MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS - MOSTAGANEM

Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique
Département de Mathématiques et d'Informatique
Filière : Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES
Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques
Option : **Modélisation, Contrôle et Optimisation**

THEME :
Sur les applications Conforme-Harmoniques dans les variétés Riemanniennes

Etudiante : **Beddani Fatima Zohra**

Président : Mme AZIZ KARIMA
Encadrant : Mr BELARBI LAKEHAL
Examinateur: Mr ANDASMAS MAAMAR

Année Universitaire 2016/2017

Table des matières

INTRODUCTION

Soient (M, g) et (N, h) deux variétés Riemanniennes, dans tout la suite, on consédérera que ces variétés sont compactes et de classe C^{∞}. On appelle énergie des applications de (M, g) dans (N, h) ,la fonctionnelle $E_g(\varphi)$ définie par :

$$E_g(\varphi) = \frac{1}{2}\int_M |\, T(\varphi) \,|_{g,h}^2 \, dvol_g \quad .$$

Les applications harmoniques de (M, g) dans (N, h) sont définis comme les points critiques de l'énergie et un résultat classique caractérisées comme étant les solutions de l'équation $\delta^g T\varphi = 0, \delta^g$ désigne la divergence du fibré $\Omega^1(M) \otimes \varphi^* TN$ construit canoniquement avec les connexions de Levi-Civita de g et h .

Dans le cas des applications d'une surface à valeurs dans une variété Riemannienne quelconque, il est connu que l'énergie ne dépend que de la classe conforme de la métrique de départ, c'est à dire que pour deux métriques conformes g et $\overline{g} := e^{2w}g$ sur une variété de dimension 2, on a :

$$E_{\overline{g}}(\varphi) = E_g(\varphi) \quad \text{et } \delta^{\overline{g}} T\varphi = e^{2w}\delta^g T\varphi \quad .$$

Mon travail est divisé en quatre chapitres :

Le première chapitre à d'écrire généralitées sur les variétés Riemanniennes, variété différentiable, espase tangent et propriétés, Connexion lineaires, connexions de Levi-Civita, métriques Riemanniennes, tenseur de courbure de Riemann, tenseur de Ricci, courbure scalaire, courbure sectionnelle, gradient et Laplacien sur une variété Riemannienne, géodésiques .

Dans deuxième chapitre en donnant les définitions sur les applications harmoniques ainsi l'étude la variation de l ènergie en première et deuxième ordre avec des exemples sur les applications harmoniques.

Le troixième chapitre nous définison la métrique de Poincaré .

En fin le derinière chapitre est consacré sur les applications Conformes-harmoniques .

Chapitre 1

Généralites sur les variétés Riemanniennes

1.1 Variété différentiable

1.1.1 Variété topologiques

Une variété topologique M de dimension n est un espace topologique[1] non vide, séparé et à base dénombrable d'ouverts (U_i) , dont tout point posséde un voisinage homéomorphisme à un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Les couples (U_i, φ_i) formés des ouverts U_i et des homéomorphismes

$$\varphi_i \quad : \quad U_i \quad \mapsto \quad \varphi_i (U_i)$$

sont appellés cartes de M.

1.1.2 Structures différentiables

Soit M une variété topologique de dimension n et $\left\{(U_i; \varphi_i) \left(U_j; \varphi_j\right)\right\}$ sont des cartes sur M.

Définition 1.1.1 *On dit que les deux cartes $(U_i; \varphi_i)$ et $\left(U_j; \varphi_j\right)$ sont compatibles si et seulement si :*

i) $U_i \cap U_j = \emptyset$ *où bien,*

ii) $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ *.Alors :*

l'application de changment de cartes $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \mapsto \varphi_j(U_i \cap U_j)$ *est difféomorphisme .*

Définition 1.1.2 *une variété topologique* M *munie d'une structure différentiable est appellée variété différentiable.*

1.1.3 Exemples des variétés différentiables

L'espace $\mathbb{R}^n$:

Muni de l'application :

$$Id_{\mathbb{R}^n} \;:\; x \;\mapsto\; x$$

L'espace $\mathbb{R}^n$ est une variété différentiable de dimension n et de C^∞.

Surface régulière de $\mathbb{R}^3$ **:**

Soit f une application d'un ouvert U de $\mathbb{R}^3$à valeurs réelles, de classe C^k avec $(k \geq 1)$ et soit

$$M = f^{-1}(0)$$

l'ensemble des éléments $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ supposé non vide.
On dit que M est régulière si,pour tout $p \in M$, le gradient

$$(\nabla f)(p) = (\partial f \diagup \partial x_1(p), \partial f \diagup \partial x_2(p), \partial f \diagup \partial x_3(p))$$

de f est non nul.

Proposition 1.1.1 *Si* M *est réguliére,alors* M *est une variété différentiable de dimension* 2 *de classe* C^k.

La sphère S^n **:**

Pour chaque entier naturel n, on dénote par S^n la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$S^n = \left\{(x_1, ..., x_n, x_{n+1}) \mid x_1^2 + ... + x_n^2 + x_{n+1}^2 = 1\right\}$$

et, désignonspar $(e_i)\, 1 \leq i \leq n$ la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$ et par E_n l'hyperplan de $\mathbb{R}^{n+1}$ défini par l'équation $x_{n+1} = 0($ E_n est appelé hyperplan équatorial de S^n), on identifie évidemment l'hyperplan équatorial avec $\mathbb{R}^n$.

1.1.4 Espase tangent et propriétés

Soit M est variété différentiable de dimension n de classe C^{∞} .Nous allons définir la notion d'espace tangent.

Définition 1.1.3 *On appelle courbe différentiable sur une variété M de classe C^{∞}, la donnée d'une application*

$$\gamma \;:\;]-\varepsilon, \varepsilon[\;\mapsto\; M$$

de classe C^{∞}.Soit $I(p)$ l'algèbre des fonctions différentiables sur un voisinage d'un point p et $\gamma(t)$ une courbe différentiable tel que $\gamma(0) = p$.

Définition 1.1.4 *Un vecteur tangent à la courbe $\gamma(t)$ au point p est une application C définie par :*

$$\begin{array}{ccc} C \;:\; I(p) & \mapsto & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & C(f) = \frac{df(\gamma(t))}{dt} \,|_{t=0} \end{array}$$

Théorème 1.1.1 *L'ensemble des vecteurs tangente à M en forme un espace vectoriel de dimension "n".*

Définition 1.1.5 *Un champ de vectreurs X sur une variété différentiable M est une application qui associe à tout point $p \in M$ un vectreur tangent à M au point p, tel que ,pour tout carte $\varphi : U \mapsto V$ avec les coordonnées locales $\{x_1, ..., x_n\}$les coefficients $X^i : U \mapsto \mathbb{R}$ dans l'application :*

$$X = \sum_{i=1}^{n} X^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \,|_p$$

Définition 1.1.6 *Sont des fonctions différentiables,*

$$X^i = X^i(x_1, ..., x_n)$$

Une autre notation courante est

$$X = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

L'ensemble de tous les champs de vecteurs différentiables sur M est un R-espace vectoriel,on le note $N(M)$.

1.1.5 Connexion lineaires sur une variété

Une connexion lineaire ∇ sur une variétéM est une connexion lineaire sur la fible tangent $(TM, \pi, M) = TM$.

Théorème 1.1.2 *Le tenseur de torsion T est le tenseur de courbure R d'une connexion lineaire ∇ sont exprimées par :*
$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$, pour tous champs de vecteurs X et Y sur M.
$R(X,Y)\,Z = [\nabla_X, \nabla_Y]\,Z - \nabla_{[X,Y]}Z$,pour tous champs de vecteurs X, Y et Z sur M.

1.2 Variétés Riemanniennes

1.2.1 Metriques Riemanniennes

Une métrique Riemannienne sur M est un champs de tenseurs covariants g de degré 2 vérifient :
$i)$ $g(X,X) \geq 0$ et $g(X,X) = 0$ si et seulement si $X = 0$, pour tout éléments X de TM.
ii)$g(X,Y) = g(Y,X)$,pour tous éléments X et Y de TM.
Si (x^i), $1 \leq i \leq n$ un système de coordnnées locales en un point x de M. Alors :

$$g = \sum g_{ij} dx^i dx^j$$

Définition 1.2.1 *Une variété différentiable M, munie d'une métrique Riemannienne g est appellé variété Riemannienne[2].On note (M,g).*

Exemple 1.2.1 *Une métrique Riemannienne sur $\mathbb{R}^n$ est donnée par*

$$g_{ij}\,(x_1, .., x_n) := \delta_{ij}\,(1 + x_i x_j)$$

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1+x_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1+x_2^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1+x_n^2 \end{pmatrix}$$

De meme, on peut définir de nombreuses métriques simplement en choissant arbitrairement les coefficients g_{ij}, à condition seulement que l'on à définie positive ou non dégénérence de la métrique .

