

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABDELHAMID BEN BADIS DE MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
FILIÈRE : MATHÉMATIQUES



UNIVERSITE
Abdelhamid Ibn Badis
MOSTAGANEM

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques délivré par

Université de Mostaganem

Spécialité "Modélisation, Contrôle et Optimisation"

présenté par :

Nora BOUKACEM

Sur une certaine classe d'équations elliptiques

soutenu publiquement le 05 Juin 2018 le jury composé de :

Président :	Pr. OULD ALI MOHAND	MCA	U. MOSTAGANEM.
Examineur :	Pr. Diala HORIYA	MCB	U. MOSTAGANEM.
Encadreur :	Pr. Sofiane MESSIRDI	MCB	U. MOSTAGANEM.

Année Universitaire : 2017 / 2018

M
A
S
T
E
R

Dédicaces

je dédie ce modeste travail :

A mes très chers parents qui m'ont soutenu durant toute la durée de mes études.

Mes frères Mohammed et Mostafa, et mes sœurs.

A tous les membres de ma famille, petits et grands.

A mes chers amis Kheira et Rekia, Leyla, Naima, Hannan, Safia et Aicha.

A tous ceux qui m'aiment et que j'aime.

Remerciements

En préambule à ce mémoire je remercie ALLAH qui nous aide et nous donne la patience et le courage durant ces longues années d'étude. Je souhaite adresser mes remerciements les plus sincères aux personnes qui nous ont apporté leur aide et qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire ainsi qu'à la réussite de cette formidable année universitaire. Ces remerciements vont tout d'abord au corps professoral et administratif de la Faculté des Sciences Exactes, pour la richesse et la qualité de leur enseignement et qui déploient de grands efforts pour assurer à leurs étudiants une formation actualisée.

Je tiens à remercier sincèrement Monsieur, MESSIRDI Sofiane, qui, en tant que Directeur de mémoire, c'est toujours montré à l'écoute et très disponible tout au long de la réalisation de ce mémoire, ainsi pour l'inspiration, l'aide et le temps qu'il a bien voulu nous consacrer et sans qui ce mémoire n'aurait jamais vu le jour.

On n'oublie pas nos parents pour leur contribution, leur soutien et leur patience.

Mes vifs remerciements vont également aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre recherche en acceptant d'examiner notre travail.

Enfin, nous adressons nos plus sincères remerciements à tous nos proches et amis, qui nous ont toujours encouragée au cours de la réalisation de ce mémoire. Merci à tous et à toutes.

Table des matières

Index des notations	iv
Introduction	1
1 Préliminaires	2
1 Introduction	2
2 Quelques définitions	2
3 Espace de Sobolev	4
2 Méthodes Variationnelles	13
1 Initiation aux Méthodes Variationnelles	13
2 Concentration de Compacité	15
3 Sur les problèmes elliptiques avec deux exposants critiques de Hardy-Sobolev au même pôle	20
1 Existence de Solution	20
2 Non existence de solutions	24
Conclusion	27
Bibliographie	28

Index des notations

1. Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^N .
2. $\overline{\Omega}$ est la fermeture de Ω .
3. Si $x, y \in \mathbb{R}^N$ alors le produit scalaire dans \mathbb{R}^N s'écrit sous la forme :

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^N x_i \cdot y_i$$

avec $x = (x_1, \dots, x_N), y = (y_1, \dots, y_N)$.

4. $\alpha \in \mathbb{N}^n$ est un multi-indice, tel que $|\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i$.
5. p^* est l'exposant critique tel que : $p^* = \frac{Np}{1-p}$.
6. p' est l'exposant conjugué de p tel que : $p' = \frac{p}{p-1}$.
7. $\nabla u := \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)^t$ est le gradient de la fonction $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.
8. $\langle \cdot, \cdot \rangle$: Produit scalaire de \mathbb{R}^N .
9. p.p : presque partout.
10. $\frac{1}{|x|^p}$ est le potentiel de Hardy.
11. $D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}} u$ avec $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N$.
12. $C_0^\infty(\Omega)$: est l'espace des fonctions C^∞ à support compact dans Ω .
13. $C_c^\infty(\Omega)$: l'ensemble des fonctions de classe C^∞ à support compact contenu dans Ω .
14. $C^k(\Omega)$: fonctions k fois continument différentiables sur Ω ($k \geq 0$).
15. $C_c(\Omega)$: fonctions continues à support compact dans Ω .
16. X' : Espace dual de X .

17. $C^\infty(\Omega) = \cap_{k \geq 0} C^k(\Omega)$.
18. $\mathcal{C}_0(\Omega)$: la fermeture de $\mathcal{K}(\Omega)$ dans $\mathcal{BC}(\Omega)$ pour la norme $\| \cdot \|_{L^\infty}$.
19. $\mathcal{C}(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N \text{ continues}\}$.
20. $\mathcal{K}(\Omega) = \{u \in \mathcal{C}(\Omega); \text{ supp } u \text{ est un compact de } \Omega\}$.
21. $\mathcal{BC}(\Omega) = \{u \in \mathcal{C}(\Omega); \|u\|_{L^\infty} = \sup_{x \in \Omega} |u(x)| < \infty\}$.
22. $\nu(\Theta) = \sup \{ \langle \nu, \phi \rangle \mid \phi \in \mathcal{C}_0(\Omega), \text{ supp}(\phi) \subset \Theta, 0 \leq \phi \leq 1 \}$, sachant que Θ est un ouvert de \mathbb{R}^N et ν est une mesure finie.
23. $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ complétion de C_0^∞ par rapport à la norme $\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$.
24. $D^{-1,2}(\mathbb{R}^N)$ le dual de $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$.
25. $2^*(\alpha) = \frac{2(N-\alpha)}{N-2}$ est l'exposant critique de Hardy-Sobolev avec $0 \leq \alpha < 2$.
26. $2^* = \frac{2N}{N-2}$ est l'exposant critique de Sobolev.
27. $\bar{\mu} = \left(\frac{N-2}{2}\right)^2$ est la meilleure constante de Hardy.

Introduction

L'objet de ce mémoire est l'étude d'un problème elliptique à coefficient singulier. L'étude des problèmes contenant un seul exposant a été largement étudiée, on les appelle problèmes de Brezis-Nirenberg. Depuis, il a été généralisé à d'autres opérateurs. L'estimation des niveaux d'énergies est calculée à partir des fonctions extrémales des inégalités de Sobolev, Hardy-Sobolev ou plus généralement de Caffarelli-Kohn-Nirenberg. Elle nous permet de récupérer la "compacité locale des suites de Palais-Smale" sous un certain seuil.

Le problème considéré se caractérise par la présence des non-linéarités critiques du type Hardy-Sobolev et des poids singuliers; Ceci pose un certain nombre de difficultés liées à la perte de compacité des injections de Sobolev ainsi que la régularité des solutions. Les méthodes variationnelles classiques ne sont pas applicables. Il ressort de notre étude que l'existence de solutions dépend de la géométrie du domaine.

Ce mémoire comprend trois chapitres et est organisé comme suit :

- Le chapitre 1 concerne les préliminaires : rappels sur des inégalités de Sobolev, Hardy-Sobolev qui sont nécessaires pour la suite.
- Le chapitre 2, nous avons présenté des résultats sur les méthodes variationnelles à savoir le principe d'Ekeland et le théorème du col (Pass-Mountain), et on détail le principe de concentration-compacité.
- Le chapitre 3 est dédié au problème suivant :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} -\Delta u - \frac{\mu}{|x|^2} u = \frac{1}{|x|^\alpha} |u|^{2^*(\alpha)-2} u + \frac{1}{|x|^\beta} |u|^{2^*(\beta)-2} u \\ u > 0 \end{cases} \text{ dans } \mathbb{R}^N \setminus \{0\},$$

où Ω est un domaine de \mathbb{R}^N et $N \geq 3$, $0 < \alpha, \beta < 2$, et pour $0 < t < 2$, $2^*(t) = \frac{2(N-t)}{N-2}$ est l'exposant critique de Hardy-Sobolev. De l'identité de Pohozaev il en ressort que le problème (\mathcal{P}) n'admet pas de solution non triviale lorsque Ω est un domaine borné étoilé par rapport à l'origine. L'étude du problème sur un domaine borné a donné le résultat suivant : L'existence d'au moins une solution positive du problème considéré en utilisant le principe de concentration de compacité de P.L. Lions et le théorème du Col.

Chapitre 1

Préliminaires

1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons présenter quelques définitions, notations, et énoncer des théorèmes qui seront utilisés dans ce travail.

2 Quelques définitions

Définition 1.1 (*espace de Hilbert*) : Tout espace vectoriel muni d'un produit scalaire qui est complet par rapport à la norme induite est appelé espace de Hilbert.

Définition 1.2 (*Notion de norme*) :

Une application $N : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée norme si, et seulement si les trois propriétés suivantes sont vérifiées :

1. $N(x) \geq 0, \forall x \in \Omega$ et $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_{\Omega}$.

2. $N(\lambda x) = |\lambda| N(x), \forall \lambda \in \mathbb{R}$ et $\forall x \in \Omega$.

3. $N(x + y) \leq N(x) + N(y), \forall x, y \in \Omega$.

Définition 1.3 (*Espace de Banach*) :

Tout espace vectoriel normé et complet est dit de Banach.

Définition 1.4 (*Espace réflexif*)[2] :

Soit E un espace de Banach et soit J l'injection canonique de E dans E'' . On dit que E est réflexif si : $J(E) = E''$.

Définition 1.5 (*Espace séparables*)[1] :

On dit qu'une espace métrique est séparable s'il existe un sous ensemble dénombrable et dense.

2.1 Point critique

Définition 1.6 Soient X un espace de Banach, ω un ouvert de X , et $J \in C^1(\omega, \mathbb{R})$.

On dit que $u \in \omega$ est un point critique de J si $J'(u) = 0$. Si u n'est pas un point critique, on dit que u est un point régulier de J .

