UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de fin d'étude
Pour l'obtention du diplôme de Licence en Mathématiques
Cycle LMD
Spécialité :AF
Thème :
Sur l'hyper exposant de converegence des zéros de $f^{(j)} - \varphi$

Présenté par :

$MEROUANI$ *Saliha*

Soutenu le . *13-06-2018*

Les membres de jury

Président	LATREUCHE Zinelâabidine	**U. MOSTAGANEM.**
Examinateur	BECHAOUI KHadija	**U. MOSTAGANEM.**
Encadreur	FATTOUCH Houari	**U. MOSTAGANEM.**

Dédicace

Je dédie ce travail de fin d'étude a toute ma famille, notamment les parents qui m'ont toujours conseilles et pensé a moi, et qui m'ante fait au bonne éducation.

Je dédie ce travail celle qui ma soutenu avec toute sa tendresse et son affection pour ma mère

je dédié aussi à tout mes amis : naima Bouksara et Naer houria et mes frères :Mohamed, Moloud,Mahedi,Habibe

Et toute la famille de département de mathématiques et ma promotion 2018

Remerciements

Je remercie tout d'abord notre dieu qui ma donne de la volonté et surtout de la patience pour réalise ce travail.

Je souhaite avant tout remercier mon encadreur de Mémoire Monsieur H.FETTOUCH maître à l'université de Mostaganem pour le temps qu'il a consacré à m'apporter les outils méthodologiques indispensables à la conduite de cette recherche. Son exigence m'a grandement stimulée.

L'enseignement de qualité dispensé par le Master a également su nourrir mes réfexions et a représenté une profonde satisfaction intellectuelle, merci donc aux enseignants.

Mes plus sincères remerciements à monsieur Z.LATREUCHE d'avoir bien voulu présider mon jury et monsieur KH. BECHAOUI d'avoir accepté de faire partie de ce jury.

J'aimerais exprimer ma gratitude à tous les enseignements, trop nombreux pour les citer, qui ont pris le temps de discuter de mon sujet. Chacun de ces échanges m'a aidé à faire avancer mon analyse.

Table des matières

INTRODUCTION

La théorie de Nevanlinna est un outil incontournable dans la théorie des fonctions, en particulier dans l'étude des propriétés des solutions des équations différentielles complexes notamment la croissance et l'oscillation des solutions. En effet depuis 1925, l'année où R.Nevanlinna a publié les résultats de ses travaux sur la théorie de la distribution des valeurs des fonctions entière, les chercheurs ne cessent de publier dans la même thématique et plusieurs problèmes ont été études et résolus.Pour une introduction de la théorie des équations différentielles linéaires dans le plan complexe avec la théorie Nevanlinna voir[10, 11].
Ce travail se compose d'une introduction et deux chapitres.Dans le premier chapitre on va citer quelques rappels et notions préliminaires dont on aura besoin dans notre travail, comme la théorie de Nevanlinna, on va aussi citer quelques lemmes
et définitions concernant la croissance d'une fonction entière ou méromorphe.Dans le deuxième chapitre , on s'intéresse à étudier la distribution des valeurs et en particulier les points fixes des solutions ainsi que leurs dérivées de certains types d'équations différentielles linéaires

$$f^{(k)} + A_{k-1}f^{(k-1)} + ... + A_0 f = 0$$

où A_j $(j = 0, 1, ..., k-1)$ sont des fonctions entiers méromorphes.

Chapitre 1

La Théorie de Nevanlinna

1.1 Quelques Eléments de la Théorie de Nevanlinna

On va citer seulement les éléments nécessaires pour notre travail dans cette thèse et pour plus de détail voir [10, 11].

1.1.1 Formule de Jensen

Théorème 1.1.1 [10]*Soint f une fonction méromorphe telles que $f(0) \neq 0, \infty$ et soit $a_1, a_2, ...a_n$ $(resp b_1, b_{2,}..., b_n)$ ses zéros (resp. ses pôles), chacun étant compté avec son ordre de multiplicité.Alors*

$$\ln|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta + \sum_{|b_j|<r} \ln\frac{r}{|b_j|} - \sum_{|a_j|<r} \ln\frac{r}{|a_j|}$$

Lemme 1.1.1 [10]*Pour tout réel $x > 0$, on definit :*

$$\ln^+ x = \max(\ln x, 0) = \begin{cases} 0 & si\ 0 < x \leq 1 \\ \ln x & si\ x > 1 \end{cases}$$

1)

$$\ln x \leq \ln^+ x$$

2)

$$\ln^+ x \leq \ln^+ y \ \ pourtout\,(0 < x \leq y)$$

3)

$$\ln x = \ln^+ x - \ln^+ \frac{1}{x}$$

4)

$$|\ln x| = \ln^+ x + \ln^+ \frac{1}{x}$$

5)

$$\ln^+\left(\prod_{j=1}^{m} x_j\right) \leq \sum_{j=1}^{m}\left(\ln^+ x_j\right)$$

6)

$$\ln^+\left(\sum_{j=1}^{m} x_j\right) \leq \sum_{j=1}^{m}\left(\ln^+ x_j\right) + \ln m$$

1.1.2 Fonction a-points

Définition 1.1.1 [10] :*Soit f une fonction méromorphe. Pour tout nombre complexe a, on désigne par $n(t,a,f)$ le nombre de racines de l'équation $f(z) = a$ situées dans le disque $|z| \leqslant t$. Chaque racine étant comptée un nombre de fois égale à son ordre de multiplicité et par $n(t,\infty,f)$ le nombre de pôle de la fonction f dans le disque $|z| \leqslant t$. Posons*

$$N(r,a,f) = \int_0^r \frac{n(t,a,f) - n(0,a,f)}{t}dt + n(0,a,f)\ln r, \qquad a \neq \infty$$

et

$$N(r,\infty,f) = N(r,f) = \int_0^r \frac{n(t,\infty,f) - n(0,\infty,f)}{t}dt + n(0,\infty,f)\ln r$$

$N(r,f)$ est appellée la fonction a-point de la fonction f dans le disque $|z| \leqslant r$

1.1.3 Fonction de proximité

Définition 1.1.2 [10] :*Soit f une fonction méromorphe non canstante et a un nombre complexe. Alors, on définit la fonction de proximité de la fonction f par*

$$\begin{aligned} m(r,a,f) &= m\left(r,\frac{1}{f-a}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{|f(r\exp(i\theta) - a|}d\theta, \quad a \neq \infty \\ m(r,\infty,f) &= m(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta \end{aligned}$$

$m(r,a,f)$ est appellée la fonction de proximité de la fonction f au point a.

