

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABDELHAMID BEN BADIS DE MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
FILIERE : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES



Thèse Présentée par :

Mohammed Nadjib BENAMAR

Pour l'Obtention du Diplôme de :

Doctorat LMD

Filière : Mathématiques Appliquées

Spécialité : Recherche Opérationnelle et Aide à la Décision

**Sur la Commande de certaines classes de Systèmes
Bidimensionnels Positifs Fractionnaires et/ou Singuliers**

Date de soutenance : 16/10/2024

Devant le jury composé de :

Président	:	Mohand OULD ALI	Professeur	UMAB
Examineurs	:	Ahmed MEDEGHRI	Professeur	NHSM, Alger
	:	Boubakeur BENAHMED	Professeur	NHSM, Alger
	:	Laid DJILALI	MCA	UMAB
Directeur de thèse	:	Mohammed Amine GHEZZAR	MCA	NHSM, Alger
Co-Directeur de thèse	:	Djillali BOUAGADA	Professeur	UMAB

Année Universitaire : 2024 / 2025

D
O
C
T
O
R
A
T

Dédicaces

Je dédie ce travail :

*À mes parents, frères et ma soeur pour leurs
encouragements constants.*

Remerciements

Avant tout, je remercie Allah qui nous a aidé et nous a donné la patience et le courage, ainsi que la volonté pour mener ce travail.

Je tiens à exprimer mes sincères remerciements et toute mon appréciation à mon Directeur de thèse le Docteur Mohammed Amine GHEZZAR Maître à conférence A de l'Ecole Nationale Supérieure de mathématiques d'Alger de m'avoir proposé ce sujet de thèse. Je le remercie vivement pour toutes ses indications qui m'ont beaucoup aidé à apprécier le travail, pour son rôle important dans l'accomplissement de ce dernier, et même pour les efforts qui a fait tout au long de la période de la formation doctorat. Je lui suis profondément reconnaissant.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et mon plus grand respect à mon Co-Directeur de thèse le Professeur Djillali BOUAGADA de l'Université Abdelhamid Ibn Badis pour sa motivation continue, ses encouragements et soutien tout au long de cette expérience académique passionnée. Les efforts qu'il a déployés tout au long de ma formation doctorale ont été d'une valeur inestimable. Je lui serai toujours reconnaissant pour ses conseils et son aide durant cette période.

Je souhaite exprimer ma gratitude envers le Professeur Mohand OULD ALI de l'Université Abdelhamid Ibn Badis pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ma soutenance, mes remerciements vont également à le Professeur Ahmed MEDEGHRI de l'Ecole Nationale Supérieure de mathématiques d'Alger, le Professeur Boubakeur BENAHMED de l'Ecole Nationale Supérieure de mathématiques d'Alger et le Docteur Djillali LAID Maître à conférence A de l'Université Abdelhamid Ibn Badis, qui m'ont honoré d'avoir accepté d'examiner le manuscrit de ma thèse.

Je tiens également à exprimer ma gratitude envers mes proches, mes amis et tous les membres du laboratoire de mathématiques pures et appliquées (LMPA) de l'Université Abdelhamid Ibn

Badis de Mostaganem. Je voudrais tout particulièrement remercier le Docteur Kamel BENYETTOU de l'Ecole Nationale Supérieure de mathématiques d'Alger pour son encouragement, son soutien et son aide précieuse tout au long de la réalisation de cette thèse.

Enfin, je tiens à exprimer ma reconnaissance particulière à tout le corps administratif de la faculté des sciences exactes et de l'informatique, ainsi qu'à tous les enseignants qui mettent en oeuvre de grands efforts pour garantir à leurs étudiants une formation actualisée.

Liste des Publications

Reuves Internationales

Mohammed Nadjib BENAMAR, Mohammed amine GHEZZAR, Djillali BOUAGADA, Kamel BENYETTOU, On the admissibility and robust stabilization of 2D singular continuous-discrete linear systems, International Journal of Dynamics and Control, Publication en ligne 13 September 2023, (**Catégorie B, SCOPUS**). <https://link.springer.com/article/10.1007/s40435-023-01300-8>

Mohammed amine GHEZZAR, Mohammed Nadjib BENAMAR, Djillali BOUAGADA, Kamel BENYETTOU, On the positivity and asymptotic stability of the fractional 2D hybrid linear Roesser model, Journal of Control and Decision, Publication en ligne 01 September 2024, (**Catégorie B, SCOPUS**). <https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/23307706.2024.2394958>

Conférences Internationales

1. Mohammed Nadjib BENAMAR, Mohammed Amine GHEZZAR, djillali BOUAGADA, "Stability of positive 2D continuous-time Lyapunov systems", The first edition of the International Conference on Mathematics Applied in Life Sciences, 23-24 June 2022, Iasi University of Life Sciences, Romania.
2. Mohammed Nadjib BENAMAR, Mohammed Amine GHEZZAR, djillali BOUAGADA. "Controller synthesis for positive fractional 2D continuous-discrete linear system", The second edition- International Symposium and International Student workshop on Interdisciplinary Mathematics in the Citi areas (ISIM/ISWIM 2023), University POLITEHNICA of Bucharest, Center for Research and Training in Innovative Techniques of Applied Mathematics in Engineering "Traian Lalescu" (CiTi), Romanie, 28-30 Juin 2023.

Conférences Nationales

Mohammed Nadjib BENAMAR, Mohammed Amine GHEZZAR, djillali BOUAGADA. "Solvability of Singular Fractional 2D Continuous-Time Linear Systems", Second National Conference Applied Mathematics and Didactics 2NCAMD2023 May 13, 2023.

Notations

1. \mathbb{R} : L'ensemble des nombres réels.
2. \mathbb{R}^+ : L'ensemble des nombres réels positifs.
3. \mathbb{N} : L'ensemble des entiers naturels .
4. \mathbb{R}^n : L'ensemble des vecteurs de taille n .
5. $\mathbb{R}^{m \times n}$: L'ensemble des matrices de dimension $m \times n$.
6. $\mathbb{R}_+^{m \times n}$: L'ensemble des matrices de dimension $m \times n$ positives.
7. I_n : Matrice identité de dimension n .
8. $0_{n \times m}$: Matrice zéro de dimension $n \times m$.
9. \mathbb{M}_n : L'ensembles des matrices de Metzler de dimension n .
10. \mathbb{C} : L'ensemble des nombres complexes.
11. \mathbb{C}_- : L'ensemble des nombres complexes à parties réels négatives.
12. \otimes : Le produit de Kronecker.
13. $\sigma(A)$: Spectre de la matrice A .
14. $A \prec 0$: La matrice A est définie négative .
15. $A \succ 0$: La matrice A est définie positive .
16. A^\perp : Est un matrice arbitraire dont les colonnes s'étendent sur l'espace nul de la matrice A .
17.
$$\begin{bmatrix} A & B \\ \star & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix}.$$
18. $\text{Sym}\{A\} = A + A^T$.
19. LMIs : Linear Matrix Inequalities strict (En anglais).

Table des matières

Dédicaces	2
Remerciements	3
Liste des Publications	5
Notations	7
Introduction	11
1 Notion de bases	15
1 Théorie des matrices	15
1.1 Matrices particulières	15
1.2 Décomposition en valeurs singulières (SVD)	16
2 Introduction au calcul fractionnaire	17
2.1 Fonction Gamma d'Euler et Fonction de Mittag-Leffler : Définitions et Propriétés	17
2.2 Définitions de la Dérivée-Intégrale Fractionnaire	18
2.3 Fonction matricielle de Mittag-Leffler	19
3 Les inégalités matricielles linéaires LMI	20
4 Introduction aux modèles bidimensionnels (2D)	22
4.1 Modèle de Roesser	22
4.2 Modèle de Fornasini-Marchesini	23
4.3 Applications sur les modèles bidimensionnels	24
2 Contrôlabilité et contrôle à énergie minimale des systèmes bidimensionnels (2D) fractionnaires positifs	27
1 Introduction	27

2	Atteignabilité, contrôlabilité et contrôle à énergie minimale des systèmes bidimensionnels (2D) fractionnaires positifs à temps Continu décrit par le Modèle de Fornasini-Marchesini	28
2.1	Trajectoire d'état et la positivité	28
2.2	Atteignabilité	29
2.3	Contrôlabilité	31
2.4	Contrôle à énergie minimale	32
2.5	Exemple numérique	35
3	Atteignabilité, contrôlabilité et contrôle à énergie minimale des systèmes bidimensionnels (2D) fractionnaires positifs à temps Continu-discret décrit par le Modèle de Fornasini-Marchesini	37
3.1	Trajectoire d'état et positivité	37
3.2	Atteignabilité	39
3.3	Contrôle à énergie minimale	43
4	Conclusion	45
3	Analyse de la stabilité des systèmes bidimensionnels (2D) fractionnaires positifs	47
1	Stabilité, stabilisation et stabilité robuste des systèmes linéaires bidimensionnels (2D) fractionnaires positifs à temps continu-discret	47
1.1	Formulation du problème et positivité	48
1.2	Stabilité	48
1.3	Stabilisation	51
1.4	Stabilisation robuste	53
1.5	Influence de la valeur du pas de discrétisation sur la positivité et la stabilité	55
1.6	Exemple numérique	59
2	Analyse de la stabilité des systèmes bidimensionnels (2D) fractionnaires positifs de Lyapunov	60
2.1	Formulation du problème	60
2.2	Analyse de la positivité	64
2.3	Analyse de la stabilité	64
2.4	Exemple numérique	65
2.5	Conclusion	65
4	Analyse de l'admissibilité des systèmes bidimensionnels (2D) singuliers	67
1	Introduction	67

TABLE DES MATIÈRES

2	Admissibilité, stabilisation des systèmes linéaires bidimensionnels (2D) singuliers à temps continu-discret	68
2.1	Formulation du problème	68
2.2	Analyse de l'admissibilité	70
2.3	Stabilisation du système 2D à temps continu-discret singulier	76
3	Admissibilité, stabilisation robuste des systèmes linéaires bidimensionnels (2D) singuliers à temps continu-discret incertains	78
3.1	Formulation du problème	78
3.2	Stabilisation robuste du système 2D continu-discret singulier	80
3.3	Exemples numériques	81
4	Conclusion	92
	Conclusion	93
	Résumé	95
	Bibliographie	97

Introduction

Le monde industriel connaît actuellement un énorme développement technologique en raison de la concurrence et de besoins de plus en plus exigeants, du point de vue qualité et de la performance. Ce projet est en grande partie dû au développement de la recherche fondamentale dans divers domaines tels que l'analyse numérique et de la théorie des systèmes, tout cela a permis de mettre en oeuvre des méthodes et des approches très complexes pour l'identification et la commande des systèmes. Le développement des mathématiques en générale a été et sera toujours nécessaire pour résoudre des problèmes de physique et d'ingénierie. Les systèmes bidimensionnels (2D) remontent aux années 1970, ils ont été utilisés dans de nombreux domaines de l'ingénierie moderne, tels que le traitement d'images numériques [73], les circuits électriques [9, 19], le traitement des échos cibles captés par le radar [67], l'analyse de la contamination des rivières [35], les processus de chauffage à la vapeur de l'eau et l'absorption de gaz [20, 83],... etc. La caractéristique commune des phénomènes mentionnés ci-dessus est la nécessité d'analyser des signaux (fonctions) qui dépendent de deux variables linéairement indépendantes, par exemple le temps et une variable spatiale ou deux variables spatiales. Les modèles les plus populaires dans les systèmes bidimensionnels sont des modèles introduits par Roesser [73], Fornasini et Marchesini [33, 34], Attasi [6]. Les systèmes 2D singuliers (également appelés implicites ou descripteurs) ont attiré beaucoup d'attention au cours de la dernière décennie [37, 49, 51, 72],... etc. Peuvent être utilisés pour modéliser de nombreux systèmes physiques tels que les systèmes électriques [7, 9], mécaniques et chimiques [74, 97].

L'incorporation du calcul fractionnaire dans l'étude des systèmes linéaires 2D apporte plusieurs avantages et importances [14, 60]. Il permet la modélisation et l'analyse de systèmes avec effets de mémoire, améliore la précision de la représentation et de la simulation du système, ouvre de nouvelles voies pour la conception et l'optimisation des commandes, facilite l'identification du système, l'estimation des paramètres et contribue à l'avancement de la théorie et des méthodes mathématiques. Le concept de systèmes linéaires 2D fractionnaires, introduit

dans [59, 60] et développé dans des travaux ultérieurs [12, 61, 76, 78], a fourni des informations précieuses sur la théorie et les applications des systèmes linéaires 2D fractionnaires, contribuant ainsi à l'avancement de ce domaine. Parmi les dérivées fractionnaires bien établies qui ont été largement utilisées pour la modélisation des systèmes incluent la dérivée de Caputo [3], la dérivée de Riemann-Liouville [60] et la dérivée de Letnikov [39].

Dans les systèmes pratiques, de nombreux phénomènes du monde réel impliquent des variables non négatives, telles que la température absolue, les concentrations de substances et les niveaux de population, les réacteurs chimiques, la pollution de l'environnement, la médecine, l'économie, la démographie,...etc (voir [75]). Ces systèmes appartiennent à la catégorie des systèmes positifs, dans lesquels le signal de sortie et les variables d'état sont contraints au premier quadrant de l'espace d'état, cette contrainte est imposée en fonctions de conditions initiales et de signaux d'entrée non négatifs. Les caractéristiques inhérentes aux systèmes positifs, avec leurs contraintes uniques, introduisent des aspects intéressants pour leurs problèmes d'analyse et de synthèse. En conséquence, il y a eu récemment une recrudescence des recherches axées sur les systèmes positifs unidimensionnels [52, 54, 77] et les systèmes bidimensionnels [53, 58, 59, 70, 76], des résultats significatifs ont émergé dans ce domaine, visant à répondre les caractéristiques distinctives et les défis posés par les systèmes positifs. Ces résultats couvrent divers aspects, notamment l'analyse de la stabilité [25, 28, 46, 71], la contrôlabilité [77, 81] et l'évaluation des performances [61, 62]. Le corpus croissant de littérature reflète l'augmentation l'intérêt et l'importance de l'étude des systèmes positifs et souligne la nécessité de progrès supplémentaires dans ce domaine.

La contrôlabilité constitue un concept primordial dans la théorie du contrôle, servant de pivot pour relever divers défis d'ingénierie. Ce concept joue un rôle central dans les systèmes mécaniques, les circuits électriques et les systèmes biologiques, leur permettant de passer de n'importe quel état initial à un état final souhaité dans leur espace d'état grâce à des entrées de contrôle appropriées. À l'inverse, le contrôle à énergie minimale, une autre facette de la contrôlabilité, se concentre sur l'optimisation des entrées de contrôle pour faciliter des transitions fluides entre les états. Les chercheurs ont exploré de manière approfondie les aspects de contrôlabilité et de contrôle à énergie minimale dans divers types de systèmes, notamment les systèmes linéaires fractionnaires 1D [78–81], les systèmes fractionnaires positifs 1D [61, 77], les systèmes linéaires 2D continus [11, 44, 47, 50, 69], les systèmes linéaires 2D continu-discret [68], les systèmes linéaires 2D continu-discret positifs [62] et les systèmes linéaires 2D discret fractionnaires [60].

L'étude de la stabilité des systèmes linéaires bidimensionnels est cruciale pour diverses applications en ingénierie comme les systèmes qui sont représentés par des systèmes interconnectés [7, 84, 97], cela nous permet de concevoir et de contrôler ces systèmes pour garantir leur fonctionnement fiable et sécuritaire. Il aide les ingénieurs à prédire et à atténuer les instabilités ou oscillations potentielles susceptibles de conduire à des pannes du système. De plus, l'analyse de la stabilité est essentielle dans des domaines tels que l'économie et les sciences sociales, où elle permet d'étudier des dynamiques complexes et de prédire le comportement à long terme. La stabilité robuste joue un rôle essentiel dans la conception des commandes en garantissant la stabilité même en présence d'incertitudes ou de perturbations potentielles [24, 92, 97], ces systèmes ont une dynamique qui peut ne pas être connue avec précision ou qui peut être influencée par des incertitudes. Plusieurs auteurs ont étudié la stabilité des systèmes 1D dans [52], la stabilité des systèmes fractionnaires positifs [71], la stabilité des systèmes linéaires 2D positifs [8, 18, 31] et la stabilité des systèmes 2D fractionnaires positifs [25, 28, 46].

Le problème d'admissibilité ont été considérés par plusieurs auteurs en 1D [22, 64, 65, 72, 89], et étendus au cas continu 2D [13, 26, 27] et au cas discret [21, 30]. L'admissibilité est une notion attachée aux systèmes singuliers et elle signifie la stabilité avec la régularité et la non-impulsivité des systèmes singuliers. Les modes de saut et la régularité jouent un rôle important dans le problème de stabilité d'un système singulier, car la régularité garantit l'existence et l'unicité d'une solution, et l'existence des modes de saut implique un comportement impulsif indésirable qui à son tour affecte la stabilité dans les systèmes. Plusieurs méthodes pour vérifier l'admissibilité des systèmes, l'approche LMI est une méthode très efficace et simple elle est utilisée par plusieurs chercheurs pour vérifier la stabilité des systèmes [16, 23].

Motivés par la discussion et la littérature ci-dessus, dans cette thèse, nous étudions la contrôlabilité des systèmes linéaires 2D fractionnaires positive basés sur les modèles de Fornasini-Marchesini (continu, continu-discret), ainsi nous analysons la stabilité des systèmes fractionnaires positifs sur les modèles de Roesser (continu-discret, Lyapunov continu), et en fin nous regardons le problème d'admissibilité pour les systèmes 2D singuliers (continu-discret) basés sur l'approche LMIs. Notre objective dans cette thèse est d'extraire des conditions basées sur des techniques mathématiques pour trouver des approches sur la commande des systèmes fractionnaires positives et singuliers en étendant certains résultats à des systèmes unidimensionnels.

La thèse se compose de 4 chapitres, et d'une bibliographie. Dans le premier chapitre, nous exposons les notions de base qui sont utilisées dans cette thèse tel que dans la première partie rappelant la théorie des matrices et quelques propriétés pour des matrices particulières comme :

les matrices positives, les matrices de Metzler, les matrices monomiales, les concepts de calcul fractionnaire donnés dans la deuxième partie, la troisième partie traite de la définition et des propriétés de l'outil LMI, et dans la dernière partie nous présentons des modèles populaires de systèmes bidimensionnels et leurs applications dans le domaine de la physique. Le chapitre deux est consacré à la contrôlabilité et le contrôle à énergie minimale des systèmes linéaires fractionnaires 2D positifs en utilisant la dérivée fractionnaire au sens de Caputo. Dans ce chapitre nous nous basons sur les résultats des systèmes linéaires fractionnaires positifs 1D pour établir nos résultats, ce chapitre traite deux modèles de Fornasini-Marchesini, à temps 2D continu dans la première partie et à temps 2D continu-discret dans la deuxième partie. Le chapitre trois étudie la stabilité du système linéaire 2D fractionnaire positif décrit par le modèle de Roesser et basé sur la dérivée fractionnaire au sens de Caputo dans la partie dynamique continu. Dans ce chapitre, nous étudions deux modèles : le modèle 2D à temps continu-discret dans la première section, et le modèle de Lyapunov 2D continu dans la deuxième section. Le chapitre quatre présente le problème d'admissibilité du système linéaire 2D continu-discret singulier décrit par le modèle de Roesser, nous proposons des conditions suffisantes pour l'admissibilité qui aident à stabiliser le même système, tout cela dans la première section, dans la seconde section nous étendons nos résultats dans la classe des systèmes à paramètres incertains, nous nous basons sur l'approche LMI dans ce chapitre.

Notion de bases

Dans ce chapitre, nous explorerons la terminologie, les théories et les principes clés qui sous-tendent ce travail.

1 Théorie des matrices

Dans cette partie, nous présentons certains types particuliers de matrices ainsi que certaines propriétés liées aux calculs matriciels sur lesquels nous nous appuyerons pour soutenir nos résultats tout au long de ce travail. Nous nous basons sur les références [38, 52] pour éclaircir les concepts que nous allons présenter.

1.1 Matrices particulières

Cette partie présente des matrices non-négatives, des matrices de Metzler, et d'autres types de matrices qui seront utilisées dans l'analyse des systèmes positifs.

Soit $A = [a_{ij}]$ une matrice à coefficients réels.

Définition 1.1. [52] *La matrice A est appelée une matrice non-négative si toutes ses entrées sont non négatives i.e $a_{ij} \geq 0$.*

Définition 1.2. [52] *La matrice A est appelée une matrice positive si toutes ses entrées sont non négatives avec au moins une entrée strictement positive.*

Exemple 1.1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

A est une matrice positive.

Définition 1.3. [52] La matrice A est appelée une matrice strictement positive si toutes ses entrées sont strictement positive i.e $a_{ij} > 0$.

Définition 1.4. [52] La matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est appelée une matrice de Metzler si toutes ses entrées hors diagonales sont non négatives i.e $a_{ij} \geq 0$ pour $i \neq j$.

Exemple 1.2.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

A est une matrice de Metzler.

Définition 1.5. [52] La matrice A est appelée une matrice monomiale ou matrice de permutation généralisée si toutes ses entrées sont toutes nulles sauf une, dans chaque ligne et chaque colonne, qui est strictement positive.

Lemme 1.1. [52] Une matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ non singulière telle que, $A^{-1} \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ si et seulement si, A est une matrice monomiale.

Exemple 1.3. La matrice A est une matrice monomiale :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

alors, l'inverse de la matrice A est donné par :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_+^{4 \times 4}. \quad (1.4)$$

1.2 Décomposition en valeurs singulières (SVD)

Dans cette partie, nous nous basons sur [38].

Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ une matrice de taille $n \times m$ avec $\text{rang}(A) = r$, la décomposition en valeurs singulières d'une matrice A est la factorisation de A en produit de trois matrices $A = U\Sigma V^T$,

où les matrices $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sont des matrices orthogonales, i.e $UU^T = U^T U = I$, $VV^T = V^T V = I$ et la matrice Σ est donnée par :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

où la matrice $D = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k)$ et σ_i pour $i = 1, \dots, k$ sont des valeurs singulières de la matrice A telles que $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_k$. Les colonnes des matrices U, V sont des vecteurs propres des matrices $A^T A, A A^T$ respectivement.

2 Introduction au calcul fractionnaire

Le calcul fractionnaire est une branche qui fournit un cadre mathématique puissant pour la modélisation et la compréhension de systèmes complexes dans diverses disciplines scientifiques et techniques, car il se concentre sur l'étude des dérivées et des intégrales d'ordre non entier. Dans la théorie du contrôle, le calcul fractionnaire joue un rôle important et permet de décrire et d'analyser des systèmes avec des effets de mémoire, des dépendances à longue portée et une dynamique complexe (voir [40, 60, 63]). Dans cette section, basée sur [60], nous donnons quelques concepts et définitions essentielles du calcul fractionnaire qui sont utilisés dans le présent manuscrit.

2.1 Fonction Gamma d'Euler et Fonction de Mittag-Leffler : Définitions et Propriétés

Dans cette partie, nous introduisons deux fonctions mathématiques importantes en calcul fractionnaire : la fonction gamma d'Euler et la fonction de Mittag-Leffler.

Définition 2.1. [60] La fonction gamma d'Euler (notée $\Gamma(x)$) est définie par l'expression intégrale suivante :

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad \text{Re}(x) > 0, \quad (1.5)$$

elle satisfait également l'équation :

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x). \quad (1.6)$$

Définition 2.2. [60] La fonction de Mittag-Leffler à un paramètre (notée $E_\alpha(z)$) est définie pour une variable complexe z par la série suivante :

$$E_\alpha(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{\Gamma(\alpha i + 1)}, \quad \alpha > 0 \text{ un nombre réel.} \quad (1.7)$$

Remarque 2.1. *La fonction de Mittag-Leffler est une extension de la fonction exponentielle classique telle que pour $\alpha = 1$ on obtient $E_1(z) = e^z$, elle joue un rôle crucial dans la résolution des équations différentielles fractionnaires.*

Définition 2.3. [60] *La fonction Mittag-Leffler à deux paramètres notée $E_{\alpha,\beta}(z)$ est définie pour une variable complexe z comme suit :*

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{\Gamma(\alpha i + \beta)}, \quad \alpha, \beta > 0, \quad (1.8)$$

la fonction (1.8) est l'extension de la fonction de Mittag-Leffler à un paramètre (1.7), telle que pour $\beta = 1$, on obtient (1.7).

2.2 Définitions de la Dérivée-Intégrale Fractionnaire

Définition 2.4. [60] *La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre α de la fonction $f(t)$ est donnée par :*

$$D_t^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha - n + 1}} d\tau \quad (1.9)$$

où

$$\left(f^{(n)}(\tau) = \frac{d^n f(\tau)}{d\tau^n} \right) \text{ pour } n - 1 < \alpha < n \in \mathbb{N} - \{0\}. \quad (1.10)$$

Définition 2.5. [60] *L'intégrale fractionnaire d'ordre β de la fonction $f(t)$ est donnée par :*

$$I_t^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t - \tau)^{\beta - 1} f(\tau) d\tau, \quad (1.11)$$

où $\beta > 0$.

De même, on peut définir les dérivées et les intégrales fractionnaires de la fonction $f(t_1, t_2)$ avec deux variables linéairement indépendantes $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.

Définition 2.6. [60] *Les dérivées partielles d'ordre fractionnaires α_k de la fonction bidimensionnelle $f(t_1, t_2)$ par rapport à la variable t_k sont définies par la formule :*

$$\begin{aligned} D_{t_k}^{\alpha_k} f(t_1, t_2) &= \frac{\partial^{\alpha_k}}{\partial t_k^{\alpha_k}} f(t_1, t_2) \\ &= \frac{1}{\Gamma(N_k - \alpha_k)} \int_0^{t_k} \frac{f_{t_k}^{(N_k)}(\tau)}{(t_k - \tau)^{\alpha_k + 1 - N_k}} d\tau, \end{aligned} \quad (1.12)$$

où $N_k - 1 < \alpha_k < N_k, N_k \in \mathbb{N} - \{0\}, \alpha_k \in \mathbb{R}_+$ est l'ordre de la dérivée partielle pour $k = 1, 2$

et

$$f_{t_k}^{(N_k)}(\tau) = \begin{cases} \frac{\partial^{N_1} f(\tau, t_2)}{\partial \tau^{N_1}} & \text{pour } k = 1 \\ \frac{\partial^{N_2} f(t_1, \tau)}{\partial \tau^{N_2}} & \text{pour } k = 2. \end{cases} \quad (1.13)$$

La définition ci-dessus est une généralisation de définition d'une dérivée unidimensionnelle d'ordre fractionnaire au sens de Caputo aux fonctions bidimensionnelles.

Définition 2.7. [60] *L'intégrale fractionnaire d'ordre β_k de la fonction bidimensionnelle $f(t_1, t_2)$ par rapport à la variable t_k est la fonction donnée par :*

$$I_{t_k}^{\beta_k} f(t_1, t_2) = \frac{1}{\Gamma(\beta_k)} \int_0^{t_k} (t_k - \tau)^{\beta_k - 1} f_{t_k}(\tau) d\tau, \quad (1.14)$$

où $\beta_k > 0$ est l'ordre d'intégration pour $k = 1, 2$ et

$$f_{t_k}(\tau) = \begin{cases} f(\tau, t_2) & \text{pour } k = 1 \\ f(t_1, \tau) & \text{pour } k = 2. \end{cases} \quad (1.15)$$

La définition ci-dessus est une généralisation de la définition d'une intégrale unidimensionnelle d'ordre fractionnaire au sens de Riemann-Liouville aux fonctions bidimensionnelles.

Définition 2.8. [60] *La dérivée-intégrale d'ordre fractionnaire α_k de la fonction bidimensionnelle $f(t_1, t_2)$ par rapport à la variable t_k est la fonction donnée par la formule :*

$$D_{t_k}^{\alpha_k} f(t_1, t_2) = \begin{cases} D_{t_k}^{\alpha_k} f(t_1, t_2) & \text{pour } \alpha_k \in \mathbb{R}_+ \\ I_{t_k}^{-\alpha_k} f(t_1, t_2) & \text{pour } \alpha_k < 0 \end{cases} \quad (1.16)$$

où $k = 1, 2$.

2.3 Fonction matricielle de Mittag-Leffler

Définition 2.9. [60] *Soit la matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$. Alors, la fonction matricielle de Mittag-Leffler est définie par la série de Taylor suivante :*

$$E_{\alpha, \beta}(A) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{\Gamma(\alpha i + \beta)}. \quad (1.17)$$

Ensuite, D'après le théorème classique de Cayley-Hamilton (voir [45]), il est facile de prouver que toute puissance de A peut être exprimée comme une combinaison linéaire de I, A, \dots, A^{n-1} . Ainsi, $E_{\alpha, \beta}(tA)$ est aussi un polynôme en A avec des coefficients analytiques en t , en effet, la

formule (1.17) pour la fonction matricielle de Mittag-Leffler s'écrit :

$$\begin{aligned} E_{\alpha,\beta}(tA) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i A^i}{\Gamma(\alpha i + \beta)} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{\Gamma(\alpha i + \beta)} \left(\sum_{k=0}^{n-1} p_{ik} A^k \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{i=0}^{\infty} p_{ik} \frac{t^i}{\Gamma(\alpha i + \beta)} \right) A^k = \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{p}_k(t) A^k. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Lemme 2.1. [60] Soit la matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $0 < \alpha, \beta \leq 1$. Alors, $E_{\alpha,\beta}(tA) \geq 0$ pour $t \geq 0$ si et seulement si A est une matrice de Metzler.

3 Les inégalités matricielles linéaires LMI

Les techniques LMI représentent une ressource puissante pour résoudre un large éventail de problèmes liés au contrôle convexe. Cela est principalement dû à l'existence des solveurs numériques très efficaces pour les problèmes LMI, facilement disponibles dans des ensembles d'outils populaires tels que Matlab et Scilab. De plus, plusieurs problèmes qui s'avèrent extrêmement difficiles lorsqu'ils sont abordés à l'aide des méthodes spectrales classiques de fréquences ou d'espace d'état peuvent être facilement reformulés en problèmes LMI (voir [15]). Cette transformation est particulièrement avantageuse dans le cadre de l'analyse de stabilité et de la stabilisation de systèmes 2D/nD, notamment en présence d'incertitudes (voir [13,14,16]). Dans cette section, nous éluciderons les concepts clés relatifs à la terminologie LMI.