Exemple 1.2.2 *Le demi plan supèrieur de poincaré* $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y > 0\}$ *avec la métrique*

$$g_{ij}(x,y) = \frac{1}{y^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est une variété riemannienne.

1.2.2 Connexion de Lèvi-Civita

On appelle connexion de **Lèvi-Civita** sur (M,g) ,l'unique connexion linéaire ∇ vérifiant :

i) ∇ est métrique $(\nabla g = 0)$ et

ii) ∇ est sans torsion $(T = 0)$

Si $(x^i), 1 \leq i \leq n$ est un système de coordonnées en un point x de (M,g) alors :

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \sum_{i=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \partial_k$$

Où $\partial_k = \frac{\partial}{\partial_k}$,$k = 1, ..., n$.

1.2.3 Symboles de christoffel d'une variété Riemannienne

Soit (M,g) on définit les symboles de christoffel[3] Γ_{ij}^k par :

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} g^{kl}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l}\right)$$

si x_i $1 \leq i \leq n$ est un systéme de coordonnées locales en un point x de (M,g).

Proposition 1.2.1 *Les composantes* T_{jk}^i *et* R_{jkl}^i *de tenseur de torsion* T *et de courbure* R *d'une variété Riemannienne* (M,g) *de dimension* n *sont :*

$$T_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i - \Gamma_{kj}^i$$

$$R_{jkl}^i = \left(\partial\Gamma_{lj}^i \big/ \partial x^k - \partial\Gamma_{kj}^i \big/ \partial x^i\right) + \sum \Gamma_{ij}^m \Gamma_{km}^i - \Gamma_{kj}^m \Gamma_{lm}^i$$

1.2.4 Tenseur de courbure de Riemann

Soit R le tenseur de courbure de (M, g) le tenseur de courbure de Riemann[3] de (M, g), encore noté R est le tenseur covariant de degré 4 définit par :

$$R(X, Y, Z, T) = g(R(Z, T)Y, X)$$

Pour tous champs de vecteurs X, Y, Z et T sur (M, g).
Si en coordonnées relativement à un point x de (M, g), R^i_{ikl} (resp g_{ij}) sont les composantes du tenseur de courbure (resp du tenseur métrique)alors les composantes R_{ijkl} du tenseur de courbure de Riemann sont donnée par :

$$\begin{aligned} R^l_{ijk} &= \frac{\partial \Gamma^l_{jk}}{\partial x_i} - \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x_j} + \sum_{m=1}^{n} \left(\Gamma^l_{im} \Gamma^m_{jk} - \Gamma^l_{jm} \Gamma^m_{ik} \right) \\ R_{ijkl} &= \sum_m g_{im} R^m_{jkl} \end{aligned}$$

1.2.5 Tenseur de Ricci

On appelle tenseur de Ricci r de (M, g), la trace de l'application linéaire $Z \mapsto R(X, Z)Y$, r est tenseur covariant de degré 2.
En cordonnées locales relativement à un point x de (M, g), les composantes r_{ik} du tenseur de Ricci sont :

$$r_{ik} = g^{li} R_{lijk}$$

1.2.6 Métrique D'einstein

La métrique g de (M, g) est dite d'einstein si $r = \lambda g$ oū λ est une constante .La variété (M, g) est alors appellée variété d'Einstein.

1.2.7 Courbure scalaire

(ou **courbure de Ricci**, ou **scalaire de Ricci**)[7] est l'outil le plus simple pour décrire la courbure d'une variété Riemannienne. Il assigne à chaque point d'une variété Riemannienne un simple nombre réel caractérisant la courbure intrinsèque de la variété en ce point.

Dans un espace à deux dimensions, la courbure scalaire caractérise complètement la courbure de la variété. En dimension ≥ 3, cependant, il n'y suffit pas et d'autres outils sont nécessaires. La courbure scalaire, habituellement dénotée R est définie comme la trace du tenseur de Ricci relativement à la métrique g.

$$R = tr_g(Ric)$$

On peut aussi écrire

$$R = g^{ij} R_{ij}$$

avec

$$Ric = R_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

1.2.8 Courbure Sectionnelle

Sur (M, g) on définit la fonction K biquadratique de courbure comme suit

$$K(u, v) = g(R(u, v)u, v)$$

pour tout $(u, v) \in \Psi(M) \times \Psi(M)$ et K est définit dans les sections différentiables du fibré tangant.

Si$\{u, v\}$ est une base orthonormée d'un plan P.On définit alors sa courbure sectionnelle par :

$$K(P) = K(u, v)$$

En coordonnées locales relativement à un point x de (M, g) :

$$K(\partial_i, \partial_j) = g(R(\partial_j, \partial_i)\partial_i, \partial_j) = R_{jiji}$$

Ou

$$\partial_s = \partial / \partial x_s$$

pour $s = 1, ..., n$.

Exemple 1.2.3 *soit :*

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-y}{2} \\ 0 & 1 & \frac{x}{2} \\ \frac{-y}{2} & \frac{x}{2} & 1 + \frac{x^2+y^2}{4} \end{pmatrix}$$

La base orthonormé :

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\frac{\partial}{\partial x}; e_2 = \frac{\partial}{\partial y}; e_3 = \exp^{-z}\frac{2\partial}{\partial z}$$

Les symboles christoffel :

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^n g^{kl}\left(\partial g_{jl}/\partial x_i + \partial g_{il}/\partial x_j - \partial g_{ij}/\partial x_l\right)$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij}^1 &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{-y}{4} & 0 \\ \frac{-y}{4} & \frac{-x}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}; \Gamma_{ij}^2 = \begin{bmatrix} \frac{-y}{2} & \frac{x}{8} & 0 \\ \frac{x}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \Gamma_{ij}^2 &= \begin{bmatrix} \frac{-xy}{4} & \frac{-x-y}{8} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-x-y}{8} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, \forall i,j = 1,...,3\end{aligned}$$

Les tenseurs de courbures :

$$R_{ijk}^l = \frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial x_i} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x_j} + \sum_{m=1}^n \left(\Gamma_{im}^l \Gamma_{jk}^m - \Gamma_{jm}^l \Gamma_{ik}^m\right)$$

tout les R_{ijk}^l sont nulle sauf

$$R_{212}^1 = \frac{-3}{4} = -R_{122}^l; R_{313}^1 = R_{323}^2 = \frac{1}{4} = -R_{133}^1 = -R_{233}^2$$

Les courbures sectionnelles :

$$K(X,Y) = \frac{\langle R(X,Y)Y, X\rangle}{\| X \|^2 \| Y \|^2 - (\langle X,Y\rangle)^2}$$

$$\begin{aligned}K(e_1,e_2) &= \frac{\langle R(e_1,e_2)e_2,e_1\rangle}{1-(\langle e_1,e_2\rangle)^2} = -K(e_2,e_1) = \frac{3}{4} \\ K(e_1,e_3) &= \frac{\langle R(e_1,e_3)e_3,e_1\rangle}{1-(\langle e_1,e_3\rangle)^2} = \sum_{l=1}^3 R_{133}^l e_l = -K(e_3,e_1) = -\frac{1}{4} \\ K(e_2,e_3) &= \frac{\langle R(e_2,e_3)e_3,e_2\rangle}{1-(\langle e_2,e_3\rangle)^2} = K(e_3 e_2) = -\frac{1}{4}\end{aligned}$$

Pour l'espace euclidien, la courbure scalaire est nulle.

1.2.9 Gradient sur une variété Riemannienne

Définition 1.2.2 *Soit $f : (M,g) \mapsto \mathbb{R}$ une application définit sur une variété riemanniienne munie d'une métrique g, le gradient de f noté ∇f est donner par*

$$\nabla f = \sum_{1\leq i,j\leq n} g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}$$

∇f est champs de vecteurs sur TM.

1.2.10 laplacien sur une variété Riemannienne

On définit l'opérateur de laplace noté $\triangle$ de la façon suivante

$$\triangle : C^{\infty}(M) \mapsto C^{\infty}(M)$$

$$f \mapsto \triangle f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f)$$

En cordonnées locales, on écrit :

$$\triangle f = \frac{1}{\sqrt{\det G}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \sqrt{\det G} \right]$$

Où

$$G = (g_{ij}), i, j = 1, ..., n$$

propriétés :

Soient $f_1,\ f_2 \in C^{\infty}(M)$.

1- $\triangle(f_1 + f_2) = \triangle f_1 + \triangle f_2$.

2-$\triangle(f_1 f_2) = f_2 \triangle f_1 + f_1 \triangle f_2 - 2g(\operatorname{grad} f_1, \operatorname{grad} f_2)$.

