

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

*MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE*

UNIVERSITE DE MOSTAGANEM

Faculté des Sciences et Sciences de L'ingénieur

Département de Mathématiques

MEMOIRE DE MAGISTER

=====o ○ o=====

Option : **Analyse Fonctionnelle**

Intitulé

CONTRIBUTION AU CALCUL FRACTIONNAIRE

Présenté par : Mme Khati Yasmina BOURAOUI

Soutenu le : devant le jury composé de :

Zoubir DAHMANI	M.C.A	Univ.Mosta.	Encadreur
Berrabah BENDOUKHA	Professeur	Univ.Mosta.	Président
Benharrat BELAIDI	Professeur	Univ.Mosta.	Examineur
Ahmed MEDEGHRI	M.C.A	Univ.Mosta.	Examineur

Remerciements

Ce travail a été effectué au sein du département de Mathématiques à L'université de Mostaganem sous la direction de Monsieur Zoubir DAHMANI Maître de Conférences à L'université de Mostaganem, je tiens à lui exprimer mes plus vifs remerciements et ma gratitude pour son aide continue, sa disponibilité ,ses conseils avisés.et surtout ses encouragements amènes sans oublier son soutien bienveillant et amical.

Je voudrais aussi exprimer mes plus vifs remerciements à monsieur le président du jury, Mr Berrabah Bendoukha Professeur à L'université de Mostaganem et à Mr Benharrat Belaïdi Professeur à l'université de Mostaganem qui fut le premier à m'encourager à l'entreprise et l'élaboration de ce mémoire après une longue période d'arrêt, à Mr Ahmed Medeghri Maître de Conférences à L'université de Mostaganem,sans oublier,monsieur Bestani ex-vice doyen chargé de la post-graduation pour son aide et sa compréhension.

Je dédie ce mémoire à ma famille en général, d'abord à mon époux; pour son soutien et ses encouragements à la persévérance puis à mes enfants,tout particulièrement à ma fille Sabrina pour sa participation à la saisie du présent document; comme je souhaiterais leur donner un petit exemple de ténacité et de patience.

Enfin, je tiens à exprimer ma reconnaissance à toute personne de mon entourage qui m'a soutenue, aidée ou a contribué de près ou de loin à ce travail.

Table des matières

1	NOTIONS DE CALCUL FRACTIONNAIRE :	8
1.1	Intégrale fractionnaire :	8
1.1.1	L'approche de Riemann-Liouville :	8
1.1.2	Notations et définitions	9
1.1.3	Propriétés	10
1.2	Dérivées fractionnaires	16
1.2.1	Notations et définitions	16
1.2.2	Propriétés	17
1.3	Dérivées fractionnaires au sens de Caputo :	18
1.3.1	Propriétés	18
2	INEGALITES INTEGRALES FRACTIONNAIRES :	22
2.1	Introduction	22
2.1.1	Motivation et position du problème	22
2.2	Résultats principaux :	24
2.2.1	Fonctions synchrones	24
2.2.2	Généralisation de Hölder et de Cauchy Schwartz	32
2.2.3	Généralisation de Hermite-Hadamard	34
2.2.4	Retour au cas synchrone : Généralisation	40
3	APPLICATIONS NUMERIQUES SUR LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES FRACTIONNAIRES	49
3.1	Quelques applications :	51
3.1.1	Solutions analytiques approchées des équations couplées de Lotka-Volterra avec dérivées fractionnaires :	51
3.1.2	Etude Adomienne des équations couplées LVDF :	52
3.1.3	Solutions numériques des équations couplées LVDF temporelles :	56
3.1.4	Solutions numériques des équations couplées LVDF spatiales :	59
3.1.5	Equation de Sharma avec dérivées fractionnaires :	63
3.1.6	Solutions Adomiennes de l'équation ShDF :	64
3.1.7	Solutions numériques de l'équation ShDF temporelle :	66
3.1.8	Solutions numériques de l'équation ShDF spatiale :	67
3.2	Conclusion	69

Bibliographie

INTRODUCTION GENERALE

Le calcul fractionnaire peut être considéré à la fois comme un thème ancien et nouveau .

C'est un ancien thème du fait qu'il ait été abordé depuis déjà assez longtemps par différents mathématiciens des siècles de jadis à l'instar de G.W.Leibnitz (1695-1697),

et L. Euler (1730) qui s'y intéressèrent. De même que d'autres qui y ajoutèrent leurs

contributions jusqu'au milieu de notre siècle tels que P.S Laplace (1820), J.B.J

Fourier (1822), N.H Abel (1823-1826), J. Liouville (1832-1873), B. Riemann (1847),

H. Holmgren (1865-1867), A.K. Grunwald (1867-1872), A.V. Letnikov (1868-1872),

H. Laurent (1884),P. A. Nekrassov (1888), A. Krug (1890), J. Hadamard (1892),

,O. Heavyside (1892-1912), S. Pincherle (1902), G.H. Hardy et J.E. Littlewode

(1917-1928), H. Weyl (1917), P. Levy (1923), A. Marchaud (1927), H.T. Davis

(1924-1936), A. Zygmund (1935-1945), E.R. Love(1938-1996), A. Erdelyi (1939-1965),

H. Kober (1940), D.V. Widder (1941), M. Riesz (1949). De la même manière on peut

le considérer comme un thème récent car il a fait l'objet de conférences spécialisées et

de maints traités depuis seulement un peu plus de vingt ans. La première conférence sur

ce thème ayant pour titre : "première conférence sur le calcul fractionnaire et

ses applications", fut donnée par B. Boss à l'université de New Haven en Juin 1974.

Actuellement, les travaux se rapportant entièrement ou partiellement au sujet

du calcul fractionnaire et de ses applications , se trouvent être aux alentours

de la douzaine de titres parmi lesquels le traité encyclopédique de Samko,

Kilbas et Marichev. Par ailleurs, il y a aussi les traités de Davis, Caputo et

Gorenflo qui contiennent une analyse détaillée de certains aspects mathématiques

et /ou applications physiques du calcul fractionnaire. Ces dernières années, un intérêt considérable pour le calcul fractionnaire a été attisé par les applications que celui-ci trouve dans l'analyse numérique et les différents champs d'action en physique et engineering ainsi que dans les phénomènes de fractionnement. Ce mémoire de magister est une contribution au calcul fractionnaire qui a suscité notre intérêt par son application aux équations différentielles fractionnaires et leurs rôles dans le champ de la physique, l'engineering comme les phénomènes de la théorie électromagnétique, en acoustique, en chimie électronique ainsi qu'en science des matériaux.

Notre mémoire se compose de trois chapitres :

Dans le chapitre 1, intitulé "Notions de calcul fractionnaire", comme le titre l'indique, nous donnons quelques notions du calcul fractionnaire qui est le champ de l'analyse mathématique le plus en relation avec la recherche

et les applications des intégrales et des dérivées d'ordre arbitraire.

D'abord, nous introduisons la notion d'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha \geq 0$ qui selon l'approche de Riemann-Liouville est une conséquence naturelle de

la formule de Cauchy : $J^n f(t) := f_n(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau, t > 0, n \in \mathbb{N}^*$.

Ensuite, nous donnons les définitions nécessaires, en particulier, celles des

fonctions causales, de la fonction Γ et d'autres qui nous permettent d'établir la

définition de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \geq 0$.

Quelques propriétés et certaines relations entre les fonctions Γ et B sont

établies afin de faciliter le calcul d'intégrales de fonctions, à titre d'exemple.

Après l'intégrale fractionnaire, la notion de dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$, devient une nécessité; pour cela, on n'omet pas de faire attention à s'assurer de la convergence des intégrales et la préservation des propriétés bien connues

des dérivées ordinaires d'ordre entier.

On appellera D^n avec $n \in \mathbb{N}$, l'opérateur dérivé d'ordre n , que l'on définira comme inverse à gauche de l'opérateur intégral correspondant. Et alors, on introduira la dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Riemann-Liouville avec quelques propriétés.

Enfin, nous terminerons ce chapitre par l'introduction de la dérivée fractionnaire

d'ordre $\alpha \geq 0$ au sens de Caputo D_*^α dont la définition, est plus restrictive que la dérivée fractionnaire, car elle nécessite l'intégrabilité absolue de la dérivée d'ordre m . Nous donnerons différentes propositions et propriétés et surtout, nous mentionnerons la différence entre les deux dérivées.

Au chapitre 2, sous le titre "Inégalités fractionnaires", comme ces dernières années, des inégalités ont pris une place considérable dans le cadre des mathématiques, et occupent de plus en plus un champ actif et attractif dans la recherche.

Comme exemple, on peut citer le domaine de l'intégration où des inégalités impliquent des fonctions et leurs intégrales. Dans ce chapitre, l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville est utilisée pour montrer quelques nouvelles

inégalités intégrales fractionnaires. D'abord, par l'usage de la fonctionnelle de Chebyshev, [10], on arrive à des résultats fractionnaires de l'inégalité de Chebyshev ; puis en considérant l'inégalité intégrale :

$$T(f, g) := \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) g(x) dx - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx \geq 0 \text{ avec } f \text{ et } g, \text{ deux}$$

fonctions synchrones, à donner une nouvelle et courte preuve des théorèmes 2.1 et 2.2, plus simple que celle connue et à établir quelques nouvelles inégalités.

Et enfin, la formulation fractionnaire des inégalités de Holder, de Cauchy-Schwartz et celle d'Hermite-Hadamard pour une fonction convexe.

Enfin dans le chapitre 3, sous le titre "Applications numériques sur les EDF", on applique la méthode de décomposition d'Adomian (ADM) qui, pour le problème $Fu = g$, où F est un opérateur différentiel non-linéaire. Elle consiste à décomposer la partie F en $L + R$ où L est un opérateur facilement inversible et R , la partie restante,

on désigne par N le terme non-linéaire, ce qui ramène notre équation à la forme :

$$Lu + Ru + Nu = g \text{ et } Nu = \sum_{i=0}^{\infty} A_i(u_0, u_1, \dots, u_i), \text{ les } A_i \text{ étant les polynômes}$$

d'Adomian ; et on cherche la solution u sous forme $u = \sum_{i=0}^{\infty} u_i$.

On fera remarquer la convergence très rapide de la méthode, en général, ce qui nous permet d'arriver rapidement à la solution.

Et nous clôturons ce chapitre avec quelques applications de l'ADM.

En introduisant la dérivée fractionnaire au sens de Caputo, nous appliquons

la méthode de décomposition d'Adomian, d'abord aux équations couplées de

Lotka-Volterra avec dérivées fractionnaires spacio-temporelles.

Ensuite à l'équation de Sharma avec dérivées fractionnaires spacio-temporelles.

Deux cas importants, ont été considérés, pour chacune des deux équations :

d'abord, l'équation avec dérivée fractionnaire temporelle, puis, un deuxième cas où,

la dérivée fractionnaire est prise sur la dimension spaciale.

Comme résultat, des solutions numériques sont obtenues sous forme

de séries rapidement convergentes avec des termes facilement calculables.

Chapitre 1

NOTIONS DE CALCUL FRACTIONNAIRE :

1.1 Intégrale fractionnaire :

1.1.1 L'approche de Riemann-Liouville :

Selon l'approche de Riemann-Liouville du calcul fractionnaire, la notion d'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha \geq 0$ est une conséquence naturelle de la formule connue, souvent attribuée à Cauchy, qui résume le calcul d'une n-uple primitive d'une fonction $f(t)$ à une intégrale simple de type convolution.

La formule de Cauchy est définie par :

$$J^n f(t) := f_n(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau, \quad t > 0, n \in \mathbb{N}^*, \quad (1.1)$$

où \mathbb{N} est l'ensemble des entiers naturels.

De la définition, on remarque que $f_n(t)$ s'annule pour $t = 0$, de même que ses dérivées d'ordre $1, 2, 3, \dots, n-1$.

On conviendra que $f(t)$ et $f_n(t)$ doivent être des fonctions "causales".

1.1.2 Notations et définitions

Définition 1.1 Une fonction $f(t)$ est dite causale si elle est identiquement nulle pour tout $t \leq 0$.

Définition 1.2 On appelle $\Gamma(z)$ la fonction Gamma définie pour $\operatorname{Re}(z)$ strictement positif par l'intégrale généralisée

$$\Gamma(z) := \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{z-1} du, \operatorname{Re}\{z\} > 0. \quad (1.2)$$

Définition 1.3 : Une fonction à valeur réelle $f(t)$, $t > 0$ est dite de l'espace C_μ , $\mu \in \mathbb{R}$ s'il existe un nombre réel $p > \mu$ tel que $f(t) = t^p f_1(t)$, où $f_1(t) \in C(]0, +\infty[)$.

Définition 1.4 : Une fonction $f(t)$, $t > 0$ est dite de l'espace C_μ^n , $n \in \mathbb{N}$, si $f^{(n)} \in C_\mu$.

Remarque 1.1 On peut étendre la formule (1.1) des valeurs des entiers positifs de l'indice à n importe quelle valeur positive réelle par l'usage de la fonction Gamma.

En effet, sachant que $(n-1)! = \Gamma(n)$, et en introduisant le nombre réel positif α , on définit :

Définition 1.5 L'opérateur intégral fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \geq 0$, pour une fonction $f \in C_\mu$, ($\mu \geq -1$) est défini par :

$$J^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad ; \alpha > 0, t > 0, \quad (1.3)$$

$$J^0 f(t) = f(t),$$

où $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-u} u^{\alpha-1} du$.

Ici, et dans tout ce qui suit, les intégrales sont considérées dans le sens général de Riemann; de sorte que toute fonction soit obligatoirement localement absolument intégrable dans \mathbb{R}^+ .

Toutefois, on donnera les descriptions des ensembles des fonctions admissibles et on n'hésitera pas, quand cela sera nécessaire, d'utiliser des expressions formelles.

1.1.3 Propriétés

Proposition 1.1 : Pour tout $z \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$, et $n \in \mathbb{N}$, on a :

a)

$$\Gamma(z + 1) = z \Gamma(z) \tag{1.4}$$

b)

$$\Gamma(z + n) = z(z + 1)\dots(z + n - 1)\Gamma(z).$$

et

c)

$$\Gamma(n + 1) = n!.$$

Preuve.

a)-Pour montrer que $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$, intégrons par parties, l'expression de $\Gamma(z)$

dans la définition (1.2), on obtient, alors pour $\operatorname{Re} z > 0$:

$$\begin{aligned} \Gamma(z + 1) &= \int_0^\infty t^z e^{-t} dt = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M t^z e^{-t} dt \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \left\{ (t^z)(-e^{-t}) \Big|_0^M - \int_0^M (zt^{z-1})(-e^{-t}) dt \right\} \\ &= z \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt = z\Gamma(z). \end{aligned}$$

b)-Montrons que $\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n-1)}$

Nous avons : $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$

$$\Gamma(z + 2) = \Gamma((z + 1) + 1) = (z + 1)\Gamma(z + 1) = (z + 1)z\Gamma(z)$$

$$\Gamma(z + 3) = (z + 2)\Gamma(z + 2) = (z + 2)(z + 1)z\Gamma(z)$$

⋮

et en général, $\Gamma(z + n) = z(z + 1)(z + 2) \dots (z + n - 1)\Gamma(z)$.

D'où b).

c)-Utilisons b) pour montrer que $\Gamma(z)$ est une fonction analytique dans le plan

complexe, excepté en des pôles simples situés dans le demi-plan de gauche

en $z = 0, -1, -2, -3, \dots$

Nous savons que $\Gamma(z)$ est analytique pour $\operatorname{Re} z > 0$ d'après la définition (1.2).

Il est alors évident d'après b) que $\Gamma(z)$ est analytique pour $\operatorname{Re} z \geq -n$ sauf aux pôles :

$$z = 0, -1, -2, \dots, -n.$$

Comme ceci est vrai quelque soit l'entier n , on en déduit, le résultat demandé. ■

Définition 1.6 : De même, on définit la fonction Beta par :

$$B(p, q) := \int_0^1 (1-u)^{p-1} u^{q-1} du, \operatorname{Re}(p) > 0, \operatorname{Re}(q) > 0. \quad (1.5)$$

Proposition 1.2 : les fonctions Gamma et Beta sont reliées par la relation :

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = B(q, p). \quad (1.6)$$

Preuve.

En effet, si dans (1.2) on change u par t^2 , on obtient l'intégrale de Gauss :

$$\Gamma(z) = 2 \int_0^{+\infty} t^{2z-1} e^{-t^2} dt, \text{ qu'on va utiliser pour calculer } \blacksquare$$

$\Gamma(p)$ et $\Gamma(q)$ avec $\operatorname{Re} p > 0, \operatorname{Re} q > 0$. En effet :

$$\Gamma(p) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} u^{2p-1} du$$

$$\Gamma(q) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-v^2} v^{2q-1} dv$$

donc :

$$\Gamma(p) \Gamma(q) = 4 \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(u^2+v^2)} u^{2p-1} v^{2q-1} dudv.$$

Passons aux coordonnées polaires : $u = r \cos \theta, v = r \sin \theta$

$$\begin{aligned}
\Gamma(p)\Gamma(q) &= 4 \int_{r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}} e^{-r^2} r^{2(p+q)-1} \cos^{2p-1} \theta \sin^{2q-1} \theta dr d\theta \\
&= \left(2 \int_0^\infty e^{-r^2} r^{2(p+q)-1} dr \right) \left(2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1} \theta \sin^{2q-1} \theta d\theta \right) \\
&= (\Gamma(p+q)) 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1} \theta \sin^{2q-1} \theta d\theta.
\end{aligned}$$

D'où finalement :

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1} \theta \sin^{2q-1} \theta d\theta.$$

En posant : $p = q = \frac{1}{2}$, on trouve $[\Gamma(\frac{1}{2})]^2 = B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \pi$ et donc $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Proposition 1.3 Pour $\alpha \geq 0, \beta \geq 0, t > 0$, on a :

$$J^\alpha J^\beta f(t) = J^{\alpha+\beta} f(t) \quad (1.7)$$

et

$$J^\alpha J^\beta f(t) = J^\beta J^\alpha f(t). \quad (1.8)$$

Lorsque $f(t) = t^\mu$, on obtient

$$J^\alpha t^\mu = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\alpha+\mu+1)} t^{\alpha+\mu}. \quad (1.9)$$

Preuve. :D'après la définition (1.3), on a :

$$\begin{aligned}
J^\alpha t^\mu &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \tau^\mu d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \left[t \left(1 - \frac{\tau}{t} \right) \right]^{\alpha-1} \left(\frac{\tau}{t} \right)^\mu t^\mu d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t t^{\mu+\alpha-1} \left(1 - \frac{\tau}{t} \right)^{\alpha-1} \left(\frac{\tau}{t} \right)^\mu d\tau \\
&= \frac{t^{\mu+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \left(1 - \frac{\tau}{t} \right)^{\alpha-1} \left(\frac{\tau}{t} \right)^\mu d\tau.
\end{aligned}$$

■
Posons $y = \frac{\tau}{t}$, on a $t dy = d\tau$.