Définition 3.1. [40] Une inégalité matricielle linéaire stricte notée LMIs est représentée par l'expression suivante :

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m F_i(x) \succ 0, \quad (1.19)$$

où $x \in \mathbb{R}^m$ est une variable et les F_i pour $i = 1, \dots, m$ sont des matrices symétriques donnés. Le symbole d'inégalité utilisé dans l'équation (1.19) signifie que $F(x)$ est défini positive, autrement dit $v^T F(x) v > 0$ pour tous les vecteurs non nuls v dans \mathbb{R}^n . Il est important de noter que l'inégalité matricielle linéaire stricte LMIs exprimée dans l'équation (1.19) est équivalente à une collection de n inégalités polynomiales concernant la matrice $F(x)$. Plus précisément, les principaux mineurs de $F(x)$ doivent être positifs.

Remarque 3.1. Nous rencontrerons également des inégalités matricielles linéaires non strictes, qui se formulent comme suit :

$$F(x) \succeq 0. \quad (1.20)$$

Définition 3.2. [40] On peut définir un ensemble C comme étant convexe lorsque, pour tous les points $(y_1, y_2) \in C$ et tout nombre réel λ tel que $0 < \lambda < 1$, la combinaison convexe $(\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2)$ est également un élément de l'ensemble C .

Définition 3.3. [40] Considérons une fonction f définie sur \mathbb{R}^n avec $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que la fonction f est convexe si, pour tous les points $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n$ et tout nombre réel λ tel que $0 < \lambda < 1$, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2). \quad (1.21)$$

Autrement dit, la fonction f est convexe lorsque, pour tous les couples de points (x_1, x_2) , la valeur de f évaluée en $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ est toujours inférieure ou égale à la combinaison convexe $\lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$.

Définition 3.4. [40] Les LMIs dans l'équation (1.19) représente une contrainte convexe sur la variable x . En d'autres termes, l'ensemble $\{x \mid F(x) \succ 0\}$ forme une région convexe.

Remarque 3.2. Lorsqu'il s'agit de plusieurs LMI, telles que $F_{(1)}(x) \succ 0, \dots, F_{(p)}(x) \succ 0$, nous pouvons les consolider en une seule LMI comme suit :

$$\begin{bmatrix} F_{(1)}(x) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & F_{(p)}(x) \end{bmatrix} \succ 0. \quad (1.22)$$

Par conséquent, nous ne ferons pas de distinction entre un ensemble d'LMI et une seule LMI.

Lemme 3.1. [15] Les inégalités non linéaires (convexes) sont transformées au format LMI grâce au complément de Schur. Le concept fondamental qui sous-tend cette approche peut transformer les inégalités non linéaires suivantes :

$$\begin{bmatrix} Q(y) & S(y) \\ S^T(y) & R(y) \end{bmatrix} \succ 0 \quad (1.23)$$

en LMI :

$$\begin{cases} R(y) \succ 0 \\ Q(y) - S(y)R^{-1}(y)S^T(y) \succ 0 \end{cases} \quad (1.24)$$

ou

$$\begin{cases} Q(y) \succ 0 \\ R(y) - S^T(y)Q^{-1}(y)S(y) \succ 0 \end{cases} \quad (1.25)$$

où $Q(y), R(y)$ sont des matrices symétriques, i.e($Q(y) = Q^T(y)$, $R(y) = R^T(y)$) et $S(y)$ dépendent affinement de y .

4 Introduction aux modèles bidimensionnels (2D)

Dans cette section, nous présenterons les deux modèles sur lesquels nous nous concentrerons principalement.

4.1 Modèle de Roesser

Le modèle de Roesser, également connu sous le nom de modèle d'espace d'états de Roesser, est une représentation mathématique utilisée pour décrire un système bidimensionnel. Le modèle de Roesser a été introduit par D.Givone et P.Roesser en 1972 [43] et développé par P.Roesser en 1975 [73]. Il offre une représentation compacte et efficace, s'adapte aux singularités, permet une plus grande flexibilité dans la définition des structures du système, simplifie les formulations mathématiques et permet la synthèse de conception et de contrôle. Grâce au modèle de Roesser, les ingénieurs de contrôle peuvent modéliser, analyser et contrôler efficacement les systèmes 2D complexes rencontrés dans divers domaines d'ingénierie [37, 51, 86, 87, 94]. Ce modèle peut s'écrire dans plusieurs forme comme suit :

Forme 2D continu :

$$E \begin{bmatrix} \frac{d}{dt_1} x^h(t_1, t_2) \\ \frac{d}{dt_2} x^v(t_1, t_2) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x^h(t_1, t_2) \\ x^v(t_1, t_2) \end{bmatrix} + Bu(t_1, t_2), \quad t_1, t_2 \geq 0, \quad (1.26a)$$

$$y(t_1, t_2) = C \begin{bmatrix} x^h(t_1, t_2) \\ x^v(t_1, t_2) \end{bmatrix} + Du(t_1, t_2), \quad t_1, t_2 \geq 0. \quad (1.26b)$$

Forme 2D discret :

$$E \begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + Bu(i, j), \quad i, j \in \mathbb{Z}_+, \quad (1.27a)$$

$$y(i, j) = C \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + Du(i, j) \quad i, j \in \mathbb{Z}_+. \quad (1.27b)$$

Forme 2D continu-discret (hybride) :

$$E \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} x^h(t, i) \\ x^v(t, i+1) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x^h(t, j) \\ x^v(t, j) \end{bmatrix} + Bu(t, j), \quad i \in \mathbb{Z}_+, t \geq 0, \quad (1.28a)$$

$$y(t, i) = C \begin{bmatrix} x^h(t, i) \\ x^v(t, i) \end{bmatrix} + Du(t, i) \quad i \in \mathbb{Z}_+, t \geq 0, \quad (1.28b)$$

où $x = \begin{bmatrix} x^h \\ x^v \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $x^h \in \mathbb{R}^{n_1}$ est le vecteur d'état horizontal, $x^v \in \mathbb{R}^{n_2}$ est le vecteur d'état vertical ($n = n_1 + n_2$), u est le contrôle, y est le vecteur de sortie, et E, A, B, C, D sont des matrices réelles de dimension appropriée.

Remarque 4.1. *Notez que le modèle de Roesser propage l'information dans deux directions indépendantes respectivement sur un axe vertical et horizontal.*

4.2 Modèle de Fornasini-Marchesini

Le modèle de Fornasini-Marchesini, également connu sous le nom de réalisation de l'espace d'états, ce modèle est introduit par les deux italiens L.Fornasini et G.Marchesini en 1976 pour premier modèle [33] et en 1978 pour le seconde modèle [34]. Le modèle de Fornasini-Marchesini est un cadre mathématique utilisé dans la théorie du contrôle et le traitement du signal. Ce modèle peut s'écrire dans la forme suivante :

Premier modèle :

$$Ex_{i+1, j+1} = A_0 x_{i, j} + A_1 x_{i+1, j} + A_2 x_{i, j+1} + Bu_{i, j} \quad (1.29a)$$

$$y_{i, j} = Cx_{i, j} + Du_{i, j} \quad (1.29b)$$

Second modèle :

$$Ex_{i+1, j+1} = A_1 x_{i+1, j} + A_2 x_{i, j+1} + B_1 u_{i+1, j} + B_2 u_{i, j+1} \quad (1.30a)$$

$$y_{i, j} = Cx_{i, j} + Du_{i, j} \quad (1.30b)$$

où $x_{i,j} \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état $u_{i,j}$ le contrôle.

On peut également exprimer les deux formes précédentes en utilisant la représentation à temps 2D continu et la représentation à temps 2D continu-discret, dans le même contexte mentionné dans le modèle de Roesser.

Remarque 4.2. *Si la matrice E est singulière, alors on dit que le modèle est singulier. Dans le cas contraire, on dit que le modèle est standard.*

Remarque 4.3. *Pour le premier modèle de Fornasini-Marchesini, si l'on prend $A_0 = -A_1A_2$, on obtient un autre modèle populaire appelé modèle de Attasi décrit par Attasi S en 1973 dans [5] et développé en 1975 dans [6].*

4.3 Applications sur les modèles bidimensionnels

Dans cette partie, nous présenterons deux applications bien connues de la physique en les étudiant par modélisation dans des systèmes bidimensionnels.

Applications sur les systèmes spatialement interconnectés

Les systèmes interconnectés sont aujourd'hui utilisés pour modéliser de nombreux systèmes pratiques tels que : des circuits électriques [9,19], des chaînes de voitures [97],...etc. Cette classe de systèmes peut être modélisée sous forme de systèmes 2D linéaires [7, 9, 19]. Les systèmes spatialement interconnectés consistent en une série de sous-systèmes identiques appelés cellules qui sont connectés le long d'une ligne correspondant à la dimension spatiale p (voir le figure 1.1 suivante).

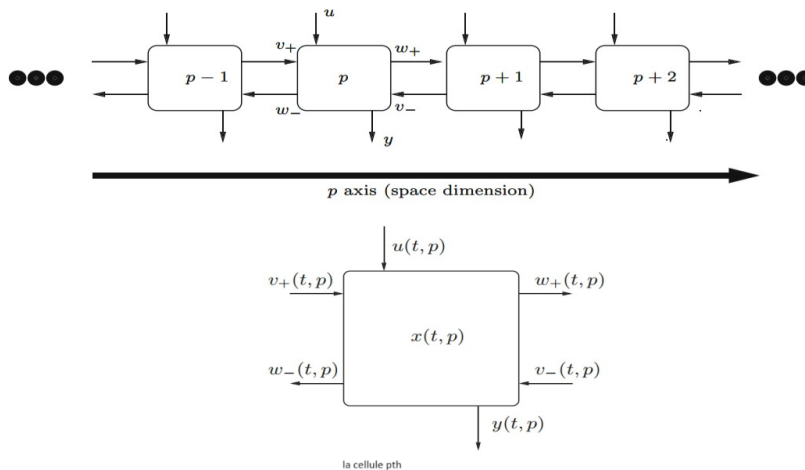


FIGURE 1.1 – Interconnexion des sous-systèmes selon une dimension

Une classe standard de systèmes interconnectés s'écrit sous la forme des équations suivantes (voir [7, 9, 19]) :

$$\begin{cases} \dot{x}(t, p) = A_{11}x(t, p) + A_{12_+}v_+(t, p) + A_{12_-}w_-(t, p + 1) + B_1u(t, p), \\ v_+(t, p + 1) = A_{21_+}x(t, p) + A_{vw_{++}}v_+(t, p) + A_{vw_{+-}}w_-(t, p + 1) + B_{2_+}u(t, p), \\ w_-(t, p) = A_{21_-}x(t, p) + A_{vw_{-+}}v_+(t, p) + A_{vw_{--}}w_-(t, p + 1) + B_{2_-}u(t, p), \\ y(t, p) = C_1x(t, p) + C_{2_+}v_+(t, p) + C_{2_-}w_-(t, p + 1) + Du(t, p), \end{cases} \quad (1.31)$$

nous introduisons ici le vecteur :

$$\phi(t, p) = [v'_+(t, p)w'_-(t, p)]' \in \mathbb{R}^{n_v}, \quad p \in \mathbb{Z}, t \in]0, +\infty[, \quad (1.32)$$

en tenant compte de (1.32), le système (1.31) peut être réécrit sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t, p) = A_{11}x(t, p) + [A_{12_+}0] \phi(t, p) + \tilde{E}\phi(t, p + 1) + B_1u(t, p), \\ E\phi(t, p + 1) = A_{21}x(t, p) + A_{22}\phi(t, p) + B_2u(t, p), \\ y(t, p) = C_1x(t, p) + [C_{2_+}0] \phi(t, p) + \bar{E}\phi(t, p + 1) + Du(t, p), \end{cases} \quad (1.33)$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{E} &= \begin{bmatrix} 0 & A_{12_-} \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} I & -A_{vw_{+-}} \\ 0 & -A_{vw_{--}} \end{bmatrix}, \\ A_{22} &= \begin{bmatrix} A_{vw_{++}} & 0 \\ A_{vw_{-+}} & -I \end{bmatrix}, \quad \bar{E} = \begin{bmatrix} 0 & C_{2_-} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (1.34)$$

qui est équivalent au système bidimensionnel 2D (1.28), avec

$$\begin{aligned} E &= \begin{bmatrix} I & -\tilde{E} \\ 0 & E \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} A_{11} & [A_{12_+}0] \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \\ B &= \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} C_1 & [C_{2_+}0] & \bar{E} \end{bmatrix}, \quad D = D. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Applications sur L'équation de Darboux

L'équation de Darboux est une équation différentielle partielle hyperbolique de second ordre largement connue qui caractérise plusieurs systèmes dynamiques, tels que le système de chauffage et de séchage de l'air par absorption de gaz par le débit d'eau [14, 26]. L'équation de Darboux prend la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t}s(t, i + 1) = a_1s(t, i + 1) + a_2\frac{\partial}{\partial t}s(t, i) + a_0s(t, i) + bf(t, i) \quad (1.36)$$

où $s(t, i)$ est une fonction a deux inconnue t (le temps) $\in [0, x_f]$ et i l'espace $\in \mathbb{Z}^+$, a_0, a_1, a_2 et b sont des coefficients réels et $f(x, t)$ est la fonction d'entrée.

Définissons

$$r(t, i) = s(t, i + 1) - a_2 s(t, i), \quad (1.37)$$

alors l'équation hyperbolique (1.36) du second ordre peut être adaptée en un système similaire d'un modèle $2D$ continu-discret de la forme de Roesser ((1.28)) :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} r(t, i) \\ s(t, i + 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_1 a_2 + a_0 \\ 1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(t, i) \\ s(t, i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} f(t, i), \quad (1.38)$$

le modèle obtenu (1.38) est équivalent au modèle de Roesser (1.28), avec

$$E = I, \quad A = \begin{bmatrix} a_1 & a_1 a_2 + a_0 \\ 1 & a_2 \end{bmatrix} \quad (1.39)$$

et

$$B = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} \quad u(t, i) = f(t, i). \quad (1.40)$$

Contrôlabilité et contrôle à énergie minimale des systèmes bidimensionnels (2D) fractionnaires positifs

1 Introduction

Dans ce chapitre, nous examinons la contrôlabilité et le problème de contrôle à énergie minimale des systèmes 2D linéaires fractionnaires positifs. Pour ce faire, nous divisons ce chapitre en deux sections distinctes. Dans la première section, nous analysons l'atteignabilité et la contrôlabilité du système à temps continu décrit par le modèle de Fornasini-Marchesini [34]. Nous utilisons des techniques basées sur l'approche du Grammien pour dériver nos résultats. De plus, nous examinons un cas particulier de ce système en utilisant des tests basés sur les matrices de système. Notre objectif est de trouver des solutions pour le problème de contrôle à énergie minimale du système positif. Enfin, nous présentons des illustrations numériques pour étayer nos résultats.

Dans la deuxième section, nous étendons notre analyse aux systèmes à temps continu-discret décrits par le modèle de Fornasini-Marchesini. Nous dérivons à nouveau des résultats pour l'atteignabilité. De plus, nous considérons un autre système continu-discret populaire et établissons des conditions nécessaires et suffisantes pour tester l'atteignabilité de ce système. Enfin, nous examinons également le problème de contrôle à énergie minimale pour ce dernier système.

2 Atteignabilité, contrôlabilité et contrôle à énergie minimale des systèmes bidimensionnels (2D) fractionnaires positifs à temps Continu décrit par le Modèle de Fornasini-Marchesini

2.1 Trajectoire d'état et la positivité

Considérons le système linéaire fractionnaire bidimensionnel (2D) à temps continu suivant, décrit par le modèle de Fornasini-Marchesini [76] :

$$D_{t_1, t_2}^{\alpha, \beta} x(t_1, t_2) = A_0 x(t_1, t_2) + A_1 D_{t_1}^{\alpha} x(t_1, t_2) + A_2 D_{t_2}^{\beta} x(t_1, t_2) + Bu(t_1, t_2), \quad (2.1)$$

où $D_{t_1, t_2}^{\alpha, \beta}$ représente la dérivation fractionnaire bidimensionnelle au sens de Caputo, $0 < \alpha, \beta < 1$, $x(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée, matrices $A_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pour $k = 0, 1, 2$; $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

Les conditions initiales du système (2.1) sont données sous la forme suivante :

$$x(t_1, 0) \in \mathbb{R}^n \text{ et } x(0, t_2) \in \mathbb{R}^n \text{ pour } t_1, t_2 \geq 0. \quad (2.2)$$

Lemme 2.1. [76] *La solution de l'équation d'état (2.1) avec des ordres fractionnaires $0 < \alpha, \beta < 1$ pour une entrée arbitraire $u(t_1, t_2)$ et des conditions initiales (2.2), est donnée par :*

$$x(t_1, t_2) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ -\frac{t_1^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha + 1)} \frac{t_2^{j\beta}}{\Gamma(j\beta + 1)} T_{ij} x(0, 0) + T_{i,j} B I_{t_1, t_2}^{(i+1)\alpha, (j+1)\beta} u(t_1, t_2) + \frac{t_2^{j\beta}}{\Gamma(j\beta + 1)} [T_{ij} - T_{i-1, j} A_2] I_{t_1}^{i\alpha} x(t_1, 0) + \frac{t_1^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha + 1)} [T_{ij} - T_{i, j-1} A_1] I_{t_2}^{j\beta} x(0, t_2) \right\}, \quad (2.3)$$

où T_{ij} sont des matrices de transition définies par :

$$T_{ij} = \begin{cases} \mathbb{I}_n \text{ pour } i = 0, j = 0 \\ A_0 T_{i-1, j-1} + A_1 T_{i, j-1} + A_2 T_{i-1, j} = T_{i-1, j-1} A_0 + T_{i, j-1} A_1 + T_{i-1, j} A_2 \\ \text{pour } i + j > 0; i, j \in \mathbb{Z}_+ \\ 0 \text{ pour } i < 0 \text{ et/ou } j < 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Pour simplifier la notation, on peut écrire la solution (2.3) comme suit :

$$x(t_1, t_2) = x_{bc}(t_1, t_2) + \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \Phi(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2) Bu(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (2.5)$$

où

$$\begin{aligned}
 x_{bc}(t_1, t_2) = & \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ -\frac{t_1^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha + 1)} \frac{t_2^{j\beta}}{\Gamma(j\beta + 1)} T_{ij} x(0, 0) \right. \\
 & + \frac{t_2^{j\beta}}{\Gamma(j\beta + 1)} [T_{ij} - T_{i-1,j} A_2] I_{t_1}^{i\alpha} x(t_1, 0) \\
 & \left. + \frac{t_1^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha + 1)} [T_{ij} - T_{i,j-1} A_1] I_{t_2}^{j\beta} x(0, t_2) \right\}
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

et

$$\Phi(t_1, t_2) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} T_{i,j} \frac{t_1^{(i+1)\alpha-1}}{\Gamma((i+1)\alpha)} \frac{t_2^{(j+1)\beta-1}}{\Gamma((j+1)\beta)}. \tag{2.7}$$

Définition 2.1. [76] *Le système 2D fractionnaire (2.1) est dit positif si le vecteur d'état est positif $x(t_1, t_2) \in \mathbb{R}_+$, $t_1, t_2 \geq 0$, pour toutes les conditions initiales positives $x(t_1, 0) \in \mathbb{R}_+^n$, $x(0, t_2) \in \mathbb{R}_+^n$ et toutes les entrées positives $u(t_1, t_2) \in \mathbb{R}_+^m$.*

Lemme 2.2. [76] *Le système 2D fractionnaire (2.1) est positif si*

$$A_0 \in \mathbb{R}_+^{n \times n}, A_1, A_2 \in \mathbb{M}_n \text{ et } B \in \mathbb{R}_+^{n \times m}. \tag{2.8}$$

2.2 Atteignabilité

Définition 2.2. *Le système 2D fractionnaire positif (2.1) est dit atteignable dans $J_{cc} = [0, T_1] \times [0, T_2]$ si pour toutes conditions initiales nulles, il existe un contrôle positif admissible $u(t_1, t_2) \in \mathbb{R}_+$ pour $(t_1, t_2) \in J_{cc}$ qui transfère l'état du système (2.1) de conditions initiales nulles à l'état finale $x(T_1, T_2) = x_f \in \mathbb{R}_+$.*

Définition 2.3. *La matrice du Grammien associée au système 2D fractionnaire (2.1) est définie par :*

$$W_{cc}(J_{cc}) = \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} \Phi(T_1 - \tau_1, T_2 - \tau_2) B B^T \Phi^T(T_1 - \tau_1, T_2 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2. \tag{2.9}$$

Théorème 2.1. *Le système 2D fractionnaire positif (2.1) est atteignable dans J_{cc} pour des conditions initiales nulles si la matrice $W_{cc}(J_{cc}) \in \mathbb{R}_+$ est monomiale et le contrôle qui transfère l'état du système (2.1) de conditions initiales nulles à $x_f \in \mathbb{R}_+^n$ est donnée par :*

$$u(t_1, t_2) = B^T \Phi^T(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2) W_{cc}^{-1}(J_{cc}) x_f \text{ pour } 0 \leq \tau_1 \leq t_1, 0 \leq \tau_2 \leq t_2. \tag{2.10}$$

Démonstration. Si la matrice $W_{cc}(J_{cc})$ est une matrice monomiale, alors W_{cc}^{-1} et le contrôle défini par (2.10) sont positifs.

En utilisant (2.5), et à partir de $x_{bc} = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} x(T_1, T_2) &= \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} \Phi(T_1 - \tau_1, T_2 - \tau_2) B u(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\ &= \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} \Phi(T_1 - \tau_1, T_2 - \tau_2) B B^T \Phi^T(T_1 - \tau_1, T_2 - \tau_2) W_{cc}^{-1} d\tau_1 d\tau_2 x_f \\ &= W_{cc} W_{cc}^{-1} x_f = x_f. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Par conséquent, le contrôle (2.10) transfère le système (2.1) depuis des conditions initiales nulles à l'état final x_f . \square

Dans ce qui suit, nous considérons les cas particuliers du système (2.1) avec $A_0 = A_1 A_2$, $A_0 = -A_1 A_2$ ou $A_0 = 0$.

Théorème 2.2. *Le système 2D fractionnaire positif (2.1) est atteignable sur J_{cc} pour des conditions initiales nulles si et seulement si $A_1, A_2 \in \mathbb{M}_n$ sont des matrices diagonales et B est une matrice monomiale.*

Démonstration. Suffisance. Nous regardons que si $A_1, A_2 \in \mathbb{M}_n$ sont des matrices diagonales alors les matrices T_{ij} avec $i, j \geq 0$, ainsi la matrice $\Phi(t_1, t_2) \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ pour $t_1, t_2 \geq 0$ sont également diagonales et si la matrice $B \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$ est monomiale alors $B B^T \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ est aussi monomiale. Dans ce cas la matrice $W_{cc}(J_{cc})$ est aussi monomiale, et d'après le théorème 2.1, le système 2D fractionnaire positif (2.1) est atteignable dans J_{cc} .

Nécessité. D'après (2.4), (2.7), nous avons

$$\Phi(t_1, t_2) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} d_{ij} A_1^i A_2^j \frac{t_1^{(i+1)\alpha-1}}{\Gamma((i+1)\alpha)} \frac{t_2^{(j+1)\beta-1}}{\Gamma((j+1)\beta)} \quad (2.12)$$

où les d_{ij} sont des coefficients réels non nuls dépendant de la matrice T_{ij} , en utilisant le théorème classique de Cayley Hamilton, on obtient

$$\Phi(t_1, t_2) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} v_{k,l}(t_1, t_2) A_1^k A_2^l \quad (2.13)$$

où

$$v_{k,l}(t_1, t_2) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} d_{ij} a_i(k) b_j(l) \frac{t_1^{(i+1)\alpha-1}}{\Gamma((i+1)\alpha)} \frac{t_2^{(j+1)\beta-1}}{\Gamma((j+1)\beta)} \quad (2.14)$$

et $a_i(k)$, $b_j(l)$ sont des coefficients appropriés en fonction des coefficients du polynôme caractéristique des matrices A_1 , A_2 respectivement (voir [45]). Donc, la solution du système (2.5)

donne :

$$x(T_1, T_2) = x_f = \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} A_1^k A_2^l B \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} v_{k,l}(T_1 - \tau_1, T_2 - \tau_2) u(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (2.15)$$

qui est équivalent

$$x_f = [B, A_2 B, \dots, A_2^{n-1} B, A_1 B, A_1 A_2 B, \dots, A_1 A_2^{n-1} B, \dots, A_1^{n-1} B, A_1^{n-1} A_2 B, \dots, A_1^{n-1} A_2^{n-1} B] \\ \times \begin{bmatrix} \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} v_{0,0}(T_1 - \tau_1, T_2 - \tau_2) u(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\ \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} v_{0,1}(T_1 - \tau_1, T_2 - \tau_2) u(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\ \vdots \\ \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} v_{0,n-1}(T_1 - \tau_1, T_2 - \tau_2) u(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\ \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} v_{1,0}(T_1 - \tau_1, T_2 - \tau_2) u(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\ \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} v_{1,1}(T_1 - \tau_1, T_2 - \tau_2) u(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\ \vdots \\ \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} v_{1,n-1}(T_1 - \tau_1, T_2 - \tau_2) u(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\ \vdots \\ \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} v_{n-1,0}(T_1 - \tau_1, T_2 - \tau_2) u(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\ \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} v_{n-1,1}(T_1 - \tau_1, T_2 - \tau_2) u(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\ \vdots \\ \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} v_{n-1,n-1}(T_1 - \tau_1, T_2 - \tau_2) u(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \end{bmatrix}, \quad (2.16)$$

pour x_f positif donné, il est possible de trouver un contrôle non négatif $u(t_1, t_2)$ à partir de $\int_0^{T_1} \int_0^{T_2} v_{k,l}(T_1 - \tau_1, T_2 - \tau_2) u(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2$ non négatif pour $k, l = 0, 1, \dots, n-1, \tau_1, \tau_2 \in J_{cc}$ si et seulement si la matrice

$$[B, A_2 B, \dots, A_2^{n-1} B, A_1 B, A_1 A_2 B, \dots, A_1 A_2^{n-1} B, \dots, A_1^{n-1} B, A_1^{n-1} A_2 B, \dots, A_1^{n-1} A_2^{n-1} B]$$

à n colonnes monomiales linéairement indépendantes et cela se passe seulement si la matrice $[B, A_1, A_2]$ contient n colonnes linéairement indépendantes (voir [60,61]), alors c'est possible de trouver une entrée positive $u(t_1, t_2) \in \mathbb{R}_+^m, t_1, t_2 \in J_{cc}$ seulement si la matrice $B \in \mathbb{R}_+^{m \times n}$ est monomiale et les matrices $A_1, A_2 \in \mathbb{M}_n$ sont diagonales. \square

2.3 Contrôlabilité

Définition 2.4. *Le système 2D fractionnaire positif (2.1) est dit contrôlable dans J_{cc} si pour toutes conditions initiales positives (2.2), il existe un contrôle positif admissible $u(t_1, t_2) \in \mathbb{R}_+$ pour $(t_1, t_2) \in J_{cc}$ qui transfère l'état du système (2.1) de n'importe quelle condition initiale vers l'état final $x(T_1, T_2) = x_f \in \mathbb{R}_+$.*

Théorème 2.3. *Le système 2D fractionnaire positif (2.1) est contrôlable sur J_{cc} pour toutes conditions initiales positives si la matrice (2.9) est monomiale et*

$$x_f - x_{bc} \in \mathbb{R}_+, \quad (2.17)$$

le contrôle qui transfère l'état du système (2.1) de conditions initiales positives à $x_f \in \mathbb{R}_+^n$ est donné par

$$u(t_1, t_2) = B^T \Phi^T(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2) W_{cc}^{-1}(J_{cc})(x_f - x_{bc}) \text{ pour } 0 \leq \tau_1 \leq t_1, 0 \leq \tau_2 \leq t_2. \quad (2.18)$$

Démonstration. Si la matrice (2.9) est une matrice monomiale alors W_{cc}^{-1} ainsi que le contrôle défini par (2.18) sont positifs.

En utilisant (2.5), on obtient :

$$\begin{aligned} x(T_1, T_2) &= x_{bc} + \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} \Phi(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2) B u(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\ &= \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} \Phi(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2) B B^T \Phi^T(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2) W_{cc}^{-1} d\tau_1 d\tau_2 (x_f - x_{bc}) \\ &= x_{bc} + W_{cc} W_{cc}^{-1} (x_f - x_{bc}) = x_f. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Par conséquent, le contrôle (2.18) transfère le système (2.1) à partir de toutes conditions initiales positives vers l'état final x_f . \square

2.4 Contrôle à énergie minimale

Considérons le système fractionnaire positif 2D décrit par (2.1) avec $A_0 = A_1 A_2$, $A_0 = -A_1 A_2$ ou $A_0 = 0$, tel que $A_1, A_2 \in \mathbb{M}_n$ sont des matrices diagonales et $B \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$ est une matrice monomiale. Si le système fractionnaire 2D positif (2.1) est atteignable sur J_{cc} pour des conditions initiales nulles, alors il existe généralement de nombreux différentes contrôles $u(t_1, t_2) \in \mathbb{R}_+^m$ qui transfère l'état du système à partir de conditions initiales nulles vers $x_f = x(T_1, T_2) \in \mathbb{R}_+^n$. Parmi ces contrôles, nous recherchons un contrôle $u(t_1, t_2) \in \mathbb{R}_+^m$ pour $t_1, t_2 \in J_{cc}$ qui minimise l'indice de performance

$$I(u) = \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} u^T(\tau_1, \tau_2) Q u(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (2.20)$$

où $Q \in \mathbb{R}_+^{m \times m}$ est une matrice symétrique définie positive et $Q^{-1} \in \mathbb{R}_+^{m \times m}$. Le problème de contrôle à énergie minimum peut être énoncé comme suit : Étant donné les matrices diagonales $A_1, A_2 \in \mathbb{M}_n$, la matrice monomiale $B \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$, et la matrice $Q \in \mathbb{R}_+^{m \times m}$, T_1, T_2 sont des nombres réels, $x_f \in \mathbb{R}_+^n$ est un état final et des conditions initiales nulles, trouver un vecteur d'entrée admissible $u(t_1, t_2) \in \mathbb{R}_+^m$ pour $0 \leq t_1 \leq T_1, 0 \leq t_2 \leq T_2$ qui transfère le système (2.1) depuis

des conditions initiales nulles jusqu'aux conditions finales souhaitées $x_f = x(T_1, T_2) \in \mathbb{R}_+^n$ et minimise l'indice de performance (2.20).