On dit que $c \in \mathbb{R}$ est une valeur critique de J , s'il existe un $u \in \omega$ tel que $J(u) = c$ et $J'(u) = 0$. Sinon, c est dite une valeur régulière.

2.2 Quelques Rappels sur La Mesure

Définition 1.7 [3] Soit X un espace localement compact. On appelle mesure de Radon sur X toute forme linéaire continue μ sur $C_c(X, \mathbb{R}^N)$ dans le sens :

$$\forall K \in X, \exists M_K, \text{ tel que } |\mu(\phi)| \leq M_K \|\phi\|, \quad K \text{ est compact.}$$

On note par $\mathcal{M}(\Omega)$ l'espace de mesures de Radon.

Théorème 1.1 $\mathcal{M}(\Omega)$, muni de la norme

$$\|\mu\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)} = \sup_{u \in C_0(\Omega)} \{ |\langle \mu, u \rangle|, \|u\|_{L^\infty} = 1 \}$$

est un espace de Banach.

Définition 1.8 Une mesure finie μ est positive si

$$\langle \mu, u \rangle \geq 0 \quad \forall u \geq 0 \in C_0(\Omega).$$

L'ensemble des mesures de Radon positives est noté $\mathcal{M}^+(\Omega)$.

Théorème 1.2 Pour μ_1 et μ_2 deux mesures finies, on a

$$(\langle \mu_1, h \rangle = \langle \mu_2, h \rangle \quad \forall h \in C_c^2(\Omega)) \Rightarrow (\mu_1 = \mu_2).$$

Théorème 1.3 (la convergence monotone)[4] Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite croissante de fonctions mesurables positives. En notant $u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = \sup_{n \geq 1} u_n(x)$, on a :

$$\int_{\Omega} u(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_n(x) dx$$

Définition 1.9 (la convergence faible)[4] nous dirons qu'une suite de mesures $(\mu_n)_n$ tend faiblement vers μ dans $\mathcal{M}(\Omega)$, si :

$$\forall u \in C_c(\Omega), \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \mu_n, u \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u d\mu_n = \int_{\Omega} u d\mu = \langle \mu, u \rangle.$$

On écrira alors $\mu_n \rightharpoonup \mu$.

Lemme 1.1 (Le Lemme de Brézis-Lieb)

Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^N et $u_n \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$. Si u_n est bornée dans $L^p(\Omega)$ et $u_n \rightarrow u$ presque partout dans Ω , alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\|u_n\|_{L^p(\Omega)}^p - \|u_n - u\|_{L^p(\Omega)}^p \right) = \|u\|_{L^p(\Omega)}^p$$

3 Espace de Sobolev

Le cadre naturel à la résolution d'équations aux dérivées partielles est celui des espaces de Sobolev, espaces de fonctions L^2 (ou plus généralement L^p) dont les dérivées sont elles-mêmes L^2 . Ces espaces s'avèrent particulièrement adéquats car ils traitent de la régularité des fonctions (ce qui semblent être le minimum que l'on puisse exiger d'espaces où sont censées se trouver les solutions d'une équation différentielle) et ils sont complets. De plus, ils offrent, dans le cas des espaces H^s la structure d'un espace Hilbertien, et sont le cadre idéal pour l'utilisation de méthodes d'analyse fonctionnelle. Ils sont également parfaitement adaptés à l'obtention d'inégalités a priori (des estimations faisant intervenir l'équation différentielle sans aucun a priori sur l'existence de solutions) nécessaires à la démonstration de l'existence (ou l'unicité) de solutions d'une équation via des méthodes abstraites (par exemple des théorèmes de points fixes, ou le théorème de Hahn-Banach).

3.1 Les espaces $L^p(\Omega)$

Définition 1.10 [1] Soit $p \in \mathbb{R}$ et $1 \leq p < \infty$, on pose

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad u \text{ est mesurable} : \int_{\Omega} |u|^p dx < \infty \right\}$$

muni de la norme :

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Définition 1.11 [1] On pose :

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad u \text{ est mesurable, et il existe une constante, } C : |u| \leq C \quad p.p \text{ sur } \Omega \right\}$$

vérifie la norme suivante :

$$\|u\|_{L^\infty} = \inf \{ C : |u| \leq C \quad p.p \text{ sur } \Omega \}$$

Théorème 1.4 (Inégalité de Hölder) : [1] Soient $f \in L^p$ et $g \in L^{p'}$ avec $1 \leq p \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Alors $f \cdot g \in L^1$ et

$$\int |fg| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}} \quad (1.1)$$

3.2 les espaces $W^{m,p}(\Omega)$

Définition 1.12 [1] Soient $m \geq 2$ un entier et soit p avec $1 \leq p \leq \infty$, on définit par récurrence

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{m-1,p}(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{m-1,p}(\Omega), \forall i = 1, 2, \dots, N \right\}$$

il revient au même d'introduire

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega), \forall \alpha \text{ avec } |\alpha| \leq m, \exists g_\alpha \in L^p(\Omega) \text{ tel que } \int_{\Omega} u D^\alpha \phi = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} g_\alpha \phi, \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega) \right\}.$$

On note $D^\alpha u = g_\alpha$.

L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ muni de la norme :

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p}$$

est un espace de Banach.

On pose $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$; $H^m(\Omega)$ muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H^m} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u, D^\alpha v\|_{L^2},$$

est un espace de Hilbert.

Théorème 1.5 (Opérateur de prolongement) :[3]

On suppose que Ω est de classe C^1 avec $\partial\Omega$ borné. Alors il existe un opérateur de prolongement linéaire :

$$P : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$

tel que pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$:

1. $Pu|_{\Omega} = u$.
2. $\|Pu\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C \|u\|_{L^p(\Omega)}$.
3. $\|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$. Ou C dépend seulement de Ω .

les espaces $W^{1,p}(\Omega)$

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N et soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq \infty$.

Définition 1.13 [1] L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par :

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega), \exists g_1, \dots, g_N \in L^p(\Omega) \text{ tels que } \int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} g_i \phi, \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega), \forall i = 1, \dots, N \right\}.$$

On pose

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$$

Pour $u \in W^{1,p}(\Omega)$ on note :

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i \text{ et } \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right) = \text{grad } u.$$

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ muni de la norme :

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}.$$

Ou parfois de la norme équivalente $\left(\|u\|_{L^p}^p + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}}$ (si $1 \leq p < \infty$).

L'espace $H^1(\Omega)$ est muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H^1} = \langle u, v \rangle_{L^2} + \sum_{i=1}^N \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\rangle_{L^2}.$$

la norme associée :

$$\| u \|_{H^1} = \left(\| u \|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

est équivalente à la norme de $W^{1,2}$.

Proposition 1.1 [2] : L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est :

- un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$.
- un espace réflexif pour $1 < p < \infty$.
- un espace séparable pour $1 \leq p < \infty$.

Preuve. • Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $W^{1,p}(\Omega)$, alors la suite $(\nabla u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $L^p(\Omega)$. Puisque $L^p(\Omega)$ est complet, il existe des fonctions u, u_1, u_2, \dots, u_N de $L^p(\Omega)$ telles que

$$u_n \longrightarrow u \text{ dans } L^p(\Omega) \text{ et } \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \longrightarrow u_i \text{ dans } L^p(\Omega), \forall i = 1, \dots, N.$$

Comme $L^p(\Omega) \subset L^p_{loc}(\Omega)$, on détermine une distribution T_{u_n} .
 $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, on a

$$| T_{u_n}(\varphi) - T_u(\varphi) | \leq \int_{\Omega} | u_n(x) - u(x) | | \varphi(x) | dx \leq \| u_n - u \|_{L^p(\Omega)} \| \varphi \|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Et par suite :

$$T_{u_n}(\varphi) \longrightarrow_{n \rightarrow \infty} T_u(\varphi).$$

De même façon pour $\frac{\partial u_n}{\partial x_i}$

$$T \frac{\partial u_n}{\partial x_i}(\varphi) \longrightarrow_{n \rightarrow \infty} T_{u_i}(\varphi), \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\forall i = 1, \dots, N$, on a

$$T_{u_i}(\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} T \frac{\partial u_n}{\partial x_i}(\varphi) = - \lim_{n \rightarrow \infty} T_{u_n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) = - T_u \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) = T \frac{\partial u}{\partial x_i}(\varphi).$$

On conclut que $u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$, $\forall i = 1, \dots, N$. D'où $u \in W^{1,p}(\Omega)$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \| u_n - u \|_{L^p(\Omega)} = 0$, et par conséquent $W^{1,p}(\Omega)$ est complet.

- Pour $1 < p < \infty$, l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est réflexif. En effet, l'application :

$$T : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow (L^p(\Omega))^{N+1}$$

définit comme suit : $u \longrightarrow [u, \nabla u]$ est une isométrie. Donc $T(W^{1,p}(\Omega))$ est un sous-espace fermé de $(L^p(\Omega))^{N+1}$ qui est réflexif comme produit fini d'espaces réflexifs. On en déduit que $T(W^{1,p}(\Omega))$ est réflexif et donc également $W^{1,p}(\Omega)$.

- Pour $1 \leq p < \infty$, l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est séparable. En effet, $T(W^{1,p}(\Omega))$ est séparable, et par isométrie $W^{1,p}(\Omega)$ est séparable. ■

Théorème 1.6 (Friedrichs) :[1]

Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$ avec $1 \leq p < +\infty$, alors il existe une suite $(u_n)_n$ de $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ telle que

- $u_n|_{\Omega} \rightarrow u$ dans $L^p(\Omega)$.
- $\nabla u_n|_{\omega} \rightarrow \nabla u|_{\omega}$ dans $(L^p(\omega))^N$ pour tout $\omega \subset\subset \Omega$.

Rappelons que la notation $\omega \subset\subset \Omega$ signifie que ω est un ouvert tel que $\bar{\omega} \subset \Omega$ et $\bar{\omega}$ est compact.