On a :

$$\begin{aligned} J^\alpha t^\mu &= \frac{t^{\mu+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-y)^{\alpha-1} y^\mu t dy \\ &= \frac{t^{\mu+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-y)^{\alpha-1} y^\mu dy = \frac{t^{\mu+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \cdot B(\alpha, \mu+1) \\ &= \frac{t^{\mu+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\mu+1)} \Gamma(\mu+1) = t^{\mu+\alpha} \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\alpha+\mu+1)}. \end{aligned}$$

D'où (1.9).

Démonstration de (1.7) :

Par définition, on a :

$$J^\alpha J^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \left(\int_0^\tau (\tau-\rho)^{\beta-1} f(\rho) d\rho \right) d\tau.$$

On pose : $\tau - \rho = s(t - \rho) \Rightarrow d\tau = (t - \rho) ds$

et $s = \frac{\tau-\rho}{t-\rho}$ alors, $1 - s = \frac{t-\tau}{t-\rho}$ donc $(t - \tau) = (1 - s)(t - \rho)$.

$$\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau \int_0^\tau (\tau-\rho)^{\beta-1} f(\rho) d\rho = \int_0^t f(\rho) d\rho \int_\rho^t (t-\tau)^{\alpha-1} (\tau-\rho)^{\beta-1} d\tau =$$

$$\int_0^t f(\rho) d\rho \int_0^1 [s(t-\rho)]^{\beta-1} [(1-s)(t-\rho)]^{\alpha-1} (t-\rho) ds =$$

$$\int_0^t (t-\rho)^{\alpha+\beta-1} f(\rho) d\rho \int_0^1 s^{\beta-1} (1-s)^{\alpha-1} ds = B(\alpha, \beta) \int_0^t (t-\rho)^{\alpha+\beta-1} f(\rho) d\rho.$$

Ainsi, on a : $J^\alpha J^\beta f(t) = J^{\alpha+\beta} f(t) = J^{\beta+\alpha} f(t)$.

D'où (1.7) et (1.8).

Remarque 1.2 Dans la formule (1.3), si on intègre entre $a = -\infty$ et t , on obtient la définition de l'intégrale au sens de Liouville [20]

Exemples : En utilisant (1.2), pour :

1) $\alpha = \frac{1}{2}$ et $f(x) = x$, on obtient :

$$J^{\frac{1}{2}}x = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^x (x - \tau)^{-\frac{1}{2}} \tau d\tau = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^x \frac{\tau d\tau}{\sqrt{x-\tau}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{\tau d\tau}{\sqrt{x-\tau}}.$$

Posons $\sqrt{x - \tau} = t \Rightarrow d\tau = -2tdt$

$$J^{\frac{1}{2}}x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{x}} \frac{-2t(x-t^2)}{t} dt = \frac{-2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{x}} (x - t^2) dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[-xt + \frac{t^3}{3} \right]_0^{\sqrt{x}}.$$

$$J^{\frac{1}{2}}x = \frac{-4}{3\sqrt{\pi}} x \sqrt{x}.$$

2) Si $f(x) = e^x$, on a alors :

$$J^\alpha f(x) = J^\alpha e^x = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x - \tau)^{\alpha-1} e^\tau d\tau.$$

Si on pose, $y = x - \tau$, on aura :

$J^\alpha e^x = \frac{e^x}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x y^{\alpha-1} e^{-y} dy$, qui par une intégration par parties, nous donne :

$$J^\alpha e^x = \frac{x^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{x^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+2)} + \frac{x^{\alpha+3}}{\Gamma(\alpha+3)} + \dots$$

3) Prenons $f(x) = \sin x$.

Pour calculer $J_{-\infty}^\alpha \sin x$, on calcule d'abord $J_{-\infty}^\alpha (\cos x + i \sin x)$

Comme $\cos x + i \sin x = e^{ix}$, alors :

$$\begin{aligned} J_{-\infty}^\alpha (\cos x + i \sin x) &= J_{-\infty}^\alpha e^{ix} \\ &= i^{-\alpha} e^{ix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-\frac{i\alpha\pi}{2}} e^{ix} \\
&= e^{i\left(x - \frac{\alpha\pi}{2}\right)} \\
&= \cos\left(x - \frac{\alpha\pi}{2}\right) + i \sin\left(x - \frac{\alpha\pi}{2}\right).
\end{aligned}$$

D'où l'on obtient :

$$J_{-\infty}^{\alpha} \sin x = \sin\left(x - \frac{\alpha\pi}{2}\right)$$

et

$$J_{-\infty}^{\alpha} \cos x = \cos\left(x - \frac{\alpha\pi}{2}\right).$$

D'une manière générale, on a :

$$J_{-\infty}^{\alpha} \sin \lambda x = \sin\left(\lambda x - \frac{\alpha\pi}{2}\right)$$

et

$$J_{-\infty}^{\alpha} \cos \lambda x = \cos\left(\lambda x - \frac{\alpha\pi}{2}\right).$$

4) Si on prend $f(x) = e^{\lambda x}$, on a :

$$J_{-\infty}^{\alpha} e^{\lambda x} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^x (x - \tau)^{\alpha-1} e^{\lambda\tau} d\tau.$$

Si on pose $(x - \tau) = y$, on obtient :

$$J_{-\infty}^{\alpha} e^{\lambda x} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{+\infty}^0 -y^{\alpha-1} e^{\lambda(x-y)} dy = \frac{e^{\lambda x}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} y^{\alpha-1} e^{-\lambda y} dy.$$

Si on pose cette fois $x = \lambda y$, la dernière intégrale devient :

$$J_{-\infty}^{\alpha} e^{\lambda x} = \frac{e^x}{\lambda^{\alpha} \Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx = \frac{e^{\lambda x} \Gamma(\alpha)}{\lambda^{\alpha} \Gamma(\alpha)} = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda^{\alpha}}.$$

1.2 Dérivées fractionnaires

Après la notion d'intégrale fractionnaire, celle de dérivée fractionnaire d'ordre α ($\alpha > 0$) devient une nécessité ; et l'on est tenté de remplacer α par $(-\alpha)$ dans les formules ci-dessus. Toutefois, cette généralisation exige de faire attention dans le but d'assurer la convergence des intégrales et la préservation des propriétés bien connues des dérivées ordinaires d'ordre entier.

1.2.1 Notations et définitions

Notant par D^n avec $n \in \mathbb{N}$, l'opérateur de dérivée d'ordre n .
On remarque d'abord que :

$$D^n J^n = I \text{ et } J^n D^n \neq I; \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.10)$$

i.e : D^n est l'inverse à gauche (et non l'inverse à droite) de l'opérateur intégral correspondant J^n .

En fait, on reconnaît facilement de (1.1) que :

$$J^n D^n f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0^+) \frac{t^k}{k!}, \quad t > 0. \quad (1.11)$$

Comme conséquence, on s'attend à ce que D^α soit défini comme inverse à gauche de J^α .

Introduisons l'entier positif m tel que : $m - 1 < \alpha < m$ pour donner la définition suivante :

Définition 1.7 on définit la dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ au sens de Riemann-Liouville par :

$$D^\alpha f(t) := \begin{cases} \frac{d^m}{dt^m} \left[\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-m}} d\tau \right], & m-1 < \alpha < m \\ \frac{d^m}{dt^m} f(t), & \alpha = m. \end{cases} \quad (1.12)$$

1.2.2 Propriétés

Posons en complément : $D^0 = J^0 = I$ ce qui nous permet alors

facilement d'aboutir à :

$$D^\alpha J^\alpha = I, \quad \alpha \geq 0 \quad (1.13)$$

et

$$D^\alpha t^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+1-\alpha)} t^{\gamma-\alpha}, \quad \alpha > 0; \gamma > -1; t > 0. \quad (1.14)$$

Les propriétés (1.13-1.14) sont naturellement une généralisation de celles connues quand l'ordre est un entier positif. A partir de (1.14), l'argument de la fonction Γ dans le dénominateur peut être négatif, nous devons considérer le prolongement analytique de $\Gamma(z)$ dans (1.2) au demi plan gauche ; ceci dans le but d'assurer

la convergence de l'intégrale définissant la fonction Gamma.

Remarquons le fait important que la dérivée fractionnaire $D^\alpha f$ n'est pas zéro

pour la fonction constante $f(t) \equiv 1$, si $\alpha \notin \mathbb{N}$.

En effet, la formule (1.14) avec $\gamma = 0$, nous apprend que :

$$D^\alpha 1 = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad \alpha \geq 0, t > 0. \quad (1.15)$$

Ceci, bien sûr, est identiquement nul pour $\alpha \in \mathbb{N}$ à cause des pôles de la fonction Γ

aux points $0, -1, -2, \dots$

1.3 Dérivées fractionnaires au sens de Caputo :

Une autre définition de la dérivée fractionnaire celle de Caputo d'ordre $\alpha \geq 0$. Elle est donnée par :

$$D_*^\alpha f(t) := \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(m)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-m}} d\tau & ; m-1 < \alpha < m \\ \frac{d^m}{dt^m} f(t) & ; \alpha = m. \end{cases} \quad (1.16)$$

Cette définition est bien sûr plus restrictive que (1.12), car elle nécessite

l'intégrabilité absolue de la dérivée d'ordre m .

On reconnaîtra facilement qu'en général on a :

$$D^\alpha f(t) := D^m J^{m-\alpha} f(t) \neq J^{m-\alpha} D^m f(t) := D_*^m f(t), \quad (1.17)$$

sauf si la fonction $f(t)$ avec ses $(m-1)$ dérivées s'annulent en $t = 0^+$.

1.3.1 Propriétés

Proposition 1.4 *Pour $m-1 < \alpha < m$ et $t > 0$, on a :*

$$D^\alpha f(t) = D_*^\alpha f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(0^+). \quad (1.18)$$

Preuve. Pour démontrer (1.18), rappelons que par définition, on a :

$$D^\alpha f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \left(\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau \right).$$

Par intégration par partie, nous obtenons :

$$\begin{aligned} D^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \left(\frac{t^{n-\alpha}}{n-\alpha} f(0) + \frac{t^{n-\alpha+1}}{n-\alpha+1} f^{(1)}(0) + \frac{t^{n-\alpha+2}}{n-\alpha+2} f^{(2)}(0) \right. \\ &\quad \left. + \frac{t^{n-\alpha+3}}{n-\alpha+3} f^{(3)}(0) + \dots + \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha+n-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \right). \end{aligned}$$

Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} D^\alpha f(t) &= \sum_{k=1}^{n-1} f^{(k)}(0^+) \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} + \frac{d^n}{\Gamma(n-\alpha)dt^n} \left(\int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha+n-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0^+) \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \right). \end{aligned}$$

D'où :

$$D^\alpha f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0^+) \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} + D_*^\alpha f(t).$$

■

Et donc, rappelant la dérivée fractionnaire des fonctions puissances (1.14)

$$D^\alpha \left[f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} f^{(k)}(0^+) \right] = D_*^\alpha f(t), \quad (1.19)$$

la formule (1.19) pour la dérivée fractionnaire, ainsi, incorpore les valeurs initiales de la fonction et de ses dérivées d'ordre inférieur.

Remarque 1.3 La soustraction du polynôme de Taylor de degré $m-1$ en $t=0^+$ de $f(t)$ signifie une sorte de régularisation de la dérivée fractionnaire. En particulier, vue la définition, la propriété applicable pour laquelle la dérivée fractionnaire d'une constante est toujours zéro; i.e :

$$D_*^\alpha 1 \equiv 0 \quad ; \alpha > 0 \quad (1.20)$$

peut être facilement reconnue.

Explorons maintenant les différences les plus remarquables entre les deux définitions des dérivées fractionnaires (1.12) et (1.16).

En utilisant (1.17), on remarque que :

$$D^\alpha t^{\alpha-1} \equiv 0 \quad ; \alpha > 0, t > 0. \quad (1.21)$$

L'expression (1.21) est un exemple instructif pour notifier que D^α n'est pas

un inverse à droite de J^α car :

$$J^\alpha D^\alpha t^{\alpha-1} \equiv 0,$$

mais

$$D^\alpha J^\alpha t^{\alpha-1} = t^{\alpha-1} \quad ; \alpha > 0, t > 0. \quad (1.22)$$

Loi des exposants :

D'ordinaire, D^m et D^n ne commutent pas pour tout ordre entier positif. Dans le calcul fractionnaire, la loi des exposants est en général vraie pour les opérateurs

d'intégration fractionnaire et répond à leur propriété de semi-groupe (1.4). En général, l'opérateur D^α ne satisfait pas à la fois la propriété de semi-groupe et la commutativité.

Pour montrer comment la loi des exposants n'est pas nécessairement valable

pour la dérivée fractionnaire standard, on donne la proposition suivante :

Proposition 1.5 A^*)- Il existe $\alpha_1 > 0$, $\beta_1 > 0$, et une fonction f tels que :

$$D^{\alpha_1} D^{\beta_1} f(t) \neq D^{\alpha_1 + \beta_1} f(t).$$

B^*)- Il existe $\alpha_2 > 0$, $\beta_2 > 0$, et une fonction g tels que :

$$D^{\alpha_2} D^{\beta_2} g(t) \neq D^{\beta_2} D^{\alpha_2} g(t).$$

Dans (A^*) prenons $f(t) = t^{-\frac{1}{2}}$ et $\alpha_1 = \beta_1 = \frac{1}{2}$. Puis de la relation (1.21) on a :

$$D^{\frac{1}{2}} f(t) \equiv 0; D^{\frac{1}{2}} D^{\frac{1}{2}} f(t) \equiv 0,$$

mais

$$D^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} f(t) = Df(t) = -\frac{t^{-\frac{3}{2}}}{2}.$$

Dans l'exemple (B^*), prenons $g(t) = t^{\frac{1}{2}}$ et $\alpha_2 = \frac{1}{2}$, $\beta_2 = \frac{3}{2}$,

puis utilisons (1.14), on obtient :

$$D^{\frac{1}{2}} g(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad D^{\frac{3}{2}} g(t) = D^{\frac{3}{2}} t^{\frac{1}{2}} \equiv 0.$$

Mais

$$D^{\frac{1}{2}} D^{\frac{3}{2}} g(t) \equiv 0, \quad D^{\frac{3}{2}} D^{\frac{1}{2}} g(t) = -\frac{t^{\frac{3}{2}}}{4}.$$

Chapitre 2

INEGALITES INTEGRALES FRACTIONNAIRES :

2.1 Introduction

2.1.1 Motivation et position du problème

la théorie des inégalités intégrales joue un rôle important dans le domaine des mathématiques pures et appliquées. Elle intervient dans la modélisation de beaucoup de phénomènes physiques, écologiques etc... Dans ce chapitre, on va s'intéresser à la fonctionnelle de Chebyshev avec poids et on donne quelques résultats liés aux intégrales fractionnaires. Puis on parvient à une généralisation de l'inégalité de Holder et de celle de Cauchy-Schwartz. D'autres généralisations pour l'inégalité de Hermite-Hadamard seront proposées ; on s'intéresse particulièrement au cas des fonctions convexes puis à celui de la convexité et la symétrie simultanément. A la fin de ce chapitre, une généralisation importante d'un résultat de Dragomir sera étudiée.

Considérons la fonctionnelle :

$$\begin{aligned}
T(f, g, p, q) &:= \int_a^b q(x) dx \int_a^b p(x) f(x) g(x) dx + \int_a^b p(x) dx \int_a^b q(x) f(x) g(x) dx - \\
&\left(\int_a^b q(x) f(x) dx \right) - \left(\int_a^b q(x) f(x) dx \right) \left(\int_a^b p(x) g(x) dx \right) - \\
&\left(\int_a^b p(x) f(x) dx \right) \left(\int_a^b q(x) g(x) dx \right)
\end{aligned} \tag{2.1}$$

où f et g sont deux fonctions intégrables sur $[a, b]$ et p, q sont deux fonctions intégrables positives sur $[a, b]$. Si f et g sont synchrones sur $[a, b]$

(i.e ($f(x) - f(y)$) ($g(x) - g(y)$) ≥ 0 , pour tout $x, y \in [a, b]$, alors $T(f, g, p, q) \geq 0$ voir [27, 34]).

Le signe de cette inégalité est inversé si f et g sont asynchrones sur $[a, b]$

(i.e : ($f(x) - f(y)$) ($g(x) - g(y)$) ≤ 0 , pour tout $x, y \in [a, b]$).

Pour $p(x) = q(x)$, $x \in [a, b]$, nous obtenons l'inégalité de Chebyshev avec poids [10].

Dans [36], Ostrovski a démontré la généralisation suivante de l'inégalité de Chebyshev :

Si f et g sont deux fonctions différentiables, synchrones sur $[a, b]$, p est une

fonction intégrable positive sur $[a, b]$ et $|f'(x)| \geq m$, $|g'(x)| \geq r$, pour $x \in [a, b]$ alors :

$$T(f, g, p) := T(f, g, p, p) \geq mrT(x - a, x - a; p) \geq 0. \tag{2.2}$$

Si f et g sont asynchrones sur $[a, b]$, alors :

$$T(f, g, p) \leq mrT(x - a, x - a; p) \leq 0.$$

Si f et g sont deux fonctions différentiables sur $[a, b]$, p est une fonction positive

intégrable sur $[a, b]$ et $|f'(x)| \leq M$, $|g'(x)| \leq R$ pour $x \in [a, b]$, alors :

$$|T(f, g, p)| \leq MRT(x - a, x - a; p) \leq 0. \quad (2.3)$$

Beaucoup de chercheurs se sont intéressés à la fonctionnelle $T(f, g, p)$ et un grand nombre de prolongements, généralisations et variantes sont apparues dans la littérature; voir [8, 9, 19]. Le cas "sans poids" de (2.1) a suscité une grande attention chez bon nombre de mathématiciens et plusieurs inégalités sont apparues dans la littérature [6, 7, 8, 9, 10, 14, 16, 17, 19, 27, 32, 33, 34, 36].