Pour résoudre le problème, nous définissons la matrice

$$\begin{aligned} V &= V(T_1, T_2, Q) \\ &= \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} \Phi(T_1 - \tau_1, T_2 - \tau_2) BQ^{-1}B^T\Phi^T(T_1 - \tau_1, T_2 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2, \end{aligned} \quad (2.21)$$

où $\Phi(t_1, t_2)$ est défini par (2.7). D'après le théorème 1.3, il s'ensuit que la matrice (2.21) est monomiale si et seulement si le système fractionnaire positif (2.1) est atteignable pour des conditions initiales nulles sur J_{cc} . Dans ce cas, nous pouvons définir le contrôle :

$$\hat{u}(\tau_1, \tau_2) = Q^{-1}B^T\Phi^T(T_1 - \tau_1, T_2 - \tau_2)V^{-1}x_f \text{ pour } (\tau_1, \tau_2) \in J_{cc}. \quad (2.22)$$

Notez que le contrôle (2.22) satisfait la condition $u(t_1, t_2) \in \mathbb{R}_+^n$ pour $(t_1, t_2) \in J_{cc}$ si

$$Q^{-1} \in \mathbb{R}_+^{m \times m} \text{ et } V^{-1} \in \mathbb{R}_+^{n \times n}. \quad (2.23)$$

Théorème 2.4. *Supposons que*

- 1 *Le système fractionnaire positif 2D (2.1) est atteignable pour des conditions initiales nulles dans J_{cc} .*
- 2 *Soit $\bar{u}(t_1, t_2) \in \mathbb{R}_+^n$ pour $(t_1, t_2) \in J_{cc}$ un vecteur d'entrée qui transfère l'état du système 2D fractionnaire positif (2.1) à partir de conditions initiales nulles vers $x_f \in \mathbb{R}_+^n$.*

Alors, le vecteur d'entrée (2.22) transfère également l'état du système à partir de conditions initiales nulles vers $x_f \in \mathbb{R}_+^n$ et minimise l'indice de performance (2.20), c'est à dire :

$$I(\hat{u}) \leq I(\bar{u}). \quad (2.24)$$

De plus, la valeur minimale de l'indice de performance (2.20) est donnée par

$$I(\hat{u}) = x_f^T V^{-1} x_f. \quad (2.25)$$

Démonstration. Si les conditions (2.23) sont satisfaites alors le vecteur d'entrée (2.22) est bien défini et $\hat{u}(t_1, t_2) \in \mathbb{R}_+^n$ pour $(t_1, t_2) \in J_{cc}$. Nous allons montrer que le contrôle transfère l'état du système de conditions initiales nulles vers $x_f \in \mathbb{R}_+^n$. En remplaçant (2.22) par (2.5), on obtient

$$\begin{aligned} x(T_1, T_2) &= \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} \Phi(T_1 - \tau_1, T_2 - \tau_2) B\hat{u}(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\ &= \int_0^{t_f} \Phi(T_1 - \tau_1, T_2 - \tau_2) BQ^{-1}B^T\Phi^T(T_1 - \tau_1, T_2 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 V^{-1}x_f = x_f \end{aligned} \quad (2.26)$$

Puisque le contrôle $\hat{u}(t_1, t_2)$ et $\bar{u}(t_1, t_2)$, $(t_1, t_2) \in J_{cc}$ transfère l'état du système à partir de

conditions initiales nulles vers $x_f \in \mathbb{R}_+^n$, alors

$$\int_0^{T_1} \int_0^{T_2} \Phi(T_1 - \tau_1, T_2 - \tau_2) B [\bar{u}(\tau_1, \tau_2) - \hat{u}(\tau_1, \tau_2)] d\tau_1 d\tau_2 = 0. \quad (2.27)$$

Par transposition de (2.27) et multiplication par $V^{-1}x_f$, on aura

$$\begin{aligned} & \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} [\bar{u}(\tau_1, \tau_2) - \hat{u}(\tau_1, \tau_2)]^T Q Q^{-1} B^T \Phi^T(T_1 - \tau_1, T_2 - \tau_2) \times V^{-1}x_f d\tau_2 d\tau_1 \\ & = \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} [\bar{u}(\tau_1, \tau_2) - \hat{u}(\tau_1, \tau_2)]^T Q \hat{u}(\tau_1, \tau_2) d\tau_2 d\tau_1 = 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

cependant, il est facile de vérifier que

$$\begin{aligned} & \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} \bar{u}^T(\tau_1, \tau_2) Q \bar{u}(\tau_1, \tau_2) d\tau_2 d\tau_1 = \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} \hat{u}^T(\tau_1, \tau_2) Q \hat{u}(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\ & + \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} [\bar{u}(\tau_1, \tau_2) - \hat{u}(\tau_1, \tau_2)]^T Q [\bar{u}(\tau_1, \tau_2) - \hat{u}(\tau_1, \tau_2)] d\tau_1 d\tau_2. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Puisque le dernier second terme de l'inégalité (2.29) est toujours positif, l'inégalité (2.24) est satisfaite. Pour trouver la valeur minimale de l'indice de performance (2.20) on substitue (2.22) dans (2.20) et on obtient,

$$\begin{aligned} I(\hat{u}) & = \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} \hat{u}^T(\tau_1, \tau_2) Q \hat{u}(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\ & = x_f^T V^{-1} \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} \Phi(T_1 - \tau_1, T_2 - \tau_2) B Q^{-1} B^T \Phi^T(T_1 - \tau_1, T_2 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 V^{-1}x_f \\ & = x_f^T V^{-1}x_f. \end{aligned} \quad (2.30)$$

□

Ci-dessous, nous avons la procédure pour calculer le contrôle à énergie minimale au cas où le système atteignable et minimise l'indice de performance (2.20).

Procédure.

Étape 1. Connaissant une matrice diagonale $A_1, A_2 \in \mathbb{M}_n$, calculer la matrice $\Phi(t_1, t_2)$.

Étape 2. Connaissant les matrices monomiales $B, Q \in \mathbb{R}_+$, le nombre réel positif T_1, T_2 , on utilise (2.21) pour calculer la matrice V pour $t_1, t_2 \in J_{cc}$.

Étape 3. En utilisant (2.22), calculez le vecteur d'entrée $\hat{u}(t_1, t_2)$.

Étape 4. Utilisation de (2.25), pour calculer la valeur minimale de l'indice de performance.

2.5 Exemple numérique

Considérons le système (2.1) pour $\alpha = \beta = 0.5$ avec les matrices :

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.31)$$

les conditions initiales $x(t_1, 0) = x(0, t_2) = 0$, pour $t_1, t_2 \geq 0$. On remarque que A_0 est une matrice nulle, A_1, A_2 sont des matrices de Metzler diagonales, B est une matrice positive monomiale, donc ce système est positif et atteignable. Considéré l'indice de performance (2.20), avec

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad T_1 = T_2 = 1. \quad (2.32)$$

Dans cet exemple, nous calculons le contrôle à énergie minimale $\hat{u}(t_1, t_2), t_1, t_2 \in J_{cc} = [0, 1] \times [0, 1]$ qui transfère l'état du système de $x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ vers $x_f = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ et minimise l'indice de performance (2.20). En utilisant la procédure, nous obtenons ce qui suit :

Étape 1. En utilisant (2.12), on obtient

$$\begin{aligned} \Phi(t_1, t_2) &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} d_{ij} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^i \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^j \frac{t_1^{0.5(i-1)}}{\Gamma(0.5(i+1))} \frac{t_2^{0.5(j-1)}}{\Gamma(0.5(j+1))} \\ &\approx \begin{bmatrix} \Phi_1(t_1, t_2) & 0 \\ 0 & \Phi_2(t_1, t_2) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

où

$$\begin{aligned} \Phi_1(t_1, t_2) &\approx 4t_1 + 4t_2 - 11.28t_1t_2^{0.5} - 26.32t_1t_2^{1.5} + \dots - 11.84t_1^2t_2^{0.5} + \dots \\ \Phi_2(t_1, t_2) &\approx 4t_1 + 4t_2 + 11.28t_1t_2^{0.5} - 26.32t_1t_2^{1.5} + \dots + 11.84t_1^2t_2^{0.5} + \dots \end{aligned} \quad (2.34)$$

Notez que puisque $0 \leq t_1, t_2 \leq 1$, si $i, j \rightarrow \infty$, alors les coefficients $\frac{t_1^{(\cdot)}}{\Gamma(\cdot)} \frac{t_2^{(\cdot)}}{\Gamma(\cdot)} \rightarrow 0$. Par conséquent, dans des cas pratiques, notamment en analyse numérique, nous pouvons supposer que i et j sont limités par certains nombres naturels L . Dans cet exemple nous supposons que $L = 20$.

Étape 2. D'après (2.34) et (2.21), nous aurons

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^1 \int_0^1 \Phi(1 - \tau_1, 1 - \tau_2) BQ^{-1}B^T\Phi^T(1 - \tau_1, 1 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \Phi^2(1 - \tau_1, 1 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\
 &\approx \begin{bmatrix} 258.3853 & 0 \\ 0 & 258.3853 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

Étape 3. En utilisant (2.35) et (2.22), on obtient :

$$\begin{aligned}
 \hat{u}(t_1, t_2) &= Q^{-1}B^T\Phi^T(1 - t_1, 1 - t_2)V^{-1}x_f \\
 &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Phi^T(1 - t_1, 1 - t_2)V^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 &\approx \begin{bmatrix} 0.007t_1 + 0.007t_2 + 0.006(1 - t_1)^{0.5} + 0.007(1 - t_1)^{1.5} + 0.004(1 - t_1)^{2.5} + .. \\ 0.015t_1 + 0.015t_2 + 0.01(1 - t_1)^{0.5} - 0.014(1 - t_1)^{1.5} - 0.008(1 - t_1)^{2.5} + .. \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

Étape 4. La valeur minimale de l'indice de performance est donc égale à

$$\begin{aligned}
 I(\hat{u}) &= x_f^T V^{-1} x_f \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \left[\frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \Phi^2(1 - \tau_1, 1 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \right]^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 &= \int_0^1 \int_0^1 \Phi^2(1 - \tau_1, 1 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2. \\
 &\approx 0.02.
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

La figure suivante représente la positivité de contrôle à énergie minimale obtenue dans cet exemple.

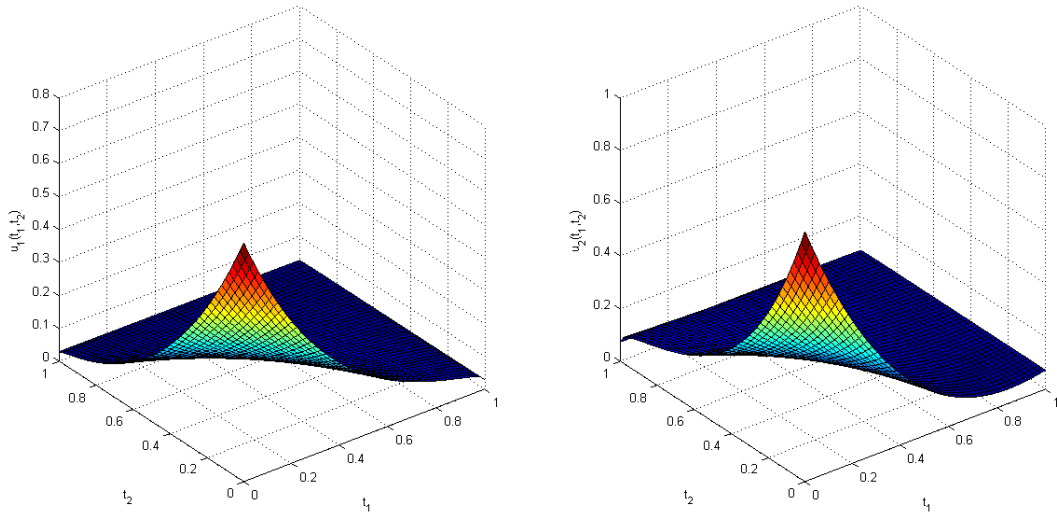


FIGURE 2.1 – Le vecteur de contrôle à énergie minimale $u(t_1, t_2)$

3 Atteignabilité, contrôlabilité et contrôle à énergie minimale des systèmes bidimensionnels (2D) fractionnaires positifs à temps Continu-discret décrit par le Modèle de Fornasini-Marchesini

3.1 Trajectoire d'état et positivité

Considérons le système linéaire fractionnaire bidimensionnel (2D) à temps Continu-discret décrit par le modèle de Fornasini-Marchesini [59] :

$$D_t^\alpha x(t, i + 1) = A_0 x(t, i) + A_1 D_t^\alpha x(t, i) + A_2 x(t, i + 1) + Bu(t, i), \quad (2.38)$$

où D_t^α est la dérivation fractionnaire au sens de Caputo, $0 < \alpha < 1$, $x(t, i) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u(t, i) \in \mathbb{R}^m$ le vecteur d'entrée, les matrices $A_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pour $k = 0, 1, 2$; $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ sont des matrices correspondants du système.

Les conditions initiales du système (2.38) sont données sous la forme suivante

$$x(t, 0) \in \mathbb{R}^n \text{ et } x(0, i) \in \mathbb{R}^n \text{ pour } t \geq 0, i \in \mathbb{Z}_+. \quad (2.39)$$

Lemme 3.1. [59] La solution $x(t, i)$ du système (2.38) avec les conditions initiales $x(0, i), i \in$

\mathbb{Z}_+ , $x(t, 0), t \geq 0$, est définie par

$$\begin{aligned}
 x(t, i) = & T_{0,i}x(t, 0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T_{k,i}}{\Gamma(k\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{k\alpha-1} x(\tau, 0) d\tau - \\
 & - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T_{k,i}A_2}{\Gamma[(k+1)\alpha]} \int_0^t (t-\tau)^{(k+1)\alpha-1} x(\tau, 0) d\tau + \\
 & + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{T_{k,i-l}t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} x(0, l) - \\
 & - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{T_{k,i-l-1}A_1t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} x(0, l) + \\
 & + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{T_{k,i-l-1}B}{\Gamma[(k+1)\alpha]} \int_0^t (t-\tau)^{(k+1)\alpha-1} u(\tau, l) d\tau
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

où

$$T_{kl} = \begin{cases} I_n & \text{pour } k = l = 0 \\ A_0T_{k-1,l-1} + A_1T_{k,l-1} + A_2T_{k-1,l} \\ = T_{k-1,l-1}A_0 + T_{k,l-1}A_1 + T_{k,l-1}A_2 & \text{pour } k+l > 0, k, l \in \mathbb{Z}_+ \\ 0 & \text{pour } k < 0, \text{ ou/et } l < 0 \end{cases} \tag{2.41}$$

Pour simplifier la notation, on peut écrire la solution (2.40) comme suit :

$$x(t, i) = x_{bc}(t, i) + \sum_{l=0}^{i-1} \int_0^t \Phi(t-\tau, i-l-1) Bu(\tau, l) d\tau \tag{2.42}$$

où

$$\begin{aligned}
 x_{bc}(t, i) = & T_{0,i}x(t, 0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T_{k,i}}{\Gamma(k\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{k\alpha-1} x(\tau, 0) d\tau - \\
 & - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T_{k,i}A_2}{\Gamma[(k+1)\alpha]} \int_0^t (t-\tau)^{(k+1)\alpha-1} x(\tau, 0) d\tau + \\
 & + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{T_{k,i-l}t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} x(0, l) - \\
 & - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{T_{k,i-l-1}A_1t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} x(0, l)
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

et

$$\Phi(t, i) = \sum_{k=0}^{\infty} T_{k,i} \frac{t^{(k+1)\alpha-1}}{\Gamma[(k+1)\alpha]}. \tag{2.44}$$

Définition 3.1. [59] *Le système 2D fractionnaire à temps continu-discret (2.38) est dit positif si le vecteur d'état est positif $x(t, i) \in \mathbb{R}_+^n$, $t > 0, i \in Z_+$, pour toutes conditions initiales positifs $x(0, i) \in \mathbb{R}_+^n, x(t, 0) \in \mathbb{R}_+^n$ et toutes les entrées positifs $u(t, i) \in \mathbb{R}_+^m$.*

Lemme 3.2. [59] *Le système 2D fractionnaire à temps continu-discret (2.38) est positif si*

i) $A_0, A_1 \in \mathbb{R}_+^{n \times n}, A = A_0 + A_1 A_2 \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$.

ii) A_2 est une matrice de Metzler.

3.2 Atteignabilité

Définition 3.2. *Le système positif (2.38) est dit atteignable dans $J_{cd} = [0, t_f] \times \{0, 1, \dots, i_f\}$ si pour toutes conditions initiales nulles (2.39), il existe un contrôle positif admissible $u(t, i) \in \mathbb{R}_+$ pour $(t, i) \in J_{cd}$, tel que $x(t_f, i_f) = x_f \in \mathbb{R}_+$.*

Définition 3.3. *La matrice du Grammien associée au système 2D fractionnaire à temps continu-discret (2.38) est définie par :*

$$W_{cd}(J_{cd}) = \sum_{l=0}^{i_f-1} \int_0^{t_f} \Phi(t_f - \tau, i_f - l - 1) B B^T \Phi^T(t_f - \tau, i_f - l - 1) d\tau. \quad (2.45)$$

Théorème 3.1. *Le système 2D fractionnaire positif (2.38) est atteignable dans J_{cd} pour des conditions initiales nulles si la matrice $W_{cd}(J_{cd}) \in \mathbb{R}_+$ est monomiale et le contrôle qui transfère l'état du système (2.38) de conditions initiales nulles à l'état finale $x_f \in \mathbb{R}_+^n$ est donné par*

$$u(t, i) = B^T \Phi^T(t - \tau, i - l - 1) W_{cd}^{-1}(J_{cd}) x_f \text{ pour } 0 \leq \tau \leq t, 0 \leq l \leq i. \quad (2.46)$$

Démonstration. Si la matrice $W_{cd}(J_{cd})$ est une matrice monomiale, alors W_{cd}^{-1} et le contrôle défini par (2.46) sont positifs.

En utilisant (2.40), et à partir de $x_{bc} = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} x(t_f, i_f) &= \sum_{l=0}^{i_f-1} \int_0^{t_f} \Phi(t_f - \tau, i_f - l - 1) B u(t_f, i_f) d\tau \\ &= \sum_{l=0}^{i_f-1} \int_0^{t_f} \Phi(t_f - \tau, i_f - l - 1) B B^T \Phi^T(t_f - \tau, i_f - l - 1) W_{cd}^{-1} d\tau x_f \\ &= W_{cd} W_{cd}^{-1} x_f = x_f. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Par conséquent, le vecteur d'entrée (2.46) transfère l'état du système (2.38) de la condition initiales nulles vers l'état final x_f . □

Dans ce qui suit, nous considérons le système 2D fractionnaire continu-discret similaire au système classique 1D décrit par :

$$D_t^\alpha x(t, i) = Ax(t, i) + Bu(t, i) \quad (2.48)$$

où D_t^α la dérivée fractionnaire au sens de Caputo, $0 < \alpha < 1$, $x(t, i) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u(t, i) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée, les matrices $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

Les conditions initiales du (2.48) sont données par :

$$x(0, i) \in \mathbb{R}^n \text{ pour } i \in \mathbb{Z}_+. \quad (2.49)$$

On se base sur les travaux de [60,61], on conclut que la solution du système (2.48) présente dans le lemme suivant.

Lemme 3.3. *La solution $x(t, i)$ du système (2.48) avec conditions initiales $x(0, i), i \in \mathbb{Z}_+$, est donnée par :*

$$x(t, i) = \varphi_0(t)x(0, i) + \int_0^t \varphi(t - \tau)Bu(\tau, i)d\tau. \quad (2.50)$$

où

$$\begin{aligned} \varphi_0(t) &= E_\alpha(At^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + 1)} \\ \varphi(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{(k+1)\alpha-1}}{\Gamma[(k+1)\alpha]} \end{aligned} \quad (2.51)$$

et $E_\alpha(At^\alpha)$ est la fonction de Mittag-Leffler.

Définition 3.4. *Le système (2.48) est dit positif si $x(t, i) \in \mathbb{R}_+^n, t \in \mathbb{R}_+, i \in \mathbb{Z}_+$ pour toutes conditions initiales positives $x(0, i) \in \mathbb{R}_+^n$, et toutes les entrées positives $u(t, i) \in \mathbb{R}_+^m, t \in \mathbb{R}_+, i \in \mathbb{Z}_+$.*

Lemme 3.4. *Le système (2.48) est positif si et seulement si*

$$A \in \mathbb{M}_n \text{ et } B \in \mathbb{R}_+^{n \times m}. \quad (2.52)$$

Démonstration. Nécessité : Soit $u(t, i) = 0, t \geq 0$ et $x(0, i) = e_k$ (k -th $k = 1, \dots, n$) colonne de la matrice d'identité I_n . La trajectoire n'existe que dans premier quadrant \mathbb{R}_+^n que si la dérivée $D_t^\alpha x(0, i) = Ae_k \geq 0$, ce qui implique $a_{ij} \geq 0, i \neq j$. Par conséquent, la matrice A doit être une matrice de Metzler. De manière similaire pour $x(0, i) = 0$ nous avons $D_t^\alpha x(0, i) = Bu(0, i) \geq 0$, ce qui implique $B \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$, puisque $u(0, i) \in \mathbb{R}_+^m$ arbitraire pour $i \in \mathbb{Z}_+$.

Suffisance : En se basons sur le lemme 2.1, il est bien connu que $\varphi_0(t) \in \mathbb{R}_+^{n \times n}, t \in \mathbb{R}_+$ si

et seulement si $A \in \mathbb{M}_n$. D'après la solution (2.50) il s'ensuit que si les conditions (2.52) sont satisfaites et $x(0, i) \in \mathbb{R}_+^n, u(t, i) \in \mathbb{R}_+^m$, puis $x(t, i) \in \mathbb{R}_+^n, t \in \mathbb{R}_+, i \in \mathbb{Z}_+$. Par conséquent, selon la définition 3.1, le système (2.48) est positif. \square

Définition 3.5. *Le système positif (2.48) est dit atteignable dans $[0, t_f]$ pour $i = 0, 1, \dots, q$ si pour tout vecteur d'état final donné $x_f \in \mathbb{R}_+^n$, il existe une entrée $u(t, i) \in \mathbb{R}_+^m, 0 \leq t \leq t_f, 0 \leq i \leq q$ qui transfère l'état du système $x(t, i)$ de $x(0, i) = 0, i = 0, 1, \dots, q$ à $x_f = x(t_f) = x(t_f, 0) + x(t_f, 1) + \dots + x(t_f, q)$.*

Théorème 3.2. *Le système positif (2.48) est atteignable dans $[0, t_f]$ pour $i = 0, 1, \dots, q$ si et seulement si la matrice $A \in \mathbb{M}_n$ est diagonale et la matrice $B \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$ est monomiale.*

Démonstration. Suffisance : En utilisant (2.50) pour $t = t_f, i = 0, 1, \dots, q$ et $x(0, i) = 0, i = 0, 1, \dots, q$, on obtient :

$$x_f = x(t_f, 0) + x(t_f, 1) + \dots + x(t_f, q) = \int_0^{t_f} \varphi(t - \tau) \bar{B} \bar{u}(\tau) d\tau \quad (2.53)$$

où

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} B & B & \dots & B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_+^{n \times \bar{m}},$$

$$\bar{u}(\tau) = \begin{bmatrix} u(\tau, 0) \\ u(\tau, 1) \\ \vdots \\ u(\tau, q) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_+^{\bar{m}}, \quad \bar{m} = n(q + 1). \quad (2.54)$$

Nous regardons que si $A \in \mathbb{M}_n$ est diagonale alors $\varphi_0(t) \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ est également diagonale et si $B \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$ est monomiale alors $\bar{B} \bar{B}^T \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ est également monomiale. Dans ce cas la matrice définie par :

$$R(t_f) = \int_0^{t_f} \varphi(t_f - \tau) \bar{B} \bar{B}^T \varphi^T(t_f - \tau) d\tau \in \mathbb{R}_+^{n \times n} \quad (2.55)$$

est également monomiale et $R^{-1}(t_f) \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$. Soit le contrôle défini par :

$$\hat{u}(t) = \bar{B}^T \varphi(t_f - \tau) R^{-1}(t_f) x_f \quad (2.56)$$

qui transfère l'état du système (2.48) de $x(0, i) = 0, i = 0, 1, \dots, q$ à x_f . En utilisant (2.50) et

(2.56), on obtient :

$$\begin{aligned} x(t_f) &= \int_0^{t_f} \varphi(t_f - \tau) \bar{B} \bar{u}(\tau) d\tau = \int_0^{t_f} \varphi(t_f - \tau) \bar{B} \bar{B}^T \varphi^T(t_f - \tau) d\tau R^{-1}(t_f) x_f \\ &= \int_0^{t_f} \varphi(t_f - \tau) \bar{B} \bar{B}^T \varphi(t_f - \tau) d\tau R^{-1}(t_f) x_f = x_f. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Par conséquent, le contrôle (2.56) transfère l'état du système (2.48) à partir de toutes conditions initiales nulles vers l'état final x_f .

Nécessité : D'après le théorème de Cayley-Hamilton on a

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(t) A^k \quad (2.58)$$

où $c_k(t), k = 0, 1, \dots, n-1$ sont des fonctions non nulles du temps dépendant de la matrice A . Une substitution de (2.58) dans

$$x_f = \int_0^{t_f} \varphi(t - \tau) \bar{B} \bar{u}(\tau) d\tau, \quad (2.59)$$

on obtient

$$x_f = \begin{bmatrix} \bar{B} & A\bar{B} & \dots & A^{n-1}\bar{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0(t_f) \\ v_1(t_f) \\ \vdots \\ v_{n-1}(t_f) \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

où

$$v_k(t_f) = \int_0^{t_f} c_k(\tau) \bar{u}(t_f - \tau) d\tau, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (2.61)$$

Pour $x_f \in \mathbb{R}_+^n$ donné, il est possible de calculer $v_k(t_f), k = 0, 1, \dots, n-1$ non négatif si et seulement si la matrice

$$\begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

possède n colonnes monomiales linéairement indépendantes et cela n'a lieu que si la matrice $[A \ B]$ contient n colonnes monomiales linéairement indépendantes. Notez que pour $v_k(t_f)$ non négatifs, $k = 0, 1, \dots, n-1$, donc il est possible de trouver une entrée non négative $\bar{u}(t) \in \mathbb{R}_+^m$ seulement si la matrice $B \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ est monomiale et la matrice $A \in \mathbb{M}_n$ est diagonale. \square

3.3 Contrôle à énergie minimale

Si le système positif (2.48) est atteignable dans $[0, t_f]$ pour $i = 0, 1, \dots, q$, alors il existe généralement plusieurs différentes contrôles $\bar{u}(t) \in \mathbb{R}_+^{\bar{m}}$ qui transfère l'état du système à partir des conditions initiales $x(0, i) = 0$ à x_f . Parmi ces contrôles nous recherchons un contrôle $\bar{u}(t) \in \mathbb{R}_+^{\bar{m}}$ pour $t \in [0, t_f]$ qui minimise l'indice de performance défini par :

$$I(\bar{u}) = \int_0^{t_f} \bar{u}^T(\tau) Q \bar{u}(\tau) d\tau \quad (2.63)$$

où $Q \in \mathbb{R}_+^{\bar{m} \times \bar{m}}$ est une matrice symétrique définie positive et $Q^{-1} \in \mathbb{R}_+^{\bar{m} \times \bar{m}}$. Le problème de contrôle à énergie minimale peut être énoncé comme suit : Étant donné les matrices $A \in \mathbb{M}_n, B \in \mathbb{R}_+^{n \times m}, Q \in \mathbb{R}_+^{\bar{m} \times \bar{m}}$, le nombre q, t_f et $x_f \in \mathbb{R}_+^n$, trouvez une entrée $\bar{u}(t) \in \mathbb{R}_+^{\bar{m}}$ qui transfère l'état du système de $x(0, i) = 0$ à $x_f \in \mathbb{R}_+^n, i = 0, 1, \dots, q$ et minimise l'indice de performance (2.63). Pour résoudre le problème, nous définissons la matrice

$$V = V(t_f, Q) = \int_0^{t_f} \varphi(t_f - \tau) \bar{B} Q^{-1} \bar{B}^T \varphi^T(t_f - \tau) d\tau. \quad (2.64)$$

D'après le théorème 1.3, la matrice (2.64) est monomiale et $V^{-1} \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ si et seulement si le système positif (2.48) est atteignable dans $[0, t_f]$ pour $i = 0, 1, \dots, q$. Dans ce cas, nous pouvons définir l'entrée

$$\hat{u}(t) = Q^{-1} \bar{B}^T \varphi^T(t_f - \tau) V^{-1} x_f \text{ pour } t \in [0, t_f]. \quad (2.65)$$

Notez que $\hat{u}(t) \in \mathbb{R}_+^{\bar{m}}$ pour $t \in [0, t_f]$, si

$$Q^{-1} \in \mathbb{R}_+^{\bar{m} \times \bar{m}} \text{ pour toute } x_f \in \mathbb{R}_+^n \text{ et } V^{-1} x_f \in \mathbb{R}_+^{n \times n}. \quad (2.66)$$

Théorème 3.3. Soit $\bar{u}(t) \in \mathbb{R}_+^{\bar{m}}$ pour $t \in [0, t_f]$ une entrée qui transfère l'état du système positif (2.48) de $x(0, i) = 0$ à x_f . Ensuite, l'entrée (2.65) transfère également l'état du système de $x(0, i) = 0, i = 0, 1, \dots, q$ à $x_f \in \mathbb{R}_+^n$ et minimise l'indice de performance (2.63), c'est-à-dire

$$I(\hat{u}) \leq I(\bar{u}). \quad (2.67)$$

La valeur minimale de l'indice de performance (2.63) est égale à

$$I(\hat{u}) = x_f^T V^{-1} x_f. \quad (2.68)$$

Démonstration. Si les conditions (2.66) sont satisfaites alors $\hat{u}(t) \in \mathbb{R}_+^{\bar{m}}$ pour $t \in [0, t_f]$. Nous allons montrer que l'entrée transfère l'état du système de $x(0, i) = 0, i = 0, 1, \dots, q$ à $x_f \in \mathbb{R}_+^n$.

