



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

*MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE  
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE*  
UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS – MOSTAGANEM

Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique

**Département de Mathématiques et Informatique**

THESE DE DOCTORAT

=====o ○ o=====

Option : Analyse Harmonique et EDP

*Intitulée*

**PT SYMETRIE DE L'OPERATEUR DE SCHRÖDINGER  
ET UN SEUL Puits DE POTENTIEL.**

---

**Présentée par : NAÏMA BOUSSEKKINE**

**Thèse soutenue, le 22/10/2015, devant le Jury composé de :**

Président : Mr.D.Bouagada Professeur à l'université de Mostaganem.  
Directrice de thèse : Mme.A.Lahmar-Benbernou Professeur à l'université de Mostaganem.  
Examinateur : Mr.B.Bendoukha Professeur à l'université de Chlef.  
Examinateur : Mr.B.Messirdi Professeur à l'université d'Oran1.  
Examinateur : Mr.M.Terbeche Professeur à l'université d'Oran1.

**Année Universitaire : 2014 – 2015**

## Liste des Travaux de Recherche et des Publications

- 1.** Boussekkine. N, Mecherout. N :  $\mathcal{PT}$  -symmetric and potentiel well, The simple well case. Mathematische Nachrichten Journal Vol. , No (201400255).
- 2.** Mecherout. N, Boussekkine. N, Ramond.T, Sjöstrand.J : PT-Symmetry and Schrödinger operators. The double well case. Mathematische Nachrichten Journal Vol. , No (201500075).
- 3.** A.Benbernou, N. Boussekkine, N. Mecherout, T.Ramond, J. Sjöstrand. Non-real eigenvalues for PT-symmetric double wells, Physics Letters Journal, Soumis.

## Dédicace

*Ce travail est dédié à :*

*Ma chère mère qui m'a beaucoup soutenue, à mon très cher père, qui était toujours présent pour moi aux moments où j'avais vraiment besoin de lui et qui cherche toujours mon bien.*

*Mon époux et mon petit garçon.*

*Mes frères et soeurs.*

*Toute personne qui m'a soutenue, aidé ou contribué de près ou de loin.*

---

## Remerciements

*Au nom d'ALLAH Clément et Miséricordieux!*

*Louange à ALLAH le Tout Puissant de m'avoir donné la force, le courage et la volonté d'accomplir ce travail.*

*Mes premiers remerciements seront pour ma Directrice de thèse, Madame Amina LAHMAR BENBERNOU, Professeur à l'Université de Mostaganem. Durant ma thèse et (ma licence, mon master), elle a patiemment guidé mes premiers pas dans le monde de la recherche. Apprendre et travailler à son contact a été un réel plaisir et je mesure un peu plus chaque jour la chance que j'ai eue. Je lui suis aussi sincèrement reconnaissante de s'être toujours montrée disponible et d'avoir généreusement partagé ses idées et ses connaissances avec moi.*

*J'adresse mes vifs remerciements à Monsieur Djilali BOUAGADA, professeur à l'Université de Mostaganem, pour l'honneur qu'il me fait de présider le Jury de ma thèse.*

*Je remercie, Monsieur Berrabah BENDOUKHA, professeur à l'Université de Mostaganem, Monsieur Bekkai MESSIRDI, professeur à l'Université d'Oran 1 et Monsieur Mekki TER-BECHE, professeur à l'Université d'Oran 1 pour avoir accepté d'être les examinateurs de ma thèse et d'avoir sacrifié une grande partie de leur temps à cette tâche. C'est pour moi une grande joie de savoir qu'ils s'intéressent à ce que j'ai pu faire. Merci pour leurs conseils, leurs critiques et leurs commentaires.*

*Je voudrais également exprimer mes grands remerciements à Monsieur Johannes Sjöstrand, Professeur à l'université de Bourgogne-France et Monsieur Theierry Ramond Maître de Conférence à l'université d'Orsay Paris pour leur aide ainsi pour m'avoir donné la chance de passer deux mois de stage un avec Monsieur Johannes Sjöstrand à Dijon et l'autre avec Monsieur Theierry Ramond à Orsay.*

*Je voudrais aussi remercier chaleureusement mon amie Nawel Mecherout pour son aide précieuse. Les moments passés en sa compagnie aux différents endroits de la France et de l'Algérie et toutes les difficultés qu'on a rencontrées resteront des excellents souvenirs de cette thèse.*

*J'ai eu la chance au long de ma scolarité d'avoir des enseignants exceptionnels qui m'ont donné le goût des études et m'ont tant appris. Je suis consciente que c'est en grande partie grâce à eux que je suis là. Je ne les oublie pas et les remercie aussi sincèrement.*

*Merci à mes parents qui m'ont soutenu durant mes années d'études. Ils m'ont appris à affronter les difficultés et à ne jamais reculer mais à avancer et toujours avancer, à mon mari Rabie pour son soutien continu et pour tous ses sacrifices pour moi. En dépit des difficultés et de la distance il a toujours été présent à mes côtés pour m'encourager ainsi que mes frères et sœurs.*

# Table des matières

<b>INTRODUCTION</b>	<b>7</b>
<b>1 Méthode BKW complexe en général</b>	<b>13</b>
1.1 Introduction et résultats . . . . .	13
1.2 Estimation sur un intervalle . . . . .	14
1.2.1 Preuve du Proposition 1.1 . . . . .	14
1.3 Equation de Schrödinger dans le domaine complexe	
1.3.1 Preuve du Corollaire 1.1 . . . . .	19
1.3.2 Preuve du Théorème 1.2 . . . . .	20
1.4 Prolongement du développement de BKW . . . . .	21
1.4.1 Solutions formelle de l'équation de Schrödinger . . . . .	22
<b>2 Solutions BKW dans <math>L^2</math></b>	<b>27</b>
2.1 Solutions BKW exacte de l'équation de Schrödinger . . . . .	30
2.2 Preuve du Proposition 2.6 . . . . .	30
<b>3 Analyse BKW près d'un point tournant simple</b>	<b>32</b>
3.1 Cas d'un seul point tournant . . . . .	32
3.2 Rappel des lignes de Stokes . . . . .	36
3.3 Le développement asymptotique de Wronskien . . . . .	38
3.4 Détermination du coefficients $\alpha_j$ . . . . .	40
3.4.1 Analyse BKW loin de point tournant . . . . .	41
<b>4 Solutions BKW près du puits</b>	<b>43</b>
4.1 Choix du signe de la branche près de $a_0$ . . . . .	45
4.2 Choix du signe de la branche près de $\beta_0$ . . . . .	45
4.2.1 Preuve de la Proposition 4.2 . . . . .	46
<b>5 Quantification de Bohr Sommerfeld pour un puits de potentiel sans <math>\mathcal{PT}</math>-symétrie</b>	<b>47</b>
5.1 Solution BKW exacte dans le secteur de Stokes . . . . .	47
5.1.1 Cas de deux points tournant . . . . .	47
5.2 Résolution du problème de Dirichlet . . . . .	48
5.3 Signe de la branche dans le Secteur de Stokes $\Sigma_j$ . . . . .	50
5.4 Signe de la branche dans le secteur de Stokes $S_j$ . . . . .	51
5.5 Connexion entre les solutions BKW exacte d'un seul puits de potentiel . . . . .	51

---

5.5.1	Preuve du Théorème 5.1 . . . . .	54
5.5.2	Preuve du Proposition 5.1 . . . . .	54
5.5.3	Preuve du théorème 5.2 . . . . .	56
5.5.4	Preuve du Proposition 5.2 . . . . .	57
5.5.5	Preuve du Proposition 5.3 . . . . .	58
5.5.6	Preuve du Proposition 5.4 . . . . .	59
5.6	Les zéros de Wronskien par la condition de quantification de Bohr-Sommerfeld sant $\mathcal{PT}$ symétrie . . . . .	59
5.6.1	Preuve du Théorème 1 . . . . .	59
<b>6</b>	<b>Le cas d'un seul puits <math>\mathcal{PT}</math>-symétrique</b>	<b>61</b>
6.1	$\mathcal{PT}$ -symétrie en générale . . . . .	61
6.2	Calculs du Wronskien avec $\mathcal{PT}$ -symétrie . . . . .	61
6.2.1	Preuve du Théorème 6.2 . . . . .	62
6.3	Lemmes Préliminaires . . . . .	63
6.3.1	Preuve du Proposition 2 . . . . .	63
6.3.2	Preuve du Théorème 2 . . . . .	64
6.4	Eléments de mécanique quantique . . . . .	66
6.4.1	Notion de mécanique classique . . . . .	66
6.5	Théorème spectral . . . . .	69
6.5.1	Rappels et définitions . . . . .	69
6.6	Espaces de Symboles . . . . .	70
	<b>Bibliographie</b>	<b>73</b>

# INTRODUCTION

Il est connu en algèbre que si un opérateur, défini sur un espace de Hilbert est hermitien ses valeurs propres sont toutes réelles et les fonctions propres correspondantes forment une base orthogonale

En revanche, s'il est non hermitien, il n'est pas garanti que ses valeurs propres soient réelles mais plutôt elles sont en général complexes.

L'histoire de la  $\mathcal{PT}$  symétrie a commencé avec Bender l'été de 1993 quand il a rencontré un Hamiltonian complexe non-Hermitien de la forme

$$H = \hat{p}^2 + i\hat{x}^3$$

au cours d'une conversation privée avec D. Bessis au CENTRE Saclay, il apprend que D.Bessis et J. Zinn-Justin avaient remarqué que les valeurs propres de ce l'opérateur Hamiltonian étaient réelles et le spectre (l'ensemble des valeurs propres d'énergie du Hamiltonian) pourrait être entièrement réel.

À l'époque il n'a pas planifié de poursuivre cette conjecture plus loin parce qu'il a semblé absurde qu'un Hamiltonian complexe non-Hermitien pourrait avoir des niveaux d'énergie réels.

En 1997, Bender a décidé d'examiner le spectre de cet Hamiltonian, dont il a soupçonné sa réalité c'était probablement en raison de la présence d'une symétrie, c'est là où apparaît la notion de  $\mathcal{PT}$  symétrie et l'opérateur Hamiltonian est  $\mathcal{PT}$  -symétrie parce que n'importe quelle fonction  $i\hat{x}$  est  $\mathcal{PT}$  -symétrique.

La  $\mathcal{PT}$  -symétrie est une nouvelle théorie, des centaines de papiers ont été publiées dans ce domaine  $\mathcal{PT}$  -symétrique de la mécanique quantique, dont trois conférences internationales tenues à : (Prague, 2003 ; Prague, 2004 ; Shizuoka, 2004).

Récemment il a été prouvé par E. Caliceti et S. Graffi dans le cadre d'un potentiel analytique périodique  $\mathcal{PT}$  -symétrie à valeur complexe, que le spectre de l'opérateur de Schrödinger semi classique perturbé par un tel potentiel est réel.

Dans la dernière décennie, cette nouvelle théorie quantique s'appliquant aux potentiel non hermitiens a vu le jour.

Elle concerne spécialement les potentiels qui sont invariants par la réflexion de l'espace-temps cette discipline est la mécanique quantique  $\mathcal{PT}$ -symétrique.

Les opérateurs  $\mathcal{PT}$ -symétriques ont été proposés comme une alternative aux opérateurs auto-adjoints en physique quantique.

La réalité du spectre est alors importante du point de vue de la physique (voir, [2], [3], [7], [4]).

Les opérateurs de Schrödinger sur l'axe réel qui sont invariants par l'application combinée d'une symétrie et une réflexion définie à l'aide d'un opérateur de parité  $\mathcal{P}$  et de la conjugaison complexe anti-linéaire  $\mathcal{T}$  sont appelés  $\mathcal{PT}$ -symétriques. où  $\mathcal{P}u(x) = u(-x)$ ,  $\mathcal{T}u(x) = \overline{u(x)}$ ,  $u \in L^2(\mathbb{R})$ .

Nous étudions des opérateurs de Schrödinger dans la limite semi-classique  $\mathcal{PT}$  symétriques de la forme :

$$P = -\hbar^2 \left( \frac{d}{dx} \right)^2 + V(x)$$

La  $\mathcal{PT}$ -symétrie de  $\mathcal{P}$  s'écrit

$$P\mathcal{P}\mathcal{T} = \mathcal{P}\mathcal{T}P,$$

ce qui revient à poser la condition suivante sur le potentiel complexe  $V$  :

$$V(-x) = \overline{V(x)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dans le cas d'un opérateur de Schrödinger auto-adjoint (à potentiel réel) de la forme

$$P_0 = -\hbar^2 \left( \frac{d}{dx} \right)^2 + V_0(x),$$

la  $\mathcal{PT}$ -symétrie équivaut la propriété que  $V_0$  est pair :

$$V_0(-x) = V_0(x).$$

Nous étudions les cas où  $V_0$  possède un puits simple pour un niveau d'énergie donné  $E_0$ . Nous utilisons la méthode BKW complexe (en supposant que  $V_0$  est analytique dans un domaine convenable).

Ainsi nous arriverons à des conditions de quantification de type Bohr Sommerfeld. Formulons nos résultats plus précisément de la manière suivante :

Soit  $E_0 \in \mathbb{R}$  un niveau d'énergie fixé,

$$V_0 \in C^\infty(\mathbb{R}).$$

On fait les hypothèses suivantes sur  $V_0$  :

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}, \exists C_\alpha > 0 \text{ telle que } |\partial_x^\alpha V_0(x)| \leq C_\alpha (1 + |x|)^{m_0 - \alpha}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(H1) Dans le cas où  $m_0 > 0$ ,  $\exists C_0 > 0$ , telle que

$$V_0(x) \geq \frac{1}{C_0}|x|^{m_0}, \text{ pour } |x| \geq C_0,$$

(H1.1) Dans le cas où  $m_0 = 0$ ,

$$\exists C_0 > 0, \text{ telle que } V_0(x) \geq E_0 + \frac{1}{C_0}, \text{ quand } |x| \geq C_0.$$

(H2)  $V_0$  possède exactement un seul puits de potentiel :

$$\begin{aligned} \{x \in \mathbb{R}; V_0(x) \leq E_0\} &= [\alpha_0^0; \beta_0^0], \\ \{x \in \mathbb{R}; V_0(x) < E_0\} &= ]\alpha_0^0; \beta_0^0[, \end{aligned}$$

où  $-\infty < \alpha_0^0 < \beta_0^0 < +\infty$ . De plus,  $V_0'(\alpha_0^0) < 0$ ,  $V_0'(\beta_0^0) > 0$ .

(H3)  $V_0$  admet un prolongement holomorphe dans un voisinage  $U$  dans  $\mathbb{C}$  de  $\{x \in \mathbb{R}; V_0(x) \leq E_0\}$ .

Dans ce travail nous étudions des petites perturbations  $\mathcal{PT}$ -symétriques de  $P_0$  de la forme

$$P_\varepsilon = -h^2\left(\frac{d}{dx}\right)^2 + V_\varepsilon(x), \quad 0 < \varepsilon \leq 1,$$

où

$$V_\varepsilon(x) = V_0(x) + i\varepsilon W(x).$$

avec  $W$  est réel et impair,

$$W(-x) = -W(x).$$

On vérifie aisément que  $V_\varepsilon(-x) = \overline{V_\varepsilon(x)}$  et donc que  $P_\varepsilon$  est  $\mathcal{PT}$ -symétrique. On suppose de plus

(H4)  $W \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ .

(H5) Avec le même  $m_0$  que pour  $V_0$  on a :

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}, \exists C_\alpha \text{ telle que } |\partial_x^\alpha W(x)| \leq C_\alpha(1 + |x|)^{m_0 - \alpha}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

(H6)  $W$  admet un prolongement holomorphe a un voisinage  $U$  dans  $\mathbb{C}$  de  $\{x \in \mathbb{R}; V_0(x) \leq E_0\}$ .

Dans cette thèse, on considère des perturbations  $\mathcal{PT}$  symétriques d'un opérateur de Schrödinger semi-classique auto-adjoint sur la droite réelle, avec un puits de potentiel simple.

On suppose que le potentiel est analytique et on montre que les valeurs propres restent réelles sous la perturbation.

**Définition 1** Si  $U \subset \mathbb{C}$  est un ouvert (comme par exemple dans les hypothèses ci-dessus),

$V$  une fonction holomorphe sur  $U$  et  $P = -h^2(d/dx)^2 + V(z)$ , on dira que  $\alpha = \alpha(E) \in U$  est un point tournant pour l'équation  $Pu = Eu$  si  $V(\alpha) = E$ . Si de plus  $V'(\alpha) \neq 0$ , on dira que  $\alpha$  est un point tournant simple.

Soit  $D(E_0, \varepsilon)$  le disque ouvert dans  $\mathbb{C}$  de centre  $E_0$  et de rayon  $\varepsilon$ . Par le théorème des fonctions implicites on a :

**Proposition 1** *Sous les hypothèses (H1) à (H6). Il existe  $\varepsilon_0 > 0$  telle que pour  $E \in D(E_0, \varepsilon_0)$  et  $\varepsilon \in D(0, \varepsilon_0)$ , l'équation  $V_\varepsilon(x) = E$  possède deux solutions  $\alpha_0(E, \varepsilon)$ , et  $\beta_0(E, \varepsilon)$  dépendant holomorphiquement de  $E$  et  $\varepsilon$  avec  $\alpha_0(E_0, 0) = \alpha_0^0$ ,  $\beta_0(E_0, 0) = \beta_0^0$ . Ce sont des points tournants simples pour*

$$P_\varepsilon = (-h d/dx)^2 + V_\varepsilon$$

où  $(E, \varepsilon) \in D(E_0, \varepsilon_0) \times D(0, \varepsilon_0)$ , le segment  $] \alpha_0(E, \varepsilon), \beta_0(E, \varepsilon)[$  appartient à  $U$  et  $E - V_\varepsilon(x)$  ne s'y annule pas.

On définit la branche continue de la racine carrée,  $(E - V_\varepsilon(x))^{\frac{1}{2}}$  pour  $(E, \varepsilon) \in D(E_0, \varepsilon_0) \times D(0, \varepsilon_0)$ ,  $z \in ] \alpha_0(E, \varepsilon), \beta_0(E, \varepsilon)[$  qui est positif quand  $E$  est réel et  $\varepsilon = 0$ . Introduisons l'action

$$I(E, \varepsilon) = 2 \int_{\alpha_0(E, \varepsilon)}^{\beta_0(E, \varepsilon)} (E - V_\varepsilon(z))^{\frac{1}{2}} dz.$$

L'intégrale se fait le long du segment orienté qui relie  $\alpha_0(E, \varepsilon)$  à  $\beta_0(E, \varepsilon)$ .

**Proposition 2** *Sous les hypothèses (H1) à (H6), et  $\varepsilon_0$  positif assez petit, l'action  $I(E, \varepsilon)$  est une fonction holomorphe de  $(E, \varepsilon) \in D(E_0, \varepsilon_0) \times D(0, \varepsilon_0)$ , telle que*

$$I(\overline{E}, \varepsilon) = \overline{I(E, \varepsilon)}, \text{ quand } \varepsilon \geq 0.$$

De plus  $\frac{\partial}{\partial E} I(E, \varepsilon) \neq 0$ .

Soit

$$P_\varepsilon = h^2 D_x^2 + V_\varepsilon(x), \quad D_x = \frac{1}{i} \frac{d}{dx}$$

l'opérateur de Schrödinger sur  $\mathbb{R}$ , est défini comme un opérateur fermé non borné  $L^2(\mathbb{R})$  à domaine

$$\mathcal{D}(P_\varepsilon) = \{u \in L^2(\mathbb{R}); u', u'', \langle x \rangle^{m_0} u \in L^2(\mathbb{R})\}, \quad \langle x \rangle = (1 + x^2)^{\frac{1}{2}}$$

Il est clair que le spectre de  $P_\varepsilon$  dans  $D(E_0, \varepsilon_0)$  est discret pour  $\varepsilon \in D(0, \varepsilon_0)$ , et  $\varepsilon_0$  positif assez petit.

Dans le cas où  $\varepsilon = 0$ ,  $P_0$  est auto-adjoint, donc les valeurs propres dans  $D(E_0, \varepsilon_0)$  sont réelles et on a même,

$$\inf \sigma_{ess}(P_0) > E_0 + \frac{1}{C}.$$

Il est bien connu dans ce cas, que les valeurs propres sont données par une condition de quantification de Bohr Sommerfeld (voir p.ex. [24], ch II, section 10, [26], exercice 12.3).

**Théorème 1** *Sous les hypothèses (H1 et H2). Il existe  $\varepsilon_0, h_0 > 0$  et une fonction réelle  $\tilde{I}(E; h)$  de classe  $C^\infty$  sur  $]E_0 - \varepsilon_0, E_0 + \varepsilon_0[ \times ]0, h_0[$ , admettant un développement asymptotique suivant :*

$$\tilde{I}(E; h) \sim I(E) + h I_1(E) + \dots, \quad h \rightarrow 0$$

dans l'espace  $C^\infty(]E_0-\varepsilon_0, E_0+\varepsilon_0[)$ , telle que les valeurs propres de  $P_0$  appartient à  $]E_0, -\varepsilon_0, E_0+\varepsilon_0[$  et sont données par la condition de Bohr Sommerfeld :

$$\exists k \in \mathbb{Z}, E = E_k, \tilde{I}(E_k, h) = 2k\pi h.$$

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de ce travail.

**Théorème 2** *Sous les hypothèses (H1) à (H6). Il existe  $\varepsilon_0 > 0$  et  $h_0 > 0$  tels que  $\sigma(P_\varepsilon) \cap D(E_0, \varepsilon_0) \subset \mathbb{R}$  quand  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0, 0 < h \leq h_0$ . Plus précisément, il existe une fonction  $\tilde{I}(E, \varepsilon, h)$  sur  $D(E_0, \varepsilon_0) \times D(0, \varepsilon_0) \times ]0, h_0[$ , holomorphe en  $(E, \varepsilon)$  admettant un développement asymptotique*

$$\tilde{I}(E, \varepsilon; h) \sim I(E, \varepsilon) + hI_1(E, \varepsilon) + \dots, h \rightarrow 0$$

dans l'espace des fonctions holomorphes sur  $D(E_0, \varepsilon_0) \times D(0, \varepsilon_0)$ , telle que  $\tilde{I}(E, \varepsilon; h) \in \mathbb{R}$  avec  $E, \varepsilon \in \mathbb{R}$ , et telle que pour  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[$  les valeurs propres de  $P_\varepsilon$  dans  $D(E_0, \varepsilon_0)$  sont données par la condition de Bohr-Sommerfeld :

$$\exists k \in \mathbb{Z}, E = E_k, \tilde{I}(E_k, \varepsilon; h) = 2k\pi h.$$

L'objectif principal de cette thèse est de voir la réalité de spectre d'opérateur de Schrödinger sous la perturbation.

Le plan de la thèse est le suivant :

Une introduction, six chapitres et deux annexes :

Le premier chapitre est intitulé : "Méthode BKW complexe en général", il consiste en des brefs rappels d'analyse semi-classique, de définitions, de résultats concernant la méthode BKW complexe que l'on utilisera tout au long de ce travail de thèse.

Le deuxième chapitre intitulé : "Analyse BKW près d'un point tournant simple", propose une méthode de calculs des Wronskiens qui engendre une connexion entre les solutions exactes de l'équation de Schrödinger.

Le troisième chapitre intitulé : "Solution BKW dans  $L^2$ ", donne les solutions de l'équation de Schrödinger dans  $L^2$  au voisinage  $+\infty$  et  $-\infty$  respectivement, leur existence en utilisant la théorie des équations différentielles partielles et leur développement asymptotique.

Dans le quatrième chapitre intitulé : "Solution BKW près du puits", la candidate s'intéresse à l'étude du choix de la phase et du symbole principal, afin de déterminer la solution BKW exacte dans le Secteur de Stokes.

Avec un calcul bien précis et approprié, elle obtient l'action entre chaque deux solution au voisinage du point tournant simple, le point crucial est de définir le choix de la racine carrée.

Le cinquième chapitre intitulé : "Quantification de Bohr Sommerfeld pour un puits de potentiel sans  $\mathcal{PT}$ -symétrie", est consacré à l'étude du choix de la branche holomorphe et à la détermination les zéros du Wronskien qui ne sont que les Valeurs propre de l'opérateur

de Schrödinger sous la condition de Bohr Sommerfeld, utilisant le théorème des fonctions implicite dans sa version holomorphe.

Enfin, le sixième chapitre portera sur : "Le cas d'un seul puits  $\mathcal{PT}$ -symétrique". Il contient le résultat principal de ce travail (la réalité de spectre du l'opérateur perturbé), une preuve du théorème du simple puits est élaboré.

Les annexes sont consacrées à de très brefs rappels de la théorie spectrale, mécanique quantique et de flot Hamiltonian.

Une bibliographie est donnée dans cette thèse, des perspectives et recommandation sont également données en fin de travail.

# Chapitre 1

## Méthode BKW complexe en général

### 1.1 Introduction et résultats

La méthode BKW nommée Brillouin, Kramers, et Wentzel est une technique de l'expansion asymptotique pour trouver des solutions approximatives ou exacte pour certains types de problèmes. La plus connue des applications de cette méthode est l'obtention des solutions de l'équation de Schrödinger indépendante du temps en mécanique quantique.