Le but principal de ce travail est l'utilisation de l'intégrale fractionnaire de

Riemann-Liouville pour :

1- donner une nouvelle et courte preuve plus simple que celle proposée dans les

résultats trouvés dans [14]

2-établir quelques nouveaux résultats fractionnaires liés aux inégalités de

Chebyshev sans poids, de Hölder, de Cauchy-Schwartz et de Hermite-Hadamard [17].

2.2 Résultats principaux :

2.2.1 Fonctions synchrones

Théorème 2.1 [14] : Soient f et g deux fonctions synchrones sur $[0, \infty[$ et $r, p, q : [0, \infty[\longrightarrow [0, \infty[$. Alors pour tout $t > 0$, $\alpha > 0$, on a :

$$\begin{aligned}
& 2J^{\alpha r}(t) [J^{\alpha p}(t) J^{\alpha}(qfg)(t) + J^{\alpha}_q(t) J^{\alpha}(pfg)(t)] + 2J^{\alpha p}(t) J^{\alpha q}(t) J^{\alpha}(rfg) \geq \\
& J^{\alpha r}(t) J^{\alpha}(pf)(t) J^{\alpha}(qg)(t) + J^{\alpha}(qf)(t) J^{\alpha}(pg)(t) + \\
& J^{\alpha p}(t) [J^{\alpha}(rf)(t) J^{\alpha}(qg)(t) + J^{\alpha}(qf)(t) J^{\alpha}(rg)(t)] + \\
& J^{\alpha q}(t) [J^{\alpha}(rf)(t) J^{\alpha}(pg)(t) + J^{\alpha}(pf)(t) J^{\alpha}(rg)(t)]
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Remarque 2.1 Pour démontrer ce résultat, on a besoin du lemme suivant :

Lemme 2.1 [14] : Soient f et g deux fonctions synchrones sur $[0, \infty[$ et $v, w : [0, \infty[\longrightarrow [0, \infty[$. Alors pour tout $t > 0, \alpha > 0$, on a :

$$J^{\alpha v}(t) J^{\alpha}(wfg)(t) + J^{\alpha w}(t) J^{\alpha}(vfg)(t) \geq J^{\alpha}(vf)(t) J^{\alpha}(wg)(t) + J^{\alpha}(wf)(t) J^{\alpha}(vg)(t). \tag{2.5}$$

Démonstration du lemme :

Les fonctions f et g étant synchrones sur $[0, \infty[$, alors pour tout $\tau \geq 0, \rho \geq 0$, on a :

$$(f(\tau) - f(\rho))(g(\tau) - f(\rho)) \geq 0.$$

Par conséquent :

$$f(\tau)g(\tau) + f(\rho)g(\rho) \geq f(\tau)g(\rho) + f(\rho)g(\tau). \tag{2.6}$$

En multipliant les deux membres de (2.6) par $\frac{(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\alpha-1}v(\tau)w(\rho)}{\Gamma^2(\alpha)}$, $\tau \in (0, t)$ et $\rho \in (0, t)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma^2(\alpha)} v(\tau)w(\rho)f(\tau)g(\tau) + \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma^2(\alpha)} v(\tau)w(\rho)f(\rho)g(\rho) \\
& \geq \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma^2(\alpha)} v(\tau)w(\rho)f(\tau)g(\rho) + \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma^2(\alpha)} v(\tau)w(\rho)f(\rho)g(\tau).
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Intégrons (2.7) par rapport à τ et à ρ sur $(0, t)^2$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Gamma^2(\alpha)} \int_0^t \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} (t-\rho)^{\alpha-1} v(\tau) w(\rho) f(\tau) g(\tau) d\tau d\rho \\
& + \frac{1}{\Gamma^2(\alpha)} \int_0^t \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} (t-\rho)^{\alpha-1} v(\tau) w(\rho) f(\rho) g(\rho) d\tau d\rho \\
& \geq \frac{1}{\Gamma^2(\alpha)} \int_0^t \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} (t-\rho)^{\alpha-1} v(\tau) w(\rho) f(\tau) g(\rho) d\tau d\rho \\
& + \frac{1}{\Gamma^2(\alpha)} \int_0^t \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} (t-\rho)^{\alpha-1} v(\tau) w(\rho) f(\rho) g(\tau) d\tau d\rho.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Ce qui revient à :

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\rho)^{\alpha-1} w(\rho) d\rho \right] \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} v(\tau) f(\tau) g(\tau) d\tau \right] \\
& + \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} v(\tau) d\tau \right] \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\rho)^{\alpha-1} w(\rho) f(\rho) g(\rho) d\rho \right] \\
& \geq \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} v(\tau) f(\tau) d\tau \right] \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\rho)^{\alpha-1} w(\rho) g(\rho) d\rho \right] \\
& + \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} v(\tau) g(\tau) d\tau \right] \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\rho)^{\alpha-1} w(\rho) f(\rho) d\rho \right].
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Il s'en suit :

$$\begin{aligned}
& J^\alpha(w)(t) J^\alpha(vfg)(t) + J^\alpha(v)(t) J^\alpha(wfg)(t) \\
& \geq J^\alpha(vf)(t) J^\alpha(wg)(t) + J^\alpha(vg)(t) J^\alpha(wf)(t).
\end{aligned} \tag{2.10}$$

D'où la démonstration du lemme 2.1

Démonstration du Théorème 2.1 :

Posons $v = p$, $w = q$ et en vertu du lemme 2.1, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
& J^\alpha(p)(t) J^\alpha(qfg)(t) + J^\alpha(q)(t) J^\alpha(pfg)(t) \\
& \geq J^\alpha(pf)(t) J^\alpha(qg)(t) + J^\alpha(qf)(t) J^\alpha(pg)(t).
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Multiplions les deux membres de (2.11) par $J^\alpha(r)(t)$, on obtient :

$$\begin{aligned} & J^\alpha(r)(t) [J^\alpha(p)(t) J^\alpha(qfg)(t) + J^\alpha(q)(t) J^\alpha(pfg)(t)] \\ & \geq J^\alpha(r)(t) [J^\alpha(pf)(t) J^\alpha(qg)(t) + J^\alpha(qf)(t) J^\alpha(pg)(t)]. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Posons $v = r$, $w = q$ et en vertu du lemme (2.1), on obtient :

$$\begin{aligned} & J^\alpha(r)(t) J^\alpha(qfg)(t) + J^\alpha(q)(t) J^\alpha(rfg)(t) \\ & \geq J^\alpha(rf)(t) J^\alpha(qg)(t) + J^\alpha(qf)(t) J^\alpha(rg)(t). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Multiplions les deux membres de (2.13) par $J^\alpha(p)(t)$, on obtient :

$$\begin{aligned} & J^\alpha(p)(t) [J^\alpha(r)(t) J^\alpha(qfg)(t) + J^\alpha(q)(t) J^\alpha(rfg)(t)] \\ & \geq J^\alpha(p)(t) [J^\alpha(rf)(t) J^\alpha(qg)(t) + J^\alpha(qf)(t) J^\alpha(rg)(t)]. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Utilisons les mêmes arguments que précédemment, on peut obtenir :

$$\begin{aligned} & J^\alpha(q)(t) [J^\alpha(r)(t) J^\alpha(pfg)(t) + J^\alpha(p)(t) J^\alpha(rfg)(t)] \\ & \geq J^\alpha(q)(t) [J^\alpha(rf)(t) J^\alpha(pg)(t) + J^\alpha(pf)(t) J^\alpha(rg)(t)]. \end{aligned} \quad (2.15)$$

L'inégalité (2.3) est obtenue par l'addition des inégalités (2.12), (2.14) et (2.15).

Théorème 2.2 [14] : Soient f et g deux fonctions synchrones sur $[0, \infty[$ et $r, p, q : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$. Alors pour tout $t > 0 ; \alpha > 0 ; \beta > 0$, on a :

$$\begin{aligned} & J^\alpha(r)(t) [J^\alpha(q)(t) J^\beta(pfg)(t) + 2J^\alpha(p)(t) J^\beta(qfg)(t) + J^\beta(q)(t) J^\alpha(pfg)(t)] \\ & + [J^\alpha(p)(t) J^\beta(q)(t) + J^\beta(p)(t) J^\alpha(q)(t)] J^\alpha(rfg)(t) \\ & \geq J^\alpha(r)(t) [J^\alpha(pf)(t) J^\beta(qg)(t) + J^\beta(qf)(t) J^\alpha(pg)(t)] \\ & + J^\alpha(p)(t) [J^\alpha(rf)(t) J^\beta(qg)(t) + J^\beta(qf)(t) J^\alpha(rg)(t)] \\ & + J^\alpha(q)(t) [J^\alpha(rf)(t) J^\beta(pg)(t) + J^\alpha(pf)(t) J^\alpha(rg)(t)]. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Remarque 2.2 : Appliquant le théorème (2.2) pour $\alpha = \beta$, on obtient le théorème (2.1) et pour $\alpha = \beta = 1$, $p = q = r = 1$, on obtient l'inégalité de Chebychev sur $[0, t]$. Voir [10].

Pour démontrer le théorème (2.3) on a besoin du lemme suivant :

Lemme 2.2 [14] : Soient f et g deux fonctions synchrones sur $[0, \infty[$ et $v, w : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$. Alors pour tout $t > 0$; $\alpha > 0$, on a :

$$J^\alpha v(t) J^\beta (wfg)(t) + J^\beta w(t) J^\alpha (vfg)(t) \geq J^\alpha (vf)(t) J^\beta (wg)(t) + J^\beta (wf)(t) J^\alpha (vg)(t). \quad (2.17)$$

Preuve du lemme 2.2 : Multiplions les deux membres de (2.10) par $\frac{(t-\rho)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} w(\rho)$, $\rho \in (0, t)$, on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{(t-\rho)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} w(\rho) J^\alpha (vfg)(t) + J^\alpha (v)(t) \frac{(t-\rho)^\beta}{\Gamma(\beta)} w(\rho) f(\rho) g(\rho) \\ & \geq \frac{(t-\rho)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} w(\rho) g(\rho) J^\alpha (vf)(t) + \frac{(t-\rho)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} w(\rho) f(\rho) J^\alpha (vg)(t). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Intégrons (2.18) par rapport à ρ sur $(0, t)$, on obtient :

$$\begin{aligned} & J^\alpha (vfg)(t) \int_0^t \frac{(t-\rho)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} w(\rho) d\rho + \frac{J^\alpha v(t)}{\Gamma(\beta)} \int_0^t w(\rho) f(\rho) g(\rho) (t-\rho)^{\beta-1} d\rho \\ & \geq \frac{J^\alpha (vf)(t)}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-\rho)^{\beta-1} w(\rho) g(\rho) d\rho + \frac{J^\alpha (vg)(t)}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-\rho)^{\beta-1} w(\rho) f(\rho) d\rho. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Ainsi le lemme 2.2 est démontré.

Preuve du théorème 2.2

Prenons le lemme 2.2 avec $v = p$, $w = q$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} & J^\alpha (p)(t) J^\beta (qfg)(t) + J^\beta (q)(t) J^\alpha (pfg)(t) \\ & \geq J^\alpha (pf)(t) J^\beta (qg)(t) + J^\beta (qf)(t) J^\alpha (pg)(t). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Multiplions les deux membres de (2.20) par $J^\alpha(r)(t)$, on obtient :

$$\begin{aligned} & J^\alpha(r)(t) [J^\alpha(p)(t) J^\beta(qfg)(t) + J^\beta(q)(t) J^\alpha(pfg)(t)] \\ & \geq J^\alpha(r)(t) [J^\alpha(pf)(t) J^\beta(qf)(t) J^\alpha(pg)(t)]. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Appliquons le lemme (2.2) avec $v = r$, $w = q$ puis multiplions les deux membres de (2.21) par $J^\alpha(p)(t)$, on obtient :

$$\begin{aligned} & J^\alpha(p)(t) [J^\alpha(r)(t) J^\beta(qfg)(t) + J^\beta(q)(t) J^\alpha(rfg)(t)] \\ & \geq J^\alpha(p)(t) [J^\alpha(rf)(t) J^\beta(qg)(t) + J^\beta(qf)(t) J^\alpha(rg)(t)]. \end{aligned} \quad (2.22)$$

De la même manière, on peut obtenir :

$$\begin{aligned} & J^\alpha(q)(t) [J^\alpha(r)(t) J^\beta(pfg)(t) + J^\beta(p)(t) J^\alpha(rfg)(t)] \\ & \geq J^\alpha(q)(t) [J^\alpha(rf)(t) J^\beta(pg)(t) + J^\beta(pf)(t) J^\alpha(rg)(t)]. \end{aligned} \quad (2.23)$$

L'inégalité (2.16) découle de l'addition des inégalités (2.21), (2.22) et (2.23).

Remarque 2.3 *Les inégalités (2.5) et (2.6) sont inversées dans les cas suivants :*

- a) Les fonctions f et g sont asynchrones sur $[0, \infty[$.
- b) Les fonctions r, p, q sont négatives sur $[0, \infty[$.
- c) Deux des fonctions r, p, q sont positives et la troisième est négative sur $[0, \infty[$.

Maintenant considérons l'inégalité intégrale :

$$T(f, g) \geq 0, \quad (2.24)$$

où

$$T(f, g) := \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) g(x) dx - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx, \quad (2.25)$$

avec f et g sont deux fonctions intégrables synchrones sur $[a, b]$.

On a les résultats :

Proposition 2.1 *1*)-Soit f une fonction continue définie sur $[0, +\infty[$. Alors on a l'inégalité :*

$$\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} J^\alpha (f^2) (t) \geq (J^\alpha f (t))^2 = J^\alpha f (t) . J^\alpha f (t). \quad (2.26)$$

2)-Soit f une fonction positive et continue sur $[0, +\infty[$ telle que $f > 0$ et $f' > 0$, alors on a :*

$$J^\alpha (1) J^\alpha (f^3) (t) \geq (J^\alpha f (t)) (J^\alpha f^2 (t)), \quad (2.27)$$

et

$$J^\alpha (1) J^\alpha f^{2n+1} (t) \geq J^\alpha f (t) J^\alpha f^{2n} (t) , n \in \mathbb{N}^*. \quad (2.28)$$

Démonstration

1*) : Soit f une fonction continue définie sur $[0, +\infty[$. On a :

$$(f(\tau) - f(\rho))^2 \geq 0. \quad (2.29)$$

Par conséquent :

$$f^2(\tau) + f^2(\rho) \geq 2f(\tau) f(\rho). \quad (2.30)$$

Multiplions les deux membre de (2.30) par $\frac{((t-\tau)(t-\rho))^{\alpha-1}}{\Gamma^2(\alpha)}$; $\tau \in (0, t)$; $\rho \in (0, t)$; on obtient

$$\frac{((t-\tau)(t-\rho))^{\alpha-1}}{\Gamma^2(\alpha)} f^2(\tau) + \frac{((t-\tau)(t-\rho))^{\alpha-1}}{\Gamma^2(\alpha)} f^2(\rho) \geq 2 \frac{((t-\tau)(t-\rho))^{\alpha-1}}{\Gamma^2(\alpha)} f(\tau) f(\rho). \quad (2.31)$$

En intégrant (2.31) sur $(0, t)^2$ et en tenant compte de (1.3), nous pourrons écrire :

$$\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} J^\alpha (f)^2 (t) \geq (J^\alpha f (t))^2. \quad (2.32)$$

2*) Afin de montrer (2.27), on prend : $f = f, g = f^2$, et donc

$$g(\tau) = f^2(\tau), g(\rho) = f^2(\rho),$$

comme $f > 0$ et $f' > 0$, alors, f et f^2 sont synchrones, d'où :

$$(f(\tau) - f(\rho))(g(\tau) - g(\rho)) \geq 0.$$

On a :

$$f^3(\tau) - f(\rho) f^2(\tau) - f(\tau) f^2(\rho) + f^3(\rho) \geq 0.$$

On multiplie par $\frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$, puis on intègre sur $(0, t)$ par rapport à τ , cela donne :

$$J^\alpha f^3(t) - f(\tau) J^\alpha f^2(t) - f^2(\rho) J^\alpha f(t) + f^3(\rho) J^\alpha(1) \geq 0.$$

On multiplie par $\frac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$, puis on intègre sur $(0, t)$ par rapport à ρ , on obtient :

$$2J^\alpha(1) J^\alpha f^3(t) - 2J^\alpha f(t) J^\alpha f^2(t) \geq 0.$$

$$\text{D'où (2.27) : } J^\alpha(1) J^\alpha f^3(t) \geq J^\alpha f(t) J^\alpha f^2(t).$$

La preuve de (2.28) se fait par récurrence sur n .

Corollary 2.1 Théorème 2.3 -(i) : Soit f une fonction continue sur $[0, +\infty[$. Alors pour tous $t > 0, \alpha > 0, \beta > 0$, on a l'inégalité suivante :

$$\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} J^\beta (f)^2 (t) + \frac{t^\beta}{\Gamma(\beta + 1)} J^\alpha (f)^2 (t) \geq 2J^\alpha f (t) J^\beta f (t). \quad (2.33)$$

(ii) : Soit f une fonction différentiable sur $[0, +\infty[$ telle que $ff' > 0$.

Alors pour tous $t > 0, \alpha > 0, \beta > 0$, nous avons :

$$\begin{aligned} & \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} J^\beta (f)^3 (t) + \frac{t^\beta}{\Gamma(\beta + 1)} J^\alpha (f)^3 (t) \\ & \geq \frac{\Gamma(\beta + 1)}{t^\beta} J^\alpha f (t) (J^\beta f (t))^2 + \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{t^\alpha} J^\beta f (t) (J^\alpha f (t))^2. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Preuve. (i) Pour montrer (2.33) on prend $g := f$, on multiplie les deux membres de (2.30)

par $\frac{(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}$; $\tau \in (0, t)$, $\rho \in (0, t)$, puis on intègre l'inégalité obtenue sur $(0, t)^2$.