1.1.4 Fonction caratéristique

Définition 1.1.3 [10] :*On définit la fonction caratéristique de R.Nevanlinna de la fonction f par*

$$T(r,\infty,f) = T(r,f) = m(r,f) + N(r,f)$$

Exemple 1.1.1 *Pour la fonction* $f(z) = \frac{e^z}{z}$. f *admet un pôle simple* $z = 0$

$$\begin{aligned}
N(r,f) &= \int_0^r \frac{n(t,\infty,f) - n(0,\infty,f)}{t} dt + n(0,\infty,f)\ln r \\
N(r,f) &= \int_0^r \frac{1-1}{t} dt + \ln r \\
N(r,f) &= \ln r
\end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned}
m(r,f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta \\
m(r,f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \left|\frac{e^{re^{i\theta}}}{re^{i\theta}}\right| d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \left|\frac{e^{re^{i\theta}}}{r}\right| d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{e^{r\cos\theta}}{r}\right) d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r\cos\theta d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln r d\theta \\
&= \frac{r}{\pi}\int_{-0}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta - \frac{\ln r}{2} \\
&= \frac{r}{\pi} - \frac{\ln r}{2}
\end{aligned}$$

Donc

$$T(r,f) = m(r,f) + N(r,f) = \frac{r}{\pi} + \frac{\ln r}{2}$$

Proposition 1.1.1 *:Soit* f, $f_1, f_2, ..., f_n$ *des fonctions méromorphe et* $a \in \mathbb{C}^*$.*Alors*

1)

$$T\left(r, \prod_{j=1}^{m} f_j\right) \leq \sum_{j=1}^{m} T\left(r, f_j\right)$$

2)

$$T\left(r, f^n\right) = nT\left(\ r, f\right), \quad (n \in \mathbb{N})$$

3)

$$T\left(r, \sum_{j=1}^{m} f_j\right) \leq \sum_{j=1}^{m} T\left(r, f_j\right) + \ln n$$

4)
$$T(r, af) = T(r, f) + O(1)$$

5)
$$T(r, f + a) = T(r, f) + O(1)$$

6)
$$T\left(r, \frac{af + b}{cf + d}\right) = T(r, f) + O(1)\,;\ \ f \neq -\frac{d}{c}$$

1.1.5 La dérivée logarithmique

Lemme 1.1.2 [10] *: Soit f une fonction méromorphe transcendante .Alors*

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) = S(r, f) = o(T(r, f))$$

où $S(r, f) = O(\log T(r, f) + \log r)$ à l'éxtérieur d'un ensemble $E \subset]0, +\infty[$ de mesure linéaire finie.

1.2 La mesure linéaire, la mesure logarithemique

Définition 1.2.1 [14] :*La mesure linéaire d'un ensemble $E \subset [0, +\infty[$ est définie par*

$$m(E) = \int_0^{+\infty} \chi_E(t)dt$$

où $\chi_E(t)$ est la fonction caractéristique de l'ensemble E et la mesure logarithmique d'un ensemble $F \subset [1, +\infty[$ est définie par

$$ml(F) = \int_1^{+\infty} \frac{\chi_F(t)}{t}dt$$

Exemple 1.2.1 *La mesure linéaire de l'ensemble $E = [1, 2[\cup [7, 8] \subset [0, +\infty[$ est*

$$m(E) = \int_0^{+\infty} \chi_E(t)dt = \int_1^2 dt + \int_7^8 dt = 5$$

le mesure logarithmique de l'ensemble $F = [1, 5] \subset [1, +\infty[$ est

$$\begin{aligned} ml(F) &= \int_1^{+\infty} \frac{\chi_F(t)}{t}dt = \\ &= \int_1^5 \frac{dt}{t} \\ &= \ln 5 \end{aligned}$$

1.3 Fonction de faible croissance

Définition 1.3.1 [14] : *Soient $f(z)$ et $\Psi(z)$ des fonction méromorphes, on dit que $\Psi(z)$ est une fonction de faible croissance devant f si*

$$T(r,\Psi) = S(r,f)$$

1.4 Ordre de croissance, l'hyper-order et le type

Définition 1.4.1 ([9], [5]) *: Soit f une fonction méromorphe. L'ordre et l'hyper-ordre de cette fonction sont définis respectivement par*

$$\begin{aligned} \sigma(f) &= \lim_{r\to+\infty}\sup\frac{\ln T(r,f)}{\ln r} \\ \sigma_2(f) &= \lim_{r\to+\infty}\sup\frac{\ln\ln T(r,f)}{\ln r} \end{aligned}$$

Si f une fonction entièr, alors l'ordre et l'hyper-ordre de cette fonction sont définis respectivement par

$$\begin{aligned} \sigma(f) &= \lim_{r\to+\infty}\sup\frac{\ln\ln M(r,f)}{\ln r} \\ \sigma_2(f) &= \lim_{r\to+\infty}\sup\frac{\ln\ln\ln M(r,f)}{\ln r} \end{aligned}$$

où

$$M(r,f) = \max_{|z|=r}|f(z)|$$

Lemme 1.4.1 *:Soient f et g deux fonctions entières.Alors*

$$\begin{aligned} \sigma(f+g) &\leq \max\{\sigma(f),\sigma(g)\} \\ \sigma(fg) &\leq \max\{\sigma(f),\sigma(g)\} \end{aligned}$$

Exemple 1.4.1 *: Soit $f(z) = e^z$. Nous avons $n(t,f) = 0$ car f n'admet pas des pôle conséquent $N(r,f) = 0$. De plus*

$$\begin{aligned} m(r,f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^+\left|e^{r\cos\phi}\right|d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln^+\left|e^{r\cos\phi}\right|d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r\cos\phi d\phi \\ &= \frac{r}{\pi} \end{aligned}$$

Donc

$$T(r,e^{z})=\frac{r}{\pi}$$

D'ou

$$\begin{aligned}\sigma(e^{z}) &= \lim_{r\to+\infty}\sup\frac{\ln T(r,e^{z})}{\ln r}\\ \sigma(e^{z}) &= 1\end{aligned}$$

et

$$\sigma_2(e^{z})=0$$

Remarque 1.4.1 *: Si l'ordre est finie alore l'hyper-ordre est null*

Définition 1.4.2 ([9] , [5]) *: Le type d'une fonction entière $f(z)$ d'ordre fini $0<\sigma(f)<+\infty$ est défini par*

$$\tau(f)=\lim_{r\to\infty}\sup\frac{\ln M(r,f)}{r^{\sigma}},$$

où $M(r,f)=\max_{|z|=r}|f(z)|$
Si f est une fonction méromorphe, alors le type de f est défini par

$$\tau(f)=\lim_{r\to\infty}\sup\frac{T(r,f)}{r^{\sigma}}$$

Exemple 1.4.2 *Pour la fonction $f(z)=e^{z}$, on a*

$$\begin{aligned}\tau(f(z)) &= \lim_{r\to+\infty}\sup\frac{T(r,f(z))}{r^{\sigma}}\\ \tau(e^{z}) &= \lim_{r\to+\infty}\sup\frac{r}{\pi r}\\ \tau(e^{z}) &= \frac{1}{\pi}\end{aligned}$$

1.5 L'exposant et l'hyper exposant de convergence

Définition 1.5.1 ([9] , [5]) :*Soit f une fonction méromorphe. L'exposant de convergence des zéros de la fonction f est définie par*

$$\lambda(f)=\lim_{r\to+\infty}\sup\frac{\ln N\left(r,\frac{1}{f}\right)}{\ln r}$$

où

$$N\left(r,\frac{1}{f}\right)=\int_0^r\frac{n\left(t,\frac{1}{f}\right)-n\left(0,\frac{1}{f}\right)}{t}dt+n\left(0,\frac{1}{f}\right)\ln r$$

et l'exposant de convergence des zéros distincts de la fonction f par

$$\overline{\lambda}(f)=\lim_{r\to+\infty}\sup\frac{\ln\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)}{\ln r}$$

où

$$\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)=\int_0^r\frac{\overline{n}\left(t,\frac{1}{f}\right)-\overline{n}\left(0,\frac{1}{f}\right)}{t}dt+\overline{n}\left(0,\frac{1}{f}\right)\ln r$$

tel que $\overline{n}\left(t,\frac{1}{f}\right)$ désigne le nombre des zéros de la fonction f situés dans le disque $|z|\leq r$