Comme Brillouin, Kramers, et Wentzel ont beaucoup contribué au développement de cette méthode, leur application devient la plus populaire. Certains l'appellent la méthode de Liouville et Green qui avaient fait en 1937 une publication sur cette procédure ; cependant le père de cette méthode est peut être l'un de ces cinq hommes, mais aussi Carlini qui a utilisé en 1817 une variation de l'approximation pour étudier les orbites elliptiques des planètes. Cette méthode est appelée WKB, KXWB en Hollande, BWK en France, ou WKBJ (pour Jeffries qui l'a utilisé dans les optiques géométriques et les approximations acoustiques). Cette méthode a des applications dans plusieurs disciplines ; notamment, sur les équations différentielles linéaires d'ordre quelconque, les problèmes de valeurs propres, les problèmes de valeurs initiales ou valeurs bornées ainsi que pour l'évaluation des intégrales des solutions des équations différentielles.

L'approximation de la solution de l'équation différentielle linéaire a une structure simple aussi si la solution exacte est connue, il s'agit d'une intégrale élémentaire des fonctions algébriques bien définies d'un ordre à un autre en puissance de  $h$ , comme les fonctions d'Airy, fonctions de Bessel, et les fonctions paraboliques cylindriques.

Dans ce chapitre, nous allons revoir quelques éléments de la méthode BKW complexe. Voir [43], [52], [49] pour plus de détails. Soit  $U \subset \mathbb{C}$  un ouvert simplement connexe, désignons par  $\text{Hol}(U)$  l'espace de Fréchet des fonctions holomorphes sur  $U$  muni de la topologie de convergence localement uniforme. nous étudierons aussi la croissance exponentielle et les développements asymptotiques des solutions exactes des équations différentielles d'ordre 2 dans la limite semi-classique. nous établissons une condition de quantification de Bohr-Sommerfeld pour des opérateurs de Schrödinger avec un potentiel analytique complexe à valeur réel.

## 1.2 Estimation sur un intervalle

Dans cette section nous intéressons à quelques estimations de base pour les équations différentielles sur un intervalle. Soit  $I = [a; b]$  un intervalle limité, considérons le problème suivant

$$(h\partial_x - P(x))u(x) = 0, \quad x \in I \quad (1.1.1)$$

Où  $P \in C^1(I; \text{Mat}(n; n))$ , et  $\text{Mat}(n; n)$  est l'espace des matrices complexe  $n \times n$ . Utilisant le résultat de base du problème de Cauchy associé à des EDO linéaires, déterminé par

$$(h\partial_x - P(x))E(x, y) = 0, \quad E(y, y) \in I \quad (1.1.2)$$

où  $E(x; y) \in C^\infty(I \times I; \text{Mat}(n; n))$  est la matrice fondamentale.

**Proposition 1.1** Soit  $\mu_+(P(x)) = \sup_{\lambda \in W(P(x))} \Re \lambda$ ,  $\mu_-(P(x)) = \inf_{\lambda \in W(P(x))} \Re \lambda$ .  
on a :

$$\|E(x, y)\| \leq \begin{cases} \exp \int_y^x (\mu_+(P(t))dt/h, & x \geq y, \\ \exp \int_x^y (\mu_-(P(t))dt/h, & x \leq y, \end{cases} \quad (1.1.3)$$

### 1.2.1 Preuve du Proposition 1.1

Si  $u = u(x)$  est une solution de  $(h\partial_x - P(x))u = 0$ , nous avons  $u(x) = E(x, y)u(y)$ . De plus

$$\partial_x(u(x)|u(x)) = (P(x)u(x)|u(x)) + (u(x)|P(x)u(x)) = 2\Re(P(x)u(x)|u(x)),$$

Dou

$$\partial_x \|u(x)\|^2 \leq \begin{cases} 2\mu_+(P(x))\|u(x)\|^2 \\ 2(\mu_-(P(x))\|u(x)\|^2. \end{cases}$$

En intégrant cette inégalité différentielle, nous obtenons

$$\|u(x)\|^2 \leq \begin{cases} \exp(2 \int_y^x (\mu_+(P(t))dt/h) \|u(y)\|^2, & x \geq y, \\ \exp(2 \int_x^y (\mu_-(P(t))dt/h) \|u(y)\|^2, & x \leq y, \end{cases}$$

Telle que  $u(y)$  peut être choisi arbitrairement alors, on a (1.1.3).

**Remarque 1.1** Pour  $x = y$  on a  $h\partial_y E = -h\partial_x E$  et par conséquent  $h\partial_y E(x, y) + E(x, y)A(y) = 0$  quand  $x = y$ .

*D'autre part*

$$\begin{aligned}(h\partial_x + P(x))(h\partial_y E(x, y)) &= 0, \\ (h\partial_x + P(x))(E(x, y)P(y)) &= 0,\end{aligned}$$

*ainsi*

$$(h\partial_x + P(x))(h\partial_y E(x, y) + E(x, y)P(y)) = 0, \text{ dans } I * I.$$

De l'unicité de problème de Cauchy, nous déduisons la deuxième équation différentielle pour la matrice fondamentale

$$h\partial_y E(x, y) + E(x, y)P(y) = 0, \quad x, y \in I. \quad (1.1.4)$$

De (1.1.2), (1.1.4) nous obtenons

$$(h\partial_x)^j (h\partial_y)^k E(x, y) = \mathcal{O}_{j,k}(1) \text{ où } x = y.$$

Alors, on différentie plusieurs fois (1.1.2) en  $x$  et  $y$ , nous obtenons une équation différentielle non homogène pour  $(h\partial_x)^j (h\partial_y)^k E(x, y)$ , que nous résolvons en utilisant la matrice fondamentale  $E(x, y)$ .

En effet

$$\|(h\partial_x)^j (h\partial_y)^k E(x, y)\| \leq C_{j,k} * RS \text{ de (1.1.3).}$$

Nous obtenons des estimations pour  $h\partial_x E$  et  $h\partial_y E$  directement des deux équations différentielles pour  $E$ , si  $j = k = 1$ , En écrivant

$$(h\partial_x + P(x))h\partial_x h\partial_y E(x, y) = (h\partial_x P)h\partial_y E(x, y),$$

En intégrant

$$h\partial_x h\partial_y E(x, y) = \int_y^x E(x, t)((h\partial_x P)h\partial_y E(t, y))dt + h\partial_x h\partial_y E(y, y).$$

Pour fixer les idées, nous supposerons que  $n = 2$  c'est à dire

$$\sigma(P(x)) = \{\lambda_1(x), \lambda_2(x)\}, \lambda_1(x) \neq \lambda_2(x), x \in I. \quad (1.1.5)$$

Il est clair que  $P(x)$  est diagonalisable et plus précisément il existe

$$U_0(x) \in C^\infty(I; Gl(n)), \quad (1.1.6)$$

où  $Gl(n) \subset Mat(n, n)$  telle que

$$U_0^{-1}(x)P(x)U_0(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1(x) & 0 \\ 0 & \lambda_2(x) \end{pmatrix} =: \Lambda_0(x). \quad (1.1.7)$$

Puis

$$\begin{aligned} U_0^{-1}(x)(h\partial x - P(x))U_0(x) &= \underbrace{hU_0^{-1}(x)\partial x(U_0(x))}_{=:-B_1(x)} - \Lambda_0(x), \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1(x) + hb_{11}(x) & hb_{12}(x) \\ hb_{21}(x) & \lambda_2(x) + hb_{22}(x) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

Nous avons l'équivalence

$$(h\partial x - P(x))(U_0(x)u) = 0 \Leftrightarrow (h\partial x - (\Lambda_0(x) + B_1(x)))u = 0.$$

Si  $F(x, y; h)$  est la matrice fondamentale pour  $(h\partial x - (\Lambda_0(x) + B_1(x)))$ , on a des relations (équivalentes),

$$\begin{aligned} E(x, y; h) &= U_0(x)F(x, y; h)U_0^{-1}(y), \\ F(x, y; h) &= U_0^{-1}(x)F(x, y; h)U_0(x). \end{aligned} \quad (1.1.9)$$

De plus de (1.1.5) nous supposons,

$$\Re\lambda_1(x) \geq \Re\lambda_2(x), x \in I. \quad (1.1.10)$$

Alors

$$\begin{aligned} \mu_+(\Lambda_0(x) + hB_1(x)) &= \Re\lambda_1(x) + \mathcal{O}(h), \\ \mu_-(\Lambda_0(x) + hB_1(x)) &= \Re\lambda_2(x) + \mathcal{O}(h), \end{aligned}$$

et la Proposition 1.1 donne

$$\|F(x, y; h)\| \leq \begin{cases} \exp\frac{1}{h}\int_y^x \Re\lambda_1(t)dt + \mathcal{O}(|x-y|), & x \geq y \\ \exp(\frac{1}{h}\int_y^x \Re\lambda_2(t)dt + \mathcal{O}(|x-y|), & x \leq y \end{cases} \quad (1.1.11)$$

Comme précédemment, nous avons

$$\|(h\partial x)^j(h\partial y)^k F(x, y)\| \leq C_{j,k} * RHS \text{ de (1.1.11)} \quad (1.1.12)$$

**Théorème 1.1** *Sous les hypothèses (1.1.5) et (1.1.10), nous avons*

$$\|(h\partial x)^j(h\partial y)^k E(x, y; h)\| \leq C_{j,k} \begin{cases} \exp\frac{1}{h}\int_y^x \Re\lambda_1(t)dt, & x \geq y, \\ \exp\frac{1}{h}\int_y^x \Re\lambda_2(t)dt, & x \leq y. \end{cases} \quad (1.1.13)$$

*Ceci suit de (1.1.10), (1.1.12), (1.1.13).*

Soit  $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \in C^\infty(I; \text{Mat}(n, n))$ , considérant  $1 + hC(x)$  qui est inversible pour  $h$  assez petit avec l'inverse

$$(1 + hC(x))^{-1} = 1 - hC(x) + h^2C(x) - \dots$$

là où la série est convergente mais sera étudié en tant qu'asymptotique, alors

$$\begin{aligned} & (1 + hC(x))^{-1}(h\partial x - (\Lambda_0(x) + hB_1(x))(1 + hC(x) = h\partial x - (\Lambda_0(x) + h(-C(x)\Lambda_0(x) \\ & + C(x)\Lambda_0(x) + B_1(x))) + \mathcal{O}(h^2) \\ = & h\partial x - (\Lambda_0(x) + h[\Lambda_0(x), C(x)] + B_1(x)) + \mathcal{O}(h^2), \end{aligned}$$

nous avons donc

$$[\Lambda_0, C] = \begin{pmatrix} 0 & (\lambda_1 - \lambda_2)c_{12} \\ (\lambda_2 - \lambda_1)c_{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

Choisissant  $c_{11} = c_{22} = 0$ ,  $c_{j,k} = -b_{j,k}/(\lambda_j - \lambda_k)$ ,  $k \neq j$ . Avec  $\tilde{U}_1(x) = U_0(x)(1 + hC(x))$ , on trouve

$$\tilde{U}_1(x; h)^{-1}(h\partial x - P(x))\tilde{U}_1(x; h) = h\partial x - \begin{pmatrix} \lambda_1(x) + hb_{11}(x) & 0 \\ 0 & \lambda_2(x) + hb_{22}(x) \end{pmatrix} + \mathcal{O}(h^2), \quad (1.1.14)$$

où le dernier terme a un développement asymptotique en puissance  $h$ .

**Proposition 1.2** [49] *Sous l'hypothèse (1.1.5), on a*

$$U(x, h) \sim U_0(x) + hU_1(x) + h^2U_2(x) + \dots \in C^\infty(I; \text{Mat}(n, n)) \quad (1.1.15)$$

avec  $U_0^{-1}(x) \in C^\infty(I; \text{Mat}(n, n))$ , telle que

$$U_1(x; h)^{-1}(h\partial x - P(x))U_1(x; h) = h\partial x - \Lambda(x; h), \quad (1.1.16)$$

où

$$\Lambda(x; h) \sim \Lambda_0(x) + h\Lambda_1(x) + h^2\Lambda_2(x) + \dots \text{ dans } C^\infty(I; \text{Mat}(n, n))$$

Où chaque matrice  $\Lambda_j$  est diagonal, et vérifie

$$\Lambda(x; h) = \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_1(x; h) & r_{1,2}(x; h) \\ r_{2,1}(x; h) & \tilde{\lambda}_2(x; h) \end{pmatrix}, r_{j,k}(x; h) \sim 0 \quad (1.1.17)$$

$$\tilde{\lambda}_j(x; h) = \lambda_j(x) + h\lambda_{j,1}(x) + h^2\lambda_{j,2}(x) + \dots$$

Utilisant ce résultat, il est facile de trouver les solutions asymptotiques formelles. La discussion dans cette section peut être appliquée à l'équation de Schrödinger

$$(-(h\partial_x)^2 + V(x))v = 0 \quad (1.1.18)$$

En introduisant

$$u = \begin{pmatrix} u_0(x) \\ u_1(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(x) \\ h\partial_x v(x) \end{pmatrix},$$

(1.1.18) est équivalente à :

$$(h\partial_x - P(x))u = 0, \text{ où } P(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ V & 0 \end{pmatrix} \quad (1.1.19)$$

Les valeurs propres de  $P(x)$  sont  $\pm V(x)^{\frac{1}{2}}$ , la condition (1.1.5) est équivalente au fait que  $V(x) \neq 0$  pour tous  $x \in I$ , ou en d'autres termes il n'y a aucun point tournant dans  $I$ .

### 1.3 Equation de Schrödinger dans le domaine complexe

Soit  $U$  un ouvert simplement connexe. Soit  $P(z) \in \text{Hol}(\Omega; \text{Mat}(2,2))$ ,  $w \in \mathcal{O}$  et  $u_0 \in \mathbb{C}^2$ , il existe une solution holomorphe unique  $u = u(z) \in \text{Hol}(U; \mathbb{C}^2)$  de problème de Cauchy

$$(h\partial_z - P(z))u(z) = 0 \text{ dans } U, u(w) = u_0 \quad (1.2.1)$$

on peut écrire

$$u(z) = E(z, w)u_0 \quad (1.2.2)$$

où  $E(z, w)$  est la matrice fondamentale.

Comme dans (1.1.5), nous supposons  $P(z)$  a des valeurs propres distinctes :

$$\sigma(P(z)) = \{\lambda_1(z), \lambda_2(z)\} \text{ où } \lambda_1(z) \neq \lambda_2(z), \forall z \in U. \quad (1.2.3)$$

Alors comme dans (1.1.7) nous avons

$$U_0^{-1}(z)P(z)U_0(z) = \begin{pmatrix} \lambda_1(z) & 0 \\ 0 & \lambda_2(z) \end{pmatrix} =: \Lambda_0(z), \quad z \in U. \quad (1.2.4)$$

De ceci nous obtenons une analogue de la Proposition 1.2.

**Proposition 1.3** *Sous l'hypothèse (1.2.1) on a*

$$U(x, h) \sim U_0(x) + hU_1(x) + h^2U_1(x) + \dots \in C^\infty(\Omega; \text{Mat}(n, n)) \quad (1.2.5)$$

avec  $U_0^{-1}(x) \in C^\infty(\Omega; \text{Mat}(n, n))$ , telle que

$$U_1(z; h)^{-1}(h\partial z - P(z)U_1(z; h) = h\partial z - \Lambda(z; h), \quad (1.2.6)$$

où

$$\Lambda(z; h) \sim \Lambda_0(z) + h\Lambda_1(z) + h^2\Lambda_2(z) + \dots \text{ dans } C^\infty(I; \text{Mat}(n, n))$$

et chaque matrice  $\Lambda_j$  est diagonal, ainsi

$$\Lambda(z; h) = \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_1(z; h) & r_{1,2}(z; h) \\ r_{2,1}(z; h) & \tilde{\lambda}_2(z; h) \end{pmatrix}, r_{j,k}(z; h) \sim 0 \quad (1.2.7)$$

$$\tilde{\lambda}_j(z; h) = \lambda_j(z) + h\lambda_{j,1}(z) + h^2\lambda_{j,2}(z) + \dots$$

Pour tout  $K \in \Omega$ , l'inverse de  $U(x, h)$  existe pour  $0 < h \leq h(K)$  pour  $h(K) > 0$  assez petit

**Corollaire 1.1** Soit  $\varphi_j$  une fonction holomorphe dans  $U$  avec  $\varphi_j'(z) = \lambda_j(z)$ . Il existe

$$a(z; h) \sim a_0(z) + ha_1(z) + ha_2(z) \dots \text{ dans } \text{Hol}(U)$$

telle que  $a_0(z) \neq 0$  et  $a_0(z) \in N(P(z) - \lambda_j(z))$ ,  $\forall z \in U$

et

$$(h\partial_z - P(z))a(z; h)e^{\varphi_j(z)/h} = r(z; h)e^{\varphi_j(z)/h}, r \sim 0. \quad (1.2.8)$$

### 1.3.1 Preuve du Corollaire 1.1

Posons  $\tilde{\varphi}_j(z, h) \sim \varphi_j(z) + h\varphi_{j,1}(z) + \dots$  une fonction holomorphe primitive de  $\tilde{\lambda}_j(z; h)$ . Ainsi  $e^{\tilde{\varphi}_j(z, h)/h} = \tilde{a}(z; h)e^{\varphi_j(z)/h}$ ,  $\tilde{a}(z; h) = 1 + h\tilde{a}_{j,1}(z) + \dots$  et si  $\nu_1, \nu_2$  est la base canonique dans  $C^2$ , nous avons

$$(h\partial_z - \Lambda)(e^{\tilde{\varphi}_j(z)/h}\nu_j) = \mathcal{O}(h^\infty)e^{\varphi_j(z)/h}.$$

On définit  $a$  dépend de  $j$  par

$$a(z; h)e^{\varphi_j(z)/h} = U(z, h)(e^{\tilde{\varphi}_j(z)/h}\nu_j).$$

En examinant directement les équations pour  $a_0$  et  $a_1$  de la forme (1.2.8), nous voyons qu'a  $a_0(z) = \text{Const}e_j(z)$  quand  $j = 1, 2$  respectivement, où  $e_j(z)$  sont les sections ne s'annulent pas du  $\mathcal{N}(P(z) - \lambda_j)$  : que nous avons construit avant (1.2.5).

Soit  $\gamma : [a, b] \ni t \rightarrow \gamma(t) \in U$  une courbe avec  $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ . si nous limitons l'équation  $(h\partial_z - P(z)) = 0$  à  $\gamma$ , nous avons

$$(h\partial_t - \dot{\gamma}(t)P(\gamma(t)))u(\gamma(t)) = 0, \quad (1.2.9)$$

Nous déduisons une estimation générale de la matrice fondamentale

$$\|E(\gamma(t), \gamma(s); h)\| \leq \mathcal{O}(1)e^{\frac{1}{h} \int_s^t \max_{j=1,2} (\Re(\dot{\gamma}(\tau)\lambda_j(\gamma(\tau))))d\tau}, \quad (1.2.10)$$

pour  $a \leq s \leq t \leq b$ .

Maintenant, nous supposons

$$\Re(\dot{\gamma}(t)\lambda_1(\gamma(t))) \geq \Re(\dot{\gamma}(t)\lambda_2(\gamma(t))), a \leq t \leq b. \quad (1.2.11)$$

En intégrant l'exposant de (1.2.10) on a

$$\int_s^t \Re(\dot{\gamma}(\tau)\lambda_1(\gamma(\tau)))d\tau = \Re \int_s^t \frac{d}{d\tau}(\varphi_1(\gamma(\tau)))d\tau = \Re(\varphi_1(\gamma(t)) - \varphi_1(\gamma(s))) \quad (1.2.12)$$

De la même façon (toujours avec  $s \leq t$ )

$$\|E(\gamma(t), \gamma(s); h)\| \leq \mathcal{O}(1) \exp \frac{1}{h} (\Re\varphi_1(\gamma(t)) - \Re\varphi_1(\gamma(s))). \quad (1.2.13)$$

**Théorème 1.2** *Sous l'hypothèse (1.2.11), soit  $u_{\text{BKW}}(z; h) = a_{\text{BKW}}(z; h)e^{\varphi_j(z)/h}$  la solution asymptotique d'équation  $(h\partial_z - P(z))u_{\text{BKW}} \approx 0$ . Alors il existe une solution exacte  $u(z; h)$  de  $(h\partial_z - P(z))u = 0$  tel que  $u(z; h) - u_{\text{BKW}}(z; h) = O(h^\infty)e^{\varphi_j(z)/h}$  avec tous ses dérivées dans  $\gamma([a, b])$ .*

Si nous renforçons l'hypothèse (1.2.10) à

$$\Re(\dot{\gamma}(t)\lambda_1(\gamma(t))) > \Re(\dot{\gamma}(t)\lambda_2(\gamma(t))), a \leq t \leq b. \quad (1.2.14)$$

Alors  $u(z; h) - u_{\text{BKW}}(z; h) = O(h^\infty)e^{\varphi_j(z)/h}$  dans  $\text{vois}([a, b], U)$  et  $\text{vois}([a, b], U)$  pour  $j = 1$  et 2 respectivement.  $\square$

### 1.3.2 Preuve du Théorème 1.2

Dans les cas  $j = 1$  et  $j = 2$  sont fondamentalement équivalentes et nous choisissons  $j = 1$  pour fixer les idées.

Soit  $u(z; h)$  une solutions exacte unique telle que  $u(\gamma(a)) = u_{\text{BKW}}(\gamma(a))$  et rappelant

$$(h\partial_z - P)u_{\text{BKW}} = r(z; h)e^{\varphi_1(z)/h}, r \sim 0$$

de sorte que

$$u(z) - u_{\text{BKW}}(z) = - \int_{\gamma(a)}^z E(z, w; h) r(w; h) e^{\varphi_1(w)/h} dw.$$

Si  $z = \gamma(a)$  nous intégrons au long  $\gamma$  et utilisons la formule (1.2.12), nous obtenons la conclusion désirée d'hypothèse (1.2.11).

D'après l'hypothèse (1.2.14), il est suffisante de prendre une famille de courbe  $\gamma_s(t) : [a, b + \varepsilon] \rightarrow U$ ,  $s \in \text{vois}(0, \mathbb{R})$  commençant de  $\gamma(a)$  avec  $\gamma_{0|[a,b]} = \gamma$  telle que les images de  $\gamma_s$  remplissent le voisinage de  $\gamma([a, b])$ .  $\square$

On considère maintenant l'équation de Schrödinger

$$(-(h\partial)^2 + V(z))u = 0, \tag{1.2.15}$$

où  $V$  est holomorphe dans  $U$  (un ouvert simplement connexe). Ecrivaint

$$\tilde{u} = \begin{pmatrix} u \\ h\partial u \end{pmatrix}$$

nous obtenons un système équivalent au système du 1er ordre

$$(h\partial + P)\tilde{u} = 0, \tag{1.2.16}$$

où

$$P(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ V & 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propre de  $P(z)$  sont  $V(z)^{1/2}$ , ainsi la formule (1.2.11) *équivalente à la condition de*  $V(z) \neq 0$  partout dans  $U$  c'est à dire qu'il n'y a pas des points tournant dans  $U$ .

La discussion ci-dessus peut être appliquée le faite que  $\varphi_1' = V(z)^{1/2}$ ,  $\varphi_2' = -V(z)^{1/2}$  ensuite on fixe la branche holomorphe de la racine carrée  $V(z)$ .

Ceci donne une approche alternative à la construction des solutions asymptotiques à (1.2.15).

## 1.4 Prolongement du développement de BKW

Dans cette section, on va exposer brièvement la méthode BKW complexe pour l'équation de Schrödinger, on cite l'équation eiconale et les équations de transport.

### 1.4.1 Solutions formelle de l'équation de Schrödinger

Soit  $V \in \text{Hol}(U)$  un potentiel tel que

$$V(z) \neq 0, \quad z \in U. \quad (1.3.1)$$

On considère l'équation de Schrödinger

$$Pu = \left( -h^2 \left( \frac{d}{dx} \right)^2 + V(z) \right) u(z) = 0 \quad (1.3.2)$$

dans  $U$ , et on cherche d'abord une solution BKW formelle de la forme :

$$u(z; h) = a(z; h) e^{i\varphi(z)/h} \quad (1.3.3)$$

où  $a(z; h)$  a un développement asymptotique formelle sous forme

$$a(z; h) \sim \sum_{j=0}^{+\infty} a_j(z) h^j \quad (1.3.4)$$

dans l'espace  $\text{Hol}(U)$ .

En considérant le développement formel en puissance de  $h$  on a :

$$e^{-i\varphi(z)/h} (-h^2 \partial_z^2 + V(z)) e^{i\varphi(z)/h} a(z; h) = 0,$$

on trouve

$$(-(h\partial_z)^2 + \varphi'(z)^2 - 2i\varphi' h\partial_z - ih\varphi'' + V(z)) a(z) = 0.$$

On est amené à choisir une solution  $\varphi$  de l'équation eiconale

$$(\varphi'(z))^2 + V(z) = 0, \quad (1.3.5)$$

qu'on peut facilement résoudre sur  $U$ .