(ii) Pour montrer (2.34), on remarque que la condition $ff' > 0$ implique que

les fonctions f et $g := f^2$ ont le même sens de variation, ainsi par application

du théorème 2.4, on obtient l'inégalité cherchée

■

2.2.2 Généralisation de Hölder et de Cauchy Schwartz

Théorème 2.4 1) Soient f et g deux fonctions dans $L^2([0, \infty[)$. Alors pour tout $\alpha > 0$, $t > 0$, on a :

$$|J^\alpha fg(t)| \leq (J^\alpha f^2(t))^{\frac{1}{2}} (J^\alpha g^2(t))^{\frac{1}{2}}. \quad (2.35)$$

2) Soit $f \in L^p([0, +\infty[)$ et $g \in L^q([0, +\infty[)$, où, $1 < p, q < +\infty$; $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors, pour $t > 0$, $\alpha > 0$, on a :

$$|J^\alpha fg|(t) \leq (J^\alpha |f|^p(t))^{\frac{1}{p}} (J^\alpha |g|^q(t))^{\frac{1}{q}}. \quad (2.36)$$

Preuve. :1) Pour prouver, l'inégalité (2.35), appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwartz sur $(0, t)$; $t > 0$, aux fonctions : ■

$$\begin{aligned} F(\tau) &:= (t-\tau)^{\frac{\alpha-1}{2}} f(\tau) \\ G(\tau) &:= (t-\tau)^{\frac{\alpha-1}{2}} g(\tau), \tau \in (0, t), t > 0. \end{aligned}$$

On obtient :

$$\int_0^t |F(\tau)G(\tau)| d\tau \leq \left(\int_0^t |F(\tau)|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t |G(\tau)|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Et donc,

$$\begin{aligned} & \int_0^t |(t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) g(\tau)| d\tau \\ & \leq \left(\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f^2(\tau) d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} g^2(\tau) d\tau \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Puis nous multiplions les deux membres de l'inégalité (2.37) par $\Gamma^{-1}(\alpha)$, cela nous donne :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t |(t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) g(\tau)| d\tau \\ & \leq \left(\frac{1}{\Gamma^{\frac{1}{2}}(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f^2(\tau) d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\Gamma^{\frac{1}{2}}(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} g^2(\tau) d\tau \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

D'où l'inégalité (2.35).

2) Pour prouver, l'inégalité (2.36), nous appliquons l'inégalité de Holder sur $(0,t)$ aux fonctions :

$$\begin{aligned} F(\tau) & := (t-\tau)^{\frac{\alpha-1}{p}} f(\tau) \\ G(\tau) & := (t-\tau)^{\frac{\alpha-1}{q}} g(\tau) \quad ; \tau \in (0,t). \end{aligned}$$

On a

$$\int_0^t |F(\tau) G(\tau)| d\tau \leq \left(\int_0^t |F(\tau)|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^t |G(\tau)|^q d\tau \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Il s'en suit que :

$$\int_0^t |(t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) g(\tau)| d\tau \leq \left(\int_0^t |(t-\tau)^{\alpha-1} f^p(\tau)| d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^t |(t-\tau)^{\alpha-1} g^q(\tau)| d\tau \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Comme $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors $\frac{\alpha-1}{p} + \frac{\alpha-1}{q} = \alpha - 1$ et donc :

multiplions les deux membres de l'inégalité par $\frac{1}{\Gamma(\alpha)} = \frac{1}{\sqrt[p]{\Gamma(\alpha)}} \frac{1}{\sqrt[q]{\Gamma(\alpha)}}$, on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t |f g(\tau)(t-\tau)^{\alpha-1}| d\tau \\ & \leq \frac{1}{\sqrt[p]{\Gamma(\alpha)}} \left(\int_0^t |f|^p(\tau) (t-\tau)^{(\alpha-1)} d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \frac{1}{\sqrt[q]{\Gamma(\alpha)}} \left(\int_0^t |g|^q(\tau) (t-\tau)^{(\alpha-1)} d\tau \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

D'où l'inégalité (2.36).

Preuve.

■

2.2.3 Généralisation de Hermite-Hadamard

Comme autre exemple, citons dans le domaine des intégrales qui est riche en inégalités

impliquant des fonctions ainsi que leurs intégrales [7, 33, 32] ; celle-ci (voir [21]) :

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(\tau) d\tau \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}, \quad (2.39)$$

où f est une fonction convexe.

L'intérêt pour cette inégalité a débuté avec les papiers de Ch. Hermite [22] et

J. Hadamard [21] dans les années 1883-1893 (voir C.P Niculescu and L.E.

Person [35] et les références pour "some historical notes of Hermite-Hadamard

inequality). Beaucoup de chercheurs se sont intéressés considérablement à

(2.39) et bon nombre d'extensions et de généralisations sont apparues dans la

littérature, (voir [6, 16, 18]). Pour notre contribution, on cite les résultats suivants :

Cas convexe

Théorème 2.5 [17]

Soit f une fonction intégrable convexe sur $[0, \infty[$. Alors pour tous $t > 0, \alpha > 0$, on a :

$$f\left(\frac{t}{2}\right) J^\alpha(t^{\alpha-1}) \leq J^\alpha(t^{\alpha-1}f(t)) \leq \frac{1}{2} (f(0) + f(t)) J^\alpha(t^{\alpha-1}). \quad (2.40)$$

Remarque 2.4 *En appliquant le théorème 2.4 pour $\alpha = 1$, on obtient l'inégalité (2.39) sur $[0, t]$.*

Afin de prouver ce théorème, le lemme suivant est nécessaire :

Lemme 2.3 [17] *Soit f une fonction convexe sur $[a, b]$. Alors on a :*

$$2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq f(a+b-x) + f(x) \leq f(a) + f(b). \quad (2.41)$$

Démonstration du lemme

Soit f une fonction convexe sur $[a, b]$. Alors on peut écrire :

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b-x+x}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(f(a+b-x) + f(x)). \quad (2.42)$$

Si on choisit : $x = \lambda a + (1 - \lambda)b$, cela nous donne :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(f(a+b - (\lambda a + (1 - \lambda)b)) + f(\lambda a + (1 - \lambda)b)) \\ &= \frac{1}{2}(f(\lambda b + (1 - \lambda)a) + f(\lambda a + (1 - \lambda)b)). \end{aligned} \quad (2.43)$$

La convexité de f , nous donne :

$$\frac{1}{2}(f(\lambda b + (1 - \lambda)a) + f(\lambda a + (1 - \lambda)b)) \leq \frac{1}{2}(f(a) + f(b)). \quad (2.44)$$

De (2.42) et (2.44), on obtient (2.41).

Démonstration du théorème 2.4 :

Soit f une fonction convexe sur $[0, \infty[$. Alors par le lemme 2.3, pour tout réel positif fixé t , on a :

$$2f\left(\frac{t}{2}\right) \leq f(t - \tau) + f(\tau) \leq f(0) + f(t); \tau \in (0, t). \quad (2.45)$$

En multipliant les deux membres de (2.45) par $\frac{(\tau^{\alpha-1}(t-\tau)^{\alpha-1})}{\Gamma(\alpha)}$, on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\Gamma(\alpha)} f\left(\frac{t}{2}\right) \tau^{\alpha-1} (t-\tau)^{\alpha-1} \\ & \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (f(t-\tau) + f(\tau)) \tau^{\alpha-1} (t-\tau)^{\alpha-1} \\ & \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (f(0) + f(t)) \tau^{\alpha-1} (t-\tau)^{\alpha-1}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Maintenant, en intégrant (2.46) sur $(0,t)$, on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\Gamma(\alpha)} f\left(\frac{t}{2}\right) \int_0^t \tau^{\alpha-1} (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau \\ & \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t f(t-\tau) \tau^{\alpha-1} (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t f(\tau) \tau^{\alpha-1} (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau \\ & \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (f(0) + f(t)) \int_0^t \tau^{\alpha-1} (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Par conséquent,

$$2f\left(\frac{t}{2}\right) J^\alpha (t^{\alpha-1}) \leq J^\alpha f(t) t^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t f(t-\tau) \tau^{\alpha-1} d\tau \leq (f(0) + f(t)) J^\alpha (t^{\alpha-1}). \quad (2.48)$$

En utilisant le changement de variable $y = t - \tau$ dans l'intégrale de (2.48), on obtient (2.40).

Cas convexe symétrique

Théorème 2.6 [17]

Soit f une fonction convexe sur $[0, \infty[$. Si g est une fonction positive symétrique respectivement à $\frac{t}{2}$ et $t > 0$, alors pour tout $\alpha > 0$, on a :

$$f\left(\frac{t}{2}\right) J^\alpha (t^{\alpha-1}g(t)) \leq J^\alpha (t^{\alpha-1}f(t)g(t)) \leq \frac{1}{2} (f(0) + f(t)) J^\alpha (t^{\alpha-1}g(t)), t > 0. \quad (2.49)$$

Preuve. Soit f une fonction convexe sur $[0, \infty[$. En multipliant les deux membres de l'inégalité (2.45) par $\frac{\tau^{\alpha-1}(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g(\tau)$; $\tau \in (0, t)$, $t > 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} & 2f\left(\frac{t}{2}\right) \tau^{\alpha-1} (t-\tau)^{\alpha-1} g(\tau) \\ & \leq (f(t-\tau) + f(\tau)) \tau^{\alpha-1} (t-\tau)^{\alpha-1} g(\tau) \\ & \leq (f(0) + f(t)) \tau^{\alpha-1} (t-\tau)^{\alpha-1} g(\tau). \end{aligned} \tag{2.50}$$

En intégrant (2.50) sur $(0, t)$, on a :

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{t}{2}\right) J^\alpha (t^{\alpha-1} g(t)) \\ & \leq J^\alpha (t^{\alpha-1} f(t) g(t)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t f(t-\tau) \tau^{\alpha-1} (t-\tau)^{\alpha-1} g(\tau) d\tau \\ & \leq \frac{1}{2} (f(0) + f(t)) J^\alpha (t^{\alpha-1} g(t)). \end{aligned} \tag{2.51}$$

Par le changement de variable $y = t - \tau$ et la symétrie de g par rapport à $\frac{t}{2}$, on obtient (2.49).

Théorème 2.7 [17] Soit f une fonction convexe sur $[0, \infty[$. Alors pour tous $t > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, nous avons :

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{t}{2}\right) J^\alpha (t^{\beta-1}) \\ & \leq \frac{1}{2} J^\alpha (t^{\beta-1} f(t)) + \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{2} J^\alpha (t^{\alpha-1} f(t)) \\ & \leq \frac{1}{2} (f(0) + f(t)) J^\alpha (t^{\beta-1}). \end{aligned} \tag{2.52}$$

■

Remarque 2.5 En appliquant le théorème 2.6 pour $\alpha = \beta$, on obtient le théorème 2.4.

Preuve. En multipliant les deux membres de l'inégalité (2.45) par $\frac{\tau^{\beta-1}(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$, $\tau \in (0, t)$,

$t > 0$, nous obtenons : ■

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{\Gamma(\alpha)} f\left(\frac{t}{2}\right) \tau^{\beta-1} (t-\tau)^{\alpha-1} \\
& \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (f(t-\tau) + f(\tau)) \tau^{\beta-1} (t-\tau)^{\alpha-1} \\
& \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (f(0) + f(t)) \tau^{\beta-1} (t-\tau)^{\alpha-1}.
\end{aligned} \tag{2.53}$$

Ensuite, en intégrant sur $(0, t)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
& 2f\left(\frac{t}{2}\right) J^\alpha (t^{\beta-1}) \\
& \leq J^\alpha (t^{\beta-1}) f(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t f(t-\tau) \tau^{\beta-1} (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau \\
& \leq (f(0) + f(t)) J^\alpha (t^{\beta-1}).
\end{aligned} \tag{2.54}$$

Par le changement de variable $y = t - \tau$ pour l'intégrale (2.54), on obtient la formule (2.52).

Théorème 2.8 [17] *Soit une fonction convexe sur $[0, \infty[$. Si g est une fonction positive sur $[0, \infty[$ et symétrique par rapport à $\frac{t}{2}$, $t > 0$, alors pour tout $\alpha > 0, \beta > 0$, on a :*

$$\begin{aligned}
& f\left(\frac{t}{2}\right) J^\alpha (t^{\beta-1} g(t)) \\
& \leq \frac{1}{2} J^\alpha (t^{\beta-1} f(t) g(t)) + \frac{\Gamma(\beta)}{2\Gamma(\alpha)} J^\beta (t^{\alpha-1} f(t) g(t)) \\
& \leq \frac{1}{2} (f(0) + f(t)) J^\alpha (t^{\beta-1} g(t)).
\end{aligned} \tag{2.55}$$

Preuve. En multipliant les deux membres de l'inégalité (2.45) par $\frac{\tau^{\beta-1}(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g(\tau)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
& 2 \frac{\tau^{\beta-1}(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g(\tau) f\left(\frac{t}{2}\right) \\
& \leq \frac{\tau^{\beta-1}(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g(\tau) f(t-\tau) \\
& \quad + \frac{\tau^{\beta-1}(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g(\tau) f(\tau) \\
& \leq \frac{\tau^{\beta-1}(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g(\tau) (f(0) + f(t)).
\end{aligned} \tag{2.56}$$

Maintenant, en intégrant l'inégalité (2.56) sur $(0, t)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{\Gamma(\alpha)} f\left(\frac{t}{2}\right) \int_0^t \tau^{\beta-1} (t-\tau)^{\alpha-1} g(\tau) d\tau \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \tau^{\beta-1} (t-\tau)^{\alpha-1} f(t-\tau) g(\tau) d\tau \\
& + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \tau^{\beta-1} (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) g(\tau) d\tau \\
& \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (f(0) + f(t)) \int_0^t \tau^{\beta-1} (t-\tau)^{\alpha-1} g(\tau) d\tau
\end{aligned}$$

Comme g est symétrique par rapport à $\frac{t}{2}$, alors, $g(\tau) = g(t-\tau)$. Et en posant : $z = t - \tau$, on obtient :

$$\begin{aligned}
& f\left(\frac{t}{2}\right) J^\alpha (t^{\beta-1} g(t)) \leq \frac{1}{2} J^\alpha (t^{\beta-1} f(t) g(t)) \\
& + \frac{\Gamma(\beta)}{2\Gamma(\alpha)} J^\beta (t^{\alpha-1} f(t) g(t)) \leq \frac{1}{2} (f(0) + f(t)) J^\alpha (t^{\beta-1} g(t)).
\end{aligned}$$

■

Remarque 2.6 Les inégalités (2.40 - 2.49 - 2.52 - 2.55) sont inversées si f est une fonction concave sur $[0, \infty[$.

Corollary 2.2 [17] Soit f une fonction deux fois différentiable sur $[0, \infty[$.

(A*) -S'il existe $m = \inf f''(x)$, alors pour tout $t > 0, \alpha > 0$, l'inégalité :

$$\begin{aligned}
& f\left(\frac{t}{2}\right) J^\alpha (t^{\alpha-1}) + \frac{m}{2} (J^\alpha (t^{\alpha+1}) - \frac{1}{2} t^2 J^\alpha (t^{\alpha-1})) \\
& \leq J^\alpha (t^{\alpha-1} f(t)) \\
& \leq \frac{1}{2} (f(0) + f(t)) J^\alpha (t^{\alpha-1}) + \frac{m}{2} (J^\alpha (t^{\alpha+1}) - \frac{1}{2} t^2 J^\alpha (t^{\alpha-1}))
\end{aligned} \tag{2.57}$$

est vraie.

(B*)-S'il existe $M = \sup f''(x)$, alors pour tous $t > 0, \alpha > 0$, on a :

$$\begin{aligned}
& f\left(\frac{t}{2}\right) J^\alpha(t^{\alpha-1}) + \frac{M}{2} (J^\alpha(t^{\alpha+1}) - t^2 J^\alpha(t^{\alpha-1})) \\
& \leq J^\alpha(t^{\alpha-1} f(t)) \\
& \leq \frac{1}{2} (f(0) + f(t)) J^\alpha(t^{\alpha-1}) + \frac{M}{2} (J^\alpha(t^{\alpha+1}) - t^2 J^\alpha(t^{\alpha-1})).
\end{aligned} \tag{2.58}$$

Preuve. (A*) On prend :

$$g(\tau) := f(\tau) - \frac{m}{2}\tau^2.$$

Il est évident que g soit une fonction convexe sur $[0, \infty[$. Par conséquent,

la partie (A*) est prouvée par l'application du théorème 2.4.

