \sigma(A_d), \tau(F)\} < \tau(A_d)$ et que $T(r, A_d) \sim \log M(r, A_d)$ quand $r \to +\infty$ à l'extérieur d'un ensemble de r de mesure logarithmique finie. Alors on a*
(i) *Toute solution transcendante $f(z)$ de* (4.1.2) *vérifie $\sigma_2(f) = \sigma(A_d)$, et* (4.1.2) *peut avoir des solutions polynomiales $f(z)$ de degré $< d$.*
(ii) *Si $F(z) \not\equiv 0$, alors toute solution transcendante $f(z)$ de* (4.1.2) *vérifie $\bar{\lambda}_2(f) = \lambda_2(f) = \sigma_2(f) = \sigma(A_d)$.*
(iii) *Si $d = 1$, alors toute solution non constante $f(z)$ de* (4.1.2) *vérifie $\sigma_2(f) = \sigma(A_1)$. En outre, si $F(z) \not\equiv 0$, alors toute solution non constante $f(z)$ de* (4.1.2) *vérifie $\bar{\lambda}_2(f) = \lambda_2(f) = \sigma_2(f) = \sigma(A_1)$.*

Autres questions se posent : Premièrement, peut-on avoir des résultats similaires au Théorème G pour les solutions de l'équation (4.1.2) lorsque les coefficients sont d'ordre (p,q) fini ? et deuxièmement, qu'est-ce qu'on peut dire sur la croissance des solutions des équations (4.1.4) et (4.1.5) lorsqu'on a le coefficient arbitraire $A_s(z)$ $(0 \leq s \leq k)$ au lieu du coefficient $A_k(z)$?

Dans ce chapitre, on va répondre à ces questions en obtenant les résultats suivants.

Théorème 4.1.1 ([25]) *Soient $k \geq 2$, $A_j(z)$ $(j = 0, 1, \cdots, k)$ des fonctions entières vérifiant $A_k(z)A_0(z) \not\equiv 0$ et*

$$\max\{\sigma_{(p,q)}(A_j) : j = 0, 1, \cdots, k-1\} < \sigma_{(p,q)}(A_k) < \infty.$$

Supposons que $A_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{\lambda_n} z^{\lambda_n}$ et la suite des exposants $\{\lambda_n\}$ vérifie (4.1.3). *Alors toute solution rationnelle $f(z)$ de* (4.1.4) *est un polynôme de degré $\deg f \leq k-1$ et toute solution méromorphe transcendante $f(z)$ de* (4.1.4) *telle que $\lambda_{(p,q)}(\frac{1}{f}) < \mu_{(p,q)}(f)$, vérifie*

$$\bar{\lambda}_{(p+1,q)}(f-\varphi) = \lambda_{(p+1,q)}(f-\varphi) = \sigma_{(p+1,q)}(f) = \sigma_{(p,q)}(A_k),$$

avec $\varphi(z)$ est une fonction méromorphe vérifiant $\sigma_{(p,q)}(\varphi) < \infty$ et n'est pas une solution de (4.1.4).

Théorème 4.1.2 ([25]) *Soient $k \geq 2$, $A_j(z)$ $(j = 0, 1, \cdots, k)$ et $F(z)$ des fonctions entières vérifiant $A_k(z)A_0(z)F(z) \not\equiv 0$ et*

$$\max\{\sigma_{(p,q)}(A_j), \sigma_{(p,q)}(F) : j = 0, 1, \cdots, k-1\} < \sigma_{(p,q)}(A_k) < \infty.$$

Supposons que $A_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{\lambda_n} z^{\lambda_n}$ et la suite des exposants $\{\lambda_n\}$ vérifie (4.1.3). *Alors toute solution rationnelle $f(z)$ de* (4.1.5) *est un polynôme de degré $\deg f \leq k-1$ et toute solution méromorphe transcendante $f(z)$ de* (4.1.5) *telle que $\lambda_{(p,q)}(\frac{1}{f}) < \mu_{(p,q)}(f)$, vérifie*

$$\bar{\lambda}_{(p+1,q)}(f-\varphi) = \lambda_{(p+1,q)}(f-\varphi) = \sigma_{(p+1,q)}(f) = \sigma_{(p,q)}(A_k),$$

avec $\varphi(z)$ est une fonction méromorphe vérifiant $\sigma_{(p,q)}(\varphi) < \infty$ et n'est pas une solution de (4.1.5).

Théorème 4.1.3 ([25]) *Soient $k \geq 2$, $A_j(z)$ $(j = 0, 1, \cdots, k)$ des fonctions entières vérifiant les hypothèses du Théorème 4.1.1 et $F(z) \not\equiv 0$ est une fonction entière.*

(i) *Si $\sigma_{(p+1,q)}(F) < \sigma_{(p,q)}(A_k)$, alors toute solution méromorphe transcendante $f(z)$ de* (4.1.5), *vérifie*

$$\sigma_{(p+1,q)}(f) = \sigma_{(p,q)}(A_k),$$

avec au plus une solution exceptionnelle f_0 vérifiant $\sigma_{(p+1,q)}(f_0) < \sigma_{(p,q)}(A_k)$.

(ii) *Si* $\sigma_{(p+1,q)}(F) > \sigma_{(p,q)}(A_k)$, *alors toute solution méromorphe transcendante* $f(z)$ *de* (4.1.5), *vérifie*

$$\sigma_{(p+1,q)}(f) = \sigma_{(p+1,q)}(F).$$

Les résultats qui suivent sont pour le cas où on a le coefficient arbitraire $A_s(z)$ $(0 \leq s \leq k)$ au lieu du coefficient $A_k(z)$ dans les équations (4.1.4) et (4.1.5).

Théorème 4.1.4 ([24]) *Soient* $A_j(z)$ $(j = 0, 1, \cdots, k)$ *telles que* $A_k(z)A_0(z) \not\equiv 0$ *des fonctions entières vérifiant*

$$\max\{\sigma_{(p,q)}(A_j),\ j \neq s\} < \sigma_{(p,q)}(A_s) < \infty,\ (0 \leq s \leq k)$$

Supposons que $A_s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{\lambda_n} z^{\lambda_n}$ *et la suite des exposants* $\{\lambda_n\}$ *vérifie* (4.1.3). *Alors toute solution rationnelle* $f(z)$ *de* (4.1.4) *est un polynôme de degré* $\deg f \leq s - 1$ *et toute solution méromorphe transcendante* $f(z)$, *dont les pôles sont de multiplicité uniformément bornée, de* (4.1.4) *telle que* $\lambda_{(p,q)}(\frac{1}{f}) < \mu_{(p,q)}(f)$, *vérifie*

$$\sigma_{(p+1,q)}(f) = \sigma_{(p,q)}(A_s).$$

Théorème 4.1.5 ([24]) *Soient* $A_j(z)$ $(j = 0, 1, \cdots, k)$ *telles que* $A_k(z)A_0(z) \not\equiv 0$ *des fonctions entières vérifiant*

$$\max\{\sigma_{(p,q)}(A_j), j \neq s\} < \mu_{(p,q)}(A_s) = \sigma_{(p,q)}(A_s) = \sigma < \infty,\ (0 \leq s \leq k).$$

Supposons que $A_s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{\lambda_n} z^{\lambda_n}$ *et la suite des exposants* $\{\lambda_n\}$ *vérifie* (4.1.3). *Alors toute solution rationnelle* $f(z)$ *de* (4.1.4) *est un polynôme de degré* $\deg f \leq s - 1$ *et toute solution méromorphe transcendante* $f(z)$, *dont les pôles sont de multiplicité uniformément bornée, de* (4.1.4) *telle que* $\lambda_{(p,q)}(\frac{1}{f}) < \mu_{(p,q)}(f)$, *vérifie*

$$\mu_{(p+1,q)}(f) = \sigma_{(p,q)}(f) = \sigma_{(p,q)}(A_s) = \sigma.$$

Théorème 4.1.6 ([24]) *Soient* $A_j(z)$ $(j = 0, 1, \cdots, k)$ *des fonctions entières vérifiant les hypothèses du Théorème 4.1.4 et* $F(z) \not\equiv 0$ *est une fonction entière.*

(i) *Si* $\sigma_{(p+1,q)}(F) < \sigma_{(p,q)}(A_s)$, *alors toute solution méromorphe transcendante* $f(z)$, *dont les pôles sont de multiplicité uniformément bornée, de* (4.1.5), *vérifie*

$$\sigma_{(p+1,q)}(f) = \sigma_{(p,q)}(A_s),$$

avec au plus une solution exceptionnelle f_0 vérifiant $\sigma_{(p+1,q)}(f_0) < \sigma_{(p,q)}(A_s)$.
(ii) *Si $\sigma_{(p+1,q)}(F) > \sigma_{(p,q)}(A_s)$, alors toute solution méromorphe transcendante $f(z)$, dont les pôles sont de multiplicité uniformément bornée, de* (4.1.5), *vérifie*

$$\sigma_{(p+1,q)}(f) = \sigma_{(p+1,q)}(F).$$

Pour l'équation (4.1.2), on a obtenu le résultat suivant.

Théorème 4.1.7 ([24]) *Soient $A_j(z)$ $(j = 0, 1, \cdots, k-1)$, $F(z)$ des fonctions entières. Supposons qu'il existe $s \in \{1, 2, \cdots, k-1\}$ tel que*

$$\max\{\sigma_{(p,q)}(A_j), \sigma_{(p,q)}(F),\ j \neq s\} \leq \sigma_{(p,q)}(A_s) = \sigma < \infty,$$

$$\max\{\tau_{(p,q)}(A_j) : \sigma_{(p,q)}(A_j) = \sigma_{(p,q)}(A_s), \tau_{(p,q)}(F)\} < \tau_{(p,q)}(A_s)$$

et que $T(r, A_s) \sim \log M(r, A_s)$ quand $r \to +\infty$ à l'extérieur d'un ensemble de r de mesure logarthmique finie. Alors
(i) *Toute solution transcendante $f(z)$ de* (4.1.2) *vérifie $\sigma_{(p+1,q)}(f) = \sigma_{(p,q)}(A_s)$, et toute solution non-transcendante $f(z)$ de* (4.1.2) *est un polynôme de degré* $\deg f \leq s-1$.
(ii) *Si $F(z) \not\equiv 0$, alors toute solution transcendante $f(z)$ de* (4.1.2) *vérifie $\bar{\lambda}_{(p+1,q)}(f) = \lambda_{(p+1,q)}(f) = \sigma_{(p+1,q)}(f) = \sigma_{(p,q)}(A_s)$.*
(iii) *Si $s = 1$, toute solution non constante $f(z)$ de* (4.1.2) *vérifie $\sigma_{(p+1,q)}(f) = \sigma_{(p,q)}(A_1)$ et si $F(z) \not\equiv 0$, toute solution non constante $f(z)$ de* (4.1.2) *vérifie $\bar{\lambda}_{(p+1,q)}(f) = \lambda_{(p+1,q)}(f) = \sigma_{(p+1,q)}(f) = \sigma_{(p,q)}(A_1)$.*

4.2 Lemmes préliminaires

Lemme 4.2.1 ([27]) *Soit f une fonction méromorphe transcendante dans le plan $\mathbb{C}$ et soit $\alpha > 1$, une constante donnée. Alors pour toute constante donnée et pour tout $\varepsilon > 0$ donné :*
(i) *Il existe un ensemble $E_1 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie et une constante $B > 0$ qui dépend uniquement de α tels que pour tout z avec $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_1$, on a*

$$\left|\frac{f^{(n)}(z)}{f^{(m)}(z)}\right| \leq B\left(\frac{T(\alpha r, f)}{r}(\log^{\alpha} r) \log T(\alpha r, f)\right)^{n-m} \quad (0 \leq m < n).$$

(ii) *Il existe un ensemble* $H_1 \subset [0, 2\pi)$ *de mesure linéaire nulle et une constante* $B > 0$ *qui dépend uniquement de* α, *pour tout* $\theta \in [0, 2\pi) \backslash H_1$, *il existe une constante* $R_0 = R_0(\theta) > 1$ *tels que pour tout* z *vérifiant* $\arg z = \theta$ *et* $|z| = r > R_0$, *on a*

$$\left|\frac{f^{(n)}(z)}{f^{(m)}(z)}\right| \leq B\left(T(\alpha r, f)\log T(\alpha r, f)\right)^{n-m} \quad (0 \leq m < n).$$

Lemme 4.2.2 ([24]) *Soit* $f(z) = \frac{g(z)}{d(z)}$ *une fonction méromorphe, telle que* $g(z)$ *et* $d(z)$ *sont des fonctions entières vérifiant* $\mu_{(p,q)}(g) = \mu_{(p,q)}(f) = \mu \leq \sigma_{(p,q)}(g) = \sigma_{(p,q)}(f) \leq +\infty$ *et* $\lambda_{(p,q)}(d) = \sigma_{(p,q)}(d) = \lambda_{(p,q)}(\frac{1}{f}) < \mu$. *Alors il existe un ensemble* $E_2 \subset (1, +\infty)$ *de mesure logarithmique finie tel que pour tout* $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_2$ *et* $|g(z)| = M(r, g)$ *on a*

$$\left|\frac{f(z)}{f^{(k)}(z)}\right| \leq r^{2k}, \ (k \in \mathbb{N}).$$

Lemme 4.2.3 ([44]) *Soient* $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_{\lambda_n} z^{\lambda_n}$ *une fonction entière et la suite des exposants* $\{\lambda_n\}$ *vérifie la condition (4.1.3). Alors pour tout* $\varepsilon > 0$ *donné,*

$$\log L(r, f) > (1 - \varepsilon)\log M(r, f)$$

est satisfaite à l'extérieur d'un ensemble E_3*de mesure logarithmique finie, où* $M(r, f) = \sup\limits_{|z|=r} |f(z)|$, $L(r, f) = \inf\limits_{|z|=r} |f(z)|$.

Lemme 4.2.4 ([47]) *Soit* $f(z)$ *une fonction entière d'ordre* (p, q) *vérifiant* $0 < \sigma_{(p,q)}(f) = \sigma < \infty$. *Alors pour tout* $\varepsilon > 0$ *donné, il existe un ensemble* $E_4 \subset (1, +\infty)$ *de mesure logarithmique infinie tel que pour tout* $r \in E_4$, *on a*

$$\sigma = \lim_{r\to\infty, r\in E_4} \frac{\log_p T(r, f)}{\log_q r} = \lim_{r\to\infty, r\in E_4} \frac{\log_{p+1} M(r, f)}{\log_q r},$$

et

$$M(r, f) > \exp_{p+1}\{(\sigma - \varepsilon)\log_q r\}.$$

Lemme 4.2.5 ([1, 28]) *Soient* $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *et* $h : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *des fonctions monotones croissantes. Si (i)* $g(r) \leq h(r)$ *à l'extérieur d'un ensemble exceptionnel de mesure linéaire finie, ou (ii)* $g(r) \leq h(r)$, $r \notin E_5 \cup [0, 1]$ *avec* $E_5 \subset (1, +\infty)$ *est un ensemble de mesure logarithmique finie. Alors pour tout* $\alpha > 1$, *il existe* $r_0 = r_0(\alpha) > 0$ *tel que* $g(r) \leq h(\alpha r)$ *pour tout* $r > r_0$.

Lemme 4.2.6 ([46]) *Soient* $A_0(z), A_1(z), \cdots, A_{k-1}(z)$ *et* $F(z) \not\equiv 0$ *des fonctions méromorphes. Si* $f(z)$ *est une solution méromorphe de* (4.1.2) *vérifiant*

$$\max\{\sigma_{(p+1,q)}(F), \sigma_{(p+1,q)}(A_j) : j = 0, 1, \cdots, k-1\} < \sigma_{(p+1,q)}(f).$$

Alors on a

$$\bar{\lambda}_{(p+1,q)}(f) = \lambda_{(p+1,q)}(f) = \sigma_{(p+1,q)}(f).$$

Lemme 4.2.7 ([24, 25]) *Soit* $f(z) = \frac{g(z)}{d(z)}$ *une fonction méromorphe, avec* $g(z)$ *et* $d(z)$ *des fonctions entières telles que* $\mu_{(p,q)}(g) = \mu_{(p,q)}(f) = \mu \leq \sigma_{(p,q)}(g) = \sigma_{(p,q)}(f) \leq +\infty$ *et* $\lambda_{(p,q)}(d) = \sigma_{(p,q)}(d) = \lambda_{(p,q)}(\frac{1}{f}) < \mu$. *Alors il existe un ensemble* $E_6 \subset (1, +\infty)$ *de mesure logarithmique finie tel que pour tout* $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_6$ *et* $|g(z)| = M(r, g)$ *on a*

$$\frac{f^{(n)}(z)}{f(z)} = \left(\frac{\nu_g(r)}{z}\right)^n (1 + o(1)), \quad (n \in \mathbb{N}),$$

avec $\nu_g(r)$ *est l'indice central de* $g(z)$.

Lemme 4.2.8 ([61]) *Soit* $f(z)$ *une fonction méromorphe vérifiant* $\sigma_{(p,q)}(f) = \sigma < \infty$. *Alors il existe des fonctions entières* $\pi_1(z)$, $\pi_2(z)$ *et* $D(z)$ *telles que*

$$f(z) = \frac{\pi_1(z)e^{D(z)}}{\pi_2(z)}$$

et

$$\sigma_{(p,q)}(f) = \max\{\sigma_{(p,q)}(\pi_1), \sigma_{(p,q)}(\pi_2), \sigma_{(p,q)}(e^{D(z)})\}.$$

De plus, pour tout $\varepsilon > 0$ *donné, on a*

$$|f(z)| \leq \exp_{p+1}\{(\sigma + \varepsilon)\log_q r\}, \quad r \notin E_7,$$

avec E_7 *est un ensemble de* r *de mesure linéaire finie.*

Lemme 4.2.9 ([41]) *Soit* $f(z)$ *une fonction entière d'ordre* (p, q), *et soit* $\nu_f(r)$ *l'indice central de* $f(z)$. *Alors*

$$\sigma_{(p,q)}(f) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log_p \nu_f(r)}{\log_q r}.$$

Lemme 4.2.10 ([46]) *Si $f(z)$ est une fonction méromorphe, alors $\sigma_{(p,q)}(f') = \sigma_{(p,q)}(f)$.*

Lemme 4.2.11 *Soit $f(z)$ une fonction entière telle que $\sigma_{(p,q)}(f) = \sigma < +\infty$. Alors, il existe des fonctions entières $\beta(z)$ et $D(z)$ telles que*

$$f(z) = \beta(z)\, e^{D(z)},$$

$$\sigma_{(p,q)}(f) = \max\left\{\sigma_{(p,q)}(\beta), \sigma_{(p,q)}\left(e^{D(z)}\right)\right\}$$

et

$$\sigma_{(p,q)}(\beta) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log_p N(r, \frac{1}{f})}{\log_q r}.$$

De plus, pour tout $\varepsilon > 0$ donné, on a

$$|\beta(z)| \geq \exp\left\{-\exp_p\left\{(\sigma_{(p,q)}(\beta) + \varepsilon)\log_q r\right\}\right\} \quad (r \notin E_8),$$

avec $E_8 \subset (1, +\infty)$ est un ensemble de r de mesure linéaire finie.

Preuve. D'après le Théorème 10.2 dans [39] et le Théorème 2.2 dans [40], on obtient que $f(z)$ peut être représentée par

$$f(z) = \beta(z)\, e^{D(z)},$$

avec

$$\sigma_{(p,q)}(f) = \max\left\{\sigma_{(p,q)}(\beta), \sigma_{(p,q)}\left(e^{D(z)}\right)\right\}.$$

Par le même raisonnement que dans la démonstration du Lemme 6.1 dans [38], pour tout $\varepsilon > 0$ donné, on obtient

$$|\beta(z)| \geq \exp\left\{-\exp_p\left\{(\sigma_{(p,q)}(\beta) + \varepsilon)\log_q r\right\}\right\} \quad (r \notin E_8),$$

avec $E_8 \subset (1, +\infty)$ est un ensemble de r de mesure linéaire finie.

Lemme 4.2.12 *Soit $f(z)$ une fonction entière telle que $\sigma_{(p,q)}(f) = \sigma < +\infty$. Alors, il existe un ensemble $E_9 \subset (1, +\infty)$ de r de mesure linéaire finie tel que pour tout $\varepsilon > 0$ donné, on a*

$$\exp\left\{-\exp_p\left\{(\sigma + \varepsilon)\log_q r\right\}\right\} \leq |f(z)| \leq \exp_{p+1}\left\{(\sigma + \varepsilon)\log_q r\right\} \quad (r \notin E_9).$$

Preuve. Quand $p = q = 1$, le lemme est dû à Chen [14]. Donc, on suppose que $p \geq q > 1$ ou $p > q = 1$. Il est clair que $|f(z)| \leq \exp_{p+1}\left\{(\sigma+\varepsilon)\log_q r\right\}$. D'après le Lemme 4.2.11, il existe des fonctions entières $\beta(z)$ et $D(z)$ telles que

$$f(z) = \beta(z)\, e^{D(z)} \quad \text{et} \quad \sigma_{(p,q)}(f) = \max\left\{\sigma_{(p,q)}(\beta), \sigma_{(p,q)}\left(e^{D(z)}\right)\right\}.$$

Comme $\sigma_{(p-1,q)}(D) = \sigma_{(p,q)}\left(e^{D(z)}\right) \leq \sigma_{(p,q)}(f)$ et $\left|e^{D(z)}\right| \geq e^{-|D(z)|}$, pour $|z| = r$ suffisamment grand, on a

$$\left|e^{D(z)}\right| \geq e^{-|D(z)|} \geq \exp\left\{-\exp_p\left\{(\sigma+\frac{\varepsilon}{2})\log_q r\right\}\right\}.$$

D'après le Lemme 4.2.11, il suit que

$$|f(z)| = |\beta(z)|\left|e^{D(z)}\right|$$

$$\begin{aligned}
&\geq \exp\left\{-\exp_p\left\{(\sigma_{(p,q)}(\beta)+\frac{\varepsilon}{2})\log_q r\right\}\right\}\exp\left\{-\exp_p\left\{(\sigma+\frac{\varepsilon}{2})\log_q r\right\}\right\} \\
&\geq \exp\left\{-\exp_p\left\{(\sigma+\frac{\varepsilon}{2})\log_q r\right\}\right\}\exp\left\{-\exp_p\left\{(\sigma+\frac{\varepsilon}{2})\log_q r\right\}\right\} \\
&= \exp\left\{-2\exp_p\left\{\sigma+\frac{\varepsilon}{2})\log_q r\right\}\right\}
\end{aligned}$$

$$\geq \exp\left\{-\exp_p\left\{(\sigma+\varepsilon)\log_q r\right\}\right\}, \quad (r \notin E_9),$$

avec $E_9 \subset (1, +\infty)$ est un ensemble de r de mesure linéaire finie.