Exemple 1.5.1 *Soit* $f(z)=e^z-a,\ a\neq 0,\infty$

On a

$$\begin{aligned}e^z &= a\\ &\Longleftrightarrow z=\ln|a|+i(\arg a+2k\pi),k\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|z| &< t\Rightarrow\sqrt{(\ln|a|)^2+(\arg a+2k\pi)^2}<t\\ &\Longrightarrow \frac{-\sqrt{t^2-(\ln a)^2}-\arg a}{2\pi}<k<\frac{\sqrt{t^2-(\ln a)^2}-\arg a}{2\pi}\\ &\Longrightarrow n\left(r,\frac{1}{f}\right)\sim\frac{\sqrt{t^2-(\ln a)^2}}{\pi}\sim\frac{t}{\pi},t\to+\infty\\ &\Longrightarrow N\left(r,\frac{1}{f}\right)=\frac{r}{\pi}+0(1)\\ &\Longrightarrow \lambda(f)=1\end{aligned}$$

Remarque 1.5.1 *:L'exposant de convergence des zéros de la fonction* $\frac{1}{f}$ *est aussi dit exposant de convergence de pôle de la fonction* f

Définition 1.5.2 [17] *:Soit* $f(z)$ *une fonction méromorphe. L'hyper exposant de convergence des zéros de la fonction* f *est défini par*

$$\lambda_2(f)=\lim_{r\to+\infty}\sup\frac{\ln\ln N\left(r,\frac{1}{f}\right)}{\ln r}$$

et l'hyper exposant de convergence des zéros distincts de la fonction f par

$$\overline{\lambda_2}(f)=\lim_{r\to+\infty}\sup\frac{\ln\ln\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)}{\ln r}$$

Définition 1.5.3 $[9, 5, 17]$ *:Soint f une fonction méromorphe .On définit exposant et l'hyper exposant de convergence des point fixes de la fonction f respectivement par :*

$$\begin{aligned}
\lambda(f-z) &= \lim_{r\to+\infty} \sup \frac{\ln N\left(r, \frac{1}{f-z}\right)}{\ln r} \\
\lambda_2(f-z) &= \lim_{r\to+\infty} \sup \frac{\ln \ln N\left(r, \frac{1}{f-z}\right)}{\ln r}
\end{aligned}$$

Définition 1.5.4 $[9, 5, 17]$ *:Soint f une fonction méromorphe .On définit exposant et l'hyper exposant de convergence des point fixes distincts de la fonction f respectivement par :*

$$\begin{aligned}
\overline{\lambda}(f-z) &= \lim_{r\to+\infty} \sup \frac{\ln \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-z}\right)}{\ln r} \\
\overline{\lambda_2}(f-z) &= \lim_{r\to+\infty} \sup \frac{\ln \ln \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-z}\right)}{\ln r}
\end{aligned}$$

Exemple 1.5.2 *:Exposant et l'hyper exposant de convergence des point fixes de la fonction $f(z) = e^z + 2$ sont égaux respectivement à 1 est 0*

Définition 1.5.5 *: Soit f une fonction méromorphe non costante on définit la defaut $\delta(a, f)$ au point a par*

$$\begin{aligned}
\delta(a, f) &= \lim_{r\to+\infty} \inf \frac{m\left(r, \frac{1}{f-a}\right)}{T(r, f)} \\
&= 1 - \lim_{r\to+\infty} \sup \frac{N\left(r, \frac{1}{f-a}\right)}{T(r, f)}
\end{aligned}$$

Chapitre 2

Sur l'hyper exposant de convergence des zéros de $f^{(j)} - \varphi$

2.1 Introduction et résulta

Plusieur mathématicien ont étudie l'oxillation des solution de l'équation différentielle linéaire suivant :

$$f" + A(z)f' + B(z)f = 0 \tag{2.1.1}$$

où $A(z)$ et $B(z)$ non null sont des fonction entières et ont obtenu des résultats importants voir $[1, 3, 4, 7, 9]$.En 1996,Shon[9] a étudie l'hyper ordre des solutions de (2.1.1) et il obtenue le résulta suivant :

Théorème 2.1.1 [11] *:Soient $A(z)$ et $B(z)$ des fonctions entiéres telle que $\sigma(A) < \sigma(B)$ ou $\sigma(B) < \sigma(A) < \frac{1}{2}$, alors toute solution $f \neq 0$ de* (2.1.1) *satisfait* $\sigma_2(f) \geqslant \max\{\sigma(A), \sigma(B)\}$.

En 2006,chen et shen[5]ont étudie l'exposant de convergence de $f^{(j)} - \varphi$ $(j = 1, 2)$ où φ est une fonction entière de faible croissance devant la solution $f \neq 0$ en déduit les point fixes des solutions des équations différentielles linéaire du second ordre.En fait, ils ont obtnu les résulta suivants

Théorème 2.1.2 [5] : *Soient $A_j(z) \neq 0$ $(j = 1, 2)$ des fonction entières avec $\sigma(A_j) < 1$, supposons que a, b sont des nombres complexes satisfaisant $ab \neq 0$ et $\arg a \neq \arg b$ ou bien $a = cb$ $(0 < c < 1)$. Si $\varphi(z) \neq 0$ est fonction entière d'ordre fini, alors toutes solution non triviale f de l'equation*

$$f'' + A_1(z)\exp(az)f' + A_2(z)\exp(bz)f' = 0$$

satisfait

$$\overline{\lambda}(f - \varphi) = \overline{\lambda}(f' - \varphi) = \overline{\lambda}(f'' - \varphi) = \infty$$

Théorème 2.1.3 [5] : *Soient* $A_1(z) \neq 0$, $\varphi(z) \neq 0$ *et* $Q((z)$ *des fonctions entières avec* $\sigma(A_1) < 1$, *1*$<\sigma(Q) < \infty$ *et* $\sigma(\varphi) < \infty$, *alors toute solution non triviale* f *de l'équation*

$$f'' + A_1(z)\exp(az)f' + Q(z)f = 0$$

satisfait $\overline{\lambda}(f-\varphi) = \overline{\lambda}(f'-\varphi) = \overline{\lambda}(f''-\varphi) = \infty$, *où* $a \neq 0$ *est un nombre complexe .*

Dans le même année, Liu et Zhang [12] ont étudié les points fixes quand les cofficients des équations sont des fonctiones méromorphes, ce qui nous donne le résultat suivant :

Théorème 2.1.4 [12] :*Supposons que* $k \geqslant 2$ *et* $A(z)$ *est une fonction méromorphe transcendante satisfaisant*

$$\delta(\infty, A) = \lim_{r\to+\infty}\inf \frac{m(r,A)}{T(r,A)} = \delta > 0,\ \sigma(A) = \sigma < +\infty$$

alors toute solution méromorphe $f \neq 0$ *de l'équation*

$$f^{(k)} + A(z)f = 0 \tag{2.1.2}$$

satisfait que f et $f', f'', ..., f^{(k)}$ ont plusieurs points fixes et $\overline{\lambda}(f^{(j)} - z) = \sigma(j = 0, 1, ..., k)$.

