

# THESE

Présentée pour obtenir

LE DIPLOME DE DOCTORAT LMD  
SPECIALITE : GENIE MECANIQUE  
OPTION : Modélisation, Simulation et Calculs Scientifiques Appliqués

Par

**BENBAKHTI ABDELDJALIL**

**Modélisation du comportement thermomécanique des plaques FGM  
(Functionally Graded Materials)**

Soutenue le

devant le jury composé de :

|                                |                     |            |                  |
|--------------------------------|---------------------|------------|------------------|
| <b>Président :</b>             | D. OUINAS           | Professeur | U-Mostaganem     |
| <b>Examineur :</b>             | E.A. ADDA BEDIA     | Professeur | U-Sidi Bel-Abbes |
|                                | Z. SEREIR           | Professeur | UST-Oran         |
|                                | R. YEGHNEM          | MCA        | U-Saida          |
| <b>Directeur de thèse :</b>    | M. BACHIR BOUIADJRA | MCA        | U-Sidi Bel-Abbes |
| <b>Co-directeur de thèse :</b> | N. RETIEL           | Professeur | U-Mostaganem     |
| <b>Invité :</b>                | A. TOUNSI           | Professeur | U-Sidi Bel-Abbes |

## Table des matières

**Remerciement**

**Liste des tableaux**

**Liste des figures**

**Liste des notations**

**Résumé**

**Abstract**

**ملخص**

**Introduction générale** 1

### **Chapitre I : Généralités Sur Les Matériaux fonctionnellement gradués**

**I.1.** Introduction 5

**I.2.** Généralité sur les matériaux avancés 6

**I.3.** Les matériaux composites 7

**I.4.** Les matériaux piézoélectriques 9

**I.5.** Les nanotubes de carbone 11

**I.6.** Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) 12

**I.7.** Conclusion 13

### **Chapitre II : Connaissance des technologies des matériaux fonctionnellement gradués**

**II.1.** Introduction 14

**II.2.** L'historique du développement des matériaux fonctionnellement gradués 15

**II.3.** Les propriétés matérielles des plaques FGM 17

**II.3.1.** Loi de mélange en puissance (P-FGM) 18

**II.3.2.** Loi de mélange exponentielle (E-FGM) 19

**II.3.3.** Loi de mélange sigmoïde (S-FGM) 20

**II.3.4.** Modèle de Mori-Tanaka 21

**II.3.5.** Modèle auto-cohérent de Hill 23

**II.4.** Les propriétés thermiques des plaques FGM 25

**II.4.1.** Variation constante et linéaire 25

**II.4.2.** Equation de conduction thermique 25

**II.4.3.** Distribution polynomiale 26

**II.5.** Techniques de fabrication des matériaux fonctionnellement gradués (FGM) 26

**II.5.1.** La métallurgie des poudres (Powder metallurgy) 27

**II.5.2.** La compaction sèche des poudres 27

|   |   |    |
|---|---|----|
| <b>II.5.3.</b>  | Le coulage centrifuge (Centrifugal casting)                                 | 28 |
| <b>II.5.4.</b>  | Le coulage par barbotine (Slip casting)                                     | 29 |
| <b>II.5.5.</b>  | Le coulage en bande (Tape Casting)  | 29 |
| <b>II.5.6.</b>  | Le frittage (Sintering)   | 30 |
| <b>II.5.7.</b>  | La projection plasma (Plasma projection)                                    | 30 |
| <b>II.6.</b>  | Les branches d'applications des matériaux fonctionnellement gradués (FGM)   | 31 |
| <b>II.6.1.</b>  | L'aérospatiale  | 31 |
| <b>II.6.2.</b>  | La médecine   | 31 |
| <b>II.6.3.</b>  | L'électronique  | 32 |
| <b>II.6.4.</b>  | L'énergie   | 32 |
| <b>II.6.5.</b>  | L'automobile  | 32 |
| <b>II.6.6.</b>  | La défense  | 32 |
| <b>II.6.7.</b>  | Outils de coupe   | 32 |
| <b>II.7.</b>  | Conclusion  | 34 |
| <b>Chapitre III : Revue générale sur les théories de déformation des plaques fonctionnellement graduées</b>                                       |   |    |
| <b>III.1.</b>   | Introduction  | 35 |
| <b>III.2.</b>   | Définition d'une plaque   | 36 |
| <b>III.3.</b>   | Les théories d'élasticité tridimensionnelle (3-D)                           | 37 |
| <b>III.4.</b>   | Les théories des plaques monocouches 'ESL'                                  | 39 |
| <b>III.4.1.</b>   | La théorie classique des plaques de Love-Kirchhoff (CPT)                    | 39 |
| <b>III.4.2.</b>   | La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)           | 40 |
| <b>III.4.3.</b>   | La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)              | 42 |
| <b>III.4.4.</b>   | La théorie raffinée de déformation des plaques (RPT)                        | 45 |
| <b>III.4.5.</b>   | La théorie de déformation des plaques quasi-3D                              | 46 |
| <b>III.5.</b>   | Conclusion  | 47 |
| <b>Chapitre IV : Formulations théoriques de l'Analyse thermomécanique des plaques sandwich en FGM en utilisant une nouvelle théorie quasi 3-D</b> |   |    |
| <b>IV.1.</b>  | Introduction  | 48 |
| <b>IV.2.</b>  | Revue des travaux d'analyse des plaques sandwich fonctionnellement graduées | 49 |
| <b>IV.3.</b>  | Formulation théorique   | 52 |
| <b>IV.3.1.</b>  | Hypothèses de base pour la présente théorie                                 | 52 |
| <b>IV.3.2.</b>  | Configuration géométrique   | 53 |

|  |    |
|--|----|
| <b>IV.3.3.</b> Propriétés matérielles des plaques sandwiches en FGM  | 54 |
| <b>IV.4.</b> Cinématique et équations constitutives  | 57 |
| <b>IV.4.1.</b> Champs de déplacement   | 57 |
| <b>IV.4.2.</b> Champs de déformation   | 58 |
| <b>IV.4.3.</b> Les équations constitutives   | 59 |
| <b>IV.4.4.</b> Détermination des équations d'équilibre   | 60 |
| <b>IV.4.5.</b> Les équations gouvernantes de la plaque   | 62 |
| <b>IV.5.</b> Solution exacte pour une plaque sandwich en FGM simplement appuyée  | 64 |
| <b>IV.6.</b> Conclusion  | 66 |
| <b>Chapitre V : Résultats et discussion de l'analyse thermomécanique des plaques sandwich en FGM en utilisant une nouvelle théorie quasi 3-D</b> |    |
| <b>V.1.</b> Introduction   | 67 |
| <b>V.2.</b> Résultats numériques et discussions  | 68 |
| <b>V.2.1.</b> La flèche maximale adimensionnelle   | 69 |
| <b>V.2.2.</b> La contrainte axiale adimensionnelle   | 76 |
| <b>V.2.3.</b> La contrainte de cisaillement transversal  | 79 |
| <b>V.3.</b> Conclusion   | 83 |
| <b>Conclusion générale</b>   | 84 |
| <b>Références bibliographiques</b>   | 86 |

## Liste des tableaux

### Chapitre II : Connaissance des technologies des matériaux fonctionnellement gradués

|                      |  |    |
|----------------------|--|----|
| <b>Tableau II.1.</b> | Caractéristiques des différentes couches des matériaux FGM           | 15 |
| <b>Tableau II.2.</b> | Propriétés mécaniques des céramiques et métaux utilisés dans les FGM | 24 |
| <b>Tableau II.3.</b> | Les propriétés des FGM et leurs applications significatives          | 33 |

### Chapitre III : Revue générale sur les théories de déformation des plaques fonctionnellement graduées

|                       |   |    |
|-----------------------|---|----|
| <b>Tableau III.1.</b> | Différentes fonctions de forme des théories HSDT pour des plaques FGM | 45 |
|-----------------------|---|----|

### Chapitre V : Résultats et discussion de l'analyse thermomécanique des plaques sandwich en FGM en utilisant une nouvelle théorie quasi 3-D

|                     |   |    |
|---------------------|---|----|
| <b>Tableau V.1.</b> | Les propriétés matérielles utilisées pour la plaque sandwich en FGM   | 68 |
| <b>Tableau V.2.</b> | Comparaison de la flèche maximale adimensionnelle $\bar{w}$ pour des différentes plaques sandwiches en FGM ( $t_1 = 0, q_0 = t_2 = t_3 = 100$ et $a/h = 10$ )                       | 70 |
| <b>Tableau V.3.</b> | La flèche adimensionnelle $\bar{w}$ pour des différentes plaques sandwiches fonctionnellement graduées ( $q_0 = t_1 = t_3 = 0, t_2 = 100$ et $a/h = 10$ )                           | 71 |
| <b>Tableau V.4.</b> | Effet du rapport d'aspect géométrique de la plaque « $a/b$ » sur la flèche maximale $\bar{w}$ des plaques sandwiches en FGM ( $q_0 = t_1 = t_3 = 0, t_2 = 100$ )                    | 72 |
| <b>Tableau V.5.</b> | La contrainte axiale adimensionnelle $\bar{\sigma}_x$ pour des différentes plaques sandwiches carrées fonctionnellement graduées ( $q_0 = t_1 = t_3 = 0, t_2 = 100$ et $a/h = 10$ ) | 77 |

## Liste des figures

### Chapitre I : Généralités Sur Les Matériaux fonctionnellement gradués

|                    |  |    |
|--------------------|--|----|
| <b>Figure I.1.</b> | Matériau composite stratifié                                     | 8  |
| <b>Figure I.2.</b> | Matériau composite sandwich                                      | 9  |
| <b>Figure I.3.</b> | Les matériaux piézoélectriques                                   | 11 |
| <b>Figure I.4.</b> | Les nanotubes de carbone   | 12 |
| <b>Figure I.5.</b> | Protection thermique des : a-Matériaux composite b-Matériaux FGM | 13 |

### Chapitre II : Connaissance des technologies des matériaux fonctionnellement gradués

|                      |   |    |
|----------------------|---|----|
| <b>Figure II.1.</b>  | Concept des matériaux fonctionnellement gradués (FGM)       | 15 |
| <b>Figure II.2.</b>  | Géométrie d'une plaque fonctionnellement graduées (FGM).    | 18 |
| <b>Figure II.3.</b>  | Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.   | 17 |
| <b>Figure II.4.</b>  | Variation du module de Young dans une plaque E-FGM          | 20 |
| <b>Figure II.5.</b>  | Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.   | 21 |
| <b>Figure II.6.</b>  | Matériau FGM à deux phases avec microstructure particulaire | 22 |
| <b>Figure II.7.</b>  | Matériau FGM à deux phases avec microstructure squelettique | 23 |
| <b>Figure II.8.</b>  | Le coulage centrifuge des poudres mixtes                    | 28 |
| <b>Figure II.9.</b>  | Principe du coulage par barbotine                           | 29 |
| <b>Figure II.10.</b> | Principe du coulage en bande                                | 30 |
| <b>Figure II.11.</b> | Fabrication d'une plaque FGM avec la projection plasma      | 31 |

### Chapitre III : Revue générale sur les théories de déformation des plaques fonctionnellement graduées

|                      |  |    |
|----------------------|--|----|
| <b>Figure III.1.</b> | Exemple de plaque d'une géométrie quelconque                             | 37 |
| <b>Figure III.2.</b> | Schématisation des déformations des plaques par la théorie classique CPT | 40 |
| <b>Figure III.3.</b> | Schématisation des déformations des plaques par la théorie FSDT          | 41 |
| <b>Figure III.4.</b> | Schématisation des déformations des plaques par la théorie HSDT          | 42 |

### Chapitre IV : Formulations théoriques de l'Analyse thermomécanique des plaques sandwich en FGM en utilisant une nouvelle théorie quasi 3-D

|                     |  |    |
|---------------------|--|----|
| <b>Figure IV.1.</b> | Géométrie d'une plaque sandwich en FGM   | 54 |
| <b>Figure IV.2.</b> | Variation des propriétés matérielles à travers l'épaisseur d'une plaque sandwich en FGM  | 54 |
| <b>Figure IV.3.</b> | Variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur de la plaque pour les différentes valeurs de $\nu$ d'une plaques sandwiches type B. | 56 |

|  |   |    |
|--|---|----|
| <b>Figure IV.4.</b>  | Variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur de la plaque pour les différentes valeurs de $d$ d'une plaques sandwiches type C   | 57 |
| <b>Chapitre V : Résultats et discussion de l'analyse thermomécanique des plaques sandwich en FGM en utilisant une nouvelle théorie quasi 3-D</b> |   |    |
| <b>Figure V.1.</b>   | Influence des charges mécaniques et thermiques sur la flèche maximale adimensionnelle $\bar{w}$ par rapport au rapport d'aspect géométrique $a/b$ de la plaque sandwich en FGM ( $t_{\text{FGM}}/h = 0.2, k = 3$ )                      | 73 |
| <b>Figure V.2.</b>   | L'effet du rapport d'aspect géométrique $a/b$ sur la flèche maximale adimensionnelle $\bar{w}$ de la plaque sandwich en FGM ( $t_{\text{FGM}}/h = 0.2, t_1 = 0, q_0 = t_2 = t_3 = 100$ )  | 74 |
| <b>Figure V.3.</b>   | L'effet du rapport largeur/épaisseur $a/h$ sur la flèche maximale adimensionnelle $\bar{w}$ pour une plaque sandwich carrée fonctionnellement graduée sous des charges mécaniques et thermiques ( $t_{\text{FGM}}/h = 0.2, k = 3$ )     | 75 |
| <b>Figure V.4.</b>   | La variation de la flèche maximale adimensionnelle $\bar{w}$ en fonction du rapport largeur/épaisseur $a/h$ pour des plaques sandwiches carrées en FGM ( $t_{\text{FGM}}/h = 0.2, t_1 = 0, q_0 = t_2 = t_3 = 100$ )                     | 76 |
| <b>Figure V.5.</b>   | La variation de la contrainte axiale adimensionnelle $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur de la plaque sandwich carrées en FGM ( $t_{\text{FGM}}/h = 0.2, t_1 = 0, q_0 = t_2 = t_3 = 100$ ).  | 78 |
| <b>Figure V.6.</b>   | Influence des charges mécaniques et thermiques sur la contrainte axiale adimensionnelle $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur de la plaque sandwich carrée en FGM ( $t_{\text{FGM}}/h = 0.2, k = 3$ ).                                 | 79 |
| <b>Figure V.7.</b>   | Influence des charges mécaniques et thermiques sur la contrainte de cisaillement transversal adimensionnelle $\bar{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur de la plaque sandwich carrée en FGM ( $t_{\text{FGM}}/h = 0.2, k = 3$ )            | 81 |
| <b>Figure V.8.</b>   | La variation de la contrainte de cisaillement transversal adimensionnelle $\bar{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur de la plaque sandwich carrées fonctionnellement graduées ( $t_{\text{FGM}}/h = 0.2, t_1 = 0, q_0 = t_2 = t_3 = 100$ ) | 82 |

## Liste des notations

|                        |  |
|------------------------|--|
| $E(z)$                 | Module de Young en fonction de « z »                                   |
| $E_m$                  | Module de Young du métal   |
| $E_c$                  | Module de Young de céramique   |
| $G(z)$                 | Module de cisaillement en fonction de « z »                            |
| $\nu(z)$               | Coefficient de Poisson en fonction de « z »                            |
| $\nu$                  | Coefficient de Poisson   |
| $\rho(z)$              | La densité du matériau en fonction de « z »                            |
| $\rho_m$               | La densité du métal  |
| $\rho_c$               | La densité du métal  |
| $V(z)$                 | Fraction volumique   |
| $\lambda(z), \mu(z)$   | Coefficients de Lamé   |
| $k$                    | Paramètre du matériau  |
| $a$                    | Longueur de la plaque  |
| $b$                    | Largeur de la plaque   |
| $h$                    | Épaisseur de la plaque   |
| $u_0, v_0, w_0$        | Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque |
| $u_b, v_b, w_b$        | Les composantes du champ de déplacement de flexion                     |
| $u_s, v_s, w_s$        | Les composantes du champ de déplacement de cisaillement                |
| $u, v, w$              | Les déplacements dans les directions $x, y, z$ .                       |
| $\varphi_x, \varphi_y$ | Les rotations autour des axes $x$ et $y$                               |

## Liste des notations

---

|  |   |
|--|---|
| $f(z)$   | Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse) |
| $\Psi(z)$  | Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse) |
| $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$                                     | Contraintes normales  |
| $\tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{xy}$                                  | Contraintes de cisaillement                                     |
| $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$                      | Déformation dans la direction x, y et z                         |
| $\gamma_{xz}, \gamma_{yz}, \gamma_{xy}$                            | Déformations de distorsion                                      |
| $\delta u, \delta v, \delta w$                                     | Champ virtuel de déplacement                                    |
| $\delta U$   | Variation de l'énergie de déformation                           |
| $\delta K$   | Variation de l'énergie potentielle                              |
| $\delta T$   | Variation de l'énergie cinétique.                               |
| $\delta \varepsilon_x, \delta \varepsilon_y, \delta \varepsilon_z$ | Champ de déformation longitudinal virtuel                       |
| $\delta \gamma_{xz}, \delta \gamma_{yz}$                           | Champ de déformation transversal virtuel                        |
| $N_x, N_y, N_{xy}$   | Efforts normaux   |
| $M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b$   | Moments de flexion  |
| $M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s$   | Moment supplémentaire du au cisaillement transverse             |
| $S_{xz}^s, S_{yz}^s$   | Effort de cisaillement  |
| $\partial$   | Dérivée partielle   |
| $i, j, l \text{ et } m$  | Des nombres naturels  |
| $\int \theta(x, y) dx, \int \theta(x, y) dy$                       | Les variables intégrales indéterminées                          |
| $k_1, k_2$   | Les coefficients dépendant de la géométrie des plaques          |
| $q(x, y)$  | Charge transversale   |
| $(I_i, J_i, K_i, J_i^s)$   | Inerties de masse   |

## Liste des notations

---

|                |   |
|----------------|---|
| $A_{ij}$       | Termes de rigidité en membrane de la plaque     |
| $B_{ij}$       | Termes de rigidité de couplage de la plaque     |
| $D_{ij}$       | Termes de rigidité de flexion de la plaque      |
| $A_{ij}^s$     | Termes de rigidité de la plaque en cisaillement |
| $B_{ij}^s$     | Termes de rigidité de la plaque en cisaillement |
| $D_{ij}^s$     | Termes de rigidité de la plaque en cisaillement |
| $H_{ij}^s$     | Termes de rigidité de la plaque en cisaillement |
| $\{ \}$        | Vecteur colonne                                 |
| $[ ]$          | Matrice   |
| $T(x, y, z)$   | Chargement thermique                            |
| $\{ \Delta \}$ | Le vecteur des déplacements généralisés         |
| $\{ f \}$      | Le vecteur des efforts généralisés              |



# REMERCIEMENT



# Remercîment

Cette thèse conclue quatre ans de travaux réalisés au sein du Laboratoire des Structures et des Matériaux Avancés en Génie Civil et Travaux Publics « LSMAGCTP » de l'Université Djillali Liabès, Sidi Bel Abbes en collaboration avec le Laboratoire de Modélisation Numérique et Expérimentale des Phénomènes Mécaniques « LMNEPM » de l'Université Abdelhamid Ibn Badis, Mostaganem.

Tout d'abord, Je tiens à remercier chaleureusement Mon directeur de thèse, Docteur BACHIR BOUIADJRA Mohamed Maître de conférences classe A à l'université Djillali Liabès, Sidi Bel Abbes qui m'at accueilli au sein de son laboratoire et il a su me supporter et m'encourager durant toute cette période. Je tiens à lui exprimer ma gratitude pour ses conseils et son soutien, sa patience, sa disponibilité, sa générosité et sa grande compétence qui m'ont beaucoup aidé à surmonter les obstacles. Monsieur je vous suis très reconnaissant

Je remercie vivement mon co-directeur de thèse, le Professeur Nouredine RETIEL de l'Université Abdelhamid Ibn Badis, Mostaganem qui s'est montré très disponible et à l'écoute de mes idées et mes questions et d'avoir la gentillesse d'apporter généreusement son aide.

J'adresse mes plus vifs remerciements au Professeur Abdelwahed TOUNSI du Laboratoire des Matériaux et Hydrologie « LMH » de l'Université Djillali Liabès, Sidi Bel Abbes pour son aide précieuse, sa disponibilité et pour la sincérité de nos rapports.

Je suis très honoré de la présence dans ce jury des professeurs E.A. ADDA BEDIA directeur du Laboratoire des Matériaux et Hydrologie « LMH » de l'Université Djillali Liabès, Sidi Bel Abbes et Z. SERRIER directeur du Laboratoire Structure de Composite et Innovants de l'Université des Science et de la Technologie d'Oran et du Docteur R. YEGHNEM Maître de conférences classe A à l'Université Moulay Tahar, SAIDA.

Je voudrais remercier aussi le Professeur Djamel OUIINAS de l'Université Abdelhamid Ibn Badis, Mostaganem, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider cet honorable jury.

Merci à toute ma famille, Mon frère ma petite sœur, à mes amis mes collègues et tous ceux qui compte énormément pour moi.

Finalement je ne remercierai jamais assez mes très chers parents qui ont su m'entouré de tout leur amour, leur affectation fessant de moi ce que je suis maintenant, merci pour tout. J'espère que vous serrez toujours fières de moi, et je vous dédie ce travail.



# RÉSUMÉ

# Résumé

L'intérêt de cette thèse est d'analyser le comportement mécanique des plaques épaisses fonctionnellement graduées dans un environnement thermique. De ce fait, ce travail étudie une analyse de la flexion thermomécanique des plaques sandwiches fonctionnellement graduées en proposant une nouvelle théorie de déformation de cisaillement à ordre élevée de type quasi-3D. Le modèle mathématique introduit seulement cinq variables comme pour la théorie de déformation de cisaillement de premier ordre (FSDT). Contrairement aux théories de déformations à ordre élevé (HSDT) conventionnelle. La présente conception adopte un nouveau champ de déplacement qui comprend des variables intégrales indéterminées. Les propriétés mécaniques des couches fonctionnellement graduées de la plaque sont supposées changer dans la direction de l'épaisseur selon une distribution de loi de puissance (P-FGM). La couche centrale est homogène et elle est constituée d'un matériau purement céramique isotrope. Les équations qui gouvernent le comportement en flexion thermomécanique sont obtenues par le principe du travail virtuel et elles sont résolues par la solution de Navier. Des résultats obtenus sont ensuite comparés à d'autres dans la littérature. Des études paramétriques sont ainsi élaborées pour voir l'influence des caractéristiques et géométrique et mécanique notamment : l'épaisseur de la couche du matériau fonctionnellement gradué (FGM), de l'indice de loi de puissance, de l'indice matériel et du rapport (largeur, longueur) / épaisseur de la plaque sur la flèche et les contraintes des plaques épaisses.

**Mots-clés :** Matériaux fonctionnellement gradués, les théories de déformation des plaques, le comportement thermomécanique, modélisation analytique, les plaques épaisses.



# **ABSTRACT**



# Abstract

The aim of this thesis is to analyze the mechanical behavior of thick plates functionally graduated in a thermal environment. Therefore, this work investigates a thermomechanical bending analysis of functionally graded sandwich plates by proposing a new quasi-3D type. The mathematical model introduces only five variables as for the first order shear deformation theory (FSDT). Contrary to conventional high-order deformation theories (HSDT). The present model adopts a new field of displacement which includes indeterminate integral variables. The mechanical properties of the functionally graduated layers of the plate are assumed to change in the direction of thickness according to a power law distribution (P-FGM). The core layer is homogeneous and made of an isotropic ceramic material. The governing equations for the thermomechanical bending investigation are obtained through the principle of virtual work and solved via Navier-type method. Interesting results are then compared with others in the literature. Parametric studies are thus elaborated to see the influence of the characteristics geometric and mechanical in particular: thickness of the layer of the functionally graduated material (FGM), power law index, material index and ratio (Width, length) / thickness of the plate on the boom and the stresses of the thick plates.

**Keywords :** Functionally graded material, plates deformation theories, thermomechanical behavior, analytical modeling, thick plates.

# ملخص

## ملخص

الهدف من هذه أطروحة هو تحليل السلوك الميكانيكي للوحات سميكة ذات الخصائص المتغيرة تدريجيا في بيئة حرارية. لذلك، هذا العمل يحقق في تحليل الانحناء الميكانيكية الحرارية من لوحات ساندويتش متدرجة وظيفيا من خلال اقتراح (FSDT) نموذج رياضي يقدم المتغيرات خمسة فقط مثل نظرية الدرجة الأولى لتشوه القصي. D.نظرية نوع شبه 3 النموذج الحالي يعتمد حقل جديد من النزوح التي تشمل المتغيرات (HSDT) وعلى عكس النظريات ذات الترتيب العالي متكاملة غير محددة. ويفترض أن الخواص الميكانيكية للطبقات متدرجة وظيفيا من لوحة إلى تغيير في اتجاه سماكة وفقا الطبقة الأساسية هي متجانسة والمصنوعة من مادة السيراميك . ويتم الحصول على المعادلات (P-FGM) لتوزيع اسي التي تحكم لتحقيق الانحناء الميكانيكية الحرارية من خلال مبدأ العمل الظاهري وحلها عن طريق حلول نافير . نتائج مثيرة للاهتمام ثم يتم مقارنة مع الآخرين . وبالتالي بلورة دراسات حدودي لمعرفة تأثير الخصائص الهندسية والميكانيكية على ومؤشر سلطة القانون، مؤشر المواد، (FGM) وجه الخصوص: سمك طبقة من مادة ذات الخصائص المتغيرة تدريجيا ونسبة (العرض، طول) / سمك لوحة على انحناء والضغوط لوحات سميكة

**الكلمات المفتاحية:** المواد ذات الخصائص المتغيرة تدريجيا، النظريات تشوه لوحات، السلوك الميكانيكي الحراري  
النمذجة التحليلية ، لوحات سميكة



# INTRODUCTION GÉNÉRALE



## Introduction générale

Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) sont des nouveaux matériaux composites avancés leur spécificité c'est la variation continue de leurs propriétés matérielles d'une surface à une autre. Ces matériaux peuvent être fabriqués en variant le pourcentage des constituants de deux matériaux ou plus pour avoir une propriété graduée suivant la direction spatiale désirée. La gradation dans les propriétés des matériaux réduit les contraintes thermiques, les contraintes résiduelles et les facteurs de concentration de contrainte trouvés dans les composites stratifiés. Les FGM ont acquis une application généralisée comme structures de barrière thermique, contre l'usure et comme revêtements résistant à la corrosion autres que le collage de matériaux différents. Le concept des matériaux fonctionnellement gradués a été proposé par le japonais M. Niino et ses collègues [1] en les utilisant comme matériaux de barrière thermique pour les structures aérospatiales et les réacteurs nucléaires.

Les plaques fonctionnellement graduées (FGM) sont largement utilisées dans diverses branches de l'ingénierie telles que la mécanique, l'aérospatiale, la chimie, l'électricité, etc. Les avantages des structures FGM présentent une résistance thermique élevée et un changement graduel des caractéristiques du matériau le long du sens choisi. Pour une conception des plaques FGM utilisées dans un environnement à haute température, les contraintes thermomécaniques et les déflexions sont des paramètres importants à prendre en compte.

Depuis les années 80 du dernier siècle beaucoup de chercheurs se sont intéressés aux plaques fonctionnellement graduées (FGM), et plusieurs théories de plaques ont été proposées, à cet égard la théorie classique des plaques (CPT), c'est une théorie qui se base sur les hypothèses de Kirchoff [2] elle néglige donc l'effet de la déformation de cisaillement transversal, néanmoins elle fournit des résultats raisonnables pour les plaques minces. Il a été constaté aussi l'apparition de nombreuses théories de plaque de déformation de cisaillement qui représentent les effets de déformation de cisaillement transversal. La théorie de Reissner [3] ou Mindlin [4] est connue comme la théorie de déformation de cisaillement de premier ordre (FSDT), elle prend en compte l'effet de cisaillement transversal par le moyen d'une variation linéaire du déplacement dans le plan à travers l'épaisseur.

Bien que la FSDT fournit un résultat suffisamment précis pour les plaques minces et modérément épaisses, mais son utilisation n'est aussi assez pratique à cause de la difficulté de la détermination de la valeur correcte du facteur de correction de cisaillement. Afin d'éviter l'utilisation du facteur de correction de cisaillement, de nombreuses théories de déformation de cisaillement de plaques à ordre élevé ont été élaborées, comme la théorie de déformation de cisaillement de plaque du troisième ordre (TSDT) de Reddy [5], la théorie de plaque de déformation de cisaillement sinusoïdale (SSDT) [6] et la théorie de plaque de déformation de cisaillement exponentielle (ESDT) [7].

De nombreuses théories d'ordre élevé HSDT ont été proposées au cours des dernières années pour l'étude d'éléments structuraux. Ces modèles peuvent être divisés en deux groupes selon un simple critère : les théories d'ordre élevé sans influence d'étirement d'épaisseur et des théories avec influence d'étirement d'épaisseur autrement appelé les théories quasi 3-D. Lorsqu'un modèle introduit l'effet d'étirement de l'épaisseur, le déplacement transversal est supposé dépendant des coordonnées d'épaisseur obéissant à la recommandation de Koiter [8].

L'effet d'étirement qui s'étend sur l'épaisseur de la plaque FGM a été étudié par Reddy et Chen [9], ils ont présenté un modèle 3D pour une plaque FG soumise à des charges mécaniques et thermiques, appliquées toutes les deux au sommet de la plaque FG., Xiang et al. [10] ont examiné le comportement en flexion de plaques sandwich soumises à des charges mécaniques en utilisant plusieurs théories HSDT. Cetkovic et Vuksanovic [11] ont utilisé un modèle généralisé en couches pour étudier les plaques sandwich sous des charges mécaniques. Ce modèle considère la variation transversale des composantes de déplacement dans le plan en termes d'éléments finis lagrangiens linéaires. Natarajan et Manickam [12] ont utilisé un élément de plaque quadrangulaire avec 13 degrés de liberté par nœud basé sur un modèle HSDT pour examiner la réponse de flexion des plaques sandwich en FGM.

Grover et al. [13] ont proposé une nouvelle théorie de déformation du cisaillement hyperbolique inverse pour le comportement de flexion et de flambement des plaques sandwichs, en considérant un champ de déplacement avec cinq variables sans effet d'étirement de l'épaisseur. Houari et al. [14] ont étudié les plaques sandwich FGM sous des charges thermiques en employant un modèle HSDT avec une influence d'étirement d'épaisseur. Tounsi et al. [15] ont proposé une analyse de flexion des plaques sandwich avec un noyau FGM basé sur un HSDT raffiné. Saidi et al. [16] ont étudié la réponse de flexion thermomécanique des plaques sandwichs FGM en considérant un champ de déplacement ayant 6 variables avec un effet d'étirement d'épaisseur.

Sobhy [17] a analysé la stabilité et la réponse dynamique de plaques sandwich graduées exponentiellement reposant sur des fondations élastiques sous diverses conditions aux limites. A l'aide d'une théorie raffinée de déformation de cisaillement des plaques à quatre variables Bachir Bouiadjra et al. [18] ont pu étudié le flambement thermique des plaques fonctionnellement graduées. Hamidi et al. [19] ont proposé une théorie des plaques sinusoïdales à 5 variables et un effet d'étirement pour la flexion thermomécanique de plaques sandwiches FGM. Bouguenina et al. [20] ont présenté une analyse numérique des plaques fonctionnellement graduées à épaisseur variable soumises à un flambement thermique. Kar et Panda [21] ont étudié la réponse de flexion de déformation importante de la coquille sphérique FGM en utilisant la MEF. Récemment, Houari et al. [22] ont proposé une nouvelle théorie simple de déformation à cisaillement sinusoïdal à trois inconnues pour les plaques fonctionnellement graduées.

On peut trouver dans la littérature de nombreux modèles qui introduisent l'influence d'étirement de l'épaisseur pour examiner la réponse de flexion, de vibration et de flambement des structures monocouches et sandwich fonctionnellement graduées soumises à une charge thermique et / ou mécanique Carrera et al. [23], Belabed et al. [24], Hebali et al. [25], Larbi Chaht et al. [26] et Ould Larbi et al. [27]

L'objectif de notre travail est d'étudier le comportement thermomécanique des plaque sandwich fonctionnellement graduées FGM en élaborant un modèle mathématique en utilisant une nouvelle théorie quasi 3-D qui prend en considération l'effet d'étirement de l'épaisseur. Seulement cinq inconnues des fonctions de déplacement sont utilisées dans la présente théorie contre six ou plusieurs fonctions de déplacement inconnu utilisé dans les autres théories conventionnelles. Pour atteindre cet objectif, notre thèse s'articulera autour de quatre chapitres.

Un premier chapitre présente l'évolution des matériaux avancés depuis les premiers alliages apparus à l'âge de bronze aux nouveaux matériaux fonctionnellement graduées récemment présentées passant par les matériaux piézoélectriques et les nanotubes de carbone.

Un deuxième chapitre illustre d'une manière synthétique les matériaux à gradient de propriétés, l'historique de leur développement et leurs évolutions, leurs méthodes de fabrication, leurs différentes propriétés, ainsi que leurs domaines d'application.

Le troisième chapitre détaille les formulations théoriques du modèle proposé des plaques sandwich en FGM. Ce modèle est basé sur une théorie quasi 3-D de déformation de cisaillement pour l'analyse du comportement statique des plaques sandwich en FGM sous un chargement thermomécanique.

Le dernier chapitre sera consacré à la validation du modèle proposé à travers quelques études paramétriques connus de la littérature ainsi qu'à la présentation des résultats numériques de l'analyse du comportement thermomécanique en flexion des plaques sandwiches fonctionnellement graduées (FGM) tout en les comparant avec les résultats trouvés à l'aide des théories conventionnelles

Une conclusion générale clôture l'ensemble de ces travaux permettant ainsi de revenir sur les résultats importants mis en avant. C'est aussi l'occasion d'évoquer les diverses perspectives dans le cadre de l'étude des effets des différents types de chargement sur le comportement mécanique des structures en matériaux à gradient de propriétés.



# **CHAPITRE I :**

## **GÉNÉRALITÉS SUR LES MATÉRIAUX AVANCÉS**



# Chapitre I : Généralités sur les matériaux avancés

## I.1. Introduction

Avec le développement et le progrès scientifique que connaît le monde l'utilisation des métaux dans leurs états purs deviennent de plus en plus désavantageuse, par exemple dans le domaine de la construction on aurait besoin de matériaux qui soient à la fois ductiles et dure en temps et vu que c'était impossible d'en trouver un dans la nature on était obligé de combiner un élément métallique avec un ou plusieurs autres éléments chimiques par une fusion thermique comme le Bronze « alliage de cuivre et l'étain, » qui a été le premier alliage apparu dans l'histoire de l'humanité [28]. Le bronze a vraiment eu un impact sur le monde à cette époque marquant ainsi l'histoire humaine d'où l'appellation « l'Âge du bronze » vers 4000 av. J.-C. [28] Depuis, l'homme n'a cessé de développer ces alliages pour améliorer leurs propriétés. Mais il y a une limite à laquelle une matière peut être dissoute dans une autre à savoir la limite d'équilibre thermodynamique [29].

La métallurgie en poudre est une autre méthode de production des pièces qui ne peuvent pas être produit par l'alliage conventionnel, car les alliages sont Produits sous forme de poudre et certains problèmes associés à l'alliage classique sont surmontés. Malgré les excellentes caractéristiques des poudres métallurgiques il existe quelques limitations pour réaliser quelques formes et des caractéristiques intrinsèques de ce fait les pièces fabriquées par cette procédure sont souvent poreuses et ont une faible résistance [30]. Une autre méthode de production de matériaux était découverte en combinant un ou plusieurs matériaux à l'état solide, ces matériaux sont appelés les matériaux composites.

Les matériaux composites sont une classe de matériaux de pointe, constitué d'un ou plusieurs matériaux combinés dans des états solides avec des propriétés physiques et chimiques distinctes. Ces matériaux offrent une excellente combinaison de propriétés encore meilleure que peut proposer les matériaux premiers individuellement et ils sont également plus léger. On peut prendre l'exemple du bois qui est un matériau composite naturel il se compose de cellulose dans une matrice de lignine [31]. L'utilisation des matériaux composites avancés est devenue indispensable dans des domaines d'activité variés tel que l'industrie automobile, le domaine de réalisation et réhabilitation des constructions, transport routier et plus important dans l'aéronautique et l'aérospatiale. Et avec l'innovation et le progrès de la technologique durant ces dernières décennies beaucoup de recherches ont vu le jour pour le

développement et l'amélioration de ces matériaux, les rendant ainsi très performant et plus fiable avec des propriétés mécaniques et des résistances thermiques meilleures. Ils sont aussi peu coûteux avec un temps de réalisation plus rapide et beaucoup plus écologique avec moins d'impact sur l'environnement, ce qui les a ouvert à de nouveaux horizons et a diversifié leurs champs d'applications.