On appelle que

$$\operatorname{grad} f = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Où g^{ij} est la matrice inverse de g_{ij}.

Exemple 1.2.4 *La placien d'une fonction $f : M \mapsto \mathbb{R}$ en coordonnées cylindrique r, θ, z.*

On a :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ z = z. \end{cases}$$

L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de la métrique euclidienne

$$dS^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

En coordonnées cylindriques la métrique devient

$$dS^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2$$

et

$$G = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; G^{-1} = \left(g^{ij}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les composantes du $\operatorname{grad} f$ *en coordonnées cylindriques sont*

$$\partial_1 f = \frac{\partial f}{\partial r}, \partial_2 f = \frac{\partial f}{\partial \theta}, \partial_3 f = \frac{\partial f}{\partial z}$$

On a $\sqrt{\det G} = r$, *et en utilisant la définition du laplacien nous obtenons :*

$$\begin{aligned} \triangle_{(r,\theta,z)} f &= \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{r}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

1.2.11 Théoréme de divergence

Définition 1.2.3 *Soit* (M, g) *une vaiété Riemannienne de dimension* n, *on appelle mesure de volume Riemannienne[6], noté* v^M *ou* v^g , *la mesure définie localement dans une répère par*

$$v^M = \sqrt{\det (g_{ij})} dx^1 \wedge ... \wedge dx^n \ .$$

Exemple 1.2.5 *On considére la variété* $\mathbb{R}^2$ *muni des coordonnées cartésiennes* (x, y) *on a*

$$g_0 = dx^2 dy^2,$$

et

$$v^{g_0} = \sqrt{\det (g_{ij})} dx \wedge dy = dx \wedge dy$$

Exemple 1.2.6 *On considére la sphére* S^2 *muni de la métrique*

$$g = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$$

alors

$$v^g = \sqrt{\det (g_{ij})} d\theta \wedge d\varphi = \mid \sin \theta \mid d\theta \wedge d\varphi$$

1.2.12 Géodésique

Définition 1.2.4 *Soit* (M, g) *une variété Riemanninne munit d'une connexion* ∇, *soit* $C : I \subset \mathbb{R} \mapsto M$ *une courbe de classe* C^∞, *vérifiant* $\nabla C' = 0$ *(où* $\frac{D}{dt}C' = 0$*).*
Ecrire en corrdonnées locales :$C(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$.
Les géodésiques[7] $C(t)$ *se lisent comme les solution* $(x_1(t), ...; x_n(t))$ *de l'équation différentielle* $\forall i$ *:*

$$\frac{d^2 x_k}{dt} + \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt}\frac{dx_j}{dt} = 0$$

Exemple de Géodésique :

soit :

$$g=\begin{pmatrix} 1+x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^z \end{pmatrix};g^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{1+x^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-z} \end{pmatrix}$$

et soit Les symboles christoffels :

$$\Gamma_{ij}^k=\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}g^{kl}\left(\partial g_{jl}\diagup\partial x_i+\partial g_{il}\diagup\partial x_j-\partial g_{ij}\diagup\partial x_l\right)$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij}^1 &= \begin{bmatrix} \frac{x}{1+x^1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};\Gamma_{ij}^2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\ \Gamma_{ij}^2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix},\forall i,j=1,...,3\end{aligned}$$

Les Géodésiques :

$$\frac{d^2x_k}{dt}+\sum_{i,j=1}^{3}\Gamma_{ij}^k\frac{dx_i}{dt}\frac{dx_j}{dt}=0$$

pour k=1 :

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}+\Gamma_{11}^1\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+2\Gamma_{21}^1\frac{dy}{dt}\frac{dx}{dt}+2\Gamma_{31}^1\frac{dz}{dt}\frac{dx}{dt}+\Gamma_{22}^1\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\Gamma_{33}^1\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 &= 0 \\ x''(t)+\frac{x(t)}{1+x^2(t)}\left(x'(t)\right)^2 &= 0\end{aligned}$$

pour k=2 :

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dt^2}+\Gamma_{11}^2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+2\Gamma_{21}^2\frac{dy}{dt}\frac{dx}{dt}+2\Gamma_{31}^2\frac{dz}{dt}\frac{dx}{dt}+\Gamma_{22}^2\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\Gamma_{33}^2\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 &= 0 \\ y''(t) &= 0\end{aligned}$$

pour k=3 :

$$\begin{aligned}\frac{d^2z}{dt^2}+\Gamma_{11}^3\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+2\Gamma_{21}^3\frac{dy}{dt}\frac{dx}{dt}+2\Gamma_{31}^3\frac{dz}{dt}\frac{dx}{dt}+\Gamma_{22}^3\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\Gamma_{33}^3\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 &= 0 \\ y''(t)+\frac{1}{2}\left(z'(t)\right)^2 &= 0\end{aligned}$$

$$\left\{\begin{array}{c} x\sqrt{1+x^2(t)}-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2(t)}\right)=ct+c_1 \\ y(t)=c_2t+c_3 \\ z(t)=2\ln\left(\frac{1}{2}c_4t+c_5\right)\end{array}\right.;c;c_i\in\mathbb{R};i=1,...,5.$$

Chapitre 2

Les applications harmoniques

2.1 Définitions

Soient (M,g) et (N,h) deux variétés Riemanniennes[5] et φ une application C^{∞} de M dans N ,on note $T\varphi$ son application tangente, qui est une section du fibré des 1-formes sur M à valeurs dans les champs de vecteurs de N tirés -en -arrière par φ ,
qu'on note $\Omega^1(M)\otimes\varphi^*TN$.On appelle première forme fondamentale[11] de φ, le tiré-en-arrière de h par φ, c'est-à-dire le 2_tenseur symétrique φ^*h, défini de la façon suivante :

$$\varphi^*h(X,Y) := h(T\varphi(X), T\varphi(Y)), \forall (X,Y) \in TM$$

On munit le fibré φ^*TN des champs de vectreurs de N tiré-en -arrière par φ de la connexion de Levi-Civita de N tiré-en -arrière par φ, qu'on note ∇^{φ^*h}. C'est -à-dire que pour tout X dans TM et tout U dans φ^*TN, on a :

$$\nabla_X^{\varphi^*h} U = \nabla^h_{T\varphi(X)} U$$

On définit la norme de l'application tangente de φ par rapport à g et h, en prenant la trace par rapport à g de sa première forme fondamentale :

$$\mid T\varphi \mid^2_{g,h} := tr^g(\varphi^*h)$$

Définition 2.1.1 *: On appelle énergie des application φ de classe C^{∞} de (M,g) dans (N,h), la fonctionnelle suivante :*

$$E_g(\varphi) = \frac{1}{2}\int\limits_M \mid T\varphi \mid^2_{g,h} dvol_g$$

le fibré $\Omega^1(M)\otimes\varphi^*TN$. de 1-formes à valeurs dans φ^*TM.dans lequel vit l'application tangente de φ est munit canoniquement de la connexion suivante :

$$\nabla^{g,h} := \nabla^g \otimes 1_{\varphi^*TN} + 1_{\Omega(M)} \otimes \nabla^{\varphi^*h}$$

ce qui donne pour α une section de $\Omega^1(M)\otimes\varphi^*TN$ et X , Y dans $\Gamma(TM)$:

$$\left(\nabla_X^{g,h}\alpha\right)(Y) = \nabla^h_{T\varphi(X)}\left(\alpha(Y)\right) - \alpha\left(\nabla_X^g Y\right)$$

On peut alors définir le seconde forme fondamentale[11] de φ comme étant la forme bilinéaire symétrique $\nabla^{g,h}T\varphi$, en effet pour tout X, Y dans TM ,

$$\begin{aligned}
& \left(\nabla_X^{g,h}T\varphi\right)(Y) - \left(\nabla_Y^{g,h}T\varphi\right)(X) \\
= \; & \nabla^h_{T\varphi(X)}(T\varphi(Y)) - \nabla^h_{T\varphi(Y)}(T\varphi(X)) - T\varphi\left(\nabla_X^g Y\right) + T\varphi\left(\nabla_Y^g X\right) \\
= \; & T\varphi([X,Y]) - T\varphi([X,Y]) \\
= \; & 0.
\end{aligned}$$

Définition 2.1.2 *Soit φ une application C^∞ de (M,g) dans (N,h), on dit que φ est totalement géodésique[4], si sa seconde forme fondamentale est nulle, c'est-à-dire si $\nabla^{g,h}T\varphi = 0$.*
On définit la divergence $\delta^{g,h}$ sur $\Omega^1(M)\otimes\varphi^*TN$ de la façon suivante :

$$\delta^{g,h}\alpha := \left(\nabla_{e_i}^{g,h}\alpha\right)(e_i),$$

où α est une section du fibré $\Omega^1(M)\otimes\varphi^*TN$ et $(e_1, ..., e_n)$ est une base orthonormée de TM .