Substitution de (2.65) en (2.50) pour $t = t_f$, et on obtient

$$\begin{aligned} x(t_f) &= \int_0^{t_f} \varphi(t_f - \tau) \bar{B} \hat{u}(\tau) d\tau \\ &= \int_0^{t_f} \varphi(t_f - \tau) \bar{B} Q^{-1} \bar{B}^T \varphi^T(t_f - \tau) d\tau V^{-1} x_f = x_f \end{aligned} \quad (2.69)$$

par conséquent, on conclut que les entrées $\bar{u}(t)$ et $\hat{u}(t)$, $t \in [0, t_f]$ transfèrent l'état du système de $x(0, i) = 0, i = 0, 1, \dots, q$ à $x_f \in \mathbb{R}_+^n$, ainsi

$$x_f = \int_0^{t_f} \varphi(t_f - \tau) \bar{B} \bar{u}(\tau) d\tau = \int_0^{t_f} \varphi(t_f - \tau) \bar{B} \hat{u}(\tau) d\tau \int_0^{t_f} \varphi(t_f - \tau) \bar{B} [\bar{u}(\tau) - \hat{u}(\tau)] d\tau = 0, \quad (2.70)$$

qui ce implique

$$\int_0^{t_f} \varphi(t_f - \tau) \bar{B} [\bar{u}(\tau) - \hat{u}(\tau)] d\tau = 0. \quad (2.71)$$

Par transposition de (2.71) et multiplication par $V^{-1} x_f$, et on trouve :

$$\int_0^{t_f} [\bar{u}(\tau) - \hat{u}(\tau)]^T \bar{B}^T \varphi^T(t_f - \tau) d\tau V^{-1} x_f = 0. \quad (2.72)$$

Substitution de (2.65) en (2.72), et on obtient

$$\int_0^{t_f} [\bar{u}(\tau) - \hat{u}(\tau)]^T Q \hat{u}(\tau) d\tau = 0 \quad (2.73)$$

comme

$$Q \hat{u}(\tau) = \bar{B}^T \varphi^T(t_f - \tau) V^{-1} x_f = x_f, \quad (2.74)$$

et en utilisant (2.63), il est facile de vérifier que

$$\int_0^{t_f} \bar{u}(\tau)^T Q \bar{u}(\tau) d\tau = \int_0^{t_f} \hat{u}(\tau)^T Q \hat{u}(\tau) d\tau + \int_0^{t_f} [\bar{u}(\tau) - \hat{u}(\tau)]^T Q [\bar{u}(\tau) - \hat{u}(\tau)] d\tau. \quad (2.75)$$

Puisque le deuxième terme du membre droit de l'inégalité (2.75) est non négatif, le résultat (2.67) est confirmé.

Pour trouver la valeur minimale de l'indice de performance (2.63), on substitue (2.65) dans (2.63) , et on obtient

$$I(\hat{u}) = \int_0^{t_f} \hat{u}^T(\tau) Q \hat{u}(\tau) d\tau = x_f^T V^{-1} \int_0^{t_f} \varphi(t_f - \tau) \bar{B} Q^{-1} \bar{B}^T \varphi^T(t_f - \tau) d\tau V^{-1} x_f = x_f^T V^{-1} x_f \quad (2.76)$$

donc (2.68) est satisfaite. \square

Théorème 3.4. *Si la matrice diagonale Q est une matrice scalaire*

$$Q = \text{diag} [q_1, \dots, q_1] \in \mathbb{R}_+^{\tilde{n} \times \tilde{n}} \quad (2.77)$$

alors l'entrée (2.63) est indépendante de Q et a la forme

$$\hat{u}(t) = \bar{B}^T \varphi^T(t_f - \tau) \left[\int_0^{t_f} \varphi(t_f - \tau) \bar{B} \bar{B}^T \varphi^T(t_f - \tau) d\tau \right] x_f \in \mathbb{R}_+^n \quad (2.78)$$

pour toute $x_f \in \mathbb{R}_+^n$.

Démonstration. Si (2.77) est vrai alors à partir de (2.64) on a

$$V = \frac{1}{q_1} \int_0^{t_f} \varphi(t - f - \tau) \bar{B} \bar{B}^T \varphi(t - f - \tau) d\tau \quad (2.79)$$

et d'après (2.65), on aura

$$\hat{u}(t) = Q^{-1} \bar{B}^T \varphi^T(t_f - \tau) V^{-1} x_f = \bar{B}^T \varphi^T(t_f - \tau) \left[\int_0^{t_f} \varphi(\tau) \bar{B} \bar{B}^T \varphi^T(\tau) d\tau \right]^{-1} x_f \in \mathbb{R}_+^n \quad (2.80)$$

pour toute $x_f \in \mathbb{R}_+^n$. □

À partir des considérations ci-dessus, nous avons la procédure suivante pour calculer le contrôle à énergie minimale qui transfère l'état du système de $x_0 = 0$ à $x_f \in \mathbb{R}_+^n$ et minimise l'indice de performances (2.63).

Procédure.

Étape 1. Connaissant $A \in \mathbb{M}_n$, calculez $\varphi_0(t)$.

Étape 2. En utilisant (2.64) calculez la matrice V , connaissant les matrices A, B, Q pour certains t_f .

Étape 3. En utilisant (2.51) et (2.64), calculez le contrôle (2.65) pour t_f et $x_f \in \mathbb{R}_+^n$.

Étape 4. À l'aide de (2.68), calculez la valeur minimale de l'indice de performance.

4 Conclusion

Dans ce chapitre, quelques résultats sont établis concernant la contrôlabilité et le problème de contrôle à énergie minimale des systèmes 2D linéaires fractionnaires positifs décrit par le modèle de Fornasini-Marchesini. Pour cela, des conditions suffisantes pour l'atteignabilité et la contrôlabilité du système en temps continu, ainsi que pour le cas en temps continu-discret, ont été dérivées en se basant sur l'approche du Grammien. De plus, les conditions nécessaires et suffisantes pour l'atteignabilité des cas particuliers de ces systèmes, en utilisant des tests basés sur les matrices de systèmes, ont été établies. La solution du problème de contrôle à énergie minimale du système particulier considéré dans ce travail a été trouvée, tout en garantissant

CHAPITRE 2. CONTRÔLABILITÉ ET CONTRÔLE À ÉNERGIE MINIMALE DES SYSTÈMES BIDIMENSIONNELS (2D) FRACTIONNAIRES POSITIFS

que les systèmes restent positifs. Enfin, des exemples numériques sont fournis pour étayer nos résultats.

Ce travail permet une compréhension approfondie de la contrôlabilité et du problème de contrôle à énergie minimale pour les systèmes 2D linéaires fractionnaires positifs, couvrant à la fois les modèles à temps continu et à temps continu-discret.

Analyse de la stabilité des systèmes bidimensionnels (2D) fractionnaires positifs

Ce chapitre étudie la stabilité du système linéaire bidimensionnel (2D) fractionnaire positif décrit par le modèle de Roesser et basé sur la dérivée fractionnaire au sens de Caputo dans la partie dynamique continu. L'objectif de cette étude est déterminer si la stabilité de ces systèmes peut être prouvée uniquement à partir des matrices système. Dans cette travail, nous utilisons une approche d'inégalités matricielles linéaires pour analyser la stabilité des modèles de Roesser positifs en tirant parti des propriétés de positivité.

De plus, nous avons développé une condition nécessaire et suffisante qui garantit l'existence de contrôleurs à retour d'état dans un système linéaire bidimensionnel (2D) fractionnaire décrit par le modèle de Roesser. Cette condition garantit à la fois la non négativité et la stabilité du système en boucle fermée résultant. Pour illustrer la faisabilité de nos approches proposées, nous fournissons quelques exemples numériques.

1 Stabilité, stabilisation et stabilité robuste des systèmes linéaires bidimensionnels (2D) fractionnaires positifs à temps continu-discret

Dans cette partie en analysons la stabilité du système linéaire 2D fractionnaire positif à temps continu-discret décrit par le modèle de Roesser et basée sur la dérivée fractionnaire au sens de Caputo dans la partie continue. Étendre également les résultats aux systèmes incertains en boucle fermée.

1.1 Formulation du problème et positivité

Considérons le système linéaire fractionnaire 2D continu-discret décrit par le modèle de Roesser :

$$D^\alpha x^h(t, i) = A_{11}x^h(t, i) + A_{12}x^v(t, i) + B_1u(t, i) \quad (3.1a)$$

$$x^v(t, i + 1) = A_{21}x^h(t, i) + A_{22}x^v(t, i) + B_2u(t, i) \quad (3.1b)$$

où $D^\alpha x^h(t, i) = \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} x^h(t, i)$ représente la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre α , avec $0 < \alpha < 1$. $x(t, i) = \begin{bmatrix} x^h(t, i) \\ x^v(t, i) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $x^h(t, i) \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x^v(t, i) \in \mathbb{R}^{n_2}$ sont respectivement les vecteurs d'états horizontal et vertical, $u(t, i) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée du système (3.1) ($n = n_1 + n_2$), $A_{11} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$, $A_{12} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$, $A_{21} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_1}$, $A_{22} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ et $B_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times m}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times m}$ sont des matrices correspondant aux systèmes.

Les conditions initiales du système (3.1) sont données par :

$$\{x^h(0, i), x^v(t, 0) \text{ où } t \in \mathbb{R}_+, i \in \mathbb{Z}_+\}. \quad (3.2)$$

Le polynôme caractéristique du système (3.1) est défini comme suit :

$$d(s, z) = \det \left\{ \begin{bmatrix} I_{n_1} s^\alpha - A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & I_{n_2} z - A_{22} \end{bmatrix} \right\}. \quad (3.3)$$

Dans la suite, nous tirons quelques propriétés liées à la positivité du système (3.1), basées sur les résultats [42, 58].

Définition 1.1. *Le système 2D fractionnaire (3.1) est dit positif si tous les états sont positifs pour toutes les conditions initiales positives et toutes les entrées positives, i.e*

$x^h(t, i) \in \mathbb{R}_+^{n_1}, x^v(t, i) \in \mathbb{R}_+^{n_2}, t > 0, i \in \mathbb{Z}_+$ et $u(t, i) \in \mathbb{R}_+^m$ pour $x_h(0, i) \in \mathbb{R}_+^{n_1}, x_v(t, 0) \in \mathbb{R}_+^{n_2}$.

Lemme 1.1. *Le système 2D fractionnaire (3.1) est positif si et seulement si*

$$A_{11} \in M_{n_1}, \quad A_{12} \in \mathbb{R}_+^{n_1 \times n_2}, \quad A_{21} \in \mathbb{R}_+^{n_2 \times n_1}, \quad A_{22} \in \mathbb{R}_+^{n_2 \times n_2}, \quad B_1 \in \mathbb{R}_+^{n_1 \times m}, \quad B_2 \in \mathbb{R}_+^{n_2 \times m}. \quad (3.4)$$

1.2 Stabilité

Cette section traite le problème de la stabilité asymptotique des systèmes positifs (3.1). Sur la base des concepts de stabilité pour les systèmes linéaires fractionnaires positifs 1D dans les cas continus et discrets [44, 53], nous fournissons la définition suivante de la stabilité des systèmes (3.1).

Définition 1.2. *Le système 2D fractionnaire positif (3.1) est dit asymptotiquement stable pour $u(t, i) = 0$ si*

$$\lim_{(t,i) \rightarrow \infty} \|x^h(t, i)\| = 0, \quad \lim_{(t,i) \rightarrow \infty} \|x^v(t, i)\| = 0 \quad (3.5)$$

avec

$$\sup_{i \in \mathbb{Z}_+} \|x^h(0, i)\| < \infty, \quad \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \|x^v(t, 0)\| < \infty \quad (3.6)$$

respectivement.

Lemme 1.2. [95] *Le système 2D fractionnaire (3.1) est asymptotiquement stable si*

$$d(s, z) \neq 0 \text{ pour } (s, z) \in \mathcal{U}_{sz}, \quad (3.7)$$

où $d(s, z)$ est le polynôme caractéristique défini dans (3.3), et

$$\mathcal{U}_{sz} = \{(s, z) \in \mathbb{C} : |\arg(s)| \leq \frac{\pi}{2}\alpha, 0 < \alpha \leq 1, |z| \geq 1\}. \quad (3.8)$$

Le théorème suivant énonce une condition nécessaire et suffisante pour assurer la stabilité de cette classe de systèmes positifs.

Théorème 1.1. *Le système 2D fractionnaire positif (3.1) est asymptotiquement stable si et seulement s'il existe un vecteur strictement positif $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda^h \\ \lambda^v \end{pmatrix} > 0$, tel que*

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} - I_{n_2} \end{bmatrix} \lambda < 0. \quad (3.9)$$

Démonstration. Nécessaire : En supposant que le système (3.1) est asymptotiquement stable i.e $\lim_{t,i \rightarrow \infty} x^h(t, i) = 0$ et $\lim_{t,i \rightarrow \infty} x^v(t, i) = 0$, il résulte de la positivité du système qu'il existe, $T \in \mathbb{R}_+$ et $J \in \mathbb{Z}_+$, tel que

$$D^\alpha x^h(t, i) < 0, \quad \Delta x^v(t, i) < 0 \text{ pour } t \geq T, i \geq J, \quad (3.10)$$

où $\Delta x^v(t, i) = x^v(t, i+1) - x^v(t, i)$,

la formule (3.10) est équivalente à

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} - I_{n_2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x^h(t, i) \\ x^v(t, i) \end{pmatrix} < 0, \text{ pour } t \geq T \text{ et } i \geq J, \quad (3.11)$$

par conséquent, la condition (3.9) est satisfaite pour $\lambda = \begin{pmatrix} x^h(t, i) \\ x^v(t, i) \end{pmatrix} > 0, t \geq T, i \geq J$.

Suffisance : Soit le système dual (3.1) défini par :

$$D^\alpha x^h(t, i) = A_{11}^T x^h(t, i) + A_{21}^T x^v(t, i) \quad (3.12a)$$

$$x^v(t, i + 1) = A_{12}^T x^h(t, i) + A_{22}^T x^v(t, i). \quad (3.12b)$$

Le système dual (3.12) est asymptotiquement stable si et seulement si le système (3.1) est asymptotiquement stable, soit $V^h(x^h(t, i))$ et $V^v(x^h(t, i))$ est deux fonctions de Lyapunov pour le système dual (3.12), où

$$V^h(x^h(t, i)) = x^{T,h}(t, i)\lambda^h \quad (3.13a)$$

$$V^v(x^v(t, i)) = x^{T,v}(t, i)\lambda^v. \quad (3.13b)$$

L'application de l'opérateur de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo à l'équation (3.1a) et de la différence finie à l'équation (3.1b), on obtient :

$$\begin{aligned} D^\alpha V^h(x^h(t, i)) &= D^\alpha x^{T,h}(t, i)\lambda^h \\ &= x^{T,h}(t, i)A_{11}\lambda^h + x^{T,v}(t, i)A_{21}\lambda^h \\ \Delta V^v(x^h(t, i)) &= x^{T,v}(t, i + 1)\lambda^v - x^{T,v}(t, i)\lambda^v \\ &= x^{T,h}(t, i)A_{12}\lambda^v - I_{n_2}\lambda^v + x^{T,v}(t, i)A_{22}\lambda^v, \end{aligned}$$

alors, on aura

$$\begin{pmatrix} D^\alpha V^h(x^h(t, i)) \\ \Delta V^v(x^h(t, i)) \end{pmatrix}^T = x^T(t, i) \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} - I_{n_2} \end{bmatrix} \lambda, \quad (3.15)$$

par conséquent, si la condition (3.9) est satisfaite, $D^\alpha V^h(x^h(t, i)) < 0$, $\Delta V^v(x^h(t, i)) < 0$, et alors le système 2D fractionnaire positif (3.1) est asymptotiquement stable. \square

Remarque 1.1. *Il convient de noter que V^h est une fonction de Lyapunov positive, et si sa dérivée fractionnaire de Caputo par rapport à la variable continue est négative, alors V^h s'approche asymptotiquement de zéro pour toutes les valeurs de $i \in \mathbb{Z}_+$. De même, lorsque V^v est positif, si l'opérateur de différence de V^v est négatif, alors V^v tend vers zéro.*

Lemme 1.3. [2] *Soit $M \in R^{n \times n}$ la matrice de Metzler. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- i) *Il existe un vecteur $\lambda > 0$ dans R^n tel que $M\lambda < 0$.*
- ii) *M est la matrice de Hurwitz c'est-à-dire que toutes ses valeurs propres ont des parties réelles strictement négatives.*
- ii) *Il existe une matrice diagonale positive $P \in R^{n \times n}$ satisfaisant $M^T P + P M < 0$.*

En utilisant le théorème 1.1 et le lemme 1.3, on conclut le théorème suivant.

Théorème 1.2. *Le système 2D fractionnaire positif (3.1) est asymptotiquement stable si et seulement si :*

i) $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} - I_{n_2} \end{bmatrix}$ est la matrice de Hurwitz.

ii) Il existe une matrice diagonale positive $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ vérifiant :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} - I_{n_2} \end{bmatrix}^T P + P \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} - I_{n_2} \end{bmatrix} < 0. \quad (3.16)$$

1.3 Stabilisation

Dans cette section, nous étudions le problème de la stabilisation d'un système linéaire fractionnaire 2D continu-discret décrit par le modèle de Roesser.

Considérons le contrôle par retour d'état suivant, qui garantit la stabilité du modèle considéré :

$$u(t, i) = \begin{bmatrix} K^h & K^v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(t, i) \\ x^v(t, i) \end{bmatrix}, \quad (3.17)$$

où $K = \begin{bmatrix} K^h & K^v \end{bmatrix}$ représente le gain de contrôle de retour d'état à concevoir. Le système en boucle fermée (3.1) est défini par :

$$D^\alpha x^h(t, i) = (A_{11} + B_1 K^h) x^h(t, i) + (A_{12} + B_1 K^v) x^v(t, i) \quad (3.18a)$$

$$x^v(t, i + 1) = (A_{21} + B_2 K^h) x^h(t, i) + (A_{22} + B_2 K^v) x^v(t, i). \quad (3.18b)$$

Dans le théorème suivant, nous présentons les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une matrice de gain pour laquelle le système en boucle fermée (3.18) est positif et asymptotiquement stable.

Théorème 1.3. *Le système en boucle fermée (3.18) est positif et asymptotiquement stable pour toutes conditions initiales positives si et seulement s'il existe $\lambda = [\lambda_1^h \dots \lambda_{n_1}^h, \lambda_1^v \dots \lambda_{n_2}^v]^T \in \mathbb{R}^n$, $y_{i_h}^h, y_{i_v}^v \in \mathbb{R}^m$, $i_h = 1, 2, \dots, n_1$, $i_v = 1, 2, \dots, n_2$, tel que :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} - I_{n_2} \end{bmatrix} \lambda + B \left(\sum_{i_h=1}^{n_1} y_{i_h}^h + \sum_{i_v=1}^{n_2} y_{i_v}^v \right) < 0, \\ a_{rs}^{11} \lambda_s^h + b_r^1 y_s^h \geq 0, \text{ pour } r \neq s, \\ a_{rs}^{12} \lambda_s^v + b_r^1 y_s^v \geq 0, \text{ pour } 1 \leq r \leq n_1, 1 \leq s \leq n - n_1, \\ a_{rs}^{21} \lambda_s^h + b_r^2 y_s^h \geq 0, \text{ pour } 1 \leq r \leq n - n_2, 1 \leq s \leq n_2, \\ a_{rs}^{22} \lambda_s^v + b_r^2 y_s^v \geq 0, \text{ pour } 1 \leq r, s \leq n_2, \\ \lambda > 0, \end{array} \right. \quad (3.19)$$

CHAPITRE 3. ANALYSE DE LA STABILITÉ DES SYSTÈMES BIDIMENSIONNELS
(2D) FRACTIONNAIRES POSITIFS

avec $A_{kl} = [a_{rs}^{kl}]$, $B_k = [b_1^k \dots b_{n_k}^k]^T$, pour $k, l = 1, 2$ et $n = n_1 + n_2$. De plus, la matrice de gain K est donnée par :

$$K = \begin{bmatrix} \frac{y_1^h}{\lambda_1^h} & \dots & \frac{y_{n_1}^h}{\lambda_{n_1}^h} & \frac{y_1^v}{\lambda_1^v} & \dots & \frac{y_{n_2}^v}{\lambda_{n_2}^v} \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

Démonstration. Tout d'abord, nous prouvons la positivité du système en boucle fermée, soit $k_{i_h}^h = \frac{y_{i_h}^h}{\lambda_{i_h}^h}$, $k_{i_v}^v = \frac{y_{i_v}^v}{\lambda_{i_v}^v}$ pour $i_h = 1, \dots, n_1$ et $i_v = 1, \dots, n_2$, à partir des deuxième, troisième et quatrième inégalités de condition (3.19), on a :

$$\begin{cases} (a_{rs}^{11} \lambda_s^h + b_r^1 y_s^h) \frac{1}{\lambda_s^h} = a_{rs}^{11} + b_r^1 k_s^h = (A_{11} + B_1 K^h)_{rs} \geq 0, \text{ pour } r \neq s, r, s = 1, \dots, n_1, \\ (a_{rs}^{12} \lambda_s^v + b_r^1 y_s^v) \frac{1}{\lambda_s^v} = a_{rs}^{12} + b_r^1 k_s^v = (A_{12} + B_2 K^v)_{rs} \geq 0, \text{ pour } 1 \leq r \leq n_1, 1 \leq s \leq n - n_1, \\ (a_{rs}^{21} \lambda_s^h + b_r^2 y_s^h) \frac{1}{\lambda_s^h} = a_{rs}^{21} + b_r^2 k_s^h = (A_{21} + B_1 K^h)_{rs} \geq 0, \text{ pour } 1 \leq r \leq n - n_2, 1 \leq s \leq n_2, \\ (a_{rs}^{22} \lambda_s^v + b_r^2 y_s^v) \frac{1}{\lambda_s^v} = a_{rs}^{22} + b_r^2 k_s^v = (A_{22} + B_2 K^v)_{rs} \geq 0, \text{ pour } 1 \leq r, s \leq n_2, \end{cases} \quad (3.21)$$

alors, en utilisant le lemme 1.1, nous pouvons conclure que le système en boucle fermée (3.18) est positif si et seulement si les deuxième, troisième et quatrième conditions sont satisfaites. Ensuite, nous montrons la stabilité des systèmes à boucles fermées positives, à partir de première inégalité de condition (3.19) et par le calcul de :

$$\sum_{i_h=1}^{n_1} y_{i_h}^h + \sum_{i_v=1}^{n_2} y_{i_v}^v = \left[\frac{y_1^h}{\lambda_1^h} + \dots + \frac{y_{n_1}^h}{\lambda_{n_1}^h} + \frac{y_1^v}{\lambda_1^v} + \dots + \frac{y_{n_2}^v}{\lambda_{n_2}^v} \right] \begin{bmatrix} \lambda_1^h \\ \vdots \\ \lambda_{n_1}^h \\ \lambda_1^v \\ \vdots \\ \lambda_{n_2}^v \end{bmatrix} = K \lambda \quad (3.22)$$

qui est utilisé en première inégalité, on obtient :

$$\left(\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} - I_{n_2} \end{bmatrix} + BK \right) \lambda < 0, \quad (3.23)$$

d'après le théorème 1.1, le dernier implique que le système en boucle fermée est asymptotiquement stable si et seulement si la première inégalité (3.19) est vérifiée. Alors d'après le lemme 1.1, théorème 1.1, le système en boucle fermée (3.18) est positif et asymptotiquement stable si et seulement si les conditions du théorème 1.3 sont satisfaites. \square

1.4 Stabilisation robuste

La stabilisation robuste, quant à elle, concerne la capacité d'un système de contrôle à rester stable et à fonctionner de manière satisfaisante dans des conditions incertaines, telles que des variations de paramètres, des perturbations ou des incertitudes externes [8, 13, 27, 56, 89]. Leurs applications sont multiples, permettant aux ingénieurs de concevoir des technologies et des systèmes de contrôle complexes, fiables et stables dans des domaines tels que l'ingénierie aérospatiale, les systèmes électriques, la robotique et les véhicules autonomes. Dans cette partie, nous étendons le théorème 1.3 en nous concentrant sur les systèmes linéaires à temps continu-discret fractionnaires incertains.

Maintenant, Nous examinons à présent un système linéaire à temps 2D continu-discret fractionnaire, caractérisé par des incertitudes polytopiques convexes décrites par :

$$D^\alpha x^h(t, i) = A_{11}(\beta)x^h(t, i) + A_{12}(\beta)x^v(t, i) + B_1(\beta)u(t, i), \quad (3.24a)$$

$$x^v(t, i + 1) = A_{21}(\beta)x^h(t, i) + A_{22}(\beta)x^v(t, i) + B_2(\beta)u(t, i), \quad (3.24b)$$

où les matrices $A_{11}(\beta) \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$, $A_{12}(\beta) \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$, $A_{21}(\beta) \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_1}$, $A_{22}(\beta) \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$, $B_1(\beta) \in \mathbb{R}^{n_1 \times m}$ et $B_2(\beta) \in \mathbb{R}^{n_2 \times m}$ ne sont pas connus avec précision, qui est supposé appartenir à un domaine incertain convexe borné (type polytopique) Ω_{kl} , $k, l = 1, 2$, défini par :

$$\Omega_{kl} = \left\{ A_{kl}(\alpha), B_l(\alpha) : [A_{kl}(\beta) \quad B_l(\beta)] = \sum_{j=1}^N \beta_j [A_{kl}^j \quad B_l^j]; \quad \sum_{j=1}^N \beta_j = 1; \quad \beta_j \geq 0 \right\}. \quad (3.25)$$

Le système incertain en boucle fermée (3.24) est défini par :

$$D^\alpha x^h(t, i) = (A_{11}(\beta) + B_1(\beta)K^h)x^h(t, i) + (A_{12}(\beta) + B_1(\beta)K^v)x^v(t, i), \quad (3.26a)$$

$$x^v(t, i + 1) = (A_{21}(\beta) + B_2(\beta)K^h)x^h(t, i) + (A_{22}(\beta) + B_2(\beta)K^v)x^v(t, i). \quad (3.26b)$$

En nous basant sur les résultats de la section précédente, le théorème suivant nous permet de proposer une nouvelle approche de conception d'un contrôleur de stabilisation en retour d'état afin de garantir la positivité et la stabilité des systèmes linéaires 2D fractionnaires à temps continu-discret incertains en boucle fermée.

Théorème 1.4. *Le système en boucle fermée (3.26) est positif et asymptotiquement stable pour toutes conditions initiales positives si et seulement s'il existe $\lambda = [\lambda_1^h \dots \lambda_{n_1}^h, \lambda_1^v \dots \lambda_{n_2}^v]^T \in \mathbb{R}^n$,*

CHAPITRE 3. ANALYSE DE LA STABILITÉ DES SYSTÈMES BIDIMENSIONNELS
(2D) FRACTIONNAIRES POSITIFS

$y_{i_h}^h, y_{i_v}^v \in \mathbb{R}^m, i_h = 1, 2, \dots, n_1, i_v = 1, 2, \dots, n_2$, tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{cc} A_{11}^j & A_{12}^j \\ A_{21}^j & A_{22}^j - I_{n_2} \end{array} \right] \lambda + B^j \left(\sum_{i_h=1}^{n_1} y_{i_h}^h + \sum_{i_v=1}^{n_2} y_{i_v}^v \right) < 0, \\ a_{rs}^{11,j} \lambda_s^h + b_r^{1,j} y_s^h \geq 0, \text{ pour } r \neq s, \\ a_{rs}^{12,j} \lambda_s^v + b_r^{1,j} y_s^v \geq 0, \text{ pour } 1 \leq r \leq n_1, 1 \leq s \leq n - n_1, \\ a_{rs}^{21,j} \lambda_s^h + b_r^{2,j} y_s^h \geq 0, \text{ pour } 1 \leq r \leq n - n_2, 1 \leq s \leq n_2, \\ a_{rs}^{22,j} \lambda_s^v + b_r^{2,j} y_s^v \geq 0, \text{ pour } 1 \leq r, s \leq n_2, \\ \lambda > 0, \end{array} \right. \quad (3.27)$$

avec $A_{rs}^j = [a_{ij}^{kl,j}]$, $B_k^j = [b_1^{k,j} \dots b_{n_k}^{k,j}]^T$, pour $k, l = 1, 2$ et $n = n_1 + n_2$. De plus, la matrice de gain K est donnée par :

$$K = \left[\frac{y_1^h}{\lambda_1^h} \dots \frac{y_{n_1}^h}{\lambda_{n_1}^h}, \frac{y_1^v}{\lambda_1^v} \dots \frac{y_{n_2}^v}{\lambda_{n_2}^v} \right]. \quad (3.28)$$

Démonstration. À partir de (3.25), il est facile de voir que

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^N \beta_j \left[\begin{array}{cc} A_{11}^j & A_{12}^j \\ A_{21}^j & A_{22}^j - I_{n_2} \end{array} \right] \lambda + B^j \left(\sum_{i_h=1}^{n_1} y_{i_h}^h + \sum_{i_v=1}^{n_2} y_{i_v}^v \right) < 0, \\ \sum_{j=1}^N \beta_j [a_{rs}^{11,j} \lambda_s^h + b_r^{1,j} y_s^h] \geq 0, \text{ pour } r \neq s, \\ \sum_{j=1}^N \beta_j [a_{rs}^{12,j} \lambda_s^v + b_r^{1,j} y_s^v] \geq 0, \text{ pour } 1 \leq r \leq n_1, 1 \leq s \leq n - n_1, \\ \sum_{j=1}^N \beta_j [a_{rs}^{21,j} \lambda_s^h + b_r^{2,j} y_s^h] \geq 0, \text{ pour } 1 \leq r \leq n - n_2, 1 \leq s \leq n_2, \\ \sum_{j=1}^N \beta_j [a_{rs}^{22,j} \lambda_s^v + b_r^{2,j} y_s^v] \geq 0, \text{ pour } 1 \leq r, s \leq n_2, \\ \lambda > 0, \end{array} \right. \quad (3.29)$$

qui est équivalent :

$$\left\{ \begin{array}{l} (A_{11}(\beta) + B_1(\beta)K^h)_{rs} \geq 0, \text{ pour } r \neq s, r, s = 1, \dots, n_1, \\ (A_{12}(\beta) + B_2(\beta)K^v)_{rs} \geq 0, \text{ pour } 1 \leq r \leq n_1, 1 \leq s \leq n - n_1, \\ (A_{21}(\beta) + B_1(\beta)K^h)_{rs} \geq 0, \text{ pour } 1 \leq r \leq n - n_2, 1 \leq s \leq n_2, \\ (A_{22}(\beta) + B_2(\beta)K^v)_{rs} \geq 0, \text{ pour } 1 \leq r, s \leq n_2, \end{array} \right. \quad (3.30)$$

et

$$\left(\begin{array}{cc} A_{11}(\beta) & A_{12}(\beta) \\ A_{21}(\beta) & A_{22}(\beta) - I_{n_2} \end{array} \right) + B(\beta)K \lambda < 0, \quad (3.31)$$

d'après le lemme 1.1, le théorème 1.1, les dernières relations (3.30), (3.31) impliquent que le système incertain en boucle fermée (3.24) est positif et asymptotiquement stable si et seulement si les inégalités (3.27) sont vérifiées. \square

1.5 Influence de la valeur du pas de discrétisation sur la positivité et la stabilité

Dans cette section, nous utilisons un processus de discrétisation pour discrétiser le système bidimensionnelles 2D fractionnaire à temps continu-discret (3.1) avec la méthode des arguments constants par morceaux [3].