### **I.2. Généralité sur les matériaux avancés**

Généralement dans les domaines aéronautiques et spatial il est utilisé des matériaux homogènes typiques à savoir les alliages d'aluminium et de titane [32] Ils présentent un rapport résistance / poids élevé et d'excellentes propriétés mécaniques.

Avec le développement technologique l'utilisation des matériaux composites est de plus en plus fréquente, où deux ou plusieurs matériaux sont combinés à une échelle macroscopique afin d'obtenir de meilleures propriétés d'ingénierie que les matériaux classiques.

D'autres structures multicouches sont employées dans ces domaines à savoir les structures en sandwich. Ils sont utilisés pour fournir une structure plus forte et plus raide pour le même poids, ou inversement (une structure plus légère peut supporter la même charge qu'un élément homogène ou stratifié compact). Ces structures sont constituées deux faces rigides et un noyau souple. Ils sont largement utilisés pour construire des avions, des engins spatiaux, des navires et des véhicules automobiles. La plupart des applications récentes ont utilisé des peaux constituées de structures stratifiées en matériaux composite anisotrope.

Dans le cas de structures intelligentes, certaines couches sont en matériaux piézoélectriques, ils utilisent l'effet dit « piézo-électrique » qui relie l'électricité et la mécanique des champs. En outre, les nanotubes de carbone (CNT) présentent des propriétés mécaniques supérieures et sont extrêmement prometteurs en raison de leurs caractéristiques de solidité, de légèreté et de ténacité. Notamment, ils peuvent être utilisés comme de très bon fibres pour les matériaux nano composites.

Enfin, cette discontinuité des propriétés matérielles à travers l'interface des constituants de ces matériaux composites, provoque des concentrations de contraintes sous des chargements mécaniques ou dans un milieu thermique ultra-chaud, la différence relative du coefficient d'expansion thermique provoque des contraintes résiduelles importantes. A cet effet, le concept du matériau fonctionnellement gradués (Functionally Graded Materials «

FGM ») est introduit pour satisfaire la demande dans un environnement ultra chaud et aussi pour éliminer les contraintes singulières.

Dans ce qui suit une panoplie de matériaux avancés est proposée.

### **I.3. Les matériaux composites**

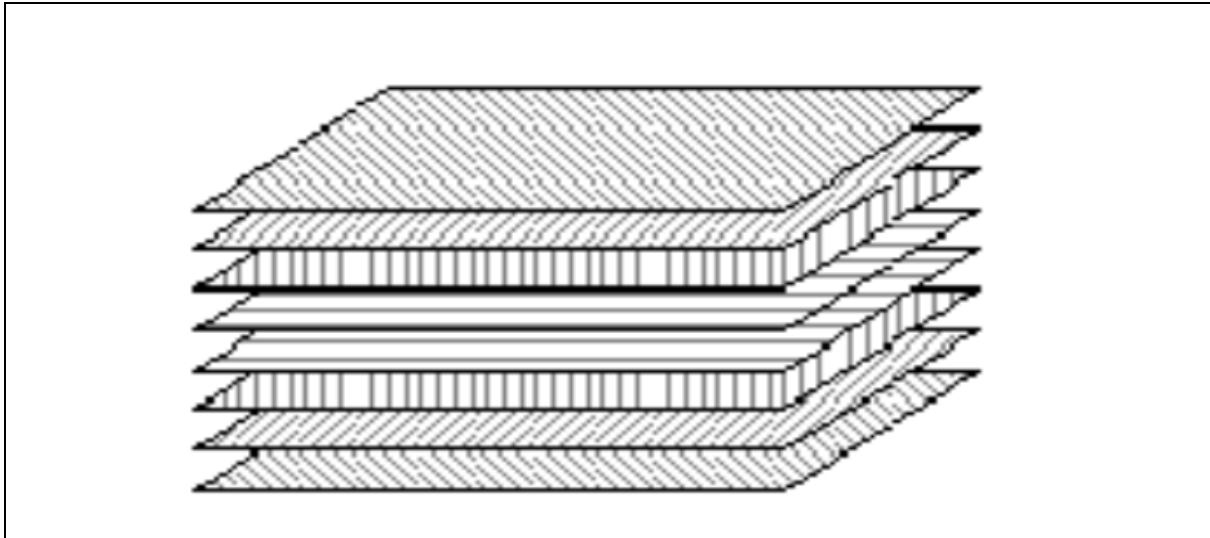
Les matériaux composites sont constitués de deux ou plusieurs matériaux combinés qui ont des propriétés qui ne peuvent être obtenues avec aucun des constituants seuls [33]. Des exemples concrets sont les matériaux composites renforcés par des fibres (figure 1.1) qui ont une résistance très élevée. Dans de tels matériaux composites, les fibres sont les éléments porteurs et le matériau de matrice maintiennent les fibres ensemble, agissent comme un milieu de transfert de charge entre les fibres et les protègent contre l'exposition à l'environnement. Les fibres ont un rapport longueur / diamètre très élevé et leurs propriétés sont maximales dans une direction donnée.

Paradoxalement, les fibres courtes présentent des propriétés structurelles meilleures que les fibres longues. Les fibres et les matrices utilisés habituellement dans les composites peuvent être métalliques ou pas. Les matériaux fibreux peuvent être des métaux communs tels que l'aluminium, le cuivre, le fer, le nickel, l'acier, le titane, le verre, le bore et le graphite [34] dans les cas d'applications structurelles, par exemple dans le domaine de l'aéronautique, les matériaux composites représentent souvent une couche mince appelée lamina, avec lesquelles on peut former des éléments structuraux, telles que les barres, les poutres, les plaques ou les coques avec un empilement des couches pour obtenir des résistances et des raideurs. L'orientation des fibres dans chaque lamina et la séquence d'empilage de couches peuvent être choisies pour obtenir la résistance et la rigidité souhaitées pour une application spécifique.

Les principaux inconvénients des stratifiés en matériaux composites renforcés par des fibres sont leurs coûts parfois prohibitifs (temps, coûts, étude et mise en œuvre), le délaminage et le décollement des fibres. La délamination est causée par l'incompatibilité des propriétés du matériau entre les couches, ce qui produit des contraintes de cisaillement entre les couches « contraintes d'interfaces », en particulier aux bords d'un stratifié.

Le décollement de la fibre est causé par l'incompatibilité des propriétés des matériaux entre la matrice et la fibre. De même, lors de la fabrication de stratifiés, des défauts de matériau tels que des vides inter laminaire, une délamination, une orientation incorrecte, des fibres endommagées et des variations d'épaisseur peuvent être introduites [35]. En formulant les équations constitutives d'une lame, on suppose que :

- Une lame est continue : il n'y a pas de lacunes ou d'espaces vides cette hypothèse permet de considérer le comportement macro mécanique d'une lame.;
- Une lame se comporte comme un matériau élastique linéaire qui implique que la loi de Hooke généralisée est valide.



**Figure I.1** Matériau composite stratifié [35].

Les structures en sandwich sont une sorte de structures composites largement utilisées en aéronautique, en génie maritime et dans l'industrie automobile parce qu'ils sont légers avec une grande rigidité à la flexion. Une structure sandwich est composée d'une âme (cœur) et de deux peaux (faces) en matériaux composites (figure 1.2). L'assemblage est réalisé par collage à l'aide d'une résine compatible avec les matériaux utilisés.

En général, les peaux des panneaux sandwich sont des métaux ou des composites stratifiés, tandis que le noyau (cœur) est fait de tôle ondulée, de mousse ou de type nid d'abeilles. Les matériaux de base couramment utilisés comprennent l'aluminium, les alliages, le titane, l'acier inoxydable et les composites polymères. Le noyau soutient la peau, augmente la résistance à la flexion et la rigidité de torsion, et reprend la plus grande partie de la charge de cisaillement [36].

Les structures sandwiches ont souvent deux peaux (faces), identiques en matière et épaisseur, qui résistent principalement aux charges de flexion transversale. Toutefois, dans des cas particuliers, les peaux peuvent différer soit dans l'épaisseur, soit dans le matériau, soit

dans les deux, car une face doit résister à une charge importante mais une température basse, alors que l'autre face doit supporter une température élevée et un environnement corrosif.

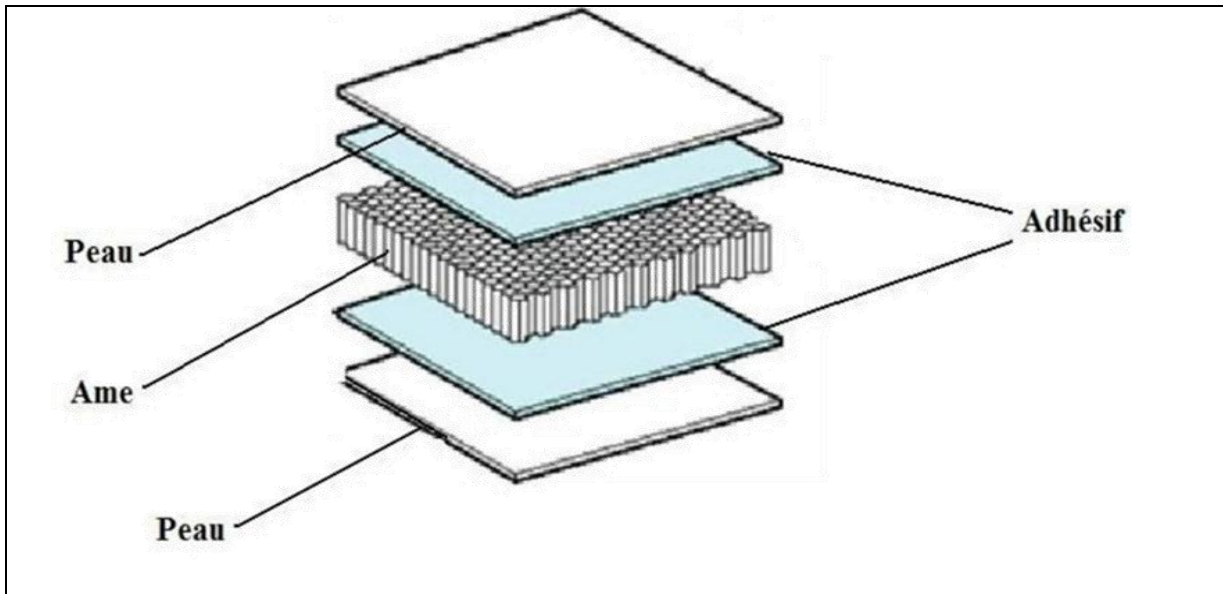


Figure I.2 Matériau composite sandwich [36].

#### I.4. Les matériaux piézoélectriques

Les phénomènes de la piézoélectricité sont une particularité de certaines classes de matériaux cristallins. L'effet piézoélectrique est une conversion linéaire entre les champs mécaniques et électriques. La conversion linéaire entre les deux champs est dans les deux directions, Définissant un effet piézoélectrique direct ou inversé. L'effet piézo-électrique direct génère une polarisation électrique en appliquant des contraintes mécaniques. Au contraire, l'effet piézoélectrique inverse induit des contraintes mécaniques ou des contraintes en appliquant un champ électrique. Ces deux effets représentent le couplage entre le champ mécanique et le champ électrique, qui est mathématiquement exprimée au moyen de coefficients piézoélectriques.

Les premières applications pour les matériaux piézoélectriques étaient le son et les capteurs à ultrasons. Néanmoins ces dernières années, la piézoélectricité a trouvé un regain d'intérêt, en tant que structures intelligentes actives avec leur auto-surveillance et leur d'auto-adaptation [37]. Les exemples d'applications typiques des matériaux piézoélectriques dans le domaine aérospatial sont énumérés ci-dessous.

- **Amortissement des vibrations** : Presque toutes les structures de l'ingénierie aérospatiale vibrent. Dans certains cas, ces charges dynamiques peuvent être plus dangereuses que les charges statiques appliquées. En mettant en œuvre des capteurs et des actionneurs dans de telles structures, ces vibrations dynamiques peuvent être mesurées puis amorties activement. On peut citer quelques exemples tels que : les problèmes de vibration des ailes du rotor dans les hélicoptères, l'amortissement du son dans le cockpit ou la cabine des avions civils.

- **Adaptation de la forme des surfaces aérodynamiques** : Dans un avion moderne, les surfaces aérodynamiques ne peuvent être optimisées que pour une certaine vitesse et une altitude de vol. Avec des ailes qui seront capables de modifier leur géométrie en fonction des exigences réelles augmenteront ainsi leur efficacité.

- **Contrôle aéroélectrique actif** : Des problèmes typiques d'aéroélasticité comme le flutter ou le buffeting peuvent être réduits par l'utilisation de matériaux adaptatifs.

- **Contrôle de forme des dispositifs optiques et électromagnétiques** : Les structures dans le domaine aérospatial sont soumises à des variations de température rapides et élevées en raison de la lumière du soleil. Les surfaces optiques telles que les antennes électromagnétiques et les réflecteurs sont très sensibles aux déformations thermiques. Un remède à ces problèmes pourrait être l'utilisation de matériaux adaptatifs.

- **Surveillance de la santé** : Dans les structures aérospatiales, les fissures microscopiques sont tolérables jusqu'à certaine limite. Des structures intelligentes pourraient surveiller ces contraintes et avec leur mécanisme de contrôle supplémentaire pour maintenir la sécurité.

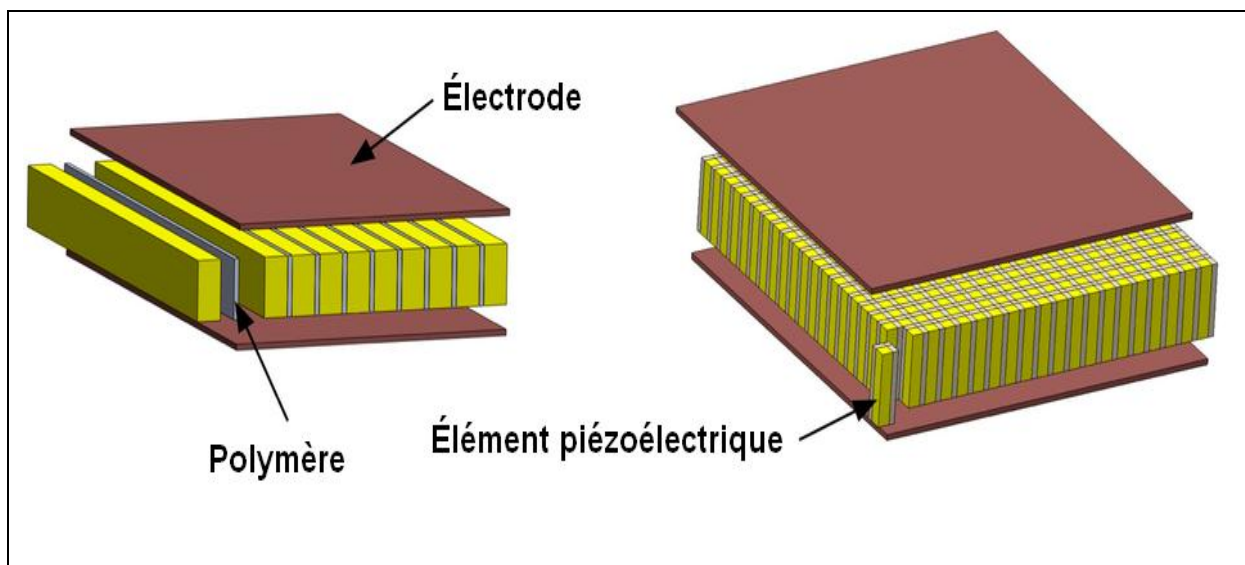


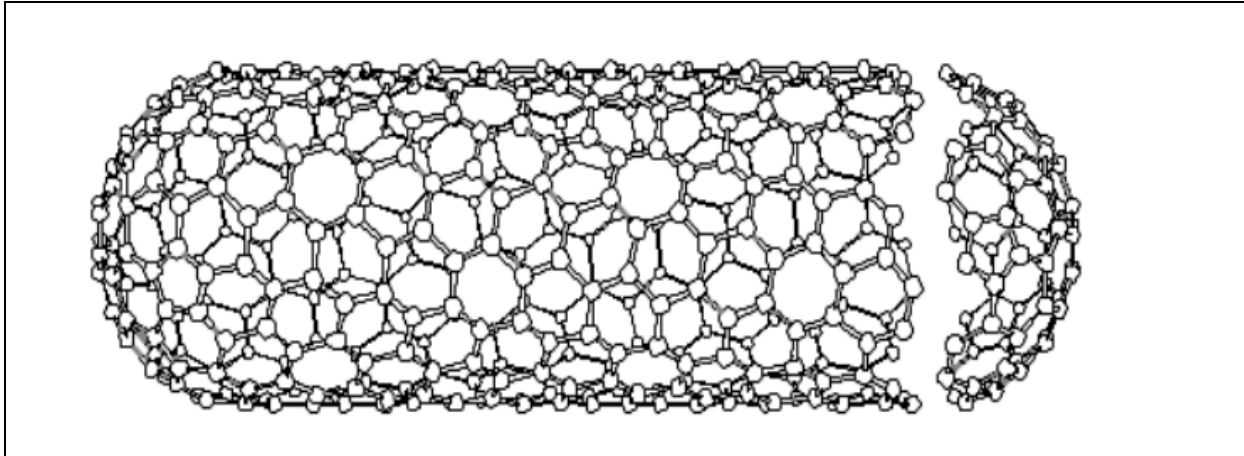
Figure I.3 Les matériaux piézoélectriques [38]

### **I.5. Les nanotubes de carbone**

Les nanotubes de carbone (CNT) ont des propriétés mécaniques exceptionnelles (module de Young, résistance à la traction, ténacité, etc.), qui sont dus à leur structure moléculaire consistant de feuilles simples ou multiples de graphite enveloppées dans des cylindres creux sans soudure [39]. En raison de la grande rigidité, de la résistance et du rapport de dimensions élevé des CNT, en les dispersant uniformément dans une matrice polymère, on peut produire des composites avec des propriétés mécaniques efficaces globalement améliorées.

En outre, les CNT ont une densité relativement faible d'environ  $1,75 \text{ g / cm}^3$  et, par conséquent, les polymères renforcés par des nanotubes (NRP) excellent en raison de leur rigidité, résistance et ténacité spécifiques extrêmement élevées. Cela a déjà été démontré dans des expériences, tant pour des matrices de polymères thermoplastiques [40] que pour des matrices de polymères thermodurcissables [41].

L'étude de l'analyse des vibrations et des fréquences des CNT est un sujet d'actualité. Puisque les expériences contrôlées pour mesurer les propriétés de CNT individuelles à l'échelle nanométrique sont extrêmement difficiles, les simulations computationnelles ont été considérées comme un outil puissant. Cependant, les simulations computationnelles pour prédire les propriétés de CNTS se divisent en deux grandes catégories : la dynamique moléculaire et la mécanique du continu. Bien que la simulation de la mécanique moléculaire ait été utilisée avec succès pour simuler les propriétés du matériau avec des microstructures, cette méthode prend du temps et elle est bien redoutable surtout pour les systèmes complexes à grande échelle. Récemment, la mécanique des solides avec des modèles élastiques continus, tels que les modèles des poutres et des plaques, ont été largement utilisées avec succès pour étudier le comportement mécanique des CNT [42], [43]. De plus, l'intérêt pour les nanotubes à double paroi (DWNT) augmente en raison des progrès de la synthèse à grande échelle des DWNT [44].

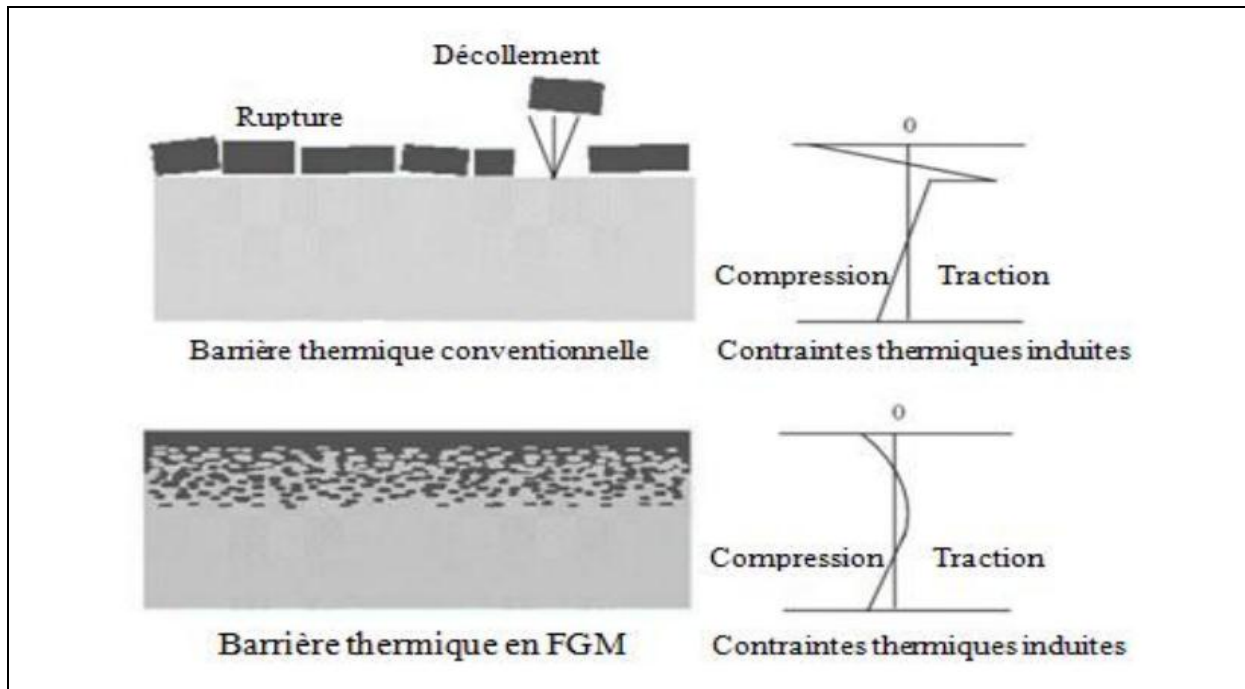


**Figure I.3** Les nanotubes de carbone [42].

### **I.6. Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM)**

Les fortes charges thermiques impliquées dans de nombreuses applications d'ingénierie, comme les revêtements thermiques, les composants du moteur ou les buses de fusée, nécessitent des matériaux résistant aux hautes températures. Au Japon, à la fin des années 1980, le concept de matériaux fonctionnellement gradués (FGM) a été proposé comme matériau de barrière thermique. Les FGM sont des matériaux composites avancés dans lesquels la composition de chaque constituant de matière varie progressivement par rapport aux coordonnées spatiales [45], par conséquent, dans les FGM, les propriétés macroscopiques du matériau varient en continu, en les distinguant des matériaux composites stratifiés dans lesquels le changement brutal des propriétés du matériau à travers les interfaces de couche conduit à de grandes tensions inter laminaires permettant le développement de dommages [46]. Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) ont une grande variété, non seulement pour fournir de meilleures propriétés thermomécaniques, mais aussi pour obtenir des propriétés piézoélectriques et magnétiques appropriées, via la variation spatiale dans leur composition. Un exemple typique d'un matériau fonctionnellement gradué dans la direction de l'épaisseur et utilisé comme revêtement de barrière thermique est donné à la figure I.4.

La particularité des compositions spatiales graduées associées aux FGM donne une grande liberté dans la conception et la fabrication de nouvelles structures ; D'autre part, elle pose également de grands défis dans la modélisation numérique et la simulation des structures des FGM [47].



**Figure I.4** Protection thermique des : a-Matériaux composite b-Matériaux FGM [48]

## I.7. Conclusion

Le développement des matériaux utilisés dans les différents domaines d'ingénierie a suscité l'intérêt des humains depuis la découverte des premières matières de base pour les rendre plus résistant moins coûteux et avec des temps de réalisation inférieure, d'où l'apparition des matériaux avancés.

Ce chapitre présente une revue générale des matériaux avancés généralement employée dans le bâtiment, l'aérospatial, l'automobile...etc. en exposant quelques avantages et quelques inconvénients qu'ils peuvent présenter



## **CHAPITRE II :**

**CONNAISSANCE DES TECHNOLOGIES  
DES MATÉRIAUX FONCTIONNELLEMENT  
GRADUÉS**



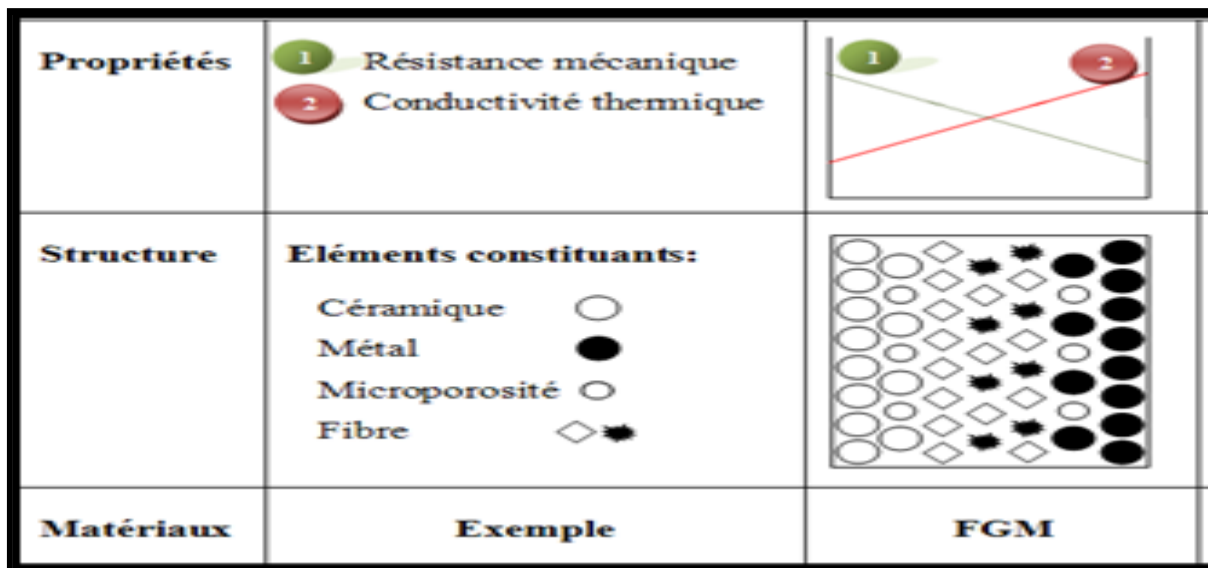
## Chapitre II : Connaissance des technologies des matériaux fonctionnellement gradués

### II.1. Introduction

Généralement dans l'aéronautique et l'aérospatial les parois des navettes spatiales ou des avions hypersoniques sont exposées à des températures très élevées. Des composants tel que le cône d'entrée, les bords d'attaque des ailes ainsi que certaines surfaces inférieures sont soumis à des températures allant jusqu'à 1800°C en atmosphère, de ce fait les matériaux qui constituent ces composants doivent supporter un gradient thermique d'environ 1300°C dans une épaisseur d'une dizaine de millimètres, mais hélas il n'existait aucun matériau monolithique capable de résister à une telle contrainte thermique [1]. La solution trouvée c'était la mise en œuvre d'un matériau dont une face exposée à très haute température et qui possède des propriétés de résistance aux fortes chaleurs et à l'oxydation, faite par une céramique, et dont la face intérieure serait à la fois une bonne conductrice de chaleur et qui a une bonne résistance mécanique et une meilleure ténacité, réalisé par un métal. Cependant, si l'on considère un simple assemblage de ces deux matériaux, ils présentent immédiatement une rupture due aux contraintes thermiques exercées à l'interface entre les deux types de matériaux ayant des propriétés thermiques différentes. Du coup l'idéal était de supprimer cette interface en créant une transition continue entre les deux faces. C'est ainsi qu'est né le concept des matériaux fonctionnellement gradués dans les années 80 du vingtième siècle par un groupe de chercheurs au laboratoire national d'aérospatial (National Aerospace Laboratory, STA) au japon. Le FGM consiste en l'association de deux matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux. Généralement, les « FGM » sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux vu la bonne résistance thermique du céramique et la bonne résistance mécanique d'un métal. Les vides sont également considérés comme une composante des matériaux FGM, ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement non homogènes [49]. Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure d'un matériau « FGM » est illustré dans la figure II.1. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente [50].

**Tableau II.1** : Caractéristiques des différentes couches des matériaux FGM [48]

| Couches   | Matériaux       | Les propriétés mécaniques   |
|---|-----------------|---|
| La face à haute température   | Céramique       | - Bonne résistance thermique<br>- Bonne résistance à l'oxydation<br>- Faible conductivité thermique |
| « Couches intermédiaires »<br>Continuité du matériau d'un point à l'autre | Céramique-métal | -Élimination des problèmes de l'interface<br>-Relaxer les contraintes thermiques                    |
| La face à basse température   | Métal           | - Bonne résistance mécanique<br>- Conductivité thermique élevée<br>- Très bonne ténacité            |



**Figure II.1** : Concept des matériaux fonctionnellement gradués (FGM) [51]

## II.2. L'historique du développement des matériaux fonctionnellement gradués

Le concept des "Matériaux fonctionnellement gradués" a été développé dans le laboratoire national d'aérospatial de Sendai sur l'île de Honshū au Japon en 1984 par M. Niino et ses collègues. L'idée est de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion [1]. Les changements continus dans la

composition, dans la microstructure, et même dans la porosité de ces matériaux a comme conséquences des gradients des propriétés matérielles telles que la résistance mécanique et la conductivité thermique [51]. Cette nouvelle classe de matériaux composites peut être utilisée pour différentes applications, telles que les enduits des barrières thermiques pour les moteurs en céramique, turbines à gaz, couches minces optiques [52].

En 1987, le gouvernement Japonais a lancé un vaste projet intitulé "la recherche sur la technologie de base pour développement des matériaux fonctionnellement gradués et l'étude de la relaxation des contraintes thermiques". L'intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux. 17 laboratoires nationaux de recherche, des universités et des entreprises ont été engagées dans ce projet [51].

Trois caractéristiques étaient prises en compte pour la conception d'un matériau pour résister à des températures de surface de 1800°C ainsi qu'à un gradient de température de l'ordre de 1300°C :

- Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau ;
- Ténacité du matériau côté basse température ;
- Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau.

Pour répondre à un tel cahier des charges, l'idée originale des FGM a été proposée pour élaborer un nouveau composite profitant à la fois des propriétés des céramiques (côté haute températures) et des métaux (côté basse température).

À la fin de la première étape (1987-1989), les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des températures maximales de 2000K (température de surface) et à un gradient de température de 1000K. Quatre techniques ont été utilisées pour fabriquer les matériaux présentant un gradient de composition et de structure. Les techniques utilisées dans la fabrication de tels matériaux sont les suivantes :

- Le système SiC/C par Le dépôt chimique en phase vapeur (chemical vapor deposition C.V.D)
- Le système PSZ/Mo par la technique de la compaction sèche des poudres,
- Le système TiB<sub>2</sub>/Cu par synthèse par auto-propagation à haute température,
- Le système (Ni-Cr-Al-Y) / (ZrO<sub>2</sub>-Y<sub>2</sub>O<sub>3</sub>) par projection plasma à double torches [53].

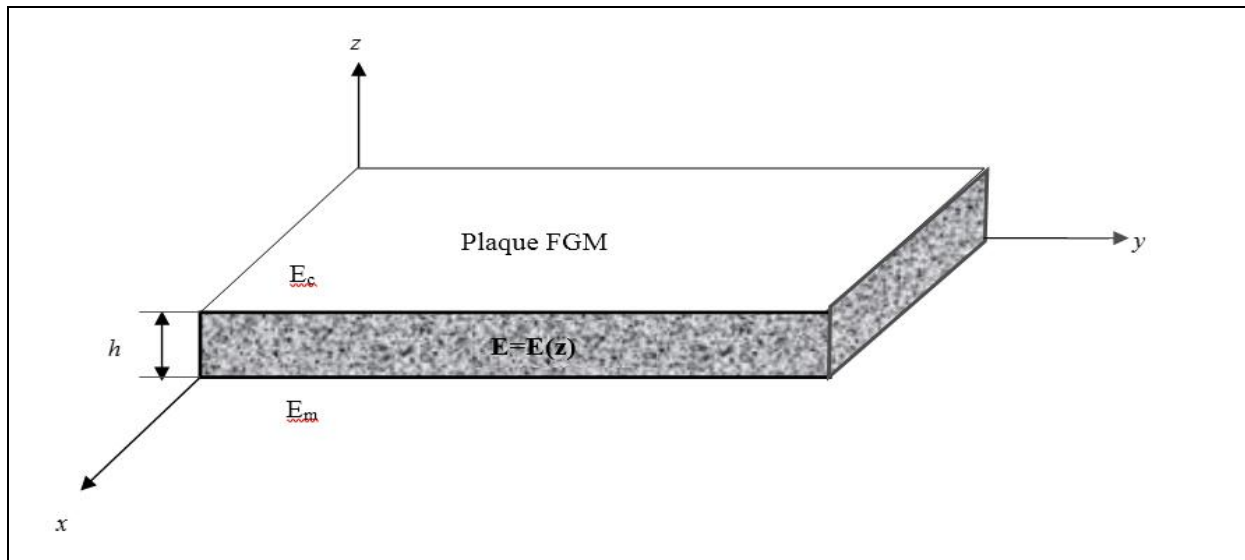
Dans la seconde étape (1990-1991), le but était de réaliser des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes par rapport à celles réalisées dans la première étape. Pendant les années 90, non seulement les champs d'applications des FGM s'est développé pour les matériaux de structure fonctionnant à haute température, mais s'est aussi élargi à d'autres applications : biomécaniques, technologie de capteur optique [53].

En 1990-1991, c'est la réalisation des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes avec d'autres applications : Biomécaniques, Technologie de capteur, Optiques...etc. [53].

En 1992, c'est la période de l'amélioration de l'efficacité des FGM dans la conservation d'énergie photoélectrique, thermoélectrique, thermonucléaire [54]. A partir de ces résultats, un nouveau projet national intitulé « recherche sur les matériaux pour la conservation de l'énergie avec le plan fonctionnel gradient de structure », communément dénommé « FGM partie II, a été lancé en 1993, pour la promotion de la science et technologie. Ce programme vise à s'appliquer la technologie des FGM dans le but d'améliorer l'efficacité de la conservation de l'énergie comme l'énergie solaire, nucléaire, photovoltaïque, thermoélectrique.

### **II.3. Les propriétés matérielles des plaques FGM**

Les matériaux à gradient de propriétés « FGM » consistent en l'association de deux matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux de manière à optimiser les performances de la structure qu'ils constituent. Les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM sont leurs microstructures non-uniformes avec des macro-propriétés graduées dans l'espace. Un FGM peut être définie par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient des lois de mélange soit par une fonction de puissance, une fonction exponentielle, ou par une fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume. Les liaisons entre les particules doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure.



**Figure II.2 :** Géométrie d'une plaque fonctionnellement graduées (FGM).

Les coordonnées  $x$  et  $y$  définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe  $z$  perpendiculaire à la surface moyenne de la plaque et dans la direction de l'épaisseur. Les propriétés mécaniques de ces plaques à savoir son module de Young et le coefficient de Poisson sur les deux faces supérieures et inférieures sont différentes mais elles sont déterminées selon les besoin. Néanmoins le module de Young et le coefficient de Poisson varient de façon continue, dans le sens de l'épaisseur suivant l'axe  $z$  soit :  $E = E(z)$ ,  $\nu = \nu(z)$ . Le module de Young dans le sens de l'épaisseur d'une plaque FGM varie en fonction des lois de mélange d'où on peut désigner des plaques P-FGM, E-FGM ou des plaques S-FGM selon les fonctions utilisées. Ces lois de mélange sont pratiques et simples à utiliser mais elles ne permettent pas de connaître la taille, la forme et la distribution des particules au niveau de la microstructure. De ce fait plusieurs modèles permettant d'évaluer les propriétés globales ont été développés on peut citer le modèle basé sur le schéma de Mori et Tanaka [55] Ou la méthode du schéma auto-cohérent de Hill (self-consistent method) [56].

### II.3.1. Loi de mélange en puissance (P-FGM)

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance.

$$V(z) = \left( \frac{z + h/2}{h} \right)^k \quad (\text{II.1})$$

Où  $k$  est un paramètre matériels et  $h$  est l'épaisseur de la plaque. Une fois la fraction volumique locale  $\nu(z)$  a été définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges [57] :

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m)V(z) \quad (II.2)$$

Où  $E_1$  et  $E_2$  sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure ( $z = -h/2$ ) et de la surface supérieure ( $z = h/2$ ) de la plaque FGM, la variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la figure II.3, On voit bien que la fraction volumique change rapidement près de surface inférieure pour  $k < 1$ , et augmenté rapidement près de la surface supérieure pour  $k > 1$ .