pour l'équation (2.1.2) , **Belaidi** et**AL Farissi** [2], a étudié les points fixe et la relation entre les fonctions de faible croissance et les polynôme différentiels des solutions de l'équation (2.1.2) et a obtenu quelques résultats qui amélirent les théoréme (2.1.4) et (2.1.3) .
On consodire l'équation differentille suivant :

$$f^{(k)} + A_{k-1}f^{(k-1)} + ... + A_0 f = 0 \tag{2.1.3}$$

où A_j sont des fonctiones entières méromorphes

2.2 lemmes

Lemme 2.2.1 [17] : *Supposons que* $f \neq 0$ *est une solution de l'équation* (2.1.3) *. Posons* $g = f - \varphi$ *, alors* g *satisfait l'équation*

$$g^{(k)} + A_{k-1}g^{(k-1)} + ... + A_0 g = -\left[\varphi^{(k)} + A_{k-1}\varphi^{(k-1)} + ... + A_0\varphi\right] \tag{2.2.1}$$

Preuve. : Puisque $g = f - \varphi$, on a $g' = f' - \varphi'$, $g^{(2)} = f^{(2)} - \varphi^{(2)}, ..., g^{(k)} = f^{(k)} - \varphi^{(k)}$.On remplace dans l'équation(2.1.3) , on trouve (2.2.1) □

Lemme 2.2.2 [17] : *Supposons que* $f \neq 0$ *est une solution de l'équation* (2.1.3) *, posons* $g_1 = f' - \varphi$, *alors* g_1 *satisfait l'équation*

$$g_1^{(k)} + U_{k-1}^1 g_1^{(k-1)} + ... + U_0^1 g = -\left[\varphi^{(k)} + U_{k-1}^1\varphi^{(k-1)} + ... + U_0^1\varphi\right] \tag{2.2.2}$$

oú

$$U_j^1 = A'_{j+1} + A_j - \frac{A'_0}{A_0}A_{j+1} \qquad (j = 0, 1, ..., k-1) \text{ et } A_k = 1$$

Lemme 2.2.3 [17] : *Supposons que* $f \neq 0$ *est une solution de l'équation* $(2.1.3)$, *posons* $g_2 = f" - \varphi$, *alors* g_2*satisfait l'équation*

$$g_2^{(k)} + U_{k-1}^2 g_2^{(k-1)} + ... + U_0^2 g_2 = -\left[\varphi^{(k)} + U_{k-1}^2 \varphi^{(k-1)} + ... + U_0^2 \varphi\right] \tag{2.2.3}$$

où

$$U_j^2 = U_{j+1}^{1\prime} + U_j^1 - \frac{U_0^{1\prime}}{U_0^1} U_{j+1}^1 \qquad (j = 0, 1, ..., k-1) \text{ et } U_k^1 = 1$$

Lemme 2.2.4 [17] : *Supposons que* $f \neq 0$ *est une solution de l'équation* $(2.1.3)$, *posons* $g_3 = f^{(3)} - \varphi$ *alors* g_3 *satisfait l'équation*

$$g_3^{(k)} + U_{k-1}^3 g_3^{(k-1)} + ... + U_0^3 g_3 = -\left[\varphi^{(k)} + U_{k-1}^3 \varphi^{(k-1)} + U_0^3 \varphi\right] \tag{2.2.4}$$

où

$$U_j^3 = U_{j+1}^{2\prime} + U_j^2 - \frac{U_0^{2\prime}}{U_0^2} U_{j+1}^2 \qquad (j = 0, 1, ..., k-1) \text{ et } U_k^2 = 1$$

Lemme 2.2.5 [17] *Supposons que* $f \neq 0$ *est une solution de l'équation* $(2.1.3)$, *posons* $g_i = f^{(i)} - \varphi$ *alors* g_i *satisfait l'éqution*

$$g_i^{(k)} + U_{k-1}^i g_i^{(k-1)} + ... + U_0^i g_i = -\left[\varphi^{(k)} + U_{k-1}^i \varphi^{(k-1)} + ... + U_0^i \varphi\right] \tag{2.2.5}$$

où

$$U_j^i = U_{j+1}^{i-1\prime} + U_j^{i-1} - \frac{U_0^{i-1\prime}}{U_0^{i-1}} U_{j+1}^{i-1} \qquad (j = 0, 1, ..., k-1) \text{ et } U_k^{i-1} = 1$$

Preuve : On procède par récurrence
Premièrement, du lemmes $2.2.2 - 2.2.4$,nous obtenons que l'équation $(2.2.5)$ est verifié pour $i = 1, 2, 3$
Deuxiément ,on suppose que $g_i = f^{(i)} - \varphi$, $i \leq n, n \in \mathbb{N}$ satisfait $(2.2.5)$. Donc $g_n = f^{(n)} - \varphi$ satisfait l'équation

$$g_n^{(k)} + U_{k-1}^n g_n^{(k-1)} + ... + U_0^n g = -\left[\varphi^{(k)} + U_{k-1}^n \varphi^{(k-1)} + ... + U_0^n \varphi\right] \tag{2.2.6}$$

où

$$U_j^n = U_{j+1}^{n-1\prime} + U_j^{n-1} - \frac{U_0^{n-1\prime}}{U_0^{n-1}} U_{j+1}^{n-1}, j = 0, 1, ..., k-1, U_k^{n-1} = 1$$

Puisque $g_n = f^{(n)} - \varphi$, on a

$$f^{(n+1)} = g_n' + \varphi', \qquad f^{(n+2)} = g_n'' + \varphi'', \qquad ...; f^{(k+n)} = g_n^{(k)} + \varphi^{(k)}, \tag{2.2.7}$$

De (2.2.6) et (2.2.7), on a

$$f^{(k+n)} + U_{k-1}^n f^{(k+n-1)} + U_{k-2}^n f^{(k+n-2)} + ... + U_0^n f^{(n)} = 0 \tag{2.2.8}$$

Maintenant on va montrer que $g_{n+1} = f^{(n+1)} - \varphi$ satisfait $(2.2.5)$

Comme $g_{n+1} = f^{(n+1)} - \varphi$, on a

$$f^{(n+2)} = g'_{n+1} + \varphi', \quad f^{(n+3)} = g''_{n+1} + \varphi'', ... \qquad , \ f^{(k+n+1)} = g^{(k)}_{n+1} + \varphi^{(k)} \quad (2.2.9)$$

La dérivation de l'équation (2.2.8) est

$$f^{(k+n+1)} + U^n_{k-1} f^{(k+n)} + \left(U^{n\prime}_{k-1} + U^n_{k-2}\right) f^{(k+n-1)} + ... + U^{n\prime}_0 f^{(n)} = 0 \quad (2.2.10)$$

En remplacant (2.2.8) dans (2.2.10), on obtient

$$f^{(k+n+1)} + \left(U^n_{k-1} - \frac{U^{n\prime}_0}{U^n_0}\right) f^{(k+n)} + \left(U^{n\prime}_{k-1} + U^n_{k-2} - \frac{U^{n\prime}_0}{U^n_0} U^n_{k-1}\right) f^{(k+n-1)} + ... + \left(U^{n\prime}_1 + U^n_0 - \frac{U^{n\prime}_0}{U^n_0} U^n_1\right) f^{(n)} = 0 \quad (2.2.11)$$