Lemme 4.2.13 *Soit $f(z)$ une fonction entière avec $\sigma_{(p,q)}(f) = \sigma$, $0 < \sigma < \infty$. Alors, pour tout $\beta < \sigma$ donné, il existe un ensemble E_{10} de mesure logarithmique infinie tel que pour tout $|z| = r \in E_{10}$, on a*

$$\log_{p+1} M(r,f) > \beta \log_q r,$$

où $M(r,f) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$.

Preuve. D'après la définition de l'ordre (p,q), pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe une suite $\{r_n\}$ tend vers ∞ vérifiant $(1+\frac{1}{n})r_n < r_{n+1}$ et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_{p+1} M(r_n,f)}{\log_q r_n} = \sigma.$$

Alors, il existe un entier positif n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ et pour tout $\varepsilon > 0$ donné, on a

$$M(r_n, f) > \exp_{p+1}\{(\sigma - \varepsilon)\log_q r_n\}. \tag{4.2.1}$$

Quand $q \geq 1$, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_q(\frac{n}{n+1})r}{\log_q r} = 1.$$

Comme $\beta < \sigma$, alors on peut choisir $\varepsilon > 0$ suffisamment petit vérifiant $0 < \varepsilon < \sigma - \beta$. Donc, il existe un entier positif n_1 tel que pour tout $n \geq n_1$, on a

$$\frac{\log_q(\frac{n}{n+1})r}{\log_q r} > \frac{\beta}{\sigma - \varepsilon}. \tag{4.2.2}$$

Prenons $n_2 = \max\{n_{0,}n_1\}$. Alors, de (4.2.1) et (4.2.2), on obtient pour $r \in [r_n, (1 + \frac{1}{n})r_n]$

$$\log_{p+1} M(r, f) \geq \log_{p+1} M(r_n, f) > (\sigma - \varepsilon)\log_q r_n \geq (\sigma - \varepsilon)\log_q(\frac{n}{n+1})r > \beta \log_q r.$$

Posons $E_{10} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [r_n, (1 + \frac{1}{n})r_n]$, on a

$$m_l(E_{10}) = \sum_{n=n_1}^{\infty} \int_{r_n}^{(1+\frac{1}{n})r_n} \frac{dt}{t} = \sum_{n=n_2}^{\infty} \log(1 + \frac{1}{n}) = \infty.$$

Lemme 4.2.14 *Soit* $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_{\lambda_n} z^{\lambda_n}$ *une fonction entière avec* $\sigma_{(p,q)}(f) = \sigma$, $0 < \sigma < \infty$. *Si la suite des exposants* $\{\lambda_n\}$ *vérifie la condition (4.1.3), alors pour tout* $\beta < \sigma$ *donné, il existe un ensemble* E_{11} *de mesure logarithmique infinie tel que pour tout* $|z| = r \in E_{11}$*, on a*

$$|f(z)| > \exp_{p+1}\{\beta \log_q r\}.$$

Preuve. D'après le Lemme 4.2.3, pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe un ensemble E_3 de mesure logarithmique finie tel que pour tout $r \notin E_3$, on a

$$\log L(r, f) > (1 - \varepsilon)\log M(r, f).$$

Pour tout $\beta < \sigma$ donné, on choisit $\delta > 0$ tel que $\beta < \delta < \sigma$ et ε suffisamment petit vérifiant $0 < \varepsilon < \frac{\delta-\beta}{\delta}$. Alors, d'après le Lemme 4.2.13, il existe un ensemble E_{10} de mesure logarithmique infinie tel que pour tout $r \in E_{10}$, on a

$$|f(z)| > L(r,f) > [M(r,f)]^{1-\varepsilon} > \left(\exp_{p+1}\{\delta \log_q r\}\right)^{1-\varepsilon} > \exp_{p+1}\{\beta \log_q r\},$$

avec $E_{11} = E_{10} \backslash E_3$ est un ensemble de mesure logarithmique infinie.

Lemme 4.2.15 *Soit $f(z)$ une fonction entière avec $\mu_{(p,q)}(f) = \mu < \infty$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe un ensemble $E_{12} \subset (1,\infty)$ de mesure logarithmique infinie tel que pour tout $|z| = r \in E_{12}$, on a*

$$\mu_{(p,q)}(f) = \lim_{r\to+\infty, r\in E_{11}} \frac{\log_{p+1} M(r,f)}{\log_q r}$$

et

$$M(r,f) < \exp_{p+1}\{(\mu+\varepsilon)\log_q r\}.$$

Preuve. D'après la définition de l'ordre (p,q) inférieur, il existe une suite $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers ∞ vérifiant $(1+\frac{1}{n})r_n < r_{n+1}$, et

$$\lim_{r_n\to\infty} \frac{\log_{p+1} M(r_n,f)}{\log_q r_n} = \mu_{(p,q)}(f).$$

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe n_2 tel que pour $n \geq n_2$ et tout $r \in [r_n, (1+\frac{1}{n})r_n]$, on a

$$\frac{\log_{p+1} M(r_n,f)}{\log_q (1+\frac{1}{n})r_n} \leq \frac{\log_{p+1} M(r,f)}{\log_q r} \leq \frac{\log_{p+1} M((1+\frac{1}{n})r_n,f)}{\log_q r_n}.$$

Soit $E_{12} = \bigcup\limits_{n=n_2}^{\infty} [r_n, (1+\frac{1}{n})r_n]$, alors pour tout $r \in E_{12}$, on a

$$\lim_{r\to+\infty, r\in E_{11}} \frac{\log_{p+1} M(r,f)}{\log_q r} = \lim_{r_n\to+\infty} \frac{\log_{p+1} M(r_n,f)}{\log_q r_n} = \mu_{(p,q)}(f),$$

et

$$m_l(E_{12}) = \sum_{n=n_2}^{\infty} \int_{r_n}^{(1+\frac{1}{n})r_n} \frac{dt}{t} = \sum_{n=n_2}^{\infty} \log(1+\frac{1}{n}) = \infty.$$

Lemme 4.2.16 ([52]) *Soit $f(z)$ une fonction entière transcendante, et soit $z_r = re^{i\theta_r}$ un point vérifiant $|f(z_r)| = M(r,f)$. Alors, il existe une constante $\delta_r > 0$ telle que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin E_{13}$ et $\arg z = \theta \in [\theta_r - \delta_r, \theta_r + \delta_r]$, on a*

$$\left|\frac{f(z)}{f^{(j)}(z)}\right| \leq 2r^j, \; (j \in \mathbb{N}).$$

Lemme 4.2.17 ([47]) *Soit $f(z)$ une fonction entière d'ordre (p,q) vérifiant $0 < \sigma_{(p,q)}(f) = \sigma < \infty$ et $0 < \tau_{(p,q)}(f) = \tau < \infty$. Alors pour tout $\beta < \tau$ donné, il existe un ensemble $E_{14} \subset [1,+\infty)$ de mesure logarithmique infinie tel que pour tout $|z| = r \in E_{14}$, on a*

$$\log_p M(r,f) > \beta(\log_{q-1} r)^{\sigma} \quad (r \in E_{14}).$$

Lemme 4.2.18 *Soit $f(z)$ une fonction entière transcendante vérifiant $0 < \sigma_{(p,q)}(f) = \sigma < \infty$, $0 < \tau_{(p,q)}(f) = \tau < \infty$ et $T(r,f) \sim \log M(r,f)$ quand $r \to +\infty$ à l'extérieur d'un ensemble de r de mesure logarithmique finie. Alors pour tout $\beta < \tau$ donné, il existe un ensemble $E_{15} \subset (0,+\infty)$ de mesure logarithmique infinie et un ensemble $H_2 \subset [0,2\pi)$ de mesure linéaire nulle tels que pour tout z vérifiant $|z| = r \in E_{15}$ et $\arg z = \theta \in [0,2\pi)\backslash H_2$, on a*

$$\left|f(re^{i\theta})\right| > \exp_p\{\beta(\log_{q-1} r)^{\sigma}\}.$$

Preuve. Comme $m(r,f) \sim \log M(r,f)$ quand $r \to +\infty$ et $r \notin F \subset (0,+\infty)$, où F est un ensemble de r de mesure logarithmique finie, d'après la définition de $m(r,f)$, il existe un ensemble $H_2 \subset [0,2\pi)$ de mesure linéaire nulle tels que pour tout z vérifiant $\arg z = \theta \in [0,2\pi)\backslash H_2$ et pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\left|f(re^{i\theta})\right| > [M(r,f)]^{1-\varepsilon}. \tag{4.2.3}$$

Autrement, nous voyons qu'il existe un ensemble $H \subset [0,2\pi)$ de mesure linéaire positive, i.e., $m(H) > 0$ telle que, pour tout z vérifiant $\arg z = \theta \in H$ et pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\left|f(re^{i\theta})\right| \leq [M(r,f)]^{1-\varepsilon}.$$

Alors, pour tout $r \notin F$, on obtient

$$\begin{aligned} m(r,f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \left|f(re^{i\theta})\right| d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_H \log^+ \left|f(re^{i\theta})\right| d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi)\backslash H} \log^+ \left|f(re^{i\theta})\right| d\theta \\ &\leq \frac{(1-\varepsilon)m(H)}{2\pi}\log M(r,f) + \frac{2\pi - m(H)}{2\pi}\log M(r,f) \\ &= \frac{2\pi - \varepsilon m(H)}{2\pi}\log M(r,f). \end{aligned} \tag{4.2.4}$$

Comme $\varepsilon > 0$ et $m(H) > 0$, alors (4.2.4) est une contradiction avec $m(r,f) \sim \log M(r,f)$. Pour tout $\beta < \tau$, on choisit $\xi(> 0)$ vérifiant $\beta < \xi < \tau$. D'après le Lemme 4.2.17, il existe un ensemble $E_{14} \subset [1,+\infty)$ de mesure logarithmique infinie tel que pour tout $|z| = r \in E_{14}$, on a

$$\log_p M(r,f) > \xi(\log_{q-1} r)^{\sigma}. \tag{4.2.5}$$

De (4.2.3) et (4.2.5), pour tout ε $(0 < \varepsilon < 1 - \frac{\beta}{\xi})$ donné et pour tout $|z| = r \in E_{14} \backslash F$ et $\arg z = \theta \in [0, 2\pi) \backslash H_2$, on obtient

$$\left|f(re^{i\theta})\right| > [M(r,f)]^{1-\varepsilon} > \left(\exp_p\{\xi(\log_{q-1} r)^{\sigma}\}\right)^{1-\varepsilon} > \exp_p\{\beta(\log_{q-1} r)^{\sigma}\}.$$

4.3 Preuve du Théorème 4.1.1

Supposons que $f(z) \not\equiv 0$ est une solution rationnelle de (4.1.4). Si $f(z)$ est une fonction rationnelle, qui a un pôle à z_0 de degré $\lambda \geq 1$, ou $f(z)$ est un polynôme de degré $\deg f \geq k$, alors $f^{(k)}(z) \not\equiv 0$. Comme $\max\{\sigma_{(p,q)}(A_j) : j = 0, 1, \cdots, k-1\} < \sigma_{(p,q)}(A_k) < \infty$, alors $\sigma_{(p,q)}(0) = \sigma_{(p,q)}(A_k(z)f^{(k)} + A_{k-1}(z)f^{(k-1)} + \cdots + A_1(z)f' + A_0(z)f) = \sigma_{(p,q)}(A_k) > 0$, c'est une contradiction. D'où, $f(z)$ est un polynôme de degré $\deg f \leq k-1$.

Maintenant, on suppose que $f(z)$ est une solution méromorphe transcendante de (4.1.4) telle que $\lambda_{(p,q)}(\frac{1}{f}) < \mu_{(p,q)}(f)$. D'après le Lemme 4.2.1 (i), il existe une constante $B > 0$ et un ensemble $E_1 \subset (1,+\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin [0,1] \cup E_1$, on a

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right| \leq B\left(T(2r,f)\right)^{j+1}, \ j = 0, 1, \cdots, k. \tag{4.3.1}$$

Comme $\lambda_{(p,q)}(\frac{1}{f}) < \mu_{(p,q)}(f)$, alors d'après le théorème de factorisation de Hadamard, f peut être définie par $f(z) = \frac{g(z)}{d(z)}$, avec $g(z)$ et $d(z)$ sont des fonctions entières vérifiant

$$\mu_{(p,q)}(g) = \mu_{(p,q)}(f) = \mu \leq \sigma_{(p,q)}(g) = \sigma_{(p,q)}(f), \ \lambda_{(p,q)}(d) = \sigma_{(p,q)}(d) = \lambda_{(p,q)}(\frac{1}{f}) < \mu.$$

Alors d'après le Lemme 4.2.2, il existe un ensemble $E_2 \subset (1,+\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour tout $|z| = r \notin [0,1] \cup E_2$ et $|g(z)| = M(r,g)$, on a

$$\left|\frac{f(z)}{f^{(k)}(z)}\right| \leq r^{2k}. \tag{4.3.2}$$

Soit $\alpha = \max\{\sigma_{(p,q)}(A_j) : j = 0, 1, \cdots, k-1\} < \sigma_{(p,q)}(A_k) = \sigma < \infty$. Alors, pour tout ε donné $(0 < 2\varepsilon < \sigma - \alpha)$, on a

$$|A_j(z)| \leq \exp_{p+1}\{(\alpha + \varepsilon) \log_q r\}, j = 0, 1, \cdots, k-1. \tag{4.3.3}$$

D'après le Lemme 4.2.3 et le Lemme 4.2.4, il existe un ensemble $E_{16} \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique infinie tel que pour tout $|z| = r \in E_{16}$, on a

$$\begin{aligned} |A_k(z)| &\geq L(r, A_k) > (M(r, A_k))^{1-\varepsilon} \geq (\exp_{p+1}\{(\sigma - \frac{\varepsilon}{2}) \log_q r\})^{1-\varepsilon} \\ &\geq \exp_{p+1}\{(\sigma - \varepsilon) \log_q r\}. \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

De (4.1.4), on a

$$|A_k(z)| \leq \left|\frac{f}{f^{(k)}}\right| \left[|A_{k-1}(z)| \left|\frac{f^{(k-1)}}{f}\right| + \cdots + |A_1(z)| \left|\frac{f'}{f}\right| + |A_0(z)|\right]. \tag{4.3.5}$$

D'où, en substituant (4.3.1)-(4.3.4) dans (4.3.5), pour tout $|z| = r \in E_{16} \backslash ([0, 1] \cup E_1 \cup E_2)$, on obtient

$$\exp_{p+1}\{(\sigma - \varepsilon) \log_q r\} \leq r^{2k} \exp_{p+1}\{(\alpha + \varepsilon) \log_q r\} kB\, (T(2r, f))^{k+1}. \tag{4.3.6}$$

D'après le Lemme 4.2.5 et (4.3.6), on a $\sigma - \varepsilon \leq \sigma_{(p+1,q)}(f)$. Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, alors on obtient $\sigma_{(p+1,q)}(f) \geq \sigma_{(p,q)}(A_k)$. D'autre part, de (4.1.4), on a

$$\left|\frac{f^{(k)}}{f}\right| \leq \left|\frac{A_{k-1}(z)}{A_k(z)}\right| \left|\frac{f^{(k-1)}}{f}\right| + \cdots + \left|\frac{A_1(z)}{A_k(z)}\right| \left|\frac{f'}{f}\right| + \left|\frac{A_0(z)}{A_k(z)}\right|. \tag{4.3.7}$$

D'après le Lemme 4.2.7, il existe un ensemble $E_6 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour tout $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_6$ et $|g(z)| = M(r, g)$, on a

$$\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)} = \left(\frac{\nu_g(r)}{z}\right)^j (1 + o(1)), \quad j = 0, \cdots, k. \tag{4.3.8}$$

Comme $\max\{\sigma_{(p,q)}(\frac{A_{k-1}}{A_k}), \cdots, \sigma_{(p,q)}(\frac{A_0}{A_k}\} = \sigma_{(p,q)}(A_k) = \sigma < \infty$, alors, d'après le Lemme 4.2.8, il existe un ensemble $E_7 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour tout $|z| = r \notin E_7$ et pour r suffisamment grand, on a

$$\left|\frac{A_j(z)}{A_k(z)}\right| \leq \exp_{p+1}\{(\sigma + \varepsilon) \log_q r\}, (j = 0, \cdots, k-1). \tag{4.3.9}$$

Alors, de (4.3.7), (4.3.8) et (4.3.9), pour r suffisamment grand tel que $r \notin [0,1] \cup E_6 \cup E_7$

$$\left(\frac{\nu_g(r)}{r}\right) |1+o(1)| \leq k\,|1+o(1)| \exp_{p+1}\{(\sigma+\varepsilon)\log_q r\}. \tag{4.3.10}$$

De (4.3.10), le Lemme 4.2.5 et le Lemme 4.2.9, on obtient

$$\sigma_{(p+1,q)}(f) = \sigma_{(p+1,q)}(g) \leq \sigma_{(p,q)}(A_k) + \varepsilon$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, alors $\sigma_{(p+1,q)}(f) \leq \sigma_{(p,q)}(A_k)$. Ainsi, $\sigma_{(p+1,q)}(f) = \sigma_{(p,q)}(A_k)$.

Ensuite, on démontre que $\bar{\lambda}_{(p+1,q)}(f-\varphi) = \lambda_{(p+1,q)}(f-\varphi) = \sigma_{(p+1,q)}(f)$. Soit $g(z) = f(z) - \varphi(z)$. Alors $\sigma_{(p+1,q)}(g) = \sigma_{(p+1,q)}(f)$. En substituant $f(z) = g(z) + \varphi(z)$ dans (4.1.4), on obtient

$$\begin{aligned} & g^{(k)} + \frac{A_{k-1}(z)}{A_k(z)} g^{(k-1)} + \cdots + \frac{A_1(z)}{A_k(z)} g' + \frac{A_0(z)}{A_k(z)} g \\ = & -\left[\varphi^{(k)} + \frac{A_{k-1}(z)}{A_k(z)} \varphi^{(k-1)} + \cdots + \frac{A_1(z)}{A_k(z)} \varphi' + \frac{A_0(z)}{A_k(z)} \varphi\right]. \end{aligned}$$

Comme $\varphi(z)$ n'est pas une solution de (4.1.4), alors on a

$$\varphi^{(k)} + \frac{A_{k-1}(z)}{A_k(z)} \varphi^{(k-1)} + \cdots + \frac{A_1(z)}{A_k(z)} \varphi' + \frac{A_0(z)}{A_k(z)} \varphi \not\equiv 0.$$

Donc, d'après le Lemme 4.2.6 et $\sigma_{(p,q)}(\varphi) < \infty$, on obtient

$$\bar{\lambda}_{(p+1,q)}(g) = \lambda_{(p+1,q)}(g) = \sigma_{(p+1,q)}(g),$$

d'où

$$\bar{\lambda}_{(p+1,q)}(f-\varphi) = \lambda_{(p+1,q)}(f-\varphi) = \sigma_{(p+1,q)}(f) = \sigma_{(p,q)}(A_k).$$

4.4 Preuve du Théorème 4.1.2

Supposons que $f(z)$ est une solution rationnelle de (4.1.5). Si $f(z)$ est une fonction rationnelle, qui a un pôle à z_0 de degré $\lambda \geq 1$, ou $f(z)$ est un polynôme de degré $\deg f \geq k$, alors $f^{(k)}(z) \not\equiv 0$. Comme $\max\{\sigma_{(p,q)}(A_j), \sigma_{(p,q)}(F) : j = 0, 1, \cdots, k-1\} < \sigma_{(p,q)}(A_k) < \infty$, alors

$$\begin{aligned} \sigma_{(p,q)}(A_k) &= \sigma_{(p,q)}(A_k(z) f^{(k)}) \\ &= \sigma_{(p,q)}(F(z) - (A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + \cdots + A_1(z) f' + A_0(z) f)) \\ &\leq \max\{\sigma_{(p,q)}(A_j), \sigma_{(p,q)}(F) : j = 0, 1, \cdots, k-1\} \\ &< \sigma_{(p,q)}(A_k), \end{aligned}$$

c'est une contradiction. D'où, $f(z)$ est un polynôme de degré $\deg f \leq k-1$.