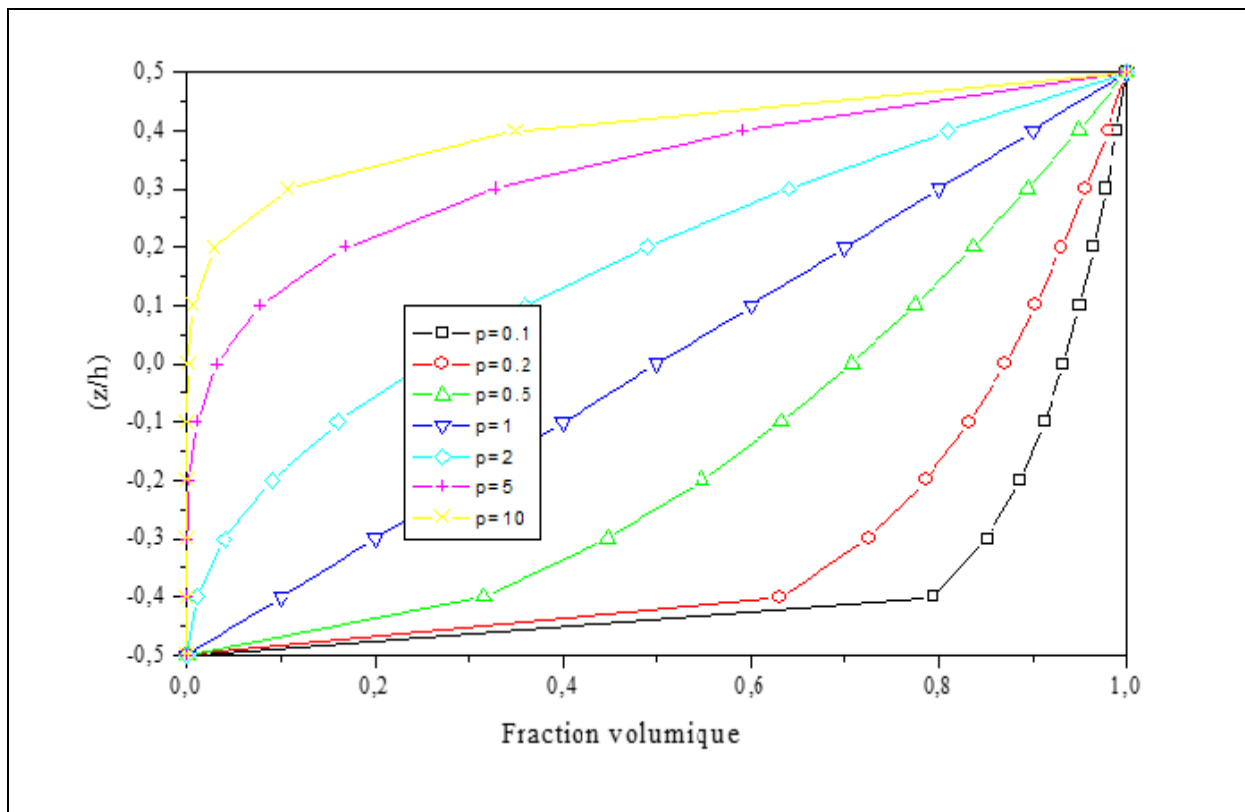


Figure II.3 : Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM. [48]

### II.3.2. Loi de mélange exponentielle (E-FGM)

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme [58] :

$$E(z) = E_m e^{B(z+h/2)} \quad (II.3.a)$$

Avec

$$B = \frac{1}{h} \ln \left( \frac{E_c}{E_m} \right) \quad (\text{II.3.b})$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée dans la figure II.4.

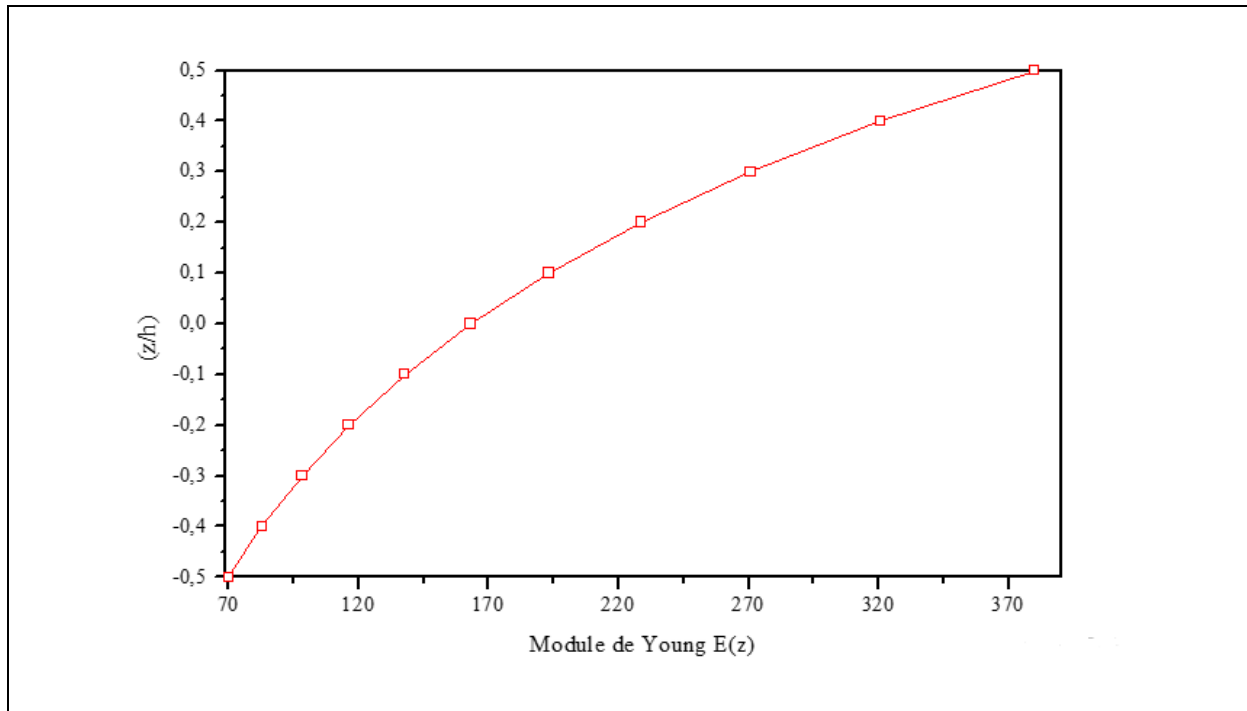


Figure II.4 : Variation du module de Young dans une plaque E-FGM. [48]

### II.3.3. Loi de mélange sigmoïde (S-FGM)

Dans le cas où on ajoute une plaque P-FGM avec une simple fonction de loi de puissance à une plaque composite multicouche, les concentrations de contraintes apparaissent sur l'interfaces où le matériau est continu mais change rapidement [57]. Par conséquent, Chung et chi [59] ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par :

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{h/2 + z}{h/2} \right)^k \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{II.4.a})$$

$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{h/2 - z}{h/2} \right)^k \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{II.4.b})$$

En utilisant la loi de mélanges, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = V_1(z) E_c + [1 - V_1(z)] E_m \text{ Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{II.5.a})$$

$$E(z) = V_2(z) E_c + [1 - V_2(z)] E_m \text{ Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{II.5.b})$$

La figure II.5 montre que la variation de la fraction volumique dans les équations (II.5.a) et (II.5.b) représente les distributions sigmoïdes.

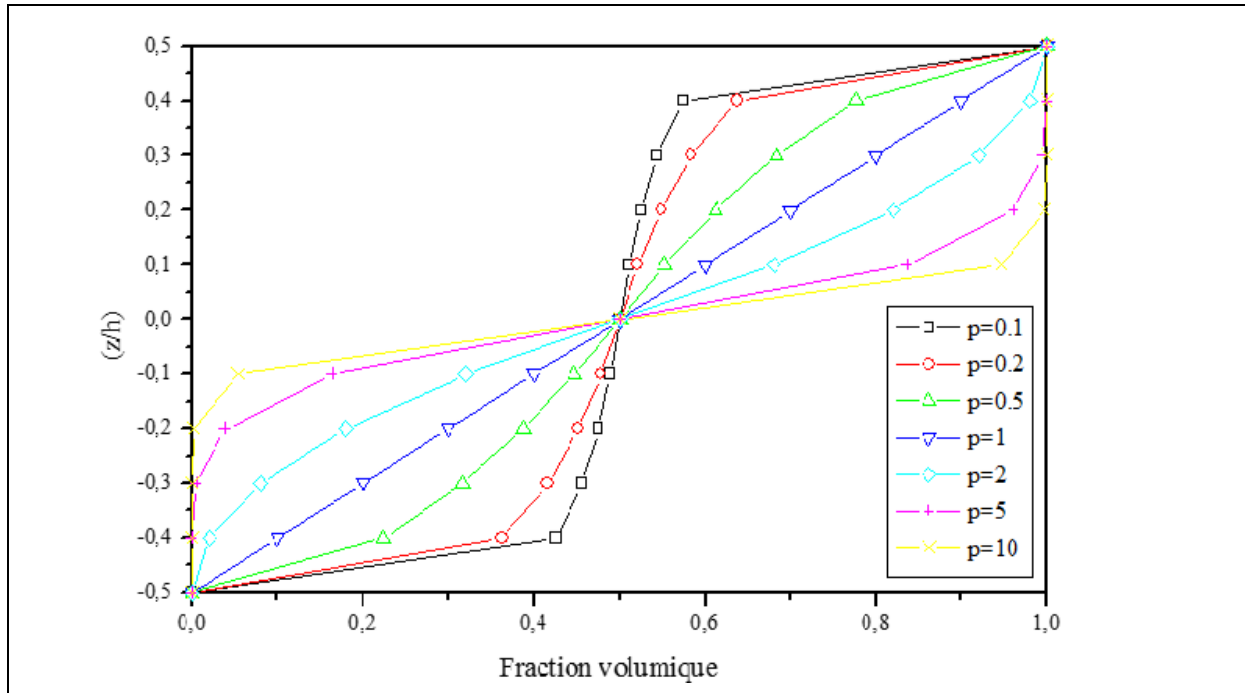
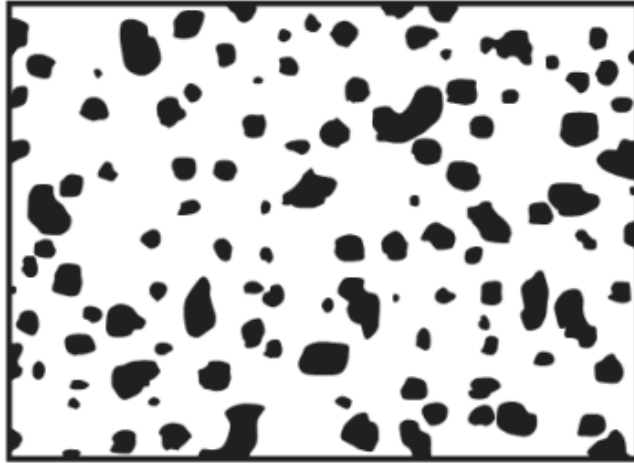


Figure II.5 : Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM. [48]

### II.3.4. Modèle de Mori-Tanaka

Ce modèle est basé sur le schéma de Mori et Tanaka [55] qui permet d'estimer les modules effectifs valables pour des zones de la microstructure où la variation de la matrice (continue) et celle des phases particulières (discontinues) sont bien connues Figure II.6. Ce modèle tient compte de l'interaction des champs élastiques des inclusions voisines. Il suppose que la phase matrice dénotée par l'indice 1 est renforcée par des particules sphériques de la phase particulière dénotée par l'indice 2.



**Figure II.6 :** Matériau FGM à deux phases avec microstructure particulaire. [55]

Si on note par  $K$  le module de compressibilité, par  $G$  le module de cisaillement, par  $V$  la fraction volumique et par  $\alpha$  le coefficient de dilatation thermique, les différentes propriétés locales obtenues par le modèle de Mori et Tanaka [55], pour une distribution aléatoire des particules isotropes dans une matrice isotrope, sont alors données par (Vel et Batra [60], Shen [61]) :

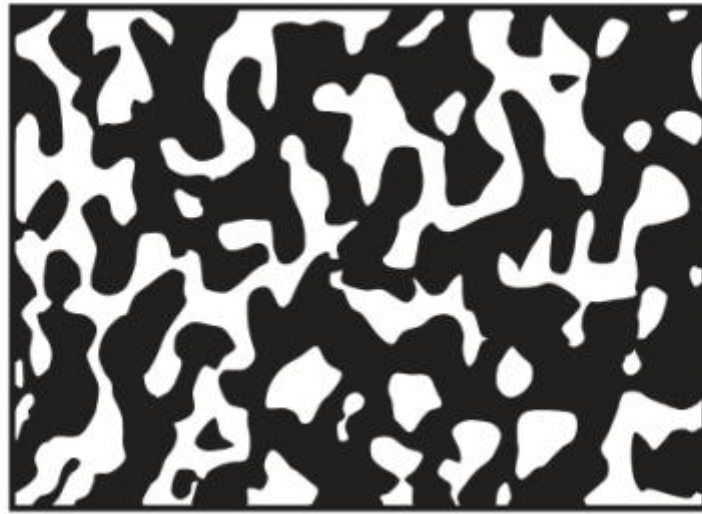
$$\frac{K - K_1}{K_2 - K_1} = \frac{V_2}{1 + V_1(K_2 - K_1)/(K_1 + 4/3G_1)} \quad (\text{II.6})$$

$$\frac{G - G_1}{G_2 - G_1} = \frac{V_2}{1 + V_1(G_2 - G_1)/(G_1 + f_1)} \quad (\text{II.7})$$

$$\frac{\alpha - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} = \frac{(1/K) - (1/K_1)}{(1/K_2) - (1/K_1)} \quad (\text{II.8})$$

### II.3.5. Modèle auto-cohérent de Hill

Cette méthode suppose que chaque inclusion de renforcement est contenue dans un matériau continu pour lequel les propriétés sont celles d'un composite. Cette méthode ne différencie pas entre la phase matrice et la phase renforcement ; impliquant que le même module global est estimé dans un autre composite où les rôles des deux phases sont permutés. Ceci permet l'estimation du module effectif dans les régions dont le squelette de la microstructure a une forme continue telle que montrée sur la figure II.7.



**Figure II.7 :** Matériau FGM à deux phases avec microstructure squelettique. [56]

Les modules élastiques effectifs sont donnés par :

$$\frac{g}{K} = \frac{V_1}{(K - K_2)} + \frac{V_2}{(K - K_1)} \quad (\text{II.9})$$

$$\frac{\eta}{G} = \frac{V_1}{(G - G_2)} + \frac{V_2}{(G - G_1)} \quad (\text{II.10})$$

Où  $g$  et  $\eta$  sont définis par :

$$g = \frac{K}{K_1 + (4/3)G} \quad (\text{II.11})$$

$$\eta = 1/5(3 - g) \quad (\text{II.12})$$

A partir des équations (II.9) et (II.10), l'expression du module de compressibilité est obtenue :

$$K = \frac{1}{V_1/(K_1 + (4/3)G) + V_2/(K_2 + (4/3)G)} - 4/3G \quad (\text{II.13})$$

Le module G est obtenu en résolvant l'équation suivante :

$$\left[ \frac{V_1 K_1}{(K_1 + (4/3)G)} + \frac{V_2 K_2}{(K_2 + (4/3)G)} \right] + 5 \left[ \frac{V_1 G_2}{(G - G_2)} + \frac{V_2 G_1}{(G - G_1)} \right] + 2 = 0 \quad (\text{II.14})$$

Pour les deux modèles précédents, le module de Young et le coefficient de Poisson sont calculés par :

$$E = \frac{9KG}{(3K + G)} \quad (\text{II.15})$$

$$\nu = \frac{(3K - 2G)}{2(3K + G)} \quad (\text{II.16})$$

Il est bien connu que le modèle de Mori-Tanaka conduit à une estimation précise des propriétés mécaniques lorsque la continuité de la matrice et la discontinuité des inclusions sont bien définies alors que le modèle de Hill est mieux adapté pour une microstructure squelettique caractérisée par une zone de transition large entre régions où il y a prédominance de l'un ou l'autre des constituants.

**Tableau II.2 :** Propriétés mécaniques des céramiques et métaux utilisés dans les FGM. [62]

| Matériaux        | Module d'élasticité E (GPa) | Coefficient de dilatation thermique $\alpha$ ( $10^{-6}$ 1/K) | Densité ( $10^3$ Kg/m <sup>3</sup> ) |
|------------------|-----------------------------|---|--------------------------------------|
| <b>Céramique</b> | Zircone                     | 100 - 250   | 5 - 6.15                             |
|                  | Alumine                     | 215 - 413   | 4.5 - 10.9                           |
|                  | Silicium                    | 140 - 180   | 7-8                                  |
|                  | Carbure de tungstène        | 600 - 686   | 28 - 88                              |
|                  | Carbure de bore             | 362 - 472   | 17 - 42                              |
| <b>Métal</b>     | Fers                        | 80 - 150  | 6.9 - 7.35                           |
|                  | Alliages d'aluminium        | 68 - 82   | 2.5 - 2.9                            |
|                  | Alliages de zinc            | 68 - 95   | 4.95 - 7                             |
|                  | Alliages de nickel          | 150 - 245   | 7.75 - 8.65                          |
|                  | Aciers                      | 189 - 203   | 7.85 - 8.1                           |

## II.4. Les propriétés thermiques des plaques FGM

L'analyse thermique des plaques fonctionnellement graduées peut être effectuée par modélisation appropriée de la distribution de la température. Généralement, les propriétés du matériau dans les FGM varient à travers l'épaisseur de la plaque tandis que dans le plan elles seront homogènes. Par conséquent, on suppose que les variations de température ne se produisent que dans le sens de l'épaisseur et sont évaluées de différentes manières. Certaines des méthodes les plus utilisées dans la littérature sont discutées dans les sections suivantes.

### II.4.1. Variation constante et linéaire

Ce type de répartition de la température a été utilisé par plusieurs chercheurs [63,64,65,66] pour l'analyse des plaques FGM et des coques. On suppose que la température au sommet ( $T_1$ ) et du bas ( $T_0$ ) était la même dans la distribution constante, alors que la distribution linéaire était différente. Grâce à la variation d'épaisseur la température peut être exprimée comme suit :

$$T(x, y, z) = T_0(x, y) + (T_1(x, y) - T_0(x, y))\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right) \quad (\text{II.17})$$

Où,  $T(x, y, z)$  est la température en tout point de l'épaisseur de la plaque dans la direction de coordonnées  $z$ .

### II.4.2. Equation de conduction thermique

La variation non linéaire de la température est habituellement obtenue à partir de la solution de l'équation de conduction thermique.

$$k_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial k_z}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial z} + k_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + q = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II.18})$$

Où  $q$  est la source de chaleur interne ou le flux de chaleur. L'analyse statique (avec ou sans flux thermique,  $q$ ) peut être effectuée en négligeant la vitesse de changement de température par rapport au temps ( $\partial T / \partial t$ ).

La plupart des études thermoélastiques bidimensionnelles ont été réalisées en utilisant une équation de conduction thermique unidimensionnelle [67,68,69]. Ceci est dû à l'hypothèse d'homogénéité du matériau dans le plan de la plaque qui ne varie que dans le sens de l'épaisseur. L'équation statique à chaleur statique sans flux thermique est donnée (II.19).

La solution pour l'équation de conduction thermique unidimensionnelle et tridimensionnelle peut être obtenue en utilisant les conditions aux limites appropriées et les températures aux surfaces. Ainsi, à travers la variation d'épaisseur de la température peut être évaluée pour différentes idéalizations propriété matérielle qui sont discutés dans les sections précédentes.

$$-\frac{\partial}{\partial z} \left( k_z \frac{\partial T_z}{\partial z} \right) = 0 \quad (\text{II.19})$$

### II.4.3. Distribution polynomiale

Grace à des études récentes, le profil de température  $T(x, y, z)$  dans le sens de l'épaisseur a été défini en fonction de la description graduelle du champ de déplacement. Les termes d'ordre élevé du champ de déplacement sont également inclus pour saisir l'effet de la distribution non linéaire. La forme polynomiale de la variation de température à travers l'épaisseur de la plaque peut être exprimée par :

$$T(z) = T_1(x, y) + \frac{z}{h} T_2(x, y) + \frac{f(z)}{h} T_3(x, y) \quad (\text{II.20})$$

Où  $T_1$ ,  $T_2$  et  $T_3$  sont les termes de charge thermique à travers l'épaisseur de la plaque et  $f(z)$  est une fonction de cisaillement transverse, qui peut être supposé nul pour les modèles basés sur la théorie de la déformation au cisaillement du premier ordre (FSDT) et la théorie classique des plaques (CPT). Akbarzadeh et al. [70] a considéré la forme polynomiale du champ de température avec quatre variables de charge thermique basé sur la théorie de déformation de cisaillement de troisième ordre (TSDT) sous la forme suivante :

$$T(z) = T_1(x, y) + \frac{z}{h} T_2(x, y) + \left(\frac{z}{h}\right)^2 T_3(x, y) + \left(\frac{z}{h}\right)^3 T_4(x, y) \quad (\text{II.21})$$

### II.5. Techniques de fabrication des matériaux fonctionnellement gradués (FGM)

Le processus de fabrication est l'un des domaines les plus importants de la recherche sur les FGM. Une grande partie des travaux a été consacrée au développement des méthodes de production et traitement des FGM. La plupart des procédés de production de FGM sont basés sur une variante de procédés de traitement classiques déjà bien établis. Les procédés qui sont capables de recevoir une étape de gradation comprennent la métallurgie des poudres [71] et les procédés de compaction sèche des poudres. En général, les procédés d'élaboration les

plus utilisés incluent le coulage centrifuge [72], le coulage par barbotine, le coulage en bande [73], le frittage et la projection plasma. Le choix de la méthode de production la plus appropriée dépend principalement de la combinaison de matière, du type de la loi de mélange requise et de la géométrie de la composante souhaitée.

### **II.5.1. La métallurgie des poudres (Powder metallurgy)**

Cette méthode est l'une des techniques les plus couramment employées en raison de son large contrôle sur la composition et la microstructure et la capacité de formation de forme, la métallurgie des poudres offre plus d'avantages grâce à des coûts moindres, une disponibilité accrue des matières premières, un équipement de traitement plus simple, une consommation d'énergie plus faible et des temps de traitement plus courts. Dans le traitement de la poudre, le gradient est généralement produit en mélangeant différentes poudres en rapports variables et en empilant les mélanges de poudre dans des couches séparées avec des épaisseurs comprises entre 0,2 mm et 1 mm. Plusieurs techniques ont été introduites pour la préparation de poudre, par exemple par réaction chimique, dépôt électrolytique ou broyage. Ces techniques permettent des taux de production en masse de matériaux en poudre et une gamme de tailles contrôlables de la quantité finale de grains. Pour le traitement de la poudre, la considération principale est centrée sur la précision dans les quantités de pesée et la dispersion des poudres mélangées. Ces éléments influenceront les propriétés de la structure et devraient être manipulés de manière très prudente. Dans les procédés ultérieurs, les opérations de formation sont effectuées à température ambiante tandis que le frittage est effectué à la pression atmosphérique car une température élevée peut provoquer une autre réaction qui peut affecter les matériaux. Des études en biomécanique ont constaté que les FGM utilisées dans les prothèses articulaires avec des épaisseurs de couche inférieure à 1,0 mm présentaient une faible résistance à l'usure [74]. Néanmoins des FGM ayant une épaisseur de couche supérieure à 2 mm produits par projection plasma et par frittage et infiltration ont des propriétés mécaniques et tribologiques meilleurs et conviennent mieux pour l'utilisation dans des prothèses articulaires car ils présentaient un faible niveau de porosité et par conséquent des échantillons entièrement denses [75].

### **II.5.2. La compaction sèche des poudres**

Ce procédé est plus utilisé pour la fabrication de pièces de formes complexes car il se base sur le versement successif des poudres dans des moules en acier après chaque fois qu'une poudre soit versée, une faible compression sera exercée, ensuite, on effectue un compactage

de l'ensemble des couches, il sera suivi généralement, par une pression isostatique et un déliantage. Finalement on effectue une densification [76].

### II.5.3. Le coulage centrifuge (Centrifugal casting)

Le coulage centrifuge est l'une des méthodes les plus efficaces pour traiter les FGM en raison de son large contrôle de la composition et de la microstructure. La coulée centrifuge a été principalement utilisée pour obtenir des pièces cylindriques. Les deux types de base des machines de coulée centrifuge sont : les types horizontaux, qui tournent autour de l'axe horizontal, et le type vertical, qui tourne autour d'un axe vertical. Les machines de coulée centrifuge horizontale sont généralement utilisées pour fabriquer des tuyaux, des tubes, des douilles, des douilles cylindriques ou tubulaires de forme simple. La coulée centrifuge est un procédé dans lequel le métal fondu est canalisé dans un moule tournant (habituellement de 700 à 1300 tr / min). La rotation de la matrice crée une force centrifuge qui pousse le métal vers la paroi du moule. La distribution graduelle dans les FGM fabriquées par la méthode centrifuge est fortement influencée par de nombreux paramètres tel que la densité entre les particules et le métal fondu, la taille des particules, la viscosité du métal fondu, la fraction volumique moyenne des particules, l'épaisseur du noyau et le temps de solidification [77]. La méthode centrifuge de poudres mixtes montrée dans La figure II.12 est une autre méthode introduite en tant que solution à la limitation de la méthode de coulée centrifuge dans la fabrication de FGM contenant des particules de taille nano [78].

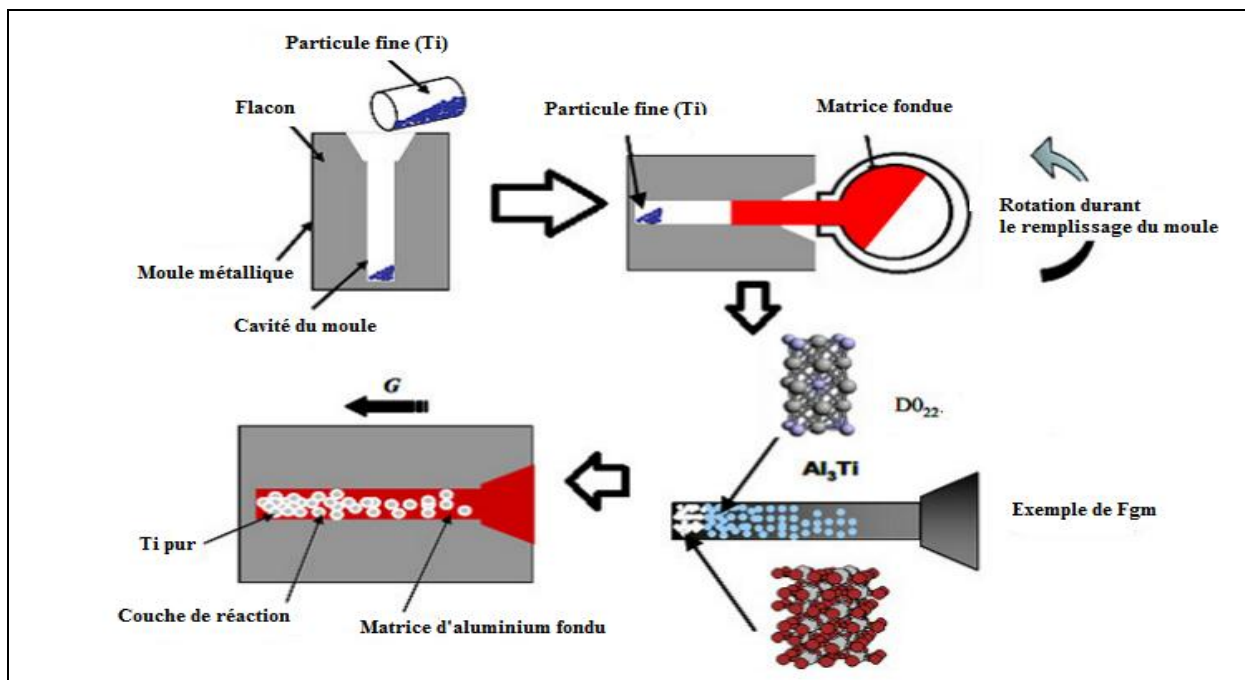


Figure II.8 : Le coulage centrifuge des poudres mixtes [78].

### II.5.4. Le coulage par barbotine (Slip casting)

Cette technique consiste à couler une suspension dans un moule poreux qui va drainer le liquide grâce aux forces capillaires, elle se décompose en deux étapes essentielles à savoir la prise ou le tesson se forme et le raffermissement dans cette étape le tesson se consolide. La filtration peut être considéré comme un processus d'élimination d'une partie de l'eau de la barbotine lors du coulage, cette eau migre à travers la couche de tesson déjà formée, sous l'effet du pouvoir de succion du plâtre ou d'une pression appliquée sur la barbotine (coulage sous pression). Dans le cas de la fabrication de multicouches, après la formation du premier tesson, le dépôt de la deuxième couche s'effectue de manière telle que la barbotine ne pénètre pas dans le tesson formé. Ce procédé est successivement reproduit pour les autres couches.

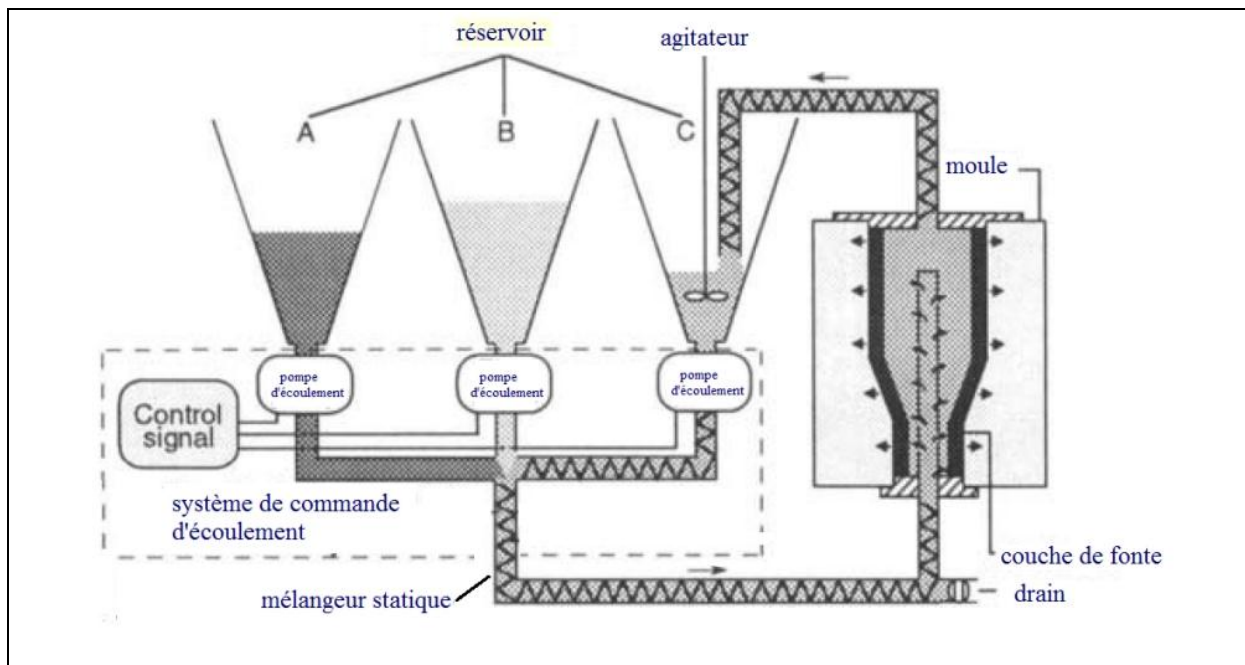
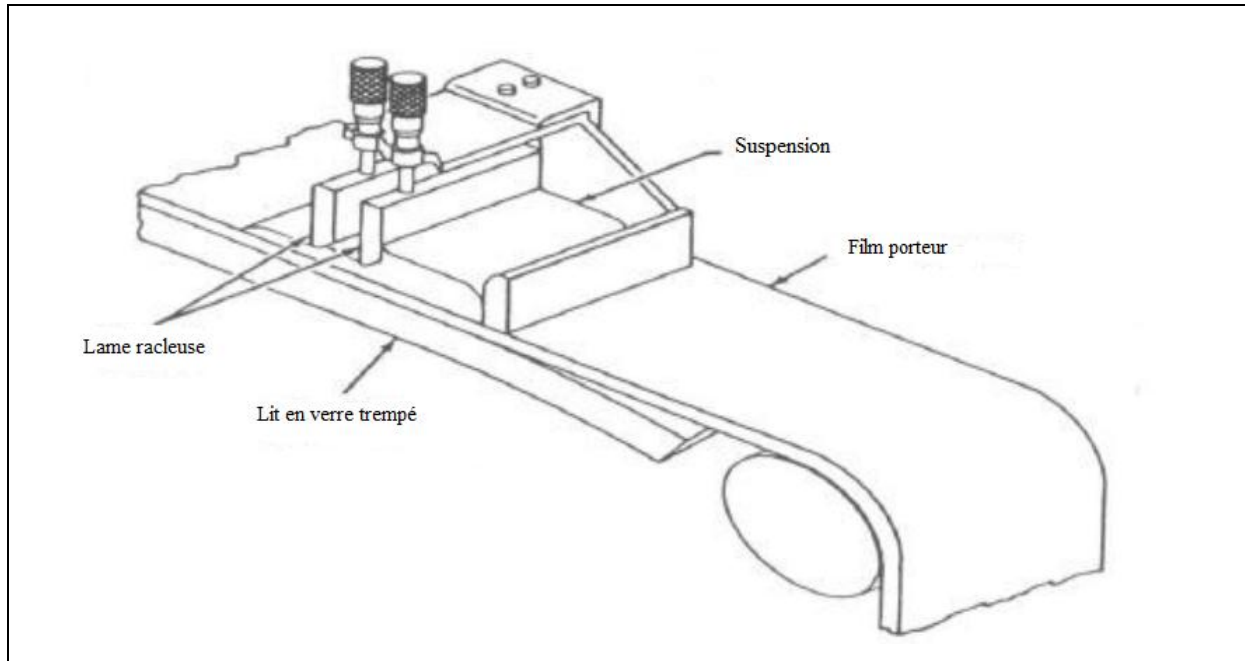


Figure II.9 : Principe du coulage par barbotine [79].

### II.5.5. Le coulage en bande (Tape Casting)

Le coulage en bande est une technique de mise en forme par voie liquide qui consiste à étaler une barbotine de poudres fines en suspension sur une surface plane en couches minces et régulières. L'étalement de la bande est obtenu par le mouvement relatif d'un réservoir ou sabot. La suspension est ainsi laminée par son passage entre la lame du réservoir et le support figure II.14, ce qui confère à la bande déposée une épaisseur uniforme sur toute sa longueur. La hauteur du couteau du réservoir par rapport au support détermine l'épaisseur de la bande

[80]. Les produits obtenus sont des feuillets avec des épaisseurs contrôlées (25-1000  $\mu\text{m}$ ). Après un raffermissement de la pâte, les feuillets sont démoulés et ensuite découpés.



**Figure II.10** : Principe du coulage en bande [80].

### II.5.6. Le frittage (Sintering)

Cette méthode est basée sur deux étapes la première consiste à fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité, la seconde est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique [81]. Cette technique convient à la fabrication d'un composite fonctionnellement gradué composé de matériaux qui sont chimiquement inertes avec des températures de fusion très différentes.

### II.5.7. La projection plasma (Plasma projection)

Cette méthode se consiste à soumettre un gaz à une forte température ce qui le transforme en état ionisé (plasma). Cette transformation est accompagnée d'un dégagement de chaleur important. Si une particule de céramique se trouve dans cet environnement, elle se fond totalement ou superficiellement, ce qui permet de la situer sur un substrat. La projection plasma des particules des divers matériaux est devenue une méthode très utilisée pour fabriquer des FGM. L'équipement relativement simple, le rendement élevé du dépôt des particules sur des substrats à géométrie compliquée, les performances des surfaces en

fonctionnement et la compatibilité des céramiques avec les métaux sont les avantages essentiels de cette technique [82].