De la définition de U^i_j et (2.2.11), on a

$$f^{(k+n+1)} + U^{n+1}_{k-1} f^{(k+n)} + ... + U^{n+1}_1 f^{(n+1)} + U^{n+1}_0 f^{(n)} = 0 \quad (2.2.12)$$

Où

$$U^{n+1}_j = U^{n\prime}_{j+1} + U^n_j - \frac{U^{n\prime}_0}{U^n_0} U^n_{j+1} \qquad (j = 0, 1, ..., k-1) \text{ et } U^n_k = 1$$

On remplace(2.2.9) dans (2.2.12), on obtient

$$g^{(k)}_{n+1} + U^{n+1}_{k-1} g^{(k-1)}_{n+1} + ... + U^{n+1}_0 g_{n+1} = -\left[\varphi^{(k)} + U^{n+1}_{k-1} \varphi^{(k-1)} + U^{n+1}_0 \varphi\right] \quad (2.2.13)$$

d'ou les résultas

Lemme 2.2.6 [17] : *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe transcendante avec $\sigma(f) = \sigma \geqslant 0$, alors il existe un ensemble $E \subset [1, +\infty)$ de mesure logarithmique infinie tel que pour tout $r \in E$, on a*

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{\ln T(r, f)}{\ln r} = \sigma, \qquad r \in E$$

Lemme 2.2.7 [20] : *Soient $A_0(z), A_1(z), ..., A_{k-1}(z)$ des fonctions entiéres d'ordre fini et satisfaients $\max\{\sigma(A_j) : j = 1, 2, ..., k-1\} = \sigma_1 < \sigma(A_0) < \infty$, et posons*

$$U^1_j = A'_{j+1} + A_j - \frac{A'_0}{A_0} A_{j+1}$$

et

$$U^i_j = U^{i-1\prime}_{j+1} + U^{i-1}_j - \frac{U^{i-1\prime}_0}{U^{i-1}_0} U^{i-1}_{j+1}$$

où $j=0,1,2,...,k-1, A_k=1, U_k^{i-1}=1$ et $i\in\mathbb{N}$, Alors il existe un ensemble E de mesure logarithmitique infinie tel que

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{\ln m(r,U_0^i)}{\ln r}=\sigma(A_0)>\lim_{r\to+\infty}\sup\frac{\max_{1\leqslant j\leqslant k-1}\left\{\ln m(r,U_j^i)\right\}}{\ln r}=\sigma_1,\quad r\in E \tag{2.2.14}$$

Preuve : Utilisons la démostration par récurrence
pour $i=1$, On a $U_j^1=A'_{j+1}+A_j-\frac{A'_0}{A_0}A_{j+1}, j=0,1,2,...,k-1$ et $A_k=1$
si $j=0$, donc $U_0^1=A'_1+A_0-\frac{A'_0}{A_0}A_1$.Alors, nous avons

$$m(r,U_0^1)\leqslant m(r,A_1)+m\left(r,A_0\right)+m\left(r,\frac{A'_1}{A_1}\right)+m\left(r,\frac{A'_0}{A_0}\right)+O(1) \tag{2.2.15}$$

De $A_0=-A'_1+U_0^1+\frac{A'_0}{A_0}A_1$, on obtient

$$m(r,A_0)\leqslant m(r,A_1)+m\left(r,U_0^1\right)+m\left(r,\frac{A'_1}{A_1}\right)+m\left(r,\frac{A'_0}{A_0}\right)+O(1) \tag{2.2.16}$$

Où $j\neq 0, j=1,2,...,k-1$,par la définition de U_j^1, on a

$$m(r,U_j^1)\leqslant m(r,A_{j+1})+m(r,A_j)+m\left(r,\frac{A'_j}{A_j}\right)+m\left(r,\frac{A'_0}{A_0}\right)+O(1) \tag{2.2.17}$$

Comme $A_j(z)$ sont des fonctions entières avec

$$\max\left\{\sigma(A_j):j=1,2,...,k-1\right\}<\sigma(A_0)<\infty$$

et(2.2.17), on a

$$\max_{1\leqslant j\leqslant k-1}\left\{m(r,U_j^1)\right\}\leqslant\max_{1\leqslant j\leqslant k-1}\left\{m(r,A_j)+o(m(r,A_0))+O(\ln r)\right\} \tag{2.2.18}$$

De (2.2.15),(2.2.16),(2.2.18) et le lemme 2.2.6 , il existe un ensemble E de mesure logarithmique infinie tel que

$$\begin{aligned}\lim_{r\to+\infty}\frac{\ln m(r,U_0^1)}{\ln r} &= \sigma(A_0)>\sigma_1=\lim\sup\frac{\max_{1\leqslant j\leqslant k-1}\left\{\ln m(r,A_J)\right\}}{\ln r} \\ &\geqslant \lim\sup\frac{\max_{1\leqslant j\leqslant k-1}\left\{\ln m(r,U_j^1)\right\}}{\ln r},\quad r\in E\end{aligned} \tag{2.2.19}$$

Maintenant, on suppose que l'équation (2.2.14) est vérifié pour $i\leqslant n$, $n\in\mathbb{N}$. Donc, il existe un ensemble E de mesure logarithmique infinie tel que

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{\ln m(r,U_0^n)}{\ln r}=\sigma(A_0)>\lim_{r\to\infty}\sup\frac{\max_{1\leqslant j\leqslant k-1}\left\{\ln m(r,U_j^n)\right\}}{\ln r}=\sigma_1 \tag{2.2.20}$$

On démontre qu l'équation (2.2.14) est vérifiè pour $i=n+1$.

Puisque $i=n+1$, on a $U_j^{n+1}=U_{j+1}^{n\prime}+U_j^n-\frac{U_0^{n\prime}}{U_0^n}U_{j+1}^n$, ou $j=0,1,...,k-1$, et $U_k^n=1$ pour $j=0$, on a $U_j^{n+1}=U_1^{n\prime}+U_0^n-\frac{U_0^{n\prime}}{U_0^n}U_1^n$.Alors, on obtient

$$m(r,U_0^{n+1})\leqslant m(r,U_0^n)+m(r,U_1^n)+m\left(r,\frac{(U_0^n)'}{U_0^n}\right)+m\left(r,\frac{(U_1^n)'}{U_1^n}\right)+O(1) \tag{2.2.21}$$

Et comme $U_0^n=U_1^{n\prime}+U_0^{n+1}-\frac{U_0^{n\prime}}{U_0^n}U_1^n$, on trouve

$$m(r,U_0^n)\leqslant m(r,U_0^{n+1})+m(r,U_1^n)+m\left(r,\frac{U_0^{n\prime}}{U_0^n}\right)+m\left(r,\frac{U_1^{n\prime}}{U_1^n}\right)+O(1) \tag{2.2.22}$$

Pour $j\neq 0$, des définitions de $U_j^{n+1}, j=1,2,...,k-1$, et $U_k^n=1$, on a

$$m(r,U_j^{n+1})\leqslant m(r,U_{j+1}^n)+m(r,U_1^n)+m\left(r,\frac{{U_{j+1}^n}'}{U_{j+1}^n}\right)+m\left(r,\frac{U_0^{n\prime}}{U_0^n}\right)+O(1) \tag{2.2.23}$$