**Proposition 1.4** *On suppose qu'il n'y a pas de points tournants c'est à dire que  $V(z) \neq 0$  pour tous  $z \in U$ . L'équation eiconale possède deux solutions holomorphes à des constantes près, données par :*

$$\varphi(z) = \pm \int_{z_0}^z (-V(w))^{\frac{1}{2}} dw, \quad (1.3.6)$$

où  $z_0 \in U$ . Ici  $(-V(w))^{\frac{1}{2}}$  désigne une branche holomorphe de la racine carré de  $-V(z)$  sur  $U$ .

Il reste ensuite à chercher un développement formel (1.3.4) tel que

$$\left( \partial_z \varphi(z) \partial_z + \frac{\partial_z^2 \varphi(z)}{2} - i \frac{h \partial_z^2}{2} \right) a(z; h) = 0. \quad (1.3.7)$$

En annulant successivement les puissances de  $h$ , on trouve une suite d'équations de transport :

$$\begin{aligned} (\partial_z \varphi \partial_z + \frac{\partial_z^2 \varphi}{2}) a_0 &= 0, \\ (\partial_z \varphi \partial_z + \frac{\partial_z^2 \varphi}{2}) a_1 &= i \frac{\partial_z^2}{2} a_0, \\ (\partial_z \varphi \partial_z + \frac{\partial_z^2 \varphi}{2}) a_k &= i \frac{\partial_z^2}{2} a_{k-1}, \quad k \geq 1. \end{aligned} \quad (1.3.8)$$

La solution de la première équation de transport est donnée par

$$a_0(z) = C(\partial_z \varphi)^{-\frac{1}{2}} = C(-V(z))^{-\frac{1}{4}}.$$

**Proposition 1.5** Soit  $z_0 \in U$  et fixons une solution de l'équation eiconale (1.3.5). Soient  $a_0^0, a_1^0, a_2^0, \dots$  des nombres complexes arbitraires. Alors il existe une unique solution BKW formelle de l'équation (1.3.2) de la forme (1.3.3), (1.3.4) avec

$$a_0(z_0) = a_0^0, \quad a_1(z_0) = a_1^0, \quad a_2(z_0) = a_2^0, \dots$$

Le résultat suivant permet de passer des solutions formelles à des solutions exactes en respectant la règle fondamentale de la méthode BKW complexe qui est de se déplacer toujours dans la direction où le facteur phase  $\exp(i\varphi/h)$  est croissant en module, donc en particulier transversalement aux lignes de Stokes.

**Théorème 1.3** Soit  $-\infty < b < c < \infty$  et  $\gamma : [b, c] \rightarrow U$  une courbe de classe  $C^1$ , telle que  $\frac{d}{dt}(-\operatorname{Im} \varphi(\gamma(t))) > 0$ ,  $b \leq t \leq c$ . Soit

$$u_{\text{BKW}} \sim (a_0(z) + ha_1(z) + \dots) e^{i\varphi(z)/h} \quad (1.3.9)$$

une solution BKW formelle de (1.3.2).

1. Il existe une solution exacte  $u$  de (1.3.2) et un voisinage ouvert  $B$  de  $\gamma(B)$  tels que

$$\begin{aligned} u(z; h) &= a(z; h) e^{i\varphi(z)/h} \quad \text{dans } B, \\ a(z; h) &\sim a_0(z) + ha_1(z) + \dots \quad \text{dans } \operatorname{Hol}(B). \end{aligned} \quad (1.3.10)$$

*B ne dépend pas du choix de la solution BKW formelle.*

2. Il existe un voisinage ouvert  $\Gamma$  de  $\gamma([b, c])$  tel que si  $u$  est une solution exacte comme dans 1), alors la description (1.3.10) s'étend à  $\Gamma$ .

Ce résultat est bien connu. Voir par exemple [49].

On retourne maintenant à la situation décrite dans la section (intr) et on adopte les hypothèses (H1) à (H6). Nous avons déjà défini le puits  $[\alpha_0^0, \beta_0^0]$  pour  $V_0 - E_0$ .

On s'intéresse aux solutions à décroissance exponentielle près de  $\pm\infty$  de l'équation

$$(-(h\partial_x)^2 + V_\varepsilon(x) - E)u(x) = 0. \quad (1.3.11)$$

Introduisons l'espace vectoriel (voir Annexe B)

$$\mathcal{E}_\pm = \mathcal{E}_\pm(E, \varepsilon; h) = \{u \in C^\infty(\mathbb{R}); u \text{ vérifie (1.3.11) et } u \text{ est borné sur } \mathbb{R}_\pm\}.$$

Grâce à l'ellipticité de  $P_\varepsilon - E$  près de  $\pm\infty$ , on a le résultat bien connu suivant :

**Proposition 1.6**  $\dim \mathcal{E}_\pm = 1$ , c'est à dire chaque espace est engendré par une seule solution de (1.3.11) :  $E_\pm = Cu_\pm$ . La fonction  $u_\pm$  est à décroissance exponentielle près de  $x = \pm\infty$ .

On peut aussi décrire le comportement asymptotique de  $u_\pm$  près de  $\pm\infty$ .

Commençons par employer la méthode BKW formelle sur  $] -\infty, \alpha_0^0 - \delta_0]$  et sur  $[\beta_0^0 + \delta_0, +\infty[$  quand  $\delta_0 > 0$  et pour  $\varepsilon_0 > 0$  assez petit en fonction  $\delta_0$ .

L'analyse sur les deux intervalles est essentiellement la même et on va se concentrer sur  $[\beta_0^0 + \delta_0, +\infty[$ .

L'équation eiconale

$$(\varphi'(x))^2 + V_\varepsilon(x) - E = 0 \quad (1.3.12)$$

possède la solution

$$\varphi(x) = i \int_{\beta_0(E, \varepsilon)}^x (V_\varepsilon(y) - E)^{1/2} dy, \quad x \geq \beta_0^0 + \delta_0, \quad (1.3.13)$$

où on choisit la branche de la racine carrée qui dépend continuellement de  $(E, \varepsilon)$  et qui est  $> 0$  quand  $(E, \varepsilon) = (E_0, 0)$ . Il est alors clair que

$$\partial_x^\alpha \varphi(x) = \mathcal{O}(1)(1 + |x|)^{\frac{m_0}{2} + 1 - \alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{N}. \quad (1.3.14)$$

On cherche ensuite une solution BKW formelle comme dans (1.3.3), (1.3.4). Alors le symbole  $a$  doit vérifier (1.3.7) c.à.d. la suite des équations de transport (1.3.8).

On peut prendre  $a_0(x) = (\partial_x \varphi)^{-1/2}$  et  $a_k(x) = f_k(x)a_0(x)$  avec  $f_0 = 1$  et

$$\varphi(x) = i \int_\gamma (V_\varepsilon(x) - E)^{\frac{1}{2}} dz$$

**Proposition 1.7**  $\forall \delta_0 > 0, \exists \varepsilon_0 > 0$  et une solution bkW formelle  $u_{bkW}(x, \varepsilon, E, h) = (a_0(x, \varepsilon, E) + ha_1(x, \varepsilon, E) + \dots)e^{i\varphi(x, E, \varepsilon)/h}$  définie pour  $x \in ]\beta_0 + \delta_0, +\infty[, \varepsilon \in D(E_0, \varepsilon_0), \varepsilon \in D(0, \varepsilon_0)$  où  $a_j$  est  $C^\infty$  en  $x$  holomorphe en  $(E, \varepsilon)$  de  $(-h^2\partial_x^2 + V_\varepsilon(x) - E)u_{bkW} = 0$  telle que

$$a_0 = \frac{1}{(V_\varepsilon(x) - E)^{\frac{1}{4}}}$$

et

$$|\partial_x^\alpha a_0| \leq C_\alpha (|1 + |x||)^{\frac{-m_0}{4} - \alpha}$$

et la formule générale est donnée par

$$|\partial_x^\alpha a_{k+1}| \leq C_\alpha (|1 + |x||)^{\frac{-m_0}{4} - (k+1)(\frac{m_0}{2} + 1) - \alpha}$$

**Preuve de la Proposition 1.7 :** Les équations de transports sont définies par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} (\partial_z \varphi(z) \partial_z - \frac{\partial_z^2 \varphi}{2}) a_0 = 0 \\ (\partial_z \varphi \partial_z + i \frac{\partial_z^2 \varphi}{2}) a_1 = i \frac{\partial_z^2}{2} a_0 \end{cases}$$

pour résoudre ce système il fallait bien de choisir une des méthodes de résolutions des équations différentielle ordinaires, on prend ici la méthode de la variation des constantes, alors posons :

$$a_1 = f a_0$$

D'après le développement de Taylor on trouve

$$\begin{aligned} \partial_x \varphi(z) \partial_x a_1 &= i \frac{\partial_x^2 a_0}{2}, \\ \partial_x \varphi(x) \partial_x f a_0 &= i \frac{\partial_x^2 a_0}{2}, \\ \partial_x f &= i \frac{\partial_x^2 a_0}{2 \partial_x \varphi(x)} = \mathcal{O}(1 + |x|)^{-\frac{m_0}{2} - 2}, \\ f(x) &= \int_{+\infty}^x i \frac{\partial_x^2 a_0}{2 \partial_x \varphi(x) a_0} dt = \mathcal{O}(1 + |x|)^{-\frac{m_0}{2} - 1}, \end{aligned}$$

donc

$$\partial_x^\alpha a_1 = \mathcal{O}(1 + |x|)^{-\frac{m_0}{4} - \frac{m_0}{2} - 1 - \alpha},$$

Hypothèse de récurrences

$$\partial_x^\alpha a_k = \mathcal{O}(1 + |x|)^{-\frac{m_0}{4} - K(\frac{m_0}{2} + 1) - \alpha},$$

et

$$a_{k+1} = f a_0$$

on vient à dire que

$$\begin{aligned} \partial_x \varphi(x) \partial_x f a_0 &= i \frac{\partial_x^2 a_k}{2} \\ \partial_x f &= i \frac{\partial_x^2 a_k}{2 \partial_x \varphi(x) a_0} = \mathcal{O}(1 + |x|)^{-\frac{m_0}{4} - K(\frac{m_0}{2} + 1) - 2 - \frac{m_0}{2} + -\frac{m_0}{4} - \alpha}, \\ f &= i \frac{\partial_x^2 a_k}{2 \partial_x \varphi(x) a_0} dt = \mathcal{O}(1 + |x|)^{(k+1)(\frac{m_0}{2} + 1)}, \end{aligned}$$

on déduit

$$\partial_x^\alpha a_{k+1} = \mathcal{O}(1 + |x|)^{-\frac{m_0}{4} - (k+1)(\frac{m_0}{2} + 1) - \alpha},$$

et

$$\partial_x f_k = \frac{i}{2\partial_x \varphi} \left( \partial_x^2 f_{k-1} + 2 \frac{\partial_x a_0}{a_0} \partial_x f_{k-1} + \frac{\partial_x^2 a_0}{a_0} f_{k-1} \right), \quad k \geq 1. \quad (1.1)$$

Par récurrence sur  $k$  on voit qu'on peut trouver des solutions  $f_1, f_2, \dots$ , tels que

$$\partial_x^\alpha f_k = \mathcal{O}(1)(1 + |x|)^{-k(1+m_0/2)-\alpha}, \quad (1.2)$$

donc pour les

$$a_k, \partial_x^\alpha a_k(x) = \mathcal{O}(1)(1 + |x|)^{-m_0/4 - k(1+m_0/2) - \alpha}.$$

# Chapitre 2

## Solutions BKW dans $L^2$

Dans ce chapitre, nous nous intéressons de voir les solutions de l'équation de Schrödinger (1.3.2) dans  $L^2$  au voisinage  $+\infty$  et  $-\infty$  respectivement. L'existence de ces solutions en générale dans la théorie des équations différentielles partiales lorsque  $P_\varepsilon - E$  est elliptique à l'infini pour  $E \in D(E_0, \varepsilon_0)$ . Nous avons intéressés en leur développement asymptotique quand  $h \rightarrow 0$ .

**Proposition 2.1** *Soit  $\delta_0 > 0$ , Il existe  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\delta_0)$  assez petit, pour tout  $(E, \varepsilon) \in D(E_0, \varepsilon_0) \times D(0, \varepsilon_0)$ , et pour  $x \in ]\beta_0^0 + \delta_0, +\infty[$ , les équations (1.3.8), (1.3.12) définit dans l'intervalle  $]\beta_0^0 + \delta_0, +\infty[$ , la fonction*

$$\varphi(x, E) = i \int_{\beta_0^0(E, \varepsilon)}^x (V_\varepsilon(t) - E)^{\frac{1}{2}} dt, \quad (2.1.1)$$

et analytique en  $(E, \varepsilon)$ , qui résolut l'équation (1.3.12).

Rappelons que l'application  $t \mapsto (V_\varepsilon(t) - E)^{\frac{1}{2}}$  est réel et positive dans  $]\beta_0^0 + \delta_0, +\infty[$  quand  $\varepsilon = 0$ , Alors

$$\operatorname{Re}(i\varphi(x, E)) < 0. \quad (2.2.2)$$

Pour la serie formelle  $\sum_{j \geq 0} a_j h^j$  définit dans la Proposition (1.3.5), on peut associer la fonctron  $a$  par ce qu'on appelle la construction de Borel, mettant

$$a(x, E, \varepsilon, h) = \sum_{j \geq 0} a_j(x, E, \varepsilon) h^j \chi(\lambda_j h)$$

pour une fonction  $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ , une suite  $(\lambda_j)$  de nombre réel telle que  $\lambda_j \rightarrow +\infty$  quand  $j \rightarrow +\infty$  (voir [21, Chapitre 2]).

**Proposition 2.2**  $\forall \delta_0 > 0, \exists \varepsilon_0 > 0$  tel que pour  $(E, \varepsilon) \in (E_0, \varepsilon_0) \times D(0, \varepsilon_0)$ , l'équation (1.3.11) ait une solution approximative holomorphe en  $(E, \varepsilon)$  de la forme

$$P_\varepsilon u_{+, wkb}(x, E, \varepsilon, h) = e^{i\varphi_+(x, E, \varepsilon)/h} r(x, E, \varepsilon, h), \quad (2.2.3)$$

où,

$$r(x, E, \varepsilon, h) = \mathcal{O}(h^N(1 + |x|)^{-N}). \quad (2.2.4)$$

Pour tout  $N \in \mathbb{N}$  et  $k \geq 0$ ,

$$|a^{(k)}(x, h) - \sum_{j=0}^{N-1} a_j^{(k)}(x)h^j| = \mathcal{O}(h^N < x^{-\frac{m_0}{4} - N(\frac{m_0}{2} + 1) - k}). \quad (2.2.4)$$

Nous construisons maintenant la solution BKW  $u_+$  dans l'intervalle  $]\beta_0^0 + \delta_0, +\infty[$ .

Tout d'abord, nous essayons de mettre quelques estimations pour la solution de l'équation de Schrödinger non homogène

$$-h^2 u'' + (V_\varepsilon - E)u = v, \quad (2.2.5)$$

dans un intervalle de la forme  $I_\lambda = [\frac{\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}]$ , pour  $\lambda$  grand. Par une simple notation nous écrirons

$$Q(x) = Q_{E,\varepsilon}(x) = V_\varepsilon - E,$$

En mettant

$$x = \lambda + \lambda\tilde{x},$$

pour que  $\tilde{x} \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ . En multipliant par  $\lambda^{-m_0}$ , l'équation (2.2.5) est équivalent

$$(\tilde{h}^2 D_{\tilde{x}}^2 + \tilde{Q}(\tilde{x}))\tilde{u} = \tilde{v}, \text{ dans } [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], \quad (2.2.6)$$

où

$$\tilde{h} = \frac{h}{\lambda^{1+m_0/2}}, \quad \tilde{Q}(\tilde{x}) = \lambda^{-m_0}Q(x), \quad \tilde{v}(\tilde{x}) = \lambda^{-m_0}v(x).$$

Notons en particulier  $\tilde{Q} \asymp 1$ , et  $\tilde{Q}^{(k)} = \mathcal{O}(1)$  pour tout  $k \geq 1$ . Comme dans [49, Chapitre 7], nous écrivons (2.2.6) comme un système du premier ordre,

$$(\tilde{h}D_{\tilde{x}} + P(\tilde{x}))U = V, \quad P(\tilde{x}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \tilde{Q}(\tilde{x}) & 0 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{h}D_{\tilde{x}}\tilde{u} \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{v} \end{pmatrix} \quad (2.2.7)$$

**Proposition 2.3** [49] *Soit  $\tilde{\mathcal{E}} = (\tilde{\mathcal{E}}_{(i,j)}) \in C^\infty(I \times I, M_2(C))$  la solution fondamentale du système (2.2.7), pour tout  $j, k \in \mathbb{N}$ , pour chaque  $C_{j,k} > 0$ , telle que*

$$\|(h\partial_{\tilde{x}})^j (h\partial_{\tilde{x}})^k \tilde{\mathcal{E}}(\tilde{x}, \tilde{y})\| \leq C_{j,k} \exp\left(\frac{1}{\tilde{h}} |\operatorname{Im} \tilde{\varphi}(\tilde{x}) - \operatorname{Im} \tilde{\varphi}(\tilde{y})|\right),$$

où  $\tilde{\varphi}$  est la solution de l'équation eiconale associée à (2.2.6).

la solution  $\tilde{u}$  de (2.2.6) satisfait, pour  $\tilde{x}, \tilde{y} \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ ,

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}(\tilde{x}) \\ \tilde{h}D_{\tilde{x}}\tilde{u}(\tilde{x}) \end{pmatrix} = \tilde{\mathcal{E}}(\tilde{x}, \tilde{y}) \begin{pmatrix} \tilde{u}(\tilde{y}) \\ \tilde{h}D_{\tilde{x}}\tilde{u}(\tilde{y}) \end{pmatrix}.$$

Puisque  $i\tilde{\varphi}(\tilde{x})/h = i\varphi(x)/h$ , où  $\varphi$  est la solution de l'équation eiconale associée à (1.3.12), nous avons aussi, avec  $u(x) = \tilde{u}(\tilde{x})$ ,

$$\begin{pmatrix} u(x) \\ \frac{h}{\lambda^{m_0}} D_x u(x) \end{pmatrix} = \tilde{\mathcal{E}}(\tilde{x}, \tilde{y}) \begin{pmatrix} u(y) \\ \frac{h}{\lambda^{m_0}} D_y u(y) \end{pmatrix},$$

avec

$$\|\tilde{\mathcal{E}}(\tilde{x}, \tilde{y})\| \leq C \exp\left(\frac{1}{h} |\operatorname{Im} \varphi(x) - \operatorname{Im} \varphi(y)|\right).$$

En remplaçant  $\lambda$  par  $|x|$  on trouve

$$\begin{pmatrix} u(x) \\ h D u(x) \end{pmatrix} = \mathcal{E}(x, y) \begin{pmatrix} u(y) \\ h D u(y) \end{pmatrix},$$

où

$$\mathcal{E}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & |x|^{m_0/2} \end{pmatrix} \hat{\mathcal{E}}(x, y) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & |y|^{-m_0/2} \end{pmatrix},$$

Soit  $\tilde{\mathcal{E}} = (\tilde{\mathcal{E}}_{(i,j)}) \in C^\infty(I \times I, M_2(C))$  la solution fondamentale du système (2.2.7), pour  $h > 0$ , et  $u(x)$  est la solution de (2.2.6), nous avons

$$\begin{pmatrix} u(x) \\ \frac{h}{\lambda^{m_0}} D_x u(x) \end{pmatrix} = \tilde{\mathcal{E}}(\tilde{x}, \tilde{y}) \begin{pmatrix} u(y) \\ \frac{h}{\lambda^{m_0}} D_y u(y) \end{pmatrix},$$

avec

$$\|\tilde{\mathcal{E}}(\tilde{x}, \tilde{y})\| \leq C \exp\left(\frac{1}{h} |\operatorname{Im} \varphi(x) - \operatorname{Im} \varphi(y)|\right). \quad (2.2.8)$$

et  $\hat{\mathcal{E}}$  satisfait l'estimation (2.2.8) peut être avec une autre constante  $C > 0$ .

En générale  $\beta_0^0 + \delta_0 \leq x \leq y$ , nous écrivons

$$\mathcal{E}(x, y) = \mathcal{E}(x, x_1) \mathcal{E}(x_1, x_2) \dots \mathcal{E}(x_n, y),$$

où chaque des intervalles  $[x_j, x_{j+1}]$  est contenu dans  $I_\lambda$ , nous obtenons

$$\|\mathcal{E}(x, y)\| \leq C^{1+\mathcal{O}(\ln(\frac{y}{x}))} \exp\left(\frac{1}{h} |\operatorname{Im} \varphi(x) - \operatorname{Im} \varphi(y)| y^{-m_0/2}\right).$$

En particulier nous avons, pour tout  $\beta_0^0 + \delta_0 \leq x \leq y$ , et le fait que  $x \leq y$ ,  $\operatorname{Im} \varphi(y) \geq \operatorname{Im} \varphi(x)$

$$|\mathcal{E}_{(1,2)}(x, y)| = \frac{\mathcal{O}(1)}{h} \frac{y^{C-m_0/2}}{x^C} \exp\left(\frac{1}{h} \operatorname{Im}(\varphi(y) - \varphi(x))\right), \quad (2.2.9)$$

Nous considérons de nouveau la fonction  $u_{+,wkb}$ , et notons  $u_\lambda$  la solution unique de l'équation de Schrödinger (2.2.5) tel que

$$\begin{cases} u_\lambda(\lambda, E, \varepsilon, h) = u_{+,bkw}(\lambda, E, \varepsilon, h), \\ h D u_\lambda(\lambda, E, \varepsilon, h) = h D u_{+,bkw}(\lambda, E, \varepsilon, h). \end{cases}$$

Nous avons

$$P_\varepsilon(1_{[\beta_0^0 + \delta_0, \lambda]}(u_\lambda - u_{+,bkw})) = 1_{[\beta_0^0 + \delta_0, \lambda]},$$

**Proposition 2.5** [49] *Il existe  $C > 0$  arbitrairement grand dans (3.42), pour tout  $(N, k) \in N^* \times N$ , et pour  $x \in ]\beta_0^0 + \delta_0, \lambda]$ ,*

$$u_\lambda(x) - u_{+,bkw}(x) = -\frac{i}{h} \int_x^\lambda \mathcal{E}_{(1,2)}(x, y) r(y) dy.$$

et

$$u_\lambda^{(k)}(x) - u_{+,bkw}^{(k)}(x) = \mathcal{O}(h^N (1 + |x|)^{-N} e^{-\text{Im} \varphi(x)/h}), \quad (2.2.10)$$

et, pour  $\lambda_1 < \lambda_2 \in \mathbb{R}^+$  assez grand,

$$u_{\lambda_2}^{(k)}(x) - u_{\lambda_1}^{(k)}(x) = \mathcal{O}(h^N (1 + |x|)^{-N} \lambda_1^{-N} e^{-\text{Im} \varphi(x)/h}), \quad (2.2.11)$$

Ainsi, la famille  $(u_\lambda)$  converge vers des fonctions  $u_+$ , lesquelles sont des solutions exactes de (1.3.11), et (2.2.10) on alors :

$$u_+^{(k)}(x) - u_{+,bkw}^{(k)}(x) = \mathcal{O}(h^N (1 + |x|)^{-N} e^{-\text{Im} \varphi(x)/h})$$

## 2.1 Solutions BKW exacte de l'équation de Schrödinger

Par des arguments standard d'équations différentielles ordinaires on peut ensuite passer des solutions formelles aux solutions exactes pour arriver à :

**Proposition 2.6**  $\forall \delta_0 > 0, \exists \varepsilon_0 > 0$  telle que pour  $(E, \varepsilon) \in (E_0, \varepsilon_0) \times D(0, \varepsilon_0)$ , l'équation (1.3.11) ait une solution holomorphe en  $(E, \varepsilon)$  de la forme

$$u_+(z; h) = a(z; h) e^{i\varphi(z)/h} \text{ où } a(z; h) \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j h^j \text{ sur } ]\beta_0^0 + \delta_0, +\infty[ \quad (2.3.1)$$

Pour tout  $(N, \alpha) \in N^* \times N$ , il existe une constante  $C_{N,\alpha} > 0$  telle que

$$|\partial^\alpha (a(x; h) - \sum_{j=0}^{N-1} a_j(x) h^j)| \leq C_{N,\alpha} h^N (1 + |x|)^{-\frac{m_0}{4} - N(\frac{m_0}{2} + 1) - \alpha} \quad (2.3.2)$$

pour  $x \in ]\beta_0^0 + \delta_0, +\infty[$ . Ici  $a_0 = (\partial_x \varphi)^{-1/2}$  et  $a_k$  vérifie (2.3.1), De plus  $u_+$  appartient à  $L^2(]\beta_0^0 + \delta_0, +\infty[)$ .