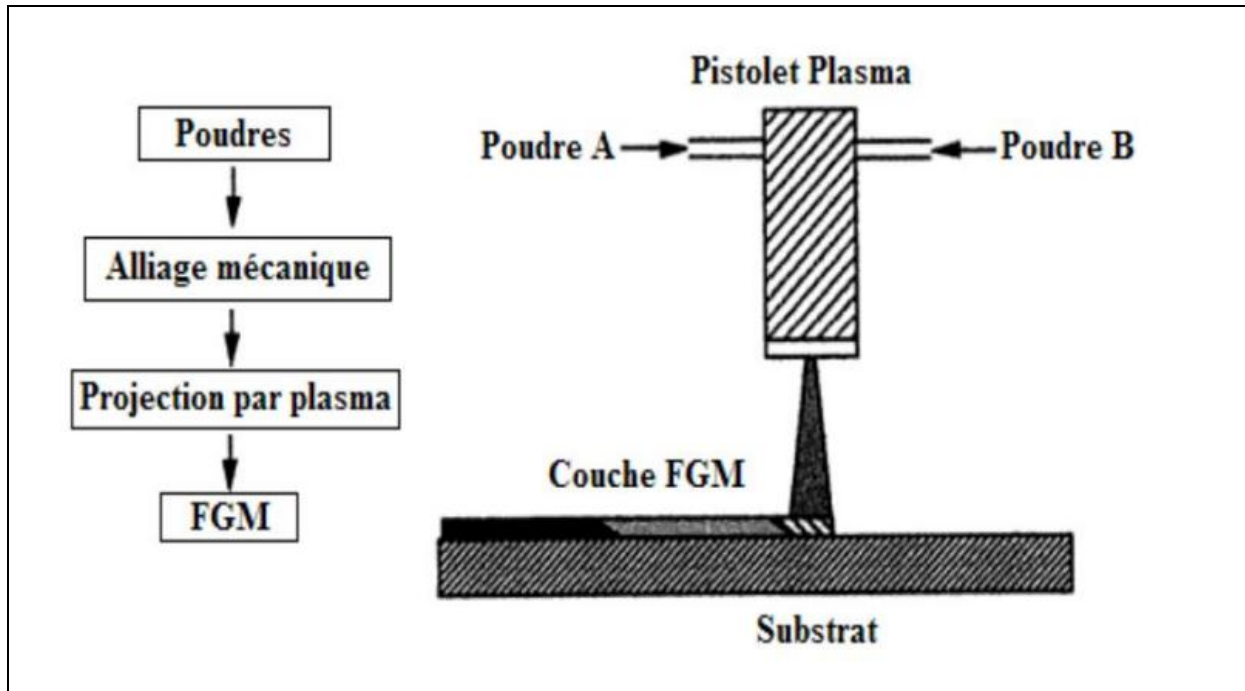


Figure II.11 : Fabrication d'une plaque FGM avec la projection plasma [82].

## II.6. Les branches d'applications des matériaux fonctionnellement gradués (FGM)

Les matériaux FGM sont largement utilisés pour des applications mécaniques soit en aérospatial ou aéronautique, électriques comme les diodes électroniques, les capteurs, les conducteurs de chaleur, et les dispositifs électroniques, et même dans les secteurs chimiques et biologiques. En raison du développement du concept de FGM dans les années 1990, leur utilisation pratique est encore très limitée. Grâce à leurs propriétés mécaniques et thermique ces matériaux sont utilisés dans des différentes domaines tel que

### II.6.1. L'aérospatiale

Le concept des matériaux fonctionnellement gradués a été initialement conçu pour l'industrie aéronautique car les FGM peuvent résister à des gradients thermiques très élevés, ceci les rend adéquat pour l'usage dans les structures et le corps des navettes spatiales ainsi pour les composants de moteur des fusées [83]. Les FGM sont très prometteurs et peuvent être utilisés dans des domaines plus larges de l'aérospatiale.

### II.6.2. La médecine

Les matériaux FGM ont trouvés une large gamme d'application dans les chirurgies dentaires et orthopédiques car ces tissus vivants, tels que les os et les dents, sont caractérisés

comme des matériaux fonctionnellement gradués de la nature [84], et pour les remplacer un matériau compatible est nécessaire d'où l'intérêt pour l'utilisation des matériaux fonctionnellement gradués

### **II.6.3. L'électronique**

Les FGM trouvent également leurs utilités dans l'électronique tel que les fibres optiques utilisées pour la transmission à haute vitesse d'onde, des cartes de circuits imprimés, les téléphones cellulaires et dans des supports de stockage magnétiques de disques audio-vidéo.

### **II.6.4. L'énergie**

Les matériaux fonctionnellement gradués sont utilisés dans les dispositifs de conversion d'énergie. Ils fournissent également une barrière thermique et sont utilisés comme revêtement de protection sur les pales de la turbine dans le moteur à turbine à gaz [76]. Les parois internes des réacteurs nucléaires sont faites avec des FGM (céramique / métal)

### **II.6.5. L'automobile**

Les cylindres de moteur de voiture sont faits de FGM. Leur phase interne est en céramique et la phase externe est métallique

### **II.6.6. La défense**

L'une des caractéristiques les plus importantes d'un matériau fonctionnellement gradué est sa capacité à empêcher la propagation des fissures. Cette propriété le rend utile dans l'application militaire, en tant que matériaux résistants à la pénétration d'armures des équipements et les gilets pare-balles [86].

### **II.6.7. Outils de coupe**

Les FGM sont utilisés dans les outils de coupe car ils améliorent la résistance thermique. La fissure se produit près de l'interface pointe-tige dans le type conventionnel mais avec les outils de coupe en FGM elle se produit par la relaxation dans la concentration de contrainte. [87].

**Tableau II.3** : Les propriétés des FGM et leurs applications significatives. [88,89,90]

| FGM  | Propriétés  | Application  |
|--|---|--|
| Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> / Alliage d'aluminium | Barrière thermique et anti-usure  | Buse à fusée, ailes et pièces moulées  |
| Fibre de verre / Epoxy                               | Résistance à la dureté et à l'amortissement   | Rotors de frein, dômes solaires, Systèmes de tuyauterie composite. Composants d'hélicoptères   |
| Carbone / Epoxy                                      | Légers et de bonnes propriétés d'amortissement  | Portes de trains d'atterrissage<br>Panneaux d'échangeurs de chaleur<br>Pièces de moteur  |
| TiAl / SiC<br>SiC/C                                  | Revêtements résistants aux températures et aux chocs  | Panneaux d'échange de chaleur, buse de fusée, structure de vaisseau spatial, panneaux solaires, réflecteurs et lames de roue de turbine. |
| Graphite / Epoxy                                     | Rapport résistance / raideur élevé, bonne résistance au rayonnement et réduit les distorsions thermiques. | Coques de pression cylindriques<br>Télescopes spatiaux<br>Réservoirs cryogéniques<br>Antennes satellites                                 |
| Alliage d'aluminium / Nanotubes de carbone (CNT)     | Légèreté et haute rigidité  | Ligaments artificiels, pièces de rechange pour scanner IRM, lunettes de verre et pièces de dentisterie.                                  |
| SiCw / Alliage d'aluminium                           | Résistance thermique, inertie chimique, dureté et ténacité  | Cylindres de stockage, pistons de moteurs diesel, cadres de vélo et véhicules de course  |
| WC / Co  | Propriété de résistance à la chaleur, à l'usure et à la déchirure   | Machines et les outils de formage, les outils de coupe et les os artificiels.  |
| Al / SiC   | Dureté et ténacité  | Chambres de combustion, Garnitures de cylindre moteur, Volants,  |
| BaTiO <sub>3</sub> / Si                              | Contrôle de perte de signal à haute fréquence   | Moteurs diélectriques  |

### II.7. Conclusion

Les matériaux FGM sont des excellents matériaux de pointe qui vont révolutionner le monde de la fabrication, ils ont été développés en combinant des matériaux d'ingénierie avancée sous forme de particules, de fibres, ou de plaquettes.

Le changement continu de leurs propriétés a pour but d'améliorer les performances structurelles, ils sont développés pour adapter une structure du matériau à l'échelle microscopique afin d'optimiser certaines propriétés fonctionnelles et améliorer des propriétés spécifiques dans la direction préférée, les rendant ainsi meilleurs que les matériaux homogènes constitués de composants similaires.

Ce chapitre présente un aperçu sur ces matériaux et l'historique de leur origine, les différentes méthodes de fabrication ont été mis en évidence, Leurs domaines d'application sont également présentés, ces derniers qui peuvent être améliorés et élargies en abaissant les coûts de fabrication et en améliorant les méthodes d'élaboration.



## **CHAPITRE III :**

# **REVUE GÉNÉRALE SUR LES THÉORIES DE DÉFORMATION DES PLAQUES FONCTIONNELLEMENT GRADUÉES**



## Chapitre III : Revue générale sur les théories de déformation des plaques fonctionnellement graduées

### III.1. Introduction

Pour pouvoir étudier un comportement quel que soit statique ou dynamique des structures ayant comme éléments structuraux des poutres, des plaques ou des coques en FGM dans le domaine élastique, il est nécessaire de bien choisir la théorie adéquate qui peut décrire correctement leurs comportements vis-à-vis des charges mécanique, thermique on pourra ainsi résoudre les différents problèmes de structures. En général, le comportement des matériaux fonctionnellement gradués (FGM) plaques ou coques sous des chargements mécaniques et thermiques peut être prédit en utilisant l'une des théories d'élasticité tridimensionnelle (3-D) ou d'autres théories de plaques monocouches « Equivalent single layer theory (ESL) ». Ces théories d'ESL tiennent en compte à la fois du cisaillement et des effets de déformation normale selon le niveau d'hypothèses. Le plus simple est le modèle de la théorie classique des plaques (CPT), également connue sous le nom de théorie de Love-Kirchoff [91], qui ne tient pas compte du cisaillement et des effets de déformation normale. Ainsi, il n'est adapté que pour les plaques FGM minces.

La théorie suivante dans la hiérarchie des modèles ESL est la théorie de déformation de cisaillement de premier ordre (FSDT) développé par Mindlin [4]. La FSDT prend en considération la déformation de cisaillement par la voie d'une variation linéaire et des déplacements dans le plan à travers l'épaisseur, de ce fait un facteur de correction de cisaillement est donc nécessaire. Le facteur de correction de cisaillement est difficile à déterminer car elle ne dépend pas seulement des paramètres géométriques mais aussi du chargement et des conditions aux limites, et pour éviter l'utilisation de ce facteur, les théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur (HSDT) ont été introduites.

Les théories HSDT peuvent être développées en élargissant les composantes de déplacement en séries de puissances de l'épaisseur et de coordonnées. Parmi les théories de déformation de cisaillement HSDT, la théorie de troisième ordre (TSDT) de Reddy [92] est largement la plus employée en raison de sa simplicité et de sa précision.

En 1888 le mathématicien anglais Augustus Edward Hough Love a développé une nouvelle théorie pour des plaques minces connue sous le nom de la théorie classique des plaques « Classical plate theory (CPT) » [91] en utilisant les hypothèses de Gustav Kirchhoff [2] qui elles-mêmes ont inspirées des hypothèses d'Euler-Bernoulli pour les poutres. Après en se basant sur des travaux de Rayleigh [93], Timoshenko [94], Reissner [3] et Uflyand [95] que Mindlin a pu fonder une théorie pour des plaques minces et moyennement épaisses appelée la théorie de déformations du premier ordre « First order shear deformation theory (FSDT) » [4].

Ensuite, On a vu l'apparition des nouvelles théories de déformations à ordre élevé « High-order shear deformation theory (HSDT) », qui ont pu améliorer les hypothèses des théories classiques et du premier ordre pour le cas des plaques avec des épaisseurs plus importantes. Finalement on a les théories basées sur l'élasticité tridimensionnelle (théorie 3-D) qui ne font pas d'hypothèses contraignantes sur les déplacements des plaques.

### III.2. Définition d'une plaque

Une plaque est un solide défini par une surface de référence plane  $(x,y)$  et une épaisseur, petite par rapport aux autres dimensions à savoir sa longueur et sa largeur (Figure III.1). On définit :

- **Le plan moyen (plan médian) :** plan situé à équidistance entre les faces.
- **La fibre neutre :** élément de matière d'épaisseur infinitésimale situé autour du plan moyen  $(O, x, y)$ , avec  $z = 0$ .
- **Une fibre normale :** ensemble des points situés sur une normale au plan médian, à un endroit  $(x, y)$  donné ; elle a pour direction  $z$ .
- **L'épaisseur  $h$  :** l'épaisseur de la plaque ; le plan inférieur est donc le plan  $z = -h/2$  et le plan supérieur est le plan  $z = h/2$ .

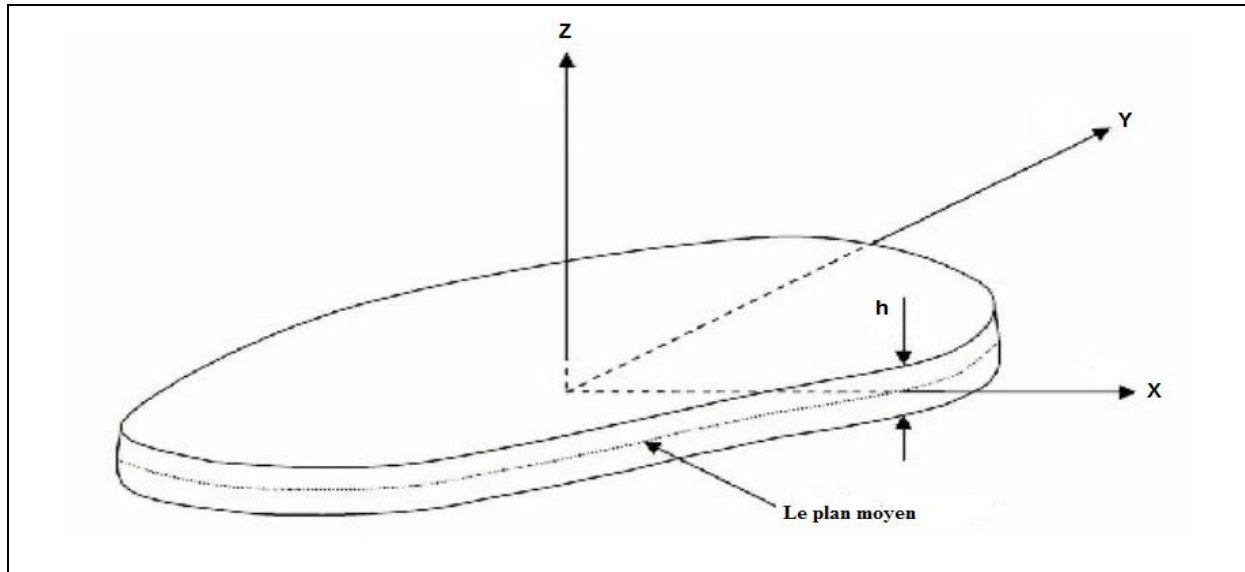


Figure III.1 : Exemple de plaque d'une géométrie quelconque.

### III.3. Les théories d'élasticité tridimensionnelle (3-D)

La reconversion vers les matériaux fonctionnellement gradués devient de plus en plus fréquente dans divers domaines et particulièrement l'aéronautique et aérospatial. Ce qui a incité les chercheurs à développer des théories capables de décrire correctement leur comportement structural. L'étude du comportement des plaques fonctionnellement graduées vis-à-vis des chargement mécanique et thermique reste un problème tridimensionnel de ce fait l'utilisation des théories d'élasticité tridimensionnelle (3-D) peut s'avérer très utile. Au cours des vingt dernières années beaucoup de chercheurs se sont intéressés aux théories de l'élasticité 3-D pour pouvoir développer des solutions plus exactes des comportements mécaniques et thermiques des plaques FGM et valider les résultats des modèles ESL.

En 1999 Ootao et Tanigawa [96]. Ont développé des solutions exactes pour des problèmes de contraintes thermiques des plaques FGM simplement appuyées. Reddy et Cheng [9] ont étudié l'analyse de la flexion des plaques carrées en FGM simplement appuyées sous un chargement thermique. Vel et Batra se sont aussi intéressés à l'étude thermoélastique des plaques carrées en FGM en adoptant une méthode de séries de puissances [97] Une année après ils ont développé leurs travaux pour analyser les problèmes de conduction de chaleur transitoire des plaques FGM simplement supportées soumises à une variation de température graduelle [98].

En utilisant la méthode de d'état d'espace qu'Alibeigloo a effectué une analyse de la flexion des plaques FGM sous charges thermiques et mécaniques [99]. Au cours des années qui suivent pas mal de travaux en était enregistré dans le cadre de l'étude statique sous des chargements thermiques et mécaniques des plaques en FGM comme Kashtalyan [100], Zhong et Shang [101], Xu et Zhou [102], Woodward et Kashtalyan [103], Wen et Sladek [104] Et Abali [105] en employant des théories de l'élasticité tridimensionnelle (3-D).

Des études tridimensionnelles de vibration des plaques FGM ont été initialement développées par Vel et Batra [60] à l'aide de la méthode de séries de puissances pour des plaques simplement appuyées en FGM. Ensuite Aydogdu et Uymaz ont présenté des solutions exactes en utilisant les théories 3-D pour la vibration libre des plaques FGM avec des différentes conditions aux limites [106].

En utilisant la méthode de Ritz avec les fonctions de déplacement de Chebyshev que Li et al ont effectué une analyse 3-D de la vibration libre des plaques sandwichs en FGM simplement appuyées, des fréquences naturelles ont été obtenues pour deux types de plaques sandwichs en FGM, une plaque sandwich avec un noyau homogène et une plaque sandwich avec des faces homogènes [107]. Yas et Tahouneh ont examiné les réponses de vibration libre des plaques annulaires en FGM reposant sur des fondations élastiques. La théorie d'élasticité tridimensionnelle et la méthode des différences quadratiques ont été utilisés pour obtenir des fréquences propres [108]. D'autres études dynamiques été menées pour des plaques fonctionnellement graduées reposant sur des fondations élastiques on peut citer Amini et al [109], Lu et Lim [110], Malekzadeh [111,112] et Reddy et Kant [113].

L'analyse tridimensionnelle du flambage des plaques FGM sous des chargements thermique et mécanique a aussi susciter beaucoup d'intérêt par exemple Na et Kim ont étudié le comportement 3-D du flambage des plaques FGM sous un chargement thermique linéaire et sinusoïdale à travers l'épaisseur en employant l'hypothèse d'une couche mixte [114] ensuite Na et Kim ont employé la méthode des éléments finis pour pouvoir étudier le post-flambement thermique des plaques FGM sous des chargements uniformes ou non uniformes. Un élément solide de 18 nœuds basé sur le théorème de Lagrange a été développé pour tenir compte de la forte déformation.

Les itérations de Newton-Raphson ont été utilisées pour déterminer l'équilibre post-flambement [114]. Le post-flambement de plaques tabulaires en FGM a été étudié par Asemi et à l'aide de la théorie d'élasticité 3D et la méthode des éléments finis [115].

On peut constater que l'avantage majeur des solutions basées sur les théories d'élasticité tridimensionnelle est que ces dernières ne nécessitent aucune hypothèse restrictive

### III.4. Les théories des plaques monocouches (ESL)

#### III.4.1. La théorie classique des plaques de Love-Kirchhoff (CPT)

La théorie classique des plaques CPT est fondée sur les hypothèses de Love-Kirchhoff, selon lesquelles une droite normale au plan moyen de la plaque reste perpendiculaire après déformation ce qui revient à négliger les effets de déformation en cisaillement transverse. Cette théorie est considérée comme le modèle le plus simple des théories ESL et elle ne convient qu'aux plaques minces où la flèche générée par les déformations de cisaillement reste négligeable devant la flèche générée par la courbure de la plaque. Dans le cas d'une plaque homogène isotrope, la part de cisaillement dans la flèche est directement reliée à l'élancement ( $L/h$ ). Timoshenko et Woinowsky-Krieger [116] Et Ashton et Whitney [117].

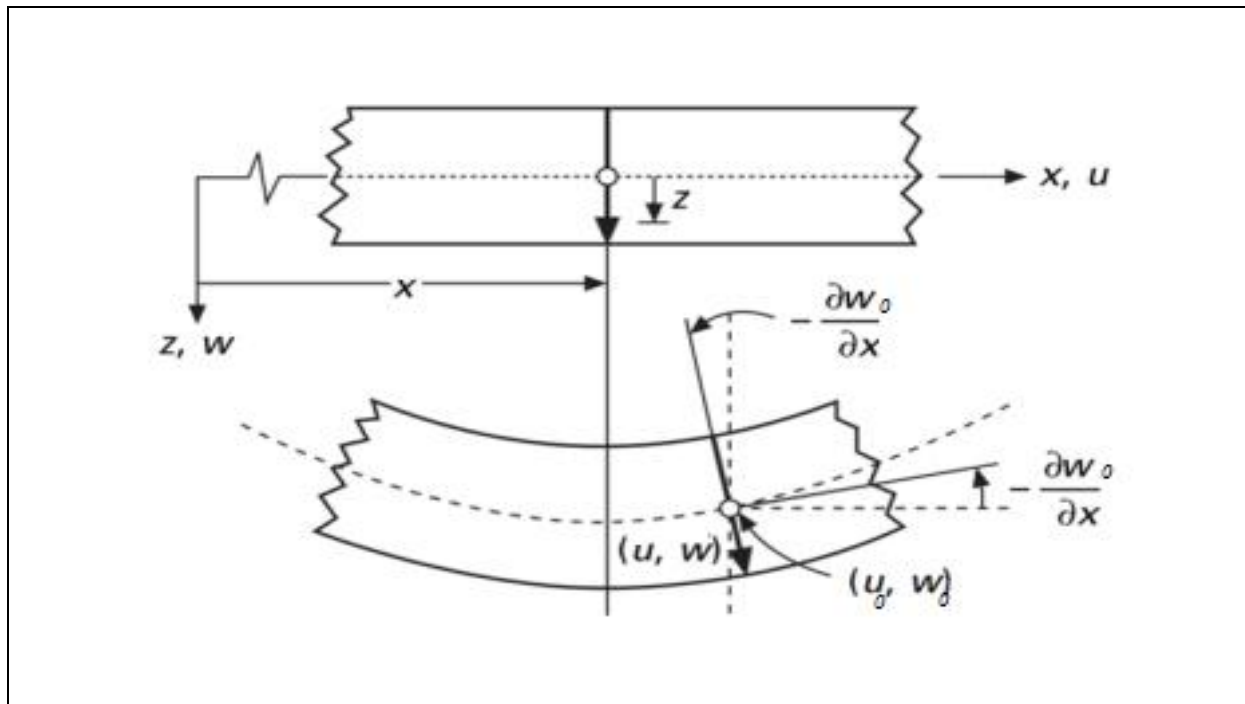
A partir des hypothèses ci-dessus, le champ de déplacement peut s'écrire tel qui suit :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad (\text{III.1.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y}, \quad (\text{III.1.b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y), \quad (\text{III.1.c})$$

Avec  $(u_0, v_0, w_0)$  sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ( $z = 0$ ).



**Figure III.2 :** Schématisation des déformations des plaques par la théorie classique « CPT ».

L'effet de la déformation en cisaillement transverse augmente d'une manière significative lorsque le rapport d'élancement  $h/a$  ou  $h/b$  est supérieur ou égal à 0.05. Etant donné que cette théorie néglige la flexibilité de cisaillement transverse, ceci conduit à des résultats imprécis pour des plaques épaisses qui peuvent être interprétées par une surestimation de la rigidité de flexion et par conséquent une surestimation des fréquences propres de vibration et une sous-estimation des déplacements.

### III.4.2. La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)

Contrairement à la théorie classique des plaques CPT, la théorie de Mindlin suppose que les sections droites, initialement normales au plan moyen, restent planes et non nécessairement perpendiculaire à celui-ci après déformation. D'autres variantes de la théorie supposent que ces sections ne restent ni droites, ni normales après déformation. Dans la littérature on peut trouver trois approches d'approximation pour les plaques épaisses à savoir (Mindlin [4], Reissner [3], et Ambartsumyan [118]).

L'approche de Reissner [3] suppose un champ de déplacement mixte contenant les contraintes normales dans le plan et les contraintes de cisaillement. L'approche de Henchy-Mindlin [4] suppose un champ de déplacement linéaire dans le plan à travers l'épaisseur, tandis que l'approche d'Ambartsumyan [118] suppose un champ de contraintes normales et de cisaillement. Etant donné que théorie de déformation en cisaillement du premier ordre

(FSDT) ne satisfait pas les conditions aux limites au niveau des surfaces supérieure et inférieure de la plaque (contraintes de traction non nulles), un facteur de correction en cisaillement à travers l'épaisseur est nécessaire. La valeur de ce facteur de correction dépend de la géométrie de la plaque, de la variation du coefficient de Poisson à travers l'épaisseur, du chargement appliqué et des conditions aux limites imposées. Le champ de déplacement de la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre est donné par :

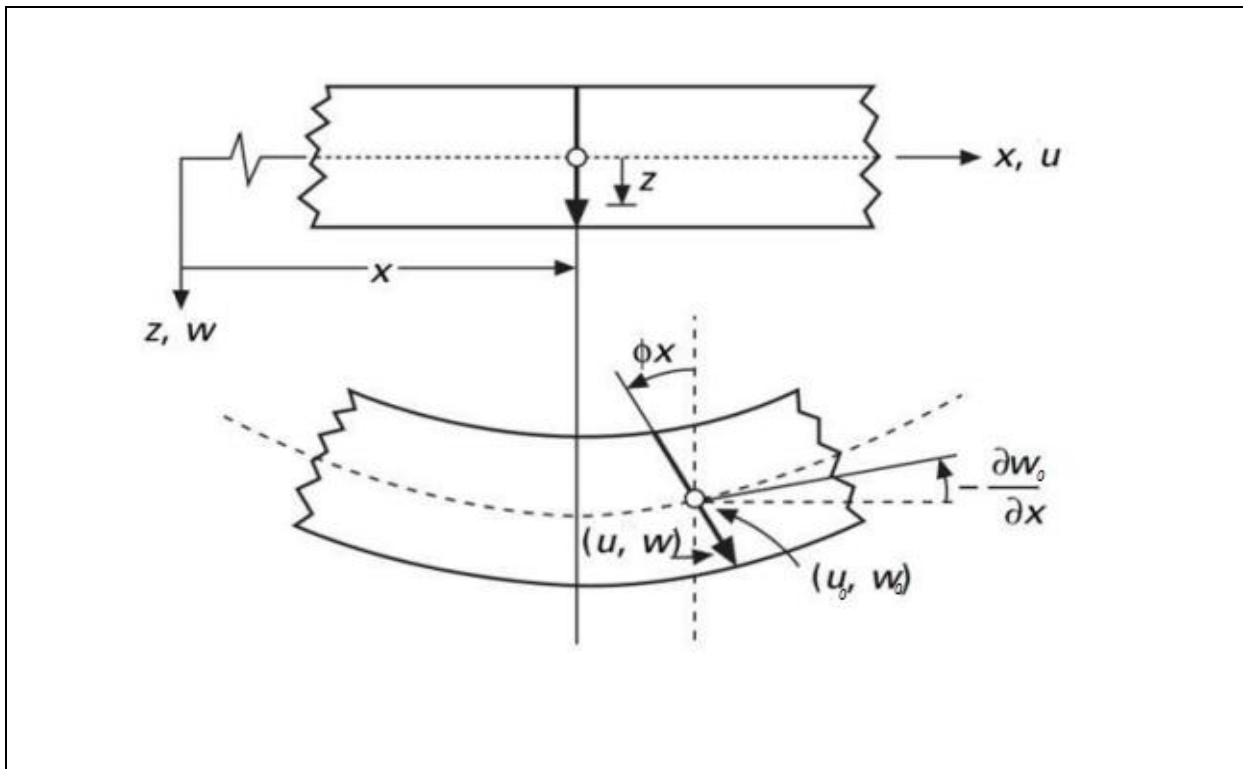
$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\phi_x(x, y), \quad (\text{III.2.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) + z\phi_y(x, y), \quad (\text{III.2.b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y), \quad (\text{III.2.c})$$

Avec :  $(u_0, v_0, w_0)$  sont les déplacements en membrane et  $(\phi_x, \phi_y)$  les rotations autour des

axes x et y, respectivement données par :  $\phi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x}$ ,  $\phi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y}$ .



**Figure III.3** : Schématisation des déformations des plaques par la théorie « FSDT ».

### III.4.3. La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)

Pour éviter l'utilisation d'un facteur de correction en cisaillement et pour tenir compte d'hypothèses plus réalistes que celles de Kirchhoff, plusieurs théories d'ordre élevé ont été proposées par Naghdi [58], Reddy [92,118-120], Iyengar et al. [121,122], Krishna Murty [123-125]. Généralement ces théories utilisent un développement en série de Taylor à travers l'épaisseur du champ de déplacement avec la forme suivante :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\phi_\alpha(x, y) + z^2\phi_\alpha^2(x, y) + \dots + z^n\phi_\alpha^n(x, y)$$

Où  $n$  détermine l'ordre utilisé dans le modèle. Dans la théorie de Kirchhoff-Love  $n=0$ . La théorie de Reissner-Mindlin est une théorie du premier ordre avec  $n=1$  pour les déplacements dans le plan et  $n=0$  pour le déplacement normal.

La figure III.4 montre une cinématique schématique d'un modèle d'ordre élevé.

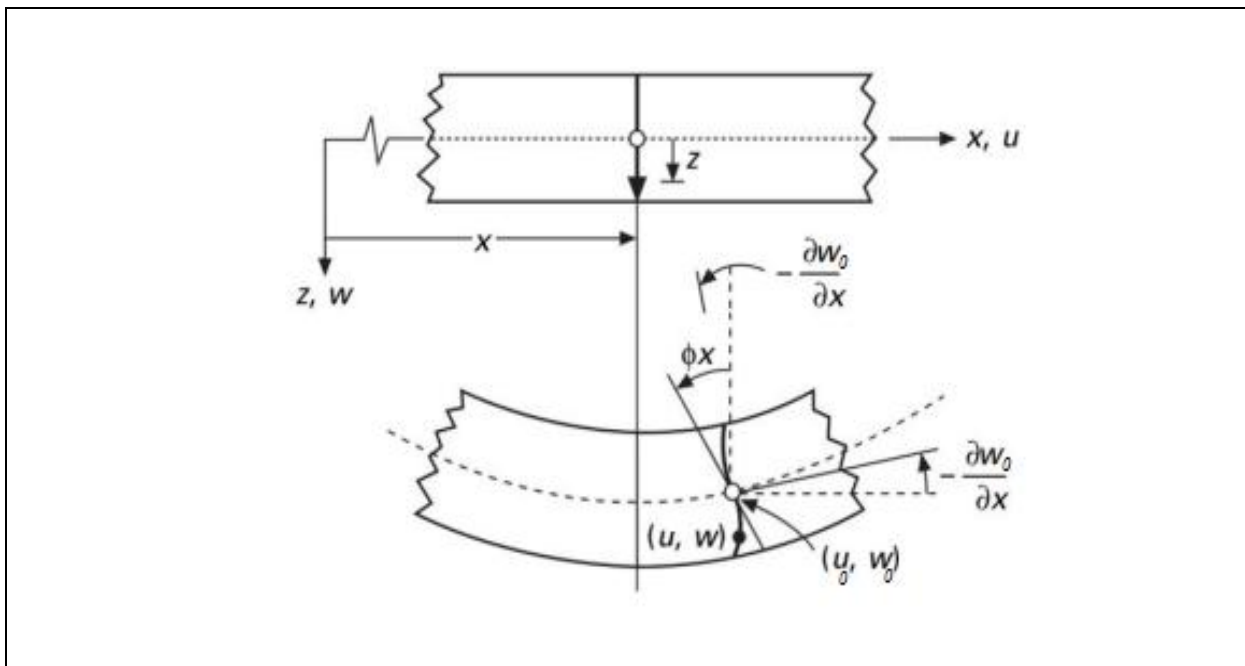


Figure III.4 : Schématisation des déformations des plaques par la théorie « HSDT ».

Selon Reddy [126] et Mallikarjuna et Kant [127] les hypothèses qui sont à l'origine du développement de ces théories d'ordre élevé sont :

- Les déplacements sont petits comparés à l'épaisseur de la plaque.
- Les sections transversales, initialement planes et normales au plan moyen, ne restent pas nécessairement planes et normales à celui-ci après déformation.
- La déformation axiale dans la direction transversale n'est pas négligeable.
- La contrainte normale dans la direction transversale n'est en général pas négligeable.

La plupart des théories d'ordre élevé (HSDT) sont basées sur les approches de Reissner [3], Henchy-Mindlin [4] et d'Ambartsumyan [118] Et leur champ de déplacements s'écrit sous la forme suivante :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + f(z) \phi_x(x, y), \quad (\text{III.3.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + f(z) \phi_y(x, y), \quad (\text{III.3.b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y), \quad (\text{III.3.c})$$

Où  $(u_0, v_0, w_0)$  sont les déplacements en membrane et  $(\phi_x, \phi_y)$  les rotations autour des axes  $x$  et  $y$  respectivement ;

$$\text{On pose aussi } \varphi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x, \varphi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y$$

$f(z)$  est une fonction de cisaillement transverse caractérisant les théories correspondantes. On remarque que les déplacements de la théorie classique des plaques (CPT) peut être obtenue en prenant  $f(z) = 0$ , tandis que la théorie de premier ordre (FSDT) est obtenue par une fonction  $f(z) = z$ .

Reddy avait proposé une théorie de déformation de cisaillement du troisième ordre (TSDT) [5] qui peut être obtenus par :

$$f(z) = z \left( 1 - \frac{4}{3h^2} z^2 \right) \quad (\text{III.4})$$

Dans ce modèle le champ de déplacement membranaire est cubique, la distribution des contraintes de cisaillement transverse est parabolique dans l'épaisseur et les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites. D'où on peut obtenir une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution d'élasticité tridimensionnelle.

Touratier a proposé un modèle SSDT (The sinusoidal shear deformation plate theory) en utilisant une fonction trigonométrique sinusoïdale pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur qui est différent des autres modèles d'ordre supérieur qui utilise des fonctions polynomiales [6] Cette fonction s'écrit comme ci-dessous :

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (\text{III.5})$$

Les contraintes de cisaillement transverses déterminées par le modèles SSDT prennent une forme cosinusoïdale dans l'épaisseur de la plaque. Ce modèle est considéré plus précis par rapport à la théorie TSDT de Reddy.

Une version exponentielle de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The exponential shear deformation plate theory ESDT) a été développée par Karama et al. [7] en prenant la fonction suivante :

$$f(z) = ze^{-2(z/h)^2} \quad (\text{III.6})$$

D'autres théories d'ordre élevé ont été développées en utilisant des différentes fonctions de cisaillement transverse le tableau III.1 montre les différentes fonctions caractérisant chaque théorie.

**Tableau III.1** : Différentes fonctions de forme des théories HSDT pour des plaques FGM

| Théorie          | Fonction de forme $f(z)$  |
|------------------|---|
| Reddy [5]        | $f(z) = z(1 - \frac{4}{3h^2} z^2)$  |
| Touratier [6]    | $f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)$   |
| Karama [7]       | $f(z) = ze^{-2(z/h)^2}$   |
| Reissner [128]   | $f(z) = \frac{5z}{4}(1 - \frac{4}{3h^2} z^2)$   |
| Soldatos [129]   | $f(z) = h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) - z \sinh\left(\frac{1}{2}\right)$  |
| Mantari [130]    | $f(z) = \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) e^{m \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right)} + m \left(\frac{\pi z}{h}\right)$     |
| Ait Atmane [131] | $f(z) = \frac{\cosh(\pi/2)}{[\cosh(\pi/2)-1]} z - \frac{(h/\pi) \sinh\left(\frac{\pi}{h} z\right)}{[\cosh(\pi/2)-1]}$ |
| Elmeiche [132]   | $f(z) = \frac{h/\pi \sin(\pi z/h)}{[\cosh(\pi/2)-1]} - z$   |
| Aydogdu [133]    | $f(z) = z\alpha^{\frac{2(z/h)^2}{\ln(\alpha)}}, \alpha > 0$   |
| Nguyen [52]      | $f(z) = \sinh^{-1}\left(\frac{3z}{h}\right) - z\left(\frac{6}{h\sqrt{13}}\right)$                                     |

#### III.4.4. La théorie raffinée de déformation des plaques (RPT)

Afin de réduire le nombre de variables utilisées dans les formulations des théories à ordre élevé, Shimpi a pu développer en 2002 un modèle raffiné pour les plaques isotropes qu'on a nommé la théorie raffinée de déformation des plaques RPT (Refined Plate Theory) [134]. Cette méthode propose des caractéristiques très intéressantes tel que la non nécessité d'un coefficient de correction en cisaillement et qu'elle présente beaucoup de similitudes avec la théorie classique des plaques (CPT) quant aux équations du mouvement, les conditions aux limites et les expressions des moments. La fiabilité de cette méthode a été démontrée par Kim, Thai et al. [135] et Ait Atmane, Tounsi et al. [131] pour le cas de la flexion statique et pour le cas du flambage d'une plaque composite. Récemment Thai et Kim [136] et Hadji et al.

[137] ont adapté la RPT avec succès au flambage des plaques orthotropes, et à la vibration libre des plaques stratifiées et sandwiches respectivement.