Soit $\alpha \in [0, 1]$ et considérons l'équation différentielle d'ordre fractionnaire au sens de Caputo

$$D^\alpha w(t) = f(w(t)), \quad 0 < t \leq T, w(0) = w_0. \quad (3.32)$$

Basé sur [3], la discrétisation de l'équation différentielle d'ordre fractionnaire (3.32) est donnée par :

$$w_{k+1} = w_k + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} f(w_k), \quad (3.33)$$

en utilisant la discrétisation fractionnaire de Caputo par la méthode des arguments constants par morceaux, on obtient la discrétisation suivante de l'équation (3.1a) :

$$x^h(k+1, i) = x^h(k, i) + \frac{h^\alpha A_{11}}{\Gamma(\alpha + 1)} x^h(k, i) + \frac{h^\alpha A_{12}}{\Gamma(\alpha + 1)} x^v(k, i) + \frac{h^\alpha B_1}{\Gamma(\alpha + 1)} u(t, i) \quad (3.34)$$

où

$$f(x^h(t, i)) = A_{11}x^h(t, i) + A_{12}x^v(t, i) + B_1u(t, i) \quad (3.35)$$

et h le pas de discrétisation, $t = jh$, avec $j \in \mathbb{N}^*$.

Ensuite, nous déduisons maintenant que le système (3.1) est discrétisé en un système 2D à temps discret correspondants défini par :

$$x^h(k+1, i) = \tilde{A}_{11}x^h(k, i) + \tilde{A}_{12}x^v(k, i) + \tilde{B}_1u(k, i) \quad (3.36a)$$

$$x^v(k, i+1) = \tilde{A}_{21}x^h(k, i) + \tilde{A}_{22}x^v(k, i) + \tilde{B}_2u(k, i) \quad (3.36b)$$

avec

$$\tilde{A}_{11} = \frac{h^\alpha A_{11}}{\Gamma(\alpha + 1)} + I_{n_1}, \tilde{A}_{12} = \frac{h^\alpha A_{12}}{\Gamma(\alpha + 1)}, \tilde{A}_{21} = A_{21}, \tilde{A}_{22} = A_{22}, \tilde{B}_1 = \frac{h^\alpha B_1}{\Gamma(\alpha + 1)}, \tilde{B}_2 = B_1. \quad (3.37)$$

Les conditions initiales du système (3.36) sont données par :

$$\{x^h(0, i), x^v(k, 0) \text{ où } k \in \mathbb{Z}_+, i \in \mathbb{Z}_+\}. \quad (3.38)$$

Lemme 1.4. [52] *La solution de l'équation (3.36) satisfaisant les conditions initiales (3.38)*

a la forme

$$\begin{bmatrix} x^h(k, i) \\ x^v(k, i) \end{bmatrix} = \sum_{s=0}^k T_{k-s, i} \begin{bmatrix} 0 \\ x^v(s, 0) \end{bmatrix} + \sum_{r=0}^j T_{k, j-r} \begin{bmatrix} x^h(0, r) \\ 0 \end{bmatrix} + \sum_{(s, r) \in S_{ki}} K_{k-s, r-i} u(s, r) \quad (3.39)$$

où

$$S_{ki} := \{(s, r) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+; 0 \leq s \leq k; 0 \leq r \leq i, s + r \neq k + i\} \quad (3.40)$$

et

$$K_{i-k, j-l} = T_{i-k-1, j-l} \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + T_{i-k, j-l-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{B}_2 \end{bmatrix}, \quad (3.41)$$

les T_{pq} sont des matrices de transition définies par :

$$T_{pq} = \begin{cases} I_{n_1+n_2} & \text{pour } p = q = 0 \\ \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{pour } p = 1, q = 0 \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} & \text{pour } p = 0, q = 1 \\ T_{10}T_{p-1, q} + T_{01}T_{p, q-1} & \text{pour } p \geq 0, q \geq 0, p + q > 1 \\ 0 & \text{pour } p < 0, \text{ et/ou } q < 0 \end{cases}. \quad (3.42)$$

Dans ce qui suit, nous présentons quelques résultats concernant la positivité et la stabilité du système 2D discret (3.36).

Définition 1.3. [1, 52] Le système 2D discret (3.36), est dit positif si pour toutes conditions initiales positifs données $x^h(0, i) \geq 0, x^v(k, 0) \geq 0, k, i \geq 0$, les vecteurs d'états résultants sont également positifs $x^h(k, i) \geq 0$ et $x^v(k, i) \geq 0$.

Lemme 1.5. [1] Le système 2D discret (3.36) est positif si et seulement si

$$\tilde{A}_{11} \in \mathbb{R}_+^{n_1 \times n_1}, \quad \tilde{A}_{12} \in \mathbb{R}_+^{n_1 \times n_2}, \quad \tilde{A}_{21} \in \mathbb{R}_+^{n_2 \times n_1}, \quad \tilde{A}_{22} \in \mathbb{R}_+^{n_2 \times n_2}, \quad \tilde{B}_1 \in \mathbb{R}_+^{n_1 \times m} \text{ et } \tilde{B}_2 \in \mathbb{R}_+^{n_2 \times m}. \quad (3.43)$$

Définition 1.4. [1] Le système 2D discret positif (3.36) est dit asymptotiquement stable si

$$\lim_{(k, i) \rightarrow \infty} \|x^h(k, i)\| = 0, \quad \lim_{(k, i) \rightarrow \infty} \|x^v(k, i)\| = 0 \quad (3.44)$$

pour $u_{k, i} = 0$ et

$$\sup_{i \in \mathbb{Z}_+} \|x^h(0, i)\| < \infty, \quad \sup_{k \in \mathbb{R}_+} \|x^v(k, 0)\| < \infty \quad (3.45)$$

respectivement.

Lemme 1.6. [1] *Le système 2D discret positif (3.1) est asymptotiquement stable si et seulement si :*

i) *Il existe un vecteur strictement positif $d > 0$, tel que*

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} - I_{n_1} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} - I_{n_2} \end{bmatrix} d < 0. \quad (3.46)$$

ii) $\rho \left(\begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \right) < 1$.

iii) *Il existe une matrice diagonale positive $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ vérifiant :*

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}^T P \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} - P < 0. \quad (3.47)$$

Théorème 1.5. *Considérons le pas de discrétisation $h > 0$. Supposons que les conditions du lemme 1.1 soient satisfaites. On a alors l'un des cas suivants :*

- 1 *Si la matrice A_{11} est une matrice de Metzler positive, alors le système (3.36) reste positif pour tout pas de discrétisation $h > 0$.*
- 2 *Si la matrice A_{11} est de Metzler non positive, alors le système (3.36) reste positif si et seulement si*

$$0 < h \leq \left(\frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\max_i |a_{ii}^{(1)}|} \right)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.48)$$

où $a_{ii}^{(1)}$, pour $i = 1, \dots, n$, sont les entrées diagonales strictement négatives de la matrice A_{11} .

Démonstration. Soit $h > 0$ et supposons que le système 2D continu-discret fractionnaire (3.1) est positif, c'est-à-dire $A_{12} \in \mathbb{R}_+^{n_1 \times n_2}$, $A_{21} \in \mathbb{R}_+^{n_2 \times n_1}$, $A_{22} \in \mathbb{R}_+^{n_2 \times n_2}$, et A_{11} est une matrice de Metzler. Depuis $0 < \alpha < 1$ et $h > 0$ on obtient $\tilde{A}_{12} = \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} A_{12} \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$, $\tilde{A}_{21} \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$, $\tilde{A}_{22} \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$. Ainsi, d'après le lemme 1.5, le système 2D à temps discret (3.36) reste positif si et seulement si la matrice $\tilde{A}_{11} \in \mathbb{R}_+^{n_1 \times n_1}$. Nous avons $\tilde{A}_{11} = \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} A_{11} + I_{n_1}$ avec A_{11} est une matrice de Metzler. Alors l'inégalité $\tilde{A}_{11} \geq 0$ est équivalente à la comparaison $A_{11} \geq -\frac{\Gamma(\alpha+1)}{h^\alpha} I_{n_1}$. Il faut alors considérer deux cas,

1. Si A_{11} est une matrice positive, alors la dernière relation est évidente.
2. Si A_{11} est une matrice non positive, ce qui signifie qu'au moins une entrée diagonale de la matrice A_{11} est strictement négative, car la matrice \tilde{A}_{11} n'est pas nécessairement positive.

Condition nécessaire : Puisque toutes les entrées hors diagonale de la matrice \tilde{A}_{11} sont positives, et celles de la matrice $-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{h^\alpha} I_{n_1}$ sont tous nuls, il sera clair que la dernière inégalité sera

basée sur la comparaison entre les entrées diagonales de la matrice A_{11} et la valeur $-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{h^\alpha}I_{n_1}$. Soit $a_{ii}^{(11)}$ les entrées diagonales de la matrice A_{11} .

- a. Il est facile de montrer que si tout $a_{ii}^{(11)} \geq 0$ alors $a_{ii}^{(11)} \geq 0 > -\frac{\Gamma(\alpha+1)}{h^\alpha}I_{n_1}$.
- b. Pour $a_{ii}^{(11)} < 0$ alors $0 > a_{ii}^{(11)} \geq -\frac{\Gamma(\alpha+1)}{h^\alpha}I_{n_1}$, donc

$$h^\alpha \leq -\frac{\Gamma(\alpha+1)}{a_{ii}^{(11)}}I_{n_1} \quad (3.49)$$

d'où

$$0 < h \leq \left(\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\max_i |a_{ii}^{(11)}|} \right)^{\frac{1}{\alpha}}. \quad (3.50)$$

Condition suffisante En supposant que la matrice A_{11} est une matrice de Metzler avec au moins une entrée diagonale strictement négative, et nous prouverons que la matrice \tilde{A}_{11} est positive. Il est clair que puisque $a_{ii}^{(11)} \geq 0$ pour $i \neq j$, les entrées hors diagonale de la matrice \tilde{A}_{11} sont toutes positives. De plus, si $a_{ii}^{(11)} \geq 0$, les entrées diagonales de la matrice \tilde{A}_{11} sont positives. Pour les entrées diagonales strictement négatives de la matrice A_{11} vérifiant

$$0 < h \leq \left(\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\max_i |a_{ii}^{(11)}|} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (3.51)$$

nous avons pour toute entrée diagonale $a_{ii}^{(11)} < 0$

$$0 < h^\alpha \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{|a_{ii}^{(11)}|} \quad (3.52)$$

d'où

$$a_{ii}^{(11)} + \frac{\Gamma(\alpha+1)}{h^\alpha} \geq 0 \quad (3.53)$$

nous concluons que toutes les entrées diagonales de la matrice \tilde{A}_{11} sont positives. \square

Théorème 1.6. *Le système 2D à temps discret (3.36) est positif et asymptotiquement stable si et seulement si le système 2D continu-discret fractionnaire positif (3.36) est asymptotiquement stable et les conditions du théorème 1.5 sont satisfaites.*

Démonstration. On suppose que le système positive 2D fractionnaire continu-discret (3.1) est asymptotiquement stable, alors nous avons :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} - I_{n_2} \end{bmatrix} \lambda < 0 \text{ pour } \lambda > 0 \quad (3.54)$$

qui est équivalent à :

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} - I_{n_1} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} - I_{n_2} \end{bmatrix} d < 0. \quad (3.55)$$

où

$$d = \begin{bmatrix} \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \lambda \quad (3.56)$$

alors on a que les conditions du théorème 1.5 garantissent la positivité du système discret obtenu, donc le système est asymptotiquement stable si et seulement si le vecteur d est strictement positive et d'après l'équation (3.56) on voit que les conditions du théorème conserve toujours la positivité du vecteur d , ainsi la stabilité du système discret (3.36) positive obtenu par discrétisation. \square

1.6 Exemple numérique

Considérons le système (3.1) pour $\alpha = 0.5$ avec les matrices $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.18 \\ -0.30 & -0.95 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -0.5 \\ -1.9 \end{bmatrix}$. Il est évident que les systèmes en boucle ouverte ne sont pas positifs et instables.

En utilisant le théorème 1.3, nous recherchons la matrice de gain telle que le système en boucle fermée soit positive et stable. La solution de l'inégalité est donnée par :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 275.04 \\ 46.82 \\ -164.76 \\ -23.46 \end{pmatrix} \quad (3.57)$$

où

$$K = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} = [-0.59, -0.5], \quad (3.58)$$

alors la matrice de système en boucle fermée est égal à

$$A + BK = \begin{bmatrix} -0.21 & 0.07 \\ 1.12 & 0. \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

La figure 3.1 montre la positivité et la stabilité de système en boucle fermée.

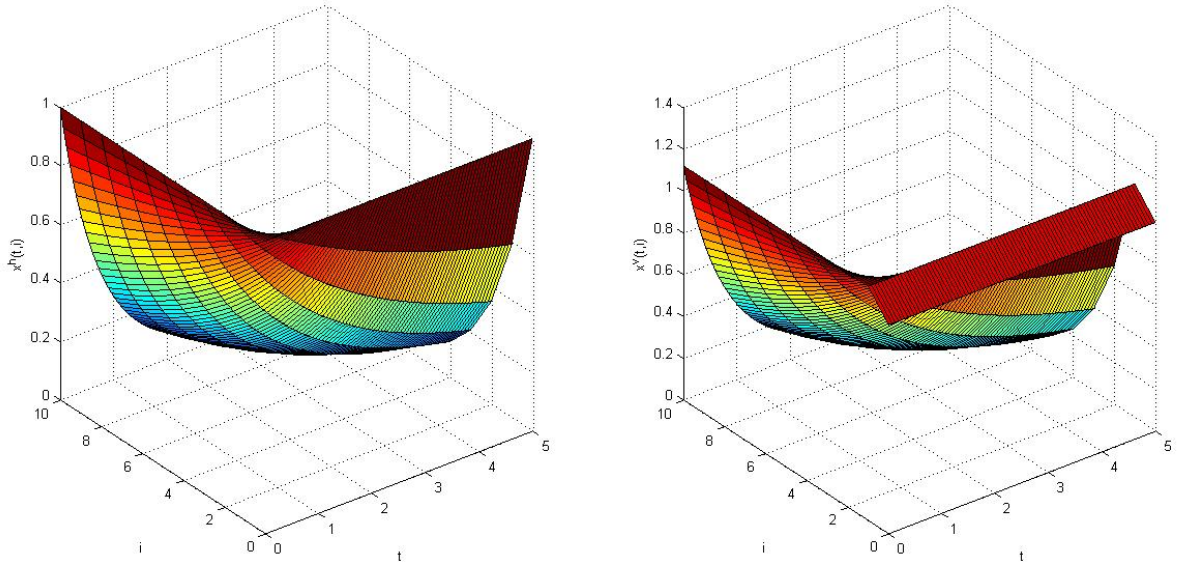


FIGURE 3.1 – Le vecteur d'état $x(t, i)$

2 Analyse de la stabilité des systèmes bidimensionnels (2D) fractionnaires positifs de Lyapunov

Dans cette section, nous introduisons une nouvelle classe de systèmes linéaires de Lyapunov fractionnaires bidimensionnels et à temps continu, décrits par ce modèle de Roesser. Ensuite, nous étendons les résultats de positivité et de stabilité pour ce modèle.

2.1 Formulation du problème

Considérons le système de Lyapunov 2D fractionnaire à temps continu suivant décrit par le modèle de Roesser :

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} D_{t_1}^\alpha x^h(t_1, t_2) \\ D_{t_2}^\beta x^v(t_1, t_2) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11}^0 & A_{12}^0 \\ A_{21}^0 & A_{22}^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(t_1, t_2) \\ x^v(t_1, t_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x^h(t_1, t_2) \\ x^v(t_1, t_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11}^1 & A_{12}^1 \\ A_{21}^1 & A_{22}^1 \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t_1, t_2), \tag{3.60} \\
 y(t_1, t_2) &= \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(t_1, t_2) \\ x^v(t_1, t_2) \end{bmatrix} + Du(t_1, t_2), \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+,
 \end{aligned}$$

CHAPITRE 3. ANALYSE DE LA STABILITÉ DES SYSTÈMES BIDIMENSIONNELS
(2D) FRACTIONNAIRES POSITIFS

où $D_{t_1}^\alpha, D_{t_2}^\beta$ sont des dérivées fractionnaires au sens de Caputo, $0 < \alpha, \beta < 1$. Les matrices $A_{11}^0, A_{11}^1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}, A_{22}^0, A_{22}^1 \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}, B_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times m}, B_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times m}, C_1 \in \mathbb{R}^{p \times n_1}, C_2 \in \mathbb{R}^{p \times n_2}, D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ sont des matrices système. Les matrices $x^h(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^{n_1 \times n}, x^v(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^{n_2 \times n}$ sont les états des matrices de direction horizontale et verticale respectivement au point (t_1, t_2) , $u(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est la matrice d'entrée, $y(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est la matrice de sortie et $n_1 + n_2 = n$.

Les conditions initiales du système (3.60) sont données par :

$$\{x^h(0, t_2), x^v(t_1, 0) \text{ où } t_1 \in \mathbb{R}_+, t_2 \in \mathbb{R}_+\}. \quad (3.61)$$

En introduisant les matrices du système (3.60) comme :

$$A^0 = \begin{bmatrix} A_{11}^0 & A_{12}^0 \\ A_{21}^0 & A_{22}^0 \end{bmatrix}, \quad A^1 = \begin{bmatrix} A_{11}^1 & A_{12}^1 \\ A_{21}^1 & A_{22}^1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}.$$

Définition 2.1. [54, 70] Soient les matrices $E = [e_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $F \in \mathbb{R}^{p \times q}$, le produit de Kronecker $E \otimes F$ des matrices $E = [e_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $F \in \mathbb{R}^{p \times q}$, est la matrice bloc :

$$E \otimes F = [e_{ij}F]_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}} \in \mathbb{R}^{mp \times nq}. \quad (3.62)$$

Définition 2.2. [54, 70] Soit la matrice $E = [e_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$, le vecteur associé à la matrice E est défini par :

$$\text{vec}(E) = [e_{11}, \dots, e_{m1}, e_{12}, \dots, e_{m2}, \dots, e_{1n}, \dots, e_{mn}]^T \in \mathbb{R}^{mn}. \quad (3.63)$$

Les lemmes suivants, mentionnent quelques propriétés et règles pour le produit de Kronecker.

Lemme 2.1. [54, 70] Considérons les matrices $E \in \mathbb{R}^{m \times n}, F \in \mathbb{R}^{q \times p}, G \in \mathbb{R}^{m \times p}$, et soit $X \in \mathbb{R}^{n \times q}$ une matrice inconnue. Ensuite, en utilisant le produit de Kronecker, nous pouvons transformer l'équation matricielle $EXF = G$ en un système linéaire de nq équations données par :

$$(E \otimes F^T) \text{vec}(X) = \text{vec}(G). \quad (3.64)$$

Lemme 2.2. Le système de Lyapunov 2D fractionnaire à temps continu (3.60) peuvent être transformés en un système linéaire fractionnaire équivalent à temps continu, à nm -entrées et pn sorties, sous la forme :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} D_{t_1}^\alpha \bar{x}^h(t_1, t_2) \\ D_{t_2}^\beta \bar{x}^v(t_1, t_2) \end{bmatrix} &= A \begin{bmatrix} \bar{x}^h(t_1, t_2) \\ \bar{x}^v(t_1, t_2) \end{bmatrix} + \bar{B}\bar{u}(t_1, t_2), \\ \bar{y}(t_1, t_2) &= \bar{C} \begin{bmatrix} \bar{x}^h(t_1, t_2) \\ \bar{x}^v(t_1, t_2) \end{bmatrix} + \bar{D}\bar{u}(t_1, t_2), \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+, \end{aligned} \quad (3.65)$$

CHAPITRE 3. ANALYSE DE LA STABILITÉ DES SYSTÈMES BIDIMENSIONNELS
(2D) FRACTIONNAIRES POSITIFS

avec des conditions initiales :

$$\{\bar{x}^h(0, t_2), \bar{x}^v(t_1, 0) \text{ où } t_1 \in \mathbb{R}_+, t_2 \in \mathbb{R}_+\}, \quad (3.66)$$

où $\bar{x}^h(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^{n_1 \cdot n}$ et $\bar{x}^v(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^{n_2 \cdot n}$ sont respectivement les vecteurs d'état horizontal et vertical, $\bar{u}(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^{m \cdot n}$ et $\bar{y}(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^{pn}$ sont respectivement les vecteurs d'entrée et de sortie, $A \in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2}$, $\bar{B} \in \mathbb{R}^{n^2 \times mn}$, $\bar{C} \in \mathbb{R}^{pn \times n^2}$, $\bar{D} \in \mathbb{R}^{pn \times mn}$, avec

$$\begin{aligned} A &= \left(A^0 \otimes I_n + I_n \otimes A^{1T} \right), \bar{B} = B \otimes I_n, \\ \bar{C} &= C \otimes I_n, \quad \bar{D} = D \otimes I_n \end{aligned} \quad (3.67)$$

et

$$\begin{aligned} \bar{x}^h(t_1, t_2) &= \begin{bmatrix} x_1^h(t_1, t_2) & x_2^h(t_1, t_2) & \cdots & x_{n_1}^h(t_1, t_2) \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{N \cdot n_1}, \\ \bar{x}^v(t_1, t_2) &= \begin{bmatrix} x_1^v(t_1, t_2) & x_2^v(t_1, t_2) & \cdots & x_{n_2}^v(t_1, t_2) \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{N \cdot n_2}, \\ \bar{u}(t_1, t_2) &= \begin{bmatrix} u_1(t_1, t_2) & u_2(t_1, t_2) & \cdots & u_m(t_1, t_2) \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{N \cdot m}, \\ \bar{y}(t_1, t_2) &= \begin{bmatrix} y_1(t_1, t_2) & y_2(t_1, t_2) & \cdots & y_p(t_1, t_2) \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{N \cdot p}, \end{aligned} \quad (3.68)$$

où $x_k^h(t_1, t_2)$, $x_k^v(t_1, t_2)$, $u_k(t_1, t_2)$, $y_k(t_1, t_2)$ dénoter le k -ème colonne de les matrices $x^h(t_1, t_2)$, $x^v(t_1, t_2)$, $u(t_1, t_2)$, $y(t_1, t_2)$, respectivement.

Démonstration. En utilisant le lemme 2.1, le système (3.65) est obtenue. \square

Lemme 2.3. [63] La solution de l'équation d'état (3.65) avec des ordres fractionnaires $0 < \alpha, \beta < 1$ pour une entrée arbitraire $u(t_1, t_2)$ et des conditions initiales (3.66) est donné par :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \bar{x}^h(t_1, t_2) \\ \bar{x}^v(t_1, t_2) \end{bmatrix} &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} T_{ij} \left\{ \frac{t_1^{i\alpha_1}}{\Gamma(i\alpha_1 + 1)} I_{t_2}^{j\alpha_2} \begin{bmatrix} \bar{x}^h(0, t_2) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} I_{t_1, t_2}^{(i+1)\alpha_1, j\alpha_2} \bar{u}(t_1, t_2) \right\} \\ &+ \sum_{i=0}^{\infty} T_{i0} \left\{ \frac{t_1^{i\alpha_1}}{\Gamma(i\alpha_1 + 1)} \begin{bmatrix} \bar{x}^h(0, t_2) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} I_{t_1}^{(i+1)\alpha_1} \bar{u}(t_1, t_2) \right\} \\ &+ \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} T_{ij} \left\{ \frac{t_2^{j\alpha_2}}{\Gamma(j\alpha_2 + 1)} I_{t_1}^{i\alpha_1} \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{x}^v(t_1, 0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix} I_{t_1, t_2}^{i\alpha_1, (j+1)\alpha_2} \bar{u}(t_1, t_2) \right\} \\ &+ \sum_{j=0}^{\infty} T_{0j} \left\{ \frac{t_2^{j\alpha_2}}{\Gamma(j\alpha_2 + 1)} \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{x}^v(t_1, 0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix} I_{t_2}^{(j+1)\alpha_2} \bar{u}(t_1, t_2) \right\}, \end{aligned} \quad (3.69)$$

où

$$T_{ij} = \begin{cases} I_n & \text{pour } i = 0, j = 0 \\ T_{10}T_{i-1,j} + T_{01}T_{i,j-1} & \text{pour } i + j > 0, (i, j \in Z_+) \\ 0 \text{ (matrice nulle)} & \text{pour } i < 0 \text{ et / ou } j < 0 \end{cases} \quad (3.70)$$

et

$$T_{10} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad T_{01} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}. \quad (3.72)$$

Dans ce qui suit, nous présentons quelques résultats concernant la positivité et la stabilité du système fractionnaire 2D continu (3.65).

Définition 2.3. [25] *Le système fractionnaire 2D continu (3.65), est dit positif si pour des conditions initiales et les entrées positifs données $\bar{x}^h(0, t_2) \in \mathbb{R}_+^{N.n_1}$, $\bar{x}^v(t_1, 0) \in \mathbb{R}_+^{N.n_2}$, $\bar{u}(t_1, t_1) \in \mathbb{R}_+^{N.m}$ pour $t_1, t_2 \geq 0$, les vecteurs d'états et les sorties résultants sont également positifs $\bar{x}^h(t_1, t_2) \in \mathbb{R}_+^{N.n_1}$, $\bar{x}^v(t_1, t_2) \in \mathbb{R}_+^{N.n_2}$, $\bar{y}^h(t_1, t_2) \in \mathbb{R}_+^{N.p}$.*

Lemme 2.4. [25] *Le système fractionnaire 2D continu (3.65) est positif si et seulement si $A \in \mathbb{M}_n$ et $\bar{B}, \bar{C}, \bar{D} \in \mathbb{R}_+$.*

Définition 2.4. [25] *Le système fractionnaire 2D continu positif (3.65) est dit asymptotiquement stable pour $u(t_1, t_2) = 0$ si*

$$\lim_{(t_1, t_2) \rightarrow \infty} \|\bar{x}^h(t_1, t_2)\| = 0, \quad \lim_{(t_1, t_2) \rightarrow \infty} \|\bar{x}^v(t_1, t_2)\| = 0 \quad (3.73)$$

pour

$$\sup_{t_1 \in \mathbb{R}_+} \|\bar{x}^h(0, t_2)\| < \infty, \quad \sup_{t_2 \in \mathbb{R}_+} \|\bar{x}^v(t_1, 0)\| < \infty \quad (3.74)$$

respectivement.

Lemme 2.5. [25] *Le système fractionnaire 2D continu positif (3.65) est asymptotiquement stable si et seulement si :*

i) *Il existe un vecteur strictement positif $d > 0$, tel que*

$$Ad < 0. \quad (3.75)$$

- ii) $\operatorname{Re}(\gamma_i) < 0$, pour $i = 1, 2, \dots, n$ où $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ sont les valeurs propres de la matrice A .
 iii) Il existe une matrice diagonale positive $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ vérifiant :

$$AP + PA^T < 0. \quad (3.76)$$

Lemme 2.6. [54, 70] Si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de la matrice A^0 et $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ les valeurs propres de la matrice A^1 , alors $\lambda_i + \mu_j$ pour $i, j = 1, 2, \dots, n$, sont les valeurs propres de la matrice :

$$A = A^0 \otimes I_n + I_n \otimes A^1. \quad (3.77)$$

Dans la section suivante, basée sur les résultats de la stabilité du système linéaire 2D fractionnaire standard positive à temps continu décrits par Roesser dans [61], nous donnons les conditions nécessaires et suffisantes pour la positivité et la stabilité du système de Lyapunov 2D fractionnaire à temps continu.

2.2 Analyse de la positivité

Dans cette section, nous introduisons la notion de la positivité du système de Lyapunov 2D fractionnaire à temps continu.

Définition 2.5. Le système fractionnaire 2D continu (3.65), est dit positif si pour des conditions initiales et les entrées positifs données $x^h(0, t_2) \in \mathbb{R}_+^{n_1 \times n}$, $x^v(t_1, 0) \in \mathbb{R}_+^{n_2 \times n}$, $u(t_1, t_1) \in \mathbb{R}_+^{m \times n}$ pour $t_1, t_2 \geq 0$, les vecteurs d'états et les sorties résultants sont également positifs $x^h(t_1, t_2) \in \mathbb{R}_+^{n_1 \times n}$, $x^v(t_1, t_2) \in \mathbb{R}_+^{n_2 \times n}$, $y(t_1, t_2) \in \mathbb{R}_+^{p \times n}$.

Théorème 2.1. Le système de Lyapunov 2D fractionnaire (3.60) est positif si et seulement si, A^0 et A^1 sont des matrices de Metzler, et $B \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}_+^{p \times n}$, $D \in \mathbb{R}_+^{p \times m}$.

Démonstration. Le système de Lyapunov 2D fractionnaire (3.60) est positif si et seulement si, le système standard 2D fractionnaire équivalent (3.65) est positif, ainsi A une matrice de Metzler et les matrices $\bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$ sont positifs, donc en utilisant le lemme 2.2, les résultats du théorème 2.1 sont confirmés. \square

2.3 Analyse de la stabilité

Définition 2.6. Le système de Lyapunov 2D fractionnaire (3.60) est dit asymptotiquement stable si :

$$\lim_{(t_1, t_2) \rightarrow \infty} \|x^h(t_1, t_2)\| = 0 \text{ et } \lim_{(t_1, t_2) \rightarrow \infty} \|x^v(t_1, t_2)\| = 0 \quad (3.78)$$

pour $u(t_1, t_2) = 0$, et

$$\sup_{t_2 \in \mathbb{R}_+} \|x^h(0, t_2)\| < \infty \text{ et } \sup_{t_1 \in \mathbb{R}_+} \|x^v(t_1, 0)\| < \infty \quad (3.79)$$

respectivement.

Théorème 2.2. *Le système de Lyapunov 2D fractionnaire (3.60) est asymptotiquement stable si et seulement si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :*

- a) $\operatorname{Re}(\lambda_i + \mu_j) < 0$, pour $i, j = 1, 2, \dots, n$ où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de la matrice A^0 et $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ les valeurs propres de la matrice A^1 .
- b) Il existe une matrice strictement positive $\theta \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tel que

$$A^0\theta + \theta A^1 < 0. \quad (3.80)$$

Démonstration. D'après le lemme 2.4, la condition 1 implique directement le premier résultat. La condition 2 est équivalente :

$$A^0 \otimes I_n \Lambda + I_n \otimes A^{1T} \Lambda < 0. \quad (3.81)$$

En utilisant le lemme 2.1, le second résultat du théorème donne, où $\Lambda = \operatorname{vec}(\theta)$. □

2.4 Exemple numérique

Considérons le système (3.60) avec les matrices suivantes :

$$A^0 = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.1 \\ 0.1 & -0.35 \end{bmatrix} \quad A^1 = \begin{bmatrix} -0.4 & 0.3 \\ 0.1 & -0.4 \end{bmatrix} \quad (3.82)$$

puisque les matrices A^0 et A^1 sont des matrices de Metzler, le système est positif, et les valeurs propres des matrices A^0 et A^1 sont $\{\lambda_1, \lambda_2\} = \{-0.55, -0.30\}$, $\{\mu_1, \mu_2\} = \{-0.22, -0.57\}$ respectivement. Ensuite nous avons,

$$\{(\lambda_1 + \mu_1), (\lambda_1 + \mu_2), (\lambda_2 + \mu_1), (\lambda_2 + \mu_2),\} = \{-0.77, -1.13, -0.52, -0.87\}$$

sont des parties réelles négatives. Par conséquent, d'après le théorème 2.2 le système (1.5) est asymptotiquement stable.