(B*) Pour prouver (2.58), on applique le théorème 2.4 à la fonction convexe :

$$h(\tau) := -f(\tau) + \frac{M}{2}. \blacksquare$$

2.2.4 Retour au cas synchrone : Généralisation

Théorème 2.9 Soient f et g deux fonctions synchrones et soient p et q deux fonctions

positives sur $[0, \infty[$. Pour tous $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, on a :

$$\begin{aligned}
& J^\alpha p J^\alpha q f g + J^\alpha q J^\alpha p f g - J^\alpha p f J^\alpha q g - J^\alpha q f J^\alpha p g \\
& \geq \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} |J^\alpha p J^\alpha q |f g| + J^\alpha q J^\alpha p |f g| - J^\alpha p |f| J^\alpha q |g| - J^\alpha q |f| J^\alpha p |g|, \\ |J^\alpha p J^\alpha q |f| g + J^\alpha q J^\alpha p |f| g - J^\alpha p |f| J^\alpha q g - J^\alpha q |f| J^\alpha p g|, \\ |J^\alpha p J^\alpha q f |g| + J^\alpha q J^\alpha p f |g| - J^\alpha p f J^\alpha q |g| - J^\alpha q f J^\alpha p |g|. \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

Preuve. a)- f et g étant synchrones, cela nous permet d'affirmer que pour tout $\tau \geq 0, \rho \geq 0$, on a :

$$(f(\tau) - f(\rho))(g(\tau) - g(\rho)) \geq 0.$$

Donc :

$$|(f(\tau) - f(\rho))(g(\tau) - g(\rho))| = (f(\tau) - f(\rho))(g(\tau) - g(\rho)).$$

D'autre part,

$$|(f(\tau) - f(\rho))(g(\tau) - g(\rho))| \geq (|f(\tau)| - |f(\rho)|)(|g(\tau)| - |g(\rho)|),$$

ce qui revient à dire :

$$(f(\tau) - f(\rho))(g(\tau) - g(\rho)) \geq (|f(\tau)| - |f(\rho)|)(|g(\tau)| - |g(\rho)|),$$

et donc :

$$\begin{aligned} & (f(\tau) - f(\rho))(g(\tau) - g(\rho)) \\ & \geq ||f(\tau)||g(\tau)| + |f(\rho)||g(\rho)| - |f(\tau)||g(\rho)| - |f(\rho)||g(\tau)||. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Multiplions l'inégalité (2.59) par $\frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}p(\tau)$; $p(\tau) > 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(\tau)g(\tau)p(\tau) + \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(\rho)g(\rho)p(\tau) - \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(\tau)g(\rho)p(\tau) \\ & \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(\rho)g(\tau)p(\tau) \geq | \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}|f(\tau)||g(\tau)|p(\tau) + \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}|f(\rho)||g(\rho)|p(\tau) \quad (2.60) \\ & - \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}|f(\tau)||g(\rho)|p(\tau) - \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}|f(\rho)||g(\tau)|p(\tau) |. \end{aligned}$$

Maintenant, multiplions l'inégalité (2.60) par $\frac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}q(\rho)$; $q(\rho) > 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma^2(\alpha)}p(\tau)q(\rho)f(\tau)g(\tau) + \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma^2(\alpha)}p(\tau)q(\rho)f(\rho)g(\rho) \\ & - \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma^2(\alpha)}p(\tau)q(\rho)f(\tau)g(\rho) - \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma^2(\alpha)}p(\tau)q(\rho)f(\rho)g(\tau) \\ & \geq | \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma^2(\alpha)}p(\tau)q(\rho)|f(\tau)||g(\tau)| + \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma^2(\alpha)}p(\tau)q(\rho)|f(\rho)||g(\rho)| \\ & - \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma^2(\alpha)}p(\tau)q(\rho)|f(\tau)||g(\rho)| - \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma^2(\alpha)}p(\tau)q(\rho)|f(\rho)||g(\tau)|. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Par intégration de l'inégalité (2.61), sur $(0, t)^2$, on obtient :

$$\begin{aligned}
J^\alpha p J^\alpha q f g + J^\alpha q J^\alpha p f g - J^\alpha p f J^\alpha q g - J^\alpha q f J^\alpha p g \geq & |J^\alpha p J^\alpha q| |f| |g| + \\
J^\alpha q J^\alpha p |f| |g| - J^\alpha p |f| |J^\alpha q| |g| - J^\alpha q |f| |J^\alpha p| |g|. &
\end{aligned} \tag{2.62}$$

b)-Par un même raisonnement, f et g sont synchrones, on a alors :

$$|(f(\tau) - f(\rho))(g(\tau) - g(\rho))| = (f(\tau) - f(\rho))(g(\tau) - g(\rho)),$$

et une propriété de la valeur absolue, nous donne l'inégalité :

$$|(f(\tau) - f(\rho))(g(\tau) - g(\rho))| \geq (|f(\tau)| - |f(\rho)|)(g(\tau) - g(\rho)),$$

ce qui revient à l'inégalité :

$$(f(\tau) - f(\rho))(g(\tau) - g(\rho)) \geq (|f(\tau)| - |f(\rho)|)(g(\tau) - g(\rho)),$$

et donc :

$$\begin{aligned}
& (f(\tau) - f(\rho))(g(\tau) - g(\rho)) \\
& \geq |f(\tau)| |g(\tau)| + |f(\rho)| |g(\rho)| - |f(\tau)| |g(\rho)| - |f(\rho)| |g(\tau)|.
\end{aligned} \tag{2.63}$$

De même que précédemment, multiplions l'inégalité (2.63) par : $\frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} p(\tau)$; $p(\tau) > 0$, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} p(\tau) f(\tau) g(\tau) + \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} p(\tau) f(\rho) g(\rho) \\
& - \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} p(\tau) f(\tau) g(\rho) - \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} p(\tau) f(\rho) g(\tau) \\
& \geq \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} p(\tau) |f(\tau)| |g(\tau)| + \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} p(\tau) |f(\rho)| |g(\rho)| \\
& - \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} p(\tau) |f(\tau)| |g(\rho)| - \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} p(\tau) |f(\rho)| |g(\tau)|.
\end{aligned} \tag{2.64}$$

En multipliant l'inégalité(2.64), par : $\frac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}q(\rho)$ avec $q(\rho) > 0$, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma^2(\alpha)}p(\tau)q(\rho)f(\tau)g(\tau) + \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma^2(\alpha)}p(\tau)q(\rho)f(\rho)g(\rho) \\
& - \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma^2(\alpha)}p(\tau)q(\rho)f(\tau)g(\rho) - \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma^2(\alpha)}p(\tau)q(\rho)f(\rho)g(\tau) \\
& \geq | \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma^2(\alpha)}p(\tau)q(\rho)|f(\tau)|g(\tau) + \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma^2(\alpha)}p(\tau)q(\rho)|f(\rho)|g(\rho) \\
& - \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma^2(\alpha)}p(\tau)q(\rho)|f(\tau)|g(\rho) - \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma^2(\alpha)}p(\tau)q(\rho)|f(\rho)|g(\tau) |.
\end{aligned} \tag{2.65}$$

En intégrant l'inégalité (2.65) sur $(0, t)^2$ on obtient :

$$\begin{aligned}
& J^\alpha p J^\alpha q f g + J^\alpha q J^\alpha p f g - J^\alpha p f J^\alpha q g - J^\alpha q f J^\alpha p g \\
& \geq | J^\alpha p J^\alpha q |f|g + J^\alpha q J^\alpha p |f|g - J^\alpha p |f| J^\alpha q g - J^\alpha q |f| J^\alpha p g |.
\end{aligned} \tag{2.66}$$

c)- Sous les mêmes hypothèses que précédemment, on a l'inégalité :

$$(f(\tau) - f(\rho))(g(\tau) - g(\rho)) \geq |(f(\tau) - f(\rho))(|g(\tau)| - |g(\rho)|)|,$$

et donc :

$$(f(\tau) - f(\rho))(g(\tau) - g(\rho)) \geq |f(\tau)|g(\tau) + f(\rho)|g(\rho) - f(\tau)|g(\rho) - f(\rho)|g(\tau)| |. \tag{2.67}$$

Multiplions l'inégalité (2.67) par : $\frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}p(\tau)$; $p(\tau) > 0$, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} p(\tau) f(\tau) g(\tau) + \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} p(\tau) f(\rho) g(\rho) \\
& - \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} p(\tau) f(\tau) g(\rho) - \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} p(\tau) f(\rho) g(\tau) \\
& \geq | \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} p(\tau) f(\tau) |g(\tau)| + \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} p(\tau) f(\rho) |g(\rho)| \\
& - \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} p(\tau) f(\tau) |g(\rho)| - \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} p(\tau) f(\rho) |g(\tau)| |.
\end{aligned} \tag{2.68}$$

En multipliant l'inégalité (2.68) par $\frac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} q(\rho)$ avec $q(\rho) > 0$, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma^2(\alpha)} p(\tau) q(\rho) f(\tau) g(\rho) + \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma^2(\alpha)} p(\tau) q(\rho) f(\rho) g(\rho) \\
& - \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma^2(\alpha)} p(\tau) q(\rho) f(\tau) g(\rho) - \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma^2(\alpha)} p(\tau) q(\rho) f(\rho) g(\tau) \\
& \geq | \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma^2(\alpha)} p(\tau) q(\rho) f(\tau) |g(\tau)| + \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma^2(\alpha)} p(\tau) q(\rho) f(\rho) |g(\tau)| \\
& - \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma^2(\alpha)} p(\tau) q(\rho) f(\tau) |g(\rho)| - \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma^2(\alpha)} p(\tau) q(\rho) f(\rho) |g(\tau)| |.
\end{aligned} \tag{2.69}$$

Par intégration l'inégalité (2.69) sur $(0, t)^2$, on obtient :

$$\begin{aligned}
& J^\alpha p J^\alpha q f g + J^\alpha q J^\alpha p f g - J^\alpha p f J^\alpha q g - J^\alpha q f J^\alpha p g \\
& \geq | J^\alpha p J^\alpha q f |g| + J^\alpha q J^\alpha p f |g| - J^\alpha p f J^\alpha q |g| - J^\alpha q f J^\alpha p |g| |.
\end{aligned} \tag{2.70}$$

Ainsi les trois inégalités (2.62), (2.66) et (2.70) étant vérifiées simultanément,

ceci achève la preuve du théorème 2.8. ■

Théorème 2.10 Soient f et g deux fonctions synchrones et soient p et q deux fonctions

positives sur $[0, \infty[$. Pour tous $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, on a :

$$\begin{aligned}
& J^\alpha p J^\beta q f g + J^\beta q J^\alpha p f g - J^\alpha p f J^\beta q g - J^\beta q f J^\alpha p g \\
& \geq \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} |J^\alpha p J^\beta q |f g| + J^\beta q J^\alpha p |f g| - J^\alpha p |f| J^\beta q |g| - J^\beta q |f| J^\alpha p |g|, \\ |J^\alpha p J^\beta q |f| g + J^\beta q J^\alpha p |f| g - J^\alpha p |f| J^\beta q g - J^\beta q |f| J^\alpha p g|, \\ |J^\alpha p J^\beta q f |g| + J^\beta q J^\alpha p f |g| - J^\alpha p f J^\beta q |g| - J^\beta q f J^\alpha p |g|. \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

Preuve.

a)- f et g étant synchrones, alors pour tous $\tau \geq 0, \rho \geq 0$, on a :

$$(f(\tau) - f(\rho))(g(\tau) - g(\rho)) \geq 0.$$

Donc :

$$|(f(\tau) - f(\rho))(g(\tau) - g(\rho))| = (f(\tau) - f(\rho))(g(\tau) - g(\rho)).$$

D'autre part,

$$|(f(\tau) - f(\rho))(g(\tau) - g(\rho))| \geq (|f(\tau)| - |f(\rho)|)(|g(\tau)| - |g(\rho)|),$$

ce qui donne :

$$(f(\tau) - f(\rho))(g(\tau) - g(\rho)) \geq (|f(\tau)| - |f(\rho)|)(|g(\tau)| - |g(\rho)|).$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
& (f(\tau) - f(\rho))(g(\tau) - g(\rho)) \\
& \geq |f(\tau)||g(\tau)| + |f(\rho)||g(\rho)| - |f(\tau)||g(\rho)| - |f(\rho)||g(\tau)|.
\end{aligned} \tag{2.71}$$

Multiplions l'inégalité (2.71) par : $\frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} p(\tau), p(\tau) > 0$, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} p(\tau) f(\tau) g(\tau) + \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} p(\tau) f(\rho) g(\rho) - \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} p(\tau) f(\tau) g(\rho) \\
& - \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} p(\tau) f(\rho) g(\tau) \geq \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} p(\tau) |f(\tau)||g(\tau)| + \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} p(\tau) |f(\rho)||g(\rho)| \\
& - \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} p(\tau) |f(\tau)||g(\rho)| - \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} p(\tau) |f(\rho)||g(\tau)|.
\end{aligned} \tag{2.72}$$

Multiplions, maintenant l'inégalité (2.72) par : $\frac{(t-\rho)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}q(\rho)$, $q(\rho) > 0$, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}p(\tau)q(\rho)f(\tau)g(\tau) + \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}p(\tau)q(\rho)f(\rho)g(\rho) \\
& - \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}p(\tau)q(\rho)f(\tau)g(\rho) - \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}p(\tau)q(\rho)f(\rho)g(\tau) \\
& \geq \left| \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}p(\tau)q(\rho)|f(\tau)||g(\tau)| + \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}p(\tau)q(\rho)|f(\rho)||g(\rho)| \right. \\
& \left. - \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}p(\tau)q(\rho)|f(\tau)||g(\rho)| - \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}p(\tau)q(\rho)|f(\rho)||g(\tau)| \right|.
\end{aligned} \tag{2.73}$$

Par intégration de (2.73) sur $(0, t)^2$, on obtient :

$$\begin{aligned}
& J^\alpha p J^\beta q f g + J^\beta q J^\alpha p f g - J^\alpha p f J^\beta q g - J^\beta q f J^\alpha p g \\
& \geq \left| J^\alpha p J^\beta q |f| |g| + J^\beta q J^\alpha p |f| |g| - J^\alpha p |f| J^\beta q |g| - J^\beta q |f| J^\alpha p |g| \right|.
\end{aligned} \tag{2.74}$$

b)- Par un même raisonnement que précédemment, f et g étant synchrones, on a alors :

$$| (f(\tau) - f(\rho))(g(\tau) - g(\rho)) | = (f(\tau) - f(\rho))(g(\tau) - g(\rho)).$$

D'autre part, on a :

$$| (f(\tau) - f(\rho))(g(\tau) - g(\rho)) | \geq (|f(\tau)| - |f(\rho)|)(g(\tau) - g(\rho)) |.$$

Par conséquent :

$$(f(\tau) - f(\rho))(g(\tau) - g(\rho)) \geq (|f(\tau)| - |f(\rho)|)(g(\tau) - g(\rho)) |. \tag{2.75}$$

Comme précédemment, multiplions l'inégalité (2.75) par : $\frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}p(\tau)$; $p(\tau) > 0$, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} p(\tau) f(\tau) g(\tau) + \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} p(\tau) f(\rho) g(\rho) - \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} p(\tau) f(\tau) g(\rho) \\
& - \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} p(\tau) f(\rho) g(\tau) \geq \left| \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} p(\tau) |f(\tau)| g(\tau) + \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} p(\tau) |f(\rho)| g(\rho) \right. \\
& \left. - \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} p(\tau) |f(\tau)| g(\rho) - \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} p(\tau) |f(\rho)| g(\tau) \right|.
\end{aligned} \tag{2.76}$$

En multipliant l'inégalité (2.76) par : $\frac{(t-\rho)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} q(\rho)$; $q(\rho) > 0$, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} p(\tau) q(\rho) f(\tau) g(\tau) + \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} p(\tau) q(\rho) f(\rho) g(\rho) \\
& - \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} p(\tau) q(\rho) f(\tau) g(\rho) - \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} p(\tau) q(\rho) f(\rho) g(\tau) \\
& \geq \left| \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} p(\tau) q(\rho) |f(\tau)| g(\tau) + \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} p(\tau) q(\rho) |f(\rho)| g(\rho) \right. \\
& \left. - \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} p(\tau) q(\rho) |f(\tau)| g(\rho) - \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} p(\tau) q(\rho) |f(\rho)| g(\tau) \right|.
\end{aligned} \tag{2.77}$$

En intégrant l'inégalité (2.77) sur $(0, t)^2$, on obtient :

$$\begin{aligned}
& J^\alpha p J^\beta q f g + J^\beta q J^\alpha p f g - J^\alpha p f J^\beta q g - J^\beta q f J^\alpha p g \\
& \geq \left| J^\alpha p J^\beta q |f| g + J^\beta q J^\alpha p |f| g - J^\alpha p |f| J^\beta q g - J^\beta q |f| J^\alpha p g \right|.
\end{aligned} \tag{2.78}$$

c)- Sous les mêmes hypothèses que précédemment, on a l'inégalité :

$$(f(\tau) - f(\rho))(g(\tau) - g(\rho)) \geq |(f(\tau) - f(\rho))(|g(\tau)| - |g(\rho)|)|,$$

et donc :

$$(f(\tau) - f(\rho))(g(\tau) - g(\rho)) \geq |f(\tau)|g(\tau) + f(\rho)|g(\rho) - f(\tau)|g(\rho) - f(\rho)|g(\tau)|. \tag{2.79}$$

Multiplions l'inégalité (2.79) par : $\frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}p(\tau)$; $p(\tau) > 0$, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}p(\tau)f(\tau)g(\tau) + \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}p(\tau)f(\rho)g(\rho) \\
& - \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}p(\tau)f(\tau)g(\rho) - \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}p(\tau)f(\rho)g(\tau) \\
& \geq \left| \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}p(\tau)f(\tau)|g(\tau)| + \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}p(\tau)f(\rho)|g(\rho)| \right. \\
& \left. - \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}p(\tau)f(\tau)|g(\rho)| - \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}p(\tau)f(\rho)|g(\tau)| \right|.
\end{aligned} \tag{2.80}$$

En multipliant l'inégalité (2.80) par : $\frac{(t-\rho)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}q(\rho)$ avec $q(\rho) > 0$, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}p(\tau)q(\rho)f(\tau)g(\tau) + \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}p(\tau)q(\rho)f(\rho)g(\rho) \\
& - \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}p(\tau)q(\rho)f(\tau)g(\rho) - \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}p(\tau)q(\rho)f(\rho)g(\tau) \\
& \geq \left| \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}p(\tau)q(\rho)f(\tau)|g(\tau)| + \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}p(\tau)q(\rho)f(\rho)|g(\rho)| \right. \\
& \left. - \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}p(\tau)q(\rho)f(\tau)|g(\rho)| - \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}p(\tau)q(\rho)f(\rho)|g(\tau)| \right|.
\end{aligned} \tag{2.81}$$

Par intégration de (2.81) sur $(0, t)^2$, on obtient :

$$\begin{aligned}
& J^\alpha p J^\beta q f g + J^\beta q J^\alpha p f g - J^\alpha p f J^\beta q g - J^\beta q f J^\alpha p g \\
& \geq \left| J^\alpha p J^\beta q f |g| + J^\beta q J^\alpha p f |g| - J^\alpha p f J^\beta q |g| - J^\beta q f J^\alpha p |g| \right|.
\end{aligned} \tag{2.82}$$

la preuve du théorème 2.9 est une conséquence des trois inégalités (2.74), (2.78) et (2.82) vérifiées simultanément.

■

Chapitre 3

APPLICATIONS NUMERIQUES SUR LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES FRACTIONNAIRES

La méthode de décomposition d'Adomian (ADM) a été introduite par Adomian [3, 4] au début des années 1980. Elle a été largement utilisée pour résoudre les équations différentielles tirées de la physique, (voir par exemple [1], [2], [3], [4], [5], [6], [11], [12]). Avec cette méthode, on peut facilement obtenir la solution sous forme d'une série qui converge rapidement [10, 11, 12, 13, 15, 24].

Soit le problème

$$Fu = g, \quad (3.1)$$

où F représente un opérateur différentiel non linéaire.

La méthode ADM consiste à décomposer la partie linéaire de F en $L + R$,

où L est un opérateur "facilement" inversible et R est la partie restante.

Si on désigne par N , le terme non linéaire, alors l'équation (4.1), dans sa forme

simple, s'écrit :

$$Lu + Ru + Nu = g. \quad (3.2)$$

Si on note par L^{-1} , l'inverse de L , on obtient l'équation équivalente suivante :

$$L^{-1}Lu = L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu. \quad (3.3)$$

On pose $L^{-1}Lu = u$. On obtient :

$$u = L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \quad (3.4)$$

On cherche maintenant la solution u sous la forme suivante :

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} u_i, \quad (3.5)$$

avec $u_0 = f + L^{-1}g$, où f est la condition initiale.

Ensuite, on décompose l'opérateur N comme suit :

$$Nu = \sum_{i=0}^{\infty} A_i(u_0, u_1, \dots, u_i), \quad (3.6)$$

où les A_i sont les polynômes d'Adomian [3, 4] (ils dépendent de u_0, u_1, \dots, u_i).