Cette théorie propose le champ de déplacement suivant :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial x} + f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial x}, \quad (\text{III.7.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial y} + f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial y}, \quad (\text{III.7.b})$$

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y), \quad (\text{III.7.c})$$

Où  $(u_0, v_0)$  sont les déplacements dans les directions x et y d'un point situé sur le plan médian de la plaque

$(w_b, w_s)$  Sont respectivement les composantes de flexion et de cisaillement du déplacement transversal et  $f(z)$  est une fonction de cisaillement transverse

#### III.4.5. La théorie de déformation des plaques quasi-3D

En divisant le déplacement transversal en plusieurs composantes dont la flexion, le cisaillement et en prenant en considération l'effet de d'étirement de l'épaisseur de la plaque, Thai et Kim [138] ont proposé une théorie de déformation des plaques quasi-3D à cinq variables comme la théorie de la déformation au cisaillement de premier ordre (FSDT), contrairement à 6 pour les théories conventionnelles à ordre élevé. Hebali et Tounsi [25], Tounsi et Houari [15], Hamidi et Tounsi [19], Thai [139], Bessaim [140] et Bennoun [141] ont proposé à l'aide de différentes fonctions de forme plusieurs méthodes analogiques de cinq-inconnues quasi-3D, En apportant des nouvelles hypothèses pour les théories quasi-3D à six-variables que Zenkour a pu proposer une nouvelle théorie quasi-3D à quatre-variables pour les plaques FGM [142], les plaques sandwich [143] et des plaques composites stratifiées [144]. Mantari et Guedes Soares [145,146] ont aussi proposé une théorie quasi-3D simples à quatre variables pour des plaques fonctionnellement gradués en combinant l'effet de cisaillement et l'effet d'étirement du déplacement transversal à l'aide d'une fonction hyperbolique.

Cette théorie est donnée par le champs de déplacement suivant :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial x}, \quad (\text{III.8.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial y}, \quad (\text{III.8.b})$$

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) + g(z)\varphi(x, y), \quad (\text{III.8.c})$$

Où  $(u_0, v_0)$  sont les déplacements dans les directions x et y d'un point situé sur le plan médian de la plaque

$(w_b, w_s)$  sont respectivement les composantes de flexion et de cisaillement du déplacement transversal,  $\varphi$  est un déplacement supplémentaire  $\varphi$  qui prend en considération l'effet de la contrainte normale (l'effet d'étirement) et  $f(z)$  et  $g(z)$  sont des fonctions de cisaillement transverse

Avec

$$g(z) = 1 - f'(z) \quad (\text{III.9})$$

#### III.5. Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté les différentes théories de déformation des plaques soit celles qui se basent sur la théorie tridimensionnelle d'élasticité ou sur les théories des plaques monocouches en commençant à savoir la théorie classique et la théorie du premier ordre, en passant par les théories d'ordre élevé. A la fin du chapitre, on a eu l'occasion dévoilé une nouvelle théorie de déformation en cisaillement des plaques quasi 3D qui prend en considération l'effet de l'étirement de l'épaisseur cette théorie permet de réduire le nombre d'inconnus à cinq réduisant ainsi les temps de calcul.

Dans le cadre de ce travail de recherche. On va appliquer cette théorie de déformation quasi 3D pour analyser la flexion des plaques sandwichs en FGM sous effet d'un chargement thermomécanique et pour sa validation, on comparera les résultats avec ceux obtenus avec les différentes théories trouvées dans la littérature.



## **CHAPITRE IV :**

**FORMULATIONS THÉORIQUES DE L'ANALYSE  
THERMOMÉCANIQUE DES PLAQUES SANDWICH  
EN FGM EN UTILISANT UNE NOUVELLE  
THÉORIE QUASI 3-D**

## **Chapitre IV : Formulations théoriques de l'Analyse thermomécanique des plaques sandwich en FGM en utilisant une nouvelle théorie quasi 3-D**

### **IV.1. Introduction**

Chaque théorie utilisée pour résoudre un problème de la mécanique des milieux continus a comme objectif un calcul approximatif des grandeurs généralisées sur la base d'un système d'équations d'équilibre, de compatibilité et de conditions aux limites sur les bords de la structure, complétée par une loi de comportement reliant les contraintes et les déformations généralisées.

Ce chapitre représente une modélisation du comportement thermomécanique des plaques sandwichs en FGM et pour cela on a proposé une formulation analytique du problème statique des plaques sandwichs FG sous un chargement thermomécanique en utilisant un nouveau type de théorie de déformation de cisaillement de type quasi-3D cette théorie prend en considération l'effet de l'étirement de la plaque dans la direction de l'épaisseur « stretching effect ». L'addition du terme intégral dans le champ de déplacement conduit à une réduction du nombre de variables et des équations gouvernantes.

Les faces de la plaque sandwich sont considérées comme ayant une variation de matériau isotrope à deux constituants (métal-céramique) dans l'épaisseur, et le module d'Young, le coefficient de Poisson et le coefficient de dilatation thermique des faces sont censés changer selon une variation de la loi de puissance en fonction de la fraction volumique des constituants. La couche centrale reste homogène et fabriquée par un matériau céramique isotrope. Les équations gouvernantes pour l'étude de flexion thermomécanique sont déterminées par le principe des travaux virtuels. Les solutions analytiques de type Navier sont utilisées pour les plaques sandwichs fonctionnellement graduées sous un chargement thermomécanique pour des conditions aux limites simplement supportées.

## IV.2. Revue des travaux d'analyse des plaques sandwich fonctionnellement graduées

L'objet de notre travail porte sur l'élaboration d'une nouvelle théorie de type quasi-3D pour étudier la réponse statique des plaques sandwichs fonctionnellement graduées sous un chargement thermomécanique. Beaucoup de travaux relatifs au domaine d'analyse de la flexion et la vibration des plaques FGM sous des chargement thermiques et mécaniques ont été publiés durant les dix dernières années.

Shariyat [147] a proposé une étude de flexion linéaire et non linéaire de la plaque sandwich sous des charges thermomécaniques basées sur la théorie locale de superposition double 3D généralisée. Xiang et al. [10] ont étudié le comportement de la flexion des plaques sandwich soumises à des charges mécaniques en utilisant plusieurs théories d'ordre élevé. Reddy et Cheng [9] ont présenté un modèle tridimensionnel pour une plaque fonctionnellement graduée soumise à des charges mécaniques et thermiques, appliquées toutes deux au sommet de la plaque.

Cetkovic et Vuksanovic [11] ont employé un modèle généralisé en couches pour étudier les plaques sandwich sous des charges mécaniques. Ce modèle considère la variation transversale des composantes de déplacement dans le plan en termes d'éléments finis Lagrangiens linéaires une seule dimension. Natarajan et Manickam [12] ont utilisé un élément de plaque quadrangulaire avec 13 degrés de liberté par noeud basé sur une théorie d'ordre élevé (HSDT) pour examiner la réponse statique des plaques sandwich fonctionnellement graduées. Grover et al. [13] ont proposé une nouvelle théorie de déformation du cisaillement hyperbolique inverse pour le comportement de flexion et de flambement des plaques sandwiches, en considérant un champ de déplacement avec 5 variables sans effet d'étirement de l'épaisseur. Golmakani [148] a étudié l'analyse de la déflexion non linéaire d'un disque en FGM solide et creux rotatif axisymétrique avec une épaisseur uniforme et variable sous charges thermiques et mécaniques.

Matsunaga [65] a modélisé le champ de déplacement avec la série de puissance de la coordonnée d'épaisseur pour l'étude de plaques FG soumises à des charges thermiques et mécaniques basées sur une théorie 2D HSDT. Talha et Singh [150] ont analysé les propriétés thermomécaniques induites par la vibration des plaques FGM basées sur une théorie HSDT modifiée. Sobhy [17] a analysé la stabilité et la réponse dynamique de plaques sandwich graduées exponentiellement reposant sur des fondations élastiques sous diverses conditions aux limites.

L'équipe de recherche dirigé par le professeur Tounsi en sein du laboratoire des matériaux et d'hydrologie de Sidi Bel-abbes, Algérie se sont beaucoup intéressé à l'étude du comportement statique et dynamique des plaques en FGM et on peut citer quelques travaux comme ceux mené par Houari et al. [14] qui ont étudié le comportement des plaques sandwich FGM sous charge thermique en employant une théorie HSDT avec une influence d'étirement d'épaisseur. Ou Saidi et al. [16] qui ont étudié la réponse de flexion thermomécanique des plaques sandwiches FGM en considérant un champ de déplacement ayant six variables avec un effet d'étirement d'épaisseur. Ait Amar Meziane et al. [149] ont proposé une théorie de déformation à cisaillement efficace pour analyser les vibrations et le comportement au flambage des plaques sandwich à gradient exponentiel reposant sur une fondation élastique sous différentes conditions de support.

Tounsi et al. [15] ont proposé une analyse de flexion des plaques sandwich avec un noyau FG basé sur une HSDT raffiné. Bachir Bouiadjra et al. [18] ont étudié le flambement thermique des plaques fonctionnellement graduées en utilisant une théorie raffinée de déformation de cisaillement des plaques à quatre variables. Mahi et al. [151] ont développé une nouvelle théorie de déformation par cisaillement hyperbolique pour la flexion et l'analyse par vibration libre de plaques composites isotropes à gradation fonctionnelle sandwich et stratifiées. Boudarba et al. [152] ont analysé la réponse statique thermomécanique des plaques épaisses FGM reposant sur des fondations élastiques de Winkler-Pasternak. Hamidi et al. [19] ont proposé une théorie des plaques sinusoïdales à 5 variables et un effet d'étirement pour la flexion thermomécanique des plaques sandwiches FG. Bouguenina et al. [20] ont présenté une analyse numérique des plaques FG à épaisseur variable soumises à un flambement thermique. Bouchafa et al. [153] ont étudié les contraintes thermiques et les déflexions des plaques sandwiches FG en utilisant une nouvelle théorie de déformation à cisaillement hyperbolique raffinée.

Attia et al. [154] ont étudié le comportement dynamique des plaques FG avec des propriétés dépendant de la température en utilisant quatre différentes théories de plaques raffinées. Bellifa et al. [155] ont étudié le comportement de la flexion et de la vibration libre des plaques FGM en utilisant une théorie simple de la déformation par cisaillement et le concept de la position de surface neutre. Bennoun et al. [141] ont proposé une nouvelle théorie des tôles raffinées à cinq variables pour l'analyse des vibrations des plaques sandwiches en FGM. Ait Yahia et al. [156] ont étudié la propagation des ondes dans des plaques FG avec des porosités utilisant diverses théories de la déformation de cisaillement de

plus haut ordre. En 2016, Bounouara et al. [157] ont présenté une théorie de déformation par cisaillement non locale pour la vibration libre de plaques de FG nano scopiques reposant sur une fondation élastique.

Tounsi [158] a présenté une nouvelle théorie des plaques non polynomiales de 3 inconnues pour le flambage et la vibration de la plaque sandwich FG. Tagrara et al. [159] ont présenté une étude sur les réponses de flexion, de flambement et de vibration des poutres fonctionnellement graduées renforcées par des nanotubes de carbone. Aissani et al. [160] ont développé une nouvelle théorie de déformation de cisaillement hyperbolique non locale pour des nano-poutres incorporées dans un milieu élastique. De plus, Houari et al. [22] ont proposé une nouvelle théorie simple de déformation à cisaillement sinusoïdal à trois inconnues pour les plaques FGM.

D'autre part, au cours des dernières années pas mal de chercheurs indiens se sont intéressés à l'étude des plaques FGM. Kar et Panda [21] ont étudié la réponse de flexion de déformation importante de la coque sphérique en FGM en utilisant la méthode des éléments finis « MEF ». Ils ont étudié après le comportement de flexion non linéaire du panneau plat composite stratifié sous charge hygro-thermomécanique [161]. Dans la même année ils ont analysé la vibration non linéaire en flexion du panneau de coque sphérique en FGM déformable par le cisaillement [162]. Ensuite, Kar et Panda [163] ont étudié le comportement thermomécanique non linéaire d'un panneau de carcasse cylindrique / hyperbolique / elliptique à gradient fonctionnel fonctionnant en fonction de la température et indépendant de la température. De plus, Mahapatra et al. [164] ont analysé l'analyse de flexion non linéaire du panneau composite stratifié sous charge hygro-thermo-mécanique.

Sahoo et al. [165] ont contribué à l'analyse de flexion non linéaire des panneaux de coques courbes stratifiés en composite stratifié / époxy. Ensuite ils ont développé un nouveau modèle qui traite les vibrations statiques, les vibrations libres et la réponse transitoire du panneau stratifié composite stratifié peu profond avec une approche expérimentale [166]. Dutta et al. [167] ont utilisé une approche par éléments finis pour la réponse électro-magnéto-élastique de la plaque composite stratifiée.

### IV.3. Formulation théorique

#### IV.3.1. Hypothèses de base pour la présente théorie

Pour la présente théorie on suppose les hypothèses suivant :

- Le système de coordonnées cartésiennes rectangulaires  $x, y, z$ , à la surface, coïncidant avec la surface médiane de la plaque.
- L'origine du système cartésien est prise à la surface neutre de la couche médiane la plaque sandwich fonctionnellement graduée (Figure IV.1).
- Les déplacements sont très petits par rapport à l'épaisseur  $h$  de la plaque, par conséquent, les déformations considérées sont infinitésimales.
- Les déplacements ( $u$ ) dans la direction  $x$  et ( $v$ ) dans la direction  $y$  se composent d'un déplacement en membrane, d'un déplacement en flexion et d'un déplacement dû au cisaillement. Les composantes des déplacements  $u$  et  $v$  dans les directions ( $x$ ) et ( $y$ ) respectivement peuvent être dissociées en trois termes :

$$U(x, y, z) = u_0(x, y) + u_b(x, y) + u_s(x, y) \quad (\text{IV.1})$$

$$V(x, y, z) = v_0(x, y) + v_b(x, y) + v_s(x, y) \quad (\text{IV.2})$$

Les premières composantes  $u_0$  et  $v_0$  représentent les déplacements en membrane. Les deuxièmes composantes  $u_b$  et  $v_b$ , sont les composantes de la flèche similaires aux déplacements donnés par la théorie classique des plaques. Les expressions des composantes  $u_b$  et  $v_b$  sont donnée par :

$$u_b(x, y) = -z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x}, \quad v_b(x, y) = -z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} \quad (\text{IV.3})$$

Les troisièmes composantes sont les composantes de cisaillement  $u_s$  et  $v_s$ , elles donnent lieu, à une variation parabolique de déformations de cisaillement  $\gamma_{xz}$  et  $\gamma_{yz}$ , et donc à une variation parabolique des contraintes de cisaillement  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$  à travers l'épaisseur de la plaque de telle sorte que les contraintes de cisaillement  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$ , sont nulles aux deux facettes (supérieure et inférieure) de la plaque.

Les expressions des composantes  $u_s$  et  $v_s$  dependent du terme integral qui réduit ainsi le nombre de variables à 5 par rapport aux théories d'ordre élevé conventionnelles, et elles sont donnée par :

$$u_s = k_1 f(z) \int \theta(x, y) dx, \quad v_s = k_2 f(z) \int \theta(x, y) dy \quad (IV.4)$$

Où  $k_1$  et  $k_2$  sont des coefficients qui dépendent de la géométrie de la plaque et  $f(z)$  représente la fonction de forme définissant la variation des contraintes transversales de cisaillement et des contraintes à travers l'épaisseur. Dans notre travail, la fonction de forme est considérée sur la base de la fonction hyperbolique donnée par Nguyen [52]. D'où on a :

$$f(z) = \sinh^{-1} \left( \frac{3z}{h} \right) - z \frac{6}{h\sqrt{13}} \quad (IV.5)$$

- La composante du déplacement transversale ( $w$ ) peut être dissociée en deux termes : le premier ( $w_0$ ) représente une partie de la flèche pure de la plaque, tel que le dérivé de cette composante égale numériquement à la rotation de la section transversale, le deuxième terme ( $\varphi_z$ ) considère la flèche due à l'effet d'étirement de l'épaisseur de la plaque en incluant la fonction  $g(z)$  qui est donnée par l'équation (IV.7). Ces deux composantes sont en fonction des coordonnées  $x, y$  seulement et s'écrivent comme suit :

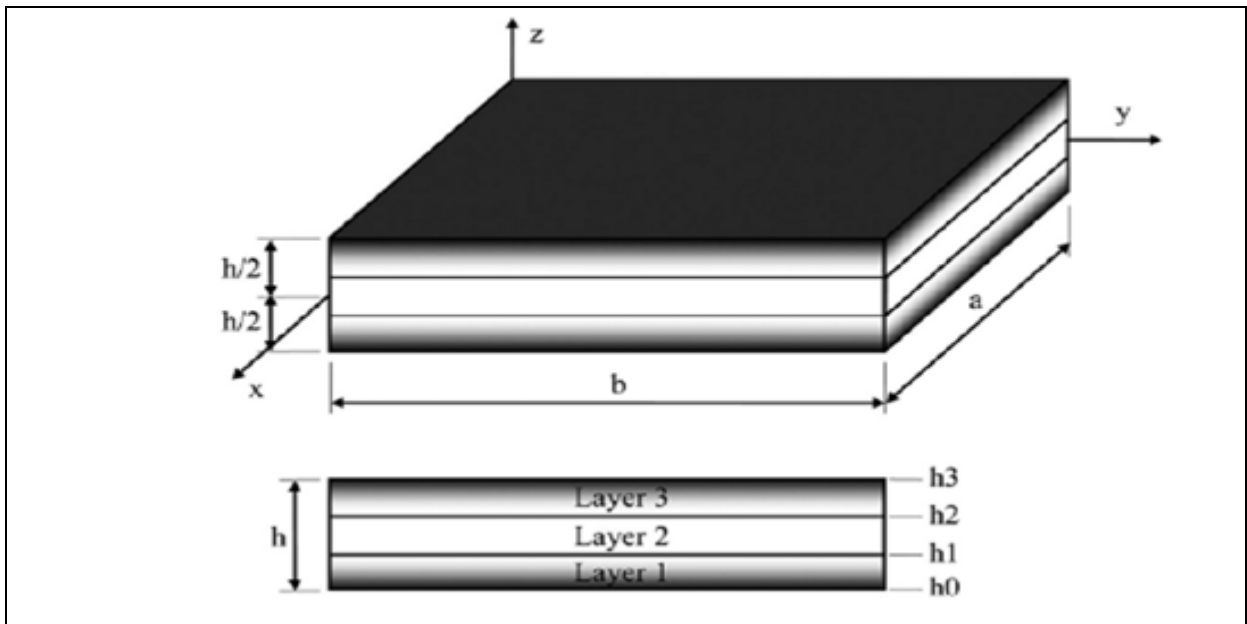
$$w(x, y, z) = w_0(x, y) + g(z)\varphi_z(x, y) \quad (IV.6)$$

Avec 
$$g(z) = \frac{df(z)}{dz} \quad (IV.7)$$

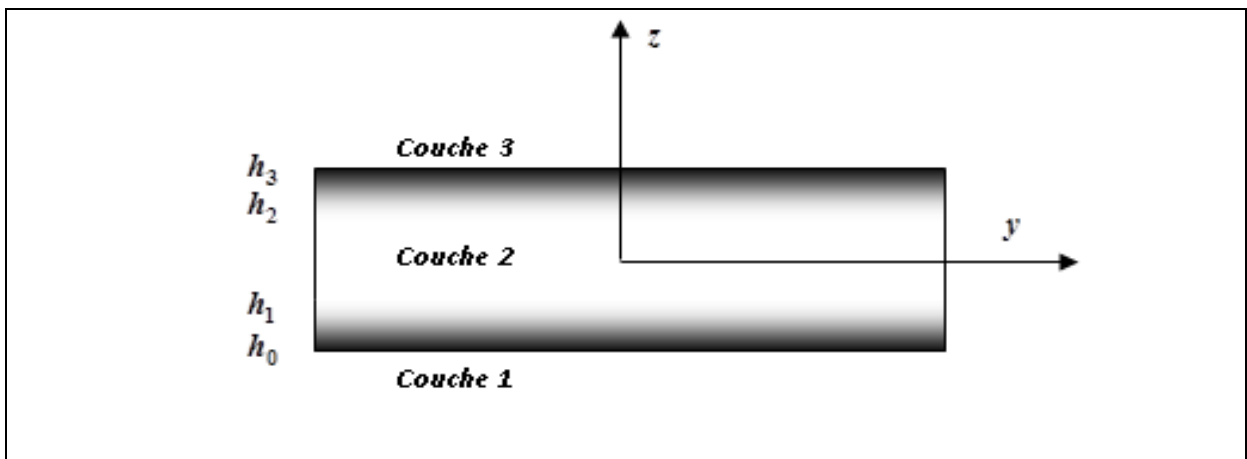
### IV.3.2. Configuration géométrique

Considérons une plaque sandwich en matériau à gradient de propriétés composée de trois couches microscopiquement hétérogènes ayant les dimensions représentées dans la figure IV.1 Les faces (supérieure et inférieure) de la plaque sont à  $z = \pm h/2$ , et les bords de la plaque sont parallèles aux axes  $x$  et  $y$ . La plaque est composée de trois couches, à savoir, « couche 1 », « couche 2 » et « couche 3 » de la partie basse à la partie haute (figure IV.2).

Les ordonnées verticales de la surface inférieure, des deux interfaces limitant la couche centrale, et de la surface supérieure de la plaque sont respectivement,  $z = h_0, z = h_1, z = h_2, z = h_3$ .



**Figure IV.1:** Géométrie d'une plaque sandwich en FGM.



**Figure IV.2 :** Variation des propriétés matérielles à travers l'épaisseur d'une plaque sandwich en FGM.

#### IV.3.3. Propriétés matérielles des plaques sandwiches en FGM

Les couches de face de notre plaque sandwich sont constituées par un matériau isotrope avec des caractéristiques de matériau variant graduellement dans la direction de l'épaisseur seulement. La couche centrale est constituée d'un matériau homogène isotrope. Les positions verticales de la surface inférieure, les deux interfaces entre les couches d'âme et de faces, et la surface supérieure sont définies respectivement par  $h_0 = -h/2$ ,  $h_1$ ,  $h_2$  and  $h_3 = h/2$ . L'épaisseur totale de la plaque sandwich fonctionnellement graduée est  $h$ , où

$h = t_c + t_{FGM}$  et  $t_c = h_2 - h_1$ ,  $t_c$  et  $t_{FGM}$  sont l'épaisseur de la couches noyau et la somme des épaisseurs des deux couches lames en FGM, respectivement. Delale et Erdogan [168] ont indiqué que l'effet du coefficient de Poisson sur la déformation est beaucoup moins important que celui du module de Young. Alors, on suppose que le coefficient de Poisson de la plaque sandwich est constant dans tous points de la plaque.

Les caractéristiques matérielles effectives pour chaque couche, telles que le module de Young  $E(z)$  et le coefficient de dilatation thermique  $\alpha(z)$ , peuvent être définies comme :

$$P^{(n)}(z) = P_m + (P_c - P_m)V^{(n)} \quad (IV.8)$$

Avec  $P^{(n)}$  est la caractéristique efficace du matériau FGM à la couche n.  $P_m$  et  $P_c$  sont respectivement les caractéristiques correspondantes du métal et de la céramique de la plaque sandwich en FGM.  $P_m$  et  $P_c$  définissent respectivement la propriété des faces inférieure et supérieure de la couche 1 ( $h_0 \leq z \leq h_1$ ) et ainsi pour la couche 3 ( $h_2 \leq z \leq h_3$ ) en fonction de la fraction volumique  $V^{(n)}$  ( $n = 1, 2, 3$ ).

La fraction volumique  $V^{(n)}$  à travers l'épaisseur des couches (supérieure et inférieure) de la plaque sandwich suit une simple fonction de loi de puissance, tandis qu'elle égale l'unité dans la couche centrale de la plaque « Saidi [16] ». Elle est définie par :

$$V^{(1)} = \left( \frac{z - h_0}{h_1 - h_0} \right)^k, \quad h_0 \leq z \leq h_1 \quad (IV.9.a)$$

$$V^{(2)} = 1, \quad h_1 \leq z \leq h_2 \quad (IV.9.b)$$

$$V^{(3)} = \left( \frac{z - h_3}{h_2 - h_3} \right)^k, \quad h_2 \leq z \leq h_3 \quad (IV.9.c)$$

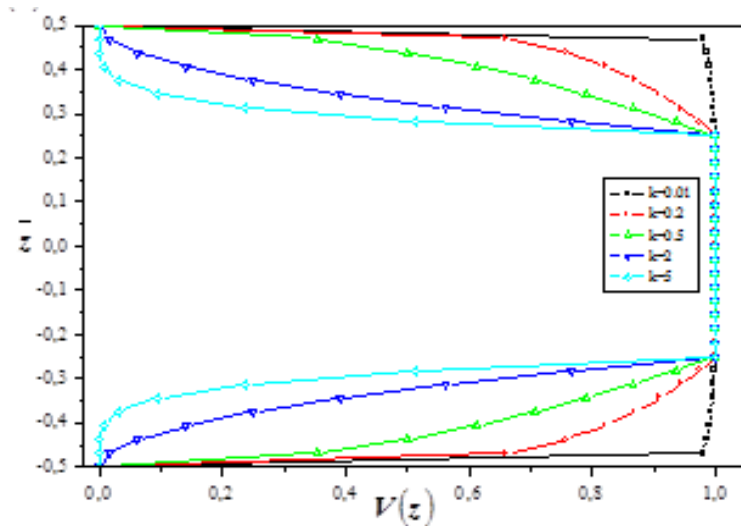
Où  $k$  est un paramètre de matériau qui donne le profil de variation du matériau à travers l'épaisseur des couches de la plaque, qui prend des valeurs supérieures ou égales à zéro. La couche centrale de la plaque est indépendante de la valeur  $k$  puisque cette couche est entièrement en céramique.

- **Plaque sandwich en FGM Type A**

Lorsque la valeur de  $k$  prend la valeur de zéro, on obtient une plaque entièrement en céramique, ou bien si  $t_{FGM}/h = 0$ , On a  $t_c = h$ .

- **Plaque sandwich en FGM Type B**

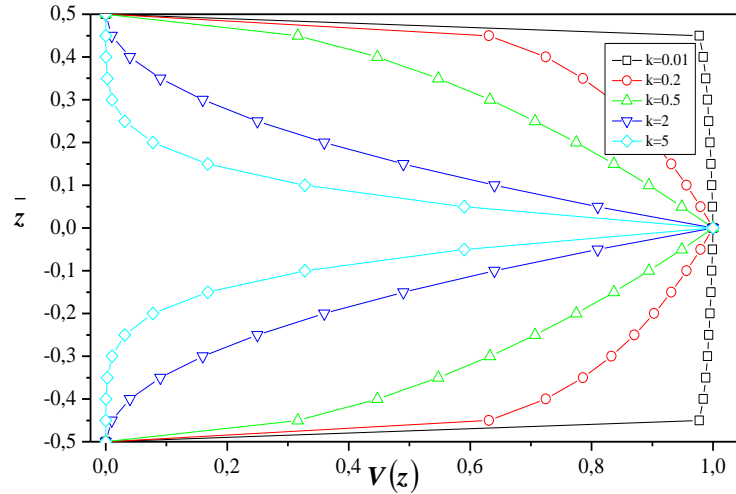
Pour ce cas la plaque est symétrique, avec  $t_{FGM}$  est égal à la somme des épaisseurs des deux couches supérieure et inférieure et l'épaisseur de la couche centrale  $t_c = h - t_{FGM}$ . La figure IV.3 montre la variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur pour une plaque sandwich en FGM avec  $t_{FGM}/h = 0.20$  et  $k = 0.01, 0.2, 0.5, 2, 5, 10$ .



**Figure IV.3 :** Variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur de la plaque pour les différentes valeurs de  $k$  d'une plaques sandwiches type B.

- **Plaque sandwich en Type C**

Dans ce type de sandwich, la plaque est symétrique est constituée seulement de deux couches en FGM d'épaisseur égale (Figure IV.4). C'est à dire, la couche isotrope centrale en céramique est absente. Ainsi,  $t_{FGM}/h = 1$  et  $t_c = 0$ .



**Figure IV.4 :** Variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur de la plaque pour les différentes valeurs de  $k$  d'une plaques sandwiches type C.

#### IV.4. Cinématique et équations constitutives

##### IV.4.1. Champs de déplacement

Dans notre thèse, les théories de déformation des plaques quasi-3D traditionnelles avec l'effet d'étirement d'épaisseur sont modifiés en proposant quelques suppositions simplificatrices de sorte que le nombre d'inconnues soit réduit. Le champ de déplacement des théories quasi 3-D conventionnelles est défini par :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z)\varphi_x(x, y) \quad (\text{IV.10.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z)\varphi_y(x, y) \quad (\text{IV.10.b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) + g(z)\varphi_z(x, y) \quad (\text{IV.10.c})$$

Où  $u_0$ ;  $v_0$ ;  $w_0$ ,  $\varphi_x$ ,  $\varphi_y$ , et  $\varphi_z$  sont les six déplacements inconnus du plan médian de la plaque, et  $f(z)$  représente la fonction de forme définissant la variation des contraintes transversales de cisaillement et des contraintes à travers l'épaisseur.

Sur la base des hypothèses définis pour notre théorie, le champ de déplacement peut être obtenu en utilisant les équations. (IV.1) - (IV.7) :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta(x, y) dx \quad (\text{IV.11.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + k_2 f(z) \int \theta(x, y) dy \quad (\text{IV.11.b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) + g(z) \varphi_z(x, y) \quad (\text{IV.11.c})$$

Où  $k_1$  et  $k_2$  sont des coefficients qui dépendent de la géométrie de la plaque et  $f(z)$  et  $g(z)$  sont donnée par les équations (IV.5) et (IV.7)

$$f(z) = \sinh^{-1} \left( \frac{3z}{h} \right) - z \frac{6}{h\sqrt{13}} \quad \text{et} \quad g(z) = \frac{df(z)}{dz} \quad (\text{IV.5})$$

#### IV.4.2. Champs de déformation

Le champ des déformations se déduit du champ des déplacements de l'équation. (IV.11.a-c), soit :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix}, \quad \varepsilon_z = g'(z) \varepsilon_z^0 \quad (\text{IV.12})$$

Où

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1 \theta \\ k_2 \theta \\ k_1 \frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx + k_2 \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy \end{Bmatrix}, \quad (\text{IV.13.a})$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_2 \int \theta dy + \frac{\partial \varphi_z}{\partial y} \\ k_1 \int \theta dx + \frac{\partial \varphi_z}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \varepsilon_z^0 = \varphi_z \quad (\text{IV.13.b})$$

Les intégrales utilisées dans les équations ci-dessus doivent être résolues par une solution de type Navier et peuvent être écrites comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx = A' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy = B' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad \int \theta dx = A' \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \int \theta dy = B' \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (\text{IV.14})$$

Où les coefficients  $A'$  et  $B'$  sont exprimés en fonction du type de solution utilisée, dans ce cas en utilisant Navier  $A'$  et  $B'$  seront exprimés comme suit :

$$A' = -\frac{1}{\alpha^2}, \quad B' = -\frac{1}{\beta^2}, \quad k_1 = \alpha^2, \quad k_2 = \beta^2 \quad (\text{IV.15})$$

Avec  $\alpha$  and  $\beta$  sont définies par:

$$\alpha = m\pi/a \text{ and } \beta = n\pi/b \quad (\text{IV.16})$$

#### IV.4.3. Les équations constitutives

En se limitant à un comportement élastique linéaire, l'expression des contraintes pour les plaques sandwiches en FGM, les relations contrainte-déformation, pour l'état de contrainte plane, y compris les influences thermiques, peut être écrite comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}^{(n)} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix}^{(n)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x - \alpha T \\ \varepsilon_y - \alpha T \\ \varepsilon_z - \alpha T \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}^{(n)} \quad (\text{IV.17})$$

Où :  $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{yx})$  et  $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{yx})$  sont les composantes des contraintes et des déformations, respectivement. En utilisant la loi des mélanges définis dans l'équation IV.3, les coefficients de rigidité,  $C_{ij}$ , sont exprimés par :

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} = \frac{E(z)}{1-\nu^2}, \quad (\text{IV.18.a})$$

$$C_{12} = C_{13} = C_{23} = \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2}, \quad (\text{IV.18.b})$$

$$C_{44} = C_{55} = C_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)}, \quad (\text{IV.18.c})$$

Le module de Young  $E(z)$  et les coefficients de rigidité  $C_{ij}(z)$  et les coefficients de dilatation thermique  $\alpha(z)$  varient selon la loi de mélange définis dans l'épaisseur selon l'équation (IV.8). Le champ de température généralisé qui varie sur l'épaisseur de la plaque peut être écrit comme suit :

$$T(x, y, z) = T_1(x, y) + \frac{z}{h} T_2(x, y) + \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) T_3(x, y) \quad (\text{IV.19})$$

Où  $T_1$ ,  $T_2$  et  $T_3$  sont des charges thermiques.

#### IV.4.4. Détermination des équations d'équilibre

Afin d'établir de façon systématique l'ensemble des équations d'équilibre ainsi que les conditions aux limites, le principe des travaux virtuels est appliqué, celui-ci indique que, pour tout champ de contrainte en équilibre avec les efforts extérieurs, la somme de travail des efforts internes et le travail des efforts externes est nulle pour tout champ virtuel. Le principe des travaux virtuels pour le problème de flexion thermomécanique d'une plaque sandwich fonctionnellement graduée est exprimé comme suit :

$$\delta U + \delta V = 0 \quad (\text{IV.20})$$

Où  $\delta U$  est l'énergie de déformation virtuelle et  $\delta V$  est le travail virtuel externe sous l'effet d'un chargement externe appliquée à la plaque.

En substituant les expressions énergétiques appropriées on peut déterminer :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \int_{\Omega} [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}] d\Omega dz - \int_{\Omega} q \delta w d\Omega = 0 \quad (\text{IV.21})$$

Où  $\Omega$  Est la surface supérieure et  $q$  est la charge transversale répartie.

Substituons les équations (IV.12) et (IV.17) dans l'équation (IV.21) Et en l'intégrant dans l'épaisseur de la plaque, l'équation (IV.21) peut être réécrite comme :

$$\int_{\Omega} \left[ N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_z \delta \varepsilon_z^0 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b + M_x^s \delta k_x^s + M_y^s \delta k_y^s + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + S_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^s + S_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^s - q \delta w \right] d\Omega = 0 \quad (IV.22)$$

Où les résultantes des contraintes  $N$ ,  $M$ , and  $S$  sont données par :

$$\begin{aligned} (N_i, M_i^b, M_i^s) &= \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} (1, z, f) \sigma_i^{(n)} dz, \quad (i = x, y, xy); \quad N_z = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} g'(z) \sigma_z^{(n)} dz \text{ et} \\ (S_{xz}^s, S_{yz}^s) &= \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} g(z) (\tau_{xz}, \tau_{yz})^{(n)} dz \end{aligned} \quad (IV.23)$$

Où  $h_n$  et  $h_{n-1}$  sont les coordonnées suivant  $z$  du haut et du bas de la nième couche.