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, les conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilité du système linéaire 2D continu-discret fractionnaire positif décrit par le modèle de Roesser sont dérivées. L'objectif de concevoir le retour d'état du système de telle sorte que les systèmes en boucle fermée

CHAPITRE 3. ANALYSE DE LA STABILITÉ DES SYSTÈMES BIDIMENSIONNELS (2D) FRACTIONNAIRES POSITIFS

soient positifs et stables a été étudié. Les conditions nécessaires et suffisantes pour résoudre ce problème sont déterminées à l'aide d'inégalités matricielles linéaires. Dans l'autre partie, nous introduisons une nouvelle classe de systèmes Lyapunov fractionnaires 2D à temps continus positifs décrits par le modèle de Roesser et étendons les résultats de stabilité pour ces systèmes positifs.

Analyse de l'admissibilité des systèmes bidimensionnels (2D) singuliers

1 Introduction

L'admissibilité d'un système singulier 2D fait référence à la propriété de ces modèles d'obtenir un comportement bien défini et significatif tout en maintenant la stabilité et la robustesse [26,27,91]. Le chapitre est organisé comme suit : dans la première section, nous présentons la formulation du problème et définissons l'admissibilité et la stabilisation des systèmes linéaires 2D continus-discrets singuliers. Des conditions suffisantes pour l'admissibilité du système linéaire 2D continu-discret singulier sont abordées, le problème de la stabilisation par retour d'état pour ce classe de système est étudié. Dans la deuxième section, des conditions suffisantes pour l'admissibilité et stabilisation robuste pour le système 2D continu-discret singulier avec une incertitude bornée en norme sont développées.

Des exemples numériques pratiques discutent de l'équation de Darboux, des systèmes spatialement interconnectés formés par des circuits électriques et un exemple académique sont fournis pour montrer l'efficacité et l'applicabilité des résultats.

2 Admissibilité, stabilisation des systèmes linéaires bi-dimensionnels (2D) singuliers à temps continu-discret

2.1 Formulation du problème

Considérons le système linéaire 2D continu-discret singulier suivant décrit par le modèle de Roesser :

$$E_1 \dot{x}^h(t, i) = A_{11}x^h(t, i) + A_{12}x^v(t, i) \quad (4.1a)$$

$$E_2 x^v(t, i + 1) = A_{21}x^h(t, i) + A_{22}x^v(t, i) \quad (4.1b)$$

où $\dot{x}^h(t, i) = \frac{\partial}{\partial t}x^h(t, i)$, $x(t, i) = \begin{bmatrix} x^h(t, i) \\ x^v(t, i) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $x^h(t, i) \in \mathbb{R}^{n_1}$ est le vecteur d'état horizontal, $x^v(t, i) \in \mathbb{R}^{n_2}$ est le vecteur d'état vertical ($n = n_1 + n_2$), et $E_1, A_{11} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$, $E_2, A_{22} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$, avec $\text{rang}(E_k) = r_k \leq n_k$.

Les conditions initiales du système (4.1) sont données par :

$$\{x^h(0, i), x^v(t, 0) \text{ où } t \in \mathbb{R}_+, i \in \mathbb{Z}_+\}. \quad (4.2)$$

Le polynôme caractéristique du système (4.1) est défini par :

$$d(s, z) = \det \left\{ \begin{bmatrix} E_1 s - A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & E_2 z - A_{22} \end{bmatrix} \right\}. \quad (4.3)$$

À partir de divers concepts de systèmes singuliers 1D et 2D [88, 89], nous présentons les définitions suivantes.

Définition 2.1. *Le système (4.1) est dit régulier si*

$$d(s, z) \neq 0 \text{ pour certains } s, z \in \mathbb{C}. \quad (4.4)$$

Définition 2.2. *Le système (4.1) est dit sans impulsion si*

$$\deg_s d(s, z) = \text{rang } E_1 \text{ et } \deg_z d(s, z) = \text{rang } E_2. \quad (4.5)$$

Définition 2.3. *Le système (4.1) est dit asymptotiquement stable si :*

$$\lim_{(t,i) \rightarrow \infty} \|x^h(t, i)\| = 0 \text{ et } \lim_{(t,i) \rightarrow \infty} \|x^v(t, i)\| = 0 \quad (4.6)$$

pour

$$\sup_{i \in \mathbb{Z}_+} \|x^h(0, i)\| < \infty \text{ et } \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \|x^v(t, 0)\| < \infty \quad (4.7)$$

respectivement.

Définition 2.4. Le système (4.1) est dit admissible s'il est régulier, sans impulsion et stable.

Remarque 2.1. Le système (4.1) peut s'écrire sous la forme suivante

$$E \begin{bmatrix} \dot{x}^h(t, i) \\ x^v(t, i+1) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x^h(t, i) \\ x^v(t, i) \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

où

$$E = \begin{bmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

Si $E = I$, le système (4.8) est dit standard.

Les lemmes suivants seront utilisés pour dériver nos résultats dans cette chapitre.

Lemme 2.1. ([16, 36]) Le système standard est asymptotiquement stable s'il existe des matrices symétriques définies positives $W_{11} \in \mathbb{R}^{n_1}$ et $W_{22} \in \mathbb{R}^{n_2}$ tel que

$$AW_1 + W_1A^T + AW_2A^T - W_2 \prec 0 \quad (4.10)$$

où $W_1 = \text{diag}(W_{11}, 0)$, $W_2 = \text{diag}(0, W_{22})$.

Peut également s'écrire :

$$\begin{bmatrix} A_{11}W_{11} + W_{11}A_{11}^T + A_{12}W_{22}A_{12}^T & W_{11}A_{21}^T + A_{12}W_{22}A_{22}^T \\ \star & A_{22}W_{22}A_{22}^T - W_{22} \end{bmatrix} \prec 0. \quad (4.11)$$

Lemme 2.2. [31] Soient \mathcal{X}, \mathcal{Y} et \mathcal{Z} des matrices réelles avec des dimensions appropriées telles que $\mathcal{Z}^T\mathcal{Z} \leq I$. Ensuite, pour tout scalaire $\varepsilon > 0$ l'inégalité suivante est vérifié :

$$\mathcal{X}\mathcal{Z}\mathcal{Y} + \mathcal{Y}^T\mathcal{Z}^T\mathcal{X}^T \leq \varepsilon^{-1}\mathcal{X}\mathcal{X}^T + \varepsilon\mathcal{Y}^T\mathcal{Y}. \quad (4.12)$$

Lemme 2.3. [82] Soit les matrices $\Gamma \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\Sigma \in \mathbb{R}^{k \times n}$ et $\Psi = \Psi^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

a) Il existe une matrice Π satisfaisant

$$\text{Sym} \left\{ \Gamma \Pi \Sigma^T \right\} + \Psi \prec 0. \quad (4.13)$$

b) Les deux conditions suivantes sont satisfaites

$$\begin{aligned} \Gamma^\perp \Psi \Gamma^{T\perp} \prec 0 \text{ ou } \Gamma \Gamma^T \succ 0 \\ \Sigma^\perp \Psi \Sigma^{T\perp} \prec 0 \text{ ou } \Sigma^T \Sigma \succ 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

où $\Gamma^\perp \Gamma = 0$ et $\Sigma^\perp \Sigma = 0$.

Dans la section suivante, nous étendons les résultats d'admissibilité à la classe des systèmes linéaires 2D continus-discrets singuliers .

2.2 Analyse de l'admissibilité

L'analyse de l'admissibilité du modèle de Roesser consiste à évaluer la faisabilité mathématique et physique du modèle pour déterminer son adéquation à une application donnée. Cela peut impliquer d'analyser la régularité, la causalité (sans impulsions) et la stabilité du modèle, ainsi que d'examiner sa capacité à prédire avec précision le comportement du système.

Dans cette section, nous donnerons un critère d'admissibilité pour le système (4.1) en utilisant une approche d'inégalité matricielle linéaire stricte. Notez que les systèmes standards sont automatiquement réguliers et sans impulsions, donc pour analyser les systèmes singuliers, nous avons dérivé l'existence des conditions pour transformer les systèmes singuliers en un sous-système standard.

Le processus d'établissement des conditions d'admissibilité peut être formulé en plusieurs étapes essentielles :

1. Étape 1 : Extraire les matrices $E = \begin{bmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ à partir des équations (4.1a) et (4.1b).
2. Étape 2 : Pour des matrices E et A données, calculez le polynôme caractéristique décrit par l'expression 4.3 et testez si $d(s, z) \neq 0$ pour certains $s, z \in \mathbb{C}$ pour vérifier la condition de régularité.
3. Étape 3 : Pour un $d(s, z)$ donné à l'étape précédente, calculez le $\det_s d(s, z)$ et $\det_z d(s, z)$ pour vérifier l'état sans impulsion.
4. Étape 4 : Pour des conditions initiales données qui satisfont $\sup_{i \in \mathbb{Z}_+} \|x^h(0, i)\| < \infty$ et $\sup_{t \in \mathbb{R}_+} \|x^v(t, 0)\| < \infty$, nous étudions les conditions de stabilité.
5. Étape 5 : Utiliser tous les résultats obtenus aux étapes précédentes pour vérifier les conditions d'admissibilité.

L'analyse de l'admissibilité et de la stabilité joue un rôle essentiel dans les systèmes électriques pour contrôler et gérer les lignes électriques, garantissant ainsi un approvisionnement stable et sûr en électricité. Le système étant bidimensionnel, les modèles acceptables intègrent des interactions spatiales telles que l'interconnexion des lignes électriques et la dynamique des générateurs, ce qui permet d'obtenir des prédictions de stabilité plus précises [8, 72, 74, 97].

Soit les matrices non singulières $U_k, V_k \in \mathbb{R}^{n_k \times n_k}$ telles que,

$$U_k E_k V_k \begin{bmatrix} I_{r_k} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad U_k A_{kl} V_k = \begin{bmatrix} A_{kl}^1 & A_{kl}^2 \\ A_{kl}^3 & A_{kl}^4 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

où $k, l = 1, 2$. et $A_{kl}^1 \in \mathbb{R}^{r_k \times r_k}$, $A_{kl}^4 \in \mathbb{R}^{(n_k - r_k) \times (n_k - r_k)}$.

Cette décomposition peut être obtenue via la décomposition en valeurs singulières (SVD) de la matrice E .

En multipliant le système (4.8) par $U = \text{diag}(U_1, U_2)$, et en tenant compte de (4.15), on obtient

$$\begin{bmatrix} I_{r_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{r_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1^h(t, i) \\ \dot{x}_2^h(t, i) \\ x_1^v(t, i+1) \\ x_2^v(t, i+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^1 & A_{11}^2 & A_{12}^1 & A_{12}^2 \\ A_{11}^3 & A_{11}^4 & A_{12}^3 & A_{12}^4 \\ A_{21}^1 & A_{21}^2 & A_{22}^1 & A_{22}^2 \\ A_{21}^3 & A_{21}^4 & A_{22}^3 & A_{22}^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^h(t, i) \\ x_2^h(t, i) \\ x_1^v(t, i) \\ x_2^v(t, i) \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

pour $\begin{bmatrix} x_1^h(t, i) \\ x_2^h(t, i) \\ x_1^v(t, i) \\ x_2^v(t, i) \end{bmatrix} = V^{-1} \begin{bmatrix} x^h(t, i) \\ x^v(t, i) \end{bmatrix}$ et $V = \text{diag}(V_1, V_2)$.

Soit P une matrice de permutation définie par :

$$P = \begin{bmatrix} I_{r_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{r_2} & 0 \\ 0 & I_{n_1 - r_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n_2 - r_2} \end{bmatrix} \quad \text{où } PP^T = I_n.$$

En multipliant (4.16) par P , on obtient :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I_{r_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{r_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\bar{E}} \begin{bmatrix} \dot{x}_1^h(t, i) \\ x_1^v(t, i+1) \\ \dot{x}_2^h(t, i) \\ x_2^v(t, i+1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_{11}^1 & A_{12}^1 & A_{11}^2 & A_{12}^2 \\ A_{21}^1 & A_{22}^1 & A_{21}^2 & A_{22}^2 \\ A_{11}^3 & A_{12}^3 & A_{11}^4 & A_{12}^4 \\ A_{21}^3 & A_{22}^3 & A_{21}^4 & A_{22}^4 \end{bmatrix}}_{\bar{A}} \begin{bmatrix} x_1^h(t, i) \\ x_1^v(t, i) \\ x_2^h(t, i) \\ x_2^v(t, i) \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

où $\begin{bmatrix} x_1^h(t, i) \\ x_1^v(t, i) \\ x_2^h(t, i) \\ x_2^v(t, i) \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x_1^h(t, i) \\ x_2^h(t, i) \\ x_1^v(t, i) \\ x_2^v(t, i) \end{bmatrix}$.

Alors le système (4.1) peut s'écrire :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1^h(t, i) \\ x_1^v(t, i+1) \end{bmatrix} = A_1 \begin{bmatrix} x_1^h(t, i) \\ x_1^v(t, i) \end{bmatrix} + A_2 \begin{bmatrix} x_2^h(t, i) \\ x_2^v(t, i) \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

et

$$0 = A_3 \begin{bmatrix} x_1^h(t, i) \\ x_1^v(t, i) \end{bmatrix} + A_4 \begin{bmatrix} x_2^h(t, i) \\ x_2^v(t, i) \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

où

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}, \quad \bar{E} = \text{diag}(E_r, 0) \quad (4.20)$$

et

$$A_j = \begin{bmatrix} A_{11}^j & A_{12}^j \\ A_{21}^j & A_{22}^j \end{bmatrix}, \quad \text{pour } j = 1..4. \quad (4.21)$$

D'après l'équation (4.18) et (4.19), il s'ensuit que si la matrice A_4 est non singulière, nous pouvons transformer le système 2D singulier (4.1) en sous système standard, tel que

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1^h(t, i) \\ x_1^v(t, i+1) \end{bmatrix} = (A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3) \begin{bmatrix} x_1^h(t, j) \\ x_1^v(t, j) \end{bmatrix}. \quad (4.22)$$

Par conséquent, à partir de (4.22), nous concluons que si la matrice A_4 est non singulière, alors le système (4.1) est régulier et sans impulsion, également si la matrice $(A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3)$ est stable, alors le système 2D singulier (4.1) est stable. D'après ces résultats, nous présentons le lemme suivant.

Lemme 2.4. *Le système (4.1) est admissible si A_4 est inversible et $(A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3)$ est stable.*

Sur la base de ce lemme, nous proposons le théorème suivant pour vérifier l'admissibilité d'un système linéaire singulier 2D via l'approche LMIs.

Théorème 2.1. *Le système linéaire 2D continu-discret singulier est admissible s'il existe des matrices symétriques $X_{11} \succ 0, Y_{22} \succ 0$ et une matrice Q , telles que*

$$\text{Sym}\{AF\} + AY A^T - EY E^T \prec 0 \quad (4.23)$$

où $F = XE^T + E^\perp Q$, $X = \text{diag}(X_{11}, 0)$ et $Y = \text{diag}(0, Y_{22})$ avec $E^\perp \in \mathbb{R}^{n \times (n-r)}$ une matrice du rang complet.

Démonstration. Soit $\bar{U} = PU$ et $\bar{V} = VP^T$, alors nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \bar{X} = \bar{V}^{-1}X\bar{V}^{-T} = P \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^T &= \begin{bmatrix} X_1^{11} & 0 & \vdots & X_1^{12} & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_1^{21} & 0 & \vdots & X_1^{22} & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{X}_1 & \vdots & \bar{X}_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ \bar{X}_3 & \vdots & \bar{X}_4 \end{bmatrix} \\ \bar{Y} = \bar{V}^{-1}Y\bar{V}^{-T} = P \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Y_4 \end{bmatrix} P^T &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & Y_4^{11} & \vdots & 0 & Y_4^{12} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & Y_4^{21} & \vdots & 0 & Y_4^{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Y}_1 & \vdots & \bar{Y}_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ \bar{Y}_3 & \vdots & \bar{Y}_4 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.24)$$

et on choisit E^\perp et Q tels que

$$\bar{E}^\perp = \bar{V}^{-1}E^\perp T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-r} \end{bmatrix}, \quad \bar{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix} = TQ\bar{U}^T, \quad (4.25)$$

où T est n'importe quelle matrice non singulière. En multipliant les deux côtés de (4.23) par la matrice \bar{U} et sa transposée, on obtient :

$$\begin{aligned} &\text{Sym} \{ \bar{U}AXE^T\bar{U}^T + \bar{U}AE^\perp Q\bar{U}^T \} + \bar{U}AYA^T\bar{U}^T - \bar{U}EYE^T\bar{U}^T = \\ &= \text{Sym} \{ \bar{U}\bar{A}\bar{V}\bar{V}^{-1}X\bar{V}^{-T}\bar{V}^TE^T\bar{U}^T + \bar{U}\bar{A}\bar{V}\bar{V}^{-1}E^\perp T^{-1}TQ\bar{U}^T \} + \\ &+ \bar{U}\bar{A}\bar{V}\bar{V}^{-1}Y\bar{V}^{-T}\bar{V}^TA^T\bar{U}^T - \bar{U}\bar{E}\bar{V}^{-1}Y\bar{V}^{-T}\bar{U}^TE^T\bar{U}^T \end{aligned}$$

ce qui équivaut à :

$$\begin{aligned} &\text{Sym} \{ \bar{A}\bar{X}\bar{E}^T + \bar{A}\bar{E}^\perp\bar{Q} \} + \bar{A}\bar{Y}\bar{A}^T - \bar{E}\bar{Y}\bar{E}^T = \\ &= \text{Sym} \left\{ \begin{bmatrix} * & * \\ * & A_4Q_2 \end{bmatrix} \right\} + \begin{bmatrix} * & * \\ * & A_3\bar{Y}_1A_3^T + A_4\bar{Y}_3A_3^T + A_3\bar{Y}_2A_4^T + A_4\bar{Y}_4A_4^T \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.26)$$

où (*) représente une matrice qui n'est pas importante dans cette discussion.

D'après (4.26), il est facile de voir que

$$\text{Sym} \{ A_4Q_2 \} + A_3\bar{Y}_1A_3^T + A_4\bar{Y}_3A_3^T + A_3\bar{Y}_2A_4^T + A_4\bar{Y}_4A_4^T \prec 0 \quad (4.27)$$

ce qui équivaut à

$$\text{Sym} \left\{ A_4 \left(Q_2 + \bar{Y}_3A_3^T + \frac{1}{2}\bar{Y}_4A_4^T \right) \right\} \prec 0. \quad (4.28)$$

Cela implique que A_4 n'est pas singulière. Par conséquent, le système (4.1) est régulier et sans impulsion.

Enfin, nous montrons que le système (4.1) est stable. Soient les matrices de transformations non singulières suivantes M, N ,

$$M = \begin{bmatrix} I_r & -A_2A_4^{-1} \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ -A_4^{-1}A_3 & A_4^{-1} \end{bmatrix}$$

pour

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} I_r & A_2A_4^{-1} \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix}, \quad N^{-1} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}$$

ensuite nous avons

$$M\bar{A}N = \begin{bmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} \quad \text{où } A_0 = A_1 - A_2A_4^{-1}A_3$$

et

$$N^{-1}\bar{X}N^{-T} = \begin{bmatrix} \bar{X}_1 & * \\ * & * \end{bmatrix}, \quad N^{-1}\bar{Y}N^{-T} = \begin{bmatrix} \bar{Y}_1 & * \\ * & * \end{bmatrix}. \quad (4.29)$$

En multipliant (4.26) par M à gauche et sa transposée à droite, on obtient

$$\begin{aligned} & \text{Sym} \{ M\bar{A}\bar{X}\bar{E}^T M^T + M\bar{A}\bar{E}^\perp \bar{Q}M^T \} + M\bar{A}\bar{Y}\bar{A}^T M^T - M\bar{E}\bar{Y}\bar{E}^T M^T = \\ & = \text{Sym} \{ M\bar{A}N N^{-1}\bar{X}N^{-T}N^T\bar{E}^T M^T + M\bar{A}N N^{-1}\bar{E}^\perp \bar{Q}M^T \} + \\ & + M\bar{A}N N^{-1}\bar{Y}N^{-T}N^T\bar{A}^T M^T - M\bar{E}N N^{-1}\bar{Y}N^{-T}N^T\bar{E}^T M^T \end{aligned}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{aligned} & \text{Sym} \left\{ \begin{bmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{X}_1 & * \\ * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & * \\ * & * \end{bmatrix} \right\} + \\ & + \begin{bmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{Y}_1 & * \\ * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0^T & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{Y}_1 & * \\ * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} \text{Sym} \{ A_0\bar{X}_1 \} + A_0\bar{Y}_1A_0^T - \bar{Y}_1 & * \\ * & * \end{bmatrix} \end{aligned}$$

implique donc

$$\text{Sym} \{ A_0\bar{X}_1 \} + A_0\bar{Y}_1A_0^T - \bar{Y}_1 \prec 0. \quad (4.30)$$

D'après (4.24), il s'ensuit que \bar{X}_1 et \bar{Y}_1 sont similaires à W_1 et W_2 dans le lemme 2.1 et par la

condition (4.10) du lemme 2.1 nous pouvons conclure que le système 2D continu-discret singulier (4.1) est asymptotiquement stable. Avec régularité et non-impulsivité du système (4.1), on peut déduire que le système (4.1) est admissible. \square

Remarque 2.2. Notez que lorsque $E = I$, nous obtenons $E^\perp = 0$ et les conditions du LMIs (4.23) deviennent similaires aux conditions du LMIs (4.10) comme indiqué dans le lemme 2.1 pour la stabilité du système standard.

Remarque 2.3. Notez que le système dual de (4.1) est admissible si le système est admissible, et par utilisation le théorème 2.1, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 2.1. Le système linéaire 2D continu-discret singulier est admissible s'il existe des matrices $X_{11} \succ 0$, $Y_{22} \succ 0$ et une matrice Q , telle que

$$\text{Sym} \{A^T F\} + A^T Y A - E^T Y E \prec 0 \quad (4.31)$$

où $F = XE^T + E^\perp Q$, $X = \text{diag}(X_{11}, 0)$ et $Y = \text{diag}(0, Y_{22})$.

Théorème 2.2. Le système linéaire 2D continu-discret singulier est admissible pour $\beta > 1$ s'il existe des matrices symétriques X , Y , et des matrices G , Q , telles que

$$\begin{bmatrix} -EY E^T + \text{Sym} \{AG\bar{U}^{-T}\} & F^T + \beta AG\bar{V}^T - \bar{U}^{-1}G^T \\ \star & Y - \beta \text{Sym} \{G\bar{V}^T\} \end{bmatrix} \prec 0 \quad (4.32)$$

où $F = XE^T + E^\perp Q$, $X = \text{diag}(X_{11}, 0)$ et $Y = \text{diag}(0, Y_{22})$.

Démonstration. Il est facile de vérifier que l'inégalité (4.32) est équivalente à

$$\begin{bmatrix} -EY E^T & F^T \\ F & Y \end{bmatrix} + \text{Sym} \left\{ \begin{bmatrix} A \\ -I \end{bmatrix} G [\bar{U}^{-T} \beta \bar{V}^T] \right\} \prec 0 \quad (4.33)$$

à partir du lemme 2.3, la condition (4.33) peut s'écrire comme suit :

$$\begin{bmatrix} I & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -EY E^T & F^T \\ F & Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ A^T \end{bmatrix} \prec 0 \quad (4.34)$$

et

$$[\beta \bar{U} \quad -\bar{V}^{-1}] \begin{bmatrix} -EY E^T & F^T \\ F & Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \bar{U}^T \\ -\bar{V}^{-T} \end{bmatrix} \prec 0 \quad (4.35)$$

en développant (4.35), et on obtient :

$$-\beta \text{Sym} \{ \bar{X} \bar{E}^T + \bar{E}^\perp \bar{Q} \} + \bar{Y} - \beta^2 \bar{E} \bar{Y} \bar{E}^T \prec 0 \quad (4.36)$$

ou équivalent à :

$$\begin{bmatrix} -2\beta\bar{X}_1 + (1 - \beta^2)\bar{Y}_1 & * \\ * & * \end{bmatrix} \prec 0 \quad (4.37)$$

et cela implique que $X_1^{11} \succ 0$ et $Y_4^{11} \succ 0$ pour $\beta > 1$.

En développant l'équation (4.34), on obtient (4.23) et à l'aide de la preuve du théorème 2.1 on montre que la non-singularité de A_4 et la stabilité de sous-système standard (4.22). On peut alors en déduire l'admissibilité du système (4.1). \square

Remarque 2.4. *Le théorème 2.1, le théorème 2.2 et le corollaire 2.1 présentent une condition suffisante de l'admissibilité de système linéaire 2D continu-discret singulier décrit par le modèle de Roesser via l'approche LMIs, il est facile de résoudre ces LMIs en utilisant les outils Matlab LMI.*

2.3 Stabilisation du système 2D à temps continu-discret singulier

La stabilité est un aspect essentiel d'un système qui indique sa capacité à maintenir une réponse limitée ou convergente dans le temps. Diverses approches et critères peuvent être utilisés pour déterminer la stabilité d'un système 2D à temps continu-discret singulier [4, 48, 49, 86, 89]. Si les modèles de Roesser 2D singuliers s'avèrent instables, non réguliers ou impulsive, plusieurs approches de stabilisation peuvent être utilisées pour améliorer leur stabilité et garantir un comportement souhaitable du système.

Dans ce qui suit, nous nous concentrons sur le modèle singulier de Roesser, qui décrit par l'équation d'espace d'état suivante :

$$E \begin{bmatrix} \dot{x}^h(t, i) \\ x^v(t, i) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x^h(t, i) \\ x^v(t, i) \end{bmatrix} + Bu(t, i) \quad (4.38)$$

où $u(t, i) \in \mathbb{R}^m$ est le contrôle et $B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

Nous supposons que la matrice $d(s, z)$ est non singulière (invertible) pour certaines valeurs de s et z , c'est-à-dire

$$\det d(s, z) = \sum_{i=0}^{r_1} \sum_{j=0}^{r_2} K_{ij} s^i z^j \neq 0 \quad (4.39)$$

pour certains s et z , où K_{ij} pour $i = 0, 1, \dots, r_1; j = 0, 1, \dots, r_2$ sont des coefficients réels et dépendent des matrices E, A du système.

Issue des travaux de Kaczorek et Rogowski dans [48, 56] et de Bavafa-Toosi .Y dans [10] nous adaptons le critère de Routh-Hurwitz au système 2D à temps continu-discret singulier.

Théorème 2.3. *Le système 2D continu-discret singulier décrit par le modèle de Roesser est asymptotiquement stable si tous les coefficients K_{ij} du polynôme caractéristique $d(s, z)$ sont positifs, où*

$$\det d(s, z) = \sum_{i=0}^{r_1} \sum_{j=0}^{r_2} K_{ij} s^i z^j. \quad (4.40)$$

La stabilisation consiste à développer des mécanismes de contrôle pour établir la stabilité dans un système initialement instable [14, 26, 56, 74, 94]. Le retour d'état est une stratégie typique de stabilisation dans laquelle les variables d'état du système sont surveillées et utilisées pour produire un signal de contrôle qui modifie le comportement du système. L'objectif est de fournir des gains de rétroaction appropriés qui stabiliseront le système et garantiront que le système en boucle fermée est également régulier et sans impulsion, garantissant ainsi les performances souhaitées.

Dans ce cas, considérons le nouveau contrôle qui garantit l'admissibilité de la classe de modèle considérée

$$u(t, i) = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_h(t, i) \\ x_v(t, i) \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

où $K = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}$ est le gain de contrôle de rétroaction à concevoir. Ensuite, le système en boucle fermée est défini par :

$$E \begin{bmatrix} x^h(t, i) \\ x^v(t, i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(t, i) \\ x^v(t, i) \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

Théorème 2.4. *Le système linéaire 2D continu-discret singulier en boucle fermée est admissible pour $\beta > 1$ s'il existe des matrices symétriques X, Y , des matrices non singulières G, R et une matrice Q , telles que*

$$\begin{bmatrix} -EY E^T + \text{Sym} \{ AG\bar{U}^{-T} + BR\bar{U}^{-T} \} & F^T + \beta AG\bar{V}^T + BR\bar{V}^T - \bar{U}^{-1}G^T \\ \star & Y - \beta \text{Sym} \{ G\bar{V}^T \} \end{bmatrix} \prec 0 \quad (4.43)$$

avec la matrice de gain

$$K = RG^{-1} \quad (4.44)$$

et $F = XE + E^\perp Q$, $X = \text{diag}(X_{11}, 0)$ et $Y = \text{diag}(0, Y_{22})$.

Démonstration. Le système singulier en boucle fermée est admissible pour un scalaire $\beta > 1$ s'il existe des matrices symétriques X, Y , une matrice Q et une matrice non singulière G , telles que

$$\begin{bmatrix} -EYE^T + \text{Sym} \{ (A + BK)G\bar{U}^{-T} \} & F^T + \beta(A + BK)G\bar{V}^T - \bar{U}^{-1}G^T \\ \star & Y - \beta \text{Sym} \{ G\bar{V}^T \} \end{bmatrix} \prec 0, \quad (4.45)$$

si on fait un changement de variable $R = KG$, la condition (4.43) est donnée. \square

3 Admissibilité, stabilisation robuste des systèmes linéaires bidimensionnels (2D) singuliers à temps continu-discret incertains

Dans cette section, nous étudions le problème robuste de la stabilité et de la stabilisation pour les systèmes linéaires 2D continus-discrets singuliers incertains.

La stabilisation robuste des systèmes 2D continus-discrets singuliers avec une incertitude bornée en norme implique la création d'un contrôleur capable de stabiliser une certaine classe de systèmes dynamiques donnée par un modèle 2D. Le contrôleur doit être capable de gérer les incertitudes ou les perturbations dans des limites spécifiques et de garantir que les états ou les sorties du système convergent vers une condition souhaitable malgré l'existence de ces incertitudes. Cette conception de contrôle nécessite souvent l'utilisation des techniques de contrôle robustes pour garantir la stabilité et les performances en présence d'incertitudes.