La proposition suivante est une caractérisation simple des fonctions de $W^{1,p}(\Omega)$:

Proposition 1.2 [2] Soit $u \in L^p(\Omega)$ avec $1 < p \leq \infty$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $u \in W^{1,p}(\Omega)$.
2. il existe une constante C telle que :

$$\left| \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| \leq C \| \varphi \|_{L^{p'}} \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \quad \forall i = 1, 2, \dots, N.$$

3. Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout ouvert $\omega \subset\subset \Omega$ et tout $h \in \mathbb{R}^N$ avec $|h| < \text{dist}(\omega, \Omega^c)$ on a :

$$\| \tau_h u - u \|_{L^p(\omega)} \leq C |h|.$$

Où $\tau_h u(x) := u(x+h)$. De plus, on peut choisir $C = \| \nabla u \|_{L^p(\Omega)}$ dans toute la proposition.

Théorème 1.7 (Dérivation d'un produit et d'une composition de fonction) : [2]

Soient $u, v \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$. Alors $uv \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ et

$$\frac{\partial uv}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} v + u \frac{\partial v}{\partial x_i} \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

Soit $G \in C^1(\mathbb{R})$ telle que $G(0) = 0$ et $|G'(s)| \leq M \quad \forall s \in \mathbb{R}$ et soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Alors

$$G \circ u \in W^{1,p}(\Omega) \quad \frac{\partial}{\partial x_i} (G \circ u) = (G' \circ u) \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Théorème 1.8 (Densité) : [2]

Supposons Ω de classe C^1 . Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$ avec $1 \leq p < \infty$. Alors il existe une suite $(u_n) \subset C_0^\infty(\Omega)$ un telle que $u_n \xrightarrow{\Omega} u$ dans $W^{1,p}(\Omega)$. Autrement dit, les restrictions Ω des fonctions de $C_0^\infty(\Omega)$ forment un sous-espace dense de $W^{1,p}(\Omega)$.

3.3 les espaces $W_0^{1,p}(\Omega)$

Définition 1.14 [1] Soit $1 \leq p < \infty$; $W_0^{1,p}(\Omega)$ désigne la fermeture de $C_c^1(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$. on note

$$H_0^1(\Omega) := W_0^{1,2}(\Omega).$$

L'espace $W_0^{1,p}$ muni de la norme induite par $W^{1,p}$ est un espace de Banach séparable, il est de plus réflexif si $1 < p < \infty$. H_0^1 est un espace de Hilbert pour le produit scalaire de H^1 .

Théorème 1.9 [1] On suppose que Ω est de classe C^1 . Soit

$$u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \quad \text{avec } 1 \leq p < \infty.$$

Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $u = 0$ sur $\partial\Omega$.
2. $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Voici une autre caractérisation de $W_0^{1,p}$:

Théorème 1.10 [1] *On suppose que Ω de classe C^1 . Soit $u \in L^p(\Omega)$ avec $1 < p \leq \infty$. Les propriétés suivantes sont équivalents :*

1. $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.
2. il existe une constante C telle que :

$$\left| \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| \leq C \| \varphi \|_{L^{p'}} \quad \forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^N) \quad \forall i = 1, 2, \dots, N.$$

3. La fonction

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u(x) & x \in \Omega \\ 0 & x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}$$

appartient à $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ et dans ce cas $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}$.

Définition 1.15 (Dérivée au sens faible) :

Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^N et $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Soit $u \in L_{loc}^1(\Omega)$, $\forall f \in D(\Omega)$:

$$\langle D^\alpha u, f \rangle = (-1)^\alpha \langle u, D^\alpha f \rangle$$

Définition 1.16 (Semi-continue inférieurement) : [3]

Soient X un espace de Banach et ω une partie de X . Une fonction $J : \omega \rightarrow \mathbb{R}$ est dite :

◆ *semi-continue inférieurement (en abrégé s.c.i.)* si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ l'ensemble

$\{J \leq \lambda\} := \{x \in \omega ; J(x) \leq \lambda\}$ est fermé.

◆ *faiblement séquentiellement s.c.i.* si pour toute suite $(x_n)_n$ de ω convergeant faiblement vers $x \in \omega$ on a $J(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} J(x_n)$.

3.4 Injection de Sobolev

Nous allons ici nous intéresser aux possibilités d'injecter $W^{1,p}(\Omega)$ de façon continue ou même compacte dans des espace plus simples, comme $L^p(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$ voir même, dans certains cas, $C(\bar{\Omega})$.

A. cas où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.

Théorème 1.11 [1] *Soit $1 \leq p < \infty$. On a*

1. Si $1 \leq p \leq N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$ ou $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$,
2. Si $p = N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega) \quad \forall q \in [p, +\infty[$,
3. Si $p > N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$,
avec injections continues.

Théorème 1.12 (Rellich - Kondrachov)[2] : *Soit Ω un ouvert de classe C^1 de \mathbb{R}^N borné. Alors,*

1. Si $p < N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega) \quad \forall q \in [1, p^* [$ ou $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$,
2. Si $p = N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega) \quad \forall q \in [p, \infty[$,
3. Si $p > N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$,
avec injections compactes.

B. cas où $\Omega = \mathbb{R}^N$.

Commençons tout d'abord par le lemme suivantes :

Lemme 1.2 [2] Soient $N \geq 2$ et $f_1, \dots, f_N \in L^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1})$. Pour $x \in \mathbb{R}^N$ et $1 \leq i \leq N$ on pose

$$\tilde{x} = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^{N-1}. \quad (1.2)$$

Donc :

$$f(x) = f(\tilde{x}_1) \dots f(\tilde{x}_N), \forall x \in \mathbb{R}^N \quad (1.3)$$

appartient à $L^1(\mathbb{R}^N)$ et

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq \prod_{i=1}^N \|f_i\|_{L^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1})}. \quad (1.4)$$

Théorème 1.13 (Sobolev-Gagliardo-Nirenberg)[1] :

Soit $1 \leq p < N$. On définit $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$ ou $p^* = \frac{Np}{N-p}$. Alors

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^N) \quad (1.5)$$

De plus, il existe une constante $K = K(p, N)$ telle que

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq K \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}, \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \quad (1.6)$$

On remarque que $p^* \in (p, \infty)$

Preuve. On pose $D_i = \frac{d}{dx_i}, \forall i = 1, \dots, N$

Soit $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ on a

$$|u(x)| = \left| \int_{-\infty}^{x_1} D_1 u(t, x_2, \dots, x_N) dt \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |D_1 u(t, x_2, \dots, x_N)| dt$$

et de même pour tout $1 \leq i \leq N$

$$|u(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |D_i u(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_N)| dt = f_i(\tilde{x}_i). \quad (1.7)$$

Donc

$$|u(x)|^N \leq \prod_{i=1}^N f_i(\tilde{x}_i). \quad (1.8)$$

Par du lemme en déduit que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{\frac{N}{N-1}} dx \leq \prod_{i=1}^N \|f_i\|_{L^1(\mathbb{R}^{N-1})}^{\frac{1}{N-1}} = \prod_{i=1}^N \|D_i u\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{\frac{1}{N-1}}. \quad (1.9)$$

Par conséquent on a

$$\|u\|_{L^{\frac{N}{N-1}}(\mathbb{R}^N)} \leq \prod_{i=1}^N \|D_i u\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{\frac{1}{N}}. \quad (1.10)$$

On applique l'inégalité précédente pour $|u|^t$ avec $t > 0$

$$\||u|^t\|_{L^{\frac{tN}{N-1}}(\mathbb{R}^N)} \leq t \prod_{i=1}^N \||u|^{t-1} D_i u\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{\frac{1}{N}}. \quad (1.11)$$

D'après l'inégalité de Hölder, on obtient ;

$$\||u|^t\|_{L^{\frac{tN}{N-1}}(\mathbb{R}^N)} \leq \||u|^{t-1}\|_{L^{p'(t-1)}(\mathbb{R}^N)} \prod_{i=1}^N \|D_i u\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{\frac{1}{N}}. \quad (1.12)$$

Ensuite, on choisit t telle que $\frac{tN}{N-1} = p'(t-1)$, donc $t = \frac{N-1}{N} p^*$, de plus $t > 0$, car $1 \leq p < N$. On obtient finalement

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq t \prod_{i=1}^N \|D_i u\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{\frac{1}{N}} \quad (1.13)$$

Et donc

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}. \quad (1.14)$$

■

Corollaire 1.1 : [1]

Soit $1 \leq p \leq N$. Alors : $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ avec injection continue, $\forall q \in [p, p^*]$.

Preuve. Soit $q \in [p, p^*]$, alors $\exists \alpha \in [0, 1]$ t.q.

$$\frac{1}{q} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{p^*}. \quad (1.15)$$

Par l'inégalité d'interpolation,

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^\alpha \|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)}^{1-\alpha}. \quad (1.16)$$

En utilisant l'inégalité de Young, on obtient :

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^\alpha \|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)}^{1-\alpha} \leq \alpha \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + (1-\alpha) \|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)}.$$

et donc,

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}, \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

■

3.5 Formule de Green

Théorème 1.14 Soit Ω un ouvert régulier de classe C^1 . Soit u une fonction de $C^1(\overline{\Omega})$ à support borné dans le fermé $\overline{\Omega}$. Alors elle vérifie la formule de Green

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) dx = \int_{\partial\Omega} u(x) n_i(x) ds,$$

où n_i est la i -ème composante de la normale extérieure unitaire de Ω .