Définition 2.1.3 *Soit φ une application C^∞ entre deux variétés Riemanniennes (M,g) et (N,h), on appelle laplacien de φ entre (M,g) et (N,h), le champ de vecteurs $\delta^g T\varphi$, qui est une section de φ^*TN.*
On dit que φ est une application harmonique de (M,g) dans (N,h) si son laplacien est nul, c'est-à-dire si elle est solution de l'équation aux dérivées partielles non-linéaire suivante :

$$\delta^g T\varphi = 0$$

Remarque 2.1.1 *Laplacien d'une application φ, ne doit pas nous faire oublier que nous avons affaire à un opérateur non-linéaire en général sur les applications de M dans N.*

2.2 Etude de l'énergie au premier ordre

La proposition suivante caractérise les applications harmoniques grâce à l'étude au premier ordre de l'énergie :

Proposition 2.2.1 *Une application C^∞ de (M,g) dans (N,h) est harmonique de (M,g) dans (N,h) si et seulement si elle est un point critique de l'énergie E .*

Preuve. On se donne φ une application C^∞ de (M,g) dans (N,h) et $\varphi^{\cdot}$ une section quelconque de φ^*TN qui s'interprète comme un champ de vecteur le long de φ, on va différencier l'énergie à partir des déformations de φ le long de $\varphi^{\cdot}$.
Soit $(\varphi_t)_{t\in[0,1]}$ une famille à un paramètre d'applications C^∞ de M dans N qui vérifie le systéme suivant

$$\begin{cases} \varphi_0 = \varphi \\ [\partial_t \varphi_t]_{t=0} = \varphi^{\cdot} \end{cases}$$

alors la dérivée de l'énergie de φ_t par rapport à t est égale à :

$$\begin{aligned}
\partial_t E(\varphi_t) &= \frac{1}{2}\partial_t\left(\int_M \mid T\varphi_t \mid^2_{g,h} dvol_g\right) \\
&= \int_M \langle (\nabla^{g,h}_{\partial_t} T\varphi_t)(e_i), T\varphi_t(e_i)\rangle_h dvol_g \\
&= \int_M \langle (\nabla^{g,h}_{T\varphi_t(e_i)} \partial_t\varphi_t, T\varphi_t(e_i)\rangle_h dvol_g \\
&= -\int_M \langle \partial_t\varphi_t, \nabla^h_{T\varphi_t(e_i)} T\varphi_t(e_i)\rangle_h dvol_g + \int_M e_i \cdot \langle \partial_t\varphi_t, T\varphi_t(e_i)\rangle_h dvol_g
\end{aligned}$$

On obtient pour $t=0$ et avec la théorème de Green :

$$\begin{aligned}
[\partial_t E(\varphi_t)]_{t=0} &= \int_M \langle \varphi^{\cdot}, \delta^g T\varphi\rangle_h dvol_g - \int_M \delta^g(\langle \varphi^{\cdot}, T\varphi\rangle_h)\, dvol_g \\
&= \int_M \langle \varphi^{\cdot}, \delta^g T\varphi\rangle_h dvol_g
\end{aligned}$$

Ainsi les applications harmoniques sont les points critiques de l'énergie et l'équation $\delta^g T\varphi = 0$ est l'équation d'Euler -lagrange de la fonctionnelle énergie.
Soient (x_i) un système de coordonnées locales de M et (y_α) un système de coordonnées locales de N, on note g_{ij} et Γ^i_{jk} les coordonnées de la métrique et des symboles de Christoffel de la connexion de (M,g), et $h_{\alpha,\beta}$ et $\Gamma^\alpha_{\beta,\gamma}$ les coordonnées de la métrique et des symboles de Christoffel de la connexion de (N,h). □

La proposition suivant énonce la condition d'harmonicité en coordonnées :

Proposition 2.2.2 *soit φ une application de M dans N, on la note (φ^α) dans notre système de coordonnées, alors φ est harmonique de (M,g) dans (N,h) si et seulement si, pour tout α :*

$$\triangle\varphi^\alpha - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\varphi^\beta_{\beta\gamma}\varphi^\gamma_j g^{ij} = 0$$

Exemple 2.2.1 *Une application identité $Id : (M^m, g) \mapsto (M^m, g)$ est harmonique.*

Exemple 2.2.2 *Une application $\varphi : (M^m, g) \mapsto (\mathbb{R}^n, \langle,\rangle_{\mathbb{R}^n})$ de classe C^∞ est harmonique si et seulement si , point tout $\gamma = 1, ..., n$:*

$$\Delta^M\varphi^\gamma \equiv \sum_{i,j,k=1}^{m} g^{ij}(\frac{\partial^2\varphi^\gamma}{\partial x^i\partial x^j} - \frac{\partial\varphi^\gamma}{\partial x^k}{}^M\Gamma^k_{ij} = 0$$

2.3 Etude de l'énergie au second ordre

Sur une variété Riemannienne (M, g), on note respectivement

$$R_{X,Y} := \nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - [X, Y]$$

$$K\,(X, Y) := g\,(R_{X,Y}Y, X)$$

$$Ric\,(X, Y) := tr\,(Z \mapsto R_{Z,X}Y)$$

$$Scal := tr Ric$$

le tenseur de courbure, la courbure sectionnelle du plan $\langle X, Y\rangle$, le tenseur de Ricci et la courbure scalaire de (M, g).On dit que la courbure sectionnelle de (M, g) est négative ou nulle si pour tout couple (X, Y) de champs de vectreurs,

$$K\,(X, Y) \leq 0\ .$$

Proposition 2.3.1 ***(Eells-Sampson).*** *Soient (M, g) une variété Riemannienne de tenseur de Ricci positif ou nul et (N, h) une variété Riemannienne de courbure sectionnelle négative ou nulle, on se donne une application φ qui est harmonique de (M, g) dans (N, h), alors*

1. *φ est totalement géodésique,*

2. *si le tenseur Ric de (M, g) est strictement positif en un point, alors φ est constante,*

3. *si la courbure sectionnelle de (N, h) est strictement négative, alors φ est constante ou a une géodésique fermée comme image.*

2.4 Propriétés conformes des applications harmoniques

Proposition 2.4.1 *Soient (M^n, g) et (N, h) deux variétés Riemanniennes, φ une application C^∞ de M dans N et $\overline{g} = e^{2w}g$ une métrique conforme à g , alors le laplacien de φ par rapport à $\overline{g}$ s'écrit en terme de métrique g :*

$$\delta^{\overline{g}}T\varphi = e^{-2w}\left(\delta^g T\varphi - (n-2)\langle T\varphi, dw\rangle_g\right)$$

Preuve. On se donne φ une application C^∞ de (M^n, g) dans (N, h) et $\overline{g} = e^{2w}g$ une métrique conforme à g, notons $\left(\overline{X_i}\right)$ une base orthonormée de $(M, \overline{g})$, alors les vecteurs $(X_i) := \left(e^w\overline{X_i}\right)$ forment une base orthonormée de (M, g). On obtient pour le laplacien de φ de $(M, \overline{g})$dans (N, h) :

$$\begin{aligned}
\delta^{\overline{g}}T\varphi &= -\left(\nabla^{\overline{g}h}_{\overline{X_i}}T\varphi\right)\left(\overline{X_i}\right) \\
&= -\nabla^h_{T\varphi\left(\overline{X_i}\right)}\left(T\varphi\left(\overline{X_i}\right)\right) + T\varphi\left(\nabla^{\overline{g}}_{\overline{X_i}}\overline{X_i}\right) \\
&= -e^{\,-2w}\left(\nabla^h_{T\varphi(X_i)}\left(T\varphi\left(X_i\right)\right) + dw\left(X_i\right)X_i\right) + e^{\,-2w}\left(\nabla^{\overline{g}}_{T\varphi(X_i)}T\varphi\left(X_i\right) + dw\left(X_i\right)T\varphi\left(X_i\right)\right) \\
&= -e^{\,-2w}\left(\nabla^h_{T\varphi(X_i)}\left(T\varphi\left(X_i\right)\right) - T\varphi\left(\nabla^{\overline{g}}_{X_i}T\varphi\left(X_i\right)\right)\right)
\end{aligned}$$

mais d'aprés la formule de changement conforme pour la connexion :

$$\begin{aligned}
\nabla^{\overline{g}}_{X_i}T\varphi\left(X_i\right) &= \nabla^g_{X_i}X_i + 2dw\left(X_i\right)X_i - g\left(X_i, X_i\right)dw \\
&= \nabla^g_{X_i}X_i - (n-2)\,dw
\end{aligned}$$

ce qui donne bien

$$\begin{aligned}
\delta^{\overline{g}}T\varphi &= -e^{-2w}(\nabla^h_{T\varphi(X_i)}(T\varphi\left(X_i\right) - T\varphi\left(\nabla^g_{X_i}X_i\right) + (n-2)\langle T\varphi, dw\rangle_g) \\
&= e^{-2w}\left(\delta^g T\varphi - (n-2)\langle T\varphi, dw\rangle_g\right)
\end{aligned}$$