## 2.2 Preuve du Proposition 2.6

Il reste seulement à prouver que la solution  $u_+$  appartient à  $L^2(]\beta_0^0 + \delta_0, +\infty[)$ . Les hypothèses (H1), (H2) implique qu'il existe  $C > 0$  tel que  $\text{Re}(V_\varepsilon(x) - E) > \frac{1}{C^2}$  pour tout  $x$  assez grand, ainsi nous avons pour  $x \in ]\beta_0^0, +\infty[$  assez grand,

$$\text{Re}(i\varphi_+(x)) = -\text{Re} \int_{\beta_0^0}^x (V_\varepsilon(t) - E)^{\frac{1}{2}} dt \leq -\frac{x}{C} + C. \quad (2.4.1)$$

D'autre part, l'estimation (2.3.2) pour  $N = 0$ ,  $k = 0$ , donne  $a(x, E, \varepsilon) = O((1 + |x|)^{-m_0/4})$ , Alors  $u_+ \in L^2([\beta_0^0 + \delta_0, +\infty[)$ .  $\square$

**Remarque 1.2** Il est clair qu'on a le même résultat pour  $u_- \in L^2(\mathbb{R}^-)$  qu'il n'y a pour n'importe quel  $\delta_0 > 0$ , une solution BKW dans  $] -\infty, \alpha_0^0 - \delta_0]$  de la forme

$$u_-(x, E, \varepsilon, h) = a(x, E, \varepsilon, h)e^{i\varphi_-(x, E, \varepsilon)/h}, \quad (2.4.2)$$

où la phase  $\varphi_-$  est défini par

$$i\varphi_-(x, E, \varepsilon) = \int_{\alpha_0^0(E, \varepsilon)}^x (V_\varepsilon(t) - E)^{\frac{1}{2}} dt \quad (2.4.3)$$

où la détermination de  $t \mapsto (V_\varepsilon(t) - E)^{\frac{1}{2}}$  est fixé de la manière suivante : pour  $x \in ] -\infty, \alpha_0^0 - \delta_0]$ , ( on choisit la branche opposé de la racine carrée  $(V_\varepsilon(x) - E)^{\frac{1}{2}}$ )

$$\operatorname{Re}(i\varphi_-(x, E, \varepsilon)) < 0. \quad (2.4.4)$$

dans le même sens que dans (2.3.2), on a:

$$a(x, E, \varepsilon, h) \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x, E, \varepsilon)h^j, \quad (2.4.5)$$

où  $u_{wkb} = e^{i\varphi_-/h} \sum_{j=0}^{\infty} a_j h^j$  est la solution BKW analytique en  $(E, \varepsilon) \in D(E_0, \varepsilon_0) \times D(0, \varepsilon_0)$ .

# Chapitre 3

## Analyse BKW près d'un point tournant simple

### 3.1 Cas d'un seul point tournant

Dans ce chapitre on suit la présentation dans [49] de près. Soit  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un ouvert simplement connexe,  $V \in \text{Hol}(\Omega)$ .

Soit  $z_0 \in \Omega$  un point tournant simple pour  $V(z) - E$  si

$$V(z_0) - E = 0, \quad V'(z_0) \neq 0. \quad (3.1.1)$$

Soit donc  $z_0$  un point tournant simple. Quitte à diminuer  $\Omega$  autour de  $z_0$  on peut supposer que  $z_0$  est le seul point tournant de  $V(z) - E$  à savoir que  $V(z) - E \neq 0$  pour tout  $z \in \Omega \setminus \{z_0\}$ .

Dans  $z \in \Omega \setminus \{z_0\}$  on peut résoudre localement l'équation eiconale

$$(\varphi'(z))^2 = V(z) - E$$

c'est à dire

$$(\varphi'(z)) = (V(z) - E)^{\frac{1}{2}}$$

mais comme  $\Omega \setminus \{z_0\}$  n'est pas simplement connexe il n'y a pas de choix holomorphe (globale) de branche de la racine carrée

Si on commence en un point  $z_1$  on peut prendre

$$\varphi(z) = \int_{z_1}^z (V(t) - E)^{\frac{1}{2}} dt$$

en intégrant le long de chemin qui relie  $z_1$  à  $z$ . Sur la figure 3.1 on indique deux chemins différents qui donne des valeurs différentes de  $\varphi(z)$

Une analyse plus détaillée montre que la solution générale d'équation eiconale est de la forme

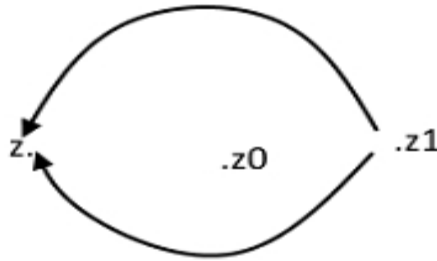


FIG. 3.1 – Chemin de l'intégrale de la branche de la racine carrée

$$\varphi(z) = \frac{2}{3}F(z)z^{\frac{3}{2}} + cst \quad (3.1.2)$$

si on suppose, pour simplifier les notations que  $z_0 = 0$ . Ici  $F(z)$  est une fonction holomorphe dans  $\Omega$  qui vérifie

$$F(0) = V(0)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.1.3)$$

On choisit la constante dans (3.1.2) égale à 0.

**Définition 3.1** Une courbe  $\gamma$  de classe  $C^\infty$  dans  $\Omega \setminus \{0\}$  est appelée ligne de Stokes si

$$\operatorname{Re} \varphi(z)|_\Omega = cst.$$

et une ligne anti Stokes si

$$\operatorname{Im} \varphi(z)|_\Omega = cst.$$

**Remarque 3.1** la définition 3.1 ne dépend pas du choix de la branche de la racine carrée dans (3.1.2). A partir de (3.1.2) on peut montrer qu'il y'a trois lignes de Stokes  $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_{-1}$  partant de 0.

On adopte la convention que  $0 \in \gamma_j$ . Les trois lignes de Stokes délimitent trois ouverts  $\sum_0, \sum_1, \sum_2$  comme sur la Figure 3.2

Pour chaque  $j$  on choisit la branche  $\varphi = \varphi_j$  de (3.1.2) qui vérifie  $\operatorname{Re} \varphi_j < 0$  dans  $\sum_j$ ,  $\varphi_j$  se prolonge comme solution de l'équation eiconale à  $\Omega \setminus \gamma_j$  et on a  $\operatorname{Re} \varphi_j > 0$  dans  $\sum_k$ , pour  $k \neq j$ .

Remarquons que  $\varphi_0$  et  $\varphi_1$  sont bien définis dans  $\sum_0 \cup \sum_1 \cup \gamma_2$  et vérifie  $\varphi_0 + \varphi_1 = 0$ .

Plus généralement  $\varphi_k + \varphi_{k+1} = 0$  dans  $\sum_k \cup \sum_{k+1} \cup \gamma_{k-1}$  avec la convention que  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  (c'est à dire  $\gamma_{-1} = \gamma_2$ ).

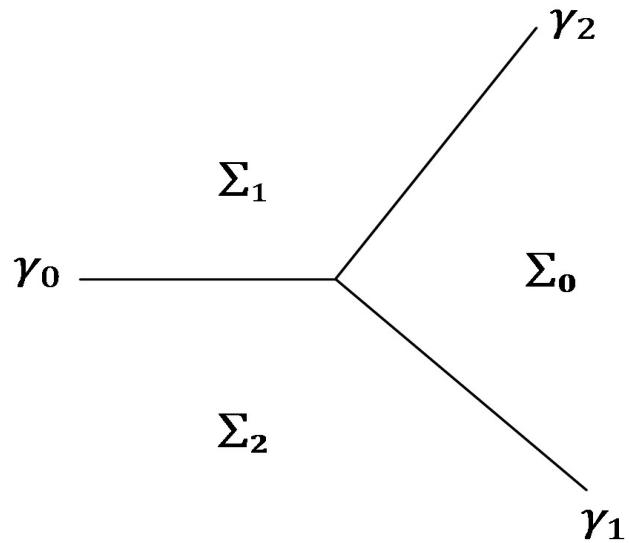


FIG. 3.2 – Lignes de Stokes et Secteurs de Stokes près d'un seul point tournant

D'après la méthode BKW exacte pour l'équation (1.3.11) admet 3 solutions exactes dans  $\Omega$ ,  $u_0, u_1, u_2$  tel que dans  $\Omega \setminus \gamma_j$  on ait :

$$\begin{cases} u_j(z; h) = a_j(z; h)e^{\varphi_j(z)/h} \\ a_j(z; h) \sim a_{j,0}(z) + ha_{j,1}(z) + \dots \end{cases} \quad \text{dans } \text{Hol}(\Omega \setminus \gamma_j). \quad (3.1.4)$$

où  $a_{j,0}(z) = \frac{1}{(\varphi'_j(x))^{\frac{1}{2}}}$  et on peut choisir librement la branche holomorphe dans  $\Omega \setminus \gamma_j$  de la racine carrée.

Pour chaque  $j$  on voit que  $u_j, u_{j+1}$  sont linéairement indépendants, donc  $u_j, u_{j+1}$  forment une base dans

$$\mathcal{N}(P - E) = \{u \in \text{Hol}(\Omega) : (P - E)u = 0\}, \quad (3.1.5)$$

où

$$P = -h^2 \left( \frac{d}{dx} \right)^2 + V(x).$$

$$\mathcal{W}(u, v) = hv\partial_x u - hu\partial_x v.$$

est constant. On sait aussi que  $\mathcal{W}(u, v) = 0$  si et seulement si  $u$  et  $v$  sont linéairement dépendants.

En appliquant les asymptotiques de  $u_j$  et  $u_{j+1}$  dans  $(\sum_0 \cup \sum_1)$  nous voyons que  $\mathcal{W}(u_j, u_{j+1})$  a un développement asymptotique en puissances de  $h$

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}(u_j, u_{j+1}) &= hu_j \partial_x u_{j+1} - hu_{j+1} \partial_x u_j \\
&= h[(a^j e^{i\varphi_j(x)/h} (a^{j+1} i \partial \varphi_{j+1}(x) / h e^{i\varphi_{j+1}(x)/h}) \\
&\quad - (a^{j+1} e^{i\varphi_{j+1}(x)/h} (a^j i \partial \varphi_j(x) / h e^{i\varphi_j(x)/h}))] \\
&= h[a^j e^{i\varphi_j(x)/h} (a^{j+1} (-i \partial \varphi_j(x)) / h e^{-i\varphi_j(x)/h}) \\
&\quad - (a^{j+1} e^{-i\varphi_j(x)/h} (a^j (i \partial \varphi_j(x)) / h e^{i\varphi_j(x)/h})] \\
&= h[-2ia^j a^{j+1} \partial \varphi_j(x) / h] \\
&= -2i \frac{1}{(\partial \varphi_j(x))^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{(-\partial \varphi_j(x))^{\frac{1}{2}}} \partial \varphi_j(x) \\
&= \pm 2i + \mathcal{O}(h)
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}(u_0, u_1) &= -2ia_{0,0} a_{1,0} \partial \varphi_0(x) / h + \mathcal{O}(h) \\
&= -2i \frac{\partial \varphi_j(x)}{\sqrt{\partial \varphi_j(x)^2}} + \mathcal{O}(h) \\
&= 2i + \mathcal{O}(h)
\end{aligned}$$

de la même manière on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}(u_1, u_2) &= 2i + \mathcal{O}(h) \\
\mathcal{W}(u_2, u_0) &= 2i + \mathcal{O}(h)
\end{aligned}$$

Comme  $u_1$  et  $u_{-1}$  forment une base dans  $\mathcal{N}(P - E)$ , alors ils existent  $c_1$  et  $c_{-1}$  tels que

$$u_0 = c_{-1} u_{-1} + c_1 u_1 \quad (3.1.6)$$

Pour déterminer  $c_{-1}$ ,  $c_1$ , on calcule le Wronskien  $\mathcal{W}(u_0, u_k)$ ,  $k = \pm 1$ ;

$$\mathcal{W}(u_0, u_1) = c_{-1} \mathcal{W}(u_{-1}, u_1) + c_1 \mathcal{W}(u_1, u_1),$$

alors

$$c_{-1} = \frac{\mathcal{W}(u_0, u_1)}{\mathcal{W}(u_{-1}, u_1)} = \pm 1 + \mathcal{O}(h) \quad (3.1.7)$$

De même

$$c_1 = \frac{\mathcal{W}(u_0, u_{-1})}{\mathcal{W}(u_1, u_{-1})} = \pm 1 + \mathcal{O}(h) \quad (3.1.8)$$

En générale

$$c_j = 1 + \mathcal{O}(h) \quad (3.1.9)$$

**Remarque 3.2** Plus tard on fixe le choix des branches de la racine carrée  $(\varphi'_j(x))^{\frac{1}{2}}$  et déterminer les signes .

## 3.2 Rappel des lignes de Stokes

Dans ce qui suit, nous présentons quelques définitions et résultats fondamentaux qui seront utilisés dans tout ce chapitre.

On s'intéresse aux solutions de (1.3.2) qui dans certaines régions prennent la forme  $a(z; h)e^{\varphi(z)/h}$  (sans facteur  $i$  dans l'exposant pour simplifier les notations).

Considérons l'équation eiconale,

$$\varphi'(z) = V(z)^{\frac{1}{2}} \quad (3.2.1)$$

dans un voisinage de 0. (On diminuera  $\Omega$  autour de  $z = 0$  chaque fois que cela nous arrange.)

Il est clair que  $\varphi(z)$  sera multiforme en général et pour mieux comprendre la structure de cette singularité on passe au recouvrement double de  $\Omega \setminus \{0\}$ .

En posant  $z = w^2$ , alors

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2w} \frac{\partial}{\partial w}, \quad (3.2.2)$$

et si on pose  $\tilde{V}(w) = V(z) = F(z)z = F(w^2)w^2$ ,  $\varphi(z) = \tilde{\varphi}(w)$ , où  $F(0) \neq 0$ , l'équation eiconale devient

$$\partial_w \tilde{\varphi} = F(w^2)^{\frac{1}{2}} 2w^2, \quad (3.2.3)$$

où le membre droit est une fonction holomorphe paire. Si on exige aussi que  $\varphi(0) = \tilde{\varphi}(0) = 0$ , on voit que  $\tilde{\varphi}(w)$  est une fonction holomorphe impaire de la forme

$$\tilde{\varphi}(w) = \frac{2}{3} \tilde{F}(w^2)w^3, \quad \text{où } \tilde{F}(0) = F(0)^{\frac{1}{2}} = V'(0)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.2.4)$$

Dans les coordonnées  $z$  on obtient une fonction double,

$$\varphi(z) = \frac{2}{3} \tilde{F}(z)z^{\frac{3}{2}}. \quad (3.2.5)$$

**Définition 3.2** On appelle ligne de Stokes une courbe  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$  de classe  $C^1$ , telle que

$$\operatorname{Im} \int_s^t (-V(\gamma(\tau)))^{\frac{1}{2}} d\gamma(\tau) = 0 \quad (3.2.6)$$

pour tout  $s, t \in [a, b]$ . Autrement dit,  $\operatorname{Im} \varphi$  doit être constant sur toute ligne de Stokes.

Notons

$$\int_s^t (-V(\sigma(\tau)))^{\frac{1}{2}} \sigma'(\tau) d\tau = \operatorname{Im}(\varphi(\sigma(t))) - \operatorname{Im}(\varphi(\sigma(s))),$$

**Proposition 3.3** Soit  $U$  un ouvert simplement connexe, telle que  $V(z) \neq 0$  pour tous  $z \in U$ . Soit  $\varphi$  la solution de l'équation eiconale dans  $U$ , et  $\gamma : ]a, b[ \rightarrow U$  une courbe de classe  $C^1$  telle que

$$\forall t \in ]a, b[, \frac{d}{dt}(-\operatorname{Im} \varphi(\gamma(t))) > 0, \quad (3.2.7)$$

Il existe un voisinage  $\Omega \subset U$  de  $\gamma$  telle que, pour toutes solution BKW  $u_{wkb}(z, h) = e^{i\varphi(z)/h} \sum_{j \geq 0} a_j(z)h^j$ , il existe une solution  $u$  de l'équation de Schrödinger (1.3.2) dans  $\Omega$  telle que

$$u(z, h) = e^{\varphi(z)/h} a(z, h), \quad (3.2.8)$$

où  $a \in \operatorname{Hol}(\Omega)$

$$a(z, h) \sim \sum_{k \geq 0} a_j(z)h^j \text{ dans } (\Omega).$$

Cherchons maintenant des lignes de Stokes et anti-Stokes qui passent par 0. (Comme on a supprimé le facteur  $i$  dans l'exposant dans les représentations BKW,  $\operatorname{Re} \varphi = \operatorname{Const.}$  sur chaque ligne de Stokes et par définition  $\operatorname{Im} \varphi = \operatorname{Const.}$  sur les lignes anti-Stokes.) Sur de telles courbes nous avons  $\operatorname{Re} \varphi = 0$  ou  $\operatorname{Im} \varphi = 0$ , c'est à dire  $\operatorname{Im} \varphi^2 = 0 : \operatorname{Im} \tilde{F}(z)^2 z^3 = 0$ .

Autrement dit,  $\tilde{F}(z)^2 z^3 = t^3$  pour un  $t \in \operatorname{vois}(0, \mathbb{R})$  et en prenant la racine cubique nous obtenons trois courbes  $\gamma_k$

$$\tilde{F}(z)^{\frac{2}{3}} z = e^{2\pi i k/3} t, \quad k \in \{0, 1, 2\} \simeq \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}. \quad (3.2.9)$$

On obtient la Figure 3.3 suivante où on a pris  $V'(0) > 0$  pour fixer les idées :

Chaque courbe  $\gamma_k \setminus \{0\}$  se décompose en une ligne de Stokes  $\gamma_k^-$  et une ligne d'anti-Stokes  $\gamma_k^+$ . Les trois lignes de Stokes et le point tournant délimitent trois secteurs de Stokes fermés  $\Sigma_k$ . Dans la Figure 3.3, nous avons aussi tracé quelques lignes de Stokes à l'intérieur de chaque secteur.

Soit  $\varphi_k$  la branche de  $\varphi$  dans  $\Omega \setminus \gamma_k^-$  telle que  $\operatorname{Re} \varphi_k < 0$  dans  $\operatorname{int}(\Sigma_k)$ ,  $\varphi_k(0) = 0$ .

Remarquons que  $\varphi_{k+1}$  et  $\varphi_k$  sont tous les deux bien définis dans  $\Sigma_k \cup \Sigma_{k+1}$  et y vérifient  $\varphi_{k+1} = -\varphi_k$ .

D'après le principe fondamental de la méthode BKW complexe il existe des solutions exactes  $u = u_j$ ,  $j \in \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$  de l'équation  $-(h\partial)^2 + V)u = 0$  dans  $\Omega$  telles que

$$\begin{cases} u_j(z; h) = a_j(z; h)e^{\varphi_j(z)/h} \\ a_j(z; h) \sim a_{j,0}(z) + ha_{j,1}(z) + \dots \end{cases} \text{ dans } \operatorname{int}(\Sigma_j). \quad (3.2.10)$$

Cette description asymptotique s'étend au complement d'un voisinage arbitrairement petit de  $\gamma_j^- \cup \{0\}$  (qui peut être atteint de  $\Sigma_j$  par des chemins qui ne sont jamais tangents aux lignes de Stokes).

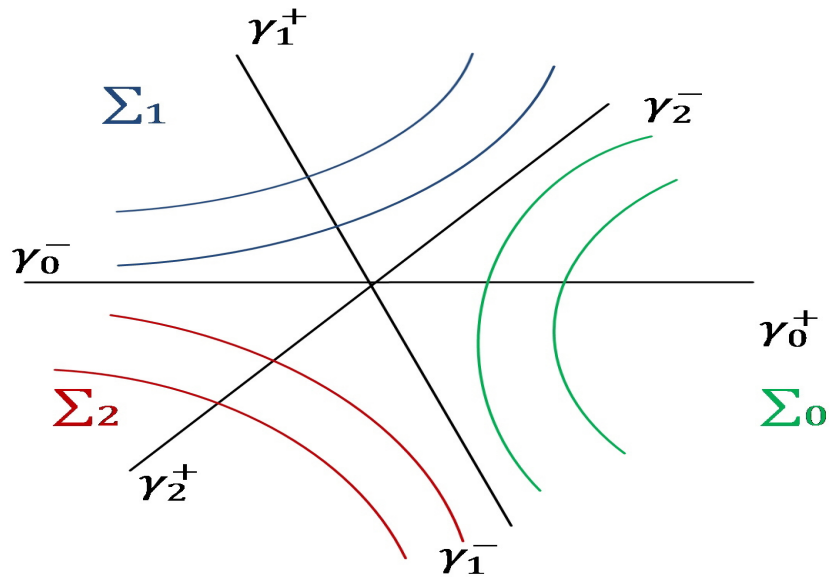


FIG. 3.3 – Lignes de Stokes à l'intérieur des secteurs de Stokes près d'un point tournant.

On rappelle aussi que  $a_{j,0}$  est unique à un facteur constant près et qu'on peut choisir

$$a_{j,0}(z) = (\varphi'_j(z))^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.2.11)$$

où pour l'instant on ne fixe pas la branche de la racine carrée.

### 3.3 Le développement asymptotique de Wronskien

Nous intéressons ici de relier entre les solutions BKW exacte qui sont à l'intérieure de secteur Stokes  $(\cup \Sigma_j), j = 0,1,2$ .

Rappelons que si  $u, v$  sont des solutions de notre équation de Schrödinger homogène, alors le Wronskien

$$W(u, v) = (h\partial u)v - uh\partial v \quad (3.3.1)$$

est constant. Appliquant l'asymptotique de  $u_0$  et  $u_1$  en un point de  $\text{int}(\Sigma_0 \cup \Sigma_1)$ , nous voyons que  $W(u_0, u_1)$  a un développement asymptotique en puissances de  $h$  :

$$\begin{aligned}
W(u_0, u_1) &= 2a_{0,0}a_{1,0}\partial\varphi_0 + \mathcal{O}(h) \\
&= \frac{2\varphi'_0}{\sqrt{\varphi'_0\varphi'_1}} + \mathcal{O}(h) \\
&= \frac{2\varphi'_0}{\sqrt{-(\varphi'_0)^2}} + \mathcal{O}(h) \\
&= \pm 2i + \mathcal{O}(h).
\end{aligned} \tag{3.3.2}$$

De la même façon

$$\begin{aligned}
W(u_1, u_2) &= \pm 2i + \mathcal{O}(h) \\
W(u_2, u_0) &= \pm 2i + \mathcal{O}(h).
\end{aligned} \tag{3.3.3}$$

On peut déterminer les signes de la façon suivante : Fixons une branche de  $(\varphi'_j)^{1/2}$  comme ci-dessus pour  $j = 0, 1, 2 \bmod 3\mathbf{Z}$ . Alors pour deux secteurs de Stokes différents,  $j \neq k$  nous avons dans l'intérieur de  $\Sigma_j \cup \Sigma_k$  que

$$(\varphi'_j)^{1/2} = i^{\nu_{j,k}}(\varphi'_k)^{1/2}, \tag{3.3.4}$$

où  $\nu_{j,k} \in \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$  est impair et  $\nu_{j,k} = -\nu_{k,j}$ .

En commençant dans  $\Sigma_0$  on fait un tour autour de 0 dans le sens positif et on note que

$$\begin{aligned}
(\varphi'_1)^{1/2} &= i^{\nu_{1,0}}(\varphi'_0)^{1/2} \\
(\varphi'_2)^{1/2} &= i^{\nu_{2,1}}(\varphi'_1)^{1/2} \\
(\varphi'_0)^{1/2} &= i^{\nu_{0,2}}(\varphi'_2)^{1/2}.
\end{aligned} \tag{3.3.5}$$

Cela veut dire que si on suit une branche continue de  $(\varphi'_0)^{1/2}$  autour de 0 dans le sens positif, alors après un tour, on obtient la branche

$$i^{-(\nu_{0,2}+\nu_{2,1}+\nu_{1,0})}(\varphi'_0)^{1/2}.$$

Mais  $\varphi'_0 = V^{1/4}$  pour une branche convenable de la racine quatrième et si on suit cette fonction autour de 0 une fois, on trouve  $iV^{1/4}$ .