3.6 Inégalité de Poincaré

Corollaire 1.2 [2] :

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N . Alors il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

C'est-à-dire $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ est une norme équivalente sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ à la norme $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

Lemme 1.3 Soit $u_n \in H_0^1(\Omega)$. Si $u_n \rightharpoonup u$ dans $H_0^1(\Omega)$, alors

$$\int_{\Omega} |\nabla(u_n - u)|^2 = \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 - \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + o(1).$$

3.7 Inégalité de Hardy-Sobolev

On considère l'inégalité suivante de Hardy-Sobolev :

$$\left(\int_{\Omega} |x|^{-s} |u|^{2^{*(s)}} dx \right)^{2/2^{*(s)}} \leq C \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega).$$

où $N \geq 3$ et $0 < s < 2$. En particulier, pour $s = 0$ on obtient l'inégalité classique de Sobolev :

$$\int_{\Omega} |u|^{2^*} dx \leq C \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega).$$

Dans le cas où $s = 0$, on obtient l'inégalité de Hardy :

$$\int_{\Omega} |x|^{-2} |u|^2 dx \leq \frac{1}{\mu} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega).$$

A partir de la première inégalité on peut définir la meilleure constante de Hardy-Sobolev par

$$S_{\mu,s} := \inf_{u \in H_\mu \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx}{\left(\int_{\Omega} |x|^{-s} |u|^{2^{*(s)}} dx \right)^{\frac{2}{2^{*(s)}}}}.$$

Cette constante est atteinte par une famille de fonctions extrémales associée au problème étudié. Lorsque $s = 0$, S est appelée la meilleure constante de Sobolev.

Chapitre 2

Méthodes Variationnelles

1 Initiation aux Méthodes Variationnelles

Dans ce chapitre nous nous intéressons à l'analyse mathématique des équations aux dérivées partielles de type elliptique qui correspondent à des modèles physiques stationnaires. L'approche que nous allons suivre est appelée approche variationnelle, l'exemple prototype pour ce genre de problème sera le Laplacien pour lequel nous présentons le problème aux limites suivant :

$$(\mathcal{P}^*) \begin{cases} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où f est un second membre (une donnée du problème), et u est l'inconnue. Une solution classique (on parle aussi de solution forte) de (\mathcal{P}^*) est une solution $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, ce qui implique que le second membre f doit appartenir à $C(\Omega)$. Cette formulation classique pose malheureusement un certain nombre de problèmes pour démontrer l'existence d'une solution. C'est pourquoi nous remplacerons la formulation classique de (\mathcal{P}^*) par une formulation, dite variationnelle.

Le principe de l'approche variationnelle pour la résolution des équations aux dérivées partielles est de remplacer l'équation par une formulation équivalente, dite variationnelle, obtenue en intégrant l'équation multipliée par une fonction quelconque, dite test.

Pour simplifier la présentation, nous supposons que l'ouvert Ω est borné et régulier, et que le second membre f de (\mathcal{P}^*) est continu sur $\bar{\Omega}$. Le résultat principal de cette section est la proposition suivante.

Proposition 2.1 *Soit u une fonction de classe $C^2(\bar{\Omega})$. Soit X l'espace défini par*

$$X = \{\phi \in C^1(\bar{\Omega}) \text{ tel que } \phi = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

Alors u est une solution du problème aux limites (\mathcal{P}^) si et seulement si u appartient à X et vérifie l'égalité*

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx \quad \text{pour toute fonction } v \in X$$

L'égalité est appelée la formulation variationnelle du problème aux limites (\mathcal{P}^) .*

Un intérêt immédiat de la formulation variationnelle est qu'elle a un sens si la solution u est seulement une fonction de $C^1(\bar{\Omega})$, contrairement à la formulation classique (\mathcal{P}^*)

qui requiert que u appartienne à $C^2(\overline{\Omega})$. On pressent donc déjà qu'il est plus simple de résoudre l'équation obtenue par la formulation variationnelle que (\mathcal{P}^*) puisqu'on est moins exigeant sur la régularité de la solution. Dans la formulation variationnelle, la fonction v est appelée fonction test. La formulation variationnelle est aussi parfois appelée formulation faible du problème aux limites (\mathcal{P}^*) . Lorsqu'on prend $v = u$ dans la formulation faible, on obtient ce qu'il est convenu d'appeler une égalité d'énergie, qui exprime généralement l'égalité entre une énergie stockée dans le domaine Ω et une énergie potentielle associée à f .

1.1 La Suite de Palais-Smale

Quand on minimise une fonctionnelle du calcul des variations, un ingrédient essentiel est la compacité relative (pour une certaine topologie) des suites minimisantes. La condition de Palais-Smale joue un rôle assez semblable pour des suites sur lesquelles la fonctionnelle prend des valeurs tendant vers une valeur critique potentielle, et pas seulement vers la borne inférieure. C'est une condition a priori, à vérifier au cas par cas sur chaque fonctionnelle, indépendamment de l'existence ou non de valeurs critiques. Elle sera par contre un ingrédient essentiel pour montrer cette existence dans un certain nombre de cas.

Définition 2.1 [3] Une suite $(u_n)_n \subset X$ telle que :

$$J(u_n) \longrightarrow c \text{ dans } \mathbb{R} \text{ et } J'(u_n) \longrightarrow 0 \text{ dans } X'$$

est appelée une suite de Palais-Smale au niveau c , en abrégé (PS)

Définition 2.2 (La Condition de Palais-Smale) : [5]

Soient X un espace de Banach, et $J : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle de classe C^1 . Si $c \in \mathbb{R}$, on dit que J vérifie la condition de Palais-Smale au niveau c si toute suite $(u_n)_n \subset X$ telle que :

$$J(u_n) \longrightarrow c \text{ dans } \mathbb{R} \text{ et } J'(u_n) \longrightarrow 0 \text{ dans } X'$$

contient une sous-suite $(u_{n_k})_k$ convergente.

Nous allons maintenant donner un lemme abstrait qui joue un grand rôle dans un certain nombre de situations faisant intervenir le calcul des variations, le lemme d'Ekeland (en anglais Ekeland's variational principle).

1.2 Principe d'Ekeland

Théorème 2.1 [4] Soient $(X; d)$ un espace métrique complet et J une fonction s.c.i de X dans \mathbb{R} . On suppose que J est bornée inférieurement, et on pose $c := \inf_{x \in X} J(x)$.

Alors pour toute $\varepsilon > 0$, il existe u_ε telle que

$$\begin{cases} c \leq J(u_\varepsilon) \leq c + \varepsilon \\ \forall u \in X, J(u) - J(u_\varepsilon) + \varepsilon d(u, u_\varepsilon) > 0. \end{cases}$$

Corollaire 2.1 : [3] Soient X un espace de Banach, et $J \in C^1(X, \mathbb{R})$. On suppose que J est bornée inférieurement, alors il existe une suite de minimisante $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de J dans X telle que :

$$J(u_n) \longrightarrow \inf_X J, \quad J'(u_n) \longrightarrow 0 \text{ dans } X', \text{ lorsque } n \longrightarrow +\infty.$$

1.3 Théorème de Col(Mountain Pass Theorem)

Pour une fonctionnelle J qui n'est pas bornée (ni majorée, ni minorée), chercher ses points critiques revient à chercher des points selles. Ces points sont déterminées par un argument de type min-max, ce qui nous ramène à l'utilisation du théorème du col de la montagne.

Théorème 2.2 [5]

Soient X un espace de Banach, et $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ vérifiant la condition de Palais -Smale. On suppose que $J(0) = 0$ et que :

1. il existe $R > 0$, et $\alpha > 0$ tels que si $\|u\| = R$, alors $J(u) \geq \alpha$;
2. il existe $u_0 \in X$ tel que $\|u_0\| > R$ et $J(u_0) < \alpha$. Alors J possède une valeur critique c telle que $c \geq \alpha$. De façon plus précise, si on pose

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0, 1], X); \gamma(0) = 0, \gamma(1) = u_0\}.$$

et

$$c = \inf_{A \in \Gamma} \max_{v \in A} J(v),$$

Alors c est une valeur critique de J , et $c \geq \alpha$.

2 Concentration de Compacité

Cette méthode introduite par P.L.Lions est basée sur le lemme suivant, est c'est la méthode la plus générale résoudre les problème de minimisation posées dans des domaines non bornés.

Lemme 2.1 [7] Soit $(u_n) \in H^1(\mathbb{R}^N)$ une suite telle que

$$u_n \rightharpoonup u, \text{ dans } H^1(\mathbb{R}^N), \quad (2.1)$$

$$|\nabla(u_n - u)|^2 \rightharpoonup \mu \text{ dans } \mathcal{M}(\mathbb{R}^N), \quad (2.2)$$

$$|u_n - u|^{2^*} \rightharpoonup \nu \text{ dans } \mathcal{M}(\mathbb{R}^N), \quad (2.3)$$

$$u_n \rightarrow u \text{ p.p dans } \mathbb{R}^N. \quad (2.4)$$

Posons

$$\mu_\infty = \lim_{R \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{|x| \geq R} |\nabla u_n|^2 dx$$

et

$$\nu_\infty = \lim_{R \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{|x| \geq R} |u_n|^{2^*} dx.$$

Alors on a

$$\|\nu\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{2}{2^*}} \leq S^{-1} \|\mu\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)}, \quad (2.5)$$

$$\nu_\infty^{\frac{2}{2^*}} \leq S^{-1} \mu_\infty, \quad (2.6)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|\nabla u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 = \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 + \|\mu\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)} + \mu_\infty, \quad (2.7)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)}^{2^*} = \|u\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)}^{2^*} + \|\nu\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)} + \nu_\infty. \quad (2.8)$$

De plus, si $u = 0$ et $\|\nu\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{2}{2^*}} \leq S^{-1} \|\mu\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)}$, alors ν et μ sont concentrées en un point.