□

Comme corollaire de la proposition précédente, on obtient en dimension 2, la propriété très importante suivante, qui va nous guider dans toute la suite :

Corollaire 2.4.1 *Soient* (M, g) *et* (N, h) *deux variétés Riemanniennes et* φ *une application* C^{∞} *de* M *dans* N*, on suppose que* M *de dimension 2, alors l'énergie et le laplacien de* φ *sont des invariants conforme de* (M, g) :

$$E_{\overline{g}}(\varphi) = E_g(\varphi)$$

$$\delta^{\overline{g}} T\varphi = e^{-2w} \delta^g T\varphi$$

quelque soit la métrique $\overline{g} = e^{2w} g$ *conforme à* g*.*

Preuve. Nous avons juste besion de regarder l'énergie de φ par rapport à $\overline{g}$:

$$\begin{aligned} E_{\overline{g}}(\varphi) &= \frac{1}{2} \int_M \mid T\varphi \mid^2_{\overline{g},h} dvol_{\overline{g}} \\ &= \frac{1}{2} \int_M e^{-2w} \mid T\varphi \mid^2_{g,h} dvol_{\overline{g}} \\ &= \frac{1}{2} \int_M \mid T\varphi \mid^2_{g,h} dvol_g \\ &= E_g(\varphi) \end{aligned}$$

□

2.5 Exemples d'applications harmoniques

Exemple 2.5.1 *Si on travarialle avec les fonctions réelles, c'est-à-dire que notre variété d'arrivée*(N, h) *est simplement* $\mathbb{R}^m$ *munie de la métrique euclidienne, on retombe bien sur la notion classique d'harmonicité.Une fonction* f *est harmonique si et seulement si chacune de ces coordonnées est une fonction harmonique de* (M, g) *dans* $\mathbb{R}$*.*

Exemple 2.5.2 *Soit* φ *une immersion Riemannienne de* (M, g) *dans* (N, h) *(c'est-à-dire que* $\varphi^* h = g$*),alors* φ *est harmonique de* (M, g) *dans* (N, h) *si et seulement si s'est une immersion minimale.En effet, la connexion de Lévi-Civita de* (M, g) *est induit par celle de* (N, h)*via l'immersion* φ*, de la manière suivante :*

$$T\varphi\left(\nabla^g_X Y\right) = \left(\nabla^h_{T\varphi(X)} T\varphi(Y)\right)^T, \forall (X, Y) \in \Gamma(TM)$$

$$\left(\nabla_X^{g,h} T\varphi\right)(Y) = \left(\nabla_{T\varphi(X)}^h T\varphi(Y)\right) - T\varphi\left(\nabla_X^g Y\right) = \amalg^g(X,Y)$$

où$(...)^T$ *ésigne la projection des champs de vecteurs le long de* φ *sur* $T\varphi(TM)$*.On obtient donc pour la seconde forme fondamentale de* φ *:*

c'est-à-dire la seconde forme fondamentale de (M,g) *vue comme une sous variété de* (N,h)*.Ainsi* φ *est harmonique si et seulement si* $tr^g \amalg^g = 0$*, ce qui revient à dire que* φ *est une immersion minimale.*

Chapitre 3

La métrique de Poincaré

3.1 Définitions

Dans toute la suite, $\overline{X}$ désignera une variété différentielle compacte à bord de dimension $n+1$, on note X son intérieur et $M = \partial\overline{X}$ son bord .

Définition 3.1.1 *Soient g_+ une métrique définie sur X et r une fonction C^∞ de $\overline{X}$ vérifiant :*

$$r > 0 \text{ sur } X,\ r = 0 \text{ sur } M \text{ et } dr \neq 0 \text{ sur } M\ ,$$

si le changement conforme $r^2 g_+$ se prolonge de manière continue en une métrique $\overline{g}$ sur $\overline{X}$, on dit que r compactifie(X, g_+) sur le bord en $(M, \overline{g}\backslash_M)$ et que g_+ est une métrique conformément compacte.
On appelle infini conforme de (X, g_+) , la classe conforme de $\overline{g}$ restriente aux champs de vecteurs TM.
Remarquons que la notion d'infini conforme est indépendante du choix de la fonction compactifiante r, de plus la fonction $\mid dr \mid^2_{r^2 g_+}$ se prolonge sur $\overline{X}$ et sa restriction à M est aussi un invariant conforme de (X, g_+) .

Définition 3.1.2 *Une variété asymptotiquement hyperbolique est une variété (X, g_+) conformément compacte qui a sa courbure sectionnelle qui tend vers -1 dans un voisinage de M.*

Lemme 3.1.1 *Soit (X, g_+) une variété conformément compacte,on note $\overline{g}$ la métrique qui prolonge $r^2 g_+$sur $\overline{X}$, alors les deux propositions sont équivalentes :*

1. (X, g_+) est une variété asymptotiquement hyperbolique.

2. $\mid dr \mid_{\overline{g}}^2 = 1$ sur M.

Lemme 3.1.2 ***(Graham).*** *Soient* (X, g_+) *une variété asymptotiquement hyperbolique et* g *une métrique dans son infini conforme , alors il existe une unique fonction* r *dans un voisinage du bord* M *qui comactifie* (X, g_+) *sur le bord en* (M, g) *et qui vérifie* $\mid dr \mid_{\overline{g}}^2 = 1$ *sur ce voisinage, où* $\overline{g}$ *est la métrique qui prolonge* $r^2 g_+$ *sur* $\overline{X}$.

Définition 3.1.3 *Soient* (X, g_+) *une variété asymptotiquement hyperbolique[11] et* g *une métrique dans son infini conforme , on appelle fonction compactifiante normalisée associée à* g *,la fonction* r *du lemme 3.1.2.*

D'après ce lemme, pour chaque métrique g *dans l'infini conforme de* (X, g_+)*, on a une identification d'un voisinage de* M *dans* X *avec* $M \times [0, \varepsilon[$ *pour un certain* ε *(qui dépend de* g*).*

Dans ces coordonnées, g_+ *s'écrit :*

$$g_+ = \frac{dr^2 + g_r}{r^2} \tag{3.1.1}$$

où g_r *est une famille à un paramètre de métriques sur* M *avec* $g_0 = g$.

Théorème 3.1.1 ***(Fefferman-Graham)*** *.Soit* X *une variété différentielle de dimension* $n+1$ *et de bord* $\partial X = M$*, on se donne* $[g]$ *une structure conforme sur* M *et* g *un de ses représentants, alors il existe une métrique* g_+ *définie sur un voisinage de* M *dans* X *et une fonction* r *de* $\overline{X}$ *qui compactifie* (X, g_+) *sur le bord en* (M, g)*, telles que*

1.$Ric^{g_+} + ng_+ = O\left(r^{n-1} \log r\right)$ *par rapport à* g*, si* n *est pair ,*

2.$Ric^{g_+} + ng_+ = O\left(r^{\infty}\right)$ *par rapport à* g*, si* n *est impair .*

De plus g_+ *est unique modulo* $O\left(r^{n-2}\right)$ *et aux difféomorphismes de* $\overline{X}$ *prés, qui se restreignent en l'identité sur* M*. Sur* $M \times [0, \varepsilon[$*, la métrique* g_+ *s'écrit :*

$$g_+ = \frac{dr^2 + g_r}{r^2} \tag{3.1.2}$$

où g_r *est une famille à un paramètre de métriques sur* M *. Si* n *est pair,* g_r *admet le développement asymptotique en* $r = 0$ *suivant :*

$$g_r = g + g_{(2)} r^2 + ... + g_{(n-2)} r^{n-2} + h r^n \log r + g_{(n)} r^n + O\left(r^{n+1}\right), \tag{3.1.3}$$

où les points désignent des termes en puissance paires de r^2 *à* r^{n-2}*.Les termes* $g_{(2)},...,g_{(n-2)},h$ *et la trace de* $g_{(n)}$ *par rapport à* g *sont uniquement déterminés par des termes de courbure de* g *et* h *est sans tarce par rapport à* g *.Si* n *est impair, alors* g_r *admet le développement asymptotique en* $r=0$ *suivant :*

$$g_r = g + g_{(2)}r^2 + ... + g_{(n-1)}r^{n-1} + g_{(n)}r^n + O\left(r^{n+1}\right), \tag{3.1.4}$$

où les points désignent des termes en puissance paires de r^2 *à* r^{n-1}*. Les termes* $g_{(2)},...,g_{(n-1)}$ *sont uniquement déterminés par des termes de courbure de* g *de plus la trace de* $g_{(n)}$ *par rapport à* g *est nulle.*
En changement de métrique $\widetilde{g} = e^{2w}g$*, on obtient :*

$$\widetilde{h} = e^{(2-n)w}h, \tag{3.1.5}$$

où $\widetilde{h}$ *est la terme logarithmique correspondant à* $\widetilde{g}$*.*