Ceci donne la condition de co-cycle,

$$\nu_{0,2} + \nu_{2,1} + \nu_{1,0} \equiv -1 \bmod 3\mathbf{Z}. \tag{3.3.6}$$

Nous pouvons maintenant préciser les signes dans les calculs des Wronskiens ci-dessus :

$$W(u_j, u_k) = \frac{-2\varphi'_k}{\sqrt{\varphi'_j}\sqrt{\varphi'_k}} + \mathcal{O}(h) = \frac{-2\varphi'_k}{i^{\nu_{j,k}}\sqrt{\varphi'_k}} + \mathcal{O}(h) = 2i^{\nu_{j,k}} + \mathcal{O}(h). \tag{3.3.7}$$

### 3.4 Détermination du coefficients $\alpha_j$

L'espace de solutions est de dimension 2, donc nous avons une relation

$$\alpha_{-1}u_{-1} + \alpha_0u_0 + \alpha_1u_1 = 0, \quad (3.4.1)$$

où le vecteur  $(\alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_1)^t \in \mathbf{C}^3 \setminus \{0\}$  est bien défini à un facteur scalaire près. Appliquant  $W(u_j, \cdot)$  à cette relation, on obtient

$$(W(u_j, u_k))_{j,k} \begin{pmatrix} \alpha_{-1} \\ \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = 0, \quad (3.4.2)$$

ou plus explicitement,

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{-1} \\ \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = 0. \quad (3.4.3)$$

Nous pouvons prendre

$$\begin{pmatrix} \alpha_{-1} \\ \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ -b \\ a \end{pmatrix}, \quad (3.4.4)$$

donc à un facteur commun près, nous avons

$$\alpha_j = \pm i + \mathcal{O}(h).$$

(3.4.4) permet de préciser les valeurs de  $a, b, c$  et de  $\alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_1$  :

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2}W(u_{-1}, u_0) = i^{\nu-1,0} + \mathcal{O}(h) \\ b &= \frac{1}{2}W(u_{-1}, u_1) = i^{\nu-1,1} + \mathcal{O}(h) \\ c &= \frac{1}{2}W(u_0, u_1) = i^{\nu_0,1} + \mathcal{O}(h), \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

(après l'insertion d'un facteur commun 1/2) ce qui donne

$$\begin{pmatrix} \alpha_{-1} \\ \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i^{\nu_0,1} \\ -i^{\nu-1,1} \\ i^{\nu-1,0} \end{pmatrix} + \mathcal{O}(h) = \begin{pmatrix} i^{\nu_0,1} \\ i^{\nu_1,-1} \\ i^{\nu-1,0} \end{pmatrix} + \mathcal{O}(h). \quad (3.4.6)$$

**Remarque 3.4** Parfois il est plus naturel de changer les notations, en écrivant  $i\varphi_j$  dans (3.2.10) à la place de  $\varphi_j$  de telle sorte  $u_j(z; h) = a_j(z; h)e^{i\varphi_j(z)/h}$  avec  $\text{Im } \varphi_j \geq 0$  dans  $\Sigma_j$ . (3.2.11) devient alors  $a_{j,0}(z) = (i\varphi'_j)^{-1/2} = V(z)^{-1/4}$  et dans (3.3.4), (3.3.5) on doit remplacer  $\varphi'_j$  par  $i\varphi'_j$ .

### 3.4.1 Analyse BKW loin de point tournant

Dans cette section nous présentons une méthode de calculs des Wronskiens loin de point tournant. On choisit la branche de la racine carrée dans chaque secteur  $(\Omega/\gamma_j)$ .

On pose  $V(x) = z$  et

$$\varphi' = iz^{1/2}$$

On considère Dans le secteur  $\sum_0$  la solution exacte de l'équation de Schrödinger (1.3.2) est de la forme

$$u_0(z, h) = a(z, h)e^{i\varphi(z, h)/h} \quad (3.5.1)$$

où

$$a(z, h) = \frac{1}{z^{1/4}} e^{-\frac{2}{3}z^{3/2}} + \mathcal{O}(h) \quad (3.5.2)$$

et

$$\varphi(z) = \frac{2}{3}iz^{3/2} + \mathcal{O}(h) \quad (3.5.3)$$

Dans le secteur  $\sum_1(\Omega/e^{-\frac{2}{3}z^{3/2}})$  la solution exacte est

$$u_1(z, h) = u_0(ze^{-i\frac{2\pi}{3}}) \quad (3.5.4)$$

Dans le secteur  $\sum_{-1}(\Omega/e^{\frac{2}{3}z^{3/2}})$  la solution exacte est

$$u_{-1}(z, h) = u_0(ze^{i\frac{2\pi}{3}}) \quad (3.5.5)$$

On calcule les Wronskiens entre les solutions  $u_0, u_1, u_{-1}$  nous avons :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(u_0, u_1) &= hu_0\partial_x u_1 - hu_1\partial_x u_0 \quad (3.5.6) \\ &= [(a_0 e^{i\varphi_0(x)/h} (ia_1 \varphi_1'(x) e^{i\varphi_1(x)/h}) - (a_1 e^{i\varphi_1(x)/h} (ia_0 \varphi_0'(x) e^{i\varphi_0(x)/h})) \\ &= ia_0 a_1 (\varphi_1'(x) - \varphi_0'(x)) \\ &= -2ia_0 a_1 \varphi_0'(x) + \mathcal{O}(h) \\ &= -2i \frac{1}{z^{1/4}} \frac{1}{(e^{-\frac{2\pi i}{3}} z)^{1/4}} iz^{\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(h) \\ &= 2e^{\frac{\pi i}{6}} + \mathcal{O}(h) \end{aligned}$$

Par exemple quand  $\arg t \in ]\frac{\pi}{3}, \pi[$ , on a  $(e^{-i\frac{2\pi}{3}} z)^{\frac{1}{4}} = e^{-i\frac{\pi}{6}} z^{\frac{1}{4}}$ , de plus

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(u_0, u_{-1}) &= hu_0\partial_x u_{-1} - hu_{-1}\partial_x u_0 \quad (3.5.7) \\ &= -2a_0 a_{-1} \varphi_0'(x) + \mathcal{O}(h) \\ &= -2i \frac{1}{z^{1/4}} \frac{1}{(e^{\frac{2\pi i}{3}} z)^{1/4}} iz^{\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(h) \\ &= -2e^{-\frac{\pi i}{6}} + \mathcal{O}(h). \end{aligned}$$

Pour  $\arg t \in ]\frac{\pi}{3}, \pi[$  nous avons  $(e^{i\frac{2\pi}{3}} z)^{\frac{1}{4}} = e^{i\frac{\pi}{6}} z^{\frac{1}{4}}$ . On sait que  $u_0, u_1, u_{-1}$  sont colinéaire

$$u_0 = c_{0,1}u_1 + c_{0,-1}u_{-1} \quad (3.5.8)$$

Alors

$$\mathcal{W}(u_0, u_1) = c_{0,1}\mathcal{W}(u_1, u_1) + c_{0,-1}\mathcal{W}(u_{-1}, u_1), \quad (3.5.9)$$

et comme

$$\mathcal{W}(u_1, u_1) = 0$$

On déduit que

$$\mathcal{W}(u_0, u_1) = c_{0,-1}\mathcal{W}(u_{-1}, u_1) \quad (3.5.10)$$

D'après (3.5.7), (3.5.9) on obtient

$$\mathcal{W}(u_{-1}, u_1) = -2Ce^{\frac{\pi}{6}} + \mathcal{O}(h) \quad (3.5.11)$$

Pour  $\arg(e^{i\frac{2\pi}{3}}z) \in ]\pi, \frac{5\pi}{3}[ \subset ]-\pi, \pi[ \subset ]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$ , on a  $\frac{\pi}{6} - k\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\arg z$  pour  $k = 0$ , on a  $\frac{\pi}{6} + \frac{1}{4}\arg z \in ]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}[ \subset ]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$  et pour  $k = -1$ , nous obtenons  $\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\arg z \in ]-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{12}[ \subset ]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$   
alors  $(e^{i\frac{2\pi}{3}}z)^{\frac{1}{4}} = e^{-i\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi}{6}}z^{\frac{1}{4}}$  et  $(e^{-i\frac{2\pi}{3}}z)^{\frac{1}{4}} = e^{i\frac{\pi}{6}}z^{\frac{1}{4}}$ .

En effet :

$$\begin{aligned} W(u_1, u_{-1}) &= ia_1a_{-1}(\varphi_1'(x) - \varphi_{-1}'(x)) \quad (3.5.12) \\ &= a_1a_{-1}\varphi_1'(x) + \mathcal{O}(h) \\ &= \frac{1}{(e^{-\frac{2\pi i}{3}}z)^{\frac{1}{4}}(e^{\frac{2\pi i}{3}}z)^{\frac{1}{4}}} 2i \left[ i \left( \frac{2}{3} e^{-\frac{2\pi i}{3}} z \right)^{\frac{3}{2}} \right]' + \mathcal{O}(h) \\ &= \frac{1}{e^{-\frac{\pi i}{6}}z^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{\pi i}{2} + i\frac{\pi}{6}}z^{\frac{1}{4}}} 2i \left[ i \left( -\frac{2}{3} \right) \left( -\frac{2\pi i}{3} \right) (ze^{-\frac{2\pi i}{3}})^{\frac{1}{2}} \right] + \mathcal{O}(h) \\ &= -2e^{\frac{\pi i}{2}} \frac{2\pi}{3} i e^{-\frac{\pi i}{3}} + \mathcal{O}(h) \\ &= -\frac{4\pi}{3} i e^{\frac{\pi i}{6}} + \mathcal{O}(h) \\ &= -2 \left( \frac{2\pi}{3} i \right) e^{\frac{\pi i}{6}} + \mathcal{O}(h) \\ &= -2Ce^{\frac{\pi i}{6}} + \mathcal{O}(h) \end{aligned}$$

# Chapitre 4

## Solutions BKW près du puits

On s'intéresse à l'étude de choix de la phase et du symbole principal on détermine ensuite la solution BKW exacte dans chaque deux Secteur de Stokes ( $\Sigma_j$  et  $S_j$ ) et avec un calcul bien précis on obtient l'action entre chaque deux solutions au voisinage du point tournant simple. L'objectif principal de tout ce travail est de déterminer le signe de la branche de la racine carrée près du puits de potentiel.

On considère l'équation au valeur propre  $P_\varepsilon u = Eu$ , telle que

$$-h^2 u'' + (V_\varepsilon(x) - E)u = 0, \quad (4.1.1)$$

où  $V_\varepsilon = V_0 + i\varepsilon W$  satisfait les hypothèses de (H1) à (H6).

On définit la solution BKW formelle de l'équation de Schrödinger (4.1.1) près du puits de potentiel.

**Proposition 4.1** *Sous le hypothèses (H1) à (H6), Il existe  $(E, \varepsilon) \in D(E_0, \varepsilon_0) \times D(0, \varepsilon_0)$ , l'équation*

$$V_\varepsilon(x) = E$$

*possède deux solutions dans  $U$ , qui sont les points tournants  $\alpha_0(E_0, 0) = \alpha_0$ ,  $\beta_0(E_0, 0) = \beta_0$  de domaine holomorphe  $U$  de  $V_\varepsilon$ .*

Nous avons la Figure 4.1 qui désigne les lignes de Stokes d'un puits de potentiel. Commençons a chaque point tournant, quand  $E \neq E_0$  et  $\varepsilon \neq 0$ .

la détermination est donnée par

$$x \mapsto (V_\varepsilon(x) - E)^{\frac{1}{2}} \text{ dans } \text{Hol}(U). \quad (4.1.2)$$

Pour  $\varepsilon = 0$ ,  $E = E_0$  et  $x \in ]-\infty, \alpha_0[$  (resp  $x \in ]\beta_0, +\infty[$ ) la détermination  $(V_\varepsilon(x) - E)^{\frac{1}{2}}$  est réelle positive.

Notons  $\Sigma_0, \Sigma_1$  et  $\Sigma_{-1}$  trois secteurs de Stokes au voisinage  $\alpha_0$ , et  $S_0, S_1$  et  $S_{-1}$  au voisinage  $\beta_0$ .

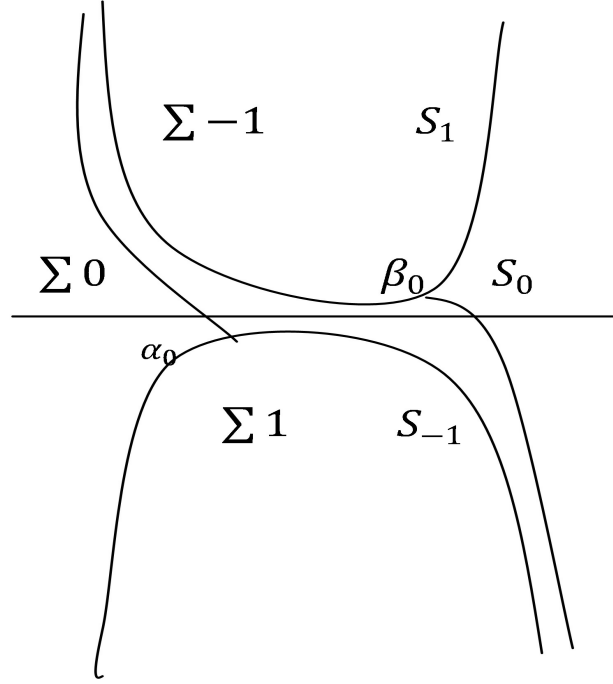


FIG. 4.1 – Lignes de Stokes pour un seul puits.

Pour chaque secteur de Stokes  $\Sigma_j$  (resp.  $S_j$ ), nous choisissons les solutions  $u_j$  (resp.  $v_j$ ) de l'équation (4.1.1) telle que

$$\begin{aligned} u_j(z, E, \varepsilon, h) &= a_{j,\alpha_0}(z, E, \varepsilon, h) e^{i\varphi_{j,\alpha_0}(z, E, \varepsilon)/h} \text{ dans } \Sigma_j \\ v_j(z, E, \varepsilon, h) &= a_{j,\beta_0}(z, E, \varepsilon, h) e^{i\varphi_{j,\beta_0}(z, E, \varepsilon)/h} \text{ dans } S_j. \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

où  $\varphi_{j,\alpha_0}$  (resp  $\varphi_{j,\beta_0}$ ) est la solution de l'équation eiconale

$$(i\varphi'(x))^2 = V_\varepsilon(x) - E, \quad (4.1.4)$$

Pour  $(E, \varepsilon) \in D(E_0, \varepsilon) \times D(0, \varepsilon_0)$ , telle que

$$\begin{aligned} \forall z \in \Sigma_j, (i\varphi_{j,\alpha_0}(z, E, \varepsilon)) &< 0, \\ \forall z \in S_j, (i\varphi_{j,\beta_0}(z, E, \varepsilon)) &< 0. \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

Les amplitudes  $a_{j,\alpha_0}$  et  $a_{j,\beta_0}$  dans (4.1.3) ont un développement asymptotique dans  $\text{Hol}(\Sigma_j)$  et  $\text{Hol}(S_j)$  respectivement, les fonctions de phases  $\varphi_{j,\alpha_0}$  et  $\varphi_{j+1,\alpha_0}$  sont bien défini dans  $\Sigma_k \cup \Sigma_{k+1}$ , et  $\varphi_{j,\beta_0}$ ,  $\varphi_{j+1,\beta_0}$  sont bien défini dans  $S_k \cup S_{k+1}$ , où

$$\varphi_{k,\alpha_0} = -\varphi_{k+1,\alpha_0}, \quad \varphi_{k,\beta_0} = -\varphi_{k+1,\beta_0}. \quad (4.1.6)$$

Pour tout  $(E, \varepsilon) \in D(E_0, \varepsilon_0) \times D(0, \varepsilon_0)$  les fonctions  $u_j$  (resp.  $v_j$ ) sont holomorphe en  $(E, \varepsilon)$ .

Le développement asymptotique des amplitudes  $a_{j,\alpha_0}$  et  $a_{j,\beta_0}$  se prolonge à  $\Omega_j^{\alpha_0} \times D(E_0, \varepsilon_0) \times D(0, \varepsilon_0)$  et  $\mathcal{O}_k^{\beta_0} \times D(E_0, \varepsilon_0) \times D(0, \varepsilon_0)$  respectivement, où  $\Omega_j^{\alpha_0}$  (resp.  $\mathcal{O}_k^{\beta_0}$ ) sont des petits voisinage arbitraire de  $\gamma_{\alpha_0,j}^-$  (resp.  $\gamma_{\beta_0,j}^-$ ) dans  $U$  (voir Figure 3.3).

## 4.1 Choix du signe de la branche près de $a_0$

Nous fixons un choix pour les symboles principaux  $a_{j,\alpha_0}$  et  $a_{j,\beta_0}$  de ces six solutions  $u_j$  et  $v_j$ ,  $j \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ , en premier temps nous étudions près de la solution  $u_j$

**Proposition 4.2** *Sous les hypothèses (4.1.4) et (4.1.5), Il existe  $(E, \varepsilon) \in D(E_0, \varepsilon_0) \times D(0, \varepsilon_0)$ , et pour  $x \in ]-\infty, \alpha_0^0 - \delta_0[$  nous avons*

$$\begin{cases} i\varphi_{0,\alpha_0}(x, E, \varepsilon) = \int_{\alpha_0}^x (V_\varepsilon(t) - E)^{\frac{1}{2}} dt, \\ i\varphi_{-1,\alpha_0}(x, E, \varepsilon) = -\int_{\alpha_0}^x (V_\varepsilon(t) - E)^{\frac{1}{2}} dt, \\ i\varphi_{1,\alpha_0}(x, E, \varepsilon) = -\int_{\alpha_0}^x (V_\varepsilon(t) - E)^{\frac{1}{2}} dt. \end{cases} \quad (4.2.1)$$

Ainsi nous choisissons  $a_{0,0}^{\alpha_0}$  le symbole principal de  $a_{0,\alpha_0}$ , nous avons

$$a_{0,0}^{\alpha_0}(x, E, \varepsilon) = [(i\varphi_{0,\alpha_0})']^{-\frac{1}{2}} = (V_\varepsilon(x) - E)^{-\frac{1}{4}}. \quad (4.2.2)$$

Pour fixer le symbole principal de  $u_{1,\alpha_0}$  et  $u_{-1,\alpha_0}$ , nous devons choisir  $\nu_{0,1}, \nu_{1,-1}$  et  $\nu_{-1,0}$  dans  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ , tel que (3.3.6) soit vérifiée.

Nous prenons

$$\nu_{0,1} = 1, \nu_{1,-1} = -1, \text{ et } \nu_{-1,0} = 1. \quad (4.2.3)$$

D'après (3.3.5) nous avons,

$$a_{-1,0}^{\alpha_0}(x, E, \varepsilon) = \frac{1}{i\nu_{-1,0}} a_{0,0}^{\alpha_0}(x, E, \varepsilon) = -i(V_\varepsilon(x) - E)^{-\frac{1}{4}}, \quad (4.2.4)$$

et

$$a_{1,0}^{\alpha_0}(x, E, \varepsilon) = \frac{1}{i\nu_{1,0}} a_{0,0}^{\alpha_0}(x, E, \varepsilon) = i(V_\varepsilon(x) - E)^{-\frac{1}{4}}. \quad (4.2.5)$$

avec ce choix, nous avons

$$u_{0,\alpha_0} = \tau_+(h)u_{-1,\alpha_0} + \tau_-(h)u_{1,\alpha_0} \quad (4.2.6)$$

Pour des symboles  $\tau_\pm(h)$  avec  $\tau_\pm(h) = 1 + \mathcal{O}(h)$ , on peut remplacer  $u_{\mp 1,\alpha_0}$  par  $\tau_\pm^{\alpha_0} u_{\mp 1,\alpha_0}$ , nous obtenons

$$u_{0,\alpha_0} = u_{-1,\alpha_0} + u_{1,\alpha_0}. \quad (4.2.7)$$

## 4.2 Choix du signe de la branche près de $\beta_0$

Maintenant nous nous intéressons à la solution  $v_j$ ,  $j \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ , au voisinage  $\beta_0$ .

**Proposition 4.3** *Sous les hypothèses (4.1.4) et (4.1.5), Il existe une fonction  $I(E, \varepsilon)$  holomorphe en  $(E, \varepsilon) \in D(E_0, \varepsilon_0) \times D(0, \varepsilon_0)$  et  $t \in ]\alpha_0, \beta_0[$  la branche de la racine carrée près  $]\alpha_0, \beta_0[$*

$$I(E, \varepsilon) = \int_{\alpha_0}^{\beta_0} (E - V_\varepsilon(t))^{\frac{1}{2}} dt \quad (4.3.1)$$

est réel positive .

### 4.2.1 Preuve de la Proposition 4.2

Nous considérons  $-z$  comme un variable de base pour l'équation de Schrödinger, nous choisissons  $b_{0,0}^{\beta_0}$  le symbole principal de  $b_{0,\beta_0}$ , nous avons

$$b_{0,0}^{\beta_0}(x, E, \varepsilon) = [(-i\varphi_{0,\beta_0})']^{-\frac{1}{2}} = (V_\varepsilon(x) - E)^{-\frac{1}{4}}, \quad (4.3.2)$$

fixons le symbole principal de  $v_{1,\beta_0}$  et  $v_{-1,\beta_0}$ , choisissons  $\nu_{0,1}, \nu_{1,-1}$  et  $\nu_{-1,0}$  comme dans (4.2.3) :

$$\nu_{0,1} = 1, \quad \nu_{1,-1} = -1, \quad \text{et} \quad \nu_{-1,0} = 1. \quad (4.3.3)$$

Nous obtenons alors :

$$b_{-1,0}^{\beta_0}(x, E, \varepsilon) = \frac{1}{i\nu_{-1,0}} b_{0,0}^{\beta_0}(x, E, \varepsilon) = -i(V_\varepsilon(x) - E)^{-\frac{1}{4}}, \quad (4.3.4)$$

et

$$b_{1,0}^{\beta_0}(x, E, \varepsilon) = \frac{1}{i\nu_{1,0}} b_{0,0}^{\beta_0}(x, E, \varepsilon) = i(V_\varepsilon(x) - E)^{-\frac{1}{4}}. \quad (4.3.5)$$

Nous fixons plus loin un choix de  $v_{\pm 1, \beta_0}$ . Le principe de la méthode BKW nous permettons de choisir  $v_{1,\beta_0}$  et  $v_{-1,\beta_0}$  pour être proportionnels à  $u_{-1,\alpha_0}$  et  $u_{1,\alpha_0}$  respectivement.

Notons alors

$$\begin{cases} i\varphi_{0,\beta_0}(x, E, \varepsilon) = -\int_{\beta_0}^x (V_\varepsilon(t) - E)^{\frac{1}{2}} dt, \\ i\varphi_{-1,\beta_0}(x, E, \varepsilon) = \int_{\beta_0}^x (V_\varepsilon(t) - E)^{\frac{1}{2}} dt, \\ i\varphi_{1,\beta_0}(x, E, \varepsilon) = \int_{\beta_0}^x (V_\varepsilon(t) - E)^{\frac{1}{2}} dt. \end{cases} \quad (4.3.6)$$

De (4.3.6), (4.3.3)

$$i\varphi_{1,\beta_0}(x, E, \varepsilon) - i\varphi_{-1,\alpha_0}(x, E, \varepsilon) = \int_{\alpha_0}^{\beta_0} (V_\varepsilon(t) - E)^{\frac{1}{2}} dt = -iI(E, h), \quad (4.3.6)$$

où nous avons

$$I(E, \varepsilon) = \int_{\alpha_0}^{\beta_0} (E - V_\varepsilon(t))^{\frac{1}{2}} dt \quad (4.3.7)$$

De la même façon, on a

$$i\varphi_{-1}^{\beta_0}(x, E, \varepsilon) - i\varphi_{1}^{\beta_0}(x, E, \varepsilon) = iI(E, h). \quad (4.3.8)$$

Remarquons

$$b_{1,0} = ia_{-1,0} \text{ et } b_{-1,0} = -ia_{1,0}, \quad (4.3.9)$$

et supposons que :

$$\begin{cases} u_{-1} = -ie^{iI(E,\varepsilon)/h} \sigma_+ v_1, \\ u_1^\ell = ie^{-iI(E,\varepsilon)/h} \sigma_- v_{-1}, \end{cases}$$

où  $\sigma_\pm = 1 + \mathcal{O}(h)$ . on remplace  $v_{\pm 1}$  par  $\sigma_\pm v_{\pm 1}$ , nous supposons  $\sigma_\pm = 1$  on trouve

$$\begin{cases} u_{-1} = -ie^{iI(E,\varepsilon)/h} v_1, \\ u_1 = ie^{-iI(E,\varepsilon)/h} v_{-1}, \end{cases} \quad (4.3.10)$$

# Chapitre 5

## Quantification de Bohr Sommerfeld pour un puits de potentiel sans $\mathcal{PT}$ -symétrie

Une des questions centrales de ce mémoire est de comprendre la procédure de quantification de Bohr Sommerfeld, lorsque le potentiel possède un seul puits.

### 5.1 Solution BKW exacte dans le secteur de Stokes

#### 5.1.1 Cas de deux points tournant

Soit  $V_0$  un potentiel analytique à valeurs réelles sur un voisinage réel de  $[A, B]$ , où  $-\infty < A < B < +\infty$ . Soit  $E_0 \in \mathbb{R}$ , supposons qu'il existe  $A < \alpha_0^0 < \beta_0^0 < B$  tel que

$$V_0 - E_0 \begin{cases} > 0 \text{ dans } [A, \alpha_0^0[\cup]\beta_0^0, B], \\ < 0 \text{ dans } ]\alpha_0^0, \beta_0^0[. \end{cases} \quad (5.1.1)$$

On suppose aussi que  $\alpha_0^0$  et  $\beta_0^0$  sont deux points tournants simples pour  $V_0(x) - E_0$  :

$$V_0'(\alpha_0^0) < 0, V_0'(\beta_0^0) < 0,$$

L'une des lignes de Stokes de  $\alpha_0^0$  atteint  $\beta_0^0$ .