3.1 Formulation du problème

Considérons le système linéaire 2D continu-discret singulier suivant décrit par le modèle de Roesser avec une incertitude bornée en norme :

$$E \begin{bmatrix} \dot{x}^h(t, i) \\ x^v(t, i) \end{bmatrix} = \tilde{A} \begin{bmatrix} x^h(t, i) \\ x^v(t, i) \end{bmatrix} + \tilde{B}u(t, i) \quad (4.46)$$

où les matrices \tilde{A}, \tilde{B} définies par :

$$\begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + \Delta A & B + \Delta B \end{bmatrix}, \quad (4.47)$$

avec

$$\Delta A = \mathcal{HFL}_1, \quad \Delta B = \mathcal{HFL}_2$$

où A, B, H, L_1, L_2 , sont des matrices constantes connues avec des dimensions appropriées. La matrice incertaine \mathcal{F} satisfait :

$$\mathcal{F}(\omega)\mathcal{F}^T(\omega) \leq I \quad (4.48)$$

où $\omega \in \Omega$, avec Ω est un ensemble compact dans \mathbb{R} .

En adoptant les résultats d'admissibilité précédents, nous introduisons la définition suivante du système 2D singulier incertain (4.46).

Définition 3.1. *Le système linéaire 2D continu-discret singulier non forcé avec incertitudes (4.46) est dit robustement admissible pour toutes les incertitudes satisfaisant (4.47),(4.48), si les conditions suivantes sont satisfaites :*

1) *S'il existe des matrices symétriques $X_{11} \succ 0, Y_{22} \succ 0$ et une matrice Q , telle que*

$$\text{Sym} \left\{ \tilde{A}F \right\} + \tilde{A}Y\tilde{A}^T - EYE^T \prec 0 \quad (4.49)$$

où $F = XE + E^\perp Q$, $X = \text{diag}(X_{11}, 0)$ et $Y = \text{diag}(0, Y_{22})$.

2) *S'il existe des matrices symétriques X, Y pour $\beta > 1$ et des matrices G, Q , telles que*

$$\begin{bmatrix} -EYE^T + \text{Sym} \left\{ \tilde{A}G\bar{U}^{-T} \right\} & F^T + \beta\tilde{A}G\bar{V}^T - \bar{U}^{-1}G^T \\ \star & Y - \beta\text{Sym} \left\{ G\bar{V}^T \right\} \end{bmatrix} \prec 0 \quad (4.50)$$

où $F = XE + E^\perp Q$, $X = \text{diag}(X_{11}, 0)$ et $Y = \text{diag}(0, Y_{22})$.

Au vu de la définition 3.1, dans le théorème suivant nous allons dériver les conditions suffisantes d'admissibilité du système 2D singulier incertain (4.46).

Théorème 3.1. *Le système linéaire 2D continu-discret singulier avec incertitudes est robustement admissible si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :*

1) *S'il existe des matrices symétriques $X_{11} \succ 0, Y_{22} \succ 0$ et une matrice Q , un scalaire $\epsilon > 0$, tel que*

$$\begin{bmatrix} \text{Sym} \left\{ AF \right\} - EYE^T + \epsilon HH^T & AY & F^T L_1^T \\ \star & -\tilde{Y} & YL^T \\ \star & \star & -\epsilon I \end{bmatrix} \prec 0 \quad (4.51)$$

où $F = XE + E^\perp Q$, $X = \text{diag}(X_{11}, 0)$, $Y = \text{diag}(0, Y_{22})$ et $\tilde{Y} = \text{diag}(\mathcal{S}, Y_{22})$, \mathcal{S} est n'importe quelle matrice non singulière.

2) S'il existe des matrices symétriques X, Y pour $\beta > 1$ et des matrices G, Q , un scalaire $\epsilon > 0$, tel que

$$\begin{bmatrix} -EYE^T + \text{Sym}\{AG\bar{U}^{-T}\} + \epsilon HH^T & F^T + \beta AG\bar{V}^T - \bar{U}^{-1}G^T & \bar{U}^{-1}G^T L_1^T \\ \star & Y - \beta \text{Sym}\{G\bar{V}^T\} & \beta \bar{V}G^T L_1^T \\ \star & \star & -\epsilon I \end{bmatrix} \prec 0 \quad (4.52)$$

où $F = XE + E^\perp Q$, $X = \text{diag}(X_{11}, 0)$ et $Y = \text{diag}(0, Y_{22})$.

Démonstration. Par complément de Schur, l'inégalité (4.51) est équivalente à ceci :

$$\begin{bmatrix} \text{Sym}\{AF\} - EYE^T & AY \\ \star & -\tilde{Y} \end{bmatrix} + \epsilon \begin{bmatrix} H \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H \\ 0 \end{bmatrix}^T + \epsilon^{-1} \begin{bmatrix} F^T L_1^T \\ YL^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} F^T L_1^T \\ YL^T \end{bmatrix} \prec 0 \quad (4.53)$$

selon le lemme 2 et l'inégalité (4.53), pour tout \mathcal{F} satisfaisant (4.47), (4.48), l'inégalité suivante est donnée :

$$\begin{aligned} \text{Sym}\{\tilde{A}F\} + \tilde{A}Y\tilde{A}^T - EYE^T &= \begin{bmatrix} \text{Sym}\{\tilde{A}F\} - EYE^T & \tilde{A}Y \\ \star & -\tilde{Y} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \text{Sym}\{AF\} - EYE^T & AY \\ \star & -\tilde{Y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H \\ 0 \end{bmatrix} \mathcal{F} \begin{bmatrix} L_1 F & LY \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} F^T L_1^T \\ YL^T \end{bmatrix} \mathcal{F}^T \begin{bmatrix} H^T & 0 \end{bmatrix} \prec 0. \end{aligned}$$

La première condition est donc établie. Pour la deuxième condition, la preuve est similaire. \square

3.2 Stabilisation robuste du système 2D continu-discret singulier

Dans cette section nous sommes désormais en mesure de présenter une condition suffisante pour une stabilisation robuste du système singulier 2D incertain (4.46).

Considérons le contrôle par retour d'état (4.41). Ensuite, le système en boucle fermée est défini par :

$$E \begin{bmatrix} x^h(t, i) \\ x^v(t, i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A} + \tilde{B}K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(t, i) \\ x^v(t, i) \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

où

$$\tilde{A} + \tilde{B}K = (A + BK) + H\mathcal{F}(L_1 + L_2K). \quad (4.55)$$

Théorème 3.2. *Le système en boucle fermée (4.54) est robustement admissible pour $\beta > 1$ s'il existe des matrices symétriques X, Y et des matrices G, Q , un scalaire $\epsilon > 0$, tel que*

$$\begin{bmatrix} \Xi & F^T + \beta AG\bar{V}^T + \beta BR\bar{V}^T - \bar{U}^{-1}G^T & \bar{U}^{-1}G^T L_1^T + \bar{U}^{-1}R^T L_2^T \\ * & Y - \beta \text{Sym}\{G\bar{V}^T\} & \beta \bar{V}G^T L_1^T \\ * & * & -\epsilon I \end{bmatrix} \prec 0 \quad (4.56)$$

avec la matrice de gain

$$K = RG^{-1} \quad (4.57)$$

où $F = XE + E^\perp Q$, $X = \text{diag}(X_{11}, 0)$, $Y = \text{diag}(0, Y_{22})$
et $\Xi = -EY E^T + \text{Sym}\{AG\bar{U}^{-T} + BR\bar{U}^{-T}\} + \epsilon HH^T$.

Démonstration. Il s'ensuit que (4.47) et (4.55) sont similaires, alors si nous remplaçons A, L_1 par $A + BK, L_1 + L_2 K$ respectivement dans (4.52) et nous faisons le changement de variable $R = KG$, la condition (4.56) s'ensuit. \square

3.3 Exemples numériques

Pour valider l'approche proposée, nous présentons ci-dessous des exemples visant à tester les méthodes que nous avons exposées précédemment, ainsi que les résultats théoriques que nous avons développés dans les sections précédentes. Il convient de noter que ces exemples concernent l'équation de Darboux, les circuits électriques actifs formant des systèmes spatialement interconnectés, ainsi que quelques exemples académiques. Afin de garantir l'existence et la résolution des conditions d'admissibilité, nous utilisons Matlab (LMI Toolbox).

Exemple 3.1. *Dans cet exemple nous appliquons nos résultats sur l'équation de Darboux (1.36) pour des valeurs de coefficients réels : $a_0 = 0.2, a_1 = -3, a_2 = -1, b = 0.3, f(x, t) = 1$, alors nous aurons :*

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 3.2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

D'après [26], le système en boucle ouverte dans ce cas n'est pas stable, donc le système n'est pas admissible.

Notre objectif est ensuite de calculer un contrôleur de retour d'état donné par la matrice de gain tel que le système en boucle fermée soit asymptotiquement stable.

En utilisant les LMI (4.43) avec le paramètre $\beta = 2$, nous obtenons l'ensemble de solutions LMIs suivant :

$$X = 10^{-10} \begin{bmatrix} 0.4138 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y = 10^{-10} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.4138 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G = 10^{-10} \begin{bmatrix} 0.2007 & 0.5919 \\ -0.0820 & 0.4549 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 0.0013 & 0.1009 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 6.3364 & 13.9304 \end{bmatrix}.$$

La figure du système équivalent en boucle fermée est la suivante

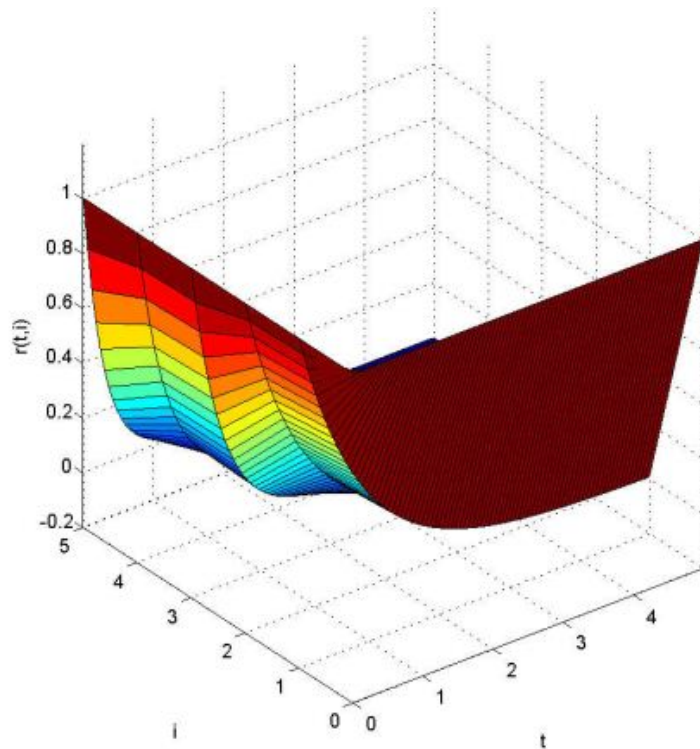


FIGURE 4.1 – Réponse en boucle fermée de $r(t, i)$

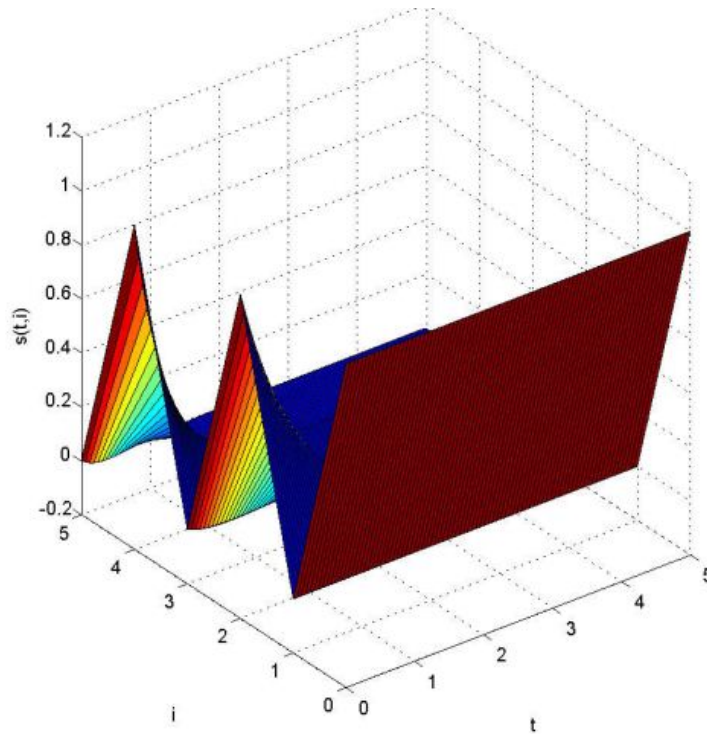


FIGURE 4.2 – Réponse en boucle fermée de $s(t, i)$

Nous concluons que ce système est stable, donc admissible.

Exemple 3.2. Dans cet exemple, nous avons appliqué nos résultats pour étudier la stabilité robuste des circuits électriques actifs qui forment des systèmes spatialement interconnectés, comme indiqué dans les références [7, 19, 84, 97]. Dans la figure suivante, les interconnexions entre les unités de circuit sont représentées visuellement par la figure 4.3.

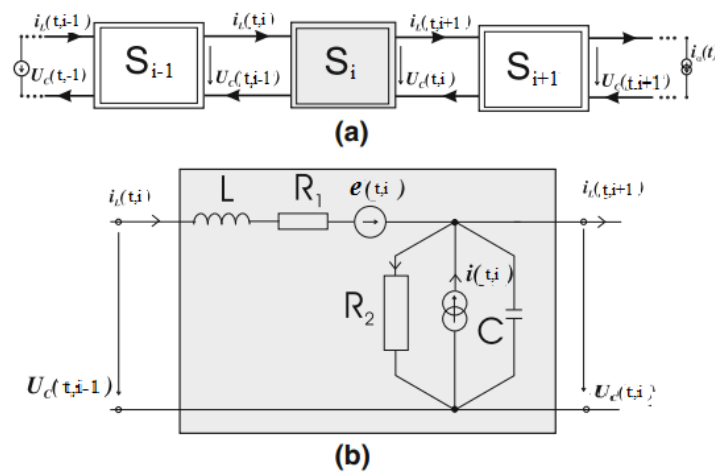


FIGURE 4.3 – Circuit électrique en tant que système spatialement interconnectés.

Chaque unité de circuit électrique dans un système interconnectés est généralement représentée par un bloc ou une partie du circuit, et les interconnexions entre ces blocs contrôlent la manière

dont les signaux circulent et interagissent au sein du circuit. Les interconnexions sont fréquemment créées en connectant la sortie d'une unité à l'entrée de la suivante, ce qui donne lieu à une séquence ou une série d'unités. Dans ce cas, nous prenons les circuits électriques actifs interconnectés par quatre unités de circuits simulés par [97] et exprimés en utilisant la loi de Kirchhoff par

$$\begin{aligned} C \frac{dU_C(t, i)}{dt} &= -\frac{1}{R_2} U_C(t, i) + i_L(t, i) + i_U(t, i) - i_L(t, i + 1) \\ L \frac{di_L(t, i)}{dt} &= -U_C(t, i) - R_1 i_L(t, i) + U_C(t, i - 1) - e(t, i) \end{aligned} \quad (4.59)$$

où t est un temps continu, $i_U(t, i)$ est une source de courant contrôlée dominée par la tension

$$i_U(t, i) = \gamma U_C(t, i - 1).$$

L'équation (4.59) peut être écrite sous la forme de système 2D continu-discret singulier suivant :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{C} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x^h(t, i)}{\partial x} \\ \frac{\partial x^v(t, i)}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{R_2 C} & \frac{1}{C} & \frac{\gamma}{C} & -\frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & 1 - \frac{R_1}{L} & \frac{1}{L} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(t, i) \\ x^v(t, i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t, i) \quad (4.60)$$

où $x^h(t, i) = [U_C^T(t, i) \quad i_L^T(t, i)]^T$, $x^v(t, i) = [U_C^T(t, i - 1) \quad i_L^T(t, i)]^T$ l'entrée est $u(t, i) = e(t, i)$.

Considérons le paramètre $\gamma = 0, 1$, l'inductance $L = 0,05 \pm 10\%$, la capacité $C = 0,04$ F, les résistances $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 10\Omega$.

En utilisant la décomposition en valeurs singulières (SVD) et certaines opérations algébriques, nous pouvons exprimer le système (4.60) sous la forme de système 2D continu-discret singulier (1.5) avec :

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0.1 & 0.01 \\ -0.80 & -19 & 20 & -20 \\ 0.04 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0.04 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -20 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.61)$$

Considérons maintenant l'incertitude des systèmes définie par :

$$\Delta A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.04\sigma_i & -\sigma_i & -\sigma_i & \sigma_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta B = \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

CHAPITRE 4. ANALYSE DE L'ADMISSIBILITÉ DES SYSTÈMES BIDIMENSIONNELS (2D) SINGULIERS

Le paramètre σ_i varie dans l'intervalle $[-1, 1]$, et l'incertitude (4.62) s'exprime sous la forme de (4.47) comme :

$$H = \begin{bmatrix} 0 & -0.4 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad L_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & -2.5 & -2.5 & 2.5 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} 2.5 \end{bmatrix} \text{ et } \mathcal{F}(\omega) = \sigma_i.$$

Ainsi, en résolvant les LMI (4.56) avec le paramètre $\beta = 2$, nous obtenons l'ensemble de solutions LMIs suivant :

$$X = \begin{bmatrix} -21.1831 & 0.2646 & 0 & 0 \\ 0.2646 & 21.1831 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9432 & 1.0858 \\ 0 & 0 & 1.0858 & 0.9432 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} -0.3169 & 10.5525 & -2.1337 & 24.4415 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 5.6845 & 1.8883 & 1.2048 & -0.7419 \\ -1.7398 & 0.9469 & 0.6642 & -0.5195 \\ -1.0545 & 0.4863 & 0.9556 & 0.5061 \\ 0.3318 & 0.0077 & 0.2535 & 1.2955 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} -0.2641 & -0.0821 & -0.0609 & 0.6187 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} -0.0734 & 0.1929 & -0.2691 & 0.6180 \end{bmatrix}, \quad \epsilon = 21.1831.$$

La figure suivante représente l'état du système en boucle fermée avec la matrice de gain obtenue,

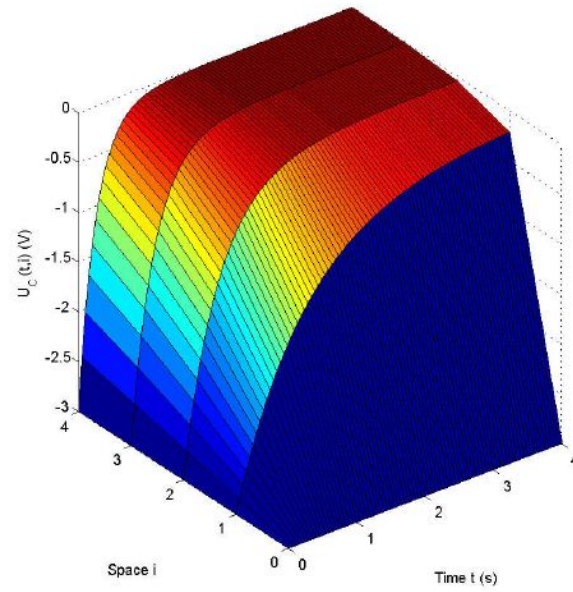


FIGURE 4.4 – Réponse en boucle fermée de $U_C(t, i)$

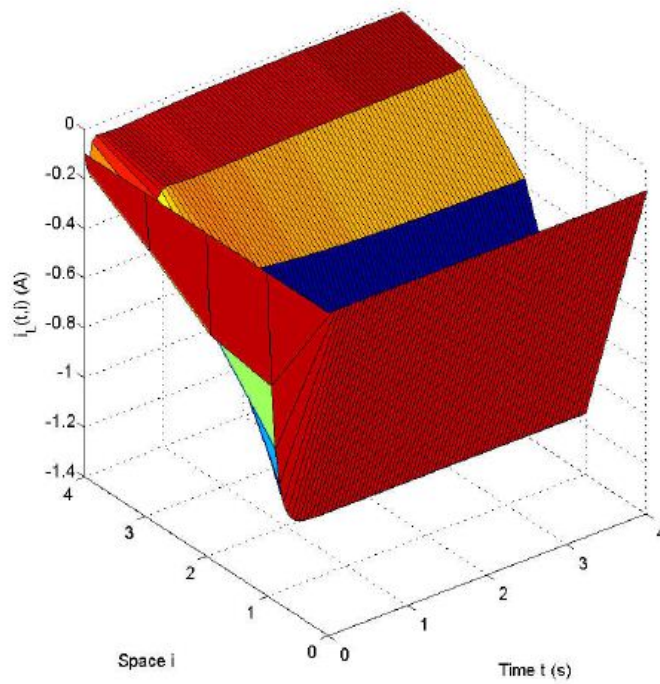


FIGURE 4.5 – Réponse en boucle fermée de $i_L(t, i)$

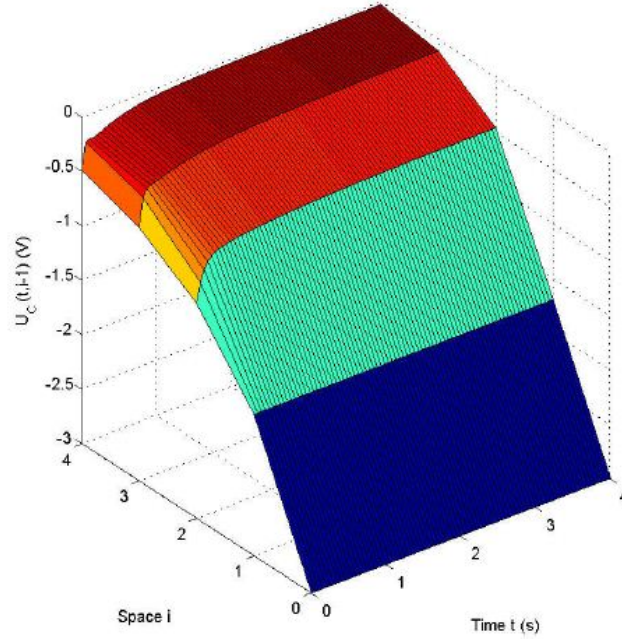


FIGURE 4.6 – Réponse en boucle fermée de $U_C(t, i - 1)$

Les résultats de simulations représentés dans les figures 4.4, 4.5, 4.9 révèlent l'admissibilité de système 2D singulier dans cet exemple.

Notez que dans [97] la stabilité des systèmes interconnectés à été étudiée à l'aide de l'algorithme de contrôle d'apprentissage itératif de type PD, qui a été étudié par les transformant en systèmes unidimensionnels et en les supposant causals (sans implusion), puis en les convertissant en itérations pour concevoir des observations de cas, ce qui peut présenter certaines erreurs dans les études de ce système. Dans cette simulation, les systèmes interconnectés ont été étudiés directement en utilisant les résultats prouvés dans cet chapitre, en plus de rendre le système stable en garantissant l'absence d'impulsions (causalité).

Exemple 3.3. Considérons le système 2D continu-discret singulier (1.5) avec

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -1.3 & 0.4 & 0.6 & 0.4 \\ 0.7 & -0.9 & 0.5 & 0.3 \\ 0.2 & 0.4 & 0 & 0.4 \\ 0.4 & 0.5 & 0.5 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -0.2 \\ 0.4 \\ 0.25 \\ 0.2 \end{bmatrix}.$$

Dans ce cas, il est clair que $\text{rang } E = 3$. Ensuite, nous exprimons le matrice E^\perp comme

suit :

$$E^\perp = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

on trouve alors que $EE^\perp = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\text{rang}E^\perp = 1$.

On choisit la permutation des matrices suivante U, V

$$\bar{U} = V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ pour } UU^T = VV^T = I$$

tel que,

$$\bar{U}E\bar{V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{U}A\bar{V} = \begin{bmatrix} -1.3000 & 0.4000 & 0.4000 & 0.6000 \\ 0.7000 & -0.9000 & 0.3000 & 0.5000 \\ 0.4000 & 0.5000 & -1.0000 & 0.5000 \\ 0.2000 & 0.4000 & 0.4000 & 0 \end{bmatrix}.$$

On remarque que la matrice $A_4 = 0$ dans ce cas est singulière, alors le système en boucle ouverte n'est pas sans impulsion, cela signifie que ce système n'est pas admissible.

En utilisant notre résultat principal du théorème 2.4 pour vérifier l'existence de la matrice de gain K , tel que le système en boucle fermée est admissible. Ainsi, en résolvant les LMIs (4.43) avec le paramètre $\beta = 2$, nous obtenons l'ensemble suivant de solutions LMIs

$$X = \begin{bmatrix} 217.0693 & 36.1828 & 0 & 0 \\ 36.1828 & 217.0693 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 53.4686 & 79.9901 \\ 0 & 0 & 79.9901 & 53.4686 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 55.6527 & -38.2877 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 64.2395 & 34.2930 & 188.8218 & -95.8843 \\ -14.4818 & 80.7758 & 68.2273 & -45.9648 \\ -45.4094 & -37.0577 & 84.4394 & 59.1387 \\ -156.6226 & -63.3465 & 42.6456 & -34.9323 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} -24.5960 & -176.2427 & -394.3871 & 123.6662 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} -0.4992 & -0.3853 & -0.3784 & -0.5244 \end{bmatrix}.$$

Par conséquent, par le théorème 2.4, nous concluons que le système en boucle fermée (4.42) est admissible pour la matrice de gain K obtenue.

Maintenant, nous évaluons les conditions d'admissibilité du système en boucle fermée en utilisant notre lemme 2.4 pour valider son adéquation.

Nous avons

$$A_c = \begin{bmatrix} 1.1039 & 0.8060 & 0.7896 & 0.3565 \\ 0.3078 & -1.7120 & 0.1209 & 0.3870 \\ -0.0451 & -0.1075 & -0.2370 & 0.4544 \\ 0.2039 & 0.0940 & 0.3104 & -0.9565 \end{bmatrix}$$

où $A_c = A + BK$, Il est alors facile de vérifier que

$$UA_cV = \begin{bmatrix} -1.1039 & 0.8060 & 0.3565 & 0.7896 \\ 0.3078 & -1.7120 & 0.3870 & 0.1209 \\ 0.2039 & 0.0940 & -0.9565 & 0.3104 \\ -0.0451 & -0.1075 & 0.4544 & -0.2370 \end{bmatrix}$$

tel que $A_{c4} = -0.2370$ n'est pas singulier, et

$$A_{c0} = \begin{bmatrix} -1.2542 & 0.4478 & 1.8705 \\ 0.2848 & -1.7668 & 0.6187 \\ 0.1448 & -0.0468 & -0.3613 \end{bmatrix}$$

où $A_{c0} = A_{c1} - A_{c2}A_{c4}^{-1}A_{c3}$. En résolvant les LMI (4.10), le réalisable suivant

$$W_1 = \begin{bmatrix} 0.3487 & -0.0839 & 0 \\ -0.0839 & 0.3487 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad W_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0170 \end{bmatrix}$$

Cela implique que le sous-système standard obtenu est stable, ce qui indique son admissibilité. Les figures suivantes confirment les résultats obtenus.

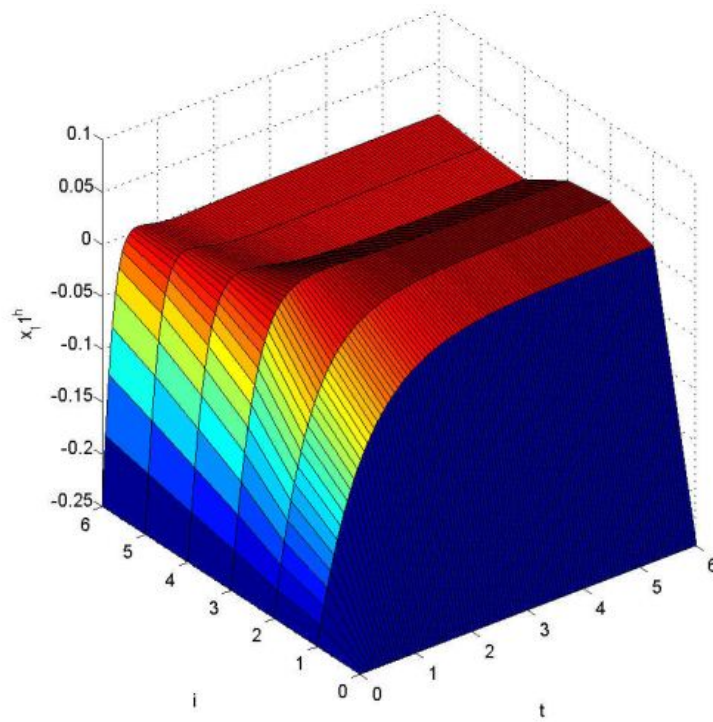


FIGURE 4.7 – Réponse en boucle fermée de $x_1^h(t, i)$

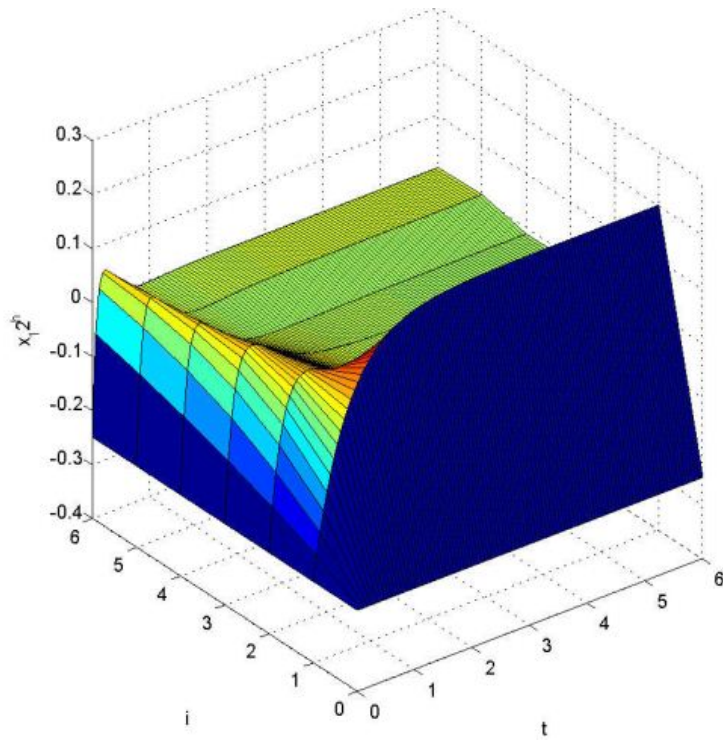


FIGURE 4.8 – Réponse en boucle fermée de $x_2^h(t, i)$

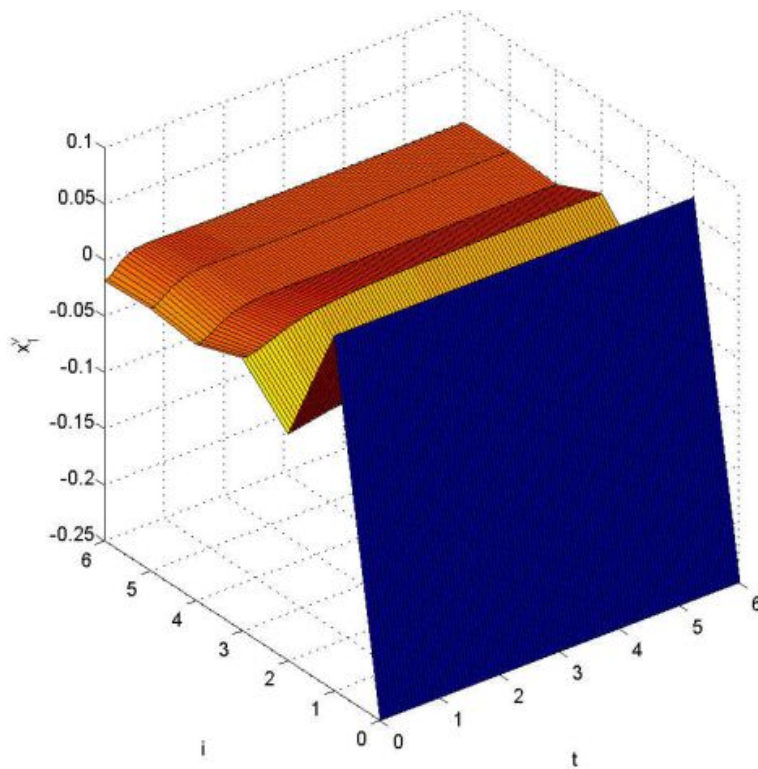


FIGURE 4.9 – Réponse en boucle fermée de $x_1^v(t, i)$

Dans cette partie, nous examinons le même exemple mais en prenant en compte un pa-

paramètre incertain $\mathcal{F}(\omega) = \cos(\omega)$ et la matrice suivante :

$$H = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.1 & 0.2 & 0.9 \end{bmatrix}^T, \quad L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} 0.5 \end{bmatrix}.$$

Ainsi, en résolvant les LMIs (4.56) avec le paramètre $\beta = 2$, nous obtenons l'ensemble suivant de solutions LMIs,

$$X = \begin{bmatrix} 2.3495 & -0.8726 & 0 & 0 \\ -0.8726 & 2.3495 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.4672 & -3.5509 \\ 0 & 0 & -3.5509 & -0.4672 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.6863 & -5.2638 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 2.2728 & -2.0609 & 0.9761 & 0.5191 \\ -0.8544 & 1.6034 & -0.3776 & 1.3666 \\ 0.1130 & -2.2625 & 1.7517 & 2.1971 \\ -0.0058 & -0.4556 & 0.8319 & -1.5380 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} -2.5960 & 3.3698 & -4.4459 & -1.3258 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} -1.8810 & -2.0406 & -0.7010 & -2.5876 \end{bmatrix}, \quad \epsilon = 2.3495.$$

Par conséquent, à partir du théorème 3.2, nous concluons que le système en boucle fermée est admissible avec la matrice de gain K obtenue.