Maintenant, on suppose que $f(z)$ est une solution méromorphe transcendante de (4.1.5) telle que $\lambda_{(p,q)}(\frac{1}{f}) < \mu_{(p,q)}(f)$. Soit $\beta = \max\{\sigma_{(p,q)}(A_j), \sigma_{(p,q)}(F) : j = 0, 1, \cdots, k-1\} < \sigma_{(p,q)}(A_k) = \sigma < \infty$. Alors, pour tout ε donné $(0 < 2\varepsilon < \sigma - \beta)$, on a

$$|A_j(z)| \leq \exp_{p+1}\{(\beta + \varepsilon) \log_q r\}, j = 0, 1, \cdots, k-1, \tag{4.4.1}$$

$$|F(z)| \leq \exp_{p+1}\{(\beta + \varepsilon) \log_q r\}. \tag{4.4.2}$$

Comme $\sigma_{(p,q)}(d) = \lambda_{(p,q)}(\frac{1}{f}) < \mu_{(p,q)}(f) = \mu_{(p,q)}(g)$, alors pour tout ε $(0 < 2\varepsilon < \mu_{(p,q)}(f) - \lambda_{(p,q)}(\frac{1}{f}))$ et pour r suffisamment grand on a

$$\frac{1}{|f(z)|} = \left|\frac{d(z)}{g(z)}\right| \leq \frac{\exp_{p+1}\{(\lambda_{(p,q)}(\frac{1}{f}) + \varepsilon) \log_q r\}}{\exp_{p+1}\{(\mu_{(p,q)}(f) - \varepsilon) \log_q r\}} \leq 1. \tag{4.4.3}$$

De (4.1.5), on obtient

$$|A_k(z)| \leq \left|\frac{f}{f^{(k)}}\right| \left[|A_{k-1}(z)| \left|\frac{f^{(k-1)}}{f}\right| + \cdots + |A_1(z)| \left|\frac{f'}{f}\right| + |A_0(z)| + |F(z)| \left|\frac{1}{f}\right|\right]. \tag{4.4.4}$$

D'où, en substituant (4.3.1), (4.3.2), (4.3.4), (4.4.1)-(4.4.3) dans (4.4.4), pour r suffisamment grand tel que $|z| = r \in E_{16} \backslash ([0,1] \cup E_1 \cup E_2)$, on obtient

$$\exp_{p+1}\{(\sigma - \varepsilon) \log_q r\} \leq r^{2k} \exp_{p+1}\{(\beta + \varepsilon) \log_q r\}(k+1)B\left(T(2r, f)\right)^{k+1}. \tag{4.4.5}$$

D'après le Lemme 4.2.5 et (4.4.5), on a $\sigma - \varepsilon \leq \sigma_{(p+1,q)}(f)$. Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, alors on obtient $\sigma_{(p+1,q)}(f) \geq \sigma_{(p,q)}(A_k)$. D'autre part, de (4.1.5), on a

$$\left|\frac{f^{(k)}}{f}\right| \leq \left|\frac{A_{k-1}(z)}{A_k(z)}\right| \left|\frac{f^{(k-1)}}{f}\right| + \cdots + \left|\frac{A_1(z)}{A_k(z)}\right| \left|\frac{f'}{f}\right| + \left|\frac{A_0(z)}{A_k(z)}\right| + \left|\frac{F(z)}{A_k(z)}\right| \left|\frac{1}{f}\right|. \tag{4.4.6}$$

D'après le Lemme 4.2.7, il existe un ensemble $E_6 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour tout $|z| = r \notin [0,1] \cup E_6$ et $|g(z)| = M(r, g)$, on a

$$\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)} = \left(\frac{\nu_g(r)}{z}\right)^j (1 + o(1)), \quad j = 0, \cdots, k. \tag{4.4.7}$$

Comme $\max\{\sigma_{(p,q)}(\frac{A_{k-1}}{A_k}),\cdots,\sigma_{(p,q)}(\frac{A_0}{A_k}),\sigma_{(p,q)}(\frac{F}{A_k})\}=\sigma_{(p,q)}(A_k)=\sigma<\infty$, alors d'après le Lemme 4.2.8, il existe un ensemble $E_7\subset(1,+\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour tout $|z|=r\notin E_7$ et pour r suffisamment grand, on a

$$\left|\frac{A_j(z)}{A_k(z)}\right|\leq \exp_{p+1}\{(\sigma+\varepsilon)\log_q r\}\quad (\,j=0,\cdots,k-1), \tag{4.4.8}$$

$$\left|\frac{F(z)}{A_k(z)}\right|\leq \exp_{p+1}\{(\sigma+\varepsilon)\log_q r\}. \tag{4.4.9}$$

Alors, de (4.4.3), (4.4.6)-(4.4.9), pour r suffisamment grand, $r\notin[0,1]\cup E_6\cup E_7$, on a

$$\left(\frac{\nu_g(r)}{r}\right)|1+o(1)|\leq (k+1)\,|1+o(1)|\exp_{p+1}\{(\sigma+\varepsilon)\log_q r\}. \tag{4.4.10}$$

De (4.4.10), le Lemme 4.2.5 and le Lemme 4.2.9, on obtient $\sigma_{(p+1,q)}(f)=\sigma_{(p+1,q)}(g)\leq\sigma_{(p,q)}(A_k)+\varepsilon$. Comme $\varepsilon>0$ est arbitraire, alors on obtient $\sigma_{(p+1,q)}(f)\leq\sigma_{(p,q)}(A_k)$. D'où, on a $\sigma_{(p+1,q)}(f)=\sigma_{(p,q)}(A_k)$.

Ensuite, on démontre que $\bar\lambda_{(p+1,q)}(f-\varphi)=\lambda_{(p+1,q)}(f-\varphi)=\sigma_{(p+1,q)}(f)$. Soit $g(z)=f(z)-\varphi(z)$. Alors $\sigma_{(p+1,q)}(g)=\sigma_{(p+1,q)}(f)$. En substituant $f(z)=g(z)+\varphi(z)$ dans

$$f^{(k)}+\frac{A_{k-1}(z)}{A_k(z)}f^{(k-1)}+\cdots+\frac{A_1(z)}{A_k(z)}f'+\frac{A_0(z)}{A_k(z)}f=\frac{F(z)}{A_k(z)},$$

on obtient

$$\begin{aligned} & g^{(k)}+\frac{A_{k-1}(z)}{A_k(z)}g^{(k-1)}+\cdots+\frac{A_1(z)}{A_k(z)}g'+\frac{A_0(z)}{A_k(z)}g \\ = & \frac{F(z)}{A_k(z)}-\left[\varphi^{(k)}+\frac{A_{k-1}(z)}{A_k(z)}\varphi^{(k-1)}+\cdots+\frac{A_1(z)}{A_k(z)}\varphi'+\frac{A_0(z)}{A_k(z)}\varphi\right]. \end{aligned}$$

Comme $\varphi(z)$ n'est pas une solution de (4.1.5), alors on a

$$\frac{F(z)}{A_k(z)}-\varphi^{(k)}-\frac{A_{k-1}(z)}{A_k(z)}\varphi^{(k-1)}-\cdots-\frac{A_1(z)}{A_k(z)}\varphi'-\frac{A_0(z)}{A_k(z)}\varphi\not\equiv 0.$$

Donc, d'après le Lemme 4.2.6 et $\sigma_{(p,q)}(\varphi)<\infty$, on obtient

$$\bar\lambda_{(p+1,q)}(g)=\lambda_{(p+1,q)}(g)=\sigma_{(p+1,q)}(g),$$

d'où

$$\bar\lambda_{(p+1,q)}(f-\varphi)=\lambda_{(p+1,q)}(f-\varphi)=\sigma_{(p+1,q)}(f)=\sigma_{(p,q)}(A_k).$$

4.5 Preuve du Théorème 4.1.3

(i) On suppose que $f(z)$ est une solution méromorphe transcendante de (4.1.5) et $\{f_1, f_2, \cdots, f_k\}$ est une base de solutions méromorphes de l'équation homogène correspondante (4.1.4) de (4.1.5). D'après le Théorème 4.1.1, on obtient $\sigma_{(p+1,q)}(f_j) = \sigma_{(p,q)}(A_k)$, $(j = 1, 2, \cdots, k)$. Par la théorie élémentaire des équations différentielles, toutes les solutions de (4.1.5) peuvent être représentées sous la forme

$$f(z) = f_0(z) + B_1 f_1(z) + B_2 f_2(z) + \cdots + B_k f_k(z), \tag{4.5.1}$$

avec $B_1, \cdots, B_k \in \mathbb{C}$ et la fonction f_0 est sous la forme

$$f_0(z) = C_1(z) f_1(z) + C_2(z) f_2(z) + \cdots + C_k(z) f_k(z) \tag{4.5.2}$$

avec $C_1(z), \cdots, C_k(z)$ sont des fonctions méromorphes convenables satisfaisant

$$C_j' = F.G_j(f_1, \cdots, f_k).[W(f_1, \cdots, f_k)]^{-1}, \ j = 1, 2, \cdots, k, \tag{4.5.3}$$

avec $G_j(f_1, \cdots, f_k)$ sont des polynômes différentiels dans $f_1, \cdots, f_k$ et leurs dérivés avec des coefficients constants, et $W(f_1, \cdots, f_k)$ est le Wronskien de $f_1, \cdots, f_k$. Comme le Wronskien $W(f_1, \cdots, f_k)$ est un polynôme différentiel dans $f_1, \cdots, f_k$, il est facile d'obtenir

$$\sigma_{(p+1,q)}(W) \leq \max\{\sigma_{(p+1,q)}(f_j) : j = 1, 2, \cdots, k\} = \sigma_{(p,q)}(A_k). \tag{4.5.4}$$

De plus, on a $G_j(f_1, \cdots, f_k)$ sont des polynômes différentiels dans $f_1, \cdots, f_k$ et leurs dérivés avec des coefficients constants, alors

$$\sigma_{(p+1,q)}(G_j) \leq \max\{\sigma_{(p+1,q)}(f_j) : j = 1, 2, \cdots, k\} = \sigma_{(p,q)}(A_k), (j = 1, 2, \cdots, k). \tag{4.5.5}$$

D'après le Lemme 4.2.10, (4.5.4) et (4.5.5), pour $j = 1, \cdots, k$, on obtient

$$\sigma_{(p+1,q)}(C_j) = \sigma_{(p+1,q)}(C_j') \leq \max\{\sigma_{(p+1,q)}(F), \sigma_{(p,q)}(A_k)\} = \sigma_{(p,q)}(A_k). \tag{4.5.6}$$

Ainsi, de (4.5.1), (4.5.2) et (4.5.6), on obtient

$$\sigma_{(p+1,q)}(f) \leq \max\{\sigma_{(p+1,q)}(C_j), \sigma_{(p+1,q)}(f_j) : j = 1, 2, \cdots, k, \} = \sigma_{(p,q)}(A_k).$$

Maintenant, on suppose que toutes les solutions méromorphes f de l'équation (4.1.5) vérifie $\sigma_{(p+1,q)}(f) = \sigma_{(p,q)}(A_k)$, avec au plus une solution exceptionnelle f_0 telle que $\sigma_{(p+1,q)}(f_0) < \sigma_{(p,q)}(A_k)$. En effet, s'il existe une autre solution méromorphe f_1 de (4.1.5) vérifiant $\sigma_{(p+1,q)}(f_1) < \sigma_{(p,q)}(A_k)$, alors $f_0 - f_1$ est une solution méromorphe non nulle de (4.1.4) vérifiant $\sigma_{(p+1,q)}(f_0 - f_1) < \sigma_{(p,q)}(A_k)$. Mais, d'après le Théorème 4.1.1 on a toute solution de (4.1.4) vérifie $\sigma_{(p+1,q)}(f) = \sigma_{(p,q)}(A_k)$. C'est une contradiction. D'où, on a toutes les solutions méromorphes f de l'équation (4.1.5) vérifie $\sigma_{(p+1,q)}(f) = \sigma_{(p,q)}(A_k)$, avec au plus une solution exceptionnelle f_0 telle que $\sigma_{(p+1,q)}(f_0) < \sigma_{(p,q)}(A_k)$.

(ii) De (4.1.5), par une simple considération d'ordre, on obtient $\sigma_{(p+1,q)}(f) \geq \sigma_{(p+1,q)}(F)$. D'après le Lemme 4.2.10 et (4.5.3)-(4.5.5), pour $j = 1, \cdots, k$, on obtient

$$\sigma_{(p+1,q)}(C_j) = \sigma_{(p+1,q)}(C'_j) \leq \max\{\sigma_{(p+1,q)}(F), \sigma_{(p,q)}(A_k)\} = \sigma_{(p+1,q)}(F). \tag{4.5.7}$$

De (4.5.1), (4.5.2) et (4.5.7), on a

$$\sigma_{(p+1,q)}(f) \leq \max\{\sigma_{(p+1,q)}(C_j), \sigma_{(p+1,q)}(f_j) : j = 1, 2, \cdots, k, \} \leq \sigma_{(p+1,q)}(F).$$

D'où, on obtient $\sigma_{(p+1,q)}(f) = \sigma_{(p+1,q)}(F)$.

4.6 Preuve du Théorème 4.1.4

Supposons que $f(z)$ est une solution rationnelle de (4.1.4). Si $f(z)$ est une fonction rationnelle, qui a un pôle à z_0 de degré $m \geq 1$, ou $f(z)$ est un polynôme de degré $\deg f \geq s$, alors $f^{(s)}(z) \not\equiv 0$. Comme $\max\{\sigma_{(p,q)}(A_j), j \neq s\} < \sigma_{(p,q)}(A_s) < \infty$, alors

$$\sigma_{(p,q)}(0) = \sigma_{(p,q)}(A_k(z)f^{(k)} + A_{k-1}(z)f^{(k-1)} + \cdots + A_1(z)f' + A_0(z)f) = \sigma_{(p,q)}(A_s) > 0,$$

c'est une contradiction. D'où, $f(z)$ est un polynôme de degré $\deg f \leq s - 1$.

Maintenant, on suppose que $f(z)$ est une solution méromorphe transcendante de (4.1.4) telle que $\lambda_{(p,q)}(\frac{1}{f}) < \mu_{(p,q)}(f)$. D'après le Lemme 4.2.1 (i), il existe une constante $B > 0$ et un ensemble $E_1 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_1$, on a

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right| \leq B\left(T(2r, f)\right)^{k+1}, \quad 1 \leq j \leq k. \tag{4.6.1}$$

Comme $\lambda_{(p,q)}(\frac{1}{f}) < \mu_{(p,q)}(f)$, alors d'après le théorème de factorisation de Hadamard, f peut être définie par $f(z) = \frac{g(z)}{d(z)}$, avec $g(z)$ et $d(z)$ sont des fonctions entières vérifiant

$$\mu_{(p,q)}(g) = \mu_{(p,q)}(f) = \mu \leq \sigma_{(p,q)}(g) = \sigma_{(p,q)}(f),\ \lambda_{(p,q)}(d) = \sigma_{(p,q)}(d) = \lambda_{(p,q)}(\frac{1}{f}) < \mu.$$

Alors d'après le Lemme 4.2.2, il existe un ensemble E_2 de mesure logarithmique finie tel que pour tout $|z| = r \notin [0,1] \cup E_2$ et $|g(z)| = M(r,g)$ et pour r suffisamment grand on a

$$\left|\frac{f(z)}{f^{(s)}(z)}\right| \leq r^{2s}, \quad (s \in \mathbb{N}). \tag{4.6.2}$$

Soit $\alpha = \max\{\sigma_{(p,q)}(A_j) : j \neq s\} < \sigma_{(p,q)}(A_s) = \sigma < \infty$. Alors, pour tout ε donné $(0 < 2\varepsilon < \sigma - \alpha)$, on a

$$|A_j(z)| \leq \exp_{p+1}\{(\alpha + \varepsilon)\log_q r\}, \quad j \neq s. \tag{4.6.3}$$

D'après le Lemme 4.2.3 et le Lemme 4.2.4, il existe un ensemble $E_{16} \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique infinie tel que pour tout $|z| = r \in E_{16}$, on a

$$\begin{aligned} |A_s(z)| &\geq L(r, A_s) > (M(r, A_s))^{(1-\varepsilon)} \geq (\exp_{p+1}\{(\sigma - \frac{\varepsilon}{2})\log_q r\})^{1-\varepsilon} \\ &\geq \exp_{p+1}\{(\sigma - \varepsilon)\log_q r\}. \end{aligned} \tag{4.6.4}$$

De (4.1.4), on a

$$\begin{aligned} |A_s(z)| \leq \left|\frac{f}{f^{(s)}}\right| \Bigg[|A_k(z)| \left|\frac{f^{(k)}}{f}\right| + |A_{k-1}(z)| \left|\frac{f^{(k-1)}}{f}\right| + \cdots + |A_{s+1}(z)| \left|\frac{f^{(s+1)}}{f}\right| \\ + |A_{s-1}(z)| \left|\frac{f^{(s-1)}}{f}\right| + \cdots + |A_1(z)| \left|\frac{f'}{f}\right| + |A_0(z)| \Bigg]. \end{aligned} \tag{4.6.5}$$

D'où, en substituant (4.6.1)-(4.6.4) dans (4.6.5), on obtient pour tout z vérifiant $r \in E_{16} \backslash (E_1 \cup E_2 \cup [0,1])$

$$\exp_{p+1}\{(\sigma - \varepsilon)\log_q r\} \leq r^{2s} \exp_{p+1}\{(\alpha + \varepsilon)\log_q r\} kB\left(T(2r, f)\right)^{k+1}. \tag{4.6.6}$$

De (4.6.6) et le Lemme 4.2.5, on a

$$\sigma_{(p+1,q)}(f) \geq \sigma_{(p,q)}(A_s).$$

Maintenant, nous prouvons que $\sigma_{(p+1,q)}(f) \leq \sigma_{(p,q)}(A_s)$. De (4.1.4), on a

$$-A_k(z)\frac{f^{(k)}}{f} = A_{k-1}(z)\frac{f^{(k-1)}}{f} + \cdots + A_{s+1}(z)\frac{f^{(s+1)}}{f}$$

$$+A_s(z)\frac{f^{(s)}}{f}+A_{s-1}(z)\frac{f^{(s-1)}}{f}+\cdots+A_1(z)\frac{f'}{f}+A_0(z). \tag{4.6.7}$$

D'après le Lemme 4.2.7, il existe un ensemble $E_6 \subset (1,+\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour tout $|z|=r\notin E_6$ et $|g(z)|=M(r,g)$, on a

$$\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}=\left(\frac{\nu_g(r)}{z}\right)^j(1+o(1)),\quad (j=0,\cdots,k). \tag{4.6.8}$$

Comme $\max\{\sigma_{(p,q)}(A_j), j\neq s\}\leq \sigma_{(p,q)}(A_s)<\infty$, alors pour r suffisamment grand, on a

$$|A_j(z)|\leq \exp_p\{(\sigma_{(p,q)}(A_s)+\varepsilon)\log_q r\},\ \ (j=0,\cdots,k). \tag{4.6.9}$$

D'après le Lemme 4.2.12, il existe un ensemble $E_9 \subset (1,+\infty)$ de mesure linéaire finie (et donc de mesure logarithmique finie) tel que pour tout $|z|=r\notin E_9$, on a

$$\begin{aligned}|A_k(z)| &\geq \exp\left\{-\exp_p\{(\sigma_{(p,q)}(A_k)+\varepsilon)\log_q r\}\right\}\\ &\geq \exp\left\{-\exp_p\{(\sigma_{(p,q)}(A_s)+\varepsilon)\log_q r\}\right\}.\end{aligned} \tag{4.6.10}$$

De (4.6.7) et (4.6.8), pour tout z vérifiant $|z|=r\notin E_6$ et $|g(z)|=M(r,g)$, on a

$$-A_k(z)\left(\frac{\nu_g(r)}{z}\right)^k(1+o(1))=A_{k-1}(z)\left(\frac{\nu_g(r)}{z}\right)^{k-1}(1+o(1))$$

$$+\cdots+A_{s+1}(z)\left(\frac{\nu_g(r)}{z}\right)^{s+1}(1+o(1))+A_s(z)\left(\frac{\nu_g(r)}{z}\right)^{s}(1+o(1))$$

$$+A_{s-1}(z)\left(\frac{\nu_g(r)}{z}\right)^{s-1}(1+o(1))+\cdots+A_1(z)\left(\frac{\nu_g(r)}{z}\right)(1+o(1))+A_0(z),$$

d'où

$$|A_k(z)|\left|\left(\frac{\nu_g(r)}{z}\right)^k\right||1+o(1)|\leq|A_{k-1}(z)|\left|\left(\frac{\nu_g(r)}{z}\right)^{k-1}\right||1+o(1)|$$

$$+\cdots+|A_{s+1}(z)|\left|\left(\frac{\nu_g(r)}{z}\right)^{s+1}\right||1+o(1)|+|A_s(z)|\left|\left(\frac{\nu_g(r)}{z}\right)^{s}\right||1+o(1)|$$

$$+|A_{s-1}(z)|\left(\frac{\nu_g(r)}{z}\right)^{s-1}|1+o(1)|+\cdots+|A_1(z)|\left(\frac{\nu_g(r)}{z}\right)|1+o(1)|+|A_0(z)| \tag{4.6.11}$$

et de (4.6.9)-(4.6.11) pour tout z vérifiant $|z|=r\notin(E_6\cup E_9)$ et $|g(z)|=M(r,g)$, on obtient

$$\exp\left\{-\exp_p\{(\sigma_{(p,q)}(A_s)+\varepsilon)\log_q r\}\right\}\left(\frac{\nu_g(r)}{r}\right)|1+o(1)|$$

$$\leq k\exp_{p+1}\{(\sigma_{(p,q)}(A_s)+\varepsilon)\log_q r\}\,|1+o(1)|\,,$$

ainsi,

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\log_{p+1}\nu_g(r)}{\log_q r}\leq\sigma_{(p,q)}(A_s)+\varepsilon. \tag{4.6.12}$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, alors de (4.6.12), le Lemme 4.2.5 et le Lemme 4.2.9, on a

$$\sigma_{(p+1,q)}(g)\leq\sigma_{(p,q)}(A_s),$$

d'où

$$\sigma_{(p+1,q)}(f)\leq\sigma_{(p,q)}(A_s).$$

Par conséquent, nous obtenons

$$\sigma_{(p+1,q)}(f)=\sigma_{(p,q)}(A_s).$$

4.7 Preuve du Théorème 4.1.5

Supposons que $f(z)$ est une solution rationnelle de (4.1.4). Par le même raisonnement que dans la démonstration du Théorème 4.1.4, il est clair que $f(z)$ est un polynôme de degré $\deg f \leq s-1$. Maintenant, on suppose que $f(z)$ est une solution méromorphe transcendante de (4.1.4) telle que $\lambda_{(p,q)}(\frac{1}{f}) < \mu_{(p,q)}(f)$. D'après le Théorème 4.1.4, on a $\sigma_{(p+1,q)}(f) = \sigma_{(p,q)}(A_s) = \sigma$. Alors, nous avons seulement besoin de prouver que $\mu_{(p+1,q)}(f) = \mu_{(p,q)}(A_s) = \sigma$. Comme $\max\{\sigma_{(p,q)}(A_j)\ (j \neq s)\} < \sigma$, alors il existe des constantes α_1, β_1 vérifiant $\max\{\sigma_{(p,q)}(A_j)\ (j \neq s)\} < \alpha_1 < \beta_1 < \sigma$. Donc

$$|A_j(z)|\leq\exp_{p+1}\{\alpha_1\log_q r\},\ \ j\neq s. \tag{4.7.1}$$

De plus, on a $A_s(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_{\lambda_n} z^{\lambda_n}$ telle que la suite des exposants $\{\lambda_n\}$ vérifie (4.1.3) et $\mu_{(p,q)}(A_s) = \sigma_{(p,q)}(A_s) = \sigma$. Alors, d'après le Lemme 4.2.14, il existe un ensemble E_{11} de mesure logarithmique infinie tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \in E_{11}$, on a

$$|A_s(z)|>\exp_{p+1}\{\beta_1\log_q r\}. \tag{4.7.2}$$

Ainsi, en substituant (4.7.1), (4.7.2), (4.6.1), (4.6.2) dans (4.6.5), pour tout z vérifiant $|z| = r \in E_{11}\backslash([0,1]\cup E_1\cup E_2)$, on obtient

$$\exp_{p+1}\{\beta_1\log_q r\}\leq B\exp_{p+1}\{\alpha_1\log_q r\}r^{2s}k[T(2r,f)]^{k+1}. \tag{4.7.3}$$