Soit  $U \Subset \mathbb{C}$  un voisinage complexe de  $[A, B]$  dans lequel  $V_0$  s'étend holomorphiquement. Soit  $V_\varepsilon(x) = V_0(x) + i\varepsilon W(x)$  où  $W(x)$  une fonction holomorphe dans  $U$ .

Si  $\varepsilon \in \mathbb{C}$  est assez petit en module et  $E$  appartient à un petit voisinage complexe de  $E_0$ , nous avons encore deux points tournants simples  $\alpha_0(E, \varepsilon)$ ,  $\beta_0(E, \varepsilon)$  proches de  $\alpha_0^0$  et  $\beta_0^0$  qui dépendent holomorphiquement de  $(E, \varepsilon)$ .

Le dessin indique les trois secteurs de Stokes  $\Sigma_j$  proches de  $\alpha_0$  et trois secteurs de Stokes  $S_j$  proches de  $\beta_0$  pour  $j = -1, 0, 1$ . Notons que  $A \in \Sigma_0$  et  $B \in S_0$ .

Pour chaque secteur  $\Sigma_j$  on a une solution exacte  $u = u_j$  dans  $U$  de l'équation de Schrödinger  $(-h^2\partial^2 + V_\varepsilon - E)u = 0$  telle que

$$u_j(z; h) = a_{j, \alpha_0}(z; h) e^{i\varphi_{j, \alpha_0}(z)/h} \text{ dans } \Sigma_j, \quad (5.1.2)$$

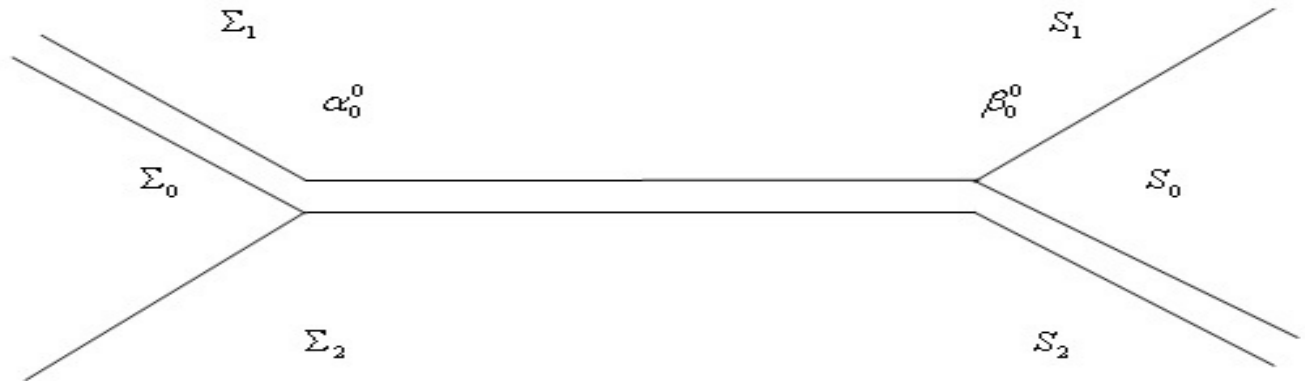


FIG. 5.1 – Lignes de Stokes et Secteurs de Stokes

avec  $\varphi_{j,\alpha_0}(\alpha_0) = 0$ ,  $\text{Im } \varphi_{j,\alpha_0} > 0$  à l'intérieur de  $\Sigma_j$ . De même, on a une solution exacte  $v_j$  telle que

$$v_j(z; h) = a_{j,\beta_0}(z; h) e^{i\varphi_{j,\beta_0}(z)/h} \text{ dans } S_j, \quad (5.1.3)$$

avec  $\varphi_{j,\beta_0}(\beta_0) = 0$ ,  $\text{Im } \varphi_{j,\beta_0} > 0$  dans l'intérieur de  $S_j$ .

Quitte à diminuer  $\Sigma_0$  et  $S_0$  pour que  $A \notin \Sigma_0$ ,  $B \notin S_0$  nous pouvons nous arranger pour que  $u_0(A) = 0$ ,  $v_0(B) = 0$  et que  $u_0$ ,  $v_0$  dépendent de manière holomorphe de  $(E, \varepsilon)$ .

De la même façon, pour  $j = \pm 1$ , on peut s'arranger pour que  $u_j$  et  $v_j$  dépendent holomorphiquement de  $(E, \varepsilon)$ .

## 5.2 Résolution du problème de Dirichlet

Maintenant, considérons le problème de Dirichlet

$$-((h\partial)^2 + V_\varepsilon - E)u = 0, u(A) = u(B) = 0. \quad (5.2.1)$$

En d'autres termes, nous cherchons le spectre de l'opérateur non borné

$$P = -(h\partial^2) + V_\varepsilon : L^2(]A, B[) \rightarrow L^2(]A, B[), \quad (5.2.2)$$

de domaine<sup>1</sup>

$$\mathcal{D}(P) = \{u \in H^2(]A, B[); u(A) = u(B) = 0\}. \quad (5.2.3)$$

<sup>1</sup>Le cas d'un opérateur défini sur tout l'axe réel comme dans les théorèmes (Th 1), (Th 2) se traite de la même façon avec des modifications mineures.

Nous remarquons que

$$E \in \sigma(P) \Leftrightarrow \mathcal{W}(u_0, v_0) = 0. \quad (5.2.4)$$

Plus précisément au niveau  $\sum_j \cap S_j$ ,  $j = \pm 1$  les  $u_j, v_j$  sont coïncide où  $u_j = f_j(x)v_j$  et  $\varphi_{\alpha_0, j}(x) = \varphi_{\beta_0, j}(x) + f_j(h)$

$$u_j(z, h) = (1 + \mathcal{O}(h))e^{i\varphi_j(\beta_0)/h}v_j, \quad (5.2.5)$$

ici,

$$\varphi_j(\beta_1) = \int_{[\alpha_0, \beta_0]} (V - E)^{\frac{1}{2}} dz = \pm i \int_{[\alpha_0, \beta_0]} (E - V)^{\frac{1}{2}} dz, \quad (5.2.6)$$

Nous avons besoin de comprendre le choix de la branche de la racine carrée. Par ailleurs,

$$\varphi(z) = \frac{2}{3}F(z)z^{\frac{3}{2}} + cst$$

nous obtenons

$$\varphi_{-1}(\beta_0) = -i \int_{\alpha_0}^{\beta_0} (E - V_\varepsilon(z))^{\frac{1}{2}} dz, \quad (5.2.7)$$

où  $E - V_\varepsilon(z) > 0$  sur  $] \alpha_0, \beta_0 [$ , de même

$$\varphi_1(\beta_0) = i \int_{\alpha_0}^{\beta_0} (E - V_\varepsilon(z))^{\frac{1}{2}} dz, \quad (5.2.8)$$

Dans le cas général pour  $j = \pm 1$  nous pouvons choisir  $u_j, v_j$  collinéaires :

$$u_j(z; h) = c(h)e^{i\varphi_{j, \alpha_0}(\beta_0)/h}v_j, \quad (5.2.9)$$

où le facteur  $c(h)$  a un développement asymptotique

$$c(h) \sim c_0(E, \varepsilon) + hc_1(E, \varepsilon) + \dots \text{ dans Hol (vois } ((E_0, 0), \mathbb{C}^2)).$$

Ici,

$$\varphi_{j, \alpha_0}(\beta_0) = \pm \int_{\alpha_0}^{\beta_0} (E - V_\varepsilon(z))^{\frac{1}{2}} dz, \quad (5.2.10)$$

avec le signe  $+$  pour  $j = -1$  et le signe  $-$  pour  $j = 1$ .

Quand  $E = E_0$ ,  $\varepsilon = 0$ , alors pour  $z < \alpha_0^0$  (réel),

$$u_0 = \frac{1 + \mathcal{O}(h)}{\sqrt{i\varphi'_0}} e^{i\varphi_{0, \alpha_0}/h}$$

est à valeurs réelles,  $i\varphi_{0, \alpha_0} < 0$ ,  $i\varphi'_{0, \alpha_0} > 0$ .

Dans toute cette discussion on peut choisir

$$\nu_{1,0} = -1, \nu_{0,-1} = -1, \nu_{-1,1} = 1, \quad (5.2.11)$$

respectant la condition (3.3.6). La relation (3.4.6) devient

$$\alpha_{-1} = i + \mathcal{O}(h), \alpha_0 = -i + \mathcal{O}(h), \alpha_1 = i + \mathcal{O}(h), \quad (5.2.12)$$

et d'après (3.4.1),

$$i(1 + \mathcal{O}(h))u_{-1} - i(1 + \mathcal{O}(h))u_0 + i(1 + \mathcal{O}(h))u_1 = 0,$$

d'où

$$u_0 = (1 + \mathcal{O}(h))u_1 + (1 + \mathcal{O}(h))u_{-1}. \quad (5.2.13)$$

Pour  $z \in ]\alpha_0^0, \beta_0^0[$ ,  $E = E_0$ ,  $\varepsilon = 0$ , comparons (cf la remarque (3.1.1))

$$\begin{aligned} u_{-1} &= (1 + \mathcal{O}(h))(i\varphi'_{-1, \alpha_0})^{-\frac{1}{2}} e^{i\varphi_{-1, \alpha_0}/h} \\ \text{et} \\ u_1 &= (1 + \mathcal{O}(h))(i\varphi'_{1, \alpha_0})^{-\frac{1}{2}} e^{i\varphi_{1, \alpha_0}/h}. \end{aligned} \quad (5.2.14)$$

### 5.3 Signe de la branche dans le Secteur de Stokes $\Sigma_j$

Nous précisons une façon plus directe de déterminer  $\arg(i\varphi'_{\mp 1, \alpha_0})^{1/2}$  : D'après (5.2.10), nous avons  $\varphi'_{-1, \alpha_0} > 0$  (aussi  $\varphi_{1, \alpha_0} = -\varphi_{-1, \alpha_0}$ ) et donc, pour  $z < \alpha_0$  proche de  $\alpha_0$ , nous avons

$$(i\varphi'_{0, \alpha_0})^{1/2} = (V_0(z) - E_0)^{1/4}$$

la branche principale positive est donnée par

$$\arg(i\varphi'_{-1, \alpha_0})^{1/2} \in \{\pi/4, -3\pi/4\}, \quad \arg(i\varphi'_{1, \alpha_0})^{1/2} \in \{-\pi/4, +3\pi/4\}.$$

Comme  $\nu_{-1, 1} = 1$  nous avons aussi

$$(i\varphi'_{-1, \alpha_0})^{1/2} = i(i\varphi'_{1, \alpha_0})^{1/2}. \quad (5.3.1)$$

Les seules possibilités sont alors

$$(\arg(i\varphi'_{-1, \alpha_0})^{1/2}, \arg(i\varphi'_{1, \alpha_0})^{1/2}) = \left(\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right) \text{ ou } \left(-\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right).$$

À des facteurs  $1 + \mathcal{O}(h)$  près, on voit alors de (5.2.14) que  $u_{-1} = \bar{u}_1$  et (5.2.13) est bien en accord avec le fait que  $u_0$  est une solution réelle de l'équation de Schrödinger.

En tournons maintenant dans le sens négatif vers  $\Sigma_{-1}$ . Dans la région de transition entre les deux secteurs  $\Sigma_0$  et  $\Sigma_{-1}$ .

puisque  $\nu_{-1, 0} = 1$ , nous avons

$$(i\varphi'_{-1, \alpha_0})^{1/2} = i(V_0(z) - E_0)^{1/4}$$

avec la même branche de la racine quatrième, on met une coupure le long de  $]\alpha_0^0, \beta_0^0[$ . En arrivant à  $]\alpha_0^0, \beta_0^0[$ , on a donc

$$\arg(i\varphi'_{1, \alpha_0})^{1/2} = \frac{\pi}{2} + \arg(V_0(z) - E_0)^{1/4} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Alors

$$\arg(i\varphi'_{\mp 1, \alpha_0})^{1/2} = \pm \frac{\pi}{4}, \quad \text{pour } E = E_0, \quad \varepsilon = 0, \quad \alpha_0^0 < z < \beta_0^0. \quad (5.3.2)$$

## 5.4 Signe de la branche dans le secteur de Stokes $S_j$

Regardons maintenant les  $v_j$ , qui sont en analogie avec (5.1.3) et prennent la forme

$$v_j = \frac{1 + \mathcal{O}(h)}{(-i\varphi'_{j,\beta_0})^{1/2}} e^{i\varphi_{j,\beta_0}/h} \text{ dans int}(S_j). \quad (5.4.1)$$

Nous avons introduit le signe  $-$  dans la racine carrée car nous avons maintenant  $-i\varphi_{0,\beta_0} > 0$  quand  $E$  est réel,  $\varepsilon = 0$  et  $z > \beta_0$ .

Ceci se comprend encore mieux si on travaille avec la variable  $-z$  à la place de  $z$ .

Ici (cf. (5.2.8), (5.2.9)) nous avons pour  $j = \pm 1$ ,

$$\varphi_{j,\alpha_0} = \varphi_{j,\beta_0} + \varphi_{j,\alpha_0}(\beta_0) \text{ pour } z \in S_j. \quad (5.5.2)$$

Comme pour les  $u_j$  il faut discuter le choix de la racine carrée de  $(-i\varphi_{j,\beta_0})^{1/2}$ . Pour cela on choisit la branche de  $(-\varphi'_{0,\beta_0})^{1/2}$  qui est positive  $= (V - E)^{1/4}$  quand  $E$  est réel,  $\varepsilon = 0$  et  $z > \beta_0$ .

On définit ensuite les nombres  $\mu_{j,k}$  par

$$(-i\varphi'_{j,\beta_0})^{1/2} = i^{\mu_{j,k}} (-i\varphi'_{k,\beta_0})^{1/2} \text{ dans int}(S_j \cup S_k), \quad j \neq k. \quad (5.5.3)$$

On fait le même choix des  $\mu_{j,k}$  que des  $\nu_{j,k}$ , en progressant de  $S_0$  à la place de  $\Sigma_0$  dans le sens positif :

$$\mu_{j,k} = \nu_{-j,-k}. \quad (5.5.4)$$

Ainsi,

$$\mu_{-1,0} = -1, \quad \mu_{0,1} = -1, \quad \mu_{1,-1} = 1, \quad \mu_{k,j} = -\mu_{j,k}. \quad (5.5.5)$$

Alors en analogie avec (5.2.12) et (5.3.1) nous avons

$$v_0 = (1 + \mathcal{O}(h))v_1 + (1 + \mathcal{O}(h))v_{-1}, \quad (5.5.6)$$

$$\arg(-i\varphi'_{\pm 1,\beta_0})^{1/2} = \pm \frac{\pi}{4}, \text{ dans } ]\alpha_0, \beta_0[, \text{ quand } E \in \text{vois}(E_0, \mathbb{R}), \quad \varepsilon = 0. \quad (5.5.7)$$

## 5.5 Connexion entre les solutions BKW exacte d'un seul puits de potentiel

Quitte à modifier  $v_j$  et  $u_j$  par des facteurs constants  $1 + \mathcal{O}(h)$ , on peut supposer que

$$u_0 = u_1 + u_{-1}, \quad v_0 = v_1 + v_{-1}. \quad (5.6.1)$$

Remarquons aussi quand  $E$  est réel et  $\varepsilon = 0$ , alors  $u_{-j} = (1 + \mathcal{O}(h))\bar{u}_j$  et de même pour  $v_j$ . (Nous allons revenir à cette propriété et montrer que les préfacteurs peuvent être éliminés.)

Se rappelant que  $u_j$  et  $v_j$  sont colinéaires pour  $j = \pm 1$ , en utilisant (5.6.1), on obtient,

$$\mathcal{W}(u_0, v_0) = \mathcal{W}(u_{-1}, v_1) + \mathcal{W}(u_1, v_{-1}). \quad (5.6.2)$$

D'après (5.2.5) on trouve

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(u_0, v_0) &= \mathcal{W}(u_1 + u_{-1}, v_1 + v_{-1}) \\ &= \mathcal{W}(u_{-1}, v_1) + \mathcal{W}(u_1, v_{-1}). \\ &= (1 + \mathcal{O}(h)) e^{\frac{1}{i\hbar} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} (E-V)^{\frac{1}{2}} dz} \mathcal{W}(v_1, v_{-1}) + (1 + \mathcal{O}(h)) e^{-\frac{1}{i\hbar} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} (E-V)^{\frac{1}{2}} dz} \mathcal{W}(v_{-1}, v_1) \end{aligned}$$

De plus on sait bien que  $\mathcal{W}(v_{-1}, v_1) = -\mathcal{W}(v_1, v_{-1})$ , on trouve

$$\mathcal{W}(u_0, v_0) = \pm(1 + \mathcal{O}(h)) \mathcal{W}(v_1, v_{-1}) e^{\frac{-1}{i\hbar} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} (E-V)^{\frac{1}{2}} dz} \times \left( e^{\frac{2}{i\hbar} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} (E-V)^{\frac{1}{2}} dz} \pm (1 + \mathcal{O}(h)) \right) \quad (5.6.3)$$

On remarque que

$$\begin{aligned} \varphi_{-1, \alpha_0}(z) + \varphi_{1, \beta_0}(z) &= \int_{\alpha_0}^z (E - V_\varepsilon(t))^{1/2} dt - \int_{\beta_0}^z (E - V_\varepsilon(t))^{1/2} dt \\ &= \int_{\alpha_0}^{\beta_0} (E - V_\varepsilon(t))^{1/2} dt =: \frac{1}{2} I(E, \varepsilon), \end{aligned}$$

où la dernière égalité définit l'action  $I(E, \varepsilon)$  et où on choisit la branche de la racine carrée qui est positif quand  $E$  est réel,  $\varepsilon = 0$  et  $\alpha_0 < t < \beta_0$ . De même,

$$\varphi_{1, \alpha_0}(z) + \varphi_{-1, \beta_0}(z) = - \int_{\alpha_0}^{\beta_0} (E - V_\varepsilon(t))^{1/2} dt =: \frac{1}{2} I(E, \varepsilon) = -\frac{1}{2} I(E, \varepsilon),$$

Nous pouvons voir  $(E - V_\varepsilon)^{\frac{1}{2}}$ , comme fonction holomorphe sur  $U \setminus [\alpha_0, \beta_0]$ , soit  $\gamma$  un contour fermé autour de  $[\alpha_0, \beta_0]$  orienté dans le sens négatif.

Alors

$$I(E) := 2 \int_{\alpha_0}^{\beta_0} (E - V_\varepsilon)^{\frac{1}{2}} dz = \int_{\gamma} (E - V_\varepsilon)^{\frac{1}{2}} dz. \quad (5.6.4)$$

Quand  $E \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon = 0$  nous avons aussi

$$I(E) = \int_{p^{-1}(E)} \xi dx = \text{vol}_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} p^{-1}(] - \infty, E[), \quad (5.6.5)$$

où

$$p(x, \xi) = p_\varepsilon(x, \xi) = \xi^2 + V(x)$$

est le symbole semi-classique de  $P = P_\varepsilon$  et où la courbe réelle est orientée dans la direction du champ hamiltonien

$$H_p = p'_\xi \partial_x - p'_x \partial_\xi$$

Rappelons aussi que pour  $E \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon = 0$ ,

$$\partial_E I(E) = T(E) > 0, \quad (5.6.6)$$

est la période primitive pour le flot de  $H_p$  dans la courbe d'énergie réelle  $p^{-1}(E)$ .

Soit  $p$  le symbole principal de l'opérateur  $P$ , défini par :

$$p(x, \xi) = \xi^2 + V(x) \text{ sur } \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Son champ Hamiltonian  $H_p$  est donné par :

$$H_p = \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi}.$$

Le flot Hamiltonian associé à  $p$  est défini pour tout  $(x, \xi)$  dans un voisinage arbitraire  $(x_0, \xi_0)$  et pour tout  $t \in \mathbb{R}$  (suffisamment petit), il est donné par l'application :

$$(t, x, \xi) \rightarrow (\exp tH_p)(x, \xi)$$

où

$$\exp tH_p(x_0, \xi_0) =: (x(t), \xi(t)) \quad (5.6.7)$$

est la solution unique du système d'Hamilton Jacobi :

$$\begin{aligned} \partial_t(x(t), \xi(t)) &= H_p(x(t), \xi(t)) \\ (x(0), \xi(0)) &= (x_0, \xi_0) \end{aligned} \quad (5.6.8)$$

Soit  $\sigma$  la 2-forme symplectique (exacte) noté par :

$$\sigma = d\xi \wedge dx \quad (5.6.9)$$

**Théorème 5.1** *Soit  $U$  et  $V$  deux sous ensembles ouverts de  $\mathbb{R}^2$ , le difféomorphisme ( $C^\infty$ ), défini par :*

$$\begin{aligned} \kappa &: U \rightarrow V \\ (x, \xi) &\rightarrow (p(x, \xi), t(x, \xi)). \end{aligned} \quad (5.6.10)$$

est symplectique dans le sens où sur  $U$  on a :

$$dp \wedge dt = d\xi \wedge dx. \quad (5.6.11)$$

Ce qui revient à dire aussi que la transformation symplectique  $\kappa$  préserve les aires dans le sens suivant :

$$\kappa^* \sigma = \sigma \quad (5.6.12)$$

### 5.5.1 Preuve du Théorème 5.1

$$\begin{aligned}
dp \wedge dt &= \left[ \left( \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial \xi} d\xi \right) \wedge \left( \frac{\partial t}{\partial x} dx + \frac{\partial t}{\partial \xi} d\xi \right) \right] \\
&= \left[ \left( \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial t}{\partial x} dx \wedge dx + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial t}{\partial \xi} dx \wedge d\xi + \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial t}{\partial x} d\xi \wedge dx + \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial t}{\partial \xi} d\xi \wedge d\xi \right) \right] \\
&= -\frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial t}{\partial \xi} d\xi \wedge dx + \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial t}{\partial x} d\xi \wedge dx \\
&= \left( \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial t}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial t}{\partial \xi} \right) (d\xi \wedge dx) \\
&= H_p(t) (d\xi \wedge dx) \quad (\text{comme } H_p(t) = 1) \\
&= d\xi \wedge dx.
\end{aligned}$$

D'où :

$$dp \wedge dt = d\xi \wedge dx.$$

**Proposition 5.1** *Sous les hypothèses de l'opérateur  $P$  et Pour  $E$  dans un voisinage réel de  $E_0$  on pose*

$$I_0(E) =: \text{vol}\{(x, \xi) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}; p(x, \xi) \leq E\} = \int_{P^{-1}(E)} \xi dx, \quad (5.1)$$

et  $P^{-1}(E)$  étant la courbe d'énergie donnée par

$$P^{-1}(E) = \{(x, \xi) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}; P(x, \xi) = E\}. \quad (5.2)$$

On a alors,

$$I_0(E) = \int \int_{p(x, \xi) \leq E} dx d\xi. \quad (5.3)$$

est une fonction  $C^\infty$  en  $E$  et

$$\dot{I}_0(E) = T(E)$$

### 5.5.2 Preuve du Proposition 5.1

1. Si  $E \in \mathbb{R}$ ;  $|E - E_0|$  est assez petit, alors il existe deux points tournants  $\alpha(E)$  et  $\beta(E)$  tel que

$$\begin{aligned}
V(\alpha(E)) &= E; & V'(\alpha(E)) &< 0 \\
V(\beta(E)) &= E; & V'(\beta(E)) &> 0
\end{aligned}$$

où  $\alpha(E), \beta(E)$  sont des fonctions  $C^\infty$ . Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un ouvert connexe,  $(E_0, \mathbb{R})$  un voisinage assez petit de  $E$ , La courbe d'énergie  $\gamma_E$  défini par :

$$\gamma_E =: \{(x, \xi) \in \Omega, p(x, \xi) = E\}.$$

est compacte connexe en tous points ce qui nous permet de conclure que

$$dp|_{\Omega} = 0 \text{ et } \nabla_{x,\xi} P \neq 0.$$

Soit  $\gamma$  le chemin dans  $\gamma_E$  reliant les deux points tournant  $(\alpha(E), 0)$  et  $(\beta(E), 0)$  avec l'orientation donnée par  $H_p$  selon la direction des aiguilles d'une montre, on a

$$t \in [\alpha, \beta] \longmapsto (x(t); \xi(t)) \in \Omega.$$

où

$$\begin{aligned} I_0(E) &= \int_{\gamma_E} \xi dx = 2 \int_{\gamma} \xi dx \\ &= 2 \int_{\alpha(E)}^{\beta(E)} (E - V(x))^{\frac{1}{2}} dx, \end{aligned}$$

2. Soit  $P \neq E$  défini sur  $[0, T(E)]$  le passage en coordonnées locales nous donne

$$p(\rho(t)) = (t; p(\rho(t)))$$

où  $\rho(t)$  est une courbe caractéristique défini par

$$\rho(t) = (x(t), \xi(t))$$

Au point  $\rho(0)$  l'énergie  $P(\rho(0)) = F$  le  $(t; p(\rho(t)))$  décrit le même point  $(x(t), \xi(t))$  et l'aire qu'elle engendre entre  $P = E$  et  $P = F$  nous permet de calculer

$$I_0(E) - I_0(F) = \iint_{p(x,\xi) \in (E,F)} d\xi dx$$

$$\begin{aligned} I_0(E) - I_0(F) &= \iint_{\substack{E \leq p \leq F \\ 0 \leq t \leq T(0)}} dp dt \\ &= \int_E^F \int_0^{T(p)} dp dt \\ &= \int_E^F T(p) dp = (T(E) + \mathcal{O}(1))(F - E) \end{aligned}$$

alors

$$\frac{I_0(E) - I_0(F)}{F - E} = T(E) + \mathcal{O}(1)$$

Il vient donc :

$$\dot{I}_0(E) = T(E)$$

avec  $I_0(E)$  est  $C^\infty$ .