En Substituant l'équation (IV.12) dans (IV.17) et ensuite les résultats trouvés dans l'équation (IV.23), les contraintes peuvent être exprimées en termes de déplacements  $(u_0, v_0, w_0, \theta, \varphi_z)$  comme suit :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x^b \\ M_y^b \\ M_{xy}^b \\ M_x^s \\ M_y^s \\ M_{xy}^s \\ N_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 & B_{11}^s & B_{12}^s & 0 & X_{13} \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 & B_{12}^s & B_{22}^s & 0 & X_{23} \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & B_{66}^s & 0 \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 & D_{11}^s & D_{12}^s & 0 & Y_{13} \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 & D_{12}^s & D_{22}^s & 0 & Y_{23} \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{11} & 0 & 0 & D_{66}^s & 0 \\ B_{11}^s & B_{12}^s & 0 & D_{11}^s & D_{12}^s & 0 & H_{11}^s & H_{12}^s & 0 & Y_{13}^s \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 & D_{12}^s & D_{22}^s & 0 & H_{12}^s & H_{22}^s & 0 & Y_{23}^s \\ 0 & 0 & B_{66}^s & 0 & 0 & D_{66}^s & 0 & 0 & H_{66}^s & 0 \\ X_{13} & X_{23} & 0 & Y_{13} & Y_{23} & 0 & Y_{13}^s & Y_{23}^s & 0 & Z_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \\ k_1 \theta \\ k_2 \theta \\ (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} \\ \varphi_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ 0 \\ M_x^{bT} \\ M_y^{bT} \\ 0 \\ M_x^{sT} \\ M_y^{sT} \\ 0 \\ N_z^T \end{Bmatrix} \quad (IV.24.a)$$

$$\begin{Bmatrix} S_{yz}^s \\ S_{xz}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_2 B' \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial y} \\ k_1 A' \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (IV.24.b)$$

Avec

$$(A_{ij}, A_{ij}^s, B_{ij}, D_{ij}, B_{ij}^s, D_{ij}^s, H_{ij}^s) = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} C_{ij}^{(n)} (1, g^2(z), z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z)) dz \quad (IV.25.a)$$

$$(X_{ij}, Y_{ij}, Y_{ij}^s, Z_{ij}) = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} (1, z, f(z), g'(z)) g'(z) C_{ij}^{(n)} dz \quad (IV.25.b)$$

Les efforts résultants,  $N_x^T = N_y^T$ ,  $M_x^{bT} = M_y^{bT}$ ,  $M_x^{sT} = M_y^{sT}$  et  $N_z^T$  déduites par l'effet thermique sont exprimées par

$$\begin{Bmatrix} N_x^T \\ M_x^{bT} \\ M_x^{sT} \\ N_z^T \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \frac{E^{(n)}(z)}{1 - (\nu^{(n)})^2} (1 + 2\nu^{(n)}) \alpha^{(n)} T \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \\ g'(z) \end{Bmatrix} dz \quad (IV.26)$$

#### IV.4.5. Les équations gouvernantes de la plaque

En utilisant les expressions de déplacement-déformation généralisées (équations (IV.12) et (IV.13)) et les expressions contrainte-déformation (équation (IV.17)), et en intégrant par parties et en appliquant le lemme fondamental du calcul variationnel et en recueillant les coefficients de  $\delta u_0$ ,  $\delta v_0$ ,  $\delta w_0$ ,  $\delta \theta$  et  $\delta \varphi_z$ . Dans l'équation (IV.22), les équations gouvernantes sont déterminées comme suit :

$$\begin{aligned} \delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \delta v_0 : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= 0 \\ \delta w_0 : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + q &= 0 \\ \delta \theta : -k_1 M_x^s - k_2 M_y^s - (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + k_1 A' \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} &= 0 \\ \delta \varphi_z : -N_z + \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (IV.27)$$

En remplaçant l'équation (IV.24) par l'équation (IV.27), les équations gouvernantes de la présente théorie quasi-3D peuvent être exprimées en termes de déplacements ( $u_0, v_0, w_0, \theta, \varphi_z$ ) comme :

$$A_{11}d_{11}u_0 + A_{66}d_{22}u_0 + (A_{12} + A_{66})d_{12}v_0 + X_{13}d_1\varphi_z - B_{11}d_{111}w_0 - (B_{12} + 2B_{66})d_{122}w_0 + (B_{66}^s(k_1A' + k_2B'))d_{122}\theta + (B_{11}^sk_1 + B_{12}^sk_2)d_1\theta = p_1 \quad (IV.28.a)$$

$$A_{22}d_{22}v_0 + A_{66}d_{11}v_0 + (A_{12} + A_{66})d_{12}u_0 + X_{23}d_2\varphi_z - B_{22}d_{222}w_0 - (B_{12} + 2B_{66})d_{112}w_0 + (B_{66}^s(k_1A' + k_2B'))d_{112}\theta + (B_{22}^sk_2 + B_{12}^sk_1)d_2\theta = p_2 \quad (IV.28.b)$$

$$B_{11}d_{111}u_0 + (B_{12} + 2B_{66})d_{122}u_0 + (B_{12} + 2B_{66})d_{112}v_0 + B_{22}d_{222}v_0 + Y_{13}d_{11}\varphi_z + Y_{23}d_{22}\varphi_z - D_{11}d_{1111}w_0 - 2(D_{12} + 2D_{66})d_{1122}w_0 - D_{22}d_{2222}w_0 + (D_{11}^sk_1 + D_{12}^sk_2)d_{11}\theta + 2(D_{66}^s(k_1A' + k_2B'))d_{1122}\theta + (D_{12}^sk_1 + D_{22}^sk_2)d_{22}\theta + q = p_3 \quad (IV.28.c)$$

$$-(B_{11}^sk_1 + B_{12}^sk_2)d_1u_0 - (B_{66}^s(k_1A' + k_2B'))d_{122}u_0 - (B_{66}^s(k_1A' + k_2B'))d_{112}v_0 - (B_{12}^sk_1 + B_{22}^sk_2)d_2v_0 - k_1Y_{13}^s\varphi_z - k_2Y_{23}^s\varphi_z + (D_{11}^sk_1 + D_{12}^sk_2)d_{11}w_0 + 2(D_{66}^s(k_1A' + k_2B'))d_{1122}w_0 + (D_{12}^sk_1 + D_{22}^sk_2)d_{22}w_0 - H_{11}^sk_1^2\theta - H_{22}^sk_2^2\theta - 2H_{12}^sk_1k_2\theta - ((k_1A' + k_2B')^2H_{66}^s)d_{1122}\theta + A_{44}^s(k_2B')^2d_{22}\theta + A_{55}^s(k_1A')^2d_{11}\theta + A_{44}^s(k_2B')d_{22}\varphi_z + A_{55}^s(k_1A')d_{11}\varphi_z = p_4 \quad (IV.28.d)$$

$$-X_{13}d_1u_0 - X_{23}d_2v_0 - Z_{33}d_3\varphi_z + Y_{13}d_{11}w_0 + Y_{23}d_{22}w_0 + (A_{44}^s - Y_{23}^s)(k_2B')d_{22}\theta + (A_{55}^s - Y_{13}^s)(k_1A')d_{11}\theta + A_{44}^sd_{22}\varphi_z + A_{55}^sd_{11}\varphi_z = p_5 \quad (IV.28.e)$$

Où  $d_{ij}$ ,  $d_{ijl}$  et  $d_{ijlm}$  sont les opérateurs différentiels suivants :

$$d_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \quad d_{ijl} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}, \quad d_{ijlm} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m}, \quad d_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (i, j, l, m = 1, 2). \quad (IV.29)$$

Les composantes du vecteur de force généralisé  $\{p\}$  sont données par :

$$p_1 = \frac{\partial N_x^T}{\partial x}, \quad p_2 = \frac{\partial N_y^T}{\partial y}, \quad p_3 = q - \frac{\partial^2 M_x^{bT}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_y^{bT}}{\partial y^2}, \quad p_4 = q - \frac{\partial^2 M_x^{sT}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_y^{sT}}{\partial y^2}, \quad p_5 = N_z^T \quad (IV.30)$$

#### IV.5. Solution exacte pour une plaque sandwich en FGM simplement appuyée

Les plaques rectangulaires sont généralement classées selon le type support utilisé. Pour notre cas on considère une plaque rectangulaire simplement appuyée avec la longueur  $a$  et la largeur  $b$  sous la charge transversale  $q$ . Pour résoudre ce problème, Navier a présenté les charges transversales mécaniques et de température et sous la forme d'une double série trigonométrique tel que :

$$\begin{Bmatrix} q \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_0 \\ t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \quad (\text{IV.31})$$

Où  $q_0, t_1, t_2$  et  $t_3$  sont des constantes,  $\alpha$  et  $\beta$  sont données par l'équation (IV.16).

En utilisant la procédure de Navier, la solution des variables de déplacement satisfaisant les conditions aux limites ci-dessus peut être écrite dans la série de Fourier suivante :

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta \\ \varphi_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U \cos(\alpha x) \sin(\beta y) \\ V \sin(\alpha x) \cos(\beta y) \\ W \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\ X \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\ \Phi \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.32})$$

Avec  $(U, V, W, X, \Phi)$  sont des fonctions inconnues à déterminer, En considérant les équations (IV.25) et (IV.30), on obtient l'équation suivante :

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \\ X \\ \Phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.33})$$

Où

$$\begin{aligned}
 S_{11} &= \alpha^2 B_{11} + \beta^2 A_{66} \\
 S_{12} &= \alpha\beta(A_{12} + A_{66}) \\
 S_{13} &= -\alpha^3 B_{11} - \alpha\beta^2(B_{12} + 2B_{66}) \\
 S_{14} &= -\alpha(k_1 B_{11}^s + k_2 B_{12}^s) + \alpha\beta^2 B_{66}^s(k_1 A' + k_2 B') \\
 S_{15} &= \alpha X_{13} \\
 S_{22} &= \alpha^2 A_{66} + \beta^2 A_{22} \\
 S_{23} &= -\alpha^2 \beta(B_{12} + 2B_{66}) - \beta^3 B_{22} \\
 S_{24} &= -\beta(k_1 B_{12}^s + k_2 B_{22}^s) + \alpha^2 \beta(k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s \\
 S_{25} &= -\beta X_{23} \\
 S_{33} &= \alpha^4 D_{11} + \beta^4 D_{22} + 2\alpha^2 \beta^2 (D_{12} + 2D_{66}) \\
 S_{34} &= \alpha^2 k_1 D_{11}^s + (k_2 \alpha^2 + k_1 \beta^2) D_{12}^s + \beta^2 k_2 D_{22}^s - 2\alpha^2 \beta^2 (k_1 A' + k_2 B') D_{66}^s \\
 S_{35} &= \alpha^2 Y_{13} + \beta^2 Y_{23} \\
 S_{44} &= k_1^2 H_{11}^s + k_2^2 H_{22}^s + 2k_1 k_2 H_{12}^s + \alpha^2 \beta^2 (k_1 A' + k_2 B')^2 H_{66}^s + \alpha^2 (k_1 A')^2 A_{55}^s + \beta^2 (k_2 B')^2 A_{44}^s \\
 S_{45} &= k_1 Y_{13}^s + k_2 Y_{23}^s + \alpha^2 k_1 A' A_{55}^s + \beta^2 k_2 B' A_{44}^s \\
 S_{55} &= \alpha^2 A_{55}^s + \beta^2 A_{44}^s + Z_{33}
 \end{aligned} \tag{IV.34}$$

Et les composantes du vecteur force généralisée  $\{P\} = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}^t$  sont données par :

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \lambda(A^T t_1 + B^T t_2 + {}^a B^T t_3), \\
 P_2 &= \mu(A^T t_1 + B^T t_2 + {}^a B^T t_3), \\
 P_3 &= -q_0 - h(\lambda^2 + \mu^2)(B^T t_1 + D^T t_2 + {}^a D^T t_3), \\
 P_4 &= -q_0 - h(\lambda^2 + \mu^2)({}^s B^T t_1 + {}^s D^T t_2 + {}^s F^T t_3), \\
 P_5 &= -h(L^T t_1 + {}^a L^T t_2 + R^T t_3).
 \end{aligned} \tag{IV.35}$$

Où

$$(A^T, B^T, D^T) = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \frac{E^{(n)}(z)}{1 - (\nu^{(n)})^2} (1 + 2\nu^{(n)}) \alpha^{(n)}(1, \bar{z}, \bar{z}^2) dz, \tag{IV.36.a}$$

$$({}^a B^T, {}^a D^T) = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \frac{E^{(n)}(z)}{1 - (\nu^{(n)})^2} (1 + 2\nu^{(n)}) \alpha^{(n)} \bar{\Psi}(z)(1, \bar{z}) dz, \tag{IV.36.b}$$

$$({}^s B^T, {}^s D^T, {}^s F^T) = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \frac{E^{(n)}(z)}{1 - (\nu^{(n)})^2} (1 + 2\nu^{(n)}) \alpha^{(n)} \bar{f}(z)(1, \bar{z}, \bar{\Psi}(z)) dz, \tag{IV.36.c}$$

$$(L^T, L_a^T, R^T) = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \frac{E^{(n)}(z)}{1 - (\nu^{(n)})^2} (1 + 2\nu^{(n)}) \alpha^{(n)} \bar{g}'(z)(1, \bar{z}, \bar{\Psi}(z)) dz, \tag{IV.36.d}$$

Avec  $\bar{z} = z/h$ ,  $\bar{f}(z) = f(z)/h$  and  $\bar{\Psi}(z) = \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)$

#### IV.6. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une solution générale du comportement thermomécanique de la flexion des plaques sandwiches en matériaux fonctionnellement gradués « FGM » en utilisant une nouvelle théorie de déformation de cisaillement quasi 3-D. Le nombre d'inconnus dans la présente théorie est seulement cinq par rapport à plus dans le cas des autres théories déformation de cisaillement à ordre élevé « HSDT ».

La théorie considère la déformation du cisaillement et les effets d'étirement de l'épaisseur de la plaque sans nécessiter de facteurs de correction de cisaillement et elle donne une distribution parabolique des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de nullité de ses dernières sur les bords libres. Les résultats obtenus par la présente théorie seront présentés dans le chapitre suivant. Elles permettent de comprendre clairement l'apport de cette théorie en les comparants avec les résultats trouvés dans la littérature à savoir les résultats obtenus par les autres théories d'ordre élevé avec ou sans prise en compte de la déformation normale  $\varepsilon_z$ .



## **CHAPITRE V :**

**RESULTATS ET DISCUSSION DE L'ANALYSE  
THERMOMÉCANIQUE DES PLAQUES SANDWICH  
EN FGM EN UTILISANT UNE NOUVELLE  
THÉORIE QUASI 3-D**



## Chapitre V : Résultats et discussion de l'Analyse thermomécanique des plaques sandwich en FGM en utilisant une nouvelle théorie quasi 3-D

### V.1. Introduction

L'intérêt de ce chapitre est de présenter les résultats numériques de l'analyse du comportement thermomécanique de la flexion des plaques sandwiches fonctionnellement graduées en utilisant une nouvelle théorie de déformation de cisaillement quasi 3-D.

Contrairement aux autres théories conventionnelles d'ordre élevé « HSDT », le nombre d'inconnues pour la présente théorie est seulement cinq comme pour la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre « FSDT » sans pour autant utiliser un facteur de correction pour l'effet de cisaillement. La théorie prend en considération la déformation du cisaillement et les effets d'étirement de l'épaisseur de la plaque « Stretching effect » et elle donne une distribution parabolique des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de nullité de ses dernières sur les bords libres.

On suppose que les propriétés matérielles (le module de Young et le coefficient de dilatation thermique de la plaque sandwich varient sans interruption dans la direction de l'épaisseur selon une simple distribution de loi de puissance en fonction de la fraction volumique des constituants.

Plusieurs configurations pour la plaque sandwich seront utilisés, les effets de l'indice matériel des plaques FGM et du rapport des dimensions  $t_{\text{FGM}}/h$  et  $a/b$  sur le comportement statique de la plaque sandwich fonctionnellement graduées seront discutés. Quelques exemples illustratifs seront aussi présentés et des comparaisons avec les résultats trouvés par les différentes théories de déformation seront proposées pour vérifier l'exactitude et la performance de la présente théorie.

## V.2. Résultats numériques et discussions

Dans cette section, nous présentons les résultats de l'analyse de flexion thermomécanique des plaques sandwiches FG. Les résultats actuels sont calculés en utilisant la nouvelle théorie de déformation de cisaillement type quasi-3D actuel avec seulement cinq inconnues. La théorie est formulée de telle sorte que l'influence d'étirement de l'épaisseur est considérée, c'est-à-dire que la recommandation de Koiter [8] concernant l'influence d'étirement de la plaque est obéie.

L'analyse thermomécanique de la flexion est conduite pour des combinaisons de métal et de céramique. Le métal utilisé est un alliage de titane (**Ti-6Al-4V**) et une céramique de type oxyde de zirconium (**ZrO<sub>2</sub>**). Pour simplifier les calculs, on supposera que le coefficient de poisson est constant en tout point de l'épaisseur de la plaque. Les modules de Young, le coefficient de Poisson et les coefficients de dilatation thermique de la céramique et du métal utilisés sont énumérées dans le tableau V.1.

**Tableau V.1** : Les propriétés matérielles utilisées pour la plaque sandwich en FGM.

| Material                           | Properties |                          |       |
|------------------------------------|------------|--------------------------|-------|
|                                    | $E$ (GPa)  | $\alpha$ ( $10^{-6}/K$ ) | $\nu$ |
| <b>Métal : Ti-6Al-4V</b>           | 66.2       | 10.3                     | 1/3   |
| <b>Céramique : ZrO<sub>2</sub></b> | 117.0      | 7.11                     | 1/3   |

Les solutions de référence sont données sous forme adimensionnelle. Les résultats sont présentés dans les formes normalisées suivantes pour les déplacements et les contraintes selon Saidi et al. [16]. Il s'agit respectivement de la flèche maximale adimensionnelle  $\bar{w}$ , la contrainte axiale  $\bar{\sigma}_x$  et la contrainte de cisaillement transversale  $\bar{\tau}_{xz}$  :

$$\bar{w} = \frac{10^3}{q_0 a^4 / (E_0 h^3) + 10^3 \alpha_0 t_2 a^2 / h} w \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right) \quad (V.1)$$

$$\bar{\sigma}_x = \frac{10}{q_0 a^2 / h^2 + 10 E_0 \alpha_0 t_2 a^2 / h^2} \sigma_x \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2} \right) \quad (V.2)$$

$$\bar{\tau}_{xz} = \frac{1}{q_0 a / h + E_0 \alpha_0 t_2 a / 10 h} \tau_{xz} \left( 0, \frac{b}{2}, 0 \right) \quad (V.3)$$

Où les valeurs de référence sont prises comme  $E_0 = 1 \text{ GPa}$  et  $\alpha_0 = 10^{-6} / K$ . Le facteur de correction de cisaillement de la FSDT est fixé à  $K = 5/6$ .

Il est supposé, sauf indication contraire, que  $a/h = 10$ ,  $a/b = 1$ ,  $t_1 = 0$  et  $q_0 = t_2 = t_3 = 100$ .

### V.2.1. La flèche maximale adimensionnelle $\bar{w}$

Le tableau V.2 compare les flèches maximales adimensionnelles  $\bar{w}$  des différents types des plaques sandwiches fonctionnellement graduées carrées pour des valeurs d'indice matériel  $k = 0, 1, 2, 3, 4$  et  $5$ . Les résultats trouvés sont comparés avec des solutions basées sur une théorie de cisaillement d'ordre élevé de déformation sinusoïdale (SSDT) [6], la théorie de la déformation de cisaillement du troisième ordre (TSDT) [5], la théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre (FSDT) et la théorie des plaques classique (CPT). On peut conclure que l'introduction de l'effet d'étirement de l'épaisseur de la plaque sert à rendre la plaque plus rigide et donc à réduire la flèche. Cependant, l'introduction de l'influence de la déformation par cisaillement rend la plaque plus flexible et conduit par conséquent à augmenter la flèche.

Le tableau V.3 présente les résultats de la flèche maximale adimensionnelle  $\bar{w}$  des plaques sandwiches fonctionnellement graduées carrées pour des différents rapports «  $t_{\text{FGM}} / h$  » et divers indice matériel «  $k$  ». La plaque sandwich est soumise à une répartition linéaire de la température à travers l'épaisseur. Les résultats actuels sont comparés avec des solutions basées sur une théorie hyperbolique raffinée des plaques utilisée par Saidi et al. [16] et une théorie sinusoïdale raffinée proposé par Zenkour et Al. [169]. A partir de ce tableau, on peut constater que les résultats actuels sont inférieurs à la solution donnée par Zenkour et Al. [169] sans tenir compte de l'effet de l'étirement de l'épaisseur de la plaque ( $\varepsilon_z = 0$ ). Par conséquent, le tableau V.3 montre que l'effet de l'étirement de l'épaisseur peut réduire la flèche maximale. La flèche maximale adimensionnelle  $\bar{w}$  augmente tant que l'indice matériel «  $k$  » augmente. Cependant, cet effet diminue pour des valeurs supérieures de «  $k$  ».

**Tableau V.2 :** Comparaison de la flèche maximale adimensionnelle  $\bar{w}$  pour des différentes plaques sandwiches en FGM ( $t_1 = 0, q_0 = t_2 = t_3 = 100$  et  $a/h = 10$ ).

| $k$                                    | Théorie                                | $\bar{w}$                           |                 |                 |                 |                 |               |
|--|--|-------------------------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|---------------|
|  |  | $t_{FGM}/h=0$                       | $t_{FGM}/h=0.2$ | $t_{FGM}/h=0.4$ | $t_{FGM}/h=0.6$ | $t_{FGM}/h=0.8$ | $t_{FGM}/h=1$ |
| 0                                      | Présente ( $\varepsilon_z \neq 0$ )    | 0,750266                            | 0,750266        | 0,750266        | 0,750266        | 0,750266        | 0,750266      |
|  | Hamidi [19] ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) | 0,748424                            | 0,748424        | 0,748424        | 0,748424        | 0,748424        | 0,748424      |
|  | SSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )           | 0,796783                            | 0,796783        | 0,796783        | 0,796783        | 0,796783        | 0,796783      |
|  | TSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )           | 0,808168                            | 0,808168        | 0,808168        | 0,808168        | 0,808168        | 0,808168      |
|  | FSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )           | 0,895735                            | 0,895735        | 0,895735        | 0,895735        | 0,895735        | 0,895735      |
|  | CPT ( $\varepsilon_z = 0$ )            | 0,457873                            | 0,457873        | 0,457873        | 0,457873        | 0,457873        | 0,457873      |
|  | 1                                      | Présente ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) | 0,750266        | 0,835477        | 0,909406        | 0,965390        | 1,001361      |
| Hamidi [19] ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) |  | 0,748424                            | 0,825607        | 0,891560        | 0,942936        | 0,979382        | 1,003408      |
| SSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )           |  | 0,796783                            | 0,873745        | 0,941636        | 0,996334        | 1,036213        | 1,062840      |
| TSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )           |  | 0,806067                            | 0,886067        | 0,954808        | 1,010231        | 1,050672        | 1,077690      |
| FSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )           |  | 0,895735                            | 0,979641        | 1,054630        | 1,115684        | 1,160568        | 1,190728      |
| CPT ( $\varepsilon_z = 0$ )            |  | 0,457873                            | 0,501163        | 0,539886        | 0,571450        | 0,594688        | 0,610331      |
| 2                                      |  | Présente ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) | 0,750266        | 0,857801        | 0,953182        | 1,022704        | 1,060581      |
|  | Hamidi [19] ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) | 0,748424                            | 0,845883        | 0,930539        | 0,994421        | 1,035346        | 1,057609      |
|  | SSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )           | 0,796783                            | 0,894003        | 0,981434        | 1,050237        | 1,096095        | 1,121608      |
|  | TSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )           | 0,806067                            | 0,906529        | 0,995042        | 1,064791        | 1,111352        | 1,137297      |
|  | FSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )           | 0,895735                            | 1,001204        | 1,097973        | 1,175402        | 1,227765        | 1,257304      |
|  | CPT ( $\varepsilon_z = 0$ )            | 0,457873                            | 0,512431        | 0,562536        | 0,602673        | 0,629859        | 0,645223      |
|  | 3                                      | Présente ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) | 0,750266        | 0,868264        | 0,973510        | 1,047444        | 1,082097      |
| Hamidi [19] ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) |  | 0,748424                            | 0,855272        | 0,948423        | 1,016599        | 1,056867        | 1,075460      |
| SSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )           |  | 0,796783                            | 0,903467        | 0,999831        | 1,073875        | 1,119794        | 1,141655      |
| TSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )           |  | 0,806067                            | 0,916083        | 1,013647        | 1,088747        | 1,135420        | 1,157693      |
| FSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )           |  | 0,895735                            | 1,011279        | 1,118224        | 1,202080        | 1,255041        | 1,280741      |
| CPT ( $\varepsilon_z = 0$ )            |  | 0,457873                            | 0,517716        | 0,573152        | 0,616662        | 0,644176        | 0,657539      |
| 4                                      |  | Présente ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) | 0,750266        | 0,874328        | 0,985072        | 1,060516        | 1,091512      |
|  | Hamidi [19] ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) | 0,748424                            | 0,902511        | 0,958901        | 1,028393        | 1,067181        | 1,082846      |
|  | SSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )           | 0,796783                            | 0,908934        | 1,010269        | 1,086624        | 1,131429        | 1,150192      |
|  | TSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )           | 0,806067                            | 0,921602        | 1,024208        | 1,101684        | 1,147260        | 1,166403      |
|  | FSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )           | 0,895735                            | 1,017115        | 1,129824        | 1,216678        | 1,268689        | 1,290961      |
|  | CPT ( $\varepsilon_z = 0$ )            | 0,457873                            | 0,520783        | 0,579240        | 0,624324        | 0,651345        | 0,662909      |
|  | 5                                      | Présente ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) | 0,750266        | 0,878280        | 0,992466        | 1,068336        | 1,096132      |
| Hamidi [19] ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) |  | 0,748424                            | 0,864347        | 0,943749        | 1,034550        | 1,072864        | 1,086419      |
| SSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )           |  | 0,796783                            | 0,912488        | 1,016938        | 1,094427        | 1,137993        | 1,154412      |
| TSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )           |  | 0,806067                            | 0,925190        | 1,030958        | 1,109609        | 1,153952        | 1,170720      |
| FSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )           |  | 0,895735                            | 1,020919        | 1,137289        | 1,225706        | 1,276497        | 1,296101      |
| CPT ( $\varepsilon_z = 0$ )            |  | 0,457873                            | 0,522783        | 0,583160        | 0,629064        | 0,655445        | 0,665606      |

**Tableau V.3 :** La flèche adimensionnelle  $\bar{w}$  pour des différentes plaques sandwiches fonctionnellement graduées ( $q_0 = t_1 = t_3 = 0, t_2 = 100$  et  $a/h = 10$ ).

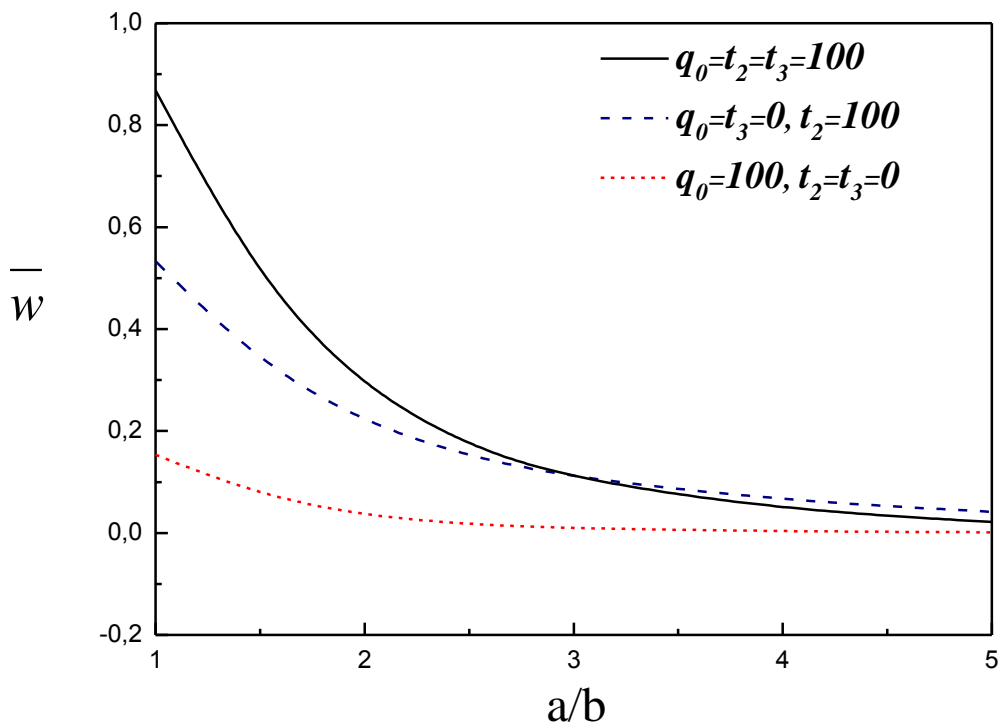
| $k$ | Théorie   | $\bar{w}$       |                   |                   |                   |
|-----|---|-----------------|-------------------|-------------------|-------------------|
|     |   | $t_{FGM}/h = 1$ | $t_{FGM}/h = 2/3$ | $t_{FGM}/h = 1/2$ | $t_{FGM}/h = 4/5$ |
| 0   | Présente ( $\varepsilon_z \neq 0$ )             | 0,464515        | 0,464515          | 0,464515          | 0,464515          |
|     | Saidi et al. [16] ( $\varepsilon_z \neq 0$ )    | 0,449863        | 0,449863          | 0,449863          | 0,449863          |
|     | Zenkour et Al. [167] ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) | 0,461634        | 0,461634          | 0,461634          | 0,461634          |
|     | Zenkour et Al. [167] ( $\varepsilon_z = 0$ )    | 0,480262        | 0,480262          | 0,480262          | 0,480262          |
| 1   | Présente ( $\varepsilon_z \neq 0$ )             | 0,627125        | 0,600805          | 0,577026          | 0,614094          |
|     | Saidi et al. [16] ( $\varepsilon_z \neq 0$ )    | 0,594840        | 0,565276          | 0,542436          | 0,579538          |
|     | Zenkour et Al. [167] ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) | 0,614565        | 0,586124          | 0,563416          | 0,599933          |
|     | Zenkour et Al. [167] ( $\varepsilon_z = 0$ )    | 0,636916        | 0,606292          | 0,582342          | 0,621098          |
| 2   | Présente ( $\varepsilon_z \neq 0$ )             | 0,659547        | 0,635812          | 0,607391          | 0,649404          |
|     | Saidi et al. [16] ( $\varepsilon_z \neq 0$ )    | 0,627934        | 0,596416          | 0,567938          | 0,612832          |
|     | Zenkour et Al. [167] ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) | 0,647135        | 0,618046          | 0,590491          | 0,633340          |
|     | Zenkour et Al. [167] ( $\varepsilon_z = 0$ )    | 0,671503        | 0,639361          | 0,609875          | 0,656142          |
| 3   | Présente ( $\varepsilon_z \neq 0$ )             | 0,669093        | 0,650526          | 0,621278          | 0,662581          |
|     | Saidi et al. [16] ( $\varepsilon_z \neq 0$ )    | 0,639690        | 0,610125          | 0,579769          | 0,626505          |
|     | Zenkour et Al. [167] ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) | 0,658153        | 0,631600          | 0,602744          | 0,646475          |
|     | Zenkour et Al. [167] ( $\varepsilon_z = 0$ )    | 0,683572        | 0,653671          | 0,622467          | 0,670275          |
| 4   | Présente ( $\varepsilon_z \neq 0$ )             | 0,672302        | 0,658073          | 0,629043          | 0,668511          |
|     | Saidi et al. [16] ( $\varepsilon_z \neq 0$ )    | 0,644833        | 0,617502          | 0,586469          | 0,633395          |
|     | Zenkour et Al. [167] ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) | 0,662811        | 0,638705          | 0,609560          | 0,652890          |
|     | Zenkour et Al. [167] ( $\varepsilon_z = 0$ )    | 0,688803        | 0,661291          | 0,629533          | 0,677321          |
| 5   | Présente ( $\varepsilon_z \neq 0$ )             | 0,673416        | 0,662452          | 0,633928          | 0,671510          |
|     | Saidi et al. [16] ( $\varepsilon_z \neq 0$ )    | 0,647421        | 0,621990          | 0,590728          | 0,637353          |
|     | Zenkour et Al. [167] ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) | 0,665096        | 0,642948          | 0,613842          | 0,656490          |
|     | Zenkour et Al. [167] ( $\varepsilon_z = 0$ )    | 0,691420        | 0,665898          | 0,634003          | 0,681343          |

Le tableau V.4 montre les résultats la flèche maximale adimensionnelle  $\bar{w}$  de plaques sandwiches en FGM pour des différentes valeurs de rapport d'aspect géométrique de la plaque «  $a/b$  » et plusieurs schémas de plaques sandwiches en fonction de  $t_{FGM}/h$ , en considérant indice matériel  $k = 3$ . Les résultats sont comparés aux résultats trouvés par des théories HSDT, FSDT et CPT comme dans le tableau V.2. On peut voir que la flèche augmente avec croissance de l'épaisseur de la couche de FGM «  $t_{FGM}$  » et elle est réduite avec l'augmentation du rapport d'aspect «  $a/b$  ».

**Tableau V.4 :** Effet du rapport d'aspect géométrique de la plaque «  $a/b$  » sur la flèche maximale  $\bar{w}$  des plaques sandwichées en FGM ( $q_0 = t_1 = t_3 = 0, t_2 = 100$  et  $k = 3$ ).

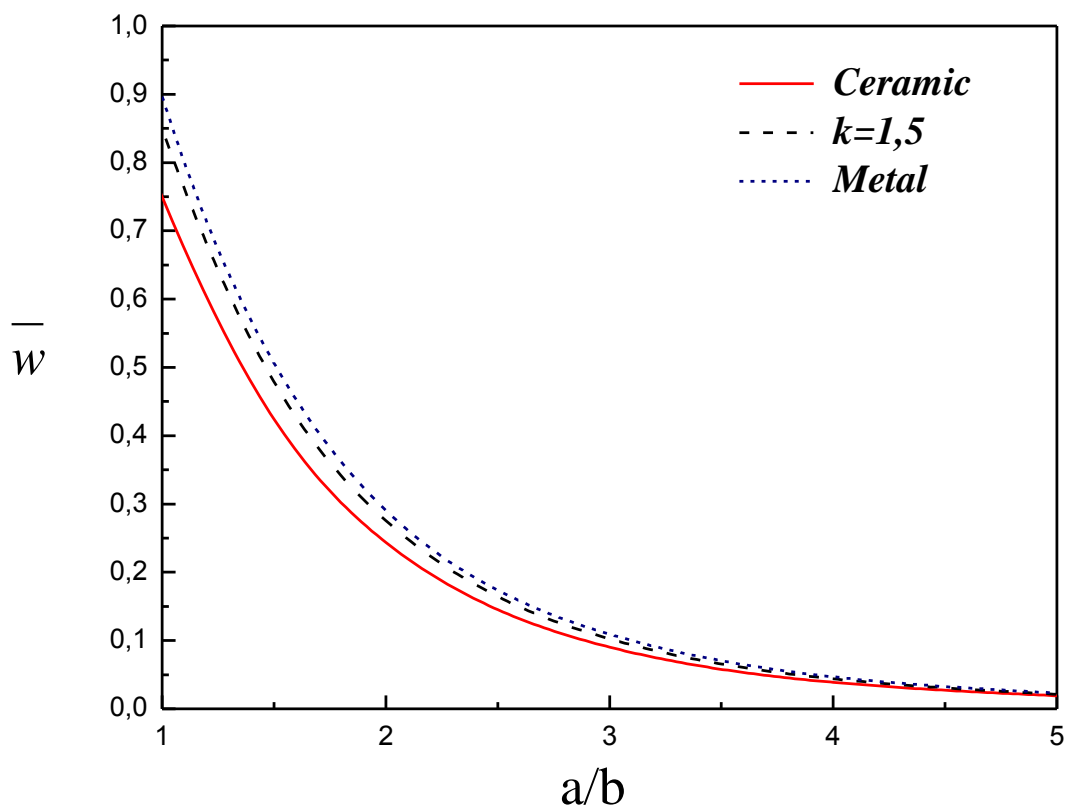
| $t_{FGM}/h$ | Théorie                             | $a/b=1$  | $a/b=2$  | $a/b=3$  | $a/b=4$  | $a/b=5$  |
|-------------|-------------------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| <b>0</b>    | Présente ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) | 0,750266 | 0,278996 | 0,102301 | 0,043917 | 0,021319 |
|             | HSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )        | 0,817556 | 0,321791 | 0,159940 | 0,093790 | 0,061185 |
|             | SSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )        | 0,796783 | 0,313432 | 0,155719 | 0,091273 | 0,059512 |
|             | TSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )        | 0,808168 | 0,318014 | 0,158033 | 0,092654 | 0,060430 |
|             | FSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )        | 0,895735 | 0,353189 | 0,175744 | 0,103172 | 0,067392 |
|             | CPT ( $\varepsilon_z = 0$ )         | 0,457873 | 0,178044 | 0,088171 | 0,051659 | 0,033711 |
| <b>0,2</b>  | Présente ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) | 0,868264 | 0,316806 | 0,116340 | 0,049971 | 0,024264 |
|             | HSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )        | 0,926476 | 0,364706 | 0,181529 | 0,106696 | 0,069818 |
|             | SSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )        | 0,903467 | 0,355510 | 0,176937 | 0,104000 | 0,068059 |
|             | TSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )        | 0,916083 | 0,360554 | 0,179457 | 0,105480 | 0,069026 |
|             | FSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )        | 1,011279 | 0,398391 | 0,198176 | 0,116327 | 0,075980 |
|             | CPT ( $\varepsilon_z = 0$ )         | 0,517716 | 0,200966 | 0,099463 | 0,058261 | 0,038014 |
| <b>0,4</b>  | Présente ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) | 0,973510 | 0,351873 | 0,129328 | 0,055567 | 0,026986 |
|             | HSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )        | 1,025027 | 0,403196 | 0,200642 | 0,117924 | 0,077167 |
|             | SSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )        | 0,999831 | 0,393146 | 0,195642 | 0,115002 | 0,075273 |
|             | TSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )        | 1,013647 | 0,398658 | 0,198386 | 0,116606 | 0,076314 |
|             | FSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )        | 1,118224 | 0,440203 | 0,218920 | 0,128491 | 0,083921 |
|             | CPT ( $\varepsilon_z = 0$ )         | 0,573152 | 0,222174 | 0,109906 | 0,064364 | 0,041992 |
| <b>0,6</b>  | Présente ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) | 1,047444 | 0,378793 | 0,139244 | 0,059831 | 0,029058 |
|             | HSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )        | 1,101003 | 0,432682 | 0,215157 | 0,126351 | 0,082600 |
|             | SSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )        | 1,073875 | 0,421843 | 0,209748 | 0,123178 | 0,080532 |
|             | TSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )        | 1,088747 | 0,427786 | 0,212715 | 0,124919 | 0,081668 |
|             | FSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )        | 1,202080 | 0,472957 | 0,235166 | 0,138015 | 0,090138 |
|             | CPT ( $\varepsilon_z = 0$ )         | 1,202080 | 0,238790 | 0,118083 | 0,069142 | 0,045106 |
| <b>0,8</b>  | Présente ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) | 1,082097 | 0,394673 | 0,145028 | 0,062309 | 0,030259 |
|             | HSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )        | 1,148302 | 0,450940 | 0,224088 | 0,131493 | 0,085879 |
|             | SSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )        | 1,119794 | 0,439521 | 0,218366 | 0,128116 | 0,083662 |
|             | TSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )        | 1,135420 | 0,445781 | 0,221504 | 0,129968 | 0,084879 |
|             | FSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )        | 1,255041 | 0,493613 | 0,245406 | 0,144017 | 0,094055 |
|             | CPT ( $\varepsilon_z = 0$ )         | 0,644176 | 0,249267 | 0,123233 | 0,072151 | 0,047066 |
| <b>1</b>    | Présente ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) | 1,090461 | 0,354791 | 0,147526 | 0,063373 | 0,030774 |
|             | HSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )        | 1,170917 | 0,459613 | 0,228305 | 0,133902 | 0,087401 |
|             | SSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )        | 1,141655 | 0,447872 | 0,222403 | 0,130406 | 0,085094 |
|             | TSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )        | 1,157693 | 0,454308 | 0,225639 | 0,132324 | 0,086360 |
|             | FSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )        | 1,280741 | 0,503607 | 0,250355 | 0,146917 | 0,095948 |
|             | CPT ( $\varepsilon_z = 0$ )         | 0,657539 | 0,254326 | 0,125715 | 0,073599 | 0,048009 |

La figure V.1 montre l'influence du rapport d'aspect géométrique de la plaque  $a/b$  sur la flèche maximale adimensionnelle pour une plaque sandwich fonctionnellement graduée avec un indice matériel  $k=3$  et un rapport  $t_{\text{FGM}}/h=0.2$ . Les influences des charges mécaniques et thermiques sont considérées dans cet exemple. A partir de la figure V.1, on peut remarquer que l'influence du rapport d'aspect géométrique est plus importante sur la flèche maximale adimensionnelle  $\bar{w}$  de la plaque sandwich en FGM lorsque  $q_0 = t_2 = t_3 = 100$ .