Preuve. On fixe la notation suivante :

$$\Xi = \{h \in C_c^2(\mathbb{R}^N) \mid \|h\|_{L^\infty} = 1\}.$$

1. Supposons d'abord $u = 0$. Soit $h \in \Xi$. Appliquons l'inégalité de Sobolev pour la fonction hu_n , pour un certain rayon r :

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |hu_n|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} &\leq S^{-1} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(hu_n)|^2 dx \\ &= S^{-1} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla hu_n + \nabla u_n h|^2 dx \\ &= S^{-1} \left[\int_{\mathbb{R}^N} |h|^2 |\nabla u_n|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} 2h \nabla hu_n \nabla u_n dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla h|^2 |u_n|^2 dx \right], \end{aligned}$$

qui peut aussi être écrit

$$\langle |u_n|^{2^*}, |h|^{2^*} \rangle^{\frac{2}{2^*}} \leq S^{-1} \langle |u_n|^2, |h|^2 \rangle + S^{-1} \int_{\mathbb{R}^N} 2h \nabla hu_n \nabla u_n dx + S^{-1} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla h|^2 |u_n|^2 dx$$

Passons à présent à la limite pour $n \rightarrow \infty$:

$$\langle |u_n|^{2^*}, |h|^{2^*} \rangle \rightarrow \langle \nu, |h|^{2^*} \rangle \text{ par (2.3),}$$

$$\langle |u_n|^2, |h|^2 \rangle \rightarrow \langle \mu, |h|^2 \rangle \text{ par (2.2)}$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^N} 2h \nabla hu_n \nabla u_n dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla h|^2 |u_n|^2 dx \rightarrow 0 \text{ car } u_n \rightarrow 0 \text{ dans } L_{loc}^2(\mathbb{R}^N).$$

On a donc

$$\langle \nu, |h|^{2^*} \rangle^{\frac{2}{2^*}} \leq S^{-1} \langle \mu, |h|^2 \rangle. \quad (2.9)$$

Par la définition de la norme sur $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$, il vient

$$\langle \mu, |h|^2 \rangle \leq \| \mu \|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)}.$$

Ainsi, en prenant le supremum sur l'ensemble Ξ dans l'équation (2.9), on obtient bien l'inégalité (2.5).

2. Soit $R > 1$, définissons $\Psi_R \in C^1(\mathbb{R}^N)$ par :

$$\Psi_R(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| > R+1 \\ 0 & \text{si } |x| < R. \end{cases}$$

et $0 \leq \Psi_R(x) \leq 1$ ailleurs.

Comme $|\Psi_R u| \leq |u|$, on a $\Psi_R u \in H^1(\mathbb{R}^N)$. On peut donc lui appliquer l'inégalité de Sobolev et par un raisonnement identique au point (1) obtenir

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\Psi_R u_n|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} \leq S^{-1} \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\Psi_R \nabla u_n|^2 dx \right). \quad (2.10)$$

Par définition de Ψ_R , on a aussi

$$\int_{|x| > R+1} |\nabla u_n|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 \Psi_R^2 dx \leq \int_{|x| > R} |\nabla u_n|^2 dx$$

et

$$\int_{|x| > R+1} |u_n|^{2^*} dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2^*} \Psi_R^{2^*} dx \leq \int_{|x| > R} |u_n|^{2^*} dx.$$

Dés lors, on remarque d'après les définitions :

$$\begin{aligned}\mu_\infty &= \lim_{R \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{|x| \geq R} |\nabla u_n|^2 dx \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 \Psi_R^2 dx\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}v_\infty &= \lim_{R \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{|x| \geq R} |u_n|^{2^*} dx \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2^*} \Psi_R^{2^*} dx.\end{aligned}$$

En réinjectant ceci dans (2.10), on obtient :

$$v_\infty^{\frac{2}{2^*}} \leq S^{-1} \mu_\infty.$$

3. Au point (1), on avait montré

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |h|^{2^*} dv \right) \leq S^{-1} \int_{\mathbb{R}^N} |h|^2 d\mu \quad \forall h \in \Xi. \quad (2.11)$$

Utilisons l'inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |h|^2 d\mu &\leq \left[\int_{\mathbb{R}^N} (|h|^2)^{\frac{2^*}{2}} d\mu \right]^{\frac{2}{2^*}} \left[\int_{\mathbb{R}^N} d\mu \right]^{1 - \frac{2}{2^*}} \\ &= \left[\int_{\mathbb{R}^N} |h|^{2^*} d\mu \right]^{\frac{2}{2^*}} \left[\int_{\mathbb{R}^N} d\mu \right]^{\frac{2}{N}} \\ &= \left[\int_{\mathbb{R}^N} |h|^{2^*} d\mu \right]^{\frac{2}{2^*}} \|\mu\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{2}{N}},\end{aligned}$$

d'où

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |h|^{2^*} dv \right)^{\frac{2}{2^*}} \leq S^{-1} \left[\int_{\mathbb{R}^N} |h|^{2^*} d\mu \right]^{\frac{2}{2^*}} \|\mu\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{2}{N}},$$

et donc

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |h|^{2^*} dv \right)^{\frac{1}{2^*}} &\leq S^{\frac{-1}{2}} \left[\int_{\mathbb{R}^N} |h|^{2^*} d\mu \right]^{\frac{1}{2^*}} \|\mu\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{1}{N}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} |h|^{2^*} S^{\frac{-2^*}{2}} \|\mu\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{2^*}{N}} d\mu \right)^{\frac{1}{2^*}},\end{aligned}$$

qui peut être réécrit

$$\langle v, |h|^{2^*} \rangle^{\frac{1}{2^*}} \leq \langle S^{\frac{-2^*}{2}} \|\mu\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{2^*}{N}} \mu, |h|^{2^*} \rangle^{\frac{1}{2^*}} \quad \forall h \in \Xi. \quad (2.12)$$

Supposons maintenant que $\|v\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{2}{2^*}} = S^{-1} \|\mu\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)}$. L'inégalité de ci-dessus devient alors une égalité. En effet, si on avait

$$\langle v, |h|^{2^*} \rangle^{\frac{1}{2^*}} < \langle S^{\frac{-2^*}{2}} \|\mu\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{2^*}{N}} \mu, |h|^{2^*} \rangle \quad \forall h \in \Xi,$$

alors pour le sup Ξ , on aurait

$$\begin{aligned}\|v\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{1}{2^*}} &< \|S^{\frac{-2^*}{2}} \|\mu\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{2^*}{N}} \mu\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{1}{2^*}} \\ &= S^{-1} \|\mu\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)}^{\left(\frac{2^*}{N} + 1\right)\frac{1}{2^*}} \\ &= S^{-1} \|\mu\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)},\end{aligned}$$

ce qui contredit l'hypothèse que nous venons de faire. On a donc bien égalité dans (2.12) et par le théorème (1.2), on obtient

$$v = S^{\frac{-2^*}{2}} \|\mu\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{2^*}{N}} \mu = S^{\frac{-2^*}{2}} \|\mu\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{2}{N-2}} \mu. \quad (2.13)$$

Injectons ceci dans (2.11) :

$$\begin{aligned} (\int_{\mathbb{R}^N} |h|^{2^*} dv)^{\frac{2}{2^*}} &\leq S^{-1} \int_{\mathbb{R}^N} |h|^2 d\mu \\ &\leq S^{-1} \int_{\mathbb{R}^N} |h|^2 S^{\frac{2^*}{2}} \|\mu\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{-2}{N-2}} dv \\ &= S^{\frac{2^*}{2}-1} \|\mu\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{-2}{N-2}} \int_{\mathbb{R}^N} |h|^2 dv. \end{aligned}$$

Or $\|v\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{2}{2^*}} = S^{-1} \|\mu\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)}$, et donc

$$\begin{aligned} (\int_{\mathbb{R}^N} |h|^{2^*} dv)^{\frac{2}{2^*}} &\leq S^{\frac{2^*}{2}-1-\frac{2^*}{N}} \|v\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{-2}{N}} \int_{\mathbb{R}^N} |h|^2 dv \\ &= \|v\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{-2}{N}} \int_{\mathbb{R}^N} |h|^2 dv \end{aligned}$$

car $\frac{2^*}{2} - 1 - \frac{2^*}{N} = 0$.

Remarquons que $\|v\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)} = \int_{\mathbb{R}^N} dv = v(\mathbb{R}^N)$ au sens ensembliste du terme. Soit Θ un ouvert tel que $v(\Theta) > 0$. En choisissant pour h la régularisation de la fonction indicatrice de Θ , on obtient

$$v(\Theta)^{\frac{1}{2^*}} v(\mathbb{R}^N)^{\frac{1}{N}} \leq v(\Theta)^{\frac{1}{2}}$$

et ainsi

$$v(\mathbb{R}^N) \leq v(\Theta) \quad \text{et donc} \quad v(\mathbb{R}^N) = v(\Theta). \quad (2.14)$$

On veut montrer à présent que v est concentrée en un point. Par l'absurde, si ce n'est pas le cas, il existe deux points distincts x et y dans \mathbb{R}^N tels que $\{x, y\} \subset \text{supp}(v)$. On a alors une fonction ϕ_x à support dans un voisinage ouvert V_x de x telle que $\langle v, \phi_x \rangle \neq 0$. De même pour y : ϕ_y est à support dans V_y et $\langle v, \phi_y \rangle \neq 0$. Puisque $x \neq y$, on peut prendre V_x et V_y disjoints. On a donc trouvé deux ouverts disjoints de mesure non nulle, ce qui est une contradiction avec (2.14) puisqu'on a

$$v(V_x) = v(\mathbb{R}^N) > 0,$$

$$v(V_y) = v(\mathbb{R}^N) > 0,$$

$$v(V_x \cup V_y) = v(V_x) + v(V_y) = v(\mathbb{R}^N) > 0.$$

On a donc bien que v est concentrée en un point. On peut dire la même chose de μ en vertu de (2.13).

4. Revenons au cas général où u est non nulle. Posons $v_n = u_n - u$. On a ainsi $v_n \rightarrow 0$ dans $H^1(\mathbb{R}^N)$ et donc par le lemme (1.3)

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} h |\nabla u_n|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} h |\nabla v_n|^2 \right) \rightarrow \int_{\Omega} h |\nabla u|^2 \quad \forall h \in \Xi,$$

c'est à dire

$$|\nabla u_n|^2 \rightharpoonup_{\mu} |\nabla u|^2 \quad \text{dans} \quad \mathcal{M}(\mathbb{R}^N).$$

En appliquant le lemme (1.1), on obtient

$$\int_{\Omega} h |u|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega} h |u_n|^2 - \int_{\Omega} h |v_n|^2 \right).$$

Or $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} h |v_n|^2 = v$ car $|v_n|^2 \rightharpoonup_v \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$. Donc $|u_n|^2 \rightharpoonup_{v+} |u|^2$ dans $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$.