Si  $\Omega$  est assez petit, alors qu'on peut définir la courbe  $P_\varepsilon^{-1}(E)$  donnée par

$$P_\varepsilon^{-1}(E) = \{(x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{C}; p_\varepsilon(x, \xi) = E\},$$

ce qui implique que  $dp_\varepsilon(x, \xi) \neq 0$  et  $V'_\varepsilon(x) \neq 0$ , et son intégrale d'action donnée par :

$$\begin{aligned} I_\varepsilon(E) &= \int_{p_\varepsilon^{-1}(E)} \xi dx \\ &= 2 \int_{\alpha(E)}^{\beta(E)} \xi dx \end{aligned}$$

où on intègre par rapport au segment qui relie  $\alpha_0(E)$ ,  $\beta_0(E)$ .

**Remarque 5.1**

1. Dans le Cas  $\varepsilon = 0$ , on revient à notre au cas traité précédemment, avec  $\Omega$  assez petit, alors l'équation  $V_\varepsilon(\alpha) = E$  n'a pas de solution et donc  $P_\varepsilon^{-1}(E) \cap \mathbb{R}_{x,\xi}^2 = \emptyset$ .

2. Dans le Cas  $\varepsilon \neq 0$  : nous souhaitons montrer que  $I_\varepsilon(E)$  est réel, pour cela nous commençons par introduire d'abord une courbe  $\gamma_0$  réelle de période  $T_0(E) > 0$  analytique en  $E$  (la période minimale), et défini par

$$\gamma_0 : [0, T_0] \ni t \rightarrow \gamma_0(t) \in P_\varepsilon^{-1}(E) \cap \mathbb{R}_{x,\xi}^2.$$

Si  $W$  est réel et  $\varepsilon \in \text{vois}(0, \mathbb{R})$ , soit une courbe  $\gamma_\varepsilon$  proche de  $\gamma_0$  contenu dans  $P_\varepsilon^{-1}(E) \subseteq \mathbb{C}^2$ , de paramétrisation

$$\gamma_\varepsilon : [0, T_0] \ni t \rightarrow (\gamma_0(t) + f(t, \varepsilon) \nabla p_\varepsilon(\gamma_0(t))) \in P_\varepsilon^{-1}(E) \text{ et } \frac{d}{dt} \gamma_0(t) = H_{p_\varepsilon}(\gamma_0(t)),$$

où  $f \in C^\infty$ ,

L'existence de la fonction  $f$  est déterminée par le théorème des fonctions implicites suivant :

**Théorème 5.2** Soit  $F$  une application  $C^\infty$  sur un  $\text{vois}(t_0, \varepsilon_0, f_0)$  de  $\mathbb{R}^3$  à valeur dans  $\mathbb{R}$  telle que  $F(t_0, \varepsilon_0, f_0) = 0$  et  $\frac{dF(t_0, \varepsilon_0, f_0)}{df_0} \neq 0$  alors il existe un voisinage  $U$  de  $(t_0, \varepsilon_0)$  de  $\mathbb{R}^2$  et un voisinage  $W$  de  $f_0$  dans  $\mathbb{R}$  tel que pour tout  $(t, \varepsilon) \in U$  et  $f \in W$  en plus l'équation  $F(t, \varepsilon, f) = 0$  admet une solution  $f$  dans  $W$ . de plus  $f = f(t, \varepsilon)$  est une fonction  $C^\infty$  de  $(t, \varepsilon)$  et  $\frac{dF(t, \varepsilon, f)}{df}$  inversible.

### 5.5.3 Preuve du théorème 5.2

On a

$$P_\varepsilon(F(t, \varepsilon, f)) = E,$$

Où

$$F(t, \varepsilon, f) = \gamma_0(t) + f(t, \varepsilon) \nabla p_\varepsilon(\gamma_0(t)),$$

Nous devons vérifier que,

$$\frac{dF(0, t, 0)}{df} \neq 0$$

Pour  $t \in \text{vois}([0, T_0], \mathbb{C})$ , au point  $(0, t, 0)$  ( $\varepsilon = 0$  et  $f_0(t, 0) = 0$ ) on a :

$$\begin{aligned} \frac{dF(0, t, 0)}{df} &= \frac{d}{df} (p_\varepsilon(\gamma_0(t)) + f(t, 0) \nabla p_\varepsilon(\gamma_0(t))) \\ &= \nabla p_\varepsilon(\gamma_0(t)) \nabla p_\varepsilon(\gamma_0(t)) \neq 0 \end{aligned}$$

Il existe donc un voisinage  $U$  de  $(0, t)$  de  $\mathbb{R}^2$  et un voisinage  $W$  de  $f_0$  dans  $\mathbb{R}$  tel que pour tout  $(\varepsilon, t) \in U$  et  $f \in W$  l'équation  $F(t, \varepsilon, f) = 0$  admet une solution unique  $f$  dans  $W$ . de plus  $f = f(t, \varepsilon)$  est une fonction  $C^\infty$  de  $(t, \varepsilon)$ .

Au voisinage du point  $(0, t, 0)$  la courbe  $\gamma_\varepsilon$  est donc défini par :

$$\gamma_\varepsilon(s) = \Phi_\varepsilon(s T_\varepsilon(E))(\rho(t))$$

tel que  $\text{dis}(\gamma_\varepsilon(s) - \gamma_0(s)) = O(\varepsilon)$ .  $\square$

**Proposition 5.2** Soit  $\gamma$  une courbe telle que  $\gamma \subset \{(x, \xi) : p(x, \xi) = E\}$ , il existe une fonction holomorphe  $I_0(E, \varepsilon)$  telle que

$$I_0(E, \varepsilon) = \int_\gamma \xi dx$$

comme  $(x, \xi) \in \gamma_\varepsilon$ , alors  $(-x, -\xi) \in \gamma_\varepsilon$

$$\forall 0 < t < T_0, \exists \varepsilon \text{ tel que : } -\overline{\gamma(s)} = \gamma(s) \text{ où } \overline{I_0(E, \varepsilon)} = I_0(E, \varepsilon) .$$

### 5.5.4 Preuve du Proposition 5.2

par changement de variable  $-\bar{\xi} = y$  et  $-\bar{x} = z$ , donc on a :

$$\overline{I_0(E, \varepsilon)} = \int_{(x, \xi) \in \gamma} \bar{\xi} d\bar{x} = - \int_{(x, \xi) \in \gamma} (-\bar{\xi}) d(-\bar{x}).$$

donc

$$\overline{I_0(E, \varepsilon)} = \int_{(y, z) \in \gamma_\varepsilon} y dz = I_0(E, \varepsilon)$$

d'où

$$\overline{I_0(E, \varepsilon)} = I_0(E, \varepsilon) .$$

**Remarque 5.2** Pour prouver que  $I_0(E, \varepsilon)$  est vraiment réel on cherche à démontrer que son spectre est réel pour  $E$  réel, alors on s'intéresse à voir la solution de l'équation  $(P - E)u = 0$ , soit  $V_0$  la valeur minimum du potentiel sur l'axe réel, lorsque  $V_0(x) < E$  on trouve des solutions exponentiellement croissante (dominante) où décroissante (récessive) en  $\pm\infty$  et donc on obtient des valeurs propres réelles pour  $P_0$  dans  $L^2(\mathbb{R})$ .

Revenons au calcul de notre Wronskien :

**Proposition 5.3** Supposons (4.1.3) ; Il existe  $\varepsilon_0 > 0$ , pour  $(E, \varepsilon) \in ((E_0, \varepsilon_0) \times D(0, \varepsilon_0))$ ,  $I(E; h)$  une fonction réelle de classe  $C^\infty$  sur  $]E_0 - \varepsilon_0, E_0 + \varepsilon_0[$ , admettant un développement asymptotique

$$I(E; h) \sim I(E) + hI_1(E) + \dots, \quad h \rightarrow 0$$

on a

$$W(u_{-1}, v_1) = \frac{2i\varphi'_{-1, \alpha_0}(1 + \mathcal{O}(h))}{(i\varphi'_{-1, \alpha_0})^{\frac{1}{2}}(-i\varphi'_{1, \beta_0})^{\frac{1}{2}}} e^{\frac{i}{2h}I(E, \varepsilon)}.$$

Ici,

$$\frac{2i\varphi'_{-1, \alpha_0}}{(i\varphi'_{-1, \alpha_0})^{\frac{1}{2}}(-i\varphi'_{1, \beta_0})^{\frac{1}{2}}} = \pm 1 \quad (5.8.1)$$

### 5.5.5 Preuve du Proposition 5.3

Par un calcul directe de Wronskien on trouve

$$\begin{aligned} W(u_{-1}, v_1) &= hu_{-1}\partial_x v_1 - hv_1\partial_x u_{-1}, \\ &= \frac{2i\varphi'_{-1, \alpha_0}(1 + \mathcal{O}(h))}{(i\varphi'_{-1, \alpha_0})^{\frac{1}{2}}(-i\varphi'_{1, \beta_0})^{\frac{1}{2}}} e^{\frac{i}{2h}I(E, \varepsilon)} \end{aligned}$$

puisque  $-i\varphi'_{1, \beta_0} = i\varphi'_{-1, \alpha_0}$ , pour déterminer le signe, on peut se placer sur  $] \alpha_0, \beta_0[$  en supposant que  $E \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon = 0$ . Alors  $i\varphi'_{-1, \alpha_0} = i(E - V(z))^{1/2}$  est d'argument  $\pi/2$  et nous avons :

$$\arg(i\varphi'_{-1, \alpha_0})^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{4} = \arg(-i\varphi'_{1, \beta_0})^{\frac{1}{2}}.$$

On a donc +1 dans (5.8.1) :

$$W(u_{-1}, v_1) = 2(1 + \mathcal{O}(h))e^{\frac{i}{2h}I(E, \varepsilon)}. \quad (5.9.1)$$

En utilisant le même raisonnement, on obtient

$$W(u_1, v_{-1}) = 2(1 + \mathcal{O}(h))e^{-\frac{i}{2h}I(E, \varepsilon)}. \quad (5.9.2)$$

**Proposition 5.4** *Il existe  $\varepsilon_0 > 0$ , pour  $(E, \varepsilon) \in ((E_0, \varepsilon_0) \times D(0, \varepsilon_0))$ ,  $I(E; h)$  une fonction réelle de classe  $C^\infty$  sur  $]E_0 - \varepsilon_0, E_0 + \varepsilon_0[$ , D'après (5.6.2) nous avons*

$$\mathcal{W}(u_0, v_0) = 2((1 + \mathcal{O}(h))e^{\frac{i}{2h}I(E, \varepsilon)} + (1 + \mathcal{O}(h))e^{-\frac{i}{2h}I(E, \varepsilon)}). \quad (5.9.3)$$

### 5.5.6 Preuve du Proposition 5.4

D'après (5.9.1) et (5.9.2), et de l'expression (5.6.2) on obtient le résultat (5.9.3).

**Remarque 5.3** *les facteurs  $1 + \mathcal{O}(h)$  dépend holomorphiquement de  $(E, \varepsilon) \in \text{vois}((E_0, 0), C^2)$  ont des développements asymptotiques en puissances de  $h$  dans  $\text{Hol}(\text{vois}((E_0, 0), C^2))$ .*

## 5.6 Les zéros de Wronskien par la condition de quantification de Bohr-Sommerfeld sans $\mathcal{PT}$ symétrie

Nous nous intéressons de trouver les valeurs propre de l'opérateur de Schrödinger perturbé  $P_\varepsilon$  avec la condition de Bohr-Sommerfeld pour un seul puits de potentiel sans  $\mathcal{PT}$ -symétrie nous savons que  $E$  est la valeur propre de  $P_\varepsilon$  précisément quand  $\mathcal{W}(u_0, v_0) = 0$  ou équivalente le faite que  $u_0$  et  $v_0$  sont colinéaire.

### 5.6.1 Preuve du Théorème 1

De ce que précède on peut écrire

$$\mathcal{W}(u_0, v_0) = 2(1 + \mathcal{O}(h))e^{-\frac{i}{2h}I(E, \varepsilon)} \left( e^{\frac{i}{h}(I(E, \varepsilon) + h^2 r(E, \varepsilon; h))} + 1 \right), \quad (5.10.1)$$

où

$$r(E, \varepsilon; h) \sim r_0(E, \varepsilon) + hr_1(E, \varepsilon) + \dots \text{dans } \text{Hol}(\text{vois}(E_0, 0), \mathbb{C}^2).$$

Les zéros de  $\mathcal{W}(u_0, v_0)$  sont donc donnés par la condition de quantification Bohr Sommerfeld

$$I(E, \varepsilon) + h^2 r(E, \varepsilon; h) = (k + \frac{1}{2})2\pi h, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (5.10.2)$$

Rappelons maintenant que

$$\frac{d}{dE}I(E, \varepsilon) = T(E, \varepsilon) \neq 0$$

est la période primitive du champ hamiltonien  $H_p = p'_\xi \partial_x - p'_x \partial_\xi$  sur la courbe d'énergie complexe  $p = E$  restreinte à un petit voisinage de la courbe réelle  $p_{\varepsilon=0}(x, \xi) = E_0$ .

Alors, pour  $h$  petit, on peut appliquer le théorème des fonctions implicites dans sa version holomorphe pour conclure que l'application

$$\text{vois}(E_0, \mathbb{C}) \ni E \mapsto I(E, \varepsilon; h) := I(E, \varepsilon) + h^2 r(E, \varepsilon; h) \in \text{vois}(I(E_0, 0), \mathbb{C}) \quad (5.10.3)$$

est bijective d'inverse

$$w \mapsto I^{-1}(w, \varepsilon; h)$$

tel que

$$I^{-1}(w, \varepsilon; h) = I^{-1}(w, \varepsilon) + h^2(I^{-1})_2(w, \varepsilon) + h^3(I^{-1})_3(w, \varepsilon) + \dots \quad (5.10.4)$$

dans l'espace des fonctions holomorphes en  $(w, \varepsilon)$  dans un voisinage de  $(I(E_0, 0), 0)$ .

Les valeurs propres de  $P_\varepsilon$  (c.à.d. les zéros de  $W(u_0, v_0)$ ) dans un voisinage de  $E_0$  sont alors données par

$$E_k(\varepsilon; h) = I^{-1}\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)2\pi h, \varepsilon; h\right) \quad (5.10.5)$$

pour  $k \in Z$  tels que  $(k + \frac{1}{2})2\pi h$  appartient à un voisinage de  $I(E_0)$ .  $\square$

**Remarque 5.4** quand  $\varepsilon = 0$  alors  $P_\varepsilon$  est autoadjoint et les valeurs propres sont réelles. On peut en déduire que les termes dans les développements asymptotiques en puissances de  $h$  de  $I$  et de  $I^{-1}$  sont réels pour  $\varepsilon = 0$ .

# Chapitre 6

## Le cas d'un seul puits $\mathcal{PT}$ -symétrique

Dans ce chapitre, nous présentons le résultat principal de cette thèse, nous montrons que l'opérateur de Schrödinger semi-classique sur la droite réelle pour un potentiel analytique possède un seul puits, ses valeurs propre restent réelles sous la perturbation.

### 6.1 $\mathcal{PT}$ -symétrie en générale

On fait les hypothèses du simple puits dans la l'introduction de chapitre 5. Supposons aussi que  $P_\varepsilon$  soit  $\mathcal{PT}$ -symétrique quand  $\varepsilon > 0$  est réel (et donc aussi que  $B = -A$ ) :

$$[\mathcal{PT}, P_\varepsilon] = 0, \quad (6.1.1)$$

où

$$\mathcal{P}f(x) = f(-x) \quad (6.1.2)$$

$$\mathcal{T}f(x) = \overline{f(\bar{x})} \quad (6.1.3)$$

pour  $E$  complexe, on a

$$\mathcal{PT}(P_\varepsilon - E) = (P_\varepsilon - \bar{E})\mathcal{PT}. \quad (6.1.4)$$

### 6.2 Calculs du Wronskien avec $\mathcal{PT}$ -symétrie

Dans Cette section nous nous basons précisément sur l'application de la notion PT-symétrie sur tous les calculs des solutions BKW exacte à l'intérieur des secteurs de Stokes et de même sur les Wronskien qu'on a calculé précédemment. Comme dans la section précédente on cherche les valeurs propres près de  $E_0$  comme les zéros de la fonction  $W(E) := W(u_0, v_0)$ .

On considère l'équation de Schrödinger avec un potentiel perturbé défini par :

$$P_\varepsilon = -h^2 \Delta_x + V_\varepsilon(x)$$

où  $V_\varepsilon(x) = V_0(x) + i\varepsilon W(x)$ , vérifiant l'hypothèse

$$V_0(-x) = V_0(x)$$

et

$$W(-x) = -W(x)$$

même chose pour  $z \in \mathbb{C}$ .

**Théorème 6.2** *Sous les hypothèses (6.1.2) et (6.1.3), Il existe  $(E, \varepsilon) \in (E_0, \varepsilon_0) \times D(0, \varepsilon_0)$ ,  $u_0(x, \varepsilon, E)$  et  $v_0(x, \varepsilon, E)$  des solutions de l'équation  $(P_\varepsilon - E)u = 0$ ,  $W(E)$  une fonction holomorphe en  $E$*

alors

$$W(E) = h\partial_x u_0(0, \varepsilon, E)v_0(0, \varepsilon, E) - u_0(0, \varepsilon, E)h\partial_x v_0(0, \varepsilon, E),$$

de plus

$$W(E) = h\partial_x u_0(0, \varepsilon, E)\overline{u_0(0, \varepsilon, \bar{E})} + u_0(0, \varepsilon, E)\overline{h\partial_x u_0(0, \varepsilon, \bar{E})}.$$

### 6.2.1 Preuve du Théorème 6.2

On a  $V_\varepsilon(x) = E$ , on sait bien que  $V_\varepsilon(\alpha_0(E)) = E$ , pour  $E \in \mathbb{C}$ , d'après (6.1.2) et (6.1.3) on a  $\blacksquare$

$$\overline{V_\varepsilon(\alpha_0(E))} = \overline{V_\varepsilon(-\alpha_0(E))} = \bar{E}, \quad (6.4.1)$$

alors

$$\begin{aligned} \overline{-\alpha_0(E)} &= \overline{\beta_0(E)} \\ \beta_0(\bar{E}) &= \overline{-\alpha_0(E)}, \end{aligned} \quad (6.4.2)$$

$$PTu_0(x, \varepsilon, \bar{E}) = \overline{u_0(-\bar{x}, \varepsilon, \bar{E})}.$$

en effet

$$v_0(x, \varepsilon, E) = \mathcal{PT}u_0(x, \varepsilon, \bar{E}) = \overline{u_0(-\bar{x}, \varepsilon, \bar{E})}. \quad (6.4.3)$$

Pour  $E \in \mathbb{C}$

$$\overline{V_\varepsilon(\alpha_0(E))} = \bar{E}.$$

aussi on a

$$\overline{V_\varepsilon(-\alpha_0(E))} = \overline{V_\varepsilon(\alpha_0(E))} = \bar{E}, \quad (6.4.5)$$

On applique la notion de la  $\mathcal{PT}$ -symétrie sur l'équation  $P_\varepsilon u_0 = E u_0$ , alors

$$\mathcal{PT}(P_\varepsilon u_0) = P_\varepsilon \mathcal{PT}(u_0) = \overline{E u_0(-x)} \quad (6.4.6)$$

de plus le point tournant qui est en symétrie avec  $\alpha_0(E)$  est  $\beta_0(E)$  et

$$\overline{\beta_0(E)} = \overline{-\alpha_0(E)}$$

Pour  $x \in \mathbb{R}$

$$v_0(x, E) = \mathcal{PT}u_0(x, E) = u_0(-x, \bar{E}) \quad (6.4.7)$$

si  $z \in \mathbb{C}$ , on a

$$v_0(z.E) = \mathcal{PT}u_0(z, E) = \overline{u_0(-\bar{z}, \bar{E})} \quad (6.4.8)$$

En général pour  $j = -1, 0, 1$

$$v_j(z.E) = \overline{u_j(-\bar{z}, \bar{E})} \quad (6.4.9)$$

D'après (3.3.1), (6.4.9), d'ou le résultat.  $\square$

### 6.3 Lemmes Préliminaires

**lemme 6.1** Soit  $W$  une fonction holomorphe en  $E$ , Il existe  $(E, \varepsilon) \in ((E_0, \varepsilon_0) \times D(0, \varepsilon_0))$ , telle que

$$\overline{W(\bar{E})} = W(E).$$

De (5.9.2) on a :

$$W(E) = 4(a(E, \varepsilon; h)e^{\frac{i}{2h}I(E, \varepsilon)} + b(E, \varepsilon; h)e^{-\frac{i}{2h}I(E, \varepsilon)}), \quad (6.5.1)$$

où

$$a, b = 1 + \mathcal{O}(h)$$

ont des développements asymptotiques en puissances de  $h$  dans  $\text{Hol}(\text{vois}(E_0, 0))$ .

**Remarque 6.1** Pour  $E$  et  $\varepsilon$  réels on sait que  $W(E)$  est réel et donc les deux termes dans (6.5.1) sont mutuellement conjugués complexes. Il en résulte d'abord que  $I(E, \varepsilon)$  est réel (comme énoncé dans la proposition 2) et si on veut ensuite prendre  $E$  complexe on a :

**lemme 6.2** Soient  $I(E, \varepsilon), a(E, \varepsilon; h), b(E, \varepsilon; h)$  des fonctions holomorphe en  $(E, \varepsilon) \in (E_0, \varepsilon_0) \times D(0, \varepsilon_0)$ , quand  $E$  et  $\varepsilon$  sont réels on a

$$I(\bar{E}, \varepsilon) = \overline{I(E, \varepsilon)}, \quad (6.5.2)$$

et

$$b(E, \varepsilon; h) = \overline{a(\bar{E}, \varepsilon; h)}$$

pour  $E$  complexe, toujours avec  $\varepsilon$  réel on a,

$$b(E, \varepsilon; h) = \overline{a(\bar{E}, \varepsilon; h)}, \quad (6.4.2)$$

#### 6.3.1 Preuve du Proposition 2

Les  $v_j$  et  $u_j$ ,  $j = -1, 1$  forment une base telle que

$$\begin{cases} v_0(z, E) + v_{-1}(z, E) + v_1(z, E) = 0 \\ u_0(z, E) + u_{-1}(z, E) + u_1(z, E) = 0 \end{cases}$$

implique que

$$\overline{u_0(-\bar{z}, \bar{E})} + \overline{u_{-1}(-\bar{z}, \bar{E})} + \overline{u_1(-\bar{z}, \bar{E})} = 0 \quad (6.6.1)$$

D'autre part  $u_j, v_j$  sont colinéaire pour  $j = -1, 1$  on a

$$\begin{cases} u_{-1}(z, E) = a_{-1}(E)e^{\frac{iI(E)}{h}}v_{-1}(z, E) \\ u_1(z, E) = a_1(E)e^{-\frac{iI(E)}{h}}v_1(z, E) \end{cases}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} u_{-1}(z, \bar{E}) &= \frac{1}{a_{-1}(\bar{E})}e^{\frac{iI(\bar{E})}{h}}v_{-1}(z, \bar{E}) \\ u_1(z, E) &= a_{-1}(E)e^{-\frac{iI(E)}{h}}v_1(z, E) \end{aligned} \quad (6.6.2)$$

De (5.2.9) et (6.6.2), on constate

$$a_{-1}(E) = \frac{1}{a_{-1}(\bar{E})}$$

D'ou

$$I(E) = \overline{I(\bar{E})}$$

on particulier  $I(E)$  est réel pour  $E \in ]E_0 - \varepsilon_0, E_0 + \varepsilon_0[$ .