Comme β_1 est arbitrairement proche de σ, alors de (4.7.3) et le Lemme 4.2.5, on obtient

$$\mu_{(p+1,q)}(f) \geq \sigma = \mu_{(p,q)}(A_s).$$

D'autre part, de (4.1.4), on a

$$|A_k(z)| \left|\frac{f^{(k)}}{f}\right| \leq |A_{k-1}(z)| \left|\frac{f^{(k-1)}}{f}\right| + \cdots + |A_{s+1}(z)| \left|\frac{f^{(s+1)}}{f}\right| + |A_s(z)| \left|\frac{f^{(s)}}{f}\right|$$

$$+ |A_{s-1}(z)| \left|\frac{f^{(s-1)}}{f}\right| + \cdots + |A_1(z)| \left|\frac{f'}{f}\right| + |A_0(z)|. \qquad (4.7.4)$$

D'après le Lemme 4.2.15, pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe un ensemble $E_{12} \subset (1, \infty)$ de mesure logarithmique infinie tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \in E_{12}$, on a

$$|A_j(z)| \leq \exp_{p+1}\{(\mu_{(p,q)}(A_s) + \varepsilon) \log_q r\}, \ j = 0, \cdots, k. \qquad (4.7.5)$$

D'après le Lemme 4.2.12, il existe un ensemble $E_9 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour tout $|z| = r \notin E_9$, on a

$$|A_k(z)| \geq \exp\left\{- \exp_p\{(\sigma_{(p,q)}(A_k) + \varepsilon) \log_q r\}\right\}$$

$$\geq \exp\left\{- \exp_p\{(\sigma_{(p,q)}(A_s) + \varepsilon) \log_q r\}\right\} = \exp\left\{- \exp_p\{(\mu_{(p,q)}(A_s) + \varepsilon) \log_q r\}\right\}. \qquad (4.7.6)$$

De (4.6.8), (4.7.4)-(4.7.6), pour tout z vérifiant $|z| = r \in E_{12} \backslash (E_6 \cup E_9)$ et $|g(z)| = M(r, g)$, on a

$$\exp\left\{- \exp_p\{(\mu_{(p,q)}(A_s) + \varepsilon) \log_q r\}\right\} \left(\frac{\nu_g(r)}{r}\right)^k |1 + o(1)| \leq$$

$$\exp_{p+1}\{(\mu_{(p,q)}(A_s) + \varepsilon) \log_q r\} \left(\frac{\nu_g(r)}{r}\right)^{k-1} |1 + o(1)|$$
$$+ \cdots + \exp_{p+1}\{(\mu_{(p,q)}(A_s) + \varepsilon) \log_q r\} \left(\frac{\nu_g(r)}{r}\right)^{s+1} |1 + o(1)|$$

$$+ \exp_{p+1}\{(\mu_{(p,q)}(A_s) + \varepsilon) \log_q r\} \left(\frac{\nu_g(r)}{r}\right)^{s} |1 + o(1)|$$
$$+ \exp_{p+1}\{(\mu_{(p,q)}(A_s) + \varepsilon) \log_q r\} \left(\frac{\nu_g(r)}{r}\right)^{s-1} |1 + o(1)|$$

$$+\cdots+\exp_{p+1}\{(\mu_{(p,q)}(A_s)+\varepsilon)\log_q r\}\left(\frac{\nu_g(r)}{r}\right)|1+o(1)|+\exp_{p+1}\{(\mu_{(p,q)}(A_s)+\varepsilon)\log_q r\},$$

et pour tout z vérifiant $|z|=r\in E_{12}\backslash(E_6\cup E_9)$ et $|g(z)|=M(r,g)$, on obtient

$$\exp\left\{-\exp_p\{(\mu_{(p,q)}(A_s)+\varepsilon)\log_q r\}\right\}\left(\frac{\nu_g(r)}{r}\right)|1+o(1)|$$

$$\leq k\,|1+o(1)|\exp_{p+1}\{(\mu_{(p,q)}(A_s)+\varepsilon)\log_q r\}, \tag{4.7.7}$$

d'où,

$$\varliminf_{r\to+\infty}\frac{\log_{p+1}\nu_g(r)}{\log_q r}\leq\mu_{(p,q)}(A_s)+\varepsilon. \tag{4.7.8}$$

Comme $\varepsilon>0$ est arbitraire, alors de (4.7.8), le Lemme 4.2.5 et le Lemme 4.2.9, on a

$$\mu_{(p+1,q)}(g)\leq\mu_{(p,q)}(A_s),$$

d'où

$$\mu_{(p+1,q)}(f)\leq\mu_{(p,q)}(A_s).$$

Ainsi, on obtient

$$\mu_{(p+1,q)}(f)=\mu_{(p,q)}(A_s)=\sigma.$$

4.8 Preuve du Théorème 4.1.6

(i) On suppose que $f(z)$ est une solution méromorphe transcendante, dont les pôles sont de multiplicité uniformément bornée, de (4.1.5) et $\{f_1,f_2,\cdots,f_k\}$ est une base de solutions méromorphes de l'équation homogène correspondante (4.1.4) de (4.1.5). D'après le Théorème 4.1.4, on obtient $\sigma_{(p+1,q)}(f_j)=\sigma_{(p,q)}(A_s)$, $(j=1,2,\cdots,k)$. Par la théorie élémentaire des équations différentielles, toutes les solutions de (4.1.5) peut être représentée sous la forme

$$f(z)=f_0(z)+B_1f_1(z)+B_2f_2(z)+\cdots+B_kf_k(z), \tag{4.8.1}$$

avec $B_1,\cdots,B_k\in\mathbb{C}$ et la fonction f_0 est sous la forme

$$f_0(z)=C_1(z)f_1(z)+C_2(z)f_2(z)+\cdots+C_k(z)f_k(z) \tag{4.8.2}$$

avec $C_1(z),\cdots,C_k(z)$ sont des fonctions méromorphes convenables satisfaisant

$$C_j'=F.G_j(f_1,\cdots,f_k).[W(f_1,\cdots,f_k)]^{-1},\ j=1,2,\cdots,k, \tag{4.8.3}$$

avec $G_j(f_1,\cdots,f_k)$ sont des polynômes différentiels dans $f_1,\cdots,f_k$ et leurs dérivés avec des coefficients constants, et $W(f_1,\cdots,f_k)$ est le Wronskien de $f_1,\cdots,f_k$. Comme le Wronskien $W(f_1,\cdots,f_k)$ est un polynôme différentiel dans $f_1,\cdots,f_k$, il est facile d'obtenir

$$\sigma_{(p+1,q)}(W) \leq \max\{\sigma_{(p+1,q)}(f_j) : j=1,2,\cdots,k\} = \sigma_{(p,q)}(A_s). \tag{4.8.4}$$

De plus, on a $G_j(f_1,\cdots,f_k)$ sont des polynômes différentiels dans $f_1,\cdots,f_k$ et leurs dérivés avec des coefficients constants, alors

$$\sigma_{(p+1,q)}(G_j) \leq \max\{\sigma_{(p+1,q)}(f_j) : j=1,2,\cdots,k\} = \sigma_{(p,q)}(A_s), (j=1,2,\cdots,k). \tag{4.8.5}$$

D'après le Lemme 4.2.10 et (4.8.5), pour $j=1,\cdots,k$, on obtient

$$\sigma_{(p+1,q)}(C_j) = \sigma_{(p+1,q)}(C_j') \leq \max\{\sigma_{(p+1,q)}(F), \sigma_{(p,q)}(A_s)\} = \sigma_{(p,q)}(A_s). \tag{4.8.6}$$

Ainsi, de (4.8.1), (4.8.2) et (4.8.6), on obtient

$$\sigma_{(p+1,q)}(f) \leq \max\{\sigma_{(p+1,q)}(C_j), \sigma_{(p+1,q)}(f_j) : j=1,2,\cdots,k,\} = \sigma_{(p,q)}(A_s).$$

Maintenant, on suppose que toutes les solutions méromorphes f, dont les pôles sont de multiplicité uniformément bornée, de l'équation (4.1.5) vérifie $\sigma_{(p+1,q)}(f) = \sigma_{(p,q)}(A_s)$, avec au plus une solution exceptionnelle f_0 telle que $\sigma_{(p+1,q)}(f_0) < \sigma_{(p,q)}(A_s)$. En effet, s'il existe une autre solution méromorphe f_1 de (4.1.5) vérifiant $\sigma_{(p+1,q)}(f_1) < \sigma_{(p,q)}(A_s)$, alors $f_0 - f_1$ est une solution méromorphe non nulle de (4.1.4) vérifiant $\sigma_{(p+1,q)}(f_0 - f_1) < \sigma_{(p,q)}(A_s)$. Mais, d'après le Théorème 4.1.4 on a toute solution méromorphe f, dont les pôles sont de multiplicité uniformément bornée, de (4.1.4) vérifie $\sigma_{(p+1,q)}(f) = \sigma_{(p,q)}(A_s)$. C'est une contradiction. D'où, on a toutes les solutions méromorphes f, dont les pôles sont de multiplicité uniformément bornée, de l'équation (4.1.5) vérifie $\sigma_{(p+1,q)}(f) = \sigma_{(p,q)}(A_s)$, avec au plus une solution exceptionnelle f_0 telle que $\sigma_{(p+1,q)}(f_0) < \sigma_{(p,q)}(A_s)$.

(ii) De (4.1.5), par une simple considération d'ordre, on obtient $\sigma_{(p+1,q)}(f) \geq \sigma_{(p+1,q)}(F)$. D'après le Lemme 4.2.10 et (4.8.3)-(4.8.5), pour $j=1,\cdots,k$, on obtient

$$\sigma_{(p+1,q)}(C_j) = \sigma_{(p+1,q)}(C_j') \leq \max\{\sigma_{(p+1,q)}(F), \sigma_{(p,q)}(A_s)\} \leq \sigma_{(p+1,q)}(F). \tag{4.8.7}$$

De (4.8.1), (4.8.2) et (4.8.7), on a

$$\sigma_{(p+1,q)}(f) \leq \max\{\sigma_{(p+1,q)}(C_j), \sigma_{(p+1,q)}(f_j) : j=1,2,\cdots,k,\} \leq \sigma_{(p+1,q)}(F).$$

D'où, on obtient $\sigma_{(p+1,q)}(f) = \sigma_{(p+1,q)}(F)$.

4.9 Preuve du Théorème 4.1.7

(i) Supposons que $f(z)$ est une solution transcendante (4.1.2). D'une part, de (4.1.2), on obtient

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right| \leq |A_{k-1}(z)|\left|\frac{f^{(k-1)}}{f}\right| + \cdots + |A_1(z)|\left|\frac{f'}{f}\right| + |A_0(z)| + \left|\frac{F}{f}\right|. \tag{4.9.1}$$

D'après le Lemme 4.2.7, il existe un ensemble $E_6 \subset (1,+\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour tout $|z| = r \notin [0,1] \cup E_6$ et $|g(z)| = M(r,g)$, on a

$$\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)} = \left(\frac{\nu_g(r)}{z}\right)^j (1+o(1)), \quad (j = 0, \cdots, k). \tag{4.9.2}$$

D'après la définition de l'ordre (p,q), pour tout $\varepsilon > 0$ donné et pour r suffisamment grand, on a

$$|A_j(z)| \leq \exp_{p+1}\{(\sigma+\varepsilon)\log_q r\}, j \neq s \tag{4.9.3}$$

et

$$|F(z)| \leq \exp_{p+1}\{(\sigma+\varepsilon)\log_q r\}. \tag{4.9.4}$$

Comme $\sigma_{(p,q)}(d) = \lambda_{(p,q)}(\frac{1}{f}) < \mu_{(p,q)}(g) = \mu_{(p,q)}(f)$, alors pour tout ε $(0 < 2\varepsilon < \mu_{(p,q)}(f) - \lambda_{(p,q)}(\frac{1}{f}))$ et pour r suffisamment grand on a

$$\frac{1}{|f(z)|} = \left|\frac{d(z)}{g(z)}\right| \leq \frac{\exp_{p+1}\{(\lambda_{(p,q)}(\frac{1}{f})+\varepsilon)\log_q r\}}{\exp_{p+1}\{(\mu_{(p,q)}(f)-\varepsilon)\log_q r\}} \leq 1. \tag{4.9.5}$$

D'où, en substituant (4.9.2)-(4.9.5) dans (4.9.1), pour suffisamment grand $r \notin [0,1] \cup E_6$, on obtient

$$\left(\frac{\nu_g(r)}{r}\right)|1+o(1)| \leq (k+1)\exp_{p+1}\{(\sigma+\varepsilon)\log_q r\}\,|1+o(1)|. \tag{4.9.6}$$

De (4.9.6), le Lemme 4.2.5 et le Lemme 4.2.9, on obtient $\sigma_{(p+1,q)}(f) = \sigma_{(p+1,q)}(g) \leq \sigma_{(p,q)}(A_s) + \varepsilon$. Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on obtient $\sigma_{(p+1,q)}(f) \leq \sigma_{(p,q)}(A_s)$. D'autre part, de (4.1.2), on a

$$\begin{aligned}|A_s(z)| \leq \left|\frac{f}{f^{(s)}}\right| \Bigg[\left|\frac{f^{(k)}}{f}\right| + |A_{k-1}(z)|\left|\frac{f^{(k-1)}}{f}\right| + \cdots + |A_{s+1}(z)|\left|\frac{f^{(s+1)}}{f}\right| \\ + |A_{s-1}(z)|\left|\frac{f^{(s-1)}}{f}\right| + \cdots + |A_1(z)|\left|\frac{f'}{f}\right| + |A_0(z)| + \left|\frac{F}{f}\right|\Bigg].\end{aligned} \tag{4.9.7}$$

Pour chaque cercle $|z| = r$ suffisamment grand, on prend $z_r = re^{i\theta_r}$ vérifiant $|f(z_r)| = M(r, f) > 1$. Alors, d'après le Lemme 4.2.16, il existe une constante $\delta_r > 0$ et un ensemble E_{13} tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin E_{13}$ et $\arg z = \theta \in [\theta_r - \delta_r, \theta_r + \delta_r]$, on a

$$\left|\frac{f(z)}{f^{(s)}(z)}\right| \leq 2r^s. \tag{4.9.8}$$

D'après le Lemme 4.2.1 (ii), il existe un ensemble $H_1 \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle et une constante $B > 0$ tels que pour tout z vérifiant $\arg z = \theta \in [\theta_r - \delta_r, \theta_r + \delta_r]$ et pour r suffisamment grand, on a

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right| \leq B\left(T(2r, f)\right)^{k+1}, \quad 1 \leq j \leq k. \tag{4.9.9}$$

On choisit α_2, β_2 vérifiant $\max\{\tau_{(p,q)}(A_j) : \sigma_{(p,q)}(A_j) = \sigma_{(p,q)}(A_s), \tau_{(p,q)}(F)\} < \alpha_2 < \beta_2 < \tau_{(p,q)}(A_s)$. Comme $|f(z) - f(z_r)| < \varepsilon$ et $|f(z_r)| \to \infty$ quand $r \to +\infty$, pour tout $|z| = r \notin E_{13}$ suffisamment grand et $\arg z = \theta \in [\theta_r - \delta_r, \theta_r + \delta_r]$, on a

$$|A_j(z)| \leq \exp_p\{\alpha_2(\log_{q-1} r)^{\sigma_{(p,q)}(A_s)}\}, j \neq s \tag{4.9.10}$$

et

$$\left|\frac{F(z)}{f(z)}\right| \leq |F(z)| \leq \exp_p\{\alpha_2(\log_{q-1} r)^{\sigma_{(p,q)}(A_s)}\}. \tag{4.9.11}$$

Comme $T(r, A_s) \sim \log M(r, A_s)$ quand $r \to +\infty$ ($r \notin E_{13}$), d'après le Lemme 4.2.18, pour tout $\beta_2 < \tau_{(p,q)}(A_s)$, il existe un ensemble $E_{15} \subset (0, \infty)$ de mesure logarithmique infinie et un ensemble $H_2 \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle tels que pour tout z vérifiant $|z| = r \in E_{15}$ et $\arg z = \theta \in [0, 2\pi)\backslash H_2$, on a

$$|A_s(z)| > \exp_p\{\beta_2(\log_{q-1} r)^{\sigma_{(p,q)}(A_s)}\}. \tag{4.9.12}$$

En substituant (4.9.8)-(4.9.12) dans (4.9.7), pour tout z vérifiant $|z| = r \in E_{15}\backslash E_{13}$ et $\arg z = \theta \in [0, 2\pi)\backslash(H_1 \cup H_2)$, on obtient

$$\exp_p\{\beta_2(\log_{q-1} r)^{\sigma_{(p,q)}(A_s)}\} \leq 2r^s \exp_p\{\alpha_2(\log_{q-1} r)^{\sigma_{(p,q)}(A_s)}\}(k+1)B\left(T(2r, f)\right)^{k+1}. \tag{4.9.13}$$

De (4.9.13) et le Lemme 4.2.5, on obtient $\sigma_{(p+1,q)}(f) \geq \sigma_{(p,q)}(A_s)$. Ainsi, nous avons $\sigma_{(p+1,q)}(f) = \sigma_{(p,q)}(A_s)$.

Maintenant, si $f(z)$ est une solution polynomiale de (4.1.2) avec $\deg(f) \geq s$, alors $f^{(s)}(z) \not\equiv 0$. Si $\max\{\sigma_{(p,q)}(A_j), \sigma_{(p,q)}(F),\ j \neq s\} < \sigma_{(p,q)}(A_s) < \infty$, alors

$$\begin{aligned} \sigma_{(p,q)}(A_s) &= \sigma_{(p,q)}(-A_s(z)f^{(s)}) \\ &= \sigma_{(p,q)}(f^{(k)} + A_{k-1}(z)f^{(k-1)} + \cdots + A_{s+1}(z)f^{(s+1)} \\ &\quad +A_{s-1}(z)f^{(s-1)} + \cdots + A_1(z)f' + A_0(z)f - F(z)) \\ &\leq \max\{\sigma_{(p,q)}(A_j), \sigma_{(p,q)}(F), j \neq s\} \\ &< \sigma_{(p,q)}(A_s), \end{aligned}$$

c'est une contradiction. Si $\max\{\sigma_{(p,q)}(A_j), \sigma_{(p,q)}(F), j \neq s\} = \sigma_{(p,q)}(A_s) = \sigma$ et $\max\{\tau_{(p,q)}(A_j) : \sigma_{(p,q)}(A_j) = \sigma_{(p,q)}(A_s), \tau_{(p,q)}(F)\} < \tau_{(p,q)}(A_s)$, alors on choisit α_2, β_2 vérifiant $\max\{\tau_{(p,q)}(A_j) : \sigma_{(p,q)}(A_j) = \sigma_{(p,q)}(A_s), \tau_{(p,q)}(F)\} < \alpha_2 < \beta_2 < \tau_{(p,q)}(A_s)$. D'après le Lemme 4.2.17, il existe un ensemble E_{14} de mesure logarithmique infinie tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \in E_{14}$, on a

$$|A_s(z)| > \exp_p\{\beta_2(\log_{q-1} r)^\sigma\} \tag{4.9.14}$$

et pour r suffisamment grand

$$|A_j(z)| < \exp_p\{\alpha_2(\log_{q-1} r)^\sigma\}\ ,\ j \neq s. \tag{4.9.15}$$

D'où, de (4.9.7), (4.9.14) et (4.9.15), pour tout z vérifiant $|z| = r \in E_{14}$, on a

$$\exp_p\{\beta_2(\log_{q-1} r)^\sigma\}\ \leq (k+1)r^M \exp_p\{\alpha_2(\log_{q-1} r)^\sigma\},$$

où M est une constante. Ceci est une contradiction. D'où, $f(z)$ est un polynôme de degré $\deg f \leq s-1$.

(ii) Si $F(z) \not\equiv 0$, alors d'après le Lemme 4.2.6, toute solution transcendante $f(z)$ de (4.1.2) vérifie $\bar{\lambda}_{(p+1,q)}(f) = \lambda_{(p+1,q)}(f) = \sigma_{(p+1,q)}(f) = \sigma_{(p,q)}(A_s)$.

(iii) Si $s = 1$ et $f(z)$ est une solution polynomiale de (4.1.2), alors de (ii), nous obtenons que $\deg f \leq s-1$, d'où, $f(z)$ doit être une constante. Ainsi, de (i) et (ii), toute solution non constante $f(z)$ de (4.1.2) vérifie $\sigma_{(p+1,q)}(f) = \sigma_{(p,q)}(A_1)$ et $\bar{\lambda}_{(p+1,q)}(f) = \lambda_{(p+1,q)}(f) = \sigma_{(p+1,q)}(f) = \sigma_{(p,q)}(A_1)$ if $F(z) \not\equiv 0$.