On applique alors le cas d'une limite nulle (point (1)) à v_n et on obtient (2.5) de l'inégalité correspondante pour v_n .

5. On a par le lemme (1.3)

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{|x| > R} |\nabla v_n|^2 = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{|x| > R} |\nabla u_n|^2 - \int_{|x| > R} |\nabla u|^2 \right).$$

En passant à la limite :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{|x| > R} |\nabla v_n|^2 = \lim_{R \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{|x| > R} |\nabla u_n|^2 = \mu_\infty.$$

De façon équivalente, par le lemme (1.1) :

$$\int_{|x| > R} |u|^{2^*} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{|x| > R} |u_n|^{2^*} - \int_{|x| > R} |v_n|^{2^*} \right).$$

En passant à la limite :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{|x| > R} |v_n|^{2^*} = \nu_\infty.$$

On déduit alors (2.6) de l'inégalité correspondante pour v_n .

6. Soit $R > 1$, définissons $\Psi_R \in C^1(\mathbb{R}^N)$ comme au point (2). On a

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_\Omega |\nabla u_n|^2 = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\int_\Omega \Psi_R |\nabla u_n|^2 + \int_\Omega (1 - \Psi_R) |\nabla u_n|^2 \right)$$

$$= \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\int_\Omega \Psi_R |\nabla u_n|^2 + \int_\Omega (1 - \Psi_R) (|\nabla u_n|^2 - |\nabla u|^2) + \int_\Omega (1 - \Psi_R) |\nabla u|^2 \right)$$

$$= \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\int_\Omega \Psi_R |\nabla u_n|^2 + \int_\Omega (1 - \Psi_R) d\mu + \int_\Omega (1 - \Psi_R) |\nabla u|^2 \right) + o(1).$$

car

$$\langle |\nabla u_n|^2 - |\nabla u|^2, (1 - \Psi_R) \rangle \longrightarrow \langle \mu, (1 - \Psi_R) \rangle.$$

Puisque $\Psi_R \leq 1$, tous les termes dans les intégrales sont majorés par une fonction $\in L^1(\mathbb{R}^N)$ indépendante de R . On peut donc passer à la limite sur R et appliquer le théorème de la convergence dominée de Lebesgue :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_\Omega |\nabla u_n|^2 = \mu_\infty + \int_\Omega d\mu + \int_\Omega |\nabla u|^2$$

car $\Psi_R \longrightarrow 0$ pour $R \longrightarrow \infty$.

En utilisant le théorème suivant :

Théorème 2.3 Si $\mu \in \mathcal{M}^+(\Omega)$, alors $\mathcal{BC}(\Omega) \subset L^1(\Omega)$ et

$$\|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)} = \langle \mu, 1 \rangle = \sup_{u \in \mathcal{BC}(\Omega)} \langle \mu, |u| \rangle.$$

on obtient bien l'égalité (2.7) souhaitée.

La preuve de l'égalité (2.8) est exactement la même que celle que nous venons de donner.

■

Chapitre 3

Sur les problèmes elliptiques avec deux exposants critiques de Hardy-Sobolev au même pôle

Dans ce chapitre, nous étudions un problème elliptique quasi-linéaire en relation avec l'inégalité de Hardy-Sobolev.

Nous considérons le problème elliptique suivant :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} -\Delta u - \frac{\mu}{|x|^2} u = \frac{1}{|x|^\alpha} |u|^{2^*(\alpha)-2} u + \frac{1}{|x|^\beta} |u|^{2^*(\beta)-2} u \\ u > 0 \end{cases} \text{ dans } \mathbb{R}^N \setminus \{0\},$$

où Ω est un domaine de \mathbb{R}^N et $N \geq 3$, $0 < \alpha, \beta < 2$, et pour $0 < t < 2$, $2^*(t) = \frac{2(N-t)}{N-2}$ est l'exposant critique de Hardy-Sobolev.

Il est caractérisé par la présence de deux exposants critiques et un poids singulier au même pôle.

Définition 3.1 On définit l'espace $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ comme la fermeture de l'espace $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ par rapport à la norme

$$\|u\| := \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 - \frac{\mu}{|x|^2} u^2) dx \right)^{\frac{1}{2}} \text{ pour tout } \mu < \bar{\mu} = \left(\frac{N-2}{2} \right)^2.$$

Ainsi, cette norme est équivalente à la norme usuelle $(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$.

Théorème 3.1 [7] Soient $N \geq 3$, $0 < \alpha, \beta < 2$ et $0 \leq \mu < \bar{\mu}$, alors le problème (\mathcal{P}) admet une solution positive.

1 Existence de Solution

La fonction $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ est dite solution faible du problème \mathcal{P} si elle satisfait pour tout $v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla u \nabla v - \frac{\mu}{|x|^2} uv - \frac{1}{|x|^\alpha} |u|^{2^*(\alpha)-2} uv - \frac{1}{|x|^\beta} |u|^{2^*(\beta)-2} uv \right) dx = 0$$

La fonctionnelle d'énergie correspondante au problème \mathcal{P} est définie sur $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ par

$$J(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{1}{2^*(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*(\alpha)} \frac{1}{|x|^\alpha} dx - \frac{1}{2^*(\beta)} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*(\beta)} \frac{1}{|x|^\beta} dx.$$

Il est clair que $J \in C^1(D^{1,2}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$ est une solution de \mathcal{P} correspond à un point critique de J .

Par l'inégalité de Hardy-Sobolev, on définit la constante :

$$S_{\mu,s} = \inf_{u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}} \frac{\|u\|^2}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*(s)} |x|^{-s} dx \right)^{\frac{2}{2^*(s)}}},$$

avec $0 \leq \mu < \bar{\mu}$ et $0 \leq s < 2$. on sait que la constante $S_{\mu,s}$ est atteinte par la famille des fonctions :

$$V_{\mu,s}^\varepsilon(x) := \left(\frac{2\varepsilon^2(\bar{\mu} - \mu)(N-s)}{\sqrt{\bar{\mu}}} \right)^{\frac{\sqrt{\bar{\mu}}}{(2-s)}} \left(|x|^{-(\sqrt{\bar{\mu}} - \sqrt{\bar{\mu} - \mu})} \left(\varepsilon^2 + |x|^{(2-s)\frac{\sqrt{\bar{\mu} - \mu}}{\sqrt{\bar{\mu}}}} \right)^{\frac{(2-N)}{(2-s)}} \right), \quad (3.1)$$

pour $\varepsilon > 0$. La fonction $V_{\mu,s}^\varepsilon$ est solution de l'équation suivante

$$-\Delta u - \frac{\mu}{|x|^2} u = \frac{1}{|x|^s} |u|^{2^*(s)-2} u, \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \setminus \{0\},$$

et satisfait

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla V_{\mu,s}^\varepsilon|^2 - \mu \frac{(V_{\mu,s}^\varepsilon)^2}{|x|^2} \right) dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|V_{\mu,s}^\varepsilon|^{2^*(s)}}{|x|^{2^*(s)}} dx \\ &= (S_{\mu,s})^{\frac{(N-s)}{(2-s)}}. \end{aligned}$$

Lemme 3.1 [7] *La fonctionnelle d'énergie J associée au problème (\mathcal{P}) vérifie les propriétés suivantes :*

- (i) $J(0) = 0$,
- (ii) *il existe des nombres positif suffisamment petit ξ et ρ tels que $\inf_{\|v\|=\rho} J(v) \geq \xi$.*
- (iii) *pour tout $v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$, il existe $t_0 > 0$ tel que $\|t_0 v\| > \rho$ et $J(t_0 v) < 0$. Soit*

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J(\gamma(t))$$

où

$$\Gamma = \{ \gamma \in C^0([0,1], D^{1,2}(\mathbb{R}^N)) \mid \gamma(0) = 0, J(\gamma(1)) < 0 \}.$$

Par une version du théorème du col, il existe une suite (u_n) dans $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ telle que

$$J(u_n) \rightarrow c, \quad \text{et} \quad J'(u_n) \rightarrow 0 \quad \text{dans} \quad D^{-1,2}(\mathbb{R}^N).$$

Lemme 3.2 *Soient $N \geq 3$, $0 < \alpha, \beta < 2$, et $0 \leq \mu < \bar{\mu}$, alors la fonctionnelle J satisfait la condition de Palais-Smale $(PS)_c$ pour $c < c^* := \min c_\alpha^*, c_\beta^*$ où*

$$c_s^* := \frac{2-s}{2(N-s)} S_{\mu,s}^{(N-s)/(2-s)}.$$

Preuve. Soit (u_n) une suite qui satisfait la condition de $(PS)_c$ avec $c < c^*$. Alors (u_n) est bornée dans $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. En considérons une sous-suite extraite de (u_n) , on peut supposer que $u_n \rightharpoonup u$ dans $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, $u_n \rightarrow u$ dans $L^{2^*(s)}(\mathbb{R}^N, |x|^{-s})$, pour $s = 0, \alpha, \beta$ et $u_n \rightarrow u$ p.p. Ainsi u est une solution faible du problème (\mathcal{P}). L'ensemble $\mathbb{R}^N \cup \{\infty\}$ est compact pour la topologie de la norme ce qui signifie que les mesures peuvent être identifiées dans l'espace dual $C(\mathbb{R}^N \cup \{\infty\})$. Par exemple, δ_∞ est bien défini et $\delta_\infty = \varphi(\infty)$.