4 Conclusion

Dans ce chapitre, une analyse de l'admissibilité et de la stabilisation robuste de système linéaire 2D continu-discret singulier est étudiée. Des conditions suffisantes pour l'admissibilité, ainsi que des résultats de stabilisation robustes basés sur des inégalités matricielles linéaires strictes ont été développés. Notre nouvelle approche est basée sur une matrice de gain, un contrôle par retour d'état, une décomposition en valeurs singulières et un paramètre incertain, validés par des conditions LMIs. Quelques exemples numériques illustratifs sont également donnés pour montrer l'effet et la précision de nos résultats.

Conclusion

Ce travail tente de fournir une approche très générale sur la commande de certaines classes de systèmes bidimensionnels positifs fractionnaires/singuliers. La principale contribution de cette thèse est présentée comme suit :

Dans la première partie, nous établissons plusieurs résultats clés concernant la contrôlabilité et le problème de controlatéral à énergie minimale pour les systèmes linéaires 2D continus fractionnaires positifs décrits par le modèle de Fornasini-Marchesini. Nous obtenons des conditions suffisantes pour la contrôlabilité de ces systèmes, en utilisant l'approche du Grammien. De plus, nous établissons les conditions nécessaires et suffisantes pour des cas spécifiques au sein de ces systèmes, en utilisant des tests basés sur des matrices systèmes. Nous fournissons également une solution au problème de contrôle à énergie minimale pour le système particulier considéré, garantissant que les systèmes maintiennent leur positivité. Pour illustrer nos conclusions, nous incluons des exemples numériques qui servent de preuves à l'appui de nos résultats.

Dans la deuxième partie, nous dérivons les conditions nécessaires et suffisantes pour assurer la stabilité d'un système linéaire 2D continu-discret fractionnaire positif décrit par le modèle de Roesser. L'objectif est de concevoir le retour d'état du système de telle sorte que les systèmes en boucle fermée soient positifs et stables. Les conditions nécessaires et suffisantes pour résoudre ce problème ont été établies. L'analyse de l'influence de la valeur du pas de discrétisation sur la positivité et la stabilité, a été étudiée, aussi nous avons introduit une nouvelle classe du système de Lyapunov fractionnaires 2D positifs à temps continu décrits par le même modèle considéré, les conditions nécessaires et suffisantes pour la positivité, la stabilité des systèmes de Lyapunov fractionnaires 2D à temps continu sont dérivées.

La dernière partie traite une analyse complète de l'admissibilité et de la stabilisation robuste des systèmes linéaires 2D continus-discrets singuliers. Les conditions suffisantes pour l'admissibilité, ainsi que des résultats de stabilisation robuste basés sur des inégalités matricielles linéaires (LMI) ont été développés. Nos résultats fournissent un cadre pour la conception de contrôleurs stabilisateurs pour des systèmes linéaires 2D continus-discrets singuliers, et offrent un aperçu de

Conclusion

l'impact de la singularité sur leur stabilité et leur contrôle. Illustration des exemples numériques et des applications physiques sont également donnés pour illustrer les résultats.

Résumé

Titre : Sur la Commande de certaines classes de Systèmes Bidimensionnels Positifs Fractionnaires et/ou Singuliers

Résumé : Cette thèse traite de la commande des systèmes linéaires bidimensionnels (2D), incluant les systèmes fractionnaires positifs et singuliers, en se focalisant sur deux aspects majeurs : la contrôlabilité et la stabilité. Dans ce cadre, les conditions d'atteignabilité et de contrôlabilité des systèmes 2D fractionnaires positifs, à temps continu (resp. continu-discret), décrits par le modèle de Fornasini-Marchesini, sont établies par l'utilisation de l'approche du Grammien, ce qui permet de résoudre plus aisément le problème de contrôle à énergie minimale pour ces systèmes. En parallèle, les conditions de stabilité et de stabilisation robuste des systèmes 2D fractionnaires positifs, décrits par le modèle de Roesser à temps continu-discret, sont également tirées. De plus, des critères garantissant la positivité et la stabilité lors de la discrétisation du modèle continu-discret sont exposés. Enfin, les conditions d'admissibilité et de stabilisation robuste pour les systèmes 2D singuliers à temps continu-discret sont déterminées à l'aide des inégalités matricielles linéaires strictes (LMIs). Ces travaux sont complétés par des exemples numériques et des applications pratiques qui illustrent les résultats obtenus.

Mots clés : Commandabilité- Systèmes singuliers- Systèmes fractionnaires- Systèmes 2D- Systèmes Positifs- Admissibilité- Robustesse.

Title : On the Control of Certain Classes of Positive Fractional and/or Singular Two-Dimensional Systems

Abstract : This thesis addresses the control of two-dimensional (2D) linear systems, including fractional positive and singular systems, focusing on two major aspects : controllability and stability. In this context, the reachability and controllability conditions of continuous-time (or continuous-discrete) fractional positive 2D systems, described by the Fornasini-Marchesini model, are established by utilizing the Gramian approach, which facilitates the resolution of the minimum energy control problem for these systems. Concurrently, the stability and robust stabilization conditions of fractional positive 2D systems, described by the Roesser model in continuous-discrete time, are also derived. Furthermore, criteria ensuring positivity and stability during the discretization of the continuous-discrete model are presented. Finally, the admissibility and robust stabilization conditions for singular 2D systems in continuous-discrete time are determined using strict linear matrix inequalities (LMIs). These works are complemented by numerical examples and practical applications that illustrate the results obtained.

Keywords : Controllability- Singular Systems- Fractional Systems- 2D Systems- Positive Systems- Admissibility- Robustness.

العنوان: حول التحكم في فئات معينة من الأنظمة الإيجابية ثنائية الأبعاد الكسرية و/أو المفردة

الملخص: تتناول هذه الأطروحة التحكم في الأنظمة الخطية ثنائية البعد (2D)، بما في ذلك الأنظمة الكسرية الموجبة والمفردة، مع التركيز على جانبين: إمكانية التحكم والاستقرار. في هذا السياق، تم تحديد شروط الوصول وإمكانية التحكم للأنظمة الكسرية الموجبة ثنائية البعد، في الزمن المستمر (بترتيب، المستمر-المنفصل) الموصوفة بنموذج فورناسيني-ماركيسيني، باستخدام نهج الغراميان، مما يسهل حل مشكلة التحكم بأقل طاقة للأنظمة المدروسة. تم استخراج شروط الاستقرار والتثبيت القوي للأنظمة الكسرية الموجبة ثنائية الأبعاد، وفقاً لنموذج روسر في الزمن المستمر-المتقطع. علاوة على ذلك، تم عرض معايير تضمن الإيجابية والاستقرار أثناء تقطيع النموذج المستمر-المتقطع. أخيراً، تم تحديد شروط المقبولية والتثبيت القوي للأنظمة المفردة ثنائية الأبعاد في الزمن المستمر-المتقطع باستخدام متراجحات المصفوفات الخطية الصارمة (LMIs). تكمل هذه الأعمال أمثلة عددية وتطبيقات عملية توضح النتائج التي تم الحصول عليها.

الكلمات المفتاحية: التحكم – الأنظمة المفردة – الأنظمة الجزئية – الأنظمة ثنائية الأبعاد – الأنظمة الإيجابية

Thèse préparé à : Université Abdelhamid Ibn Badis Mostaganem , ACSY
Team-Laboratory of Pure and Applied Mathematics, P.O.Box 227/118 , 27000
Mostaganem, Algeria

Bibliographie

- [1] M. Alfidi, A. Hmamed, *Control for stability and positivity of 2-D linear discrete-time systems*, WSEAS Transactions on Systems and Control, 02, No 12, 546-556, (2007).
- [2] M. Alfidi, A. Hmamed, F. Tadeo, A. Benzaouia, *Control with Positivity Constraint for 2D Continuous-Time Systems in Roesser Model*, Journal of Control, Automation and Electrical Systems **32**, 70-81, (2020).
- [3] M.H. Alshehri, F.Z. Duraihem, A. Alalyani, S. Saber, *A Caputo (discretization) fractional-order model of glucose-insulin interaction : numerical solution and comparisons with experimental data*, Journal of Taibah University for Science, 15, No 1 26-36, (2021).
- [4] RM. Asl, A. Madady, *Stabilization of two-dimensional mixed continuous-discrete-time systems via dynamic output feedback with application to iterative learning control design*, Transactions of the Institute of Measurement and Control, 1-16, (2021). <https://doi.org/10.1177/01423312211022205>
- [5] S. Attasi, *Systemes lineaires homogenes a deux indices*, IRIA rapport laboria, No 31, septembre (1973).
- [6] S. Attasi, *Modélisation et traitement des suites à deux indices*, IRIA rapport laboria, septembre (1975).
- [7] O. Bachelier, T. Cluzeau, F.J. Silva Alvarez, N. Yeganefar, *Stability of one-dimensioned spatially interconnected systems*, Multidimensional Systems and Signal Processing, 31 :1005-1028, (2020).<https://doi.org/10.1007/s11045-019-00695-y>
- [8] O. Bachelier, T. Cluzeau, D. Mehdi, N. Yeganefar, *New tests for the stability of 2-D Roesser models*, IEEE Transactions on Automatic Control, 66(1) : 406-412, (2021).<https://doi.org/10.1109/TAC.2020.2981344>
- [9] O. Bachelier, T. Cluzeau, *Transforming interconnected systems and ladder circuits into implicit 2D models*, IFAC-PapersOnLine, 55, No 30, 132-137, (2022).

- [10] Y. Bavafa-Toosi, *Introduction to Linear Control Systems*, Academic Press Elsevier Inc, (2017). <https://doi.org/10.1016/C2016-0-03896-2>
- [11] J. Bergmann, P. Burgmeir, P. Weiher, *Explicit controllability criteria for Goursat problems*, Optimization 20, No. 3, 281-290, (1989).
- [12] K. Benyettou, D. Bouagada, M. A. Ghezzar, *Solution of 2D state space continuous-time conformable fractional linear system using Laplace and Sumudu transform*, Computational Mathematics and Modeling 32, 94-109, (2021).
- [13] K. Benyettou, D. Bouagada, *Admissibility tests for multidimensional singular fractional continuous-time models*, Archives of Control Sciences 32, No 3 : 607-625, (2022).
- [14] A. Benzaouia, A. Hmamed, F. Tadeo, *Two-Dimensional Systems*, Studies in Systems, Decision and Control, (2016).
- [15] S. Boyd, L.El. Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM, (1994).
- [16] J. Bochniak, K. Galkowski, *LMI-Based analysis for continous-discrete linear shift-invariant nD systems*. Journal of Circuits, Systems, and Computers 14, No 2 : 307-332, (2005). <https://doi.org/10.1142/S0218126605002350>
- [17] D. Bouagada, *Systèmes Différentiels Singuliers Positifs et LMIs, thesis*, (2007).
- [18] D. Bouagada, P. Van Dooren, *On the stability of 2D state-space models*. Numer. Linear Algebra Appl 20, No. 2 : 198-207, (2011). <https://doi.org/10.1002/nla.836>
- [19] MS. Boudellioua, K. Galkowski, E. Rogers, *Characterization of a class of spatially interconnected systems (ladder circuits) using two-dimensional systems theory*. Multidimensional Systems and Signal Processing 30 :2185-2197, (2019). <https://doi.org/10.1007/s11045-019-00644-9>
- [20] CC. Cormos, L. Petrescu, AM. Cormos, *Assessment of Hydrogen Production Systems based on Natural Gas Conversion with Carbon Capture and Storage*, Proceedings of the 24th European Symposium on Computer Aided Process Engineering ESCAPE 24, Budapest, Hungary, (2014).
- [21] SF. Chen, *Stability analysis and stabilization of 2-D singular Roesser models*. Applied Mathematics and Computation 250 : 779-791, (2015). <https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.11.002>
- [22] M. Chaabane, O. Bachelier, D. Mehdi, M. Souissi, *Stability and stabilization of continuous descriptor systems : an LMI approach*. Mathematical Problems in Engineering, 1-15, (2006). <https://doi.org/10.1155/MPE/2006/39367>

- [23] R.J. Caverly, JR. Forbes, A. Cherifi, *LMI Properties and Applications in Systems, Stability, and Control Theory*. IarXiv preprint arXiv :1903.08599, (2019). <https://doi.org/10.48550/arXiv.1903.08599>
- [24] L. Dami, M. Benhayoun, A. Benzaouia, *Stabilization and positivity of 2D fractional order uncertain discrete-time systems*, 2017 14th International Multi-Conference on Systems, Signals and Devices (SSD), (2017).
- [25] L. Dami, M. Benhayoun, A. Benzaouia, *Stabilization of Positive 2D Fractional-Order Continuous-Time Systems with Delays*, Circuits, Systems, and Signal Processing **38**, 1962-1981 (2019).
- [26] L. Dami, M. Benhayoun, A. Benzaouia, *Admissibility and stabilization of singular continuous 2D systems described by Roesser model*. Multidimensional Systems and Signal Processing 31 : 673-687, (2020) . <https://doi.org/10.1007/s11045-019-00681-4>
- [27] L. Dami, M. Benhayoun, A. Benzaouia, *Robust stability and stabilization of singular 2D continuous systems with delays*. Proceedings of the 2021 9th International Conference on Systems and Control, Caen, France, 24-31, (2021). <https://doi.org/10.1109/ICSC50472.2021.9666684>
- [28] Z. Duan, I. Ghous, B. Wang, J. Shen, *Necessary and sufficient stability criterion and stabilization for positive 2-D continuous-time systems with multiple delays* , Asian Journal of Control **21**, No 4, 1-12, (2019).
- [29] A.O. Elosmani, D. Bouagada, P. Van Dooren, K. Benyettou, *LMI Stability Test for Multidimensional Linear State-Space Models*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 390, (2021). <https://doi.org/10.1016/j.cam.2020.113363>
- [30] M. Elloumi, M. Ghangui, D. Mehdi, F. Tadeo, M. Chaabane, *Stability and Stabilization of 2D Singular Systems : A Strict LMI Approach*. Circuits, Systems, and Signal Processing volume 38 : 3041-3057, (2019). <https://doi.org/10.1007/s00034-018-01019-4>
- [31] I. Errachid, A. Hmamed, *Stability and Robust Stabilization of 2-D Continuous Systems in Roesser Model Based on GKYP Lemma*. International Journal of Power Electronics and Drive Systems 8, No. 3 : 990-1001, (2017).
- [32] L. Farina, S. Rinaldi, *Positive Linear Systems : Theory and Applications*, New York. (2000).
- [33] E. Fornasini, G. Marchesini, *State-space realization theory of two-dimensional filters*, IEEE Trans. Comput, 21, No 4, 484-492, (1976).
- [34] E. Fornasini, G. Marchesini, *Doubly-indexed dynamical systems : State-space models and structural properties*. Mathematical systems theory 12 : 59-72, (1978). <https://doi.org/10.1007/BF01776566>

- [35] E. Fornasini, *A 2D systems approach to river pollution modelling*, Multidim. Sys. Sign. Proc., No 2, 233-265, (1991).
F. R. GANTMACHER : The theory of matrice , CHELSEA PUBLISHING COMPANY NEW YORK,N,Y
- [36] K. Galkowski, W. Pasake, B. Sulikowski, E. Rogers, DH. Owens, *LMI based Stability Analysis and Controller Design for a Class of 2 D Continuous-Discrete Linear Systems*. Proceedings of the American Control Conference, 29-34, (2002). <https://doi.org/10.1109/ACC.2002.1024775>
- [37] K. Galkowski, *A Perspective on Singularity in 2D Linear Systems*. Automatica 35 : 1613-1617, (1999). <https://doi.org/10.1023/A:1008438730274>
- [38] F. R. Gantmacher, *The theory of matrice*. Chelsea Publishing Company New York.
- [39] MA. Ghezzar, D. Bouagada, M. Chadli, *Influence of discretization step on positivity of a certain class of two-dimensional continuous-discrete fractional linear systems*. MA Journal of Mathematical Control and Information 35, No. 3 : 1-16, (2017). <https://doi.org/10.1093/imamci/dnx005>
- [40] M.A. Ghezzar , *Analyse et synthèse de certaines classe de Systèmes Bidimensionnels Fractionnaires et/ou Singuliers, thesis*, (2018).
- [41] MA. Ghezzar, D. Bouagada, K. Benyettou, M. Chadli, P. Van Dooren, *On the stability of 2D general Roesser Lyapunov systems*. Mathematica, No 1 : 85-97, (2021).
- [42] MA. Ghezzar, A. Berilha, K. Benyettou, D. Bouagada, *On the positivity of 2D fractional linear roesser model using the conformable derivative*, U.P.B. Sci. Bull., Series A, **85**, No 2 103-114, (2023).
- [43] D.D. Givone, R.P. Roesser, *Multidimensional linear iterative circuits general properties*, IEEE Trans. Comput, 20, 1067-1037, (1972).
- [44] É. Gyurkovics, G. Jank, *Instant controllability for Goursat problems*. Pure Mathematics and Applications 12, No. 1, 51-65, (2001).
- [45] J.P. Hespanha, *Linear systems theory*, Princeton university press, (2018).
- [46] A. Hmamed, M. Ait Rami, M. Alfid, *Controller synthesis for positive 2D systems described by the Roesser model*, Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control Cancun, Mexico, Dec, 9-11, (2008).
- [47] G. Jank, *Controllability, observability and optimal control of continuous-time 2-D systems*. Int. J. Appl. Math. Comput. Sci 12, No. 2, 181-195, (2002).
- [48] T. Kaczorek, *Two Dimensional Linear Systems*. Springer Verlag, (1985).

- [49] T. Kaczorek, *Singular 2-D continuous-discrete linear systems*. Bull. Pol. Acad. Techn. Sci 41, No. 1 : 1007-1009, (1994).
- [50] T. Kaczorek, *Local Controllability and Minimum Energy Control of Continuous 2-D Linear Systems with Variable Coefficients*. Multidimensional Systems and Signal Processing 6, 69-75, (1995).
- [51] T. Kaczorek, *Stabilization of Singular 2-D Continuous-Discrete Systems by State-Feedback Controllers*. IEEE Transactions on automatic control 41 No. 7 : 1007-1009, (1996). <https://doi.org/10.1109/9.508906>
- [52] T. Kaczorek, *Positive 1D and 2D systems*, Springer-Verlag, London, (2002).
- [53] T. Kaczorek, *Positive 2D hybrid linear systems*, Int. J. Appl. Math. Comput. Sci **55** , No. 4, 351-358, (2007).
- [54] T. Kaczorek, P. Przyborowski, *Positive Continuous-Time Linear Lyapunov Systems*, The International Conference on Computer as a Tool, Warsaw, September 9-12, (2007).
- [55] T. Kaczorek, *Positivity and stabilization of 2D linear systems* , Discussiones Mathematicae Differential Inclusions, Control and Optimization **29**, 85-92, (2009).
- [56] T. Kaczorek, *Positivity and stabilization of fractional 2D Roesser model by state-feedbacks, LMI approach*. Archives of Control Sciences, 19(2) : 165-177, (2009).
- [57] T. Kaczorek, K. Rogowski, *Positivity and stabilization of fractional 2D linear systems described by the Roesser model* , International Journal of Applied Mathematics and Computer Science **20**, No 1, 85-92, (2010).
- [58] T. Kaczorek, *Positive fractional 2D continuous-discrete linear systems*, Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Technical sciences, **59**, No 4 575-579, (2011).
- [59] T. Kaczorek, *Positive fractional 2D continuous-discrete linear systems*. Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Technical Sciences 59, No. 4, 575-579, (2011). <https://doi.org/10.2478/v10175-011-0071-5>
- [60] T. Kaczorek, *Selected Problems of Fractional Systems Theory*, Springer-Verlag, Berlin, (2012).
- [61] T. Kaczorek, *Minimum energy control of fractional positive continuous-time linear systems*. Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Technical Sciences 61, No. 4, 803-807, (2013). <https://doi.org/10.2478/bpasts-2013-0087>
- [62] T. Kaczorek, *Minimum energy control of positive 2D continuous-discrete linear systems with bounded inputs*. Archives of Control Sciences 25, No. 3, 319-331, (2015).
- [63] T. Kaczorek, K. Rogowski, *Fractional Linear Systems and Electrical Circuits*, Studies in Systems, Decision and Control, Springer International Publishing, Switzerland, (2015).

- [64] S. Marir, M. Chadli, D. Bouagada, *New Admissibility Conditions for Singular Linear Continuous-Time Fractional-Order Systems*. Journal of the Franklin Institute 354, No. 2, 752-766, (2017).
- [65] S. Marir, M. Chadli, D. Bouagada, *A Novel Approach of Admissibility for Singular Linear Continuous-Time Fractional-Order Systems*. International Journal of Control, Automation and Systems 15, 959-964, (2017).
- [66] W. Paszke, E. Rogers, K. Galkowski, *KYP lemma based stability and control law design for differential linear repetitive processes with applications*. Systems and Control Letters 62 : 560-566, (2013). <https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2013.03.010>
- [67] J.E. Piou, A.J. Dumanian, *Application of the Fornasini-Marchesini first model to data collected on a complex target model*, 2014 American Control Conference, 2279-2284, (2014).
- [68] V. Prepelita, T. Vasilache, *Minimal Invariant Subspaces and Reachability of 2D Hybrid LTI Systems*. Ann. Acad. Rom. Sci., Series Mathematics and Its Applications 5, No. 1-2, 281-290, (2013).
- [69] V. Prepelita, T. Vasilache, *Controllability and Grammian of 2D continuous time linear systems*. Ann. Acad. Rom. Sci. Ser. Math. Appl 12, No. 364-381, (2020).
- [70] P. Przyborowski, T. Kaczorek, *Positive 2D Discrete-Time Linear Lyapunov Systems*, Int. J. Appl. Math. Comput. Sci 19, No 1 95-105, (2009).
- [71] MA. Rami, F. Tadeo, *Linear programming approach to impose positiveness in closed-loop and estimated states*, Proceedings of the 17th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems, Kyoto, Japan, July, 24-28, (2006).
- [72] O. Rejichi, O. Bachelier, M. Chaabane, D. Mehdi, *Admissibility and State Feedback Admissibilization of Discrete Singular Systems : An LMI Approach*. 16th Mediterranean Conference on Control and Automation, 1023-1027, (2008). <https://doi.org/10.1109/MED2008.4602198>
- [73] RP. Roesser, *A Discrete State-Space Model for Linear Image Processing*. IEEE Transactions on Automatic Control 20, No. 1 : 1-10, (1975). <https://doi.org/10.1109/TAC.1975.1100844>
- [74] E. Rogers, DH. Owens, *Stability Analysis For Linear Repetitive Processes*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (1992).
- [75] K. Rogowski, *Positivity and stability of fractional 2D Lyapunov systems described by the Roesser model*, Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Technical sciences, 59, No 2 95-105, (2011).

- [76] K. Rogowski, *Positivity analysis of continuous 2D Fornasini-Marchesini fractional model*. International Symposium on Positive Systems : Theory and Applications (POSTA 2016) Rome, Italy, September 201-212, (2017). https://doi.org/10.1007/978-3-319-54211-9_16
- [77] L. Sajewski, *Reachability, observability and minimum energy control of fractional positive continuous-time linear systems with two different fractional orders*. Multidimensional Systems and Signal Processing 27, 27-41, (2014).
- [78] B. Sikora, *Controllability of time-delay fractional systems with and without constraints*. IET Control Theory and Applications 10, No. 3, 320-327, (2016).
- [79] B. Sikora, *New controllability criteria for fractional systems with varying delays*. *Theory and Applications of Non-integer Order*, Part of the Lecture Notes in Electrical Engineering book series (LNEE, volume 407), 333-344, (2016).
- [80] B. Sikora, J. Klamka, *Constrained controllability of fractional linear systems with delays in control*. Systems and Control Letters 106, 9-15, (2017).
- [81] B. Sikora, N. Matlok, *On controllability of fractional positive continuous-time linear systems with delay*. Archives of Control Sciences 31, No. 1, 29-51, (2021).
- [82] R. Skelton, T. Iwasaki, KM. Grigoriadis, *A unified algebraic approach to linear control design*. Taylor-Francis, (1998).
- [83] W. Su, MA. Dongxu, LU. Zhifei, J. Weixue, W. Feng, X. Zhang, *A novel absorption-based enclosed heat pump dryer with combining liquid desiccant dehumidification and mechanical vapor recompression : Case study and performance evaluation*, *Case Studies in Thermal Engineering*, 35, (2022). <https://doi.org/10.1016/j.csite.2022.102091>
- [84] B. Sulikowski, K. Galkowski, A. Kummert, *Robust Stability of Ladder Circuits from the 2D systems point of view*. 18th International Conference on Methods, Models in Automation, Robotics (MMAR), 13920153, (2013). <https://doi.org/10.1109/MMAR.2013.6669872>
- [85] L. Wang, W. Wang, J. Gao, W. Chen, *Stability and robust stabilization of 2-D continuous-discrete systems in Roesser model based on KYP lemma*. Multidimensional Systems and Signal Processing 28, No. 1 : 251-264, (2017). <https://doi.org/10.1007/s11045-015-0355-2>
- [86] L. Wang, W. Wang, J. Gao, W. Chen, *Stability and robust stabilization of 2-D continuous-discrete systems in Roesser model based on KYP lemma*. Multidim Syst Sign Process 28 : 251-264, (2015). <https://doi.org/10.1007/s11045-015-0355-2>
- [87] H. Xu, Y. Zou, S. Xu, J. Lam, *Bounded real lemma and robust H_∞ control of 2D singular Roesser models*. Syst. Control Lett 54, No 4 : 339-346, (2005).

- [88] S. Xu, C. Yang, *Stabilization of discrete-time singular systems : a matrix inequalities approach*. Automatica 35 : 1613-1617, (1999). [https://doi.org/10.1016/S0005-1098\(99\)00061-8](https://doi.org/10.1016/S0005-1098(99)00061-8)
- [89] S. Xu, J. Lam, *Robust control and filtering of singular systems*, Berlin : Springer 332, (2006).
- [90] Y. Zou, H. Xu, *Duality of 2-D singular systems of Roesser models*. Journal of Control Theory and Applications, No. 1 : 37-41, (2007). <https://doi.org/10.1007/s11768-004-4189-y>
- [91] Y. Zou, S.L. Cambell, *The Jump Behavior and Stability Analysis for 2-D Singular Systems*. Multidimensional Systems and Signal Processing 11, No. 4 : 321-338, (2000). <https://doi.org/10.1023/A:1008429611994>
- [92] Z. Zhu, JG. Lu, *Robust stability and stabilization of hybrid fractional-order multidimensional systems with interval uncertainties : An LMI approach*, Appl. Math. Comput 401 : 126075, (2021). <https://doi.org/10.1016/j.amc.2021.126075>
- [93] Z. Zhu, JG. Lu, *LMI-based stability conditions for continuous fractional-order two-dimensional Fornasini-Marchesini first model*. IEEE Transactions on Circuits and Systems II : Express Briefs 69(3) :1312-1316, (2022). <https://doi.org/10.1109/TCSII.2021.3105743>
- [94] Z. Zhu, JG. Lu, QH. Zhang, *LMI-Based Stability Analysis of Continuous-Discrete Fractional-Order 2D Roesser Model*, IEEE Transactions on Circuits and Systems II : Express Briefs 69(6) :2797-2801, (2022). doi : 10.1109/TCSII.2021.3131183
- [95] X. Zhu, J. Lu, *Fractional Multidimensional System*, arXiv preprint arXiv :1704.08427, 2017 - arxiv.org. doi : 10.48550/arXiv.1704.08427
- [96] JR. Zhang, JG. Lu, Z. Zhu, *Stability analysis and stabilisation of continuous-discrete fractional-order 2D Fornasini-Marchesini first model*. International Journal of Systems Science 54(2), (2023). 10.1080/00207721.2022.2122901
- [97] L. Zhou , H. Tao, W. Paszke, V. Stojanovic, H. Yang, *PD-Type Iterative Learning Control for Uncertain Spatially Interconnected Systems*. Mathematics 8 (9) : 1528, (2020). 10.1080/00207721.2022.2122901