Chapitre 5

Croissance des solutions des équations différentielles complexes avec des coefficients d'ordre logarithmique fini

5.1 Introduction et résultats

Pour $k \geq 2$, on considère l'équation différentielle linéaire

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z)f^{(k-1)} + \cdots + A_1(z)f' + A_0(z)f = 0, \tag{5.1.1}$$

où $A_0(z) \not\equiv 0$. Lorsque les coefficients $A_0(z), A_1(z), \cdots, A_{k-1}(z)$ sont des fonctions entières, il est bien connu que toutes les solutions de (5.1.1) sont des fonctions entières, et que, si certains coefficients de (5.1.1) sont transcendants, alors (5.1.1) a au moins une solution d'ordre infini. L'idée de l'ordre p-itératif a été introduite par Bernal [8] pour exprimer la croissance rapide des solutions d'équations différentielles linéaires complexes. À partir de là, plusieurs auteurs ont obtenu des résultats sur l'ordre p-itératif des solutions de (5.1.1), (voir par exemple [3], [4], [5], [12], [13], [35], [43]).

Théorème A ([3]) *Soient $A_j(z)$ $(j = 0, 1, \cdots, k-1)$ des fonctions entières, et soit $i(A_0) = p$ $(0 < p < \infty)$. Supposons que*

$$\max\{i(A_j) : j = 1, 2, \cdots, k-1\} < p$$

ou

$$\max\{\sigma_p(A_j) : j = 1, 2, \cdots, k-1\} \leq \sigma_p(A_0) = \sigma \ (0 < \sigma < \infty),$$

$$\max\{\tau_p(A_j) : \sigma_p(A_j) = \sigma_p(A_0)\} < \tau_p(A_0) = \tau \ (0 < \tau < \infty).$$

Alors toute solution $f(z) \not\equiv 0$ *de* (5.1.1) *vérifie* $i(f) = p + 1$ *et* $\sigma_{p+1}(f) = \sigma_p(A_0)$.

Pour le cas où le coefficient dominant dans (5.1.1) est d'ordre p-itératif inférieur fini, Hu et Zheng [35] ont étudié la croissance des solutions de (5.1.1) et ils ont obtenu le résultat suivant.

Théorème B ([35]) *Soient* $A_j(z)$ $(j = 0, 1, \cdots, k-1)$ *des fonctions entières d'ordre p-itératif fini vérifiant*

$$\max\{\sigma_p(A_j) : j = 1, 2, \cdots, k-1\} < \mu_p(A_0) \leq \sigma_p(A_0) < \infty.$$

Alors toute solution $f(z) \not\equiv 0$ *de* (5.1.1) *vérifie*

$$\mu_p(A_0) = \mu_{p+1}(f) \leq \sigma_{p+1}(f) = \sigma_p(A_0).$$

Dans [12], Cao, Xu et Chen ont considéré la croissance des solutions méromorphes de l'équation (5.1.1) avec des coefficients méromorphes d'ordre p-itératif fini, et ils ont obtenu le résultat suivant lorsque $A_0(z)$ est le coefficient dominant d'ordre p-itératif fini.

Théorème C ([12]) *Soient* $A_j(z)$ $(j = 0, 1, \cdots, k-1)$ *sont des fonctions méromorphes dans le plan, et soit* $i(A_0) = p$ $(0 < p < \infty)$. *Supposons que* $i_\lambda(\frac{1}{A_0}) < p$ *ou* $\lambda_p(\frac{1}{A_0}) < \sigma_p(A_0)$, *et que*

$$\max\{i(A_j) : j = 1, 2, \cdots, k-1\} < p$$

ou

$$\max\{\sigma_p(A_j) : j = 1, 2, \cdots, k-1\} \leq \sigma_p(A_0) = \sigma \ (0 < \sigma < \infty),$$

$$\max\{\tau_p(A_j) : \sigma_p(A_j) = \sigma_p(A_0)\} < \tau_p(A_0) = \tau \ (0 < \tau < \infty).$$

Alors toute solution méromorphe $f(z) \not\equiv 0$, *dont les pôles sont de multiplicité uniformément bornée, de* (5.1.1) *vérifie* $i(f) = p + 1$ *et* $\sigma_{p+1}(f) = \sigma_p(A_0)$.

Dans [47], Liu, Tu et Shi ont été les premiers à utiliser les concepts de l'ordre (p, q) et le type (p, q) pour le cas $p \geq q \geq 1$ pour étudier la croissance des solutions entières de (5.1.1), et ils ont obtenu des résultats qui améliorent et généralisent d'autres résultats.

Théorème D ([47]) *Soient* $p \geq q \geq 1$ *et* $A_j(z)$ $(j = 0, 1, \cdots, k-1)$ *des fonctions entières telles que*

$$\max\{\sigma_{(p,q)}(A_j) : j \neq 0\} < \sigma_{(p,q)}(A_0) < +\infty$$

ou

$$\max\{\sigma_{(p,q)}(A_j) : j \neq 0\} \leq \sigma_{(p,q)}(A_0) < +\infty,$$

$$\max\{\tau_{(p,q)}(A_j) : \sigma_{(p,q)}(A_j) = \sigma_{(p,q)}(A_0) > 0\} < \tau_{(p,q)}(A_0).$$

Alors toute solution $f(z) \not\equiv 0$ *de* (5.1.1) *vérifie* $\sigma_{(p+1,q)}(f) = \sigma_{(p,q)}(A_0)$.

Dans les Théorèmes A et D, les auteurs ont étudié la croissance des solutions de (5.1.1) lorsque les coefficients sont d'ordre p-itératif fini ou d'ordre (p, q) fini. Une question naturelle se pose : Que peut on dire sur la croissance des solutions de (5.1.1) lorsque les coefficients sont d'ordre zéro ? Récemment, Cao, Liu and Wang [11] ont discuté de la question ci-dessus et ils ont obtenu le résultat suivant, lorsque le coefficient dominant $A_0(z)$ est transcendant et d'ordre zéro, en se servant de l'idée de l'ordre logarithmique due à Chern [20].

Théorème E ([11]) *Soient* $A_j(z)$ $(j = 0, 1, \cdots, k-1)$ *des fonctions entières. Si* $A_0(z)$ *est transcendant et vérifie*

$$\max\{\sigma_{(1,2)}(A_j) : j = 1, 2, \cdots, k-1\} = \sigma_{(1,2)}(A_0) < \infty$$

et

$$\max\{\tau_{(1,2)}(A_j) : \sigma_{(1,2)}(A_j) = \sigma_{(1,2)}(A_0)\} < \tau_{(1,2)}(A_0) \leq \infty,$$

alors toute solution transcendante $f(z)$ *de l'équation* (5.1.1) *vérifie* $\sigma_{(2,1)}(f) = 0$ *et*

$$1 \leq \sigma_{(1,2)}(A_0) \leq \sigma_{(2,2)}(f) \leq \sigma_{(1,2)}(A_0) + 1.$$

De plus, si $\sigma_{(1,2)}(A_0) > 1$, *alors le degré de toute solution polynomiale non nulle de* (5.1.1) *est supérieur à* $\tau_{(1,2)}(A_0)$; *si* $\sigma_{(1,2)}(A_0) = 1$, *alors toute solution non nulle de* (5.1.1) *n'est pas un polynôme.*

Maintenant, nous examinons les questions suivantes : Premièrement, qu'est-ce qu'on dit à propos de la croissance des solutions de (5.1.1) dans les Théorème B et C lorsque le coefficient dominant est d'ordre logarithmique inférieur fini ? Et deuxièmement, pouvons-nous étendre les résultats ci-dessus aux coefficients méromorphes d'ordre logarithmique fini ?

Dans ce chapitre, on considère les questions ci-dessus et on a obtenu les résultats suivants.

Théorème 5.1.1 ([23]) *Soient* $A_j(z)$ $(j = 0, 1, \cdots, k-1)$ *des fonctions entières vérifiant*

$$\max\{\sigma_{(1,2)}(A_j) : j = 1, 2, \cdots, k-1\} < \mu_{(1,2)}(A_0) \leq \sigma_{(1,2)}(A_0) = \sigma < \infty.$$

Alors toute solution $f(z) \not\equiv 0$ *de* (5.1.1) *vérifie*

$$1 \leq \mu_{(1,2)}(A_0) \leq \mu_{(2,2)}(f) \leq \mu_{(1,2)}(A_0) + 1,$$

$$\begin{aligned} \sigma_{(2,1)}(f) &= 0 \text{ et } 1 \leq \sigma_{(1,2)}(A_0) \leq \sigma_{(2,2)}(f) = \lambda_{(2,2)}(f-\varphi) \\ &= \overline{\lambda}_{(2,2)}(f-\varphi) \leq \sigma_{(1,2)}(A_0) + 1, \end{aligned}$$

avec $\varphi(z) \not\equiv 0$ *est une fonction entière vérifiant* $\sigma_{(2,2)}(\varphi) < \mu_{(1,2)}(A_0)$.

Théorème 5.1.2 ([23]) *Soient* $A_j(z)$ $(j = 0, 1, \cdots, k-1)$ *des fonctions entières d'ordre logarithmique fini vérifiant* $\sigma_{(1,2)}(A_0) = \sigma \geq 1$ *et*

$$\max\{\sigma_{(1,2)}(A_j) : j = 1, 2, \cdots, k-1\} \leq \mu_{(1,2)}(A_0) = \mu < \infty,$$

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \sum_{j=1}^{k-1} m(r, A_j)/m(r, A_0) < 1.$$

Alors toute solution $f(z) \not\equiv 0$ *de* (5.1.1) *vérifie*

$$\mu_{(1,2)}(A_0) \leq \mu_{(2,2)}(f) \leq \mu_{(1,2)}(A_0) + 1,$$

$$\begin{aligned}\sigma_{(2,1)}(f) &= 0 \text{ et } 1 \leq \sigma_{(1,2)}(A_0) \leq \sigma_{(2,2)}(f) = \lambda_{(2,2)}(f-\varphi) \\ &= \bar{\lambda}_{(2,2)}(f-\varphi) \leq \sigma_{(1,2)}(A_0)+1,\end{aligned}$$

avec $\varphi(z) \not\equiv 0$ *est une fonction entière vérifiant* $\sigma_{(2,2)}(\varphi) < \mu_{(1,2)}(A_0)$.

Théorème 5.1.3 ([23]) *Soient* $A_j(z)$ $(j = 0, 1, \cdots, k-1)$ *des fonctions entières d'ordre logarithmique fini. Si* $A_0(z)$ *est transcendant et vérifie*

$$\max\{\sigma_{(1,2)}(A_j) : j \neq 0\} \leq \mu_{(1,2)}(A_0) \leq \sigma_{(1,2)}(A_0) < \infty,$$

$$\tau_1 = \max\{\tau_{(1,2)}(A_j) : \sigma_{(1,2)}(A_j) = \mu_{(1,2)}(A_0), j \neq 0\} < \underline{\tau}_{(1,2)}(A_0) = \tau \ < \infty,$$

alors toute solution $f(z) \not\equiv 0$ *de* (5.1.1) *vérifie*

$$\mu_{(1,2)}(A_0) \leq \mu_{(2,2)}(f) \leq \mu_{(1,2)}(A_0)+1,$$

$$\begin{aligned}\sigma_{(2,1)}(f) &= 0 \text{ et } 1 \leq \sigma_{(1,2)}(A_0) \leq \sigma_{(2,2)}(f) = \lambda_{(2,2)}(f-\varphi) \\ &= \bar{\lambda}_{(2,2)}(f-\varphi) \leq \sigma_{(1,2)}(A_0)+1,\end{aligned}$$

avec $\varphi(z) \not\equiv 0$ *est une fonction entière vérifiant* $\sigma_{(2,2)}(\varphi) < \mu_{(1,2)}(A_0)$.

Nos résultats suivants sont pour le cas où les coefficients $A_j(z)$ $(j = 0, 1, \cdots, k-1)$ sont des fonctions méromorphes.

Théorème 5.1.4 ([23]) *Soient* $A_j(z)$ $(j = 0, 1, \cdots, k-1)$ *des fonctions méromorphes. Supposons que* $\lambda_{(1,2)}(\frac{1}{A_0}) < \sigma_{(1,2)}(A_0)$, *et*

$$\max\{\sigma_{(1,2)}(A_j) : j = 1, 2, \cdots, k-1\} < \sigma_{(1,2)}(A_0) = \sigma \ < \infty.$$

Alors toute solution méromorphe $f(z) \not\equiv 0$ *de* (5.1.1) *vérifie*

$$\sigma_{(2,2)}(f) \geq \sigma_{(1,2)}(A_0) \geq 1.$$

Théorème 5.1.5 ([23]) *Soient* $A_j(z)$ $(j = 0, 1, \cdots, k-1)$ *des fonctions méromorphes d'ordre logarithmique fini. Supposons que* $\lambda_{(1,2)}(\frac{1}{A_0}) < \mu_{(1,2)}(A_0)$, *et*

$$\max\{\sigma_{(1,2)}(A_j) : j = 1, 2, \cdots, k-1\} < \mu_{(1,2)}(A_0) \leq \sigma_{(1,2)}(A_0) \ < \infty.$$

Alors toute solution méromorphe $f(z) \not\equiv 0$ *de* (5.1.1) *vérifie*

$$\sigma_{(2,2)}(f) \geq \mu_{(2,2)}(f) \geq \mu_{(1,2)}(A_0) \geq 1.$$

En remplaçant le coefficient dominant $A_0(z)$ par un coefficient arbitraire $A_s(z)$, où $s \in \{0, 1, \cdots, k-1\}$, on obtient le résultat suivant.

Théorème 5.1.6 ([23]) *Soient* $A_j(z)$ $(j = 0, 1, \cdots, k-1)$ *des fonctions méromorphes non constantes. Supposons qu'il existe* $A_s(z)$ $(0 \leq s \leq k-1)$ *vérifiant* $\lambda_{(1,2)}(\frac{1}{A_s}) < \sigma_{(1,2)}(A_s)$, *et*

$$\max\{\sigma_{(1,2)}(A_j) : j \neq s \} < \sigma_{(1,2)}(A_s) = \sigma < \infty.$$

Alors toute solution méromorphe transcendante $f(z)$ *de* (5.1.1) *vérifie* $\sigma_{(1,2)}(f) \geq \sigma_{(1,2)}(A_s) > 1$, *et toute solution méromorphe non transcendante* $f(z) \not\equiv 0$ *de* (5.1.1) *est un polynôme de degré* $\deg f \leq s-1$ *si* $s \geq 1$. *En outre, si toutes les solutions* $f(z) \not\equiv 0$ *de* (5.1.1) *sont des fonctions méromorphes, alors il y a au moins une solution méromorphe* f_1 *vérifiant* $\sigma_{(2,2)}(f_1) \geq \sigma_{(1,2)}(A_s) > 1$.

Théorème 5.1.7 ([23]) *Soient* $A_j(z)$ $(j = 0, 1, \cdots, k-1)$ *des fonctions méromorphes non constantes. Supposons qu'il existe* $A_s(z)$ $(0 \leq s \leq k-1)$ *vérifiant* $\lambda_{(1,2)}(\frac{1}{A_s}) < \sigma_{(1,2)}(A_s)$, *et*

$$\max\{\sigma_{(1,2)}(A_j) : j \neq s\} < \mu_{(1,2)}(A_s) \leq \sigma_{(1,2)}(A_s) = \sigma < \infty.$$

Alors toute solution méromorphe transcendante $f(z)$ *de* (5.1.1) *vérifie* $\sigma_{(1,2)}(f) \geq \mu_{(1,2)}(f) \geq \mu_{(1,2)}(A_s) > 1$, *et toute solution méromorphes non transcendante* $f(z) \not\equiv 0$ *de* (5.1.1) *est un polynôme de degré* $\deg f \leq s-1$ *si* $s \geq 1$. *En outre, si toutes les solutions* $f(z) \not\equiv 0$ *de* (5.1.1) *sont des fonctions méromorphes, alors il y a au moins une solution méromorphe* f_1 *vérifiant* $\sigma_{(2,2)}(f) \geq \mu_{(2,2)}(f) \geq \mu_{(1,2)}(A_s) > 1$.

Soit $g(z) = f(z) - z$. Alors on a $\bar{\lambda}_{(2,2)}(f-z) = \bar{\lambda}_{(2,2)}(g)$ et $\sigma_{(2,2)}(f) = \sigma_{(2,2)}(g)$. De nombreux auteurs ont étudié les problèmes sur les points fixes et les points fixes distincts des solutions d'équations différentielles linéaires et ils ont obtenu des résultats importants ([4], [5], [12], [13], [48]). Dans les résultats suivants, nous avons obtenu des estimations des points fixes distincts des solutions méromorphes de (5.1.1).

Théorème 5.1.8 ([23]) *Sous les hypothèses du Théorème 5.1.4, si* $\sigma_{(1,2)}(A_0) > 1$, *alors toute solution méromorphe* $f(z) \not\equiv 0$ *de* (5.1.1) *vérifie* $\bar{\lambda}_{(2,2)}(f - z) = \sigma_{(2,2)}(f) \geq \sigma_{(1,2)}(A_0) > 1$.

Théorème 5.1.9 ([23]) *Sous les hypothèses du Théorème 5.1.6, si* $A_1(z) + zA_0(z) \not\equiv 0$ *et toutes les solutions de* (5.1.1) *sont méromorphes alors toute solution méromorphe transcendante* $f(z)$ *avec* $\sigma_{(1,2)}(f) > \sigma_{(1,2)}(A_s) > 1$ *vérifie* $\bar{\lambda}_{(1,2)}(f - z) = \sigma_{(1,2)}(f)$. *En outre, il existe au moins une solution* $f_1(z)$ *vérifiant* $\bar{\lambda}_{(2,2)}(f_1 - z) = \sigma_{(2,2)}(f_1) \geq \sigma_{(1,2)}(A_s) > 1$.

5.2 Lemmes préliminaires

Lemme 5.2.1 ([31]) *Soient* k *et* j *des entiers tel que* $k > j \geq 0$. *Soit* f *une fonction méromorphe dans le plan* $\mathbb{C}$ *telle que* $f^{(j)}$ *ne s'annule pas identiquement. Alors il existe* $r_0 > 1$ *tel que*

$$m(r, \frac{f^{(k)}}{f^{(j)}}) \leq (k-j)\log^+ \frac{\rho(T(\rho, f))}{r(\rho - r)} + \log\frac{k!}{j!} + (k-j)5.3078,$$

pour tout $r_0 < r < \rho < +\infty$. *Si* f *est d'ordre fini* s, *alors*

$$\limsup_{r\to+\infty} \frac{m(r, \frac{f^{(k)}}{f^{(j)}})}{\log r} \leq \max\{0, (k-j)(s-1)\}.$$

Lemme 5.2.2 *Soit* $f(z)$ *une fonction méromorphe avec* $\sigma_{(1,2)}(f) < \infty$. *Alors pour tout* $\varepsilon > 0$ *donné, il existe un ensemble* $E_1 \subset (1, +\infty)$ *de mesure logarithmique infinie tel que pour tout* $r \in E_1$, *on a*

$$\sigma_{(1,2)}(f) = \lim_{r\to\infty, r\in E_1} \frac{\log T(r,f)}{\log\log r}.$$

Preuve. D'après la définition de l'ordre logarithmique, il existe une suite $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers ∞ vérifiant $(1 + \frac{1}{n})r_n < r_{n+1}$, et

$$\lim_{r_n\to\infty} \frac{\log T(r_n, f)}{\log\log r_n} = \sigma_{(1,2)}(f).$$

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe n_1 tel que pour $n \geq n_1$ et pour $r \in [r_n, (1 + \frac{1}{n})r_n]$, on a

$$\frac{\log T(r_n, f)}{\log\log(1 + \frac{1}{n})r_n} \leq \frac{\log T(r, f)}{\log\log r} \leq \frac{\log T((1 + \frac{1}{n})r_n, f)}{\log\log r_n}.$$

Soit $E_1 = \bigcup\limits_{n=n_1}^{\infty} [r_n, (1+\frac{1}{n})r_n]$. Alors pour tout $r \in E_1$, on obtient

$$\lim_{r\to\infty, r\in E_1} \frac{\log T(r,f)}{\log\log r} = \lim_{r_n\to\infty} \frac{\log T(r_n,f)}{\log\log r_n} = \sigma_{(1,2)}(f),$$

et

$$m_l(E_1) = \sum_{n=n_1}^{\infty} \int\limits_{r_n}^{(1+\frac{1}{n})r_n} \frac{dt}{t} = \sum_{n=n_1}^{\infty} \log(1+\frac{1}{n}) = \infty.$$

Lemme 5.2.3 ([28]) *Soient $g : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ et $h : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ des fonctions monotones croissantes telles que $g(r) \leq h(r)$ pour tout $r \notin E_2 \cup [0,1]$ avec $E_2 \subset (1,+\infty)$ est un ensemble de mesure logarithmique finie. Alors pour tout $\alpha > 1$, il existe $r_0 = r_0(\alpha) > 0$ tel que $g(r) \leq h(\alpha r)$ pour tout $r > r_0$.*

Lemme 5.2.4 ([45]) *Soit $f(z)$ une fonction entière transcendante. Alors il existe un ensemble $E_3 \subset (0,+\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin E_3$ et $|f(z)| = M(r,f)$, on a*

$$\frac{f^{(n)}(z)}{f(z)} = \left(\frac{\nu_f(r)}{z}\right)^n (1+o(1)), \quad (n \in \mathbb{N}),$$

avec $\nu_f(r)$ est l'indice central de $f(z)$.