Par le principe de concentration de compacité, il existe une suite extraite, notée encore par (u_n) et des nombres réels $\eta_0, \eta_\infty, \gamma_0, \gamma_\infty, \tau_0, \tau_\infty, \nu_0, \text{ et } \nu_\infty$ tels que :

$$|\nabla u_n|^2 \rightharpoonup d\eta \geq |\nabla u|^2 + \eta_0 \delta_0 + \eta_\infty \delta_\infty. \quad (3.2)$$

$$|u_n|^2 |x|^{-2} \rightharpoonup d\gamma = |u|^2 |x|^{-2} + \gamma_0 \delta_0 + \gamma_\infty \delta_\infty. \quad (3.3)$$

$$|u_n|^{2^*(\alpha)} |x|^{-\alpha} \rightharpoonup d\tau = |u|^{2^*(\alpha)} |x|^{-\alpha} + \tau_0 \delta_0 + \tau_\infty \delta_\infty. \quad (3.4)$$

et

$$|u_n|^{2^*(\beta)} |x|^{-\beta} \rightharpoonup d\nu = |u|^{2^*(\beta)} |x|^{-\beta} + \nu_0 \delta_0 + \nu_\infty \delta_\infty. \quad (3.5)$$

où δ_0 et δ_∞ sont les mesures de Dirac à l'origine et à l'infini respectivement. Pour $\epsilon > 0$, soit ϕ une fonction de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ positive telle que

$$0 \leq \phi \leq 1, \quad \phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq \frac{\epsilon}{2} \\ 0 & \text{si } |x| \geq \epsilon. \end{cases} \quad \text{et } |\nabla \phi| \leq \frac{4}{\epsilon}.$$

Testant $J'(u_n)$ avec $u_n \phi$, on a

$$\langle J'(u_n), u_n \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u_n|^2 \phi + u_n \nabla u_n \nabla \phi - \mu \frac{u_n \phi}{|x|^2} - \frac{|u_n|^{2^*(\alpha)} \phi}{|x|^\alpha} - \frac{|u_n|^{2^*(\beta)} \phi}{|x|^\beta} \right) dx, \quad (3.6)$$

ainsi, par (3.1) - (3.5) on obtient

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 \phi dx \geq \eta_0, \quad (3.7)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 \phi dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} u_n \nabla u_n \nabla \phi dx = 0, \quad (3.8)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} u_n \phi |x|^{-2} dx = \gamma_0, \quad (3.9)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2^*(\alpha)} \phi |x|^{-\alpha} dx = \tau_0, \quad (3.10)$$

et

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2^*(\beta)} \phi |x|^{-\beta} dx = \nu_0, \quad (3.11)$$

par conséquent, en utilisant (3.6)-(3.10) on a

$$0 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \langle J'(u_n), u_n \phi \rangle \geq \eta_0 - \mu \gamma_0 - \tau_0 - \nu_0. \quad (3.12)$$

Par l'inégalité de Hardy-Sobolev, on en déduit

$$\tau_0^{\frac{2}{2^*(\alpha)}} S_{\mu, \alpha} \leq \eta_0 - \mu \gamma_0 \quad (3.13)$$

$$\nu_0^{\frac{2}{2^*(\beta)}} S_{\mu, \beta} \leq \eta_0 - \mu \gamma_0. \quad (3.14)$$

D'après (3.11), on trouve $\eta_0 - \mu \gamma_0 \leq \tau_0 + \nu_0$, utilisant (3.12) et (3.13), on obtient

$$\tau_0^{\frac{2}{2^*(\alpha)}} S_{\mu, \alpha} \leq \tau_0 + \nu_0 \quad \text{et} \quad \nu_0^{\frac{2}{2^*(\beta)}} S_{\mu, \beta} \leq \tau_0 + \nu_0.$$

Il s'ensuit que

$$\tau_0^{\frac{2}{2^*(\alpha)}} \leq S_{\mu, \alpha}^{-1} (\nu_0 + \tau_0) \quad \text{et} \quad \tau_0^{\frac{2}{2^*(\alpha)}} \left(1 - S_{\mu, \alpha}^{-1} \tau_0^{\frac{(2^*(\alpha)-2)}{2^*(\alpha)}} \right) \leq S_{\mu, \alpha}^{-1} \nu_0.$$

Le fait que (u_n) est bornée dans $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, nous assure que $\tau_0 \leq C_1$, ainsi

$$\tau_0^{\frac{2}{2^*(\alpha)}} \left(1 - S_{\mu,\alpha}^{-1} C_1^{\frac{2^*(\alpha)-2}{2^*(\alpha)}} \right) \leq S_{\mu,\alpha}^{-1} v_0,$$

il existe alors Y dépendant de α , $2^*(\alpha)$ et C_1 tel que

$$\tau_0^{\frac{2}{2^*(\alpha)}} \leq Y v_0.$$

De même, il existe Z dépendant de β , $2^*(\beta)$ et C_2 tel que

$$v_0^{\frac{2}{2^*(\beta)}} \leq Z \tau_0.$$

En particulier, il en résulte que :

$$\text{Soit } v_0 = 0, \tau_0 = 0 \text{ ou } v_0 \geq S_{\mu,\beta}^{\frac{(N-\beta)}{(2-\beta)}}, \tau_0 \geq S_{\mu,\alpha}^{\frac{(N-\alpha)}{(2-\alpha)}}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} c &= J(u_n) - \frac{1}{2} \langle J'(u_n), u_n \rangle + o(1) \\ &\geq \frac{2-\alpha}{2(N-\alpha)} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*(\alpha)} |x|^{-\alpha} dx + \tau_0 \right) + \frac{2-\beta}{2(N-\beta)} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*(\beta)} |x|^{-\beta} dx + v_0 \right) + o(1) \\ &\geq \frac{2-\alpha}{2(N-\alpha)} \tau_0 + \frac{2-\beta}{2(N-\beta)} v_0. \end{aligned}$$

Pour étudier la concentration à l'infini, on considère la fonction test $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N, [0, 1])$ telle que pour $R > 0$

$$0 \leq \psi \leq 1, \quad \psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < \frac{R}{2} \\ 0 & \text{si } |x| > R. \end{cases} \text{ et } |\nabla \psi| \leq \frac{2}{R}.$$

et on prend en compte les quantités suivantes

$$\eta_0 = \lim_{R \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{|x| > R} |\nabla u_n|^2 \psi dx, \quad \gamma_\infty = \lim_{R \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{|x| > R} u_n \psi |x|^{-2} dx,$$

$$\tau_\infty = \lim_{R \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{|x| > R} |u_n|^{2^*(\alpha)} \psi |x|^{-\alpha} dx$$

et

$$\tau_\infty = \lim_{R \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{|x| > R} |u_n|^{2^*(\beta)} \psi |x|^{-\beta} dx.$$

En utilisant la même technique que celle faite à l'origine, on obtient le même résultat, notamment

$$v_\infty = 0, \quad \tau_\infty = 0 \quad v_\infty \geq S_{\mu,\beta}^{\frac{(N-\beta)}{(2-\beta)}}, \quad \tau_\infty \geq S_{\mu,\alpha}^{\frac{(N-\alpha)}{(2-\alpha)}}.$$

De même

$$c \geq \frac{2-\alpha}{2(N-\alpha)} \tau_\infty + \frac{2-\beta}{2(N-\beta)} v_\infty.$$

En utilisant l'hypothèse $c < c^*$, alors la sous-suite (u_n) converge fortement vers u dans $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$.

■ Notons

$$\tilde{U}(x) = \begin{cases} U_{\mu,\alpha}^\varepsilon(x) & \text{si } c_\alpha^* \leq c_\beta^* \\ U_{\mu,\beta}^\varepsilon(x) & \text{si } c_\beta^* \leq c_\alpha^* \end{cases} \quad (3.15)$$

on a alors le lemme suivant :

Lemme 3.3 *Sous les hypothèse du théorème, on a*

$$\sup_{t \geq 0} J(t\tilde{U}) < c^*.$$

Preuve. Considérons $c_\alpha^* \leq c_\beta^*$, alors

$$J(t\tilde{U}) = J(tU_{\mu,\alpha}^\varepsilon) = \frac{t^2}{2} \|U_{\mu,\alpha}^\varepsilon\|^2 - \frac{t^{2^*(\alpha)}}{2^*(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^N} |U_{\mu,\alpha}^\varepsilon|^{2^*(\alpha)} |x|^{-\alpha} dx - \frac{t^{2^*(\beta)}}{2^*(\beta)} \int_{\mathbb{R}^N} |U_{\mu,\alpha}^\varepsilon|^{2^*(\beta)} |x|^{-\beta} dx.$$

Or, on sait que

$$\sup_{t \geq 0} J(tU_{\mu,\alpha}^\varepsilon) \leq \sup_{t \geq 0} f_\alpha(t) = c_\alpha^*$$

avec

$$f_\alpha(t) = \frac{t^2}{2} \|U_{\mu,\alpha}^\varepsilon\|^2 - \frac{t^{2^*(\alpha)}}{2^*(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^N} |U_{\mu,\alpha}^\varepsilon|^{2^*(\alpha)} |x|^{-\alpha} dx.$$

On affirme que $c_\alpha < c_\alpha^*$, où

$$c_\alpha := \inf_{\gamma \in \Gamma_\alpha} \max_{t \in [0,1]} J(\gamma(t))$$

avec

$$\Gamma_\alpha := \left\{ \gamma \in C^0([0,1], D^{1,2}(\mathbb{R}^N)); \gamma(0) = 0, \gamma(1) = t_0 U_{\mu,\alpha}^\varepsilon \right\}.$$

Raisonnons par l'absurde, supposons que $c_\alpha = c_\alpha^*$ alors $\sup_{t \geq 0} J(tU_{\mu,s}^\varepsilon) = \sup_{t \geq 0} f_\alpha(t)$.

Les fonctionnelles J et f_α atteignent leurs maximums aux points positifs t_1 et t_2 respectivement. Alors, on a

$$f_\alpha(t_1) - \frac{t_1^{2^*(\beta)}}{2^*(\beta)} \int_{\mathbb{R}^N} |U_{\mu,\alpha}^\varepsilon|^{2^*(\beta)} |x|^{-\beta} dx = f_\alpha(t_2)$$

Il en découle que $f_\alpha(t_2) < f_\alpha(t_1)$, ce qui nous amène à une contradiction.