En remplaçant (3.5), et (3.6) dans (3.4), on obtient :

$$\sum_{i=0}^{\infty} u_i = L^{-1} \left[g - R \sum_{i=0}^{\infty} u_i - \sum_{i=0}^{\infty} A_i \right]. \quad (3.7)$$

On choisit u_i ; ($i = 1, 2, \dots, n$), comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = f + L^{-1}g, \\ u_1 = -L^{-1}Ru_0 - L^{-1}A_0, \\ u_2 = -L^{-1}Ru_1 - L^{-1}A_1, \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ u_n = -L^{-1}Ru_{n-1} - L^{-1}A_{n-1}. \end{array} \right. \quad (3.8)$$

Pour calculer les polynômes d'Adomian, on a besoin du lemme suivant :

Lemme 3.1 [2]

Les polynômes d'Adomian, pour $N = Nu$, se déterminent par la formule

$$A_i = \frac{1}{i!} \frac{d^i}{d\lambda^i} N \left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k u_k \right)_{\lambda=0}; i = 0, 1, \dots \quad (3.9)$$

Remarque 3.1 Généralement, la convergence de la méthode ADM est très rapide. Pour plus de détails, on se réfère à [11, 12, 4, 13, 15].

3.1 Quelques applications :

3.1.1 Solutions analytiques approchées des équations couplées de Lotka-Volterra avec dérivées fractionnaires :

En introduisant la dérivée fractionnaire au sens de Caputo, nous appliquons la méthode de décomposition d'Adomian pour les équations spatio-temporelles couplées de Lotka-Volterra avec dérivées fractionnaires. Comme résultat, des solutions numériques sont obtenues sous forme de séries rapidement convergentes avec des termes facilement calculables. Les comportements des solutions d'Adomian sont représentés graphiquement pour certains exemples. On introduit la dérivée fractionnaire de Caputo et on applique l'ADM pour dériver des solutions numériques des équations spatio-temporelles couplées de Lotka-Volterra avec dérivées fractionnaires :

$$\begin{cases} D_t^\alpha u = (D_x^\beta u)^2 + uu_{xx} + b_1 u^2 + a_1 u + c_1 v + h_1 \\ D_t^\alpha v = (D_x^\beta v)^2 + vv_{xx} + b_2 v^2 + a_2 v + c_2 u + h_2, \end{cases} \quad (3.10)$$

où $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, h_1, h_2$ sont des constantes arbitraires telles que

$$b_1 b_2 \neq 0 \text{ et } c_1 c_2 \neq 0.$$

Quand $\alpha = \beta = 1$, l'équation fractionnaire se ramène aux équations couplées de Lotka-Volterra :

$$\begin{cases} u_t = (uu_x)_x + u(a_1 + b_1 u) + c_1 v + h_1 \\ v_t = (vv_x)_x + v(a_2 + b_2 v) + c_2 u + h_2. \end{cases} \quad (3.11)$$

3.1.2 Etude Adomienne des équations couplées LVDF :

Considérons le système d'équations spatio-temporelles couplées avec dérivées fractionnaires Eq. (3.10).

Prenons la condition initiale :

$$\begin{cases} u(x, 0) = f(x) \\ v(x, 0) = g(x). \end{cases} \quad (3.12)$$

Appliquant l'opérateur J^α , l'inverse de D^α dans (3.10) et utilisant la condition initiale (3.12), on obtient :

$$\begin{cases} u(x, t) = f(x) + J^\alpha (P_1(u(x, t)) + J^\alpha (P_2(u(x, t)))) + b_1 J^\alpha (P_3(u(x, t))) \\ \quad + a_1 J^\alpha (u) + c_1 J^\alpha (v) + J^\alpha (h_1) \\ v(x, t) = g(x) + J^\alpha (Q_1(u(x, t)) + J^\alpha (Q_2(u(x, t)))) + b_1 J^\alpha (Q_3(u(x, t))) \\ \quad + a_2 J^\alpha (v) + c_2 J^\alpha (u) + J^\alpha (h_2), \end{cases} \quad (3.13)$$

où $P_1(u(x, t)) = (D_x^\beta u)^2$; $P_2(u(x, t)) = uu_{xx}$; $P_3(u(x, t)) = u^2$;

$Q_1(v(x, t)) = (D_x^\beta v)^2$; $Q_2(v(x, t)) = vv_{xx}$; $Q_3(v(x, t)) = v^2$.

La solution de l'équation (3.10) est représentée par :

$$\begin{cases} u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t), \\ v(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x, t). \end{cases} \quad (3.14)$$

Les opérateurs non-linéaires $P_1(u)$; $P_2(u)$; $P_3(u)$; $Q_1(v)$; $Q_2(v)$ et $Q_3(v)$

sont donnés par :

$$\begin{aligned} P_1(u) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n; & Q_1(v) &= \sum_{n=0}^{\infty} D_n, \\ P_2(u) &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n; & Q_2(v) &= \sum_{n=0}^{\infty} E_n, \\ P_3(u) &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n; & Q_3(v) &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n, \end{aligned} \quad (3.15)$$

où A_n, B_n, C_n, D_n, E_n et F_n sont ce qu'on a appelé les polynômes d'Adomian et ont la forme :

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[P_1 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k u_k \right) \right]_{\lambda=0} = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[\left(D_x^\beta \left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k u_k \right) \right)^2 \right]_{\lambda=0}, \\
B_n &= \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[P_2 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k u_k \right) \right]_{\lambda=0} = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[\left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k u_k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k u_{kxx} \right) \right]_{\lambda=0}, \\
C_n &= \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[P_3 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k u_k \right) \right]_{\lambda=0} = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[\left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k u_k \right)^2 \right]_{\lambda=0}, \\
D_n &= \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[Q_1 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k v_k \right) \right]_{\lambda=0} = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[\left(D_x^\beta \left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k v_k \right) \right)^2 \right]_{\lambda=0}, \\
E_n &= \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[Q_2 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k v_k \right) \right]_{\lambda=0} = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[\left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k v_k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k v_{kxx} \right) \right]_{\lambda=0}, \\
F_n &= \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[Q_3 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k v_k \right) \right]_{\lambda=0} = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[\left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k v_k \right)^2 \right]_{\lambda=0}.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Nous donnons les quatre premiers termes de ces polynômes :

$$\begin{aligned}
A_0 &= (D_x^\beta u_0)^2 \\
A_1 &= 2 (D_x^\beta u_0) (D_x^\beta u_1) \\
A_2 &= 2 (D_x^\beta u_0) (D_x^\beta u_2) + (D_x^\beta u_1)^2 \\
A_3 &= (D_x^\beta u_0) (D_x^\beta u_3) + (D_x^\beta u_1) (D_x^\beta u_2).
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Les quatre premières composantes de B_n sont :

$$\begin{aligned}
B_0 &= u_0 u_{0xx} \\
B_1 &= u_0 u_{1xx} + u_1 u_{0xx} \\
B_2 &= u_0 u_{2xx} + u_1 u_{1xx} + u_2 u_{0xx} \\
B_3 &= u_0 u_{3xx} + u_1 u_{2xx} + u_2 u_{1xx} + u_3 u_{0xx}.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Les quatre premiers termes de C_n sont :

$$\begin{aligned}
 C_0 &= (u_0)^2 \\
 C_1 &= 2u_0u_1 \\
 C_2 &= 2u_0u_2 + (u_1)^2 \\
 C_3 &= u_0u_3 + u_1u_2.
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Les quatre premières parties composantes de D_n sont :

$$\begin{aligned}
 D_0 &= (D_x^\beta v_0)^2 \\
 D_1 &= 2(D_x^\beta v_0)(D_x^\beta v_1) \\
 D_2 &= 2(D_x^\beta v_0)(D_x^\beta v_2) + (D_x^\beta v_1)^2 \\
 D_3 &= (D_x^\beta v_0)(D_x^\beta v_3) + (D_x^\beta v_1)(D_x^\beta v_2).
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Et celles de E_n et F_n sont données par :

$$\begin{aligned}
 E_0 &= v_0v_{0xx} \\
 E_1 &= v_0v_{1xx} + v_1v_{0xx} \\
 E_2 &= v_0v_{2xx} + v_1v_{1xx} + v_2v_{0xx} \\
 E_3 &= v_0v_{3xx} + v_1v_{2xx} + v_2v_{1xx} + v_3v_{0xx},
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

et

$$\begin{aligned}
 F_0 &= (v_0)^2 \\
 F_1 &= 2v_0v_1 \\
 F_2 &= 2v_2v_0 + (v_1)^2 \\
 F_3 &= v_0v_3 + v_1v_2.
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

En substituant les séries de décomposition (3.14) et (3.15) dans l'équation (3.10), on obtient :

$$\begin{aligned}
 u_0(x, t) &= f(x), \\
 v_0(x, t) &= g(x), \\
 u_{n+1}(x, t) &= J^\alpha(A_n) + J^\alpha(B_n) + b_1 J^\alpha(C_n) + a_1 J^\alpha(u_n) + c_1 J^\alpha(v_n) + J^\alpha(h_1), \\
 v_{n+1}(x, t) &= J^\alpha(E_n) + J^\alpha(F_n) + b_2 J^\alpha(G_n) + a_2 J^\alpha(v_n) + c_2 J^\alpha(u_n) + J^\alpha(h_2).
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Remarque 3.2 *La méthode de décomposition d'Adomian converge en général très vite. Des détails sur sa*

convergence et sa vitesse de convergence se trouvent dans [11.12.4.13.15]. Ici en se ramenant aux étapes au dessus, on dérivera les solutions numériques pour les

équations couplées (3.10) en détails.

3.1.3 Solutions numériques des équations couplées LVDF temporelles :

Considérons la forme suivante des équations fractionnaires temporelles :

$$\begin{cases} D_t^\alpha u = (u_x)^2 + uu_{xx} + b_1 u^2 + a_1 u + c_1 v + h_1 & ; 0 < \alpha \leq 1 \\ D_t^\alpha v = (v_x)^2 + vv_{xx} + b_2 v^2 + a_2 v + c_2 u + h_2 & ; 0 < \alpha \leq 1, \end{cases} \tag{3.24}$$

avec les conditions initiales

$$\begin{cases} u(x, 0) = f(x) = \frac{2}{t_0} - 6c_1 + \left(\frac{2}{t_0} - 6c_1 + \frac{2c_1}{b} \right) \cos \left(\sqrt{\frac{b}{2}} x - \beta_0 \right) \\ v(x, 0) = g(x) = \frac{2}{t_0} - 6c_1 + \frac{4c_1}{b} + \frac{|c_1|}{c_1} \left(\frac{2}{t_0} - 6c_1 + \frac{2c_1}{b} \right) \sin \left(\sqrt{\frac{b}{2}} x - \beta_0 \right) \end{cases} \tag{3.25}$$

où $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, h_1, h_2, \beta_0$ et t_0 sont arbitrairement constants tels que $b = b_1 = b_2 > 0$, $a_2 = a_1 - 6c_1$, $c_2 = -c_1$.

La solution exacte du système (3.24) pour le cas spécial $\alpha = 1$ est :

$$\begin{cases} u(x, t) = \varphi_0(t) \pm \left[\varphi_0(t) + \frac{2c_1}{b} \right] \cos \left[\sqrt{\frac{b}{2}} x \mp |c_1| t - \beta_0 \right] \\ v(x, t) = \varphi_0(t) + \frac{4c_1}{b} \pm \frac{|c_1|}{c_1} \left[\varphi_0(t) + \frac{2c_1}{b} \right] \sin \left[\sqrt{\frac{b}{2}} x \mp |c_1| t - \beta_0 \right], \end{cases} \quad (3.26)$$

$$\text{où } \varphi_0(t) = \frac{1}{3b} \begin{cases} \frac{2}{t_0-t} - 6c_1 & ; a_1 = 3c_1 \\ |3c_1 - a_1| \tanh \left[\frac{|3c_1 - a_1|}{2} (t_0 - t) - a_1 - 3c_1 \right] & ; a_1 \neq 3c_1 \end{cases}$$

$a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, h_1, h_2, \beta_0$ et t_0 sont des constantes arbitraires telles que $b = b_1 = b_2 > 0$; $a_2 = a_1 - 6c_1$; $c_2 = -c_1$;

$$h_1 = \frac{(2c_1 a_1 - 6c_1^2)}{b} \quad \text{et} \quad h_2 = h_1 + \frac{4c_1}{b} (3c_1 - a_1).$$

Afin d'obtenir une solution numérique des équations (3.24), en remplaçant les conditions initiales (3.25) et en utilisant les polynômes d'Adomian (3.6) -

(2.23) dans l'expression (2.24) nous pouvons calculer les résultats. Pour simplifier,

nous donnons seulement les quelques premiers termes des séries :

$$\begin{aligned} u_0 &= f(x), \\ v_0 &= g(x), \\ u_1 &= J^\alpha(A_0) + J^\alpha(B_0) + b_1 J^\alpha(C_0) + a_1 J^\alpha(u_0) + c_1 J^\alpha(v_0) + J^\alpha(h_1) \\ &= J^\alpha[(u_{0x})^2] + J^\alpha(u_0 u_{0xx}) + b_1 J^\alpha[(u_0)^2] + a_1 J^\alpha(u_0) + c_1 J^\alpha(v_0) + J^\alpha(h_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_1 &= J^\alpha(D_0) + J^\alpha(E_0) + b_2 J^\alpha(F_0) + a_2 J^\alpha(v_0) + c_2 J^\alpha(u_0) + J^\alpha(h_2) \\ &= J^\alpha[(v_{0x})^2] + J^\alpha(v_0 v_{0xx}) + b_2 J^\alpha[(v_0)^2] + a_2 J^\alpha(v_0) + c_2 J^\alpha(u_0) + J^\alpha(h_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2 &= J^\alpha(A_1) + J^\alpha(B_1) + b_1 J^\alpha(C_1) + a_1 J^\alpha(u_1) + c_1 J^\alpha(v_1) + J^\alpha(h_1) \\ &= J^\alpha(2u_{0x}u_{1x}) + J^\alpha(u_0 u_{1xx} + u_1 u_{0xx}) + b_1 J^\alpha(2u_0 u_1) + a_1 J^\alpha(u_1) + c_1 J^\alpha(v_1) + J^\alpha(h_1), \end{aligned}$$

$$v_2 = J^\alpha(D_1) + J^\alpha(E_1) + b_2 J^\alpha(F_1) + a_2 J^\alpha(v_1) + c_2 J^\alpha(u_1) + J^\alpha(h_2)$$

$$= J^\alpha (2v_0v_{1xx}) + J^\alpha (v_0v_{1xx} + v_1v_{0xx}) + b_2J^\alpha (2v_0v_1) + a_2J^\alpha (v_1) + c_2J^\alpha (u_1) + J^\alpha (h_2),$$

$$\begin{aligned} u_3 &= J^\alpha (A_2) + J^\alpha (B_2) + J^\alpha (C_2) + a_1J^\alpha (u_2) + b_1J^\alpha (v_2) + J^\alpha (h_1) \\ &= J^\alpha [2u_0x u_{2x} + (u_{1x})^2] + J^\alpha (u_0u_{2xx} + u_1u_{1xx} + u_2u_{0xx}) + b_1J^\alpha [2u_0u_2 + (u_1)^2] + a_1J^\alpha (u_2) + \\ &c_1J^\alpha (v_2) + J^\alpha (h_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_3 &= J^\alpha (D_2) + J^\alpha (E_2) + b_2J^\alpha (F_2) + a_2J^\alpha (v_2) + c_2J^\alpha (u_2) + J^\alpha (h_2) \\ &= J^\alpha [2v_0x v_{2x} (v_{1x})^2] + J^\alpha (v_0v_{2xx} + v_1v_{1xx} + v_2v_{0xx}) + b_2J^\alpha [2v_0v_2 + (v_1)^2] + a_2J^\alpha (v_2) + \\ &J^\alpha (h_2), \\ &\text{soient} \end{aligned}$$

$$u_0 = f(x),$$

$$v_0 = g(x),$$

$$u_1 = f_1 \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)},$$

$$v_1 = g_1 \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)},$$

$$u_2 = f_2 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)},$$

$$v_2 = g_2 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)},$$

$$u_3 = f_3 \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)},$$

$$v_3 = g_3 \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)},$$

(3.25)

où

$$f_1 = f_x^2 + f f_{xx} + b_1 f^2 + a_1 f + c_1 g + h_1,$$

$$g_1 = g_x^2 + g g_{xx} + b_2 g^2 + a_2 g + c_2 g + h_2,$$

$$f_2 = 2f_x f_{1x} + f f_{1xx} + f_1 f_{xx} + 2b_1 f f_1 + a_1 f_1 + c_1 g_1 + h_1,$$

(3.26)

$$g_2 = 2g_x g_{1x} + g g_{1xx} + g_1 g_{xx} + 2b_2 g g_1 + a_2 g_1 + h_2,$$

$$f_3 = 2f_x f_{2x} + f_{1x}^2 + f f_{2xx} + f_1 f_{1xx} + f_2 f_{xx} + b_1 (2f f_2 + f_1^2) + a_1 f_2 + c_1 g_2 + h,$$

$$g_3 = 2g_x g_{2x} + g_{1x}^2 + g g_{2xx} + g_1 g_{1xx} + g_2 g_{xx} + b_2 (2g g_2 + g_1^2) + a_2 g_2 + c_2 f_2 + h_2.$$

Ensuite nous pouvons obtenir la solution numérique des équations (3.24) sous la forme :

$$\begin{aligned} u(x,t) &= f(x) + f_1 \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + f_2 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + f_3 \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} + \dots \\ v(x,t) &= g(t) + g_1 \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + g_2 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + g_3 \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} + \dots \end{aligned} \quad (3.27)$$