Lemme 5.2.5 ([41]) *Soit $f(z)$ une fonction entière d'ordre (p,q) et d'ordre (p,q) inférieur, et soit $\nu_f(r)$ l'indice central de $f(z)$, alors*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log_p \nu_f(r)}{\log_q r} = \sigma_{(p,q)}(f), \quad \underline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log_p \nu_f(r)}{\log_q r} = \mu_{(p,q)}(f).$$

Lemme 5.2.6 ([11]) *Soient $A_j(z)$ $(j = 0,1,\cdots,k-1)$ des fonctions entières telles que* $\max\{\sigma_{(1,2)}(A_j) : j = 1,2,\cdots,k-1\} < \sigma_{(1,2)}(A_0) < +\infty$. *Alors toute solution entière non nulle $f(z)$ de* (5.1.1) *vérifie $\sigma_{(2,2)}(f) \geq \sigma_{(1,2)}(A_0) \geq 1$.*

Lemme 5.2.7 ([11]) *Soient $A_j(z)$ $(j = 0,1,\cdots,k-1)$ des fonctions entières telles que* $\max\{\sigma_{(1,2)}(A_j) : j = 0,1,\cdots,k-1\} \leq \alpha < +\infty$. *Alors toute solution $f(z)$ de* (5.1.1) *vérifie $\sigma_{(2,1)}(f) = 0$ et $\sigma_{(2,2)}(f) \leq \alpha + 1$.*

Lemme 5.2.8 ([27]) *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe transcendante dans le plan $\mathbb{C}$ et soit $\alpha > 1$, une constante donnée. Alors il existe un ensemble $E_4 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie et une constante $B > 0$ qui dépend uniquement de α et (m, n) $(m, n \in \{0, 1, \cdots, k\})$ $m < n$ tels que pour tout z avec $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_4$, on a*

$$\left|\frac{f^{(n)}(z)}{f^{(m)}(z)}\right| \leq B\left(\frac{T(\alpha r, f)}{r}(\log^{\alpha} r)\log T(\alpha r, f)\right)^{n-m}.$$

Lemme 5.2.9 *Soit $f(z)$ une fonction entière avec $\mu_{(1,2)}(f) < \infty$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe un ensemble $E_5 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique infinie tel que pour tout $r \in E_5$, on a*

$$\mu_{(1,2)}(f) = \lim_{r\to\infty, r\in E_5} \frac{\log T(r, f)}{\log\log r} = \lim_{r\to\infty, r\in E_5} \frac{\log\log M(r, f)}{\log\log r},$$

et

$$M(r, f) < \exp\{(\log r)^{\mu_{(1,2)}(f)+\varepsilon}\}.$$

Preuve. D'après la définition de l'ordre logarithmique inférieur, il existe une suite $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers ∞ vérifiant $(1 + \frac{1}{n})r_n < r_{n+1}$, et

$$\lim_{r_n\to\infty} \frac{\log\log M(r_n, f)}{\log\log r_n} = \mu_{(1,2)}(f).$$

Alors pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe n_2 tel que pour $n \geq n_2$ et pour $r \in [r_n, (1 + \frac{1}{n})r_n]$, on a

$$\frac{\log\log M(r_n, f)}{\log\log(1 + \frac{1}{n})r_n} \leq \frac{\log\log M(r, f)}{\log\log r} \leq \frac{\log\log M((1 + \frac{1}{n})r_n, f)}{\log\log r_n}.$$

Soit $E_5 = \bigcup\limits_{n=n_2}^{\infty} [r_n, (1 + \frac{1}{n})r_n]$. Alors pour tout $r \in E_5$, on a

$$\lim_{r\to\infty, r\in E_5} \frac{\log\log M(r, f)}{\log\log r} = \lim_{r_n\to\infty} \frac{\log\log M(r_n, f)}{\log\log r_n} = \mu_{(1,2)}(f),$$

et

$$m_l(E_5) = \sum_{n=n_2}^{\infty} \int_{r_n}^{(1+\frac{1}{n})r_n} \frac{dt}{t} = \sum_{n=n_2}^{\infty} \log(1 + \frac{1}{n}) = \infty.$$

De plus, nous avons

$$\lim_{r\to\infty, r\in E_5} \frac{\log T(r, f)}{\log\log r} = \lim_{r\to\infty, r\in E_5} \frac{\log\log M(r, f)}{\log\log r}.$$

Lemme 5.2.10 ([23]) *Soient* $A_j(z)$ $(j = 0, 1, \cdots, k-1)$ *et* $F(z) \not\equiv 0$ *des fonctions méromorphes et soit* $f(z)$ *une solution méromorphe de l'équation*

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + \cdots + A_1(z) f' + A_0(z) f = F(z),$$

telle que

$$\max\{\sigma_{(i,2)}(F), \sigma_{(i,2)}(A_j) : j = 0, 1, \cdots, k-1\} < \sigma_{(i,2)}(f) < +\infty \quad (i = 1, 2).$$

Alors on a

$$\bar{\lambda}_{(i,2)}(f) = \lambda_{(i,2)}(f) = \sigma_{(i,2)}(f) \quad (i = 1, 2).$$

Lemme 5.2.11 *Soient* $A_j(z)$ $(j = 0, 1, \cdots, k-1)$ *de fonctions entières d'ordre logarithmique fini vérifiant* $\sigma_{(1,2)}(A_0) = \sigma \geq 1$ *et*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \sum_{j=1}^{k-1} m(r, A_j)/m(r, A_0) < 1.$$

Alors toute solution non triviale $f(z)$ *de* (5.1.1) *vérifie*

$$1 \leq \sigma_{(1,2)}(A_0) \leq \sigma_{(2,2)}(f) \leq \sigma_{(1,2)}(A_0) + 1.$$

Preuve. Nous divisons la preuve en deux parties : (i) $\sigma_{(2,2)}(f) \geq \sigma_{(1,2)}(A_0) \geq 1$ et (ii) $\sigma_{(2,2)}(f) \leq \sigma_{(1,2)}(A_0) + 1$.

(i) De (5.1.1), on a

$$-A_0(z) = \frac{f^{(k)}}{f} + A_{k-1}(z) \frac{f^{(k-1)}}{f} + \cdots + A_1(z) \frac{f'}{f}. \tag{5.2.1}$$

D'après le Lemme 5.2.1 et (5.2.1), on a

$$\begin{aligned} m(r, A_0) &\leq \sum_{j=1}^{k-1} m(r, A_j) + \sum_{j=1}^{k} m(r, \frac{f^{(j)}}{f}) + O(1) \\ &\leq \sum_{j=1}^{k-1} m(r, A_j) + k^2 \log^+ T(2r, f) + O(1). \end{aligned} \tag{5.2.2}$$

Supposons que

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \sum_{j=1}^{k-1} m(r, A_j)/m(r, A_0) = \alpha < \beta < 1.$$

Alors, pour r suffisamment grand, on a

$$\sum_{j=1}^{k-1} m(r, A_j) < \beta m(r, A_0). \tag{5.2.3}$$

De (5.2.2) et (5.2.3), on a

$$(1-\beta)m(r, A_0) \leq k^2 \log^+ T(2r, f) + O(1). \tag{5.2.4}$$

De $\sigma_{(1,2)}(A_0) = \sigma \geq 1$ et le Lemme 5.2.2, il existe un ensemble $E_1 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique infinie tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \in E_1$ et pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$(1-\beta)(\log r)^{\sigma-\varepsilon} \leq (1-\beta)m(r, A_0) \leq k^2 \log^+ T(2r, f) + O(1). \tag{5.2.5}$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, alors de (5.2.5), on a

$$\sigma_{(2,2)}(f) \geq \sigma = \sigma_{(1,2)}(A_0) \geq 1.$$

(ii) De (5.1.1), on a

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right| \leq |A_{k-1}(z)| \left|\frac{f^{(k-1)}(z)}{f(z)}\right| + \cdots + |A_1(z)| \left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| + |A_0(z)|. \tag{5.2.6}$$

D'après le Lemme 5.2.4 et (5.2.6), il existe un ensemble $E_3 \subset (0, +\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin E_3$ et $|f(z)| = M(r, f)$, on a

$$\left(\frac{\nu_f(r)}{r}\right)^k |1+o(1)| \leq (|A_{k-1}(z)| + |A_{k-2}(z)| + \cdots + |A_0(z)|) \left(\frac{\nu_f(r)}{r}\right)^{k-1} |1+o(1)|. \tag{5.2.7}$$

De (5.2.7) et $\sigma_{(1,2)}(A_0) = \sigma$, il est clair que $\sigma_{(1,2)}(A_j) \leq \sigma$, $j = 1, \cdots, k-1$. Alors, d'après la définition de l'ordre logarithmique et pour tout $\varepsilon > 0$ et pour r suffisamment grand, on a

$$|A_j(z)| \leq M(r, A_j) \leq \exp\{(\log r)^{\sigma+\varepsilon}\}, \ j = 1, \cdots, k-1. \tag{5.2.8}$$

Ainsi, de (5.2.7) et (5.2.8), pour tout z vérifiant $|z| = r \notin E_3$, et $|f(z)| = M(r, f)$, on a

$$\left(\frac{\nu_f(r)}{r}\right)^k |1+o(1)| \leq k \exp\{(\log r)^{\sigma+\varepsilon}\} \left(\frac{\nu_f(r)}{r}\right)^{k-1} |1+o(1)|,$$

d'où

$$\nu_f(r)\,|1+o(1)| \leq kr \exp\{(\log r)^{\sigma+\varepsilon}\}\,|1+o(1)|. \tag{5.2.9}$$

D'après le Lemme 5.2.3, le Lemme 5.2.5 et (5.2.9), on a $\sigma_{(2,2)}(f) \leq \sigma_{(1,2)}(A_0) + 1$. De (i) et (ii), on obtient $1 \leq \sigma_{(1,2)}(A_0) \leq \sigma_{(2,2)}(f) \leq \sigma_{(1,2)}(A_0) + 1$.

Lemme 5.2.12 ([11]) *Soit $\phi(r)$ une fonction continue, positive et croissante définie pour r dans $(0, +\infty)$ avec $\sigma_{(1,2)}(\phi)$ son ordre logarithmique. Alors pour tout sous-ensemble E_6 de $[0, +\infty)$ ayant une mesure linéaire finie, il existe une suite $\{r_n\}$, $r_n \notin E_6$ telle que*

$$\sigma_{(1,2)}(\phi) = \lim_{r_n \to +\infty} \frac{\log \phi(r_n)}{\log \log r_n}.$$

Lemme 5.2.13 ([26]) *Soient $f_1, f_2, \cdots, f_k$ des solutions méromorphes linéairement indépendantes de l'équation différentielle* (5.1.1) *avec $A_0, A_1, \cdots, A_{k-1}$ des fonctions méromorphes. Alors*

$$m(r, A_j) = O\left\{\log\left(\max_{1\leq n\leq k} T(r, f_n)\right)\right\} (j = 0, 1, \cdots, k-1).$$

5.3 Preuve du Théorème 5.1.1

Supposons que $f(z) \not\equiv 0$ est une solution de (5.1.1). Alors, d'après le Lemme 5.2.6, on a $\sigma_{(2,2)}(f) \geq \sigma_{(1,2)}(A_0) \geq 1$. D'autre part, d'après le Lemme 5.2.7, on a $\sigma_{(2,1)}(f) = 0$ et $\sigma_{(2,2)}(f) \leq \sigma_{(1,2)}(A_0) + 1$. D'où, on obtient $\sigma_{(2,1)}(f) = 0$ et $1 \leq \sigma_{(1,2)}(A_0) \leq \sigma_{(2,2)}(f) \leq \sigma_{(1,2)}(A_0)+1$. Maintenant, nous avons juste besoin de prouver (i) $1 \leq \mu_{(1,2)}(A_0) \leq \mu_{(2,2)}(f) \leq \mu_{(1,2)}(A_0) + 1$ et (ii) $\overline{\lambda}_{(2,2)}(f - \varphi) = \lambda_{(2,2)}(f - \varphi) = \sigma_{(2,2)}(f)$.

(i) De (5.1.1), on a

$$|A_0(z)| \leq \left|\frac{f^{(k)}}{f}\right| + |A_{k-1}(z)| \left|\frac{f^{(k-1)}}{f}\right| + \cdots + |A_1(z)| \left|\frac{f'}{f}\right|. \tag{5.3.1}$$

Soit $\alpha = \max\{\sigma_{(1,2)}(A_j) : j = 1, \cdots, k-1\} < \mu_{(1,2)}(A_0) \leq \sigma_{(1,2)}(A_0) = \sigma < \infty$. Alors pour tout ε donné $(0 < 2\varepsilon < \mu_{(1,2)}(A_0) - \alpha)$ et pour r suffisamment grand, on a

$$M(r, A_0) \geq \exp\{(\log r)^{\mu_{(1,2)}(A_0)-\varepsilon}\} \tag{5.3.2}$$

et

$$M(r, A_j) \leq \exp\{(\log r)^{\alpha+\varepsilon}\}, \ j = 1, \cdots, k-1. \tag{5.3.3}$$

D'après le Lemme 5.2.8, il existe un ensemble $E_4 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie et une constante $B > 0$ tels que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin [0,1] \cup E_4$, on a

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right| \leq B\,(T(2r,f))^{j+1}\,,\ j = 1, \cdots, k. \tag{5.3.4}$$

En substituant (5.3.2)-(5.3.4) dans (5.3.1), pour le ε ci-dessus, on obtient

$$\exp\{(\log r)^{\mu_{(1,2)}(A_0)-\varepsilon}\} \leq Bk\exp\{(\log r)^{\alpha+\varepsilon}\}[T(2r,f)]^{k+1}, \tag{5.3.5}$$

pour tout z vérifiant $|z| = r \notin [0,1] \cup E_4, r \to \infty$ et $|A_0(z)| = M(r, A_0)$. D'après le Lemme 5.2.3 et (5.3.5), on a $\mu_{(2,2)}(f) \geq \mu_{(1,2)}(A_0) - \varepsilon$. Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, alors

$$\mu_{(2,2)}(f) \geq \mu_{(1,2)}(A_0) \geq 1. \tag{5.3.6}$$

De (5.1.1), on obtient

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right| \leq |A_{k-1}(z)|\left|\frac{f^{(k-1)}(z)}{f(z)}\right| + \cdots + |A_1(z)|\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| + |A_0(z)|\,. \tag{5.3.7}$$

D'après le Lemme 5.2.4, il existe un ensemble $E_3 \subset (0, +\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin E_3$ et $|f(z)| = M(r, f)$, on a

$$\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)} = \left(\frac{\nu_f(r)}{z}\right)^j (1 + o(1)),\ (j = 1, \cdots, k). \tag{5.3.8}$$

D'après le Lemme 5.2.9, il existe un ensemble $E_5 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique infinie tel que pour tout $|z| = r \in E_5$, on a

$$|A_0(z)| \leq M(r, A_0) \leq \exp\{(\log r)^{\mu_{(1,2)}(A_0)+\varepsilon}\}. \tag{5.3.9}$$

Ainsi, de (5.3.3), (5.3.7)-(5.3.9), pour tout $|z| = r \in E_5 \backslash E_3$, on obtient

$$\left(\frac{\nu_f(r)}{r}\right)^k |1 + o(1)| \leq k\exp\{(\log r)^{\mu_{(1,2)}(A_0)+\varepsilon}\}\left(\frac{\nu_f(r)}{r}\right)^{k-1} |1 + o(1)|\,,$$

d'où

$$\nu_f(r)\,|1 + o(1)| \leq kr\exp\{(\log r)^{\mu_{(1,2)}(A_0)+\varepsilon}\}\,|1 + o(1)|\,. \tag{5.3.10}$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, alors d'après le Lemme 5.2.3, le Lemme 5.2.5 et (5.3.10), on obtient

$$\mu_{(2,2)}(f) \leq \mu_{(1,2)}(A_0) + 1. \tag{5.3.11}$$

De (5.3.6) et (5.3.11), on obtient

$$1 \leq \mu_{(1,2)}(A_0) \leq \mu_{(2,2)}(f) \leq \mu_{(1,2)}(A_0) + 1.$$

(ii) Maintenant, on démontre que $\overline{\lambda}_{(2,2)}(f-\varphi) = \lambda_{(2,2)}(f-\varphi) = \sigma_{(2,2)}(f)$. Posons $g = f - \varphi$. Comme $\sigma_{(2,2)}(\varphi) < \mu_{(1,2)}(A_0) \leq \sigma_{(1,2)}(A_0)$, alors on a $\sigma_{(2,2)}(g) = \sigma_{(2,2)}(f)$, $\lambda_{(2,2)}(g) = \lambda_{(2,2)}(f-\varphi)$ et $\overline{\lambda}_{(2,2)}(g) = \overline{\lambda}_{(2,2)}(f-\varphi)$. En substituant $f = g + \varphi$ dans (5.1.1), on obtient

$$\begin{aligned} & g^{(k)} + A_{k-1}(z)g^{(k-1)} + \cdots + A_1(z)g' + A_0(z)g \\ = & -\left[\varphi^{(k)} + A_{k-1}(z)\varphi^{(k-1)} + \cdots + A_1(z)\varphi' + A_0(z)\varphi\right]. \end{aligned} \tag{5.3.12}$$

Si $G(z) = \varphi^{(k)} + A_{k-1}(z)\varphi^{(k-1)} + \cdots + A_1(z)\varphi' + A_0(z)\varphi \equiv 0$, alors de (i), on a $\sigma_{(2,2)}(\varphi) \geq \mu_{(2,2)}(\varphi) \geq \mu_{(1,2)}(A_0)$, c'est une contradiction. D'où $G(z) \not\equiv 0$. Comme $G(z) \not\equiv 0$ et $\sigma_{(2,2)}(G) \leq \sigma_{(2,2)}(\varphi) < \mu_{(1,2)}(A_0) \leq \sigma_{(1,2)}(A_0) \leq \sigma_{(2,2)}(g)$, alors d'après le Lemme 5.2.10 et (5.3.12), on a

$$1 \leq \sigma_{(1,2)}(A_0) \leq \overline{\lambda}_{(2,2)}(g) = \lambda_{(2,2)}(g) = \sigma_{(2,2)}(g) = \sigma_{(2,2)}(f) \leq \sigma_{(1,2)}(A_0) + 1.$$

Ainsi

$$1 \leq \sigma_{(1,2)}(A_0) \leq \overline{\lambda}_{(2,2)}(f-\varphi) = \lambda_{(2,2)}(f-\varphi) = \sigma_{(2,2)}(f) \leq \sigma_{(1,2)}(A_0) + 1.$$

5.4 Preuve du Théorème 5.1.2

Supposons que $f(z) \not\equiv 0$ est une solution de (5.1.1). Alors, d'après le Lemme 5.2.11, on a $1 \leq \sigma_{(1,2)}(A_0) \leq \sigma_{(2,2)}(f) \leq \sigma_{(1,2)}(A_0)+1$. Maintenant, il ne reste qu'à prouver (i) $\mu_{(1,2)}(A_0) \leq \mu_{(2,2)}(f) \leq \mu_{(1,2)}(A_0) + 1$ et (ii) $\overline{\lambda}_{(2,2)}(f-\varphi) = \lambda_{(2,2)}(f-\varphi) = \sigma_{(2,2)}(f)$.
(i) De $\mu_{(1,2)}(A_0) = \mu$, pour tout $\varepsilon > 0$ donné et pour r suffisamment grand, on obtient

$$m(r, A_0) \geq (\log r)^{\mu-\varepsilon}. \tag{5.4.1}$$

De (5.2.4) et (5.4.1), pour le ε ci-dessus et pour r suffisamment grand, on a

$$(1-\beta)(\log r)^{\mu-\varepsilon} \leq k^2 \log^+ T(2r, f) + O(1). \tag{5.4.2}$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, alors de (5.4.2), on obtient

$$\mu_{(2,2)}(f) \geq \mu = \mu_{(1,2)}(A_0).$$

D'autre part, comme $\max\{\sigma_{(1,2)}(A_j) : j = 1, 2, \cdots, k-1\} \leq \mu_{(1,2)}(A_0) = \mu$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ donné et pour r suffisamment grand, on a

$$|A_j(z)| \leq \exp\{(\log r)^{\mu+\varepsilon}\}, \ j = 1, 2, \cdots, k-1. \tag{5.4.3}$$

D'après le Lemme 5.2.9, il existe un ensemble $E_5 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique infinie tel que pour tout $|z| = r \in E_5$, on a

$$|A_0(z)| \leq \exp\{(\log r)^{\mu+\varepsilon}\}. \tag{5.4.4}$$

Ainsi, de (5.3.7), (5.3.8), (5.4.3) et (5.4.4), pour r suffisamment grand tel que $|z| = r \in E_5 \backslash E_3$, on obtient

$$\left(\frac{\nu_f(r)}{r}\right)^k |1 + o(1)| \leq k \exp\{(\log r)^{\mu+\varepsilon}\} \left(\frac{\nu_f(r)}{r}\right)^{k-1} |1 + o(1)|,$$

d'où

$$\nu_f(r) |1 + o(1)| \leq kr |1 + o(1)| \exp\{(\log r)^{\mu+\varepsilon}. \tag{5.4.5}$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, alors d'après le Lemme 5.2.3, le Lemme 5.2.5 et (5.4.5), on a

$$\mu_{(2,2)}(f) \leq \mu + 1 = \mu_{(1,2)}(A_0) + 1.$$

D'où, on obtient

$$\mu_{(1,2)}(A_0) \leq \mu_{(2,2)}(f) \leq \mu_{(1,2)}(A_0) + 1.$$

(ii) Montrons que $\bar{\lambda}_{(2,2)}(f - \varphi) = \lambda_{(2,2)}(f - \varphi) = \sigma_{(2,2)}(f)$. Soit $g = f - \varphi$. Comme $\sigma_{(2,2)}(\varphi) < \mu_{(1,2)}(A_0) \leq \sigma_{(1,2)}(A_0)$, alors, on a $\sigma_{(2,2)}(g) = \sigma_{(2,2)}(f)$, $\lambda_{(2,2)}(g) = \lambda_{(2,2)}(f - \varphi)$ et $\bar{\lambda}_{(2,2)}(g) = \bar{\lambda}_{(2,2)}(f - \varphi)$. En substituant $f = g + \varphi$ dans (5.1.1), on obtient

$$\begin{aligned} & g^{(k)} + A_{k-1}(z)g^{(k-1)} + \cdots + A_1(z)g' + A_0(z)g \\ = \ & -[\varphi^{(k)} + A_{k-1}(z)\varphi^{(k-1)} + \cdots + A_1(z)\varphi' + A_0(z)\varphi]. \end{aligned} \tag{5.4.6}$$

Si $G(z) = \varphi^{(k)} + A_{k-1}(z)\varphi^{(k-1)} + \cdots + A_1(z)\varphi' + A_0(z)\varphi \equiv 0$, alors d'après (i), on obtient $\sigma_{(2,2)}(\varphi) \geq \mu_{(2,2)}(\varphi) \geq \mu_{(1,2)}(A_0)$, c'est une contradiction. D'où $G(z) \not\equiv 0$. Comme $G(z) \not\equiv 0$ et $\sigma_{(2,2)}(G) < \sigma_{(2,2)}(g)$, alors d'après le Lemme 5.2.10 et (5.4.6), on a

$$1 \leq \sigma_{(1,2)}(A_0) \leq \bar{\lambda}_{(2,2)}(g) = \lambda_{(2,2)}(g) = \sigma_{(2,2)}(g) = \sigma_{(2,2)}(f) \leq \sigma_{(1,2)}(A_0) + 1.$$

D'où,

$$1 \leq \sigma_{(1,2)}(A_0) \leq \bar{\lambda}_{(2,2)}(f - \varphi) = \lambda_{(2,2)}(f - \varphi) = \sigma_{(2,2)}(f) \leq \sigma_{(1,2)}(A_0) + 1.$$

5.5 Preuve du Théorème 5.1.3

Supposons que $f(z) \not\equiv 0$ est une solution de (5.1.1). Tout d'abord, on montre que $\sigma_{(2,1)}(f) = 0$ et $1 \leq \sigma_{(1,2)}(A_0) \leq \sigma_{(2,2)}(f) \leq \sigma_{(1,2)}(A_0) + 1$. D'après le Lemme 5.2.7, on a $\sigma_{(2,1)}(f) = 0$ et $\sigma_{(2,2)}(f) \leq \sigma_{(1,2)}(A_0) + 1$. Maintenant, il ne reste qu'à prouver (i) $\sigma_{(2,2)}(f) \geq \sigma_{(1,2)}(A_0) \geq 1$, $\mu_{(1,2)}(A_0) \leq \mu_{(2,2)}(f) \leq \mu_{(1,2)}(A_0) + 1$ et (ii) $\bar{\lambda}_{(2,2)}(f - \varphi) = \lambda_{(2,2)}(f - \varphi) = \sigma_{(2,2)}(f)$.