De (2.2.20), (2.2.23), il existe un ensemble E de mesure logarithmique infinie tel que

$$\begin{aligned}\lim_{r\to+\infty}\frac{\ln m(r,U_0^{n+1})}{\ln r} &= \lim_{r\to+\infty}\frac{\ln m(r,U_0^n)}{\ln r}=\sigma(A_0)>\sigma_1 \\ &= \lim_{r\to+\infty}\sup\frac{\max_{1\leqslant j\leqslant k-1}\left\{\ln m(r,U_j^n)\right\}}{\ln r} \\ &= \lim_{r\to+\infty}\sup\frac{\max_{1\leqslant j\leqslant k-1}\left\{\ln m(r,U_j^{n+1})\right\}}{\ln r}\end{aligned} \tag{2.2.24}$$

D'où le résultat

Lemme 2.2.8 [17] : *Soient $H_j(z)$ $(j=0,1,...,k-1)$ des fonctions méromorphe d'ordre fini. si*

$$\lim_{r\to+\infty}\sup\frac{\max_{1\leqslant j\leqslant k-1}\{\ln m(r,H_j)\}}{\ln r}=\beta_1$$

et il existe E_1 de mesure logarithmique infinie tel que pour tout $r\in E$, on a

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{\ln m(r,H_0)}{\ln r}=\beta_2>\beta_1$$

Alors toute solution méromorphe f de

$$f^{(k)}+H_{k-1}f^{(k-1)}+...+H_1f'+H_0f=0 \tag{2.2.25}$$

satisfait $\sigma_2(f)\geqslant\beta_2$.
Preuve : Supposons que $f(z)$ est une solution méromorphe de l'équation (2.2.25) .De (2.2.25) , on a

$$m(r,f)\leq m\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right)+m\left(r,\frac{f^{(k-1)}}{f}\right)+...+m\left(r,\frac{f'}{f}\right)+\sum_{j=1}^{k-1}m(r,H_j)+O(1) \tag{2.2.26}$$

Du lemme de la dérivée logarithmique et (2.2.26).on obtient

$$m\left(r,H_0\right)\leq O\left\{\ln rT\left(r,f\right)\right\}+\sum_{j=1}^{k-1}m\left(r,H_j\right)\qquad r\notin E_2 \tag{2.2.27}$$

où $E_2\subset[1,+\infty)$ est un ensemble de mesure linéaire fini.Des hypothéses du lemme 2.2.6 ,il existe un ensemble E_1 de mesure logarithmique infinie tel que pour tout $\mid z\mid=r\in E_1-E_2$,on a

$$r^{\beta_2-\varepsilon}\leqslant O\left\{\ln rT(r,f)\right\}+(k-1)r^{\beta_1+\varepsilon} \tag{2.2.28}$$

où $0<2\varepsilon<\beta_2-\beta_1$.De (2.2.28), on trouve $\sigma_2(f)\geqslant\beta_2$

Lemme 2.2.9 [8] : *Soient f une fonction méromorphe transcendante avec $\sigma(f)=\sigma<\infty,\Gamma=\{(k_1,j_1),...,(k_m,j_m)\}$ est un ensemble fini de couples d'entiers qui satisfait $k_1>j_1\geqslant 0$ pour $i=1,...,m$. Et soit $\varepsilon>0$ (ε est une constante donnée), alors il existe un ensemble $E_3\subset(1,+\infty)$ de mesure logarithmique fini tel que pour tout z satisfaire $\mid z\mid=r\notin[0,1]\cup E_3$ et $(k,j)\in\Gamma$,on a*

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right|\leqslant\mid z\mid^{(k-j)(\sigma-1+\varepsilon)}$$

Lemme 2.2.10 [15] : *Soit $f(z)$ une fonction entiére avec $\sigma(f)=\sigma,\tau(f)=\tau,\ 0<\sigma<\infty$, $0<\tau<\infty$, alors pour tout donné $\beta<\tau$ il existe un ensemble $E_4\subset[1,+\infty)$ de mesure logarithmique infinie tel que pour tout $r\in E_4$, on a*

$$\ln M(r,f)>\beta r^{\sigma}$$

Lemme 2.2.11 [17] :*Soient $A_0(z),A_1(z),...,A_{k-1}(z)$ des fonctions entiéres d'ordre fini et satisfaients $0<\sigma(A_0)=\sigma(A_1)=...=\sigma(A_{k-1})=\sigma_2<\infty$, et $\max\{\tau(A_j):j=1,2,...,k-1\}=\tau_1<\tau(A_0)=\tau$, et soient U_j^1,U_j^i donnés dans le lemme2.2.7 , alors pour tout ε donné $(0<\varepsilon<\tau-\tau_1)$, il existe un ensemble E_5 de mesure logarithmique infinie tel que*

$$\mid U_j^i\mid\leqslant\exp\left\{(\tau_1+\varepsilon)r^{\sigma_2}\right\}\qquad\mid U_j^i\mid\geqslant\exp\left\{(\tau+\varepsilon)r^{\sigma_2}\right\} \tag{2.2.29}$$

où $i\in\mathbb{N}$ et $j=1,2,...,k-1$.
Peuve : Raisonnement par récurrence
(i) On va prouve que U_j^i $(j=0,1,...,k-1)$ satisfait(2.2.29) quand $i=1$.de la définition de $U_j^1=A'_{j+1}+A_j-\frac{A'_0}{A_0}A_{j+1}(j\neq0)$ et $U_0^1=A'_1+A_0-\frac{A'_0}{A_0}A_1$, on a

$$\mid U_0^1\mid\geqslant\mid A_0\mid-\mid A_1\mid\left(\left|\frac{A'_1}{A_1}\right|+\left|\frac{A'_0}{A_0}\right|\right) \tag{2.2.30}$$

et

$$| U_j^1 | \leqslant | A_j | - | A_{j+1} | \left(\left| \frac{A'_{j+1}}{A_{j+1}} \right| + \left| \frac{A'_0}{A_0} \right| \right), j = 1, 2, ..., k-1, A_k = 1 \quad (2.2.31)$$