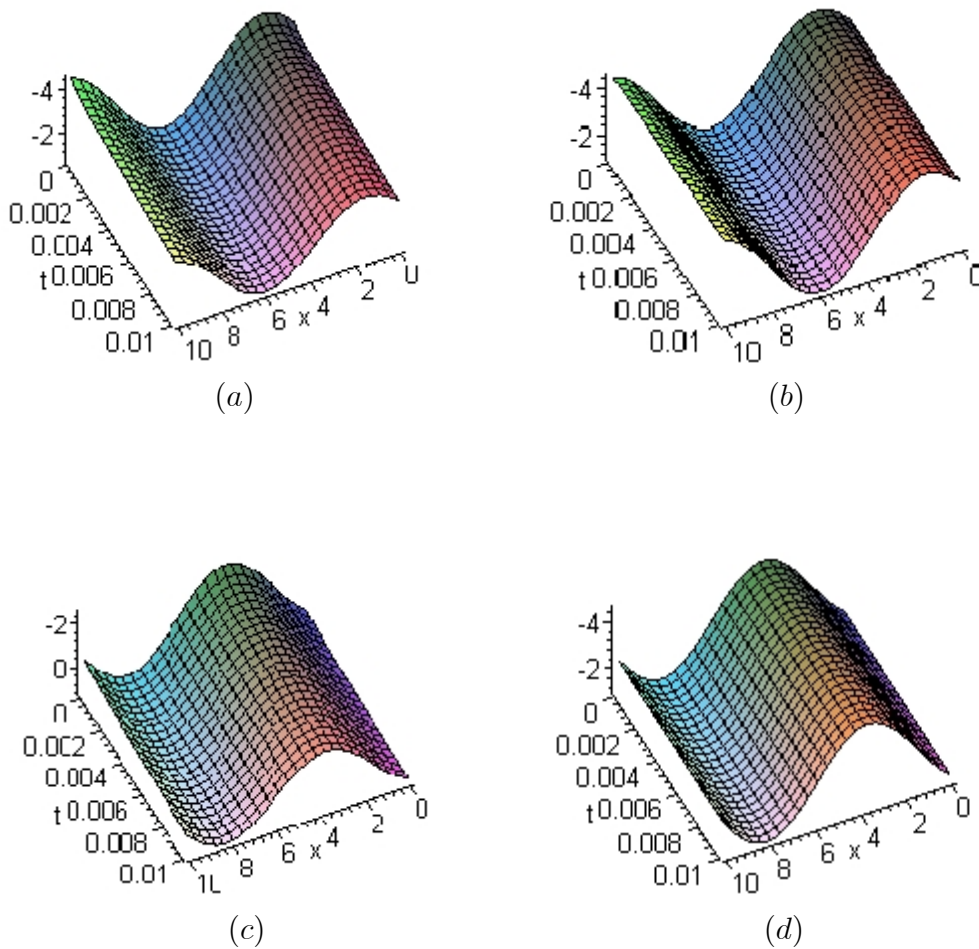


Figure 1 : (a) : solution numérique $u(x,t)$ - (3.18). (b), solution exacte $u(x,t)$ - (3.15) de Syst.(3.13). (c) : solution numérique $v(x,t)$ - (3.18). (d), solution exacte $v(x,t)$ - (3.15) de Eq.(3.13).

$$a_1 = 3/2; b_1 = 1; c_1 = 1/2; h_1 = 1; a_2 = -3/2; b_2 = 1; c_2 = -1/2; h_2 = 1; \beta_0 = 1; t_0 = 10; \alpha = 1/2;$$

3.1.4 Solutions numériques des équations couplées LVDF spaciales : **■**

Maintenant, on considère :

$$\begin{cases} u_t = (D_x^\beta u)^2 uu_{xx} + b_1 u^2 + a_1 u + c_1 v + h_1 \\ v_t = (D_x^\beta v)^2 + vv_{xx} + b_2 v^2 + a_2 v + c_2 u + h_2, \end{cases} \quad (3.28)$$

avec les conditions initiales :

$$\begin{cases} u(x, 0) = f(x) = x^2 \\ v(x, 0) = g(t) = x^3. \end{cases} \quad (3.29)$$

Dans le but de calculer la solution numérique de (3.28), substituant

(3.14), (3.15) et utilisant les conditions initiales (3.27) dans l'expression (3.23),

nous obtenons la solution d'Adomian.

Nous donnons les quelques premiers termes des séries :

$$\begin{aligned}
u_0 &= f(t), \\
v_0 &= g(t), \\
u_1 &= J(A_0) + J(B_0) + b_1 J(C_0) + c_1 J(v_0) + a_1 J(u_0) + J(h_1) \\
&= J[(D_x^\beta u_0)^2] + J(u_0 u_{0xx}) + b_1 J[(u_0)^2] + c_1 J(v_0) + a_1 J(u_0) + J(h_1) \\
&= [f_1^2 x^{4-2\beta} + b_1 x^4 + c_1 x^3 + (2+a)x^2 + h_1] t, \\
v_1 &= J(D_0) + J(E_0) + b_2 J(F_0) + c_2 J(u_0) + a_2 J(v_0) + J(h_2) \\
&= J[(D_x^\beta v_0)^2] + J(v_0 v_{xx}) + b_2 J[(v_0)^2] + c_2 J(u_0) + a_2 J(v_0) + J(h_2) \\
&= (g_1^2 x^{6-2\beta} + b_2 x^6 + 6x^4 + a_2 x^3 + c_2 x^2 + h_2) \\
u_2 &= J(A_1) + J(B_1) + b_1 J(C_1) + c_1 J(v_1) + a_1 J(u_1) + J(h_1) \\
&= J[2(D_x^\beta u_0)(D_x^\beta u_1)] + J(u_0 u_{1xx} + u_1 u_{0xx}) + b_1 J(2u_0 u_1) + c_1 J(v_1) + a_1 J(u_1) + J(h_1) \\
&= (f_2 x^{8-5\beta} + f_3 x^{8-3\beta} + f_4 x^{7-3\beta} + f_5 x^{6-3\beta} + f_6 x^{4-3\beta} + f_7 x^{6-2\beta} + f_8 x^{4-2\beta} \\
&\quad + f_9 x^{2-2\beta} + f_{10} x^6 + f_{11} x^5 + f_{12} x^4 + f_{13} x^3 + f_{14} x^2 + f_{15} x + f_{16}) \frac{t^2}{2}, \\
v_2 &= J(D_1) + J(E_1) + b_2 J(F_1) + c_2 J(u_1) + a_2 J(v_1) + J(h_2) \\
&= J[2(D_x^\beta v_0)(D_x^\beta v_1)] + J(v_0 v_{1xx} + v_1 v_{0xx}) + b_2 J(2v_0 v_1) + c_2 J(u_1) + a_2 J(v_1) + J(h_2) \\
&= (g_2 x^{9-4\beta} + g_3 x^{9-2\beta} + g_4 x^{8-2\beta} + g_5 x^{7-2\beta} + g_6 x^{6-2\beta} + g_7 x^{3-2\beta} + g_8 x^{4-2\beta} + g_9 x^7 \\
&\quad + g_{10} x^9 + g_{11} x^5 + g_{12} x^6 + g_{13} x^4 + g_{14} x^3 + g_{15} x^2 + g_{16} x + g_{17}) \frac{t^2}{2},
\end{aligned} \tag{3.30}$$

où

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^2, f_1 = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3-\beta)}, f_2 = 2f_1^2 \frac{\Gamma(5-2\beta)}{\Gamma(5-3\beta)}, \\
f_3 &= 2b_1 f_1^2 \frac{\Gamma(5)}{\Gamma(5-\beta)}, f_4 = 2c_1 f_1^2 \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(4-\beta)}, f_5 = 2(2+a_1)f_1^3, \\
f_6 &= (2b_1 f_1^2 + c_1 g_1^2), f_7 = ((4-2\beta)(3-2\beta)f_1 + a_1 f_1^2), \\
f_8 &= [2(4-2\beta)(3-2\beta)f_1], f_9 = (2b_1^2 + b_2 c_1), f_{10} = 2b_1 c_1, \\
f_{11} &= (12b_1 + 4b_1 + 2b_1 a_1 + 6c_1 + 2b_1), \\
f_{12} &= (6c_1 + a_2 c_1 + a_1 c_1), f_{13} = (4a_1 + 24b_1 + 2b_1 h_1 + c_1^2 + a_1^2 + 4), \\
f_{14} &= 12c_1, f_{15} = 4a_1 + c_1 h_2 + a_1 h_1 + 8, \tag{3.31} \\
g(x) &= x^3, g_1 = \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(4-\beta)}, g_2 = 2g_1 \frac{\Gamma(7-2\beta)}{\Gamma(7-3\beta)}, g_3 = \left[2b_2 g_1 \frac{\Gamma(6)}{\Gamma(6-\beta)} + b_2 g_1^2 \right], \\
g_4 &= \left[12g_1 \frac{\Gamma(5)}{\Gamma(5-\beta)} \right], g_5 = [2a_2 g_1^2 + 6g_1^2 + (6-2\beta)(5-2\beta)g_1^2], \\
g_6 &= (2g_2 c_2 f_1 + a_2 g_2^2), g_7 = c_2 f_1^2, g_8 = 48b_2, g_9 = b_2^2, \\
g_{10} &= (108 + 2c_2 b_2), g_{11} = 3a_2 b_2, g_{12} = (18a_2 + c_2 b_2), \\
g_{13} &= (8c_2 + 2h_2 b_2 + c_1 c_2 + a_2^2), g_{14} = (2c_2 + 2c_2 a_1), \\
g_{15} &= 6h_2, g_{16} = h_1 c_2 + a_2 h_2.
\end{aligned}$$

Ensuite nous obtenons une solution numérique des équations fractionnaires spatiales (3.25) sous forme de séries :

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= f(x) + [f_1^2 x^{4-2\beta} b_1 x^4 + c_1 x^3 + (2+a_1)x^2 + h_1] t + \\
&(f_2 x^{8-5\beta} + f_3 x^{8-3\beta} + f_4 x^{7-3\beta} + f_5 x^{6-3\beta} + f_6 x^{6-2\beta} + f_7 x^{4-2\beta} + f_8 x^{2-2\beta} \\
&+ f_9 x^6 + f_{10} x^5 + f_{11} x^4 + f_{12} x^3 + f_{13} x^2 + f_{14} x + f_{15}) \frac{t^2}{2} + \dots \\
v(x, t) &= g(x) + [g_1^2 x^{6-2\beta} + b_2 x^6 + 6x^4 + a_2 x^3 + c_2 x^2 + h_2 t] t + \\
&(g_2 x^{9-4\beta} + g_3 x^{9-2\beta} + g_4 x^{8-2\beta} + g_5 x^{7-2\beta} + g_6 x^{6-2\beta} + g_7 x^{4-2\beta} + g_8 x^7 \\
&+ g_9 x^9 + g_{10} x^5 + g_{11} x^6 + g_{12} x^4 + g_{13} x^3 + g_{14} x^2 + g_{15} x + g_{16}) \frac{t^2}{2}. \tag{3.32}
\end{aligned}$$

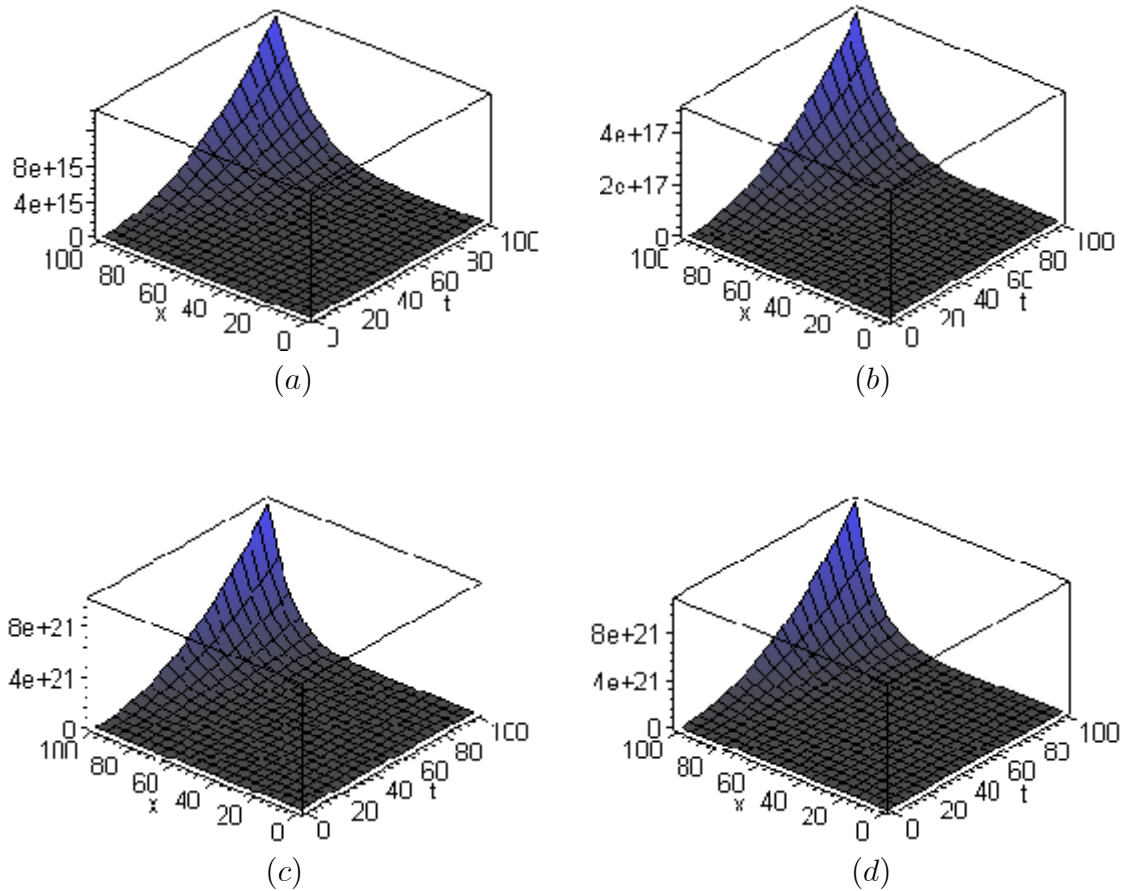


Figure 2 : (a) et (c) solution obtenue avec la méthode Adomian de $u(x,t)$ et $v(x,t)$ pour $\beta = 1$. (b) et (d), solution obtenue avec la méthode Adomian de $u(x,t)$ et $v(x,t)$ pour $\beta = 1/2$.

3.1.5 Equation de Sharma avec dérivées fractionnaires :

Soit à résoudre l'équation en dérivées fractionnaires spacio-temporelles :

$$D_t^\alpha u + 3a(D_x^\alpha)^2 + 3au^2 D_x^\beta u + 3a uu_{xx} + au_{xxx} = 0, t > 0, 0 < \alpha \leq 1, 0 < \beta. \quad (3.33)$$

Quand $\alpha = \beta = 1$, l'équation fractionnaire se ramène à la forme [50]

$$u_t + 3au_x^2 + 3au^2 u_x + 3a uu_{xx} + au_{xxx} = 0. \quad (3.34)$$

3.1.6 Solutions Adomiennes de l'équation ShDF :

Considérons l'équation spacio-temporelle en dérivées fractionnaires (3.33). Pour trouver des solutions numériques de cette équation par l'usage de la méthode de décomposition d'Adomian, réécrivons-la sous la forme d'opérateur :

$$D_t^\alpha = -3a (D_x^\beta u)^2 - 3au^2 D_x^\beta u - 3a uu_{xx} - au_{xxx}, 0 < \alpha \leq 1, 0 < \beta \leq 1, \quad (3.35)$$

où les opérateurs D_t^α et D_x^β représentent la dérivée fractionnaire.

Prenons comme condition initiale :

$$u(x, 0) = f(x). \quad (3.36)$$

En appliquant l'opérateur J^α , l'inverse de D^β sur l'équation (3.35)

et en utilisant la condition initiale (3.36), on obtient :

$$u(x, t) = f(x) - 3aJ^\alpha Q_1(u(x, t)) - 3aJ^\alpha Q_2(u(x, t)) - 3aJ^\alpha Q_3(u(x, t)) - aJ^\alpha Q_4(u(x, t)), \quad (3.37)$$

où :

$$Q_1(u(x, t)) = u^2 D_x^\beta u,$$

$$Q_2(u(x, t)) = uu_{xx},$$

$$Q_3(u(x, t)) = (D_x^\beta u)^2,$$

$$Q_4(u(x, t)) = u_{xxx}.$$

La solution de l'équation (3.35) est représentée par :

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t). \quad (3.38)$$

Les opérateurs non-linéaires $Q_1(u)$, $Q_2(u)$ et $Q_3(u)$ sont décomposés de la sorte :

$$Q_1(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n; \quad Q_2(u) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n; \quad Q_3(u) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n, \quad (3.39)$$

où A_n , B_n et C_n sont les polynômes d'Adomian et s'écrivent sous la forme :

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} [Q_1 (\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k u_k)]_{\lambda=0} = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k u_k)^2 D_x^\beta (\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k u_k) \right]_{\lambda=0}, \\
B_n &= \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} [Q_2 (\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k u_k)]_{\lambda=0} = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k u_k) (\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k u_{kxx}) \right]_{\lambda=0}, \\
C_n &= \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} [Q_3 (\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k u_k)]_{\lambda=0} = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[(D_x^\beta (\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k u_k))^2 \right]_{\lambda=0}.
\end{aligned} \tag{340}$$

Nous donnons les quatres premiers termes de ces polynômes :

$$\begin{aligned}
A_0 &= u_0 D_x^\beta u_0, \\
A_1 &= 2u_0 u_1 D_x^\beta u_0 + u_0^2 D_x^\beta u_1, \\
A_2 &= u_1^2 D_x^\beta u_0 + 2u_0 u_2 D_x^\beta u_0 + 2u_0 u_1 D_x^\beta u_1 + u_0^2 D_x^\beta u_2, \\
A_3 &= u_1^2 D_x^\beta u_1 + 2u_1 u_2 D_x^\beta u_0 + 2u_0 u_1 D_x^\beta u_1 + 2u_0 u_1 D_x^\beta u_2 + 2u_0 u_3 D_x^\beta u_0 + u_0^2 D_x^\beta u_3.
\end{aligned} \tag{341}$$

Les quatre premiers termes de B_n sont

$$\begin{aligned}
B_0 &= u_0 u_{0xx}, \\
B_1 &= u_0 u_{1xx} + u_1 u_{0xx}, \\
B_2 &= u_2 u_{0xx} + u_0 u_{2xx} + u_1 u_{1xx}, \\
B_3 &= u_3 u_{0xx} + u_0 u_{3xx} + u_2 u_{1xx} + u_1 u_{2xx}.
\end{aligned} \tag{342}$$

Ceux de C_n sont donnés par :

$$\begin{aligned}
C_0 &= (D_x^\beta u_0)^2, \\
C_1 &= 2D_x^\beta u_0 D_x^\beta u_1, \\
C_2 &= (D_x^\beta u_1)^2 + 2D_x^\beta u_0 D_x^\beta u_2, \\
C_3 &= 2D_x^\beta u_1 D_x^\beta u_2 + 2D_x^\beta u_0 D_x^\beta u_3.
\end{aligned} \tag{343}$$

En substituant les séries de décomposition (3.38) et (3.39) dans l'équation (3.37), on obtient la formule récurrente suivante :

$$\begin{aligned}
u_0(x, t) &= f(x) \\
u_{n+1}(x, t) &= -3a J^\alpha (A_n) - 3a J^\alpha (B_n) - 3a J^\alpha (C_n) - a J^\alpha (u_{nxxx}).
\end{aligned} \tag{344}$$

3.1.7 Solutions numériques de l'équation ShDF temporelle :

Considérons la forme suivante de l'équation temporelle fractionnaire :

$$D_t^\alpha u = -3au^2u_x - 3au_x^2 - 3auu_{xx} - au_{xxx}, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (3.45)$$

avec comme condition initiale :

$$u(x, 0) = f(x) = \frac{2k(w + \tanh(kx))}{1 + w \tanh(kx)}, \quad (3.46)$$

où k et w sont des constantes réelles arbitraires.