Définition 3.1.4 *Soit* $\left(\overline{X}, dr^2 + g_r\right)$ *une variété Riemannienne à bord de dimension* $n+1$*, on note* M *son bord et on suppose que* g_r *est une famille à un paramètre de métriques sur* M*. On note* $\overline{\nabla}$ *la connexion de Levi-Civita[4] de* $dr^2 + g_r$ *et* ∇^{g_r} *celle de* g_r*, on définit la seconde forme fondamentale* Π *des tranches* $M \times \{r\}$ *par :*

$$\Pi(Z,T) = \overline{\nabla}_Z T - \nabla_Z^{g_r} T$$

où Z *et* T *sont deux champs de vecteurs de* TM*.*

Lemme 3.1.3 *Soit* (M, g_+) *une variété Riemannienne , on note*

$$E = Ric^{g_+} + ng_+$$

et on suppose que $g_+ = r^{-2}\left(dr^2 + g_r\right)$*, avec* g_r *une famille à un paramètre de métrique sur* M *. On se donne* Z, T *deux vecteurs de* TM*,alors on a :*

$$E(Z,T) = \left(Ric^{g_r} + \left(2\Pi + \partial_r - tr^{g_r}\Pi - r^{-1}(n-1)\right)\Pi - r^{-1}\left(tr^{g_r}\Pi\right)g_r\right)(Z,T) \tag{3.1.6}$$

$$E(Z,\partial_r) = \left(dtr^{g_r}\Pi + \delta^{g_r}\Pi\right)(Z) \tag{3.1.7}$$

$$E(\partial_r,\partial_r) = \partial_r tr^{g_r}\Pi - \mid \Pi \mid_{g_r}^2 - r^{-1}\left(tr^{g_r}\Pi\right) \tag{3.1.8}$$

où Π *est la seconde forme fondamentale des tranches* $M \times \{r\}$ *par rapport à* $dr^2 + g_r, tr^{g_r}$ *désigne la trace par rapport à* g_r *et* Π^2 *est le carré de l'endomorphisme symétrique associé à la seconde forme fondamentale via* g_r.

Lemme 3.1.4 *Avec les notations du lemme précédent on a les deux égalités suivantes :*

$$tr^{g_r}\partial_r E = -2\delta^{g_r} E(\partial_r) + \left(\partial_r - 2tr^{g_r}\Pi - 2(n-1)r^{-1}\right) E(\partial_r, \partial_r) \tag{3.1.9}$$

$$e_i.\left(E(\partial_r, \partial_r) + tr^{g_r} E\right) + 2\delta^{g_r} E(e_i) = 2\partial_r - tr^{g_r}\Pi - (n-1)r^{-1})E(e_i, \partial_r) \tag{3.1.10}$$

3.2 La métrique de Poincaré en dimension 2

Proposition 3.2.1 *En dimension 2, la métrique de Poincaré* g_r *admet le développement asymptotique suivant :*

$$g_r = g + g_2 r^2 + O\left(r^3\right) \tag{3.2.1}$$

avec $trg_2 = -\frac{1}{2}Scal^g$*,où* tr *désigne la trace par rapport à* g.

Chapitre 4

les applications conformes-harmoniques

4.1 Un problème à bord

On munit notre variété compacte M^n d'une structure conforme $[g]$ et on note $g_+ = r^{-2}(dr^2 + g_r)$ sa métrique de Poincaré[10] définie sur $X = M \times]0, \varepsilon[$.Il convient de remarquer que g_+ explose pour $r = 0$, cependant on peut quand meme définir le laplacien de $(\overline{X}, g_+)$ sur (N, h).On se donne φ une application C^∞ de M dans N, notre problème à bord est de prolonger φ en une application $\widetilde{\varphi}$ de $\overline{X}$ dans N qui soit C^∞ et harmonique de $(\overline{X}, g_+)$ dans (N, h).On cherche donc à déterminer les obstructions à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \widetilde{\varphi}_{|r=0} = \varphi \\ \delta^{g_+} T\varphi = 0 \end{cases}$$

Notons p_M la projection de $M \times]0, 1[$ sur M ,grâce à l'exponentielle,on va identifier localement notre variété d'arrivée N,avec le fibré $(\varphi \circ p_M)^* TN$,de manière à faire un développement asymptotique sur ce fibré .

Quand la dimension de M est paire, on obtient le théorème suivant :

Théorème 4.1.1 *Supposons que n soit un entier pair, on se donne (M^n, g) et (N, h) deux variétés Riemanniennes et on note (X, g_+) la métrique de Poincaré de (M, g) .On écrit g_+ sous la forme $g_+ = \frac{dr^2 + g_r}{r^2}$ et on se donne φ une application C^∞ de (M, g) dans (N, h), alors il existe une unique section U de $(\varphi \circ p_M)^* TN$ modulo $O(r^n)$ telle que l'application*

$\widetilde{\varphi} := \left(\exp_{\varphi\circ p_M}\right) \circ U$ *vérifie le système suivant :*

$$\begin{cases} \widetilde{\varphi}_{|r=0} = \varphi \\ \delta^{g_+} T\widetilde{\varphi} = O\left(r^{n+1}\log r\right) \end{cases}$$

De plus U admet le développement asymptotique en r suivant :

$$U(p,r) = U_2(p)\,r^2 + ... + U_{n-2}(p)\,r^{n-2} + H^g(p)\,r^n \log r + U_n(p)\,r^n + ... \tag{4.1.1}$$

où les premiers points désignent des termes en puissances de r paires qui sont entièrement déterminés par φ et des termes de courbures de g et de h .Le terme H^g ne dépend que de φ et de $[g]$ et l'équation $H^g(\varphi) = 0$ est une équation aux dérivées partielles elliptique non-linéaire d'ordre n sur des applications de (M^n, g) dans (N, h), qui est invariante conforme par rapport à g.

En outre, notre terme $H^g(\varphi)$ est de la forme suivante :

$H^g(\varphi) = a_n\left(\delta^g d\right)^{\frac{n}{2}-1}\delta^g T\varphi +$ des dérivées de d'ordre infèrieurs, où δ^g désigne la divergence sur le fibré $\Omega(M)\otimes\varphi^* T\varphi$ et a_n est un coefficient qui est donné par la formule :

$$a_n := \frac{(-1)^{\frac{n}{2}-1}}{2^{n-1}\left(\frac{n}{2}\right)!\left(\frac{n}{2}-1\right)!}$$

Nous avons le théorème suivant quand la dimension de M est impaire :

Théorème 4.1.2 *Supposons que n soit impaire on se donne (M^n, g) et (N, h) deux variétés Riemanniennes et on note (X, g_+) la métrique de Poincaré de (M, g) .On écrit g_+ sous la forme $g_+ = \frac{dr^2 + g_r}{r^2}$ et on se donne φ une application C^∞ de (M, g) dans (N, h),alors il existe une unique section U de $(\varphi \circ p_M)^* TN$ modulo $O(r^n)$ telle que l'application $\widetilde{\varphi} := \left(\exp_{\varphi\circ p_M}\right)\circ U$ vérifie le système suivant :*

$$\begin{cases} \widetilde{\varphi}_{|r=0} = \varphi \\ \delta^{g_+} T\widetilde{\varphi} = O\left(r^{n+1}\right) \end{cases}$$

De plus U admet le développement asymptotique en r suivant :

$$U(p,r) = U_2(p)\,r^2 + ... + U_n(p)\,r^n + U_{n+1}r^{n+1} + ... \tag{4.1.2}$$

où les premiers points désignent des termes en puissances de r paires qui sont entièrement déterminés par φ et des termes de courbures de g et de h .

Le terme U_n est indéterminé.

Nous pouvons à présent définir les applications conformes-harmoniques .