De même pour le cas où $c_\beta^* \leq c_\alpha^*$, on trouve $c_\beta \leq c_\beta^*$. Ainsi, $\sup_{t \geq 0} J(t\tilde{U}) < c^*$.

■ **Preuve. (Théorème (3.1))**

Comme $2^*(s) > 2(s = \alpha, \beta)$ il existe en vertu du Lemme (1.5), ξ et ρ suffisamment petits tels que $\inf_{\|u\|=\rho} J(u) \geq \xi$, $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$. Puisque $J(tU_{\mu,s}^\varepsilon)$ tend vers $-\infty$ quand t tend vers ∞ , alors il existe $t_0 > 0$ tel que $\|t_0 U_{\mu,s}^\varepsilon\| > \rho$ et $J(t_0 U_{\mu,s}^\varepsilon) < 0$. En outre en utilisant le lemme du Col, il existe une suite (u_n) dans $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ telle que

$$J(u_n) \rightarrow c, \quad \text{et} \quad J'(u_n) \rightarrow 0 \quad \text{dans} \quad D^{-1,2}(\mathbb{R}^N)$$

D'après les Lemmes (3.2) et (3.3), on obtient

$$0 < c < \sup_{t \in [0,1]} J(t t_0 U_{\mu,s}^\varepsilon) \leq \sup_{t > 0} J(t U_{\mu,s}^\varepsilon) < c^*.$$

On en déduit alors que (u_n) possède une sous-suite notée aussi (u_n) , telle que $u_n \rightarrow u$ fortement dans $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Ainsi u est une solution non triviale du problème (\mathcal{P}) . Par le principe du maximum, on obtient que $u > 0$ dans $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. ■

2 Non existence de solutions

Théorème 3.2 [7] *Soient $N \geq 3$, $0 < \alpha, \beta < 2$, $0 \leq \mu < \bar{\mu}$ et Ω est un domaine borné étoilé par rapport à l'origine. Alors le problème (\mathcal{P}) n'admet pas de solution non triviale.*

Dans cette section, on fournit la preuve du Théorème via l'identité de Pohozaev.

Lemme 3.4 (Identité de Pohozaev)[7] Soit $u \in C^2(\overline{\Omega})$ une solution de

$$(\mathcal{Q}) \begin{cases} -\Delta u = g(u) & \text{dans } \Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

avec g une fonction continue sur \mathbb{R} et Ω borné. Posons $G(u) = \int_0^u g(s)ds$. Alors

$$2N \int_{\Omega} G(u) - (N-2) \int_{\Omega} g(u) \cdot u = \int_{\partial\Omega} (x \cdot \nu) |\nabla u|^2,$$

où $\nu = \nu(x)$ est le vecteur normal extérieur unitaire à $\partial\Omega$ en x .

Preuve. Posons

$$g(x, u) = \mu \frac{u}{|x|^2} + \frac{|u|^{2^*(\alpha)-2}}{|x|^\alpha} u + \frac{|u|^{2^*(\beta)-2}}{|x|^\beta} u,$$

alors

$$\begin{aligned} G(x, u) &= \int_0^u g(x, s) ds = \frac{\mu}{2} \frac{|u|^2}{|x|^2} + \frac{1}{2^*(\alpha)} \frac{|u|^{2^*(\alpha)}}{|x|^\alpha} + \frac{1}{2^*(\beta)} \frac{|u|^{2^*(\beta)}}{|x|^\beta}, \\ (\partial_i G)(x, u) &= -\mu \frac{|u|^2}{|x|^4} x_i - \frac{\alpha}{2^*(\alpha)} \frac{|u|^{2^*(\alpha)}}{|x|^\alpha} x_i + \frac{\beta}{2^*(\beta)} \frac{|u|^{2^*(\beta)}}{|x|^\beta} x_i, \\ \partial_i(G(x, u)) &= (\partial_i G)(x, u) + g(x, u) \partial_i u. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Ici $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ pour $i = 1, \dots, N$.

Multipliant l'équation de (\mathcal{P}) par $(x, \nabla u)$ des deux côtés, on obtient

$$-\int_{\Omega} \Delta u \cdot (x, \nabla u) dx = \int_{\Omega} g(x, u) (x, \nabla u) dx.$$

En appliquant le théorème de la divergence, on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta u \cdot (x, \nabla u) dx &= \int_{\Omega} \operatorname{div}(\nabla u) (x, \nabla u) dx \\ &= -\int_{\Omega} g(x, u) (x, \nabla u) dx \\ &= \int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 (x, \nu) d\nu - \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla(x, \nabla u)) dx \\ &= \int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 (x, \nu) d\nu - \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (x, \nabla(|\nabla u|^2)) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 (x, \nu) d\nu - \frac{2-N}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx, \end{aligned} \tag{3.17}$$

D'après (3.15), on a aussi

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} g(x, u) (x, \nabla u) dx &= -N \int_{\Omega} G(x, u) dx - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N x_i (\partial_i G)(x, u) dx \\ &= -N \int_{\Omega} \left(\frac{\mu}{2} \frac{|u|^2}{|x|^2} + \frac{1}{2^*(\alpha)} \frac{|u|^{2^*(\alpha)}}{|x|^\alpha} + \frac{1}{2^*(\beta)} \frac{|u|^{2^*(\beta)}}{|x|^\beta} \right) dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \left(\mu \frac{|u|^2}{|x|^4} + \frac{\alpha}{2^*(\alpha)} \frac{|u|^{2^*(\alpha)}}{|x|^\alpha} + \frac{\beta}{2^*(\beta)} \frac{|u|^{2^*(\beta)}}{|x|^\beta} \right) dx. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\int_{\Omega} g(x, u) (x, \nabla u) dx = \frac{(2-N)}{2} \int_{\Omega} \mu \frac{|u|^2}{|x|^2} dx - \frac{(N-\alpha)}{2^*(\alpha)} \int_{\Omega} \mu \frac{|u|^{2^*(\alpha)}}{|x|^\alpha} dx - \frac{(N-\beta)}{2^*(\beta)} \int_{\Omega} \mu \frac{|u|^{2^*(\beta)}}{|x|^\beta} dx, \tag{3.18}$$

puisque

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \mu \int_{\Omega} \frac{|u|^2}{|x|^2} dx = \int_{\Omega} \mu \frac{|u|^{2^*(\alpha)}}{|x|^\alpha} dx + \int_{\Omega} \mu \frac{|u|^{2^*(\beta)}}{|x|^\beta} dx. \quad (3.19)$$

En combinant (3.17) et (3.18) dans (3.16), on trouve

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 (x, \nu) d\nu - \frac{(2-N)}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx &= \frac{(N-2)}{2} \int_{\Omega} \mu \frac{|u|^2}{|x|^2} dx + \\ \frac{(N-\alpha)}{2^*(\alpha)} \int_{\Omega} \frac{|u|^{2^*(\alpha)}}{|x|^\alpha} dx + \frac{(N-\beta)}{2^*(\beta)} \int_{\Omega} \frac{|u|^{2^*(\beta)}}{|x|^\beta} dx, \end{aligned}$$

cette dernière identité est équivalente à

$$\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 (x, \nu) d\nu = \left(\frac{2-N}{2} + \frac{N-\alpha}{2^*(\alpha)} \right) \int_{\Omega} \frac{|u|^{2^*(\alpha)}}{|x|^\alpha} dx + \left(\frac{2-N}{2} + \frac{N-\beta}{2^*(\beta)} \right) \int_{\Omega} \frac{|u|^{2^*(\beta)}}{|x|^\beta} dx.$$

Enfin, on conclut que

$$\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 (x, \nu) d\nu = 0,$$

puisque Ω est un domaine étoilé par rapport à l'origine i.e. $(x, \nu) > 0$ sur $\partial\Omega$, on en déduit que $u = 0$. ■

Conclusion

Dans ce travail on a constaté que l'existence de solutions positives dépend non seulement de la géométrie du domaine mais la présence des deux exposants critiques crée une compétition entre les énergies produites par les non-linéarités critiques. Le terme dont l'énergie dominante (plus forte) provoque l'existence d'au moins une solution.

Bibliographie

- [1] H. Brézis ; *Analyse fonctionnelle - théorie et applications*, Masson, 1983.
- [2] L. Fauchier-Magnan ; *Espace de Sobolev*, février 2006.
- [3] H. MEKNI ; *Principe de Concentration-Compacité et Applications*, Univ- Tlemcen, 2010 - 2011.
- [4] O. Kavian ; *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques*, Mathématiques et applications (Springer-Verlag), 1989.
- [5] M. Struwe ; *variational Methods. Applications to nonlinear PDE and Hamiltonian Systems*, Edition Springer, 2000.
- [6] G. ALLAIRE and F. ALOUGES ; *Polycopié du cours MAP 431-Analyse variationnelle des équations aux dérivées partielles*, École Polytechnique, 16 janvier 2015.
- [7] S. MESSIRDI *Etude des problèmes elliptiques contenant des singularités prescrites*, Univ- Tlemcen, 2014-2015.

Résumé

Dans ce mémoire on s'intéresse à l'étude d'existence de solution pour une classe d'équations elliptiques non-linéaire contenant deux exposants critiques et des poids singuliers sur un domaine non borné avec les conditions au bord de Dirichlet.

Mots-Clés. Injections de Sobolev, Méthodes variationnelles, exposants critiques, Poids singulier, condition de Palais-Smale, principe de concentration de compacité

Abstract

In this memory, we are interested in the existence of solutions for a class of nonlinear elliptic equations containing two critical exponents and singular weights on an unbounded domain with Dirichlet boundary conditions.

Key Words. Sobolev injections, variational methods, critical exponents, Singular weight, Palais-Smale condition, compactness concentration principle.