La solution exacte de (3.45) pour le cas particulier : $\alpha = 1$, est :

$$u(x, t) = \frac{2k(w + \tanh(k(x - 4ak^2t)))}{1 + w \tanh(k(x - 4ak^2t))}. \quad (3.47)$$

Pour obtenir une solution numérique de l'équation (3.45), en substituant la condition initiale (3.46) et en utilisant les polynômes d'Adomian (3.41)-(3.43) dans l'expression (3.44), on peut calculer les résultats. Pour faire dans la simplicité, nous donnons

uniquement les quelques premiers termes des séries :

$$\begin{aligned} u_0 &= f(x), \\ u_1 &= -3aJ^\alpha(A_0) - 3aJ^\alpha(B_0) - 3aJ^\alpha(C_0) - aJ^\alpha(u_{0xxx}) \\ &= -3aJ^\alpha(u_0^2u_{0x}) - 3aJ^\alpha(u_0u_{0xx}) - 3aJ^\alpha((u_{0x})^2) - aJ^\alpha(u_{0xxx}), \\ u_2 &= -3aJ^\alpha(A_1) - 3aJ^\alpha(B_1) - 3aJ^\alpha(C_1) - aJ^\alpha(u_{1xxx}) \\ &= -3aJ^\alpha(2u_0u_1u_{0x} + u_0^2u_{1x}) - 3aJ^\alpha(u_0u_{1xx} + u_1u_{0xx}) - 3aJ^\alpha(2u_{0x}u_{1x}) - aJ^\alpha(u_{1xxx}), \end{aligned}$$

A la fin du calcul, on obtient :

$$\begin{aligned} u_0 &= f(x), \\ u_1 &= af_1 \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}, \\ u_2 &= a^2 f_2 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)}, \end{aligned} \quad (3.48)$$

$$\text{où } f(x) = \frac{2k(w + \tanh(kx))}{1 + w \tanh(kx)},$$

$$f_1(x) = -3ff_x - 3ff_{xx} - 3f_x^2 - f_{xxx},$$

$$f_2(x) = -3(2ff_x f_1 + f^2 f_{1x}) - 3(ff_{1xx} + f_1 f_{xx}) - 3(2f_x f_{1x}) - f_{1xxx}.$$

Ainsi, on peut avoir la solution numérique de l'équation temporelle

fractionnaire (3.45), sous forme de séries :

$$u(x, t) = f(x) + af_1(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + a^2 f_2(x) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \dots \quad (3.49)$$

3.1.8 Solutions numériques de l'équation ShDF spatiale :

Maintenant, on considère l'équation à dérivée fractionnaire spatiale :

$$u_t = -3a(D_x^\beta u)^2 - 3au^2 D_x^\beta u - 3a uu_{xx} - au_{xxx} = 0, 0 < \beta \leq 1, \quad (3.50)$$

avec la condition initiale :

$$u(x, 0) = f(x) = x^4. \quad (3.51)$$

Afin de calculer la solution numérique de l'équation (3.50), en substituant (3.39) et (3.40)

et en utilisant la condition initiale (3.51) dans l'expression (3.44), on obtient la solution d'Adomian.

Donnons les quelques premiers termes des séries :

$$\begin{aligned}
u_0 &= f(x), \\
u_1 &= -3aJ(A_0) - 3aJ(B_0) - 3aJ(C_0) - aJ(u_{0xxx}) \\
&= -3aJ(u_0^2 D_x^\beta u_0) - 3aJ(u_0 u_{0xx}) - 3aJ\left((D_x^\beta u_0)^2\right) - aJ(u_{0xxx}) \\
&= (f_1 x^{12-\beta} - 36ax^6 + f_2 x^{8-2\beta} - 24ax) t, \\
u_2 &= -3aJ(A_1) - 3aJ(B_1) - 3aJ(C_1) - aJ(u_{1xxx}) \\
&= -3aJ(2u_0 u_1 D_x^\beta u_0 + u_0^2 D_x^\beta u_1) - 3aJ(u_0 u_{1xx} + u_1 u_{0xx}) \\
&\quad - 3aJ(2D_x^\beta u_0 D_x^\beta u_1) - aJ(u_{1xxx}) \\
&= (f_3 x^{20-2\beta} + f_4 x^{17-2\beta} + f_5 x^{16-3\beta} + f_6 x^{15-\beta} + f_7 x^{14-\beta} \\
&\quad + f_8 x^{13-\beta} + f_9 x^{11-\beta} + f_{10} x^{11-2\beta} + f_{11} x^{10-2\beta} \\
&\quad + f_{12} x^{9-\beta} + f_{13} x^{9-3\beta} + f_{14} x^{7-2\beta} + f_{15} x^{5-2\beta} + 432a^2 x^9 \\
&\quad + 324a^2 x^8 + 288a^2 x^4 + 4320a^2 x^3) \frac{t^2}{2};
\end{aligned} \tag{3.52}$$

$$\begin{aligned}
\text{où } f(x) &= x^2, f_1 = -3a \frac{\Gamma(5)}{\Gamma(5-\beta)}, f_2 = -3a \left(\frac{\Gamma(5)}{\Gamma(5-\beta)} \right)^2 f_1, \\
f_3 &= -6a \frac{\Gamma(5)}{\Gamma(5-\beta)} f_1, f_4 = -3a(12-\beta)(11-\beta)(10-\beta) \frac{\Gamma(10-\beta)}{\Gamma(10-2\beta)}, \\
f_5 &= -6a \frac{\Gamma(5)}{\Gamma(5-\beta)} f_2, f_6 = -12a f_1, f_7 = -3a \left((12-\beta)(11-\beta) f_1 - 72a \frac{\Gamma(5)}{\Gamma(5-\beta)} \right), \\
f_8 &= -3a \left(f_2(8-2\beta)(7-2\beta)(6-2\beta) \frac{\Gamma(6-2\beta)}{\Gamma(6-3\beta)} + 2(12-\beta)(11-\beta)(10-\beta) \frac{\Gamma(5)}{\Gamma(5-\beta)} \frac{\Gamma(10-\beta)}{\Gamma(10-2\beta)} \right), \\
f_9 &= 12960a^2 \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(4-\beta)}, f_{10} = -12a f_2, f_{11} = -3a f_2(8-2\beta)(7-2\beta), \\
f_{12} &= -a \left(144a \frac{\Gamma(5)}{\Gamma(5-\beta)} + (12-\beta)(11-\beta)(10-\beta) f_1 \right), \\
f_{13} &= -6a f_2(8-2\beta)(7-2\beta)(6-2\beta) \frac{\Gamma(5)}{\Gamma(5-\beta)} \frac{\Gamma(10-2\beta)}{\Gamma(10-3\beta)}, \\
f_{14} &= 25920a \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(4-\beta)} \frac{\Gamma(5)}{\Gamma(5-\beta)}, f_{15} = -a f_2(8-2\beta)(7-2\beta)(6-2\beta).
\end{aligned}$$

Alors, on obtient une solution numérique de l'équation spatiale fractionnaire (3.50) sous la forme :

$$\begin{aligned}
u(x, t) = & f(x) + \\
& (f_1 x^{20-2\beta} - 36ax^6 + f_2 x^{8-2\beta} - 24ax) t \\
& + (f_3 x^{20-2\beta} + f_4 x^{17-2\beta} + f_5 x^{16-3\beta} + f_6 x^{15-\beta} + f_7 x^{14-\beta} + f_8 x^{13-3\beta} + f_9 x^{11-\beta} + f_{10} x^{11-2\beta} \\
& + f_{11} x^{10-2\beta} + f_{12} x^{9-\beta} + f_{13} x^{9-3\beta} + f_{14} x^{7-2\beta} + f_{15} x^{5-2\beta} \\
& + 432a^2 x^9 + 324a^2 x^8 + 288a^2 x^4 + 4320a^2 x^3) \frac{t^2}{2} + \dots
\end{aligned} \tag{3.53}$$

3.2 Conclusion

L'objectif essentiel recherché à travers ce travail est une contribution au calcul fractionnaire qu'on peut considérer comme atteint par l'élaboration de ce mémoire articulé en chapitres ; l'exposé au chapitre I de définitions, de propriétés ainsi que la démonstration de propositions se rapportant à l'intégrale fractionnaire, à la dérivée fractionnaire et à la dérivée au sens de Caputo, de même que la différence entre les deux dérivées, ce qui permettra une connaissance plus approfondie de ce sujet, à ce jour inexploité dans toute son étendue. Au chapitre II, l'intérêt suscité par les inégalités et leurs rôles dans les mathématiques pures et appliquées, ce qui nous a conduit à la fonctionnelle de Chebyshev avec poids, et on a donné quelques résultats liés aux intégrales fractionnaires comme la généralisation de l'intégrale de Hölder, celle de Cauchy-Schwartz et d'autres généralisations pour l'inégalité de Hermite-Hadamard. Et à la fin du chapitre

une généralisation importante d'un résultat de Dragomir est apportée. Enfin, par l'application de la méthode de décomposition d'Adomian dont nous développons d'abord la théorie, nous présentons des applications numériques sur des exemples d'équations différentielles fractionnaires de temps et d'espace ; à savoir les équations couplées de Lotka-Volterra, l'équation de Sharma et d'autres exemples. Ce travail pourrait servir comme support à ceux qui s'intéresseraient au thème du calcul fractionnaire. Toutefois, il n'est pas exhaustif, et pourrait donc ouvrir d'autres horizons pour un éventuel développement de ce domaine qui offre encore un vaste espace à explorer.

Bibliographie

- [1] K. Abbaoui, Y. Cherruault, Convergence of Adomian's method applied to differential equations. *Comput. Math. Appl.* 28(5) (1994), 103-109.
- [2] K. Abbaoui, Y. Cherruault, New ideas for proving convergence of decomposition method. *Comput. Math. Appl.* 29 (1995), 103-108.
- [3] G. Adomian, *Nonlinear Stochastic Systems : Theory and Applications to Physics*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1989.
- [4] G. Adomian, *Solving frontier problems of physics : The Decomposition Method*. Kluwer Academic Publishers, Boston, 1994.
- [5] A Babolian, A. Davari, Numerical implementation of Adomian decomposition method for linear Volterra integral equation of the second kind. *Appl. Math. Comput.* 165 (2005), 223-22
- [6] B. Belaidi, A. El Farissi, Z.Latreuch : Hadamard Type Inequalities for Twice Differentiable Functions. *RGMI*A, Vol 12, ISS.1 (2009)
- [7] S. Belarbi, Z. Dahmani : On Some New Fractional Integral Inequalities. *J.I.P.A.M.* Vol 10, N 3, (2009).
- [8] M. Biernacki : Sur une inégalité entre les intégrales dûes à Chebyshev, *Ann. Univ. Marie-Curie-SKLODOWSKA.Sect 1A5*(1951), 23-29
- [9] H. Burkill, L.Mirsky : Comments on Chebyshev's inequality, *Period.Math. Hungar* 6 (1975) 3-16
- [10] P.L. Chebyshev : Sur les expressions approximatives des intégrales définies par les autres prises entre les mêmes limites. *Proc.Math.Soc.Charkov* 2(1882) 93-98.
- [11] Y. Cherruault, Convergence of Adomian's method. *Kybernetes* 18 (1989), 31-38.
- [12] V. Daftardar-Gejji, H. Jafari, Adomian decomposition : a tool for solving a system of fractional differential equations. *J. Math. Anal. Appl.* 301 (2
- [13] Z. Dahmani, A. Anbar, Y. Khati Bouraoui : Analytic Approximate Solutions to the Coupled Lotka-Volterra Equations with Fractional Derivatives. *IJNS* 2009 0606
- [14] Z. Dahmani : On Some Fractional Integral Inequalities. *I.J.N.S.* (2010)
- [15] Z. Dahmani, M. M. Mesmoudi, R. Bebbouchi, The foam-drainage equation with time and space fractional derivative solved by the ADM method. *E. J. Qualitative Theory of Diff. Equ.*, No. 30. (2008).
- [16] S.S. Dragomir, C.E.M.Pearse : Selected Topic in Hermite-Hadamard Inequalities. *Monograph* : [://RGMI.A.Vu.Edu.au/monographs/Hermite_Hadamard.html](http://RGMI.A.Vu.Edu.au/monographs/Hermite_Hadamard.html), Victoria Univ, 2000.

-
- [17] A. El.Farissi, Z. Dahmani, Y.Khati Bouraoui : Hermite-Hadamard Like Inequalities via Fractional Integration. submitted to Ozaka Journal , 2009.
- [18] A. Florea, C.P. Niculescu : A Hermite-Hadamard Convex-Concave Symetric Functions.Bul.Soc.Sci.Math.Roum.50(98), N2(2007), 149-156.
- [19] I. Gavrea : On Chebyshev type inequalities involving functions whose derivatives belong to L_p spaces via isotonic functionnal.J.Inequal.Pure and APPL.Math.7(4)Art.121 (2006).
- [20] R. Gorenflo, F. Mainardi : Fractional Calculus Integral and Differential Equations of Fractional Order. Springer Verlag, Wien. (1997), 223-276
- [21] J. Hadamard : Etude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann.J.Math.Pures et Appl. 58, (1893), 171-215
- [22] Ch. Hermite : Sur deux limites d'une intégrale définie.Mathesis 3 (1883), 82.
- [23] S. Hilgenfeldt, S. A. Koehler, H. A. Stone, Dynamics of coarsening foams : accelerated and self-limiting drainage. Phys. Rev. Lett. 20 (2001), 4704-7407.
- [24] N. Himoun, K. Abbaoui, Y. Cherruault, New results of convergence of Adomian's method. Kybernetes 28(4-5) (1999), 423-429.
- [25] H. Jafari, V. Daftardar-Gejji, Solving a system of nonlinear fractional differential equations using Adomian decomposition. J. Comput. Appl. Math. 196 (2006), 644-651
- [26] D. Kaya :Int.J. Comput. Math. 75 (2000) 235
- [27] J.C. Kuang : Applied Inequalities. Shandong Sciences and Technology Press.(2004) (CHINESE).
- [28] R. A. Leonard, R. Lemlich, A study of interstitial liquid flow in foam. A.I.Ch.E.J. 11 (1965), 18-25
- [29] D. Lesnic, Appl. Math ; Lett. 15 (2002) 697.
- [30] Y. Lucko, R. Gorenflo, The initial value problem for some fractional differential equations with the Caputo derivative. Preprint Series A 08-98, Fachbereich Mathematik und Informatik, Freie Universitat Berlin, 1998.
- [31] Y. Lucko, H. M. Srivastava, The exact solutions of certain differential equations of fractional order by using operational calculus. Comput. Math. Appl. 29 (1995), 73-85
- [32] S. Marinkovic, P.Rajkovic, M.Stankovic : The Inequalities for some Types q -Integrals.Comput.Math.Appl.56 (2008), 2490-249
- [33] A.W. Marshall, I.Olkin : Inequalities : Theory of Majoration and Applicatios. Academic P.
- [34] D.S. Mitrinovic : Analytic Inequalities. Springer Verlag Berlin (1970)
- [35] C.P.Niculescu, L.E.Persson : Convex Functions and their Applications, a comtemporary Approach.CMS Books in Mathematics, Vol 23, SPRINGER, Verlag, New York (2006).
- [36] A.M. Ostrowski : On an Integral Inequality.Aequations Math. 4 (1970) ; 358-373.
- [37] I. Podlubny, Fractional Differential Equations. Academic Press, San Diego, 1999.
- [38] G. Samko, A.A. Kilbas, O.I. Marichev, Fractional Integral and Derivative : Theory and Applications. Gordon and Breach, Yverdon, 1993.

-
- [39] G. Verbist, D. Weuire, A.M. Kraynik, The foam drainage equation. *J. Phys. Condens. Matter* 8 (1996), 3715-3731.
- [40] Q. Wang, Numerical solutions for fractional KdV-Burgers equation by Adomian decomposition method. *Appl. Math. Comput.* 182 (2006), 1049-1055.
- [41] A.M. Wazwaz, A new approach to the nonlinear advection problem. *Appl. Math. Comput.* 72 (1995), 175-181.
- [42] A.M. Wazwaz, A new algorithm for calculating Adomian polynomials for nonlinear operators. *Appl. Math. Comput.* 111 (2000), 53-69.
- [43] A.M. Wazwaz, *Partial Differential Equations : Methods and Applications*. Balkema Publishers. The Netherlands, 2002.
- [44] A. M. Wazwaz, A. Georguis, An analytic study of Fisher's equations by using Adomian decomposition method. *Appl. Math. Comput.* 154 (2004), 609-620.
- [45] D. Weaire, S. Hutzler, *The Physics of Foams*, Oxford University Press, Oxford, 2000.
- [46] D. Weaire, S. Hutzler, S. Cox, M.D. Alonso, D. Drenckhan, The fluid dynamics of foams. *J. Phys. Condens. Matter* 15 (2003), S65-S73
- [47] B. J. West, M. Bologna, P. Grigolini, *Physics of Fractal Operators*. Springer, New York, 2003.
- [48] Zoubir Dahmani, Maamer Benbachir :Solutions of the Cahn-Hilliard Equation with Time and Space Fractional derivatives. *IJNS* (2009)
- [49] T.O. Sharma., S. Lina., Z. Hongking. :Rational Approximation Solution of the Fractional, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2008.
- [50] K. Diethelm, N.J.Ford, *Numer. Anal. Rep.* 378 (2003).
- [51] K. Diethelm, N.J.Ford, *Appl. Math. Comput.* 154 (2004) 621.