(i) On pose $d = \max\{\sigma_{(1,2)}(A_j) : \sigma_{(1,2)}(A_j) < \sigma_{(1,2)}(A_0)\}$. Si $\sigma_{(1,2)}(A_j) < \mu_{(1,2)}(A_0) \leq \sigma_{(1,2)}(A_0)$ ou $\sigma_{(1,2)}(A_j) \leq \mu_{(1,2)}(A_0) < \sigma_{(1,2)}(A_0)$, alors pour tout ε donné $(0 < 2\varepsilon < \sigma_{(1,2)}(A_0) - d)$ et pour r suffisamment grand, on a

$$M(r, A_j) \leq \exp\{(\log r)^{d+\varepsilon}\} \leq \exp\{(\log r)^{\sigma_{(1,2)}(A_0)-\varepsilon}\}. \tag{5.5.1}$$

Si $\sigma_{(1,2)}(A_j) = \mu_{(1,2)}(A_0) = \sigma_{(1,2)}(A_0)$, alors on a $\tau_{(1,2)}(A_j) \leq \tau_1 < \tau_2 = \tau_{(1,2)}(A_0)$, donc pour r suffisamment grand, et pour tout ε donné $(0 < 2\varepsilon < \tau_2 - \tau_1)$ on a

$$M(r, A_j) \leq \exp\{(\tau_1 + \varepsilon)(\log r)^{\sigma_{(1,2)}(A_0)}\}, \tag{5.5.2}$$

$$M(r, A_0) \geq \exp\{(\tau_2 - \varepsilon)(\log r)^{\sigma_{(1,2)}(A_0)}\}. \tag{5.5.3}$$

De (5.5.1)-(5.5.3), (5.3.1) et (5.3.4), pour r suffisamment grand tel que $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_4$ et pour le ε ci-dessus, on obtient

$$\exp\{(\tau_2 - \varepsilon)(\log r)^{\sigma_{(1,2)}(A_0)}\} \leq Bk[T(2r, f)]^{k+1} \exp\{(\tau_1 + \varepsilon)(\log r)^{\sigma_{(1,2)}(A_0)}\}. \tag{5.5.4}$$

D'après le Lemme 5.2.3 et (5.5.4), on obtient

$$1 \leq \sigma_{(1,2)}(A_0) \leq \sigma_{(2,2)}(f).$$

Ainsi, $\sigma_{(2,1)}(f) = 0$ et

$$1 \leq \sigma_{(1,2)}(A_0) \leq \sigma_{(2,2)}(f) \leq \sigma_{(1,2)}(A_0) + 1.$$

Maintenant, nous revenons à prouver que $\mu_{(1,2)}(A_0) \leq \mu_{(2,2)}(f) \leq \mu_{(1,2)}(A_0) + 1$. D'une part, on pose $b = \max\{\sigma_{(1,2)}(A_j) : \sigma_{(1,2)}(A_j) < \mu_{(1,2)}(A_0)\}$. Si $\sigma_{(1,2)}(A_j) < \mu_{(1,2)}(A_0)$, alors pour tout ε donné $(0 < 2\varepsilon < \min\{\mu_{(1,2)}(A_0) - b, \tau - \tau_1\})$ et pour r suffisamment grand, on a

$$M(r, A_j) \leq \exp\{(\log r)^{b+\varepsilon}\} \leq \exp\{(\log r)^{\mu_{(1,2)}(A_0)-\varepsilon}\}. \tag{5.5.5}$$

Si $\sigma_{(1,2)}(A_j) = \mu_{(1,2)}(A_0)$, $\tau_{(1,2)}(A_j) \leq \tau_1 < \tau = \underline{\tau}_{(1,2)}(A_0)$, et pour r suffisamment grand, on a

$$M(r, A_j) \leq \exp\{(\tau_1 + \varepsilon)(\log r)^{\mu_{(1,2)}(A_0)}\}, \tag{5.5.6}$$

$$M(r, A_0) \geq \exp\{(\tau - \varepsilon)(\log r)^{\mu_{(1,2)}(A_0)}\}. \tag{5.5.7}$$

De (5.5.5)-(5.5.7), (5.3.1) et (5.3.4), pour r suffisamment grand tel que $|z| = r \notin [0,1] \cup E_4$ et pour le ε ci-dessus, on obtient

$$\exp\{(\tau - \varepsilon)(\log r)^{\mu_{(1,2)}(A_0)}\} \leq Bk[T(2r, f)]^{k+1} \exp\{(\tau_1 + \varepsilon)(\log r)^{\mu_{(1,2)}(A_0)}\}. \tag{5.5.8}$$

D'après le Lemme 5.2.3 et (5.5.8), on a

$$\mu_{(1,2)}(A_0) \leq \mu_{(2,2)}(f).$$

D'autre part, d'après le Lemme 5.2.9, il existe un ensemble $E_5 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique infinie tel que pour tout $|z| = r \in E_5$, on a

$$|A_0(z)| \leq M(r, A_0) \leq \exp\{(\log r)^{\mu_{(1,2)}(A_0)+\varepsilon}\}. \tag{5.5.9}$$

De (5.3.7), (5.3.8), (5.5.5), (5.5.6) et (5.5.9), pour r suffisamment grand tel que $|z| = r \in E_5 \backslash E_3$, on a

$$\nu_f(r)\,|1 + o(1)| \leq kr\,|1 + o(1)| \exp\{(\log r)^{\mu_{(1,2)}(A_0)+\varepsilon}\}. \tag{5.5.10}$$

Comme $\varepsilon (0 < 2\varepsilon < \min\{\mu_{(1,2)}(A_0) - b, \tau - \tau_1\})$ est arbitraire, alors d'après le Lemme 5.2.3, le Lemme 5.2.5 et (5.5.10), on obtient

$$\mu_{(2,2)}(f) \leq \mu_{(1,2)}(A_0) + 1.$$

Ainsi,

$$\mu_{(1,2)}(A_0) \leq \mu_{(2,2)}(f) \leq \mu_{(1,2)}(A_0) + 1.$$

(ii) On démontre que $\bar{\lambda}_{(2,2)}(f - \varphi) = \lambda_{(2,2)}(f - \varphi) = \sigma_{(2,2)}(f)$. Soit $g = f - \varphi$. Comme $\sigma_{(2,2)}(\varphi) < \mu_{(1,2)}(A_0) \leq \sigma_{(1,2)}(A_0)$, alors, on a $\sigma_{(2,2)}(g) = \sigma_{(2,2)}(f)$, $\lambda_{(2,2)}(g) = \lambda_{(2,2)}(f - \varphi)$ et $\bar{\lambda}_{(2,2)}(g) = \bar{\lambda}_{(2,2)}(f - \varphi)$. En substituant $f = g + \varphi$ dans (5.1.1), on obtient

$$\begin{aligned} & g^{(k)} + A_{k-1}(z)g^{(k-1)} + \cdots + A_1(z)g' + A_0(z)g \\ = \; & -[\varphi^{(k)} + A_{k-1}(z)\varphi^{(k-1)} + \cdots + A_1(z)\varphi' + A_0(z)\varphi]. \end{aligned} \tag{5.5.11}$$

Si $G(z) = \varphi^{(k)} + A_{k-1}(z)\varphi^{(k-1)} + \cdots + A_1(z)\varphi' + A_0(z)\varphi \equiv 0$, alors d'après (i), on obtient $\sigma_{(2,2)}(\varphi) \geq \mu_{(2,2)}(\varphi) \geq \mu_{(1,2)}(A_0)$, c'est une contradiction. Donc $G(z) \not\equiv 0$. Comme $G(z) \not\equiv 0$ et $\sigma_{(2,2)}(G) < \sigma_{(2,2)}(g)$, alors d'après le Lemme 5.2.10 et (5.5.11), on a

$$1 \leq \sigma_{(1,2)}(A_0) \leq \bar{\lambda}_{(2,2)}(g) = \lambda_{(2,2)}(g) = \sigma_{(2,2)}(g) = \sigma_{(2,2)}(f) \leq \sigma_{(1,2)}(A_0) + 1.$$

D'où,

$$1 \leq \sigma_{(1,2)}(A_0) \leq \bar{\lambda}_{(2,2)}(f - \varphi) = \lambda_{(2,2)}(f - \varphi) = \sigma_{(2,2)}(f) \leq \sigma_{(1,2)}(A_0) + 1.$$

5.6 Preuve du Théorème 5.1.4

Supposons que $f(z) \not\equiv 0$ est une solution méromorphe de (5.1.1). De (5.1.1), on a

$$-A_0(z) = \frac{f^{(k)}}{f} + A_{k-1}(z)\frac{f^{(k-1)}}{f} + \cdots + A_1(z)\frac{f'}{f}. \tag{5.6.1}$$

D'après le Lemme 5.2.1 et (5.6.1), on a

$$\begin{aligned} m(r, A_0) &\leq \sum_{j=1}^{k-1} m(r, A_j) + \sum_{j=1}^{k} m(r, \frac{f^{(j)}}{f}) + O(1) \\ &\leq \sum_{j=1}^{k-1} m(r, A_j) + k^2 \log^+ T(2r, f) + O(1). \end{aligned} \tag{5.6.2}$$

D'où, on obtient

$$T(r, A_0) = N(r, A_0) + m(r, A_0)$$

$$\leq N(r, A_0) + \sum_{j=1}^{k-1} m(r, A_j) + k^2 \log^+ T(2r, f) + O(1). \tag{5.6.3}$$

De $\lambda_{(1,2)}(\frac{1}{A_0}) < \sigma_{(1,2)}(A_0) = \sigma$, pour tout ε $(0 < 2\varepsilon < \sigma - \lambda_{(1,2)}(\frac{1}{A_0}))$, on obtient

$$N(r, A_0) \leq (\log r)^{\lambda_{(1,2)}(\frac{1}{A_0}) + \varepsilon}. \tag{5.6.4}$$

Soit $b = \max\{\sigma_{(1,2)}(A_j) : j = 1, \cdots, k-1\} < \sigma_{(1,2)}(A_0) = \sigma$. Alors pour tout ε $(0 < 2\varepsilon < \sigma - b)$, on a

$$m(r, A_j) \leq T(r, A_j) \leq (\log r)^{b+\varepsilon}, \ (j = 1, \cdots, k-1). \tag{5.6.5}$$

Comme $\sigma_{(1,2)}(A_0) = \sigma \geq 1$, d'après le Lemme 5.2.12, pour tout sous-ensemble E_6 de $[0, +\infty)$ de mesure linéaire finie, il existe une suite $\{r_n\}$, $r_n \to \infty$, telle que $r_n \notin E_6$ et pour tout ε $(0 < 2\varepsilon < \sigma - b)$ on a

$$T(r_n, A_0) \geq (\log r_n)^{\sigma-\varepsilon}. \tag{5.6.6}$$

Ainsi, en substituant (5.6.4)-(5.6.6) dans (5.6.3), pour tout $|z| = r \notin E_6$, on obtient

$$(\log r_n)^{\sigma-\varepsilon} \leq (\log r_n)^{\lambda_{(1,2)}(\frac{1}{A_0})+\varepsilon} + (k-1)(\log r_n)^{b+\varepsilon} + k^2 \log^+ T(2r_n, f) + O(1),$$

d'où

$$(1 - o(1))(\log r_n)^{\sigma-\varepsilon} \leq k^2 \log^+ T(2r_n, f). \tag{5.6.7}$$

Comme $\varepsilon(0 < 2\varepsilon < \min\{\sigma - b, \sigma - \lambda_{(1,2)}(\frac{1}{A_0})\})$ est arbitraire, alors de (5.6.7), on obtient

$$\sigma_{(2,2)}(f) \geq \sigma_{(1,2)}(A_0) \geq 1.$$

5.7 Preuve du Théorème 5.1.5

Supposons que $f(z) \not\equiv 0$ est une solution méromorphe de (5.1.1). D'après le Lemme 5.2.1 et (5.6.1), on a

$$m(r, A_0) \leq \sum_{j=1}^{k-1} m(r, A_j) + k^2 \log^+ T(2r, f) + O(1). \tag{5.7.1}$$

De $\lambda_{(1,2)}(\frac{1}{A_0}) < \sigma_{(1,2)}(A_0)$, on a

$$N(r, A_0) = o(T(r, A_0)), \quad r \to \infty. \tag{5.7.2}$$

Alors, de (5.7.2), on obtient

$$\mu_{(1,2)}(A_0) = \varliminf_{r\to+\infty} \frac{\log m(r, A_0)}{\log \log r}. \tag{5.7.3}$$

De (5.7.3), pour r suffisamment grand, on a

$$m(r, A_0) \geq (\log r)^{\mu_{(1,2)}(A_0)-\varepsilon}. \tag{5.7.4}$$

Posons $c = \max\{\sigma_{(1,2)}(A_j) : j \neq 0\} < \mu_{(1,2)}(A_0)$. Alors pour r suffisamment grand et pour tout ε donné $(0 < 2\varepsilon < \mu_{(1,2)}(A_0) - c)$

$$m(r, A_j) \leq (\log r)^{c+\varepsilon}. \tag{5.7.5}$$

De (5.7.1), (5.7.4) et (5.7.5), on obtient

$$(\log r)^{\mu_{(1,2)}(A_0)-\varepsilon} \leq (k-1)(\log r)^{c+\varepsilon} + k^2 \log^+ T(2r,f) + O(1). \tag{5.7.6}$$

De (5.7.6) and ε $(0 < 2\varepsilon < \mu_{(1,2)}(A_0) - c)$, on obtient

$$\sigma_{(2,2)}(f) \geq \mu_{(2,2)}(f) \geq \mu_{(1,2)}(A_0) \geq 1.$$

5.8 Preuve du Théorème 5.1.6

Supposons que $f(z) \not\equiv 0$ est une solution rationnelle de (5.1.1). Si $f(z)$ est une fonction rationnelle, qui a un pôle à $z_0 \in \mathbb{C}$ de degré $\alpha(\geq 1)$, ou $f(z)$ est un polynôme de degré $\deg f \geq s$ alors $f^{(s)}(z) \not\equiv 0$. Posons $b = \max x\{\sigma_{(1,2)}(A_j) : j \neq s \text{ et } j = 0, 1, \cdots, k-1\} < \sigma_{(1,2)}(A_s) = \sigma$. Alors, pour tout ε $(0 < 2\varepsilon < \sigma - b)$, on a

$$m(r, A_j) \leq T(r, A_j) \leq (\log r)^{b+\varepsilon}, \ (j \in \{1, \cdots, k-1\} \backslash \{s\}). \tag{5.8.1}$$

Comme $\sigma_{(1,2)}(A_s) = \sigma > 1$, d'après le Lemme 5.2.12, pour tout sous-ensemble E_6 de $[0, +\infty)$ de mesure linéaire finie, il existe une suite $\{r_n\}$, $r_n \to \infty$, telle que pour tout ε $(0 < 2\varepsilon < \sigma - b)$ et pour tout $r_n \notin E_6$, on a

$$T(r_n, A_s) \geq (\log r_n)^{\sigma-\varepsilon}. \tag{5.8.2}$$

De $\lambda_{(1,2)}(\frac{1}{A_s}) < \sigma_{(1,2)}(A_s) = \sigma$, pour tout ε $(0 < 2\varepsilon < \sigma - \lambda_{(1,2)}(\frac{1}{A_s}))$, on a

$$N(r, A_s) \leq (\log r)^{\lambda_{(1,2)}(\frac{1}{A_s})+\varepsilon}. \tag{5.8.3}$$

De (5.1.1), on obtient

$$\begin{aligned} -A_s(z) &= \frac{f}{f^{(s)}}[\frac{f^{(k)}}{f} + A_{k-1}(z)\frac{f^{(k-1)}}{f} + \cdots + A_{s+1}(z)\frac{f^{(s+1)}}{f} \\ &\quad + A_{s-1}(z)\frac{f^{(s-1)}}{f} + \cdots + A_1(z)\frac{f'}{f} + A_0(z)]. \end{aligned} \tag{5.8.4}$$

Notons que

$$\begin{aligned} m(r, \frac{f}{f^{(s)}}) &\leq m(r,f) + m(r, \frac{1}{f^{(s)}}) \leq T(r,f) + T(r, \frac{1}{f^{(s)}}) \\ &= T(r,f) + T(r, f^{(s)}) + O(1) \\ &= O(\log r) + O(1). \end{aligned} \tag{5.8.5}$$

De (5.8.4) et (5.8.5), on obtient

$$\begin{aligned} m(r, A_s) &\leq m(r, \frac{f}{f^{(s)}}) + \sum_{j\neq s} m(r, \frac{f^{(j)}}{f}) + \sum_{j\neq s} m(r, A_j) + O(1) \\ &\leq \sum_{j\neq s} m(r, A_j) + O(\log r) + O(1). \end{aligned} \tag{5.8.6}$$

De (5.8.6), on obtient

$$T(r, A_s) = N(r, A_s) + m(r, A_s)$$

$$\leq N(r, A_s) + \sum_{j\neq s} m(r, A_j) + O(\log r) + O(1). \tag{5.8.7}$$

Donc, en remplaçant (5.8.1)-(5.8.3) dans (5.8.7), pour tout $r_n \notin E_6$, on obtient

$$(\log r_n)^{\sigma-\varepsilon} \leq (\log r_n)^{\lambda_{(1,2)}(\frac{1}{A_s})+\varepsilon} + k\,(\log r_n)^{b+\varepsilon} + O\,(\log r_n) + O(1).$$

Comme $b \geq 1$, on obtient une contradiction. Par conséquent, si $f(z) \not\equiv 0$ est une solution méromorphe non transcendante de (5.1.1), alors elle doit être un polynôme de degré $\deg f \leq s-1$ si $s \geq 1$.