Définition 4.1.1 *Soit n un nombre pair ,on dit qu'une application φ entre deux variétés Riemanniennes (M^n, g) et (N, h) est conforme -harmonique[11] de $(M^n, [g])$ dans (N, h), si φ est solution de l'équation aux dérivées partielles $H^g(\varphi) = 0$ du théorème 1 .Afin d'alléger le texte ,on parlera alors d'application C-harmonique.*

Pour pouvoir calculer le développement asymptotique de U .Sur les fonctions ,notre théorème 1 devient :

Théorème 4.1.3 ***(Graham-Zworski).****Soit f une fonction C^∞ de M ,alors il existe une unique fonction $\widetilde{f}$ mod $O(r^n)$ de $\overline{X}$ vérifiant le système suivant :*

$$\begin{cases} \widetilde{f}_{|r=0} = f \\ \triangle_{g_+}\widetilde{f} = O\left(r^{n+1}\log r\right) \end{cases}$$

De plus ,le développement asymptotique[11] de f est pair juisqu'au terme $n-1$ et il contient un terme en $r^n \log r$ qui ne dépend que de f et de $[g]$.Ce terme logarithmique définit un opérateur différentiel invariant conforme sur les fonctions de (M, g) qui a pour terme principal $\triangle_g^{\frac{n}{2}}$.

Exemple 4.1.1 *Supposons que (M, g) soit une variété d'Einstein de dimension paire,alors on a une écriture explicite de la condition de C-harmonicité,la fonction f est une fonction C-harmonique sur $(M, [g])$ si et seulement si :*

$$\left(\triangle^g - c_1\right) \ldots \left(\triangle^g - c_{\frac{n}{2}}\right) f = 0$$

avec

$$c_j = \frac{(n+2j-2)(n-2j)}{4n(n-1)} Scal^g.$$

4.2 Démonstration du théorème 4.1.1

4.2.1 Quand M est de dimension paire

Soit $\widetilde{\varphi}$ une application de $\left(\overline{X}, g_+\right)$ dans (N, h) ,on note φ sa restriction sur M ,on va montrer que si $\delta^{g_+}T\widetilde{\varphi} = O\left(r^{n+1}\log r\right)$,alors l'application $U := \left(\exp_{\varphi\circ p_M}\right)^{-1} \circ \widetilde{\varphi}$ admet le développement asymptotique annoncé.

Soit $\overline{g}$ le prolongement de $r^2 g_+$ sur $\overline{X}$,on note respectivement $\overline{\nabla}$ et ∇^h les connexions de Levi-Civita de $(M,\overline{g})$ et (N,h) .On obtient pour laplacien de $\widetilde{\varphi}$:

$$\begin{aligned} \delta^{g_+}T\widetilde{\varphi} &= r^2\delta^{\overline{g}}T\widetilde{\varphi} + r(n-1)\partial_r\widetilde{\varphi} \\ &= -r^2\left(\nabla^h_{T\widetilde{\varphi}(e_i)}\left(T\widetilde{\varphi}(e_i)\right) - T\widetilde{\varphi}\left(\overline{\nabla}_{e_i}e_i\right) + \nabla^h_{\partial_r\widetilde{\varphi}}\partial_r\widetilde{\varphi}\right) \\ &\quad +r(n+1)\partial_r\widetilde{\varphi} \\ &= r^2\left(\delta^{g_r}T\widetilde{\varphi} + (tr^{g_r})\,\partial_r\widetilde{\varphi} - \nabla^h_{\partial_r\widetilde{\varphi}}\partial_r\widetilde{\varphi}\right) + r(n-1)\partial_r\widetilde{\varphi} \end{aligned}$$

où $(e_1,...,e_n)$ est une base orthonormée de TM par rapport à g_r et Π est la seconde forme fondamentale des tranches $\{r\}\times M$ par rapport à $\overline{g}$.Comme $\Pi = -\frac{1}{2}g_r'$,alors le laplacien de $\widetilde{\varphi}$ s'écrit finalement :

$$\delta^{g_+}T\widetilde{\varphi} = r^2\left(\delta^{g_r}T\widetilde{\varphi} - \frac{tr^{g_r}}{2}\partial_r\widetilde{\varphi} - \nabla^h_{\partial_r\widetilde{\varphi}}\partial_r\widetilde{\varphi}\right) + r(n-1)\partial_r\widetilde{\varphi} \tag{4.2.1}$$

et on obtient directement que $\delta^{g_+}T\widetilde{\varphi} = O(r)$ par rapport à la métrique g.

Pour simplifier les notations ,on pose $\varphi^{(k)}$ comme étant égale à la valeur au bord de la k-ième dérivée de$\widetilde{\varphi}$ par rapport à r,c'est-à-dire

$$\varphi^{(k)} := \left[\left(\nabla^h_{\partial_r\widetilde{\varphi}}\right)^{k-1}\partial_r\widetilde{\varphi}\right]_{r=0}.$$

On a facilement les équivalences suivantes

$$\delta^{g_+}T\widetilde{\varphi} = O(r) \Leftrightarrow \left[\nabla^h_{\partial_r\widetilde{\varphi}}\delta^{g_+}T\widetilde{\varphi}\right]_{r=0} = 0 \Leftrightarrow \varphi^{(1)} = 0$$

Comme la dérivation $\nabla^h_{\partial_r\widetilde{\varphi}}$ sur $\widetilde{\varphi}^*TN$ restreinte au bord ne dépend que de la métrique h,de l'application φ et de $\varphi^{(1)}$ qui est nul ,on peut déterminer $\varphi^{(k)}$ en fonction des condition initiales ,c'est-à-dire notre application φ et des termes de courbures de (M,g) et de (N,h) .On procède par récurrence sur k tant que k est strictement plus petit que n.Supposons que $\varphi^{(k-1)}$ soit déterminé par les conditions initiales ,on déterminé $\varphi^{(k)}$ en résolvant l'équation $\delta^{g_+}T\widetilde{\varphi} = O\left(r^{k+1}\right)$ qui est équivalente à $\left[\left(\nabla^h_{\partial_r\widetilde{\varphi}}\right)^k\delta^{g_+}T\widetilde{\varphi}\right]_{r=0} = 0$.On obtient alors

$$(k-n)\,\varphi^{(k)} = (k-1)\left[\left(\nabla^h_{\partial_r\widetilde{\varphi}}\right)^{k-2}\left(\delta^{g_+}T\widetilde{\varphi}\right) - \frac{tr^{g_r}}{2}\partial_r\widetilde{\varphi}\right]_{r=0} \tag{4.2.2}$$

Comme on connait les dérivées d'ordre inférieur de $\widetilde{\varphi}$ par hypothèse de récurence et le développement asyptotique de g_r pour $r = 0$ juisqu'au terme en $r^n \log r$,alors le terme de droite (4) est nul,ainsi pour tout entier impair s compris entre 1 et $n-1$,on a :

$$\varphi^{(s)} = 0 \tag{4.2.3}$$

On verra que pour n strictement plus grand que 2,il apparait des termes de courbures de (M, g) et de (N, h) dès le terme $\varphi^{(4)}$.
Nous allons faire maintenant notre identification entre notre section U et notre application $\widetilde{\varphi}$ .Pour cela ,on prend p un point de M ,l'application exponentielle en $\varphi(p)$ .détermine un isomorphisme entre une petite boule $B_{\varphi_{(p)}}$ de N centrée en $\varphi(p)$ et un ouvert de $T_{\varphi(p)}N$ .On pose $\varepsilon_p = \sup\left(\left\{\alpha \mid \forall\beta < \alpha, \widetilde{\varphi}(p, \beta) \in B_{\varphi_{(p)}}\right\}\right)$ et on définit

$$U(p, r) := \left(\exp_{\varphi_{(p)}}\right)^{-1} (\widetilde{\varphi}(p, \beta)), \text{ pour } r < \varepsilon_p$$

Remarquons ici que $U(p, 0)$ est nul, puisque par définitions de l'exponentielle ,

$$U(p, 0) = \left(\exp_{\varphi_{(p)}}\right)^{-1} (\varphi(p)) = 0 \tag{4.2.4}$$

Comme la dérivée de $\widetilde{\varphi}$ par rapport à r est nulle sur le bord ,il en est de meme pour la dérivée de U par rapport à r.On montre ainsi par récurrence , que les dérivées impaires d'ordre inférieur à n de U s'annulent sur le bord .Ainsi les termes impaires du développement asymptotique de U sont nuls jusqu'à l'ordre n et les termes pairs sont donnés jusqu'à l'ordre $n-2$ par les dérivées de $\widetilde{\varphi}$ par rapport à r en $r = 0$,qui sont eux-memes entièrement déterminés par les conditions initiales .En résumé,le développement asymptotique de U en $r = 0$ est de la forme suivante :

$$U(p, r) = U_2(p)\, r^2 + ... + U_{n-2}(p)\, r^{n-2} + ...,$$

Supposons que le terme suivant du développement asymptotique soit le terme $U_n(p)\, r^n$ et non le terme en $r^n \log r$,alors la dérivée par rapport à r de $\widetilde{\varphi}$ admet le développement asymptotique en $r = 0$ suivant :

$$\begin{aligned}
\partial_r \widetilde{\varphi} &= \partial_r \left(\exp_{\varphi \circ p_M}(U)\right) \\
&= \varphi^{(2)} r + \frac{1}{3!}\varphi^{(4)} r^3 + ... + Q r^{n-1} + ...,
\end{aligned}$$

ou le terme Q est déterminé par le développement de U.On obtient alors facilement que

$$r^2\left(\nabla^h_{\partial_r\widetilde{\varphi}}\partial_r\widetilde{\varphi}\right)-r\left(n-1\right)\partial_r\widetilde{\varphi}=O\left(r^n\right)\ ,$$

ce qui montre qu'avec (3), l'égalité $\delta^{g_+}T\widetilde{\varphi}=O\left(r^{n+1}\log r\right)$ implique que

$$\left[\left(\nabla^h_{\partial_r\widetilde{\varphi}}\right)^{k-2}\left(\delta^{g_r}T\widetilde{\varphi}-\frac{tr^{g_r}g_r^{'}}{2}\partial_r\widetilde{\varphi}\right)_{r=0}\right]=0 \tag{4.2.5}$$