Du lemme2.2.9, lemme et 2.2.10, et (2.2.30),(2.2.31)pour tout $\varepsilon (0 < 4\varepsilon < \tau - \tau_1)$, il existe un ensemble E_5 de mesure logarithmique infine tel que

$$\begin{aligned} | \quad U_0^1 | &\geqslant \exp\left\{ (\tau - \frac{\varepsilon}{4}) r^{\sigma_2} \right\} - 2\exp\left\{ (\tau_1 - \frac{\varepsilon}{4}) r^{\sigma_2} \right\} r^M \\ &\geqslant \exp\left\{ (\tau - \frac{\varepsilon}{2}) r^{\sigma_2} \right\} \end{aligned} \quad (2.2.32)$$

et

$$\begin{aligned} | \quad U_j^1 | &\leqslant \exp\left\{ (\tau_1 + \frac{\varepsilon}{4}) r^{\sigma_2} \right\} + 2\exp\left\{ (\tau_1 + \frac{\varepsilon}{4}) r^{\sigma_2} \right\} r^M \\ &\leqslant \exp\left\{ (\tau_1 + \frac{\varepsilon}{4}) r^{\sigma_2} \right\}, \quad j \neq 0 \end{aligned} \quad (2.2.33)$$

où $M > 0$ est une constante.
(ii) On vérifie que $U_j^i (j = 0, 1, ..., k-1)$ satisfait (2.2.29) pour $i = 2$.
$U_0^2 = U_1^{1\prime} + U_0^1 - \frac{U_0^{1\prime}}{U_0^1} U_1^1, U_j^2 = U_{j+1}^{1\prime} + U_j^1 - \frac{U_0^{1\prime}}{U_0^1} U_{j+1}^1 (j = 0, 1, ..., k-1)$ et $U_k^1 = 1$, on a

$$| U_0^2 | \geqslant | U_0^1 | - | U_1^1 | \left(\left| \frac{U_1^{1\prime}}{U_1^1} \right| + \left| \frac{U_0^{1\prime}}{U_0^1} \right| \right) \quad (2.2.34)$$

et

$$| U_j^2 | \leqslant | U_j^1 | - | U_{j+1}^1 | \left(\left| \frac{U_{j+1}^{1\prime}}{U_{j+1}^1} \right| + \left| \frac{U_0^{1\prime}}{U_0^1} \right| \right), j = 1, 2, ..., k-1 \quad (2.2.35)$$

De la conclusion de(i) et lemme ,2.2.9, $(2.2.32) - (2.2.35)$,pour tout $| z | = r \in E_5$,

$$| U_0^2 | \geqslant \exp\left\{ (\tau_1 - \frac{\varepsilon}{2}) r^{\sigma_2} \right\} - 2\exp\left\{ (\tau_1 + \frac{\varepsilon}{2}) r^{\sigma_2} \right\} r^M \geqslant \exp\left\{ (\tau_1 - \frac{\varepsilon}{2}) r^{\sigma_2} \right\} \quad (2.2.36)$$

et

$$\begin{aligned} | \quad U_j^2 | &\leqslant \exp\left\{ (\tau_1 + \frac{\varepsilon}{2}) r^{\sigma_2} \right\} + 2\exp\left\{ (\tau_1 + \frac{\varepsilon}{2}) r^{\sigma_2} \right\} r^M \\ &\leqslant \exp\left\{ (\tau_1 + \varepsilon) r^{\sigma_2} \right\}, \qquad j \neq 0 \end{aligned} \quad (2.2.37)$$

(iii) Supposons que (2.2.29) est vérifiée pour $i \leqslant n, n \in \mathbb{N}$, d'où pour tout ε $(0 < 4\varepsilon < \tau - \tau_1)$, il existe un ensemble E_5 de mesure logarithmique infinie tel que

$$| U_j^i | \leqslant \exp\left\{ (\tau_1 + \varepsilon) r^{\sigma_2} \right\}, \qquad | U_0^i | \geqslant \exp\left\{ (\tau - \varepsilon) r^{\sigma_2} \right\} \qquad i \leqslant n, j = 1, 2, ..., k-1) \quad (2.2.38)$$

$U_0^{n+1} = U_1^{n\prime} + U_0^n - \frac{U_0^{n\prime}}{U_0^n} U_1^n$ et $U_j^{n+1} = U_{j+1}^{n\prime} + U_j^n - \frac{U_0^{n\prime}}{U_0^n} U_{j+1}^n$ $(j = 0, 1, ..., k-1)$ et $U_k^n = 1$, on a

$$\mid U_0^{n+1} \mid \geqslant \mid U_0^n \mid - \mid U_1^n \mid \left(\left| \frac{U_1^{n\prime}}{U_1^n} \right| + \left| \frac{U_0^{n\prime}}{U_0^n} \right| \right) \tag{2.2.39}$$

et

$$\mid U_j^{n+1} \mid \leqslant \mid U_j^n \mid - \mid U_{j+1}^n \mid \left(\left| \frac{U_{j+1}^{n\prime}}{U_{j+1}^n} \right| + \left| \frac{U_0^{n\prime}}{U_0^n} \right| \right) \qquad j = 1, 2, ..., k-1 \tag{2.2.40}$$

Alors du lemme 2.2.9 est $(2.2.38) - (2.2.40)$, pour tout $\mid z \mid = r \in E_5$

$$\mid U_j^{n+1} \mid \leqslant \exp\left\{(\tau_1 + \varepsilon) r^{\sigma_2}\right\} + 2 \exp\left\{(\tau_1 + \varepsilon) r^{\sigma_2}\right\} r^M \leqslant \exp\left\{(\tau_1 + 2\varepsilon) r^{\sigma_2}\right\}, \qquad j \neq 0 \tag{2.2.41}$$

et

$$\mid U_0^{n+1} \mid \geqslant \exp\left\{(\tau - \varepsilon) r^{\sigma_2}\right\} - 2 \exp\left\{(\tau_1 + \varepsilon) r^{\sigma_2}\right\} r^M \geqslant \exp\left\{(\tau - 2\varepsilon) r^{\sigma_2}\right\}, \tag{2.2.42}$$

D'où le résultat

Lemme 2.2.12 [17] : *Soient* $B_j(z)$,$j = 0, 1, ..., k-1$ *des fonctions méromorphes avec* $\max\{\sigma(B_j) : j = 1, 2$
$\sigma_4 < \sigma(B_0) = \sigma_3$

et $\delta(\infty, B_0) = \lim_{r\to+\infty} \inf \frac{m(r,B_0)}{T(r,B_0)} > 0$. A lors toute solution méromorphe f de l'équation

$$f^{(k)} + B_{k-1} f^{(k-1)} + ... + B_1 f' + B_0 f = 0 \tag{2.2.43}$$

satisfait $\sigma_2(f) \geqslant \sigma_3$

Preuve : Soint f une solution méromorphe de l'équation (2.2.43) ,de (2.2.43)

$$\begin{aligned} m(r, B_0) &\leq m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) + m\left(r, \frac{f^{(k-1)}}{f}\right) + ... + m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + \sum_{j=1}^{k-1} m(r, B_j) \quad (2.2.44) \\ &\leq O\left\{\ln r T(r, f)\right\} + \sum_{j=1}^{k-1} m(r, B_j) \qquad r \notin E_6 \end{aligned}$$

où $E_6 \subset [1, +\infty)$ est un ensemble de mesure linéaire finie. Du lemme(2.2.6), l existe un ensemble E de mesure logarithmique infinie tel que pour tout $\mid z \mid = r \in E$, on a

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\ln T(r, f)}{\ln r} = \sigma_3 \qquad r \notin E \tag{2.2.45}$$

Comme $\delta(\infty, B_0) > 0$, alors pour tout donné ε $(0 < 2\varepsilon < \sigma_3 - \sigma_4)$ et pour tout $r \in E$, de (2.2.45), on obtient

$$m(r, B_0) \geqslant r^{\sigma_3 - \varepsilon} \tag{2.2.46}$$

De (2.2.44) et (2.2.46), on a

$$r^{\sigma_3-\varepsilon} \leqslant O\left\{\ln rT(r,f)\right\} + (k-1)r^{\sigma_4-\varepsilon}, \qquad r \in E - E_6 \tag{2.2.47}$$

De (2.2.47), on obtient $\sigma_2(f) \geqslant \sigma_3 = \sigma(B_0)$.