De la même façon on trouve que

$$b_{-1}(E) = \frac{1}{b_{-1}(\bar{E})} \quad (6.6.3)$$

□

### 6.3.2 Preuve du Théorème 2

D'après (6.5.1), en utilisant les lemme 6.1, lemme 6.2 et la proposition 2, on a :

$$\begin{aligned} W(E) &= \mathcal{W}(u_{-1} + u_1, v_{-1} + v_1), \\ &= \mathcal{W}(e^{\frac{iI(E)}{h}}a_{-1}v_{-1} + e^{-\frac{iI(E)}{h}}a_1v_1, v_{-1} + v_1), \\ &= 4a_1(E)e^{-\frac{iI(E)}{h}}\left(1 - \frac{a_{-1}(E)}{a_1(E)}e^{\frac{2iI(E)}{h}}\right)\mathcal{W}(v_1, v_{-1}). \end{aligned} \quad (6.7.1)$$

D'après (6.7.1), nous remarquons que les valeurs propres au voisinage de  $E_0$  sont données par

$$W(E) = 0$$

ce qui implique que :

$$1 - \frac{a_{-1}(E)}{a_1(E)}e^{\frac{2iI(E)}{h}} = 0 \quad (6.7.2)$$

et (6.7.2) peut s'écrire

$$\frac{2i}{h}I(E) - \frac{h}{i} \ln \frac{a_{-1}(E)}{a_1(E)} = 2k\pi h, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (6.7.3)$$

on note bien ici que  $\frac{h}{i} \ln \frac{a_{-1}(E)}{a_1(E)}$  est réel pour  $E \in \mathbb{R}$  et  $|a_{-1}(E)| = |a_1(E)| = 1$ .  
ce qui équivaut à la condition de la quantification de Bhor Sommerfeld,

$$I(E) = 2\pi kh, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (6.7.4)$$

et  $\partial I(E, h) > 0$ , donc  $I(\cdot, h)$  est holomorphe au vois( $E_0, \mathbb{C}$ ) sur vois( $I(E_0), \mathbb{C}$ ) donne une conséquence des valeurs propres sur l'axe réel pour  $E \in ]E_0 - \varepsilon_0, E_0 + \varepsilon_0[$ ,

$$E_k = I^{-1}(2\pi kh + \mathcal{O}(h^2))$$

Explicitons alors (5.10.1) :

$$W(E) = 2be^{-\frac{i}{2h}I} \left( \exp \frac{i}{h} (I(E, \varepsilon) + h^2 r) + 1 \right),$$

où

$$r = \frac{1}{ih} \ln \frac{a(E, \varepsilon; h)}{b(E, \varepsilon; h)}$$

□

# Annexe A

## 6.4 Eléments de mécanique quantique

En physique quantique, les questions de stabilité de la dynamique engendrée par une perturbation d'un hamiltonian ont été étudiées ces dernières années. Même dans le cas de l'opérateur de Schrödinger. L'étude de la dynamique peut être très difficile ; aussi on aimerait pouvoir disposer de n'importe quelles approximations physiques raisonnables nous permettant de prévoir quelques propriétés quantiques d'un système. La mécanique classique, qui, sur beaucoup de points est plus simple que la mécanique quantique, décrit parfaitement bon nombre de systèmes physiques élémentaires. Ainsi on peut espérer que la mécanique quantique soit une généralisation de la mécanique classique, dans le sens où on aimerait récupérer les propriétés classiques d'un système en faisant des approximations sur les propriétés quantiques de ce même système. En fait, le principe de correspondance de Bohr affirme que la mécanique classique est dans un sens la limite de la mécanique quantique quand  $h$  tend vers zéro.

Ainsi, une des voies possibles pour l'étude d'un opérateur perturbé consiste à se placer à l'interface entre théorie classique et quantique. Le régime appelé semi-classique, dans lequel ces deux théories se recouvrent, correspond à des systèmes dont les actions mises en jeu sont beaucoup plus grandes que la constante de Planck  $h$ . Mathématiquement l'analyse semi-classique consiste donc à étudier les propriétés spectrales d'un opérateur auto-adjoint sur un hilbert quand  $h$  tend vers zéro.

### 6.4.1 Notion de mécanique classique

La trajectoire  $\mathbb{R} \ni t \mapsto x(t) \in \mathbb{R}$  l'espace à un dimension, d'une particule ponctuelle de masse  $m$  soumise à un champ de force  $F(x)$  qu'on suppose indépendant du temps pour simplifier, est décrite par la loi de Newton (ou Principe Fondamentale de la Dynamique).

$$m\ddot{x}(t) = F(x(t)) \tag{7.1.1}$$

où la trajectoire  $\mathbb{R} \ni t \mapsto x(t) \in \mathbb{R}$

la dérivé  $\dot{x}(t)$  est la vitesse de la particule à l'instant  $t$  et  $\ddot{x}(t)$  son accélération. De manière équivalent, l'équation (7.1.1) peut s'écrire

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{1}{m}\xi(t) \\ \dot{\xi}(t) = -F(x) \end{cases}$$

où

$$\xi(t) := mx'(t)$$

est le moment de la particule.

La courbe  $(x(t), \xi(t))$  apparaît alors comme courbe intégrale du champ de vecteur hamiltonien  $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  défini par

$$H(x, \xi) = \begin{pmatrix} \xi/m \\ F(x) \end{pmatrix}$$

En raison des lois de transformation sous changement de coordonnées par exemple, il est important de distinguer les variables  $x$  et  $\xi$ .

Lorsque le champ de force dérivé d'un potentiel, i.e  $F(x) = -\nabla V(x)$  pour une certaine fonction  $V$ , l'énergie de la particule, définie comme somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle

$$p(t) = \frac{1}{2m}\xi(t)^2 + V(x(t)) = Ec + Ep,$$

Elle est indépendante du temps, en effet :

$$\partial_t p(t) = \frac{1}{m}\xi(t) \cdot \partial_t \xi(t) + \nabla V(x(t)) \partial_t x(t) = 0,$$

et constante le long de la trajectoire  $t \mapsto \exp(tH)(x, \xi)$

En mécanique quantique  $Ec$  est représentée par l'observable quantique

$$Ec = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2m}\xi^2 \longrightarrow \frac{\hbar^2}{2m} \left[ \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \right]$$

avec  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  et  $h$  est la constante de Planck, alors l'énergie totale  $E_t$  est associée à l'observable

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(x)$$

qui est appelé l'opérateur de Schrödinger. En mécanique classique la loi de Newton permet de voir l'évolution de la particule à condition de savoir sa position initiale et son impulsion, par contre en mécanique quantique on utilise encore l'analogie avec la mécanique d'onde.

On note aussi que le champ hamiltonien  $H$  s'obtient à partir de la fonction

$$p : (x, \xi) \mapsto \frac{1}{2m}\xi^2 + V(x)$$

et l'on écrit  $H = H_p$  :

$$H(x, \xi) = H_p(x, \xi) = \partial_\xi p(x, \xi) \partial_x - \partial_x p(x, \xi) \partial_\xi.$$

**Définition** *Une variété symplectique est une variété différentielle  $M$  munie d'une 2-forme différentielle fermée et non dégénérée  $\omega$ . Une telle forme s'appelle une forme symplectique.*

# Annexe B

## 6.5 Théorème spectral

### 6.5.1 Rappels et définitions

Rappelons tout d'abord qu'un espace de Hilbert est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel normé dont la norme est issu d'un produit scalaire complexe. De plus nous supposerons généralement que nos espaces de Hilbert seront séparable.

**Définition** *Un ensemble de vecteurs, dit « espace vectoriel » est un ensemble de choses que l'on peut :*

– additionner entre elles,

– multiplier par des nombres,

*avec toutes les propriétés naturelles de cette addition et de cette multiplication (existence d'un vecteur nul, associativité de, distributivité etc).*

**Définition :** *L'adjoint d'un opérateur  $(D, P)$  est l'opérateur  $(D^*, P^*)$  dont le domaine  $D^*$  est l'ensemble des  $u \in L^2(\mathbb{R})$  tel que  $v \rightarrow \langle u, Pv \rangle$ , s'étend en une forme antilinéaire continue sur  $L^2(\mathbb{R})$ . , il existe  $w$  de  $L^2(\mathbb{R})$  tel que  $\langle u, Pv \rangle = \langle w, v \rangle$ , pour tout  $v \in L^2(\mathbb{R})$ , et  $P^*$  est l'opérateur qui à  $u \in D^*$  associe ce  $w$ .*

**Définition** *Soit  $P$  un opérateur défini de  $L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  de domaine dense  $D(P)$ . On dit que  $P$  est symétrique si*

$$(Pu|v) = (u|Pv), \quad \forall u, v \in D(P)$$

*Si  $P \subset P^*$ , c'est à dire  $D(P) \subset D(P^*)$  et*

$$P^*u = Pu \quad \forall u \in D(P)$$

*alors  $P$  est autoadjointe.*

**Définition** *Soit  $P$  un opérateur symétrique. On dit que  $P$  est essentiellement autoadjoint si sa fermeture est autoadjoint.*

**Théorème** *le spectre d'un opérateur autoadjoint est réel et celui d'un opérateur autoadjoint positif est positif. Les sous espaces propre correspondants à deux valeurs propres distinctes d'un opérateur autoadjoint, sont orthogonaux.*

## 6.6 Espaces de Symboles

**Définition B.2.1** Soit  $g$  une fonction réelle définie sur un ensemble  $E$ , On note par  $O(g)$  toute fonction  $f$  définie sur  $E$ , il existe une constante  $C$  telle que

$$f(x) \leq Cg(x); \forall x \in E$$

On appelle fonction d'ordre toute fonction  $g \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^+)$  telle que pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^d$

$$\partial_x^\alpha g = O(g).$$

uniformément sur  $\mathbb{R}^d$ .

**Exemple B.2.1** La fonction définit par

$$\begin{aligned} \langle x \rangle^m &: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \langle x \rangle^m = (1 + |x|^2)^{\frac{m}{2}} \end{aligned}$$

où  $m \in \mathbb{R}$ , est une fonction d'ordre.

On définit l'espace semi classique des symboles par

**Définition B. 2.2** [32] Soit  $g$  une fonction d'ordre, on appelle espace de symboles et on note  $S_d(g)$  l'espace des fonctions  $a = a(x; h)$  définie sur  $\mathbb{R}^d \times ]0; h_0[$  pour  $h_0 > 0$  indéfiniment dérivable par rapport à  $x$  tel que  $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d$

$$\partial_x^\alpha a(x; h) = O(g(x))$$

uniformément sur  $\mathbb{R}^d \times ]0; h_0[$ .

L'ellipticité des symboles étant importante, on la définit par

**Proposition B.2.1** Un symbole  $a \in S_d(g)$  est dit elliptique s'il existe une constante  $C > 0$  telle que :

$$|a(x; h)| \geq \frac{1}{C} g(x)$$

$\forall (x; h) \in \mathbb{R}^d \times ]0; h_0[$  avec  $h_0 > 0$ .

On a également le résultat suivant :

**Définition B.2.3** Soient  $a \in S_d(g)$  et  $(a_j)$ ,  $j \in \mathbb{N}$  une suite de symboles dans  $S_d(g)$  : On dit que  $a$  est asymptotiquement équivalent à la série formelle  $\sum_{j=0}^{\infty} a_j h^j$  dans  $S_d(g)$  et on note

$$a \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j h^j$$

si et seulement si pour tout  $N \in \mathbb{N}$  et pour  $\alpha \in \mathbb{N}^d$  il existe  $h^N$ ,  $\alpha > 0$  et  $C_{N,\alpha} > 0$  tel que

$$\left| \partial_x^\alpha \left( a - \sum_{j=0}^{\infty} a_j h^j \right) \right| \leq C_{N,\alpha} h^N g$$

uniformément sur  $\mathbb{R}^d \times ]0; h_0[$  : En particulier quand tout les  $a_j$  sont identiquement nuls on dira que  $a = O(h^\infty)$  dans  $S_d(g)$ .

# Conclusion et Perspectives

Dans cette thèse de Doctorat, nous nous sommes intéressés à étudier la réalité du spectre de l'opérateur de Schrödinger semi classique  $\mathcal{PT}$ -symétriques possède un seul puits de potentiel analytique sur la droite réelle avec des petites perturbations.

Le résultat qu'on a obtenu est très important pour les opérateurs non autoadjoint (non-Hermitien) de dimension 1 de la Mécanique quantique. L'outil utilisé dans cette étude étant la théorie de la  $\mathcal{PT}$ -Symétrie et la méthode BKW complexe. Cette nouvelle théorie est la plus appropriée dans l'étude de la réalité des valeurs propres des opérateurs non autoadjoint. Dans cette thèse, on a commencé par généraliser des résultats concernant la méthode BKW complexe par montrer quelques nouvelles propriétés sur la réalité des valeurs propres pour les opérateurs différentielles d'ordre 2. On a également démontré d'autres résultats semi classique utilisant le Wronskien pour avoir les valeurs propres qui ne sont que les zéros du Wronskien.

On a prouvé dans le cinquième chapitre utilisant la quantification de Bohr Sommerfeld sans  $\mathcal{PT}$ -symétrie que les valeurs propres sont réels pour  $\varepsilon \neq 0$  c'est le cas autoadjoint de l'opérateur de Schrödinger.

Dans le sixième chapitre nous avons utilisé la technique de la  $\mathcal{PT}$ -symétrie pour démontrer la réalité des valeurs propres de l'opérateur de Schrödinger pour un puits simples sous la perturbation  $\varepsilon$  ( $\varepsilon \neq 0$ ).

Pour conclure, nous allons proposer quelques pistes de recherche qui ne sont pas encore abordées dans cette thèse :

1- Dans la même analogie suivie au cours cette thèse de Doctorat, peut-on appliquer la théorie de la  $\mathcal{PT}$ -symétrie pour un opérateur de Schrödinger non autoadjoint qui possèdent un seul puits et un double puits de potentiel non analytique ?

2- Que peut on dire pour les valeurs propres d'un opérateur de Schrödinger non autoadjoint avec un potentiel non analytique en dimension  $n$  ?

3- Que peut on dire pour le cas  $\mathcal{PT}$ -symétrie d'un opérateur de Schrödinger non autoadjoint qui possède un double puits en dimension  $n$  ? (voir [1]).

## Principales notations

$D_x = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_n}, i^2 = -1$	la différentielle au point $x$ .
$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$	opérateur de Laplacien.
$\text{Hol}(\Omega)$	un espace holomorphe.
$\Omega$	ouvert dans $\mathbb{C}$ ,
$U$	un ouvert dans $\mathbb{C}$ .
$D(E_0, \varepsilon_0)$	le disque ouvert dans $\mathbb{C}$ .
$\mathcal{P}$	opérateur de la parité.
$\mathcal{T}$	la conjugaison complexe (time-reversal).
$h$	la constante de planck.
$D^*$	Domaine adjoint de l'opérateur $P$ .
$\langle \cdot, \cdot \rangle = (\cdot   \cdot)$	produit scalaire,
$Gl$	groupe linéaire.
$\arg$	argument de nombre $z$ .
$\text{vois}$	voisinage.
$\text{int}$	intérieur.
BKW	Brillouin-Kramer-Wentzel.
$\mathcal{W}$	Wonskien.
$\wedge$	le produit extérieur de la 1-forme de $\mathbb{R}^2$ .
$\sigma$	la 2-forme symplectique.
$\kappa$	application ( <i>la transformation symplectique</i> ).
$H$	Hamiltonien.
$L^2$	espace des fonctions de carré intégrable.
$\text{Im}$	partie imaginaire.
$C^\infty$	fonction indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ .
$\mathcal{N}$	Le noyau.
$\text{mod}$	mode.

# Bibliographie

- [1] A.Benbernou, N. Boussekkine, N. Mecherout, T.Ramond, J. Sjöstrand. Non-real eigenvalues for  $\mathcal{PT}$ -symmetric double wells, 2015, <https://arxiv.org/pdf/1272634>
- [2] C.M. Bender. Introduction to  $\mathcal{PT}$  symmetric Quantum Theory, <http://arxiv:quant-ph/0501052v1> 11 Jan (2005), 1-14.
- [3] C. M. Bende, M. V. Berry et A. Mandilara. Generalized.  $\mathcal{PT}$  symmetry and, Real Spectra. *J. Phys. Math. Gen.*35, (2002), 467-471.
- [4] C. M. Bender, S. Boettcher et P. N. Meisinger.  $\mathcal{PT}$  Symmetric Quantum Mechanics *Journal of Mathematical Phys.* 40, <http://arxiv:quant-ph/9809072v1>, 24 Sep (1998), 1-3.
- [5] C.M. Bender, H.F.Jones Wkb analysisof  $\mathcal{PT}$ -symmetric Sturm-Liouville problems. *J. Phys. Math. Gen*, 23 Octobre (2012), 1-12.
- [6] C. M. Bender, A. Fring, U. Günther and H. Jones (Editors). Special issue on quantum physics with non-Hermitian operators, *J. Phys. A : Math. Theor*, 45(44), 2012.
- [7] C. M. Bender, P. D. Mannheim.  $\mathcal{PT}$  symmetry and necessary and sufficient conditions for the reality of energy eigenvalues. *Phys. Lett.* 374, (2010), 1616–1620.
- [8] E. Caliceti, S. Graff. A criterion for the reality of the spectrum of  $\mathcal{PT}$  symmetric Schrödinger operators with complex-valued periodic potentials, (2005), 1-12
- [9] E. Caliceti , S. Graffi. On a Class of Non Self-Adjoint Quantum Nonlinear Oscillators with Real Spectrum, *J.Phys.N.Math.* Vol 12 Sup 1 (2005), 138-145.
- [10] E. Caliceti, S. Graffi. A criterion for the reality of the spectrum of  $\mathcal{PT}$ -symmetric Schrödinger operators with complex-valued periodic potentials. *Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl*, 19(2) : (2008),163–173.
- [11] E. Caliceti et S. Graffi. Reality and non-Reality of the spectrum of  $\mathcal{PT}$ -symmetric operators : Operator-theoretic criteria, *Parama Journal of Physics*, Indian Academy of Sciences Vol 73, No2, August 2009, 241-249.
- [12] E. Caliceti, S. Graffi. An existence criterion for the  $\mathcal{PT}$ -symmetric phase transition. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 19(7) : (2014), 1955–1967.
- [13] E. Caliceti, F. Cannata, and S. Graffi. Perturbation theory of  $\mathcal{PT}$  symmetric Hamiltonians. *J.Phys.A*, 39(32) :10019-10027, 2006.
- [14] E. Caliceti, F. Cannata, and S. Graffi.  $\mathcal{PT}$  Symmetric Schrödinger Operators : Reality of the Perturbed Eigenvalues, *Symmetry, Integrability and Geometry : Methods and Applications SIGMA* 6 (2010), 9-8 pages.

- 
- [15] E. Caliceti, S. Graffi, and J. Sjöstrand. Spectra of  $PT$ -symmetric operators and perturbation theory. *J. Phys. A*, 38(1) :185–193, 2004, [http://arxiv:math-ph/0407052v1](http://arxiv.org/math-ph/0407052v1).
- [16] E. Caliceti, S. Graffi, and J. Sjöstrand.  $PT$  symmetric non-self-adjoint operators, diagonalizable and non-diagonalizable, with real discrete spectrum. *J. Phys. A*, 40(33) : (2007), 10155–10170 <http://arxiv.org/pdf/0705.4218v1.pdf>.
- [17] Y. Colin de Verdière. Analyse semi-classique problèmes, méthodes, résultats, May 13, 2004.
- [18] Y. COLIN DE VERDIÈRE. Bohr-Sommerfeld rules to all orders , *Henri Poincaré Acta*, 6, (2005), 925-936.
- [19] Y. Colin de Verdière. Méthode semi-classique et théorie spectrale, Cours en cours de rédaction.
- [20] Y. Colin de Verdière, B. Parisse. Équilibre instable en régime semi-classique.II. Conditions de Bohr Sommerfeld, *Annales de l'I.H. section A* tome 61, n°3 (1994), p 347 – 367.
- [21] M. Dimassi and J. Sjöstrand. Spectral asymptotics in the semi-classical limit, volume 268 of London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [22] DUC TAI TRINH. Coefficients de stokes du modèle cubique : point de vue de la résurgence quantique, Vol.XIV, no 1, (2005), p71-103
- [23] L.C.Evans and M.Zworski ; Lectures on semiclassical analysis(1968), <http://mathh.berkeley.edu/~zworski/semiclassical.pdf>.
- [24] M. Fedoriuk. Méthodes asymptotiques pour les équations différentielles ordinaires, (1987), 200-219.
- [25] C. Gérard and A. Grigis. Precise estimates of tunneling and eigenvalues near a potential barrier, *J. Differential Equations*, 72(1), (1988), 149–177,.
- [26] A. Grigis, J. Sjöstrand. *Microlocal analysis for differential operators, an introduction*, London Math. Soc. Lect. Notes ser. 196, Cambridge University Press (1994).
- [27] B. HELFFER. 30 ans d'analyse semi-classique bibliographie commentée, Notes d'exposé, <http://www.math.u-psud.fr/helffer/histoire2003.ps>, 2003.
- [28] M. Hitrik, J. Sjöstrand. Non-selfadjoint perturbations of self-adjoint operators in 2 dimensions IIIa. One branching point, *Canad. J. Math.* Vol. 60(3), (2008), 572-657.
- [29] L. Hörmander. The Analysis of linear Partial Differential Operators, Vols. I to IV. Springer Verlag (1985).
- [30] G. Levai and M. Znojil. Systematic search for  $\mathcal{PT}$  symmetric potentials with real, energy spectra, *J. Phys. Math. Gen* 33 (2000), 71-65.
- [31] O. Lablée. Une vue panoramique sur l'analyse semi-classique, 2008.
- [32] A. Martinez. An introduction to semiclassical and microlocal analysis, Universitext, Springer-Verlag, New York, 2002.
- [33] V.P.Maslov. Théorie des perturbations et Méthodes Asymptotiques, Dunod, Paris (1972).
- [34] V.P.Maslov. The complex WKB method for nonlinear equations. Linear theory Vol, 16, Progress in physics, 1994.

- 
- [35] N. Mecherout, N. Boussekkine, T. Ramond, J. Sjöstrand.  $\mathcal{PT}$ -symmetry and Schrödinger operators. The double well case, *Mathematische Nachrichten Journal* Vol , No (201500075.), 2015, Accepted.
- [36] A. Melin and J. Sjöstrand. Bohr-Sommerfeld quantization condition for non-selfadjoint operators in dimension 2. *Astérisque*, (284) : (2003), 181–244.
- [37] W.B. Montrieux, J. Sjöstrand. Almost sur Weyl asymptotics for non-self-adjoint elliptic operators on compact manifolds, *J. Phys. A*, <http://arxiv.org/pdfs/0903.2937v2.pdf>, (2009)
- [38] A. Mostafazadeh. Pseudo-Hermiticity versus  $PT$  symmetry : the necessary condition for the reality of the spectrum of a non-Hermitian Hamiltonian, *J. Math. Phys.*, 43(1) : (2002), 205–214.
- [39] A. Mostafazadeh. Pseudo-hermiticity versus  $PT$ -symmetry. II. A complete characterization of non-Hermitian Hamiltonians with a real spectrum. *J. Math. Phys.*, 43(5) : (2002), 2814–2816.
- [40] A. Mostafazadeh. Pseudo-Hermiticity versus  $PT$ -symmetry. III. Equivalence of pseudo-Hermiticity and the presence of antilinear symmetries. *J. Math. Phys.*, 43(8) :3 (2002), 944–3951.
- [41] A. Mostafazadeh. Pseudo-Hermitian description of  $PT$ -symmetric systems defined on a complex contour, *J. Math. Phys.*, 38(14) :3213–3234, 2005, <http://arxiv.org/pdf/quant-ph/0410012v3>.
- [42] L. Pontriaguine, *Equations différentielles ordinaires* édition de Moscou, traduction française édition Mir (1975).
- [43] T. Ramond, *Analyse Semiclassique, Résonances et Contrôle de l'équation de Schrödinger*, cours mathématiques Université Paris Sud, (UMR CNRS 8628), France, Juin (2005), 2-72.
- [44] V. Roos, Différents types de solutions à l'équation de Hamilton-Jacobi, 1 octobre 2012.
- [45] K.C. Shin. On the reality of the eigenvalues for a class of  $PT$  symmetric Oscillators, January 20, 2002.
- [46] P. Siegl.  $\mathcal{PT}$ -symmetric operators : introduction and new results, Laboratoire Astroparticules et Cosmologie, Université Paris 7, France, séminaire (2011), 2-20.
- [47] J. Sjöstrand. Symmetries and real eigenvalues of non-self-adjoint operators, Bernard's Birthday Conference, Sept. 2009
- [48] J. Sjöstrand.  $\mathcal{PT}$ -symmetry and Weyl asymptotics, <http://arxiv.org/pdf/1105.4746>, Preprint May 2011.
- [49] J. Sjöstrand. *Non-self-adjoint differential operators, spectral asymptotics and random perturbations*, lecture notes, en préparation.
- [50] J. Sjöstrand. B. Helffer Multiple wells in The semi classical Limit I, *Comm in Partial Differential Equations*, 9(4), (1984), 337-408.
- [51] J. Sjöstrand and M. Zworski. Elementary linear algebra for advanced spectral problems. *Ann. Inst. Fourier Grenoble*, 57(7) : (2007), 2095–2141.
- [52] A. Voros. *Spectre de l'équation de Schrödinger et méthode BKW*, Publications Mathématiques d'Orsay 81, 9. Université de Paris-Sud, Département de Mathématique, Orsay, 1981.

- [53] M. Znojil, F. Cannata, B. Bagchi, and R. Roychoudhury. Supersymmetry without Hermiticity within  $\mathcal{PT}$  symmetric quantum mechanics. *Phys. Lett. B*, 483(1-3) : (2000), 284–289.