Cette équation n'a aucune chance d'être vraie en général, c'est pourquoi on introduit notre terme en $r^{n-1}\log r$.Le développement asymptotique en $r=0$ de la dérivée de $\widetilde{\varphi}$ est ainsi la forme :

$$\partial_r\widetilde{\varphi}=\varphi^{(2)}r+\frac{1}{3!}\varphi^{(4)}r^3+...+nH^gr^{n-1}\log r+Qr^{n-1}+...$$

et on obtient dans ce cas là

$$r^2\left(\nabla^h_{\partial_r\widetilde{\varphi}}\partial_r\widetilde{\varphi}\right)-r\left(n-1\right)\partial_r\widetilde{\varphi}=nH^g\left(\varphi\right)r^n\log r+O\left(r^{n+1}\log r\right)$$

ce qui montre qu'avec (3),l'équation $\delta^{g_+}T\widetilde{\varphi}=O\left(r^{n+1}\log r\right)$ est équivalente à l'égalité suivante :

$$H^g\left(\varphi\right)=\frac{n-1}{n!}\left[\left(\nabla^h_{\partial_r\widetilde{\varphi}}\right)^{k-2}\left(\delta^{g_r}T\widetilde{\varphi}-\frac{tr^{g_r}g_r^{'}}{2}\partial_r\widetilde{\varphi}\right)_{r=0}\right] \tag{4.2.6}$$

ce qui détermine $H^g\left(\varphi\right)$ par les conditions initiales .Il faut remarquer ici que notre équation de récurence ne nous permet pas d'expliciter le terme U_n, ce qui nous empêche de prolonger notre unicité au delà de ce rang .

Régardons le coefficient devant le terme de plus haut degré par rapport à φ , on obtient facilement

$$\begin{aligned}
H^g\left(\varphi\right) &= \frac{n-1}{n!}\delta^g d\varphi^{(n-2)}+\text{des termes d'ordres inférieurs}\\
&= \frac{(n-1)}{n!}\frac{(n-3)}{2}\left(\delta^g d\right)^2\varphi^{(n-4)}+....\\
&= (-1)^{\frac{n}{2}-1}\frac{(n-1)}{n!}\frac{(n-3)(n-5)...1}{2...(n-4)(n-2)}\left(\delta^g d\right)^{\frac{n}{2}-1}\delta^gT\varphi+...\\
&= \frac{(-1)^{\frac{n}{2}-1}}{2^{n-1}\left(\frac{n}{2}\right)!\left(\frac{n}{2}-1\right)!}\left(\delta^g d\right)^{\frac{n}{2}-1}\delta^gT\varphi+...
\end{aligned}$$

Montrons maintenant l'invariance conforme , soit $\overline{g}=e^{2w}g$ une métrique sur M conforme à g , on va montrer que $H^{\overline{g}}\left(\varphi\right)=e^{nw}H^g\left(\varphi\right)$,où $H^{\overline{g}}\left(\varphi\right)$ se raporte à $\overline{g}$ .Soit $\overline{r}$ la fonction compactifiante normalisée associée à $\overline{g}$ .alors la section $\overline{U}$ associée à $\overline{g}$ admet la développement asymptotique en $\overline{r} = 0$ suivant :

$$\overline{U}(p, \overline{r}) = \overline{U}_0(p) + ... + \overline{U}_{n-2}(p)\,\overline{r}^{n-2} + H^{\overline{g}}(p)\,\overline{r}^n \log r + O(\overline{r}^n) \tag{4.2.7}$$

Comme $\overline{r} = e^w r$,on remaeque facilement que le seul terme qui va donner $r^n \log r$ est $e^{nw} H^{\overline{g}}$,ainsi on obtient :

$$H^g = e^{nw} H^{\overline{g}} \ .$$

4.2.2 Quand M est de dimension impaire

Supposons maitemant que n est impair, l'égalité suivante est encore vraie

$$\delta^{g_+} T\widetilde{\varphi} = r^2 \left(\delta^{g_r} T\widetilde{\varphi} - \frac{tr^{g_r} g_r^{'}}{2} \partial_r \widetilde{\varphi} - \nabla^h_{\partial_r \widetilde{\varphi}} \partial_r \widetilde{\varphi} + r\,(n-1)\,\partial_r \widetilde{\varphi} \right) \tag{4.2.8}$$

ainsi en procédant de la même façon qu'avant , on montre que les dérivées impaires de $\widetilde{\varphi}$ par rapport à r d'ordre inférieur à $n-1$ s'annulent sur le bord .Par contre,pour des raisons de parité, on remerque que le terme de droite de l'égalité ci-dessus ne contient pas de terme en r^n, contrairement au cas précédent .Il n'y a donc pas de terme en $r^n \log r$ dans le développement asymptotique de U et le terme en r^n est indéterminé.
On vient de montrer que si $\widetilde{\varphi}$ est une application C^{n-1} de $\overline{X}$ dans N et qui est harmonique de (X, g_+) dans $(N; h)$,alors son ‹‹développement asymptotique ››(en fait celui de U) est déterminé jusqu'au terme r^{n-1} par les métriques g et h, et la valeur de $\widetilde{\varphi}$ sur le bord .

4.3 Exemples

Proposition 4.3.1 *Soient (M^n, g) une variété d'Einstein[6] de dimension paire et $(N; h)$ une variété Riemannienne ,alors les application harmoniques de (M, g) dans (N, h) sont C-harmoniques.*

4.4 Obstruction au remplissage harmonique

Pour les variétés asymptotiquemion qui est C^n de $\overline{X}$ dans N et harmonique de (X, g_+) dans (N, h) , alors $\varphi_{\backslash M}$ est C-harmonique de $(M, [g])$ dans (N, h) .

Corollaire 4.4.1 *Soient* (X^{n+1}, g_+) *une variété asymptotiquement hyperbolique de dimension impaire et une variété Riemannienne* (N, h) *,on se donne* φ *une application*

$$U(p,r) := \left(\exp_{\varphi(p,0)}\right)^{-1} \varphi(p,r)$$

admet comme développement asymptotique pour $r = 0$ *:*

$$U(p,r) = U_0(p) + ... + U_{n-2}(p)\, r^{n-2} + H^g(p)\, r^n \log r + O(r^n) \tag{4.4.1}$$

or φ *est* C^n *sur* $\overline{X}$*,donc* $H^g = 0$ *et* $\varphi_{\setminus M}$ *est bien C-harmonique.*

Bibliographie

[1] **M. P. do Carmo**, Riemannian Geometry, Birkhäuser Verlag, Boston, Basel, Berlin, (1992).

[2] **S. Gallot**, **D. Hulin and J. Lafontaine**, Riemannian geometry. (Second edition) SpringerVerlag, Berlin Heidelberg (1993).

[3] **J. Jost**, Riemannian Goemetry and Geometric Analysis, (Sixth Edition), Universitext, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, (2011) .

[4] **J. M. Lee**, Riemannian manifolds. Graduate texts in math. 176, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (1997).

[5] **F. Morgan**, Riemannian Geometry, A Beginer's Guide, A K Peters, Natick, MA, (1998).

[6] **R. Osserman**, A survey of minimal surfaces, Courier Dover Publications, Dover (2002).

[7] **R. Osserman**, Global properties of minimal surfaces in E3 and En, Ann. of Math. 80 (1964), no. 2, 340 364.

[8] **P. Peterssen**, Riemannian Geometry, Graduate Texts in Mathematics 171, Springer, New York, (1998).

[9] **A. Pressley**. Elementary Di erential Geometry, Second Edition, Springer-Verlag, London (2010).

[10] **W. M. Thurston**. Three-dimensional Geometry and Topology I, Princeton Math. Series, 35(1997), (Levi, S. ed).

[11] **V. Berard** ,Les applications conformes-harmoniques, arXiv :1203.5512v1 [math.DG],(2012).