**Figure V.1:** Influence des charges mécaniques et thermiques sur la flèche maximale adimensionnelle  $\bar{w}$  par rapport au rapport d'aspect géométrique  $a/b$  de la plaque sandwich en FGM ( $t_{\text{FGM}}/h = 0.2, k = 3$ ).

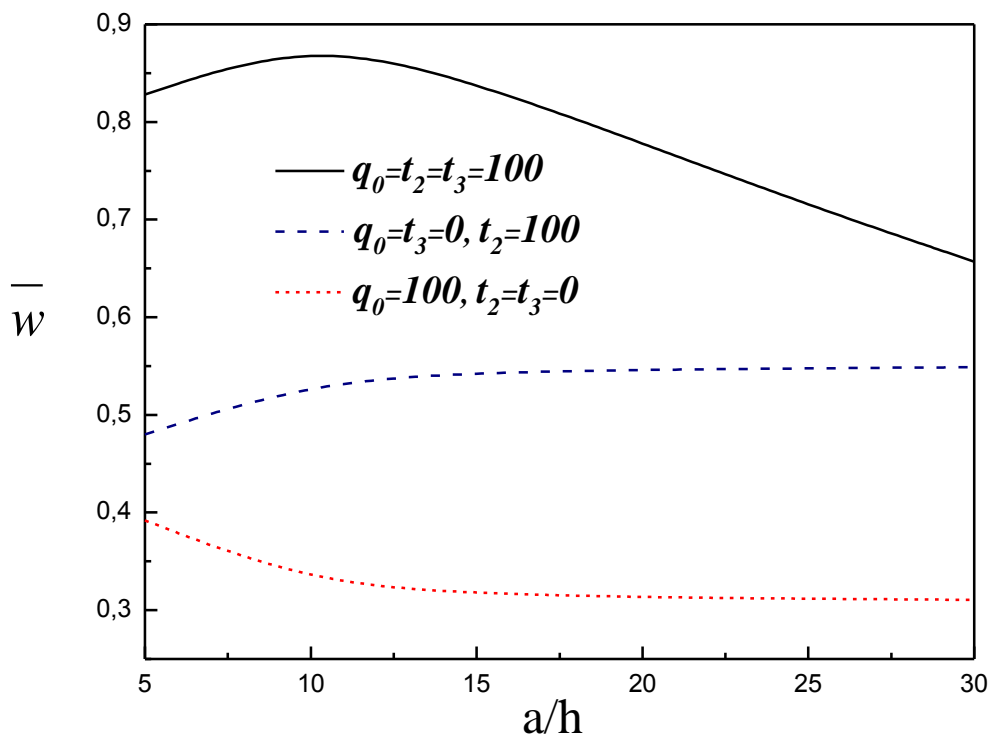
La figure V.2 illustre la variation de sur la flèche maximale adimensionnelle  $\bar{w}$  en fonction du rapport d'aspect géométrique d'une plaque métallique, une plaque entièrement en céramique et d'une plaque sandwich fonctionnellement graduée (avec un indice matériel  $k=1.5$  et un rapport  $t_{\text{FGM}}/h=0.2$ ) sous l'effet de charges mécaniques et thermiques ( $q_0 = t_2 = t_3 = 100$ ). On constate que la flèche maximale est plus importante pour la plaque métallique et petite pour la plaque céramique.



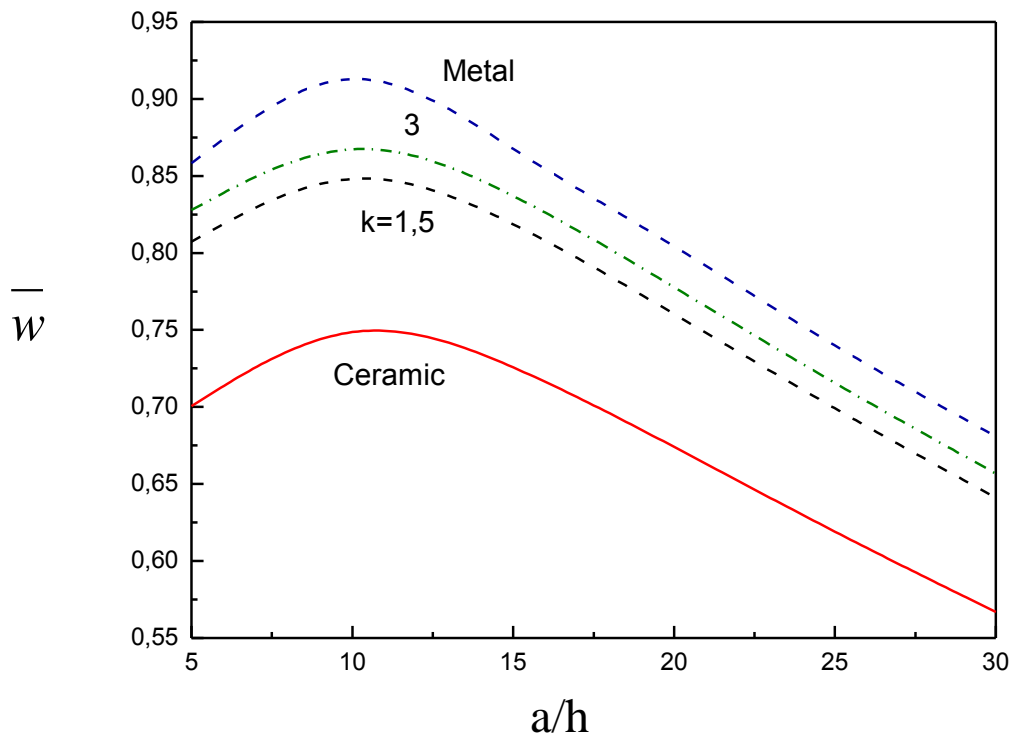
**Figure V.2:** L'effet du rapport d'aspect géométrique  $a/b$  sur la flèche maximale adimensionnelle  $\bar{w}$  de la plaque sandwich en FGM ( $t_{\text{FGM}}/h=0.2, t_1=0, q_0=t_2=t_3=100$ ).

La figure V.3 montre l'effet du rapport largeur/épaisseur  $a/h$  sur la flèche maximale adimensionnelle  $\bar{w}$  pour une plaque sandwich fonctionnellement graduée. Les influences des charges mécaniques et thermiques sont prises en compte dans cet exemple. Sur la figure V.3, on voit que la charge thermomécanique ( $q_0 = t_2 = t_3 = 100$ ) influence de manière significative les résultats de la flèche adimensionnelle  $\bar{w}$ .

La figure V.4 présente la variation de la flèche maximale adimensionnelle  $\bar{w}$  en fonction du rapport largeur/épaisseur  $a/h$  pour des plaques sandwiches fonctionnellement graduées. La flèche produite par une plaque métallique se trouve être la plus grande comparée à celle de la plaque en céramique qui est plus petite. Il est à noter aussi que les plaques sandwich en FGM à propriétés intermédiaires subissent des valeurs de flèche moyennes. Cela peut être justifier car la plaque métallique est celle qui présente la rigidité la plus faible et la plaque en céramique est celle qui présente la plus grande rigidité.



**Figure V.3:** L'effet du rapport largeur/épaisseur  $a/h$  sur la flèche maximale adimensionnelle  $\bar{w}$  pour une plaque sandwich carrée fonctionnellement graduée sous des charges mécaniques et thermiques ( $t_{\text{FGM}}/h = 0.2, k = 3$ )



**Figure V.4:** La variation de la flèche maximale adimensionnelle  $\bar{w}$  en fonction du rapport largeur/épaisseur  $a/h$  pour des plaques sandwichées carrées en FGM

$$(t_{\text{FGM}}/h = 0.2, t_1 = 0, q_0 = t_2 = t_3 = 100)$$

### V.2.2. La contrainte axiale adimensionnelle $\bar{\sigma}_x$

Le tableau V.5 représente la contrainte axiale adimensionnelle " $\bar{\sigma}_x$ " pour des indices matériels  $k = 0, 1, 2, 3, 4$  et  $5$  et une épaisseur des couches fonctionnellement graduées différente ( $t_{\text{FGM}}$ ). On constate que la contrainte axiale est très sensible à la variation de l'épaisseur de la couche de FGM et de l'indice matériel. Comme cela est démontré dans le cas des flèches adimensionnelles, l'influence de l'étiement de l'épaisseur conduit également à une réduction des contraintes. Les résultats Réf<sup>(a)</sup> et Réf<sup>(b)</sup> sont pris de Saidi et al. [16] et Hamidi et al. [19] respectivement.

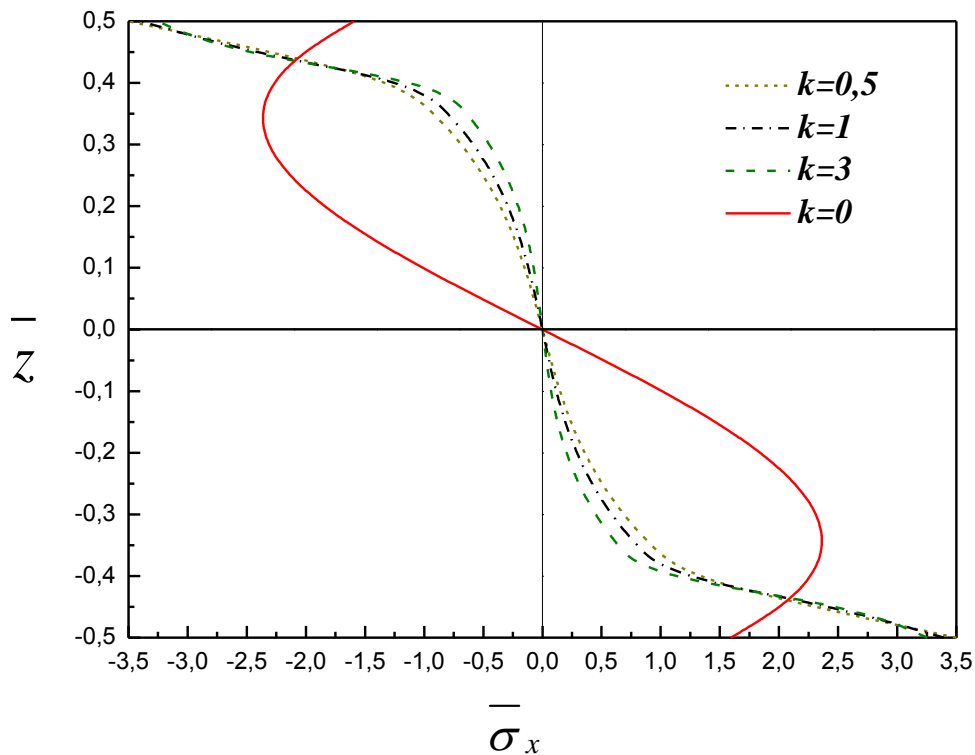
Chapitre V : Résultats et discussion de l'analyse thermomécanique des plaques sandwich en FGM en utilisant une nouvelle théorie quasi 3-D

**Tableau V.5 :** La contrainte axiale adimensionnelle  $\bar{\sigma}_x$  pour des différentes plaques sandwichées carrées fonctionnellement graduées ( $q_0 = t_1 = t_3 = 0, t_2 = 100$  et  $a/h = 10$ ).

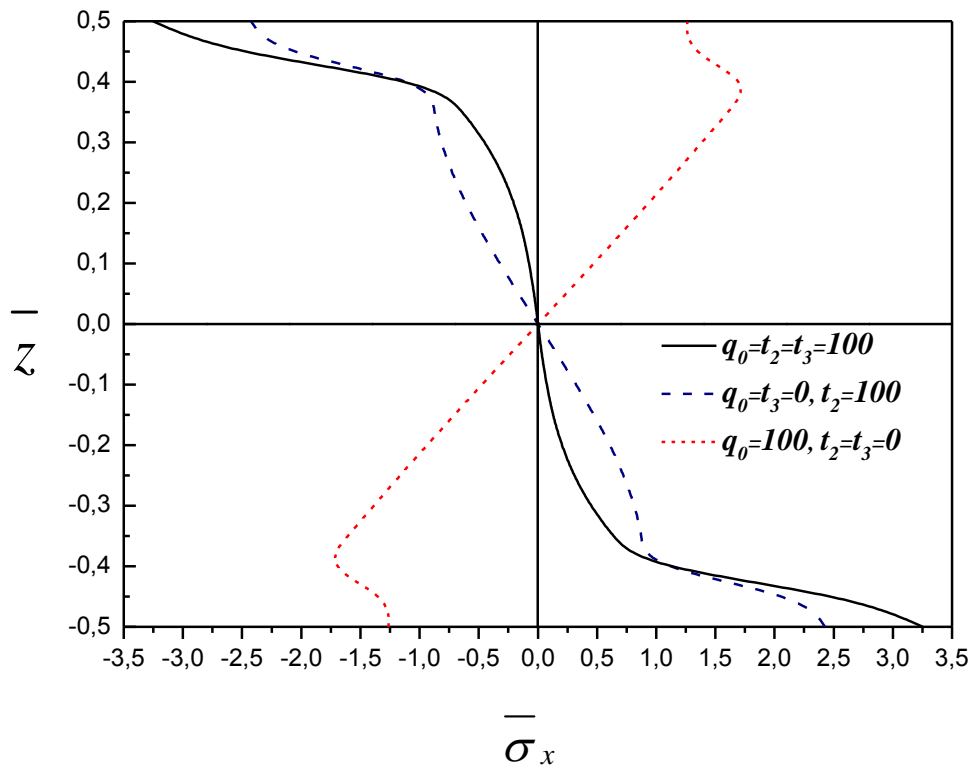
| $k$   | Théorie                                       | $\bar{\sigma}_x$                    |                   |                   |                   |                   |                 |
|---|---|-------------------------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-----------------|
|   |   | $t_{FGM}/h = 0$                     | $t_{FGM}/h = 0.2$ | $t_{FGM}/h = 0.4$ | $t_{FGM}/h = 0.6$ | $t_{FGM}/h = 0.8$ | $t_{FGM}/h = 1$ |
| 0   | Présente ( $\varepsilon_z \neq 0$ )           | -1,948246                           | -1,948246         | -1,948246         | -1,948246         | -1,948246         | -1,948246       |
|   | Réf <sup>(a)</sup> ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) | -1,650736                           | -1,650736         | -1,650736         | -1,650736         | -1,650736         | -1,650736       |
|   | Réf <sup>(b)</sup> ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) | -2,528819                           | -2,528819         | -2,528819         | -2,528819         | -2,528819         | -2,528819       |
|   | SSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )                  | -2,388919                           | -2,388919         | -2,388919         | -2,388919         | -2,388919         | -2,388919       |
|   | TSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )                  | -2,461177                           | -2,461177         | -2,461177         | -2,461177         | -2,461177         | -2,461177       |
|   | FSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )                  | -3,597007                           | -3,597007         | -3,597007         | -3,597007         | -3,597007         | -3,597007       |
|   | CPT ( $\varepsilon_z = 0$ )                   | -1,706393                           | -1,706393         | -1,706393         | -1,706393         | -1,706393         | -1,706393       |
| 1   | Présente ( $\varepsilon_z \neq 0$ )           | -1,948246                           | -3,610619         | -3,146952         | -2,781299         | -2,518922         | -2,345486       |
|   | Réf <sup>(a)</sup> ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) | -1,650736                           | -3,372080         | -2,859305         | -2,461461         | -2,179138         | -1,993540       |
|   | Réf <sup>(b)</sup> ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) | -2,528819                           | -3,913321         | -3,245326         | -3,245326         | -2,797887         | -2,316178       |
|   | SSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )                  | -2,388919                           | -3,333300         | -3,001265         | -2,733086         | -2,537374         | -2,406806       |
|   | TSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )                  | -2,461177                           | -3,412724         | -3,076466         | -2,804750         | -2,606343         | -2,473909       |
|   | FSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )                  | -3,597007                           | -4,504051         | -4,136892         | -3,838047         | -3,618476         | -3,411099       |
|   | 2   | Présente ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) | -1,948246         | -3,469271         | -2,874730         | -2,419587         | -2,122935       |
| Réf <sup>(a)</sup> ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) |   | -1,650736                           | -3,211762         | -2,556774         | -2,066031         | -1,751165         | -1,580468       |
| Réf <sup>(b)</sup> ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) |   | -2,528819                           | -3,792865         | -3,245326         | -2,645068         | -2,332424         | -2,180056       |
| SSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )                  |   | -2,388919                           | -3,234499         | -2,806645         | -2,469045         | -2,243809         | -2,118730       |
| TSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )                  |   | -2,461177                           | -3,312889         | -2,879670         | -2,537489         | -2,308903         | -2,181780       |
| FSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )                  |   | -3,597007                           | -4,398484         | -3,924721         | -3,545789         | -3,289757         | -3,145662       |
| 3   |   | Présente ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) | -1,948246         | -3,403457         | -2,750142         | -2,263590         | -1,969619       |
|   | Réf <sup>(a)</sup> ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) | -1,650736                           | -3,137344         | -2,419727         | -1,898185         | -1,588667         | -1,446122       |
|   | Réf <sup>(b)</sup> ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) | -2,528819                           | -3,736478         | -3,130873         | -1,898185         | -1,588667         | -1,446122       |
|   | SSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )                  | -2,388919                           | -3,188312         | -2,716593         | -2,353122         | -2,127496         | -2,020425       |
|   | TSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )                  | -2,461177                           | -3,266245         | -2,788595         | -2,420027         | -2,190823         | -2,081815       |
|   | FSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )                  | -3,597007                           | -4,349165         | -3,825600         | -3,415261         | -3,156414         | -3,031283       |
|   | 4   | Présente ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) | -1,948246         | -3,365540         | -2,679970         | -2,180433         | -1,895490       |
| Réf <sup>(a)</sup> ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) |   | -1,650736                           | -3,094600         | -2,343139         | -1,809688         | -1,511078         | -1,390767       |
| Réf <sup>(b)</sup> ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) |   | -2,528819                           | -3,703803         | -3,065266         | -2,561174         | -2,252973         | -2,120478       |
| SSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )                  |   | -2,388919                           | -3,161620         | -2,665468         | -2,290552         | -2,070361         | -1,978602       |
| TSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )                  |   | -2,461177                           | -3,239292         | -2,736867         | -2,356554         | -2,132710         | -2,039172       |
| FSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )                  |   | -3,597007                           | -4,320597         | -3,768831         | -3,343853         | -3,089733         | -2,981507       |
| 5   |   | Présente ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) | -1,948246         | -3,340946         | -2,6353801        | -2,129968         | -1,655927       |
|   | Réf <sup>(a)</sup> ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) | -1,650736                           | -3,066950         | -2,294758         | -1,756372         | -1,468147         | -1,446122       |
|   | Réf <sup>(b)</sup> ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) | -2,528819                           | -3,682505         | -3,023018         | -2,509154         | -2,207341         | -2,2090458      |
|   | SSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )                  | -2,388919                           | -3,682505         | -2,632792         | -2,252244         | -2,038118         | -1,957968       |
|   | TSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )                  | -2,461177                           | -3,221769         | -2,703791         | -2,317655         | -2,099863         | -2,018086       |
|   | FSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )                  | -3,597007                           | -4,301976         | -3,732298         | -3,299697         | -3,051612         | -2,956534       |

La figure V.5 illustre la répartition des contraintes axiales  $\bar{\sigma}_x$  à travers l'épaisseur des plaques en céramique homogène et des plaques sandwiches fonctionnellement graduées avec des indices matériels  $k = 0.5, 1$  et  $3$ . On remarque que les contraintes de traction sont au-dessous du plan médian et ceux de compression au-dessus du plan médian. Comme on pouvait s'y attendre, l'indice matériel de la fraction volumique  $k$  influence considérablement la répartition des contraintes axiales.

Dans la figure V.6 on a représenté graphiquement la distribution transversale de la contrainte axiale adimensionnelle  $\bar{\sigma}_x$  pour une plaque sandwich carrée fonctionnellement graduée (avec un indice matériel  $k = 3$  et un rapport  $t_{\text{FGM}}/h = 0.2$ ). Ces figures montrent la grande influence exercée par les différents de charges mécaniques et thermiques sur les contraintes axiales  $\bar{\sigma}_x$ .



**Figure V.5:** La variation de la contrainte axiale adimensionnelle  $\bar{\sigma}_x$  à travers l'épaisseur de la plaque sandwich carrées en FGM ( $t_{\text{FGM}}/h = 0.2, t_1 = 0, q_0 = t_2 = t_3 = 100$ ).



**Figure V.6:** Influence des charges mécaniques et thermiques sur la contrainte axiale adimensionnelle  $\bar{\sigma}_x$  à travers l'épaisseur de la plaque sandwich carrée en FGM ( $t_{\text{FGM}}/h = 0.2, k = 3$ ).

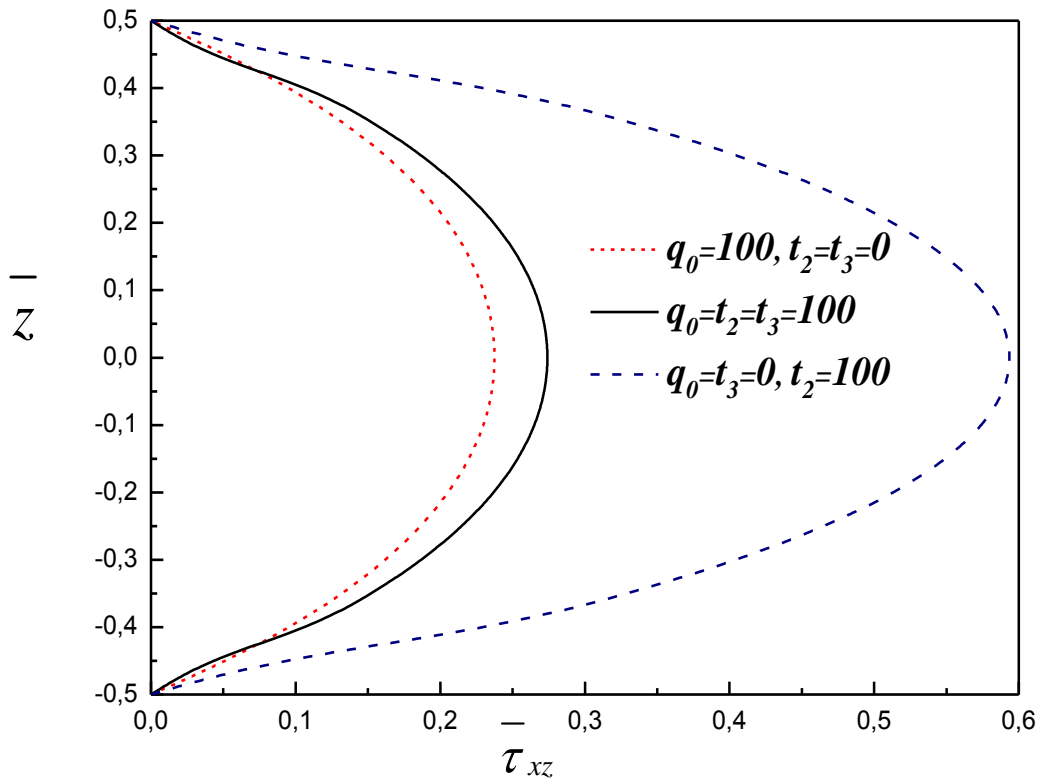
### V.2.3. La contrainte de cisaillement transversal $\bar{\tau}_{xz}$

Le tableau V.6 montre la variation de la contrainte de cisaillement transversal adimensionnelle  $\bar{\tau}_{xz}$  en fonction de l'indices matériels  $k$  et le rapport de l'épaisseur des couches fonctionnellement graduées /épaisseur de la plaque ( $t_{\text{FGM}}/h$ ). Les résultats trouvés sont comparés avec des contraintes de cisaillement transversal calculées par des théories raffinées des plaques employées par de Saidi et al. [16] et Hamidi et al. [19] (Réf<sup>(a)</sup>, Réf<sup>(b)</sup> respectivement) ainsi par des solutions basées sur les théories du premier ordre (FSDT), théorie du troisième ordre (TSDT) et théorie de cisaillement d'ordre élevé de déformation sinusoidale (SSDT). On peut en déduire que l'introduction de l'effet d'étirement de l'épaisseur de la plaque réduit les contraintes de cisaillement transversal.

**Tableau V.6 :** La contrainte de cisaillement transversal adimensionnelle  $\bar{\tau}_{xz}$  pour des différentes plaques sandwichs carrées en FGM ( $q_0 = t_1 = t_3 = 0, t_2 = 100$  et  $a/h = 10$ ).

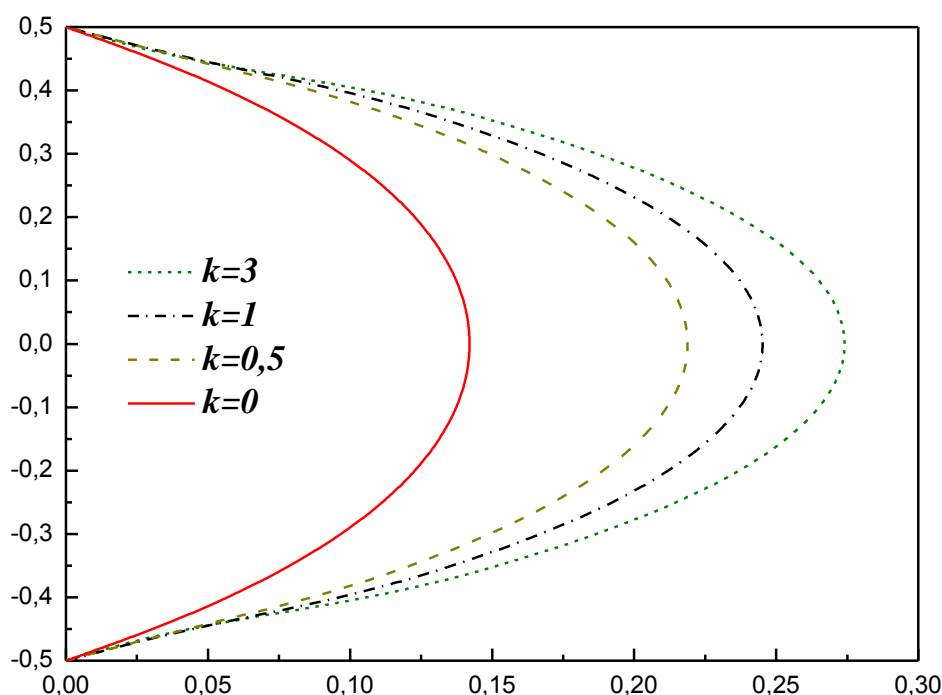
| $k$   | Théorie                                       | $\bar{\tau}_{xz}$                   |                   |                   |                   |                   |                 |
|---|---|-------------------------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-----------------|
|   |   | $t_{FGM}/h = 0$                     | $t_{FGM}/h = 0.2$ | $t_{FGM}/h = 0.4$ | $t_{FGM}/h = 0.6$ | $t_{FGM}/h = 0.8$ | $t_{FGM}/h = 1$ |
| 0   | Présente ( $\varepsilon_z \neq 0$ )           | 0,152386                            | 0,152386          | 0,152386          | 0,152386          | 0,152386          | 0,152386        |
|   | Réf <sup>(a)</sup> ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) | 0,142427                            | 0,142427          | 0,142427          | 0,142427          | 0,142427          | 0,142427        |
|   | Réf <sup>(b)</sup> ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) | 0,194197                            | 0,194197          | 0,194197          | 0,194197          | 0,194197          | 0,194197        |
|   | SSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )                  | 0,171604                            | 0,171604          | 0,171604          | 0,171604          | 0,171604          | 0,171604        |
|   | TSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )                  | 0,174481                            | 0,174481          | 0,174481          | 0,174481          | 0,174481          | 0,174481        |
|   | FSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )                  | 0,173624                            | 0,173624          | 0,173624          | 0,173624          | 0,173624          | 0,173624        |
|   | 1   | Présente ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) | 0,152386          | 0,236112          | 0,231170          | 0,235860          | 0,248341        |
| Réf <sup>(a)</sup> ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) |   | 0,142427                            | 0,245892          | 0,271139          | 0,263095          | 0,250022          | 0,245207        |
| Réf <sup>(b)</sup> ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) |   | 0,194197                            | 0,358090          | 0,346354          | 0,370811          | 0,315647          | 0,308622        |
| SSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )                  |   | 0,171604                            | 0,271618          | 0,300335          | 0,293865          | 0,280890          | 0,277019        |
| TSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )                  |   | 0,174481                            | 0,264677          | 0,285938          | 0,284236          | 0,274133          | 0,272347        |
| FSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )                  |   | 0,173624                            | 0,181504          | 0,190134          | 0,199626          | 0,210115          | 0,221768        |
| 2   |   | Présente ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) | 0,152386          | 0,232742          | 0,228551          | 0,238272          | 0,260030        |
|   | Réf <sup>(a)</sup> ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) | 0,142427                            | 0,266548          | 0,287189          | 0,265885          | 0,243455          | 0,239333        |
|   | Réf <sup>(b)</sup> ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) | 0,194197                            | 0,368104          | 0,341227          | 0,376236          | 0,315647          | 0,308622        |
|   | SSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )                  | 0,171604                            | 0,292205          | 0,317892          | 0,298078          | 0,275130          | 0,272583        |
|   | TSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )                  | 0,174481                            | 0,282950          | 0,304910          | 0,288355          | 0,270427          | 0,270952        |
|   | FSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )                  | 0,173624                            | 0,185719          | 0,199626          | 0,215785          | 0,225945          | 0,244354        |
|   | 3   | Présente ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) | 0,152386          | 0,231344          | 0,228089          | 0,241321          | 0,269479        |
| Réf <sup>(a)</sup> ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) |   | 0,142427                            | 0,274786          | 0,291316          | 0,261357          | 0,235362          | 0,235593        |
| Réf <sup>(b)</sup> ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) |   | 0,194197                            | 0,348104          | 0,376236          | 0,341227          | 0,304511          | 0,302325        |
| SSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )                  |   | 0,171604                            | 0,300600          | 0,322239          | 0,294047          | 0,267073          | 0,269608        |
| TSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )                  |   | 0,174481                            | 0,290349          | 0,308697          | 0,285154          | 0,264327          | 0,270110        |
| FSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )                  |   | 0,173624                            | 0,185719          | 0,199626          | 0,215785          | 0,234789          | 0,257465        |
| 4   |   | Présente ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) | 0,152386          | 0,230598          | 0,228124          | 0,243864          | 0,276659        |
|   | Réf <sup>(a)</sup> ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) | 0,142427                            | 0,279028          | 0,291316          | 0,257131          | 0,230171          | 0,235324        |
|   | Réf <sup>(b)</sup> ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) | 0,194197                            | 0,373398          | 0,336004          | 0,377769          | 0,296906          | 0,300779        |
|   | SSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )                  | 0,171604                            | 0,305016          | 0,323396          | 0,289951          | 0,261729          | 0,270017        |
|   | TSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )                  | 0,174481                            | 0,294226          | 0,309711          | 0,281837          | 0,260366          | 0,271755        |
|   | FSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )                  | 0,173624                            | 0,186586          | 0,201639          | 0,219335          | 0,240436          | 0,266029        |
|   | 5   | Présente ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) | 0,152386          | 0,230141          | 0,228291          | 0,245894          | 0,282200        |
| Réf <sup>(a)</sup> ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) |   | 0,142427                            | 0,281670          | 0,291163          | 0,253889          | 0,227025          | 0,236707        |
| Réf <sup>(b)</sup> ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) |   | 0,194197                            | 0,377010          | 0,331797          | 0,378075          | 0,292003          | 0,319732        |
| SSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )                  |   | 0,171604                            | 0,307694          | 0,323573          | 0,286687          | 0,258433          | 0,272071        |
| TSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )                  |   | 0,174481                            | 0,296571          | 0,309879          | 0,279200          | 0,258029          | 0,274512        |
| FSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )                  |   | 0,173624                            | 0,187168          | 0,203004          | 0,221768          | 0,244354          | 0,272062        |

La figure V.7 montre la répartition des contraintes de cisaillement transversal adimensionnelles  $\bar{\tau}_{xz}$  à travers l'épaisseur d'une plaque sandwich carrée fonctionnellement graduée (avec un indice matériel  $k = 3$  et un rapport  $t_{\text{FGM}}/h = 0.2$ ). On peut constater l'effet des charges mécaniques et thermiques sur des contraintes de cisaillement transversal adimensionnelle  $\bar{\tau}_{xz}$ .



**Figure V.7:** Influence des charges mécaniques et thermiques sur la contrainte de cisaillement transversal adimensionnelle  $\bar{\tau}_{xz}$  à travers l'épaisseur de la plaque sandwich carrée en FGM ( $t_{\text{FGM}}/h = 0.2, k = 3$ ).

Pour La figure V.8 on peut remarquer la répartition à travers l'épaisseur des plaques sandwichs carrées fonctionnellement graduées avec des indices matériels  $k = 0, 0.5, 1$  et  $3$  de la contrainte de cisaillement transversal adimensionnelle  $\bar{\tau}_{xz}$ . On constate que la valeur de la contrainte de cisaillement transversal  $\bar{\tau}_{xz}$  est maximale au plan médian de la plaque et elle est plus grande pour le cas des plaques en FGM et inférieure pour les plaques en céramique homogène.



**Figure V.8:** La variation de la contrainte de cisaillement transversal adimensionnelle  $\bar{\tau}_{xz}$  à travers l'épaisseur de la plaque sandwich carrées fonctionnellement graduées

$$(t_{\text{FGM}}/h = 0.2, t_1 = 0, q_0 = t_2 = t_3 = 100).$$

### V.3. Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté les résultats de l'analyse du comportement thermomécanique de la flexion des plaques sandwiches fonctionnellement graduées avec une variation arbitraire des propriétés matérielles en utilisant une nouvelle théorie de déformation de cisaillement de plaque quasi 3-D.

Les théories de déformation de cisaillement des plaques sont utilisées pour vérifier le comportement thermomécanique de la flexion des plaques sandwiches sous une distribution non-linéaire de champ de température et des charges mécaniques. L'effet de l'étirement de l'épaisseur de la plaque est également analysé et discuté.

L'examen des tableaux V.2 à V.6 révèle que la présente théorie avec seulement cinq variables fournit des résultats similaires à ceux calculés par la théorie hyperbolique raffinée des plaques utilisée par Saidi et al. [16] et la théorie sinusoïdale raffinée proposé par Zenkour et Al. [167] qui utilisent six inconnues ( $\varepsilon_z \neq 0$ ). Ceci démontre que la même précision est réalisable avec la théorie actuelle en utilisant un nombre de variables inférieur à celui d'autres théories et souligne clairement comment le présent modèle est plus simple et plus facilement déployé.