Maintenant, nous supposons que $f(z)$ est une solution méromorphe transcendante de (5.1.1). Notons que

$$m(r, \frac{f}{f^{(s)}}) \leq m(r, f) + m(r, \frac{1}{f^{(s)}}) \leq T(r, f) + T(r, \frac{1}{f^{(s)}})$$
$$= T(r, f) + T(r, f^{(s)}) + O(1) \leq T(r, f) + (s+1)T(r, f) + o(T(r, f)) + O(1)$$

$$= (s+2)T(r, f) + o(T(r, f)) + O(1). \tag{5.8.8}$$

D'après le Lemme 5.2.1, (5.8.4) et (5.8.8), on obtient

$$m(r, A_s) \leq m(r, \frac{f}{f^{(s)}}) + \sum_{j\neq s} m(r, \frac{f^{(j)}}{f}) + \sum_{j\neq s} m(r, A_j) + O(1)$$

$$\leq \sum_{j\neq s} m(r, A_j) + k^2 \log^+ T(2r, f) + (s+2)T(r, f) + o(T(r, f)) + O(1).$$

D'où,

$$T(r, A_s) = N(r, A_s) + m(r, A_s)$$

$$\leq N(r, A_s) + \sum_{j \neq s} m(r, A_j) + (s+2)\,(1 + o(1))\, T(r, f) + O(1). \tag{5.8.9}$$

En substituant (5.8.1)-(5.8.3) dans (5.8.9), pour tout $r_n \notin E_6$, on a

$$(1 - o(1))\,(\log r_n)^{\sigma - \varepsilon} \leq (s+2)\,(1 + o(1))\, T(r_n, f), \tag{5.8.10}$$

Comme $\varepsilon (0 < 2\varepsilon < \min\{\sigma - b, \sigma - \lambda_{(1,2)}(\frac{1}{A_s})\})$ est arbitraire, alors de (5.8.10), on obtient

$$\sigma_{(1,2)}(f) \geq \sigma_{(1,2)}(A_s) > 1.$$

Supposons que toutes les solutions de (5.1.1) sont méromorphes et que (5.1.1) admet une base de solutions méromorphes $\{f_1, f_2, \cdots, f_k\}$. D'après le Lemme 5.2.13, on obtient

$$m(r, A_s) = O\left\{\log\left(\max_{1 \leq n \leq k} T(r, f_n)\right)\right\}.$$

Si $N(r, A_s) > m(r, A_s)$ pour tout r suffisamment grand, alors

$$T(r, A_s) = N(r, A_s) + m(r, A_s) \leq 2N(r, A_s),$$

d'où $\sigma_{(1,2)}(A_s) \leq \lambda_{(1,2)}(\frac{1}{A_s})$, ce qui contredit l'hypothèse $\lambda_{(1,2)}(\frac{1}{A_s}) < \sigma_{(1,2)}(A_s)$. Alors, pour tout r suffisamment grand, on a

$$N(r, A_s) \leq m(r, A_s).$$

Ainsi, on obtient

$$T(r, A_s) = O\left\{\log\left(\max_{1 \leq n \leq k} T(r, f_n)\right)\right\}.$$

Cela veut dire qu'il existe une $\{f_1, f_2, \cdots, f_k\}$, disons f_1, vérifiant $T(r, A_s) = O\left\{\log T(r, f_1)\right\}$. Par conséquent, on obtient

$$\sigma_{(2,2)}(f_1) \geq \sigma_{(1,2)}(A_s) > 1.$$

5.9 Preuve du Théorème 5.1.7

Supposons que $f(z) \not\equiv 0$ est une solution rationnelle de (5.1.1). Si $f(z)$ est une fonction rationnelle, qui a un pôle à $z_0 \in \mathbb{C}$ de degré $\alpha (\geq 1)$, ou $f(z)$ est un polynôme de degré $\deg f \geq s$ alors $f^{(s)}(z) \not\equiv 0$. Posons $b = \max\{\sigma_{(1,2)}(A_j) : j \neq s \text{ et } j = 0, 1, \cdots, k-1\} <$

$\mu_{(1,2)}(A_s) \leq \sigma_{(1,2)}(A_s) = \sigma < \infty$. Alors, pour tout ε $(0 < 2\varepsilon < \mu_{(1,2)}(A_s) - b)$ et pour tout r suffisamment grand, on a

$$m(r, A_j) \leq T(r, A_j) \leq (\log r)^{b+\varepsilon}, \ \ (j \in \{1, \cdots, k-1\} \backslash \{s\}), \tag{5.9.1}$$

$$T(r, A_s) \geq (\log r)^{\mu_{(1,2)}(A_s) - \varepsilon}. \tag{5.9.2}$$

De $\lambda_{(1,2)}(\frac{1}{A_s}) < \mu_{(1,2)}(A_s)$, on a

$$N(r, A_s) = o(T(r, A_s)), \quad r \to +\infty. \tag{5.9.3}$$

De (5.8.4) et (5.8.5), on obtient

$$\begin{aligned} m(r, A_s) &\leq m(r, \frac{f}{f^{(s)}}) + \sum_{j \neq s} m(r, \frac{f^{(j)}}{f}) + \sum_{j \neq s} m(r, A_j) + O(1) \\ &\leq \sum_{j \neq s} m(r, A_j) + O(\log r) + O(1). \end{aligned} \tag{5.9.4}$$

De (5.9.4), on obtient

$$T(r, A_s) = N(r, A_s) + m(r, A_s)$$

$$\leq N(r, A_s) + \sum_{j \neq s} m(r, A_j) + O(\log r) + O(1). \tag{5.9.5}$$

De (5.9.3), on obtient de (5.9.5)

$$(1 - o(1))\, T(r, A_s) \leq \sum_{j \neq s} m(r, A_j) + O(\log r) + O(1). \tag{5.9.6}$$

Donc, en remplaçant (5.9.1) et (5.9.3) dans (5.9.6), pour tout ε $(0 < 2\varepsilon < \mu_{(1,2)}(A_s) - b)$ et pour r suffisamment grand, on obtient

$$(\log r)^{\mu_{(1,2)}(A_s) - \varepsilon} \leq k\, (\log r)^{b+\varepsilon} + O\, (\log r) + O(1).$$

Comme $b \geq 1$, on obtient une contradiction. Par conséquent, si $f(z) \not\equiv 0$ est une solution méromorphe non transcendante de (5.1.1), alors elle doit être un polynôme de degré $\deg f \leq s - 1$ si $s \geq 1$.

Maintenant, nous supposons que $f(z)$ est une solution méromorphe transcendante de (5.1.1). D'après le Lemme 5.2.1, (5.8.4) et (5.8.8), on obtient

$$m(r, A_s) \leq m(r, \frac{f}{f^{(s)}}) + \sum_{j\neq s} m(r, \frac{f^{(j)}}{f}) + \sum_{j\neq s} m(r, A_j) + O(1)$$

$$\leq \sum_{j\neq s} m(r, A_j) + k^2 \log^+ T(2r, f) + (s+2)T(r, f) + o(T(r, f)) + O(1).$$

D'où,

$$T(r, A_s) = N(r, A_s) + m(r, A_s)$$

$$\leq N(r, A_s) + \sum_{j\neq s} m(r, A_j) + (s+2)\,(1 + o(1))\,T(r, f) + O(1).$$

De (5.9.3), on obtient

$$(1 - o(1))\,T(r, A_s) \leq \sum_{j\neq s} m(r, A_j) + (s+2)\,(1 + o(1))\,T(r, f) + O(1). \tag{5.9.7}$$

Alors, en substituant (5.9.1) et (5.9.2) dans (5.9.7), pour tout ε $(0 < 2\varepsilon < \mu_{(1,2)}(A_s) - b)$ et pour r suffisamment grand, on obtient

$$(1 - o(1))\,(\log r)^{\mu_{(1,2)}(A_s)-\varepsilon} \leq (s+2)\,(1 + o(1))\,T(r, f). \tag{5.9.8}$$

Comme ε $(0 < 2\varepsilon < \mu_{(1,2)}(A_s) - b)$ est arbitraire, alors de (5.9.8), on obtient

$$\sigma_{(1,2)}(f) \geq \mu_{(1,2)}(f) \geq \mu_{(1,2)}(A_s) > 1.$$

Supposons que toutes les solutions de (5.1.1) sont méromorphes et que (5.1.1) admet une base de solutions méromorphes $\{f_1, f_2, \cdots, f_k\}$. D'après le Lemme 5.2.13, on obtient

$$m(r, A_s) = O\left\{\log\left(\max_{1\leq n\leq k} T(r, f_n)\right)\right\}.$$

De (5.9.3), pour tout r suffisamment grand, on obtient

$$T(r, A_s) = N(r, A_s) + m(r, A_s) = o(T(r, A_s)) + m(r, A_s).$$

D'où, pour tout r suffisamment grand, on a

$$(1 - o(1))\,T(r, A_s) = m(r, A_s).$$

Ainsi, on obtient

$$T(r, A_s) = O\left\{\log\left(\max_{1\leq n\leq k} T(r, f_n)\right)\right\}.$$

Cela veut dire qu'il existe une solution de $\{f_1, f_2, \cdots, f_k\}$, disons f_1, vérifiant $T(r, A_s) = O\{\log T(r, f_1)\}$. Par conséquent, on obtient

$$\sigma_{(2,2)}(f_1) \geq \mu_{(1,2)}(f_1) \geq \mu_{(1,2)}(A_s) > 1.$$

5.10 Preuve du Théorème 5.1.8

D'après le Théorème 5.1.4, on a $\sigma_{(2,2)}(f) \geq \sigma_{(1,2)}(A_0) \geq 1$. Soit $g(z) = f(z) - z$. Clairement, on a $\bar{\lambda}_{(2,2)}(f - z) = \bar{\lambda}_{(2,2)}(g)$ et $\sigma_{(2,2)}(f) = \sigma_{(2,2)}(g)$. L'équation (5.1.1) devient

$$g^{(k)} + A_{k-1}(z)g^{(k-1)} + \cdots + A_1(z)g' + A_0(z)g = -(A_1(z) + zA_0(z)).$$

Si $\sigma_{(1,2)}(A_0) > 1$, alors $\sigma_{(1,2)}(A_1(z) + zA_0(z)) = \sigma_{(1,2)}(A_0) > 1$ et donc $A_1(z) + zA_0(z) \not\equiv 0$. Alors, d'après le Lemme 5.2.10, on a $\bar{\lambda}_{(2,2)}(g) = \sigma_{(2,2)}(g)$. Ainsi, on obtient $\bar{\lambda}_{(2,2)}(f - z) = \sigma_{(2,2)}(f) \geq \sigma_{(1,2)}(A_0) > 1$.

5.11 Preuve du Théorème 5.1.9

D'après le Théorème 5.1.6, on a $\sigma_{(1,2)}(f) \geq \sigma_{(1,2)}(A_s) > 1$. Supposons que f est une solution méromorphe transcendante de (5.1.1) avec $\sigma_{(1,2)}(f) > \sigma_{(1,2)}(A_s) > 1$. Soit $g(z) = f(z) - z$. Alors, on a $\sigma_{(1,2)}(f) = \sigma_{(1,2)}(g)$. De l'équation (5.1.1) on obtient

$$g^{(k)} + A_{k-1}(z)g^{(k-1)} + \cdots + A_1(z)g' + A_0(z)g = -(A_1(z) + zA_0(z)).$$

Comme $\sigma_{(1,2)}(f) > \sigma_{(1,2)}(A_s) > 1$, alors

$$\max\{\sigma_{(1,2)}(A_j)\ (\ j = 0, 1, \cdots, k-1), \sigma_{(1,2)}(-A_1 - zA_0)\} \leq \sigma_{(1,2)}(A_s) < \sigma_{(1,2)}(f).$$

Supposons que $A_1(z)+zA_0(z) \not\equiv 0$. Alors, d'après le Lemme 5.2.10, on a $\bar{\lambda}_{(1,2)}(g) = \sigma_{(1,2)}(g)$ et donc $\bar{\lambda}_{(1,2)}(f-z) = \sigma_{(1,2)}(f)$. Encore par le Théorème 5.1.6, il existe au moins une solution f_1 vérifiant $\sigma_{(2,2)}(f_1) \geq \sigma_{(1,2)}(A_s) > 1$ et donc d'après le Lemme 5.2.10, on obtient $\bar{\lambda}_{(2,2)}(f_1-z) = \sigma_{(2,2)}(f_1) \geq \sigma_{(1,2)}(A_s) > 1$.

Bibliographie

[1] S. Bank, *General theorem concerning the growth of solutions of first-order algebraic differential equations*, Compositio Math. 25 (1972), 61–70.

[2] P. D. Barry, *Some theorems related to the* $\cos \pi\rho$ *theorem*, Proc. London Math. Soc., 21 (1970), 334–360.

[3] B. Belaïdi, *Growth and oscillation of solutions to linear differential equations with entire coefficients having the same order*, Electron. J. Differential Equations 2009, No. 70, 10 pp.

[4] B. Belaïdi, *On the iterated order and the fixed points of entire solutions of some complex linear differential equations*, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 2006, No. 9, 11 pp.

[5] B. Belaïdi, *Oscillation of fixed points of solutions of some linear differential equations*, Acta Math. Univ. Comenian. (N.S.) 77 (2) (2008) 263–269.

[6] B. Belaïdi, H. Habib, *On the growth of solutions to non-homogeneous linear differential equations with entire coefficients having the same order*, Facta Univ. Ser. Math. Inform. 28 (2013), no. 1, 17–26.

[7] B. Belaïdi, H. Habib, *On the growth of solutions of some non-homogeneous linear differential equations*, Acta Math. Acad. Paedagog. Nyházi. (N.S.) 32 (2016), no. 1, 101-111.

[8] L.G. Bernal, *On growth* $k-$*order of solutions of a complex homogeneous linear differential equations*, Proc. Amer. Math. Soc. 101 (1987), 317-322.

[9] R. P. Boas, *Entire functions*, Academic Press INC., New York, 1954.

[10] T. B. Cao, Z. X. Chen, X. M. Zheng, J. Tu, *On the iterated order of meromorphic solutions of higher order linear differential equations*, Ann. Differential Equations 21 (2005), no. 2, 111–122.

[11] T. B. Cao, K. Liu and J. Wang, *On the growth of solutions of complex differential equations with entire coefficients of finite logarithmic order*, Math. Rep. (Bucur.) 15(65), 3 (2013), no. 3, 249 269.

[12] T. B. Cao, J. F. Xu, Z.X. Chen, *On the meromorphic solutions of linear differential equations on the complex plane*, J. Math. Anal. Appl. 364 (2010), 130 142.

[13] T. B. Cao, H. X. Yi, *On the complex oscillation of higher order linear differential equations with meromorphic coefficients*, J. Syst. Sci. Complex. 20 (2007) 135–148.

[14] Z. X. Chen, *On the hyper order of solutions of some second order linear differential equations*, Acta Math. Sinica Ser. B 18(2002), 79-88.

[15] Z. X. Chen, *On the rate of growth of meromorphic solutions of higher order linear differential equations*, Acta Math. Sinica (Chin. Ser.) 42 (3) (1999) 552–558 (in Chinese).

[16] Z. X. Chen, S. A. Gao, *The complex oscillation theory of certain non-homogeneous linear differential equations with transcendental entire coefficients*, J. Math. Anal. Appl. 179 (1993) 403–416.

[17] Z. X. Chen, K. H. Shon, *On the growth and fixed points of solutions of second order differential equations with meromorphic coeffcients*, Acta Math. Sinica, 21(4) (2005), 753-764.

[18] Z. X. Chen, C. C. Yang, *Quantitative estimations on the zeros and growths of entire solutions of linear differential equations*, Complex Var. Elliptic Equ. 42 (2000) 119–133.

[19] Z. X. Chen, C. C. Yang, *Some further results on the zeros and growths of entire solutions of second order linear differential equations*. Kodai Math. J. 22 (1999), no. 2, 273–285.

[20] Peter T.Y. Chern, *On meromorphic functions with finite logarithmic order*, Tran. Amer. Math. Soc. 358 (2005), 2, 473 489.

[21] A. Ferraoun, B. Belaïdi, *Estimation of hyper-order of solutions to higher order complex linear differential equations with entire coefficients of slow growth*. (Soumis)

[22] A. Ferraoun, B. Belaïdi, *Growth of solutions of complex differential equations with coefficients being Lacunary series of finite iterated order*, Nonlinear Studies, Vol. 23, No. 2, 2016, 237-252.

[23] A. Ferraoun, B. Belaïdi, *Growth of solutions of higher order linear differential equations with coefficients of finite logarithmic order.* (Soumis)

[24] A. Ferraoun, B. Belaïdi, *On the [p,q]-order of solutions of some complex linear differential equations.* (Soumis)

[25] A. Ferraoun, B. Belaïdi, *The growth of solutions of some linear differential equations with coefficients being Lacunary series of (p,q)-order*, Facta Universitatis, Ser. Math. Inform. Vol. 30, No 5 (2015), 607–622.

[26] G. Frank, S. Hellerstein, *On the meromorphic solutions of non-homogeneous linear differential equations with polynomial coefficients*, Proc. London Math. Soc. 53 (1986), 3, 407 428.

[27] G. G. Gundersen, *Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function, plus similar estimates*, J. London Math. Soc. (2) 37(1988), no. 1, 88-104.

[28] G. G. Gundersen, *Finite order solutions of second order linear differential equations,* Trans. Amer. Math. Soc. 305 (1988), no. 1, 415–429.

[29] K. Hamani, B. Belaïdi, *Growth of solutions of complex linear differential equations with entire coefficients of finite iterated order*, Acta Univ. Apulensis Math. Inform. No. 27 (2011), 203–216.

[30] W. Hayman, *Meromorphic functions*, Oxford Mathematical Monographs Clarendon Press, Oxford, 1964.

[31] J. Heittokangas, R. Korhonen, J. Rättyä, *Generalized logarithmic derivative estimates of Gol'dberg-Grinshtein type*, Bull. London Math. Soc. 36 (2004), 105-114.

[32] J. Heittokangas, Z. T. Wen, *Functions of finite logarithmic order in the unit disc*, Part I. J. Math. Anal. Appl. 415 (2014), no. 1, 435–461.

[33] J. Heittokangas, Z. T. Wen, *Functions of finite logarithmic order in the unit disc*, Part II. Comput. Methods Funct. Theory 15 (2015), no. 1, 37-58.

[34] S. Hellerstein, J. Miles, J. Rossi, *On the growth of solutions of certain linear differential equations*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., 17(1992), 327–341.

[35] H. Hu, X.M. Zheng, *Growth of solutions to linear differential equations with entire coefficients*, Electron. J. Differential Equations 2012, No. 226, 15 pp.

[36] H. Hu, X. M. Zheng, *Growth of solutions of linear differential equations with meromorphic coefficients of [p, q]-order*, Math. Commun. 19(2014), 29-42.

[37] W. P. Huang, J. L. Zhou, J. Tu, J. H. Ning, *On the hyper-order of solutions of two class of complex linear differential equations*, Adv. Difference Equ. 2015, 2015 :234, 12 pp.

[38] G. Jank, L. Volkmann, *Untersuchungen ganzer und meromorpher Funktionen unendlicher Ordnung*, Arch. Math. (Basel) 39 (1982), no. 1, 32–45.

[39] J. Jank, L. Volkmann, *Einführung in die Theorie der ganzen und meromorphen Funktionen mit Anwendungen auf Differentialgleichungen*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1985.

[40] G. Jank, H. Wallner, *Über das Wachstum gewisser Klassen kanonischer Produkte*, Arch. Math. (Basel) 28 (1977), no. 3, 274–280.

[41] O.P. Juneja, G.P. Kapoor, S.K. Bajpai, *On the (p, q)-order and lower (p,q)-order of an entire function*, Reine Angew. Math. 282 (1976), 53 67.

[42] O.P. Juneja, G.P. Kapoor, S.K. Bajpai, *On the (p, q)-type and lower (p,q)-type of an entire function*, J. Reine Angew. Math. 290 (1977), 180 190.

[43] L. Kinnunen, *Linear differential equations with solutions of finite iterated order*, Southeast Asian Bull. Math. 22 (1998), no. 4, 385–405.

[44] T. Kövari, *A gap-theorem for entire functions of infinite order*, Michigan Math. J. 12 (1965), 133–140.

[45] I. Laine, *Nevanlinna theory and complex differential equations*, de Gruyter Studies in Mathematics, 15. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1993.

[46] L. M. Li, T. B. Cao, *Solutions for linear differential equations with meromorphic coefficients of [p, q]-order in the plane*, Electron. J. Diff. Equ., 195 (2012),1-15.

[47] J. Liu, J. Tu, L.Z. Shi, *Linear differential equations with entire coefficients of [p, q]-order in the complex plane*, J. Math. Anal. Appl. 372 (2010), 55 67.

[48] M. S. Liu, X. M. Zhang, *Fixed points of meromorphic solutions of higher order linear differential equations*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 31 (2006) 191–211.

[49] J. Tu, Z. X. Chen, *Growth of solutions of complex differential equations with meromorphic coefficients of finite iterated order*, Southeast Asian Bull. Math. 33 (2009), no. 1, 153–164.

[50] J. Tu, J. Jiang, X. Zheng, *Hyper order of solutions of higher order L. D. E. with coefficients being Lacunary series*, J. Math. Res. Appl. 32 (2012), no. 6, 687–693.

[51] J. Tu, T. Long, *Oscillation of complex high order linear differential equations with coefficients of finite iterated order*, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 2009, No. 66, 1-13.

[52] J. Tu, H. Y. Xu, H. M. Liu, Y. Liu, *Complex oscillation of higher-order linear differential equations with coefficients being Lacunary series of finite iterated order*, Abstr. Appl. Anal. 2013, Art. ID 634739, 8 pp.

[53] D. Sato, *On the rate of growth of entire functions of fast growth*, Bull. Amer. Math. Soc. 69 (1963), 411 414.

[54] J. Wang, I. Laine, *Growth of solutions of nonhomogeneous linear differential equations*, Abstr. Appl. Anal. 2009, Art. ID 363927, 1-11.

[55] L. Wang, H. Liu, *Growth of meromorphic solutions of higher order linear differential equations, Electronic Journal of Differential Equations*, Vol. 2014 (2014), No. 125, 1-11.

[56] S. Z. Wu, X. M. Zheng, *On meromorphic solutions of some linear differential equations with entire coefficients being Fabry gap series*, Adv. Difference Equ. 2015, 2015 :32, 13 pp.

[57] P. C. Wu, J. Zhu, *On the growth of solutions to the complex differential equation* $f'' + Af' + Bf = 0$, Science China, Mathematics, 54(2011), 939–947.

[58] H. Y. Xu, J. Tu, Z. X. Xuan, *The Oscillation on Solutions of Some Classes of Linear Differential Equations with Meromorphic Coefficients of Finite [p,q]-Order*, The Scientific World Journal, vol. 2013, Article ID 243873, 8 pages.

[59] L. Yang, *Value Distribution Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1993 ; Science Press, Beijing, 1982.

[60] C.C. Yang, H. X. Yi, *Uniqueness Theory of Meromorphic Functions*. Science Press 1995/Kluwer 2003.

[61] M. L. Zhan, X. M. Zheng, *Solutions to linear differential equations with some coefficient being lacunary series of [p, q]-order in the complex plane*, Ann. of Diff. Eqs., 30 :3(2014), 364-372.

[62] C. Y. Zhang, J. Tu, *Growth of solutions to linear differential equations with entire coefficients of slow growth*, Electron. J. Differential Equations 2010, No. 43, 12 pp.

[63] J. H. Zheng, C. C. Yang, *Estimate on the number of fix-points of composite entire functions*, Complex Variables Theory Appl. 24 (1994), no. 3-4, 301–309.