On a pu conclure grâce aux tableaux V.2 à V.6 que cette nouvelle théorie de déformation de cisaillement quasi 3-D qui prend en considération l'introduction de l'influence d'étirement de l'épaisseur rend une plaque plus rigide et, par conséquent, conduit à une réduction des flèches et des contraintes.



# **CONCLUSION GÉNÉRALE**



## Conclusion générale

Les plaques sont largement utilisées dans la confection des structures mécaniques. Une raison importante en est leur grande légèreté doublée dans certaines configurations d'une résistance mécanique importante. Elles permettent ainsi de réaliser dans l'industrie des structures à la fois robustes et légères.

Les plaques sandwich fonctionnellement graduées représentent un domaine de recherche très vaste et ouvrent un champ d'application très large car il est possible de modifier à volonté leur composition et leur conception pour obtenir de ces matériaux les propriétés recherchées. La conception et l'élaboration de ces matériaux nécessitent le développement d'outils d'analyse adaptés à leurs spécificités géométriques et matérielles.

Le comportement thermomécanique des structures à la flexion est intimement lié à la forme géométrique, aux propriétés des matériaux constituants, aux conditions aux limites, aux multiples effets environnementaux et aux théories appliquées pour modéliser le phénomène. En plus, le choix de la bonne méthode de résolution est crucial dans la fiabilité de la prédiction de ce comportement.

Le travail de cette thèse entre de le cadre des recherche liées à l'étude du comportement thermomécanique des plaques sandwiches en matériaux fonctionnellement gradués « FGM ». Le but principal était de proposer une nouvelle théorie de déformation de cisaillement des plaques quasi 3-D qui prend en considération l'effet de l'étirement de l'épaisseur de la plaque « Thickness Stretching Effect ».

Le champ de déplacements a été développé pour le calcul du comportement thermomécanique des plaques sandwiches en FGM en introduisant l'influence de la prise en compte de la déformation normale ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) sur la réponse de la plaque sandwich en flexion. En utilisant les expressions des composantes  $u_s$  et  $v_s$  qui dépendent du terme integral  $u_s = k_1 f(z) \int \theta(x, y) dx$  et  $v_s = k_2 f(z) \int \theta(x, y) dy$  et en divisant le déplacement transversal  $w(x, y, z)$  en deux composants à savoir : la flèche pure de la plaque  $w_0(x, y)$ , et de la flèche due à l'effet d'étirement  $\varphi_z(x, y)$  on a pu réduire le nombre de fonctions inconnues dans la théorie proposée à seulement cinq inconnues, contrairement aux autres théories habituelles dont le nombre d' inconnues est six ou plus.

La formulation proposée repose sur le principe des travaux virtuels et résolue par une solution de type Navier. Elle n'exige pas de facteur de correction de cisaillement comme celui utilisé dans la théorie de déformation du premier ordre FSDT, et donne une distribution parabolique de la contrainte de cisaillement transversal dans l'épaisseur de la plaque qui coïncide avec la réalité tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords supérieurs et inférieurs libres de la plaque. Des solutions analytiques à l'aide d'une application numérique sont proposées et comparées avec des solutions exactes de la littérature qui utilisent des différentes théories de déformation de plaques.

Cette étude comparative a démontré que la flèche et les contraintes obtenues par la présente théorie sont presque égales à celles trouvées par les autres théories. Cela indique que les hypothèses de la théorie proposée peuvent conduire à des résultats précis et peuvent ainsi améliorer le temps de calcul dans les problèmes de géométrie complexe des structures en FGM.

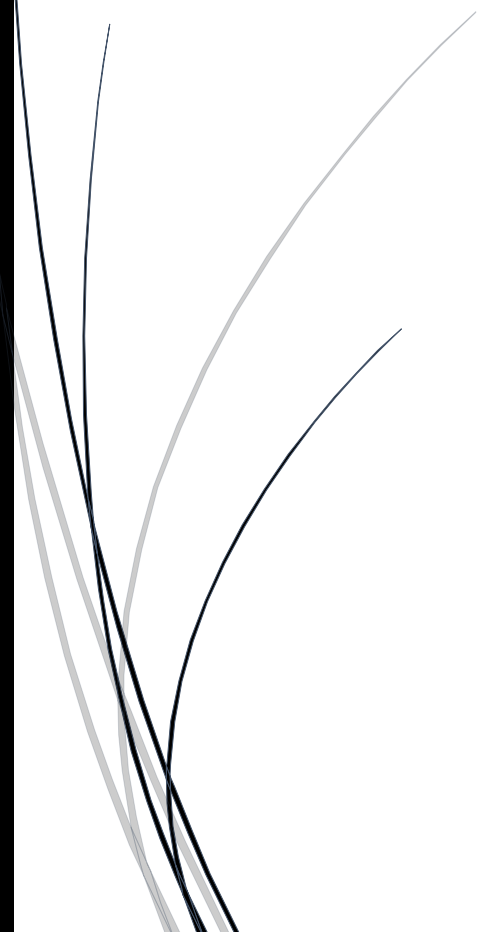
On a pu conclure que l'introduction de l'effet de l'étirement de l'épaisseur de la plaque augmente la rigidité de la plaque sandwiches fonctionnellement graduée, et, par conséquent, conduit à une réduction des déplacements dans la plaque, donc une caractéristique importante est souhaitable dans la conception structurelle. Dans l'application technologique, cette caractéristique représente beaucoup d'avantages et permet de choisir des paramètres de matériaux appropriés pour rendre l'utilisation des plaques fonctionnellement graduées de plus fiable et plus sûre dans l'intégrité structurelle une fois soumise à un champ de température très élevé.

Finalement ces études de comparaison ont démontré l'efficacité et la crédibilité de notre théorie présentée. De ce fait, nous proposons fortement d'appliquer la présente théorie pour tous les avantages qu'elle présente.

En perspective, on prévoit d'élargir le champ d'application de cette nouvelle théorie de déformation de cisaillement des plaques quasi 3-D pour l'analyse dynamique et d'instabilité des structures fonctionnellement graduées avec des différentes géométries et différentes formes sous la combinaison des différents types de chargement (mécanique, thermique, et hygrothermique).



# **RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES**



## Références bibliographiques

- [1] M. Koizumi, Recent Progress of functionally graded materials in Japan. *Ceram. Eng. Sci. Proc*; 13 (7-8): 333-347, 1992.
- [2] Kirchhoff, G.R., "Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer Elastischen Scheibe", *J. Reine Angew. Math. (Crelle)*, 1850.
- [3] Reissner, E., "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates", *Journal of Applied Mechanics-transactions of The ASME*, 69-77, 1945.
- [4] Mindlin RD. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates. *J Appl Mech* ,18(1):31-8, 1951.
- [5] J.N. Reddy, *Mechanics of Laminated Composites Plates: Theory and Analysis*. CRC Press, Boca Raton, 1997.
- [6] M. Touratier, An efficient standard plate theory, *Int. J. Eng. Sc*; 29 (8): 901-916, 1991.
- [7] M. Karama., K.S. Afaq., S. Mistou, Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity, *Int. J. Solids Structures*; 40 (6): 1525-1546, 2003.
- [8] Koiter, W.T. "A consistent first approximation in the general theory of thin elastic shells", *Proceedings of 1st Symposium on the Theory of Thin Elastic Shells*, Amsterdam, North-Holland.1959.
- [9] Reddy, J.N. and Cheng, Z.Q. "Three-dimensional thermomechanical deformations of functionally graded rectangular plates", *Euro. J. Mech. A Solids*, 20(5), 841-855.2001.
- [10] Xiang, S., Wang, K., Ai, Y., Sha, Y. and Shi, H. "Analysis of isotropic, sandwich and laminated plates by a meshless method and various shear deformation theories", *Compos. Struct.*, 91(1), 31-37.2009.
- [11] Cetkovic, M. and Vuksanovic, D.J. "Bending, free vibrations and buckling of laminated composite and sandwich plates using a layerwise displacement model", *Compos. Struct.*, 88(2), 219-227.2000.
- [12] Natarajan, S. and Manickam, G "Bending and vibration of functionally graded material sandwich plates using an accurate theory", *Finite Elem. Anal. Des.*, 57, 32-42.2012.
- [13] Grover, N., Maiti, D.K. and Singh, B.N. "A new inverse hyperbolic shear deformation theory for static and buckling analysis of laminated composite and sandwich plates", *Compos. Struct.*, 95, 667-675.2013.
- [14] Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Anwar Bég, O. "Thermoelastic bending analysis of functionally graded sandwich plates using a new higher order shear and normal deformation theory", *Int. J. Mech. Sci.*, 76, 102-111.2013.
- [15] Tounsi, A., Houari, M.S.A., Benyoucef, S. and Adda Bedia, E.A. "A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates", *Aerosp. Sci. Technol.*, 24(1), 209-220.2013.
- [16] Saidi, H., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Adda Bedia, E.A. (2013), "Thermo-mechanical bending response with stretching effect of functionally graded sandwich plates using a novel shear deformation theory", *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 15(2), 221-245.2013.
- [17] Sobhy, M. "Buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates resting on elastic foundations under various boundary conditions", *Compos. Struct.*, 99, 76-87.2013.

- [18] Bachir Bouiadjra, M., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. "Thermal Buckling of Functionally Graded Plates According to a Four-Variable Refined Plate Theory", *Journal of Thermal Stresses*. Volume 35, 35-56, 2012.
- [19] Hamidi, A., Houari, M.S.A., Mahmoud, S.R. and Tounsi, A. "A sinusoidal plate theory with 5-unknowns and stretching effect for thermomechanical bending of functionally graded sandwich plates", *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 18(1), 235-253.2015.
- [20] Bouguenina, O., Belahdar, K., Tounsi, A. and Adda Bedia, E.A. "Numerical analysis of FGM plates with variable thickness subjected to thermal buckling", *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 19(3), 679-695.2015.
- [21] Kar, V.R. and Panda, S.K. "Large deformation bending analysis of functionally graded spherical shell using FEM", *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, 53(4), 661-679.2015.
- [22] Houari, M.S.A., Tounsi, A., Bessaim, A. and Mahmoud, S.R. "A new simple three-unknown sinusoidal shear deformation theory for functionally graded plates", *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 22(2),257-276.2016.
- [23] Carrera, E., Brischetto, S., Cinefra, M. and Soave, M, "Effects of thickness stretching in functionally graded plates and shells", *Composites: Part B*, 42(2), 123-133.2011.
- [24] Belabed, Z., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. and Anwar Bég, O. "An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded material (FGM) plates", *Composites: Part B*, 60, 274-283.2014.
- [25] Hebali, H., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Bessaim, A. and Adda Bedia, E.A. "A new quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates", *ASCE J. Eng. Mech.*, 140(2), 374-383.2014.
- [26] Larbi Chaht, F., Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Anwar Bég, O. and Mahmoud, S.R. "Bending and buckling analyses of functionally graded material (FGM) size-dependent nanoscale beams including the thickness stretching effect", *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 18(2), 425-442, 2015.
- [27] Ould Larbi, L., Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. "An efficient shear deformation beam theory based on neutral surface position for bending and free vibration of functionally graded beams", *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 2013.
- [28] Henri Godfroid, *Métallurgie pour mécaniciens: Propriétés générales des alliages, leur traitement thermique*, Paris, La Chapelle-Montligeon, Impr. de Montligeon, coll. « Société de publications mécaniques », 1950.
- [29] B. Craig, "Limitations of Alloying to Improve the threshold for Hydrogen Stress Cracking of Steels Hydrogen Effects on Material Behavior," Moran, Wyoming, USA, pp. 955-963,1989.
- [30] R. K. Rajput, *Manufacturing technology: (manufacturing processes)*, Laxmi publications (P) limited, New Delhi, India, 2008.
- [31] D. Hon, and Shiraishi, *Wood and cellulose chemistry*, 2nd ed. New York: Marcel Dekker, 2001
- [32] Pantelakis, SP.G., Alexopoulos, N.D., Assessment of the ability if conventional and advanced wrought aluminum alloys for mechanical performance in light-weight applications, *Materials & Design*, 29(1), 80-91, 2008..
- [33] Jones, R.M., *Mechanics of Composite Materials*, Second Edition, Taylor & Francis, 1999.
- [34] Reddy, J.N., *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells. Theory and Analysis*, CRC Press, 2004, New York (USA).
- [35] Gibson, R.F., *Principle of Composite Material Mechanics*, McGraw-Hill, New York (USA) , 1994.

- [36] Chen, A., Davalos, J.F., A solution including skin effect for stiffness and stress field of sandwich honeycombe core, *International Journal of Solids and Structures*, 42(9-10), 2711-2739, 2005.
- [37] Rao, S.S., Sunar, M., Piezoelectricity and its use in disturbance sensing and controll of flexible structures: a survey, *Applied Mechanics Reviews*, 47(4), 113-123, 1994.
- [38] H. J. Lee, S. Zhang, Y. Bar-Cohen and S. Sherrit — *Sensors* , 14(8), 14526,2014.
- [39] Ijjam, S., Helical microtubules of graphitic carbon, *Nature*, 354, 56-58, 1991.
- [40] Sandler, J., Werner, P., Shaffer, M.S.P., Demchuk, V., Altstadt, V., Windele, A.H., Carbon-nanofibre-reinforced polyether ether ketone) composites, *Composites Part A*, 33(8), 1033-1039, 2002.
- [41] Gong, X., Liu, J., Baskran, S., Voise, R.D., Young, J.S., Surfactantassisted processing of carbon nanotube/polymer composite, *Chemistry of Materials*, 12, 1049-1052, 2000.
- [42] Wong, E.W., Sheehan, P.E., Lieber, C.M., Nanobeam mechanics: elasticity, strength, and toughness of nanorods and nanotubes, *Science*, 277, 1971-1975, 1997.
- [43] Wang, Q., Wuek, S., Varadan, V., Torsional buckling of carbon nanotubes, *Physics Letters A*, 367, 135-139, 2007
- [44] Wang, X., Cai, H., Effects of initial stress on non-coaxial resonance of multi-wallcarbon nanotubes, *Acta Materialia*, 54, 2067-2074, 2006.
- [45] Suresh, S., Mortensen, A., *Fundamentals of Functionally Graded Materials, Processing and Thermomechanical Behavior of Graded Metals and Metal- Ceramic Composites*, IOM Communications Ltd, , London (UK),1998.
- [46] Pindera, M.-J., Arnold, S.M., Aboudi, J., Hui, D., Use of composites in functionally graded materials, *Composites Engineering*, 4(1), 1-145, 1994.
- [47] Birman, V., Byrd, L.W., Modeling and analysis of functionally graded materials and structures, *Applied Mechanics Reviews*, 60(5), 195-216, 2007.
- [48] Houari MSA, *Analyse des contraintes thermoélastique: lois des puissances. Thèse de Doctorat, Université de Djilalli Liabès Sidi Bel Abbes, Algérie*, 2011.
- [49] K. Kokini., Y. Takeuchi, Multilayer ceramic thermal barrier coatings under transient thermal loads. In *Proceeding of the First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan*; 31-36, 1990.
- [50] P. Boch., T. Chartier., M. Huttepain, Tape casting of Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/ZrO<sub>2</sub> laminated Composites, *J. Am. Ceram. Soc*; 69 (8):191-192,1986.
- [51] Koizumi. M, FGM activities in Japan, Department of Materials Chemistry. Ryukoku University, Ohtsu 520-21. Japan,1997.
- [52] T. K. Nguyen., K. Sab., G. Bonnet, Shear correction factors of functionally graded plates. *Mech. Advanced Mater. Struct*; 14 (8): 567-575, 2007.
- [53] H. Okamura, State of the arte of material design projects for severe service applications, *Mater. Sci. Eng :A*; 143 (1-2): 3-9,1991.
- [54] Kieback B., Neubrand A., Riedel H. Processing techniques for functionally graded materials. *Materials Science and Engineering : A*, 362(1-2):81–106, 2003.
- [55] Mori, T. et Tanaka, K., "Average stress in matrix and average elastic energy of material with misfitting inclusions", *Acta Metall*, 571–574, 1973.

- [56] Hill, R., "A self-consistent mechanics of composite materials", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 213-222, 1995.
- [57] G. Bao., L. Wang, Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings, *Int. J; Solids Structures*; 32 (19): 2853–2871, 1995.
- [58] P. M. Naghdi, On the theory of thin elastic shells. *Quarterly Appl. Math*, 14: 369-380 1957.
- [59] Chi. Shyang-ho., Chung Yen-Ling, Cracking in coating-substrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatings. *Engineering Fracture Mechanics*; 70 (10), 1227–1243, 2003.
- [60] Vel, S.S. et Batra, R.C., "Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates", *Journal of Sound and Vibration*, 703-730, 2004.
- [61] Shen, H.-S., "Functionally Graded Materials - Nonlinear Analysis of Plates and Shells", New York: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2009.
- [62] K. Swaminathan, D.M. Sangeetha, "Thermal Analysis of FGM Plates – A Critical Review of Various Modelling Techniques and Solution Methods" *Composite Structures*, 2016.
- [63] Apalak MK, Gunes R. Thermal residual stress analysis of Ni-Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, Ni-TiO<sub>2</sub>, and Ti-SiC functionally graded composite plates subjected to various thermal fields. *J Thermoplast Compos Mater*;18:119–52.2005.
- [64] Yang J, Shen HS. Non-linear analysis of functionally graded plates under transverse and in-plane loads. *Int J Non Linear Mech*; 38:467–82.2003.
- [65] Matsunaga H. Stress analysis of functionally graded plates subjected to thermal and mechanical loadings. *Compos Struct* ;87:344–57. 2009.
- [66] Shen HS. Thermal postbuckling behavior of functionally graded cylindrical shells with temperature-dependent properties. *Int J Solids Struct*; 41:1961–74. 2004.
- [67] Noda N. Thermal stresses in functionally graded materials. *J Therm Stress*; 22:477–512. 1999.
- [68] Noda N, Ootao Y, Tanigawa Y. Transient thermoelastic analysis for a functionally graded circular disk with piecewise power law. *J Theor Appl Mech*; 50:831–9.2012.
- [69] Jin ZH. An asymptotic solution of temperature field in a strip a functionally graded material. *Int Commun Heat Mass Transf* ; 29:887–95.2002.
- [70] Akbarzadeh AH, Abbasi M, Eslami MR. Coupled thermoelasticity of functionally graded plates based on the third-order shear deformation theory. *Thin-Walled Struct*;53: 141–55.2012.
- [71] X. Jin, L. Wu, L. Guo, H. Yu, and Y. Sun, "Experimental investigation of the mixed-mode crack propagation in ZrO<sub>2</sub>/NiCr functionally graded materials," *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 76(12), pp.1800-1810, 2009.
- [72] Torii S., Tanaka S., Yano, T., Watanabe, Y., *J Trans. Phenomena*, 6 189, 2004.
- [73] Yeo J, Jung Y., Choi S., Zirconia-stainless steel functionally graded material by tape casting *J Europ. Ceram. Soci.* 18 1281, 1998.
- [74] Mishina H., Inumaru Y., Kaitoku K., Fabrication of ZrO<sub>2</sub>/AISI316L functionally graded materials for joint prostheses *Mat. Sci. & Eng. A* 475 141,2008.
- [75] El-wazery M., El-Desouky A., *J Appl. Fabrication and Characteristics of 8YSZ/Ni Functionally Graded Materials by Applying Spark Plasma Sintering Procedure Sci. & Eng.* 12 313, 2014.
- [76] A Bishop., C.Y. Lin., M. Navaratnam., R.D. Rawlings., H.B. McShane, A functionally gradient material produced by a powder metallurgical process, *Journal of Materials Science Letters*; 12 (19) :1516-18, 1993.

- [77] Xiong, H.-P., Kawasaki, A., Kang, Y.-S., and Watanabe, R., "Experimental Study of Heat Insulation Performance of Functionally Graded Metal / Ceramic Coatings and Their Behavior at High Surface Temperature," *Surf. Coat. Technol.*, vol.194, pp. 203–214.
- [78] Xiong H., Kawasaki A., Kang Y., Watanabe R. .Synthesis and characterization of in-situ reinforced Fe-TiC steel FGMs, *Surf & Coat. Technol.* 194 203, 2005.
- [79] J.S. Moya, A.J. Sanchez-Herencia., J. Requena., R. MORENO, 2002, Functionally gradient ceramics by sequential slip casting, *Materials Letters*; 14 (5-6): 333-35, 1992.
- [80] L. Lostec, Elaboration par coulage en bande et caractérisation microstructurale et mécanique de composite SiC/MAS-L, Thèse de l'université de Limoges, 1997.
- [81] M. Takahashi., Y. Itoh., H. Kashiwaya, Fabrication and Evaluation of W/Cu Gradient Material by Sintering and Infiltration Technique, in *Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan*; 129-34, 1990.
- [82] H.D. Steffens., M. Dvorak., M. Wewel, Plasma sprayed functionally gradient materials-processing and applications, in *Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan*; 139-43, 1990.
- [83] L. Marin, "Numerical solution of the Cauchy problem for steady-state heat transfer in two dimensional functionally graded materials," *Int J Solids Struct*, vol. 42, pp. 4338-4351, 2005.
- [84] S. Matsuo, F. Watari, and N. Ohata, "Fabrication of functionally graded dental composite resin post and core by laser lithography and finite element analysis of its stress relaxation effect on tooth root," *Dental Mater J*, vol.20(4), pp. 257–274, 2001.
- [85] E. Müller, C. Drašar, J. Schilz, and W.A. Kaysser, "Functionally graded materials for sensor and energy applications," *Materials Science and Engineering: A*, vol. 362, pp. 17-30, 2003.
- [86] L. Lu, M. Chekroun, O. Abraham, V. Maupin and G. Villain, "Mechanical properties estimation of functionally graded materials using surface waves recorded with a laser interferometer, *NDT & E International*, Volume 44, Issue 2, Pages 169-177, March 2011.
- [87] M. S. EL-Wazery, A. R. EL-Desouky, "A review on Functionally Graded Ceramic-Metal Materials *Mater. Environ. Sci.* 6 (5) 1369-1376. ISSN: 2028-2508,2015.
- [88] Bohidar SK, Sharma R, Mishra PR. Functionally graded materials: A critical review. *Int J Res*; 1:289–301.2014.
- [89] Makwana AB, Panchal KC. A review of stress analysis of functionally graded material plate with cut-out. *Int J Eng Res Technol* ; 3:2020–5, 2014.
- [90] Udupa G, Shrikantha SR, Gangadharan K V. Functionally graded composite materials: An overview. *Procedia Mater Sci* ; 5:1291–9,2014.
- [91] Love, A.E.H., "On the small free vibrations and deformations of elastic shells", London: Philosophical trans. of the Royal Society, 1888.
- [92] Reddy JN. A simple higher-order theory for laminated composite plates. *J Appl Mech*; 51:745–52,1984.
- [93] Rayleigh, L., "Theory of sound": Dover Pub, 1945.
- [94] Timoshenko, S., "On the correction of transverse shear deformation of the differential equations for transverse vibrations of prismatic bars", *Philosophical Magazine*, Vol. 41 (series 46), 1921.
- [95] Uflyand, Y.S., "The propagation of waves in the transverse vibrations of bars and plates", 12, 287–300, 1948.

- [96] Ootao Y, Tanigawa Y. Three-dimensional transient thermal stresses of functionally graded rectangular plate due to partial heating. *J Therm Stresses*; 22(1):35–55, 1999.
- [97] Vel SS, Batra RC. Exact solution for thermoelastic deformations of functionally graded thick rectangular plates. *AIAA J*; 40(7):1421–33, 2002.
- [98] Vel SS, Batra RC. Three-dimensional analysis of transient thermal stresses in functionally graded plates. *Int J Solids Struct*; 40(25):7181–96, 2003.
- [99] Alibeigloo A. Exact solution for thermo-elastic response of functionally graded rectangular plates. *Compos Struct* 2010;92(1):113–21, 2010.
- [100] Kashtalyan M. Three-dimensional elasticity solution for bending of functionally graded rectangular plates. *Eur J Mech A Solids*; 23(5):853–64, 2004.
- [101] Zhong Z, Shang E. Closed-form solutions of three-dimensional functionally graded plates. *Mech Adv Mater Struct*; 15(5):355–63, 2008.
- [102] Xu Y, Zhou D. Three-dimensional elasticity solution of functionally graded rectangular plates with variable thickness. *Compos Struct*; 91(1):56–65, 2009.
- [103] Woodward B, Kashtalyan M. Three-dimensional elasticity solution for bending of transversely isotropic functionally graded plates. *Eur J Mech A Solids* ; 30(5):705–18, 2011.
- [104] Wen PH, Sladek J, Sladek V. Three-dimensional analysis of functionally graded plates. *Int J Numer Methods Eng*; 87(10):923–42, 2011.
- [105] Abali BE, Völlmecke C, Woodward B, Kashtalyan M, Guz I, Müller WH. Threedimensional elastic deformation of functionally graded isotropic plates under point loading. *Compos Struct*; 118:367–76, 2014.
- [106] Uymaz B, Aydogdu M. Three-dimensional vibration analyses of functionally graded plates under various boundary conditions. *J Reinf Plast Compos* ;26(18):1847–63, 2007.
- [107] Li Q, Iu VP, Kou KP. Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material sandwich plates. *J Sound Vib*; 311(1–2):498–51, 2008.
- [108] Yas MH, Tahouneh V. 3-D Free vibration analysis of thick functionally graded annular plates on Pasternak elastic foundation via differential quadrature method (DQM). *Acta Mech*; 223(1):43–62, 2012.
- [109] Amini MH, Soleimani M, Rastgoo A. Three-dimensional free vibration analysis of functionally graded material plates resting on an elastic foundation. *Smart Mater Struct*; 18(8):085015, 2009.
- [110] Lu CF, Lim CW, Chen WQ. Exact solutions for free vibrations of functionally graded thick plates on elastic foundations. *Mech Adv Mater Struct*; 16(8):576–84, 2009.
- [111] Malekzadeh P. Three-dimensional free vibration analysis of thick functionally graded plates on elastic foundations. *Compos Struct*; 89(3):367–73, 2009.
- [112] Malekzadeh P, Shahpari S, Ziaee H. Three-dimensional free vibration of thick functionally graded annular plates in thermal environment. *J Sound Vib*; 329(4):425–42., 2010.
- [113] Reddy K, Kant T. Three-dimensional elasticity solution for free vibrations of exponentially graded plates. *J Eng Mech*; 140(7):04014047, 2014.
- [114] Na KS, Kim JH. Three-dimensional thermal buckling analysis of functionally graded materials. *Compos B Eng* ; 35(5):429–37, 2004.
- [115] Asemi K, Salehi M, Akhlaghi M. Post-buckling analysis of FGM annular sector plates based on three-dimensional elasticity graded finite elements. *Int J Non-Linear Mech*; 67:164–77, 2014.

- [116] Timoshenko, S.P. et Woinowsky-Krieger, S., "Theory of Plates and Shells", New York: McGraw-Hill, 1959.
- [117] Ashton, J.E. et Whitney, J.M., "Theory of Laminated Plates": Technomic Pub. Co., 1970.
- [118] Reddy, J.N. et Phan, N.D., "Analysis of laminated composite plates using a higher order shear deformation theory", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2201–2219, 1985.
- [119] Reddy, J.N., "Theory and analysis of elastic plates", Philadelphia: Taylor & Francis, 1999.
- [120] Reddy, J.N., "Analysis of functionally graded plates", *Int J Numer Method Eng*, 47(41–43):663–684, 2000.
- [121] Iyengar, S.N.R.K., Chadrashekhara, K. et Sebastian, V.K., "On the analysis of thick rectangular plates", *Z Angew Math Mech*, 589–591, 1974.
- [122] Iyengar, S.N.R.K. et Pandya, S.K., "Vibration of orthotropic rectangular thick plates", *Int J Solids Struct*, 149–156, 1982.
- [123] Krishna Murty, A.V., "Higher-order theory for vibrations of thick plates", *AIAA Journal*, 1823–1824, 1977.
- [124] Krishna Murty, A.V., "Toward of consistent plate theory", *AIAA Journal*, 1047–1048, 1986.
- [125] Krishna Murty, A.V., "Flexural of composite plates", *Composite Structures*, 161–177, 1987.
- [126] Reddy, J.N., "A review of Refined Theories of Laminated Composite Plates", 22(7), 1990.
- [127] Mallikarjuna, M. et Kant, T., "A critical Review and Some Results of Recently Developed Refined Theories of Fiber-Reinforced Laminated Composites and Sandwiches ", 23(4), 1993.
- [128] Reissner, E., "On transverse bending of plates including the effects of transverse shear deformation", *Int J Solids Struct*, 25, 495–502, 1975.
- [129] K. P. Soldatos and T. Timarci. A unified formulation of laminated composite, shear deformable, five-degrees-of-freedom cylindrical shell theories. *Composite Structures*, 25:165–171, 1993.
- [130] J. L. Mantari, A. S. Oktem, and C. Guedes Soares. A new higher order shear deformation theory for sandwich and composite laminated plates. *Composites Part B: Engineering*, 43:1489–1499, 2012.
- [131] H. Ait Atmane., A. Tounsi., I. Mechab., E.A Adda Bedia, Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory. *Int. J. Mech. Mater. Design*; 6 (2): 113-121, 2010.
- [132] El Meiche, N., Tounsi, A., Ziane, N., Mechab, I. et Adda Bedia, E.A., "A new hyperbolic shear deformation theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate", *International Journal of Mechanical Sciences*, 237– 247, 2011.
- [133] Aydogdu, M., "A new shear deformation theory for laminated composite plates", *Composite Structures*, 94-101, 2009.
- [134] Shimpi, R.P., "Refined plate theory and its variants", *AIAA Journal*, 137– 146, 2002.
- [135] Kim, S.E., Thai, H.T. et Lee, J., "Buckling analysis of plates using the two variable refined plate theory", 47(4), 455–462, 2009.
- [136] Thai, H.-T. et Kim, S.-E., "Levy-type solution for buckling analysis of orthotropic plates based on two variable refined plate theory", *Composite Structures*, 1738–1746, 2011.
- [137] Hadji, L., Atmane, H.A., Tounsi, A., Mechab, I. et Adda Bedia, E.A., "Free vibration of functionally graded sandwich plates using four-variable refined plate theory", *Applied Mathematics and Mechanics*, 925–94, 2011.
- [138] Thai HT, Kim SE. A simple quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for functionally graded plates. *Compos Struct*; 99:172–80, 2013.

- [139] Thai HT, Vo TP, Bui TQ, Nguyen TK. A quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for functionally graded plates. *Acta Mech*; 225(3):951–64, 2014.
- [140] Bessaim A, Houari MS, Tounsi A, Mahmoud S. A new higher-order shear and normal deformation theory for the static and free vibration analysis of sandwich plates with functionally graded isotropic face sheets. *J Sandwich Struct Mater* 2013;15(6):671–703, 2013.
- [141] Bennoun M, Houari MSA, Tounsi A. A novel five variable refined plate theory for vibration analysis of functionally graded sandwich plates. *Mech Adv Mater Struct* 2014.
- [142] Zenkour AM. A simple four-unknown refined theory for bending analysis of functionally graded plates. *Appl Math Model*; 37(20–21):9041–51, 2013.
- [143] Zenkour AM. Bending analysis of functionally graded sandwich plates using a simple four-unknown shear and normal deformations theory. *J Sandwich Struct Mater* ; 15(6):629–56, 2013.
- [144] Zenkour AM. Thermal bending of layered composite plates resting on elastic foundations using four-unknown shear and normal deformations theory. *Compos Struct*; 122:260–70., 2015.
- [145] Mantari JL, Granados EV, Hinojosa MA, Guedes Soares C. Modelling advanced composite plates resting on elastic foundation by using a quasi-3D hybrid type HSDT. *Compos Struct*; 118:455–71, 2014.
- [146] Mantari JL, Soares CG. A quasi-3D tangential shear deformation theory with four unknowns for functionally graded plates. *Acta Mech* 2014.
- [147] Shariyat, M, “A generalized high-order global–local plate theory for nonlinear bending and buckling analyses of imperfect sandwich plates subjected to thermo-mechanical loads”, *Compos. Struct.*, 92(1), 130-143, 2010.
- [148] Golmakani, M.E, “Large deflection thermoelastic analysis of shear deformable functionally graded variable thickness rotating disk”, *Composites: Part B*, 45(1), 1143-1155, 2013.
- [149] Ait Amar Meziane, M., Abdelaziz, H.H. and Tounsi, A, “An efficient and simple refined theory for buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates under various boundary conditions”, *J. Sandw. Struct. Mater.*, 16(3), 293-318, 2013.
- [150] Talha, M. and Singh, B.N, “Thermo-mechanical induced vibration characteristics of shear deformable functionally graded ceramic-metal plates using the finite element method”, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 225, 50-65, 2013.
- [151] Mahi, A., Adda Bedia, E.A. and Tounsi, A. “A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic, functionally graded, sandwich and laminated composite plates”, *Appl. Math. Model.*, 39(9), 2489-2508.2015
- [152] Boudjerba, B., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. “Thermomechanical bending response of FGM thick plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 14(1), 85-104, 2013.
- [153] Bouchafa, A., Bachir Bouiadjra, M., Houari, M.S.A. and Tounsi, A, “Thermal stresses and deflections of functionally graded sandwich plates using a new refined hyperbolic shear deformation theory”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 18(6), 1493-1515, 2015.
- [154] Attia, A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R, “Free vibration analysis of functionally graded plates with temperature-dependent properties using various four variable refined plate theories”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 18(1), 187-212., 2015.

- [155] Bellifa, H., Benrahou, K.H., Hadji, L., Houari, M.S.A. and Tounsi, A, “Bending and free vibration analysis of functionally graded plates using a simple shear deformation theory and the concept the neutral surface position”, *J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.*, 38(1), 265-275, 2016.
- [156] Ait Yahia, S., Ait Atmane, H., Houari, M.S.A. and Tounsi, A, “Wave propagation in functionally graded plates with porosities using various higher-order shear deformation plate theories”, *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, 53(6), 1143-1165., 2015.
- [157] Bounouara, F., Benrahou, K.H., Belkorissat, I. and Tounsi, “A nonlocal zeroth-order shear deformation theory for free vibration of functionally graded nanoscale plates resting on elastic foundation”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 20(2), 227-249, 2016.
- [158] Tounsi, A., Houari, M.S.A. and Bessaim, A, “A new 3-unknowns non-polynomial plate theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate”, *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, 60(4), 547-565, 2016.
- [159] S.H. Tagrara, Abdelkader Benachour, Mohamed Bachir Bouiadjra and abdelouahed tounsi, “On bending, buckling and vibration responses of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite beams”, *Steel and Composite Structures*, Vol. 19 No. 5, ISSN 1229-9367, 2015.
- [160] S.H. Tagrara, Abdelkader Benachour, Mohamed Bachir Bouiadjra and abdelouahed tounsi, “On bending, buckling and vibration responses of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite beams”, *Steel and Composite Structures*, Vol. 19 No. 5, ISSN 1229-9367, 2015.
- [161] Kar, V.R., Mahapatra, T.R. and Panda, S.K, “Nonlinear flexural analysis of laminated composite flat panel under hygro-thermo-mechanical loading”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 19(4), 1011-1033, 2015.
- [162] Kar, V.R. and Panda, S.K. (2015b), “Nonlinear flexural vibration of shear deformable functionally graded spherical shell panel”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 18(3), 693-709, 2015.
- [163] Kar, V.R. and Panda, S.K, “Nonlinear thermomechanical behaviour of FGM cylindrical / hyperbolic/ elliptical shell panel with TD and TID properties”, *J. Press. Vessel Technol. ASME*, 138(6), 061206., 2016.
- [164] Mahapatra, R., Panda, S.K. and Kar, V.R, “Nonlinear flexural analysis of laminated composite panel under hygro-thermo-mechanical loading – A micromechanical approach”, *Int. J. Computat. Methods*, 13(3), 1650015(1-33), 2016.
- [165] Sahoo, S.S., Singh, V.K. and Panda, S.K, “Nonlinear flexural analysis of shallow laminated carbon/epoxy composite curved shell panels: Experimental and numerical investigation”, *J. Eng. Mech.ASCE*, 142(4)., 2016.
- [166] Sahoo, S.S., Panda, S.K. and Mahapatra, T.R “Static, free vibration and transient response of laminated composite curved shallow panel – An experimental approach”, *Euro. J. Mech.-A/Solids*, 59, 95-113, 2016.
- [167] Dutta, G., Panda, S.K., Mahapatra, T.R. and Singh, V.K, “Electro-magneto-elastic response of laminated composite plate: A finite element approach”, *Int. J. Appl. Computat. Math.*, 1-20., 2016.
- [168] F. Delale., F. Erdogan, The crack problem for a nonhomogeneous plane. *ASME Journal of Applied Mechanics*; 50 (3): 609-614, 1983.
- [169] Zenkour, A.M. and Alghamdi, N.A, “Thermoelastic bending analysis of functionally graded sandwich plates”, *J. Mater. Sci.*, 43(8), 2574-2589., 2008.