Lemme 2.2.13 [08] : *Soit f une fonction méromorphe transcendante et $\alpha > 1$ une constante donnée, pour tout donnée $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble $E_7 \subset [1,+\infty)$ de mesure logarithmique finie et une constante $M > 0$ qui dépend α et (m,n) $(m,n \in \{0,...,k\}$ avec $m < n)$ tel que pour tout z satisfaisant $\mid z \mid = r \notin [0,1] \cup E_7$.*

on a

$$\left|\frac{f^{(n)}(z)}{f^{(m)}(z)}\right| \leqslant M\left(\frac{T(\alpha r,f)}{r}(\ln^\alpha r)\ln T(\alpha r,f)\right)^{n-m}$$

Lemme 2.2.14 [16] : *Soient $B_j(z), j = 0,1,...,k-1$ des fonctions méromorphes d'ordre fini. S'ils exisent des constantes $\sigma_5, \beta_3, \beta_4$ $(0 < \beta_3 < \beta_4)$ et un ensemble E_8 de mesure logarithmique infinie tel que*

$$\max\left\{|B_j(z)| : j = 1,2,...,k-1\right\} \leqslant \exp\left\{\beta_3 r^{\sigma_5}\right\}, \qquad |B_0(z)| \geqslant \exp\left\{\beta_4 r^{\sigma_5}\right\}$$

vérifie pour tout $|z| = r \in E_8$, alors toute solution méromorphe de (2.2.43) satisfait $\sigma_2(f) \geqslant \sigma_5$.

Preuve : Supposons que f est une solution méromorphe de l'équation (2.2.43) . De (2.2.43) on a

$$|B_0(z)| \leq \left|\frac{f^{(k)}}{f}\right| + \sum_{j=1}^{k-1} |B_j(z)| \left|\frac{f^{(j)}}{f}\right| \tag{2.2.48}$$

Du lemme2.2.13 , il existe un ensemble E_7 de mesure logarithmique finie tel que pour tout $\mid z \mid = r \notin E_7$, on a

$$\left|\frac{f^{(j)}}{f}\right| \leqslant M\left[T(2r,f)\right]^j, \qquad j = 1,2,...,k \tag{2.2.49}$$

où $M > 0$ est une constante. De(2.2.48), (2.2.49) et les hypothese du lemme2.2.14 , pour tout $\mid z \mid = r \in E_8 - E_7$, on a

$$\exp\left\{\beta_4 r^{\sigma_5}\right\} \leqslant M\left[T(2r,f)\right]^k \exp\left\{\beta_3 r^{\sigma_5}\right\} \tag{2.2.50}$$

Puisque $0 < \beta_3 < \beta_4$, de (2.2.50), on obtient $\sigma_2(f) \geqslant \sigma_5$.

Lemme 2.2.15 [13] :*Soient $A_0, A_1, ..., A_{k-1}$, $F \neq 0$ des fonctions méromorphe, si f est une solution méromorphe de l'équation*

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z)f^{(k-1)} + ... + A_0(z)f = F$$

alors on a

(i) Si $\max\{\sigma(F), \sigma(A_j); j = 0,1,...,k-1\} < \sigma(f) = \sigma \leqslant \infty$, alors $\sigma(f) = \lambda(f) = \overline{\lambda}(f)$.

(ii) Si $\max\{\sigma_2(F), \sigma_2(A_j); j = 0,1,...,k-1\} < \sigma_2(f) = \sigma$, alors $\sigma_2(f) = \lambda_2(f) = \overline{\lambda}_2(f)$.

Lemme 2.2.16 [15] :*Soient* $A_j(z)(j = 0, 1, ..., k-1)$ *des fonctions entières satisfaire* $0 < \sigma(A_{k-1}) = ... = \sigma(A_1) = \sigma(A_0) < \infty$, $\max\{\tau(A_j) : j = 1, 2, ..., k-1\} = \tau(A_0) < \infty$, *alors toute solution* $f \neq 0$ *de* (2.1.3) *satisfait* $\sigma_2(f) = \sigma(A_0)$.

2.3 Résultats principaux

Dans [16] **Xu,Zhang** on montré les résulta suivant :

Théorème 2.3.1 [16] :*soient* $A_j(z), j = 0, 1, ..., k-1$ *des fonctions entière d'ordre fini et vérifiant une des deux conditions suivantes*

$\cdot(i)$ $\max\{\sigma(A_j) : j = 1, 2, ..., k-1\} < \sigma(A_0) < \infty$
$\cdot(ii)$ $0 < \sigma(A_{k-1}) = ... = \sigma(A_1) = \sigma(A_0) < \infty$ et $\max\{\tau(A_j) : j = 1, 2, ..., k-1\} = \tau_1 < \tau(A_0) = \tau$.
Alors pour chaque solution $f \neq 0$ de l'équation (2.1.3)et pour toute fonction entière $\varphi(z) \neq 0$ satisfaisant $\sigma_2(\varphi) < \sigma(A_0)$, on a

$$\overline{\lambda}_2(f-\varphi) = \overline{\lambda}_2(f'-\varphi) = \overline{\lambda}_2(f''-\varphi) = \overline{\lambda}_2(f'''-\varphi) = \overline{\lambda}_2(f^{(i)}-\varphi) = \sigma_2(f) = \sigma(A_0) \qquad i \in \mathbb{N}$$

Exemple 2.3.1 *soit l'équationt suivant :*

$$f" + 2f' + \cos(z) f = 0$$

on a $A_1 = 2$, $A_0 = \cos(z)$ des fonctions entiére de plus $\sigma(A_1) = 0, \sigma(\ A_0) = 1$, donc $\sigma(A_1) < \sigma(A_0)$.
on prend

$$\varphi(z) = e^z, (\sigma_2(e^z) = 0)$$

donc

$$\sigma_2(e^z) < \sigma(\ \cos z).$$

alors

$$\begin{aligned} \overline{\lambda}_2(f - e^z) &= \overline{\lambda}_2(f' - e^z) = \overline{\lambda}_2(f'' - e^z) = \sigma_2(f) = \sigma(\cos z) \\ &\Rightarrow \overline{\lambda}_2(f - e^z) = \overline{\lambda}_2(f' - e^z) = \overline{\lambda}_2(f'' - e^z) = \sigma_2(f) = 1 \end{aligned}$$

Exemple 2.3.2 *soit l'équation suivant*

$$f" + e^z f' - \left(2 + e^{2z}\right) f = 0$$

on a

$$\sigma(e^z) = \sigma\left(2 + e^{2z}\right) = 1$$

et

$$\tau(e^z) = \frac{1}{\pi} \text{ et } \tau\left(2 + e^{2z}\right) = \frac{2}{\pi}$$

on prend $\varphi(z) = e^z$, donc

$$\sigma_2(e^z) < \sigma(2 + e^z)$$

alors

$$\overline{\lambda}_2(f - e^z) = \overline{\lambda}_2(f' - e^z) = \overline{\lambda}_2(f'' - e^z) = \sigma_2(f) = 1$$

Corollaire 2.3.1 : *sous les hypothése du théoreme* 2.3.1,*si* $\varphi(z) = z$, *pour chaque solution* $f \neq 0$ *de l'équation*(2.3.1) , *nous avons*

$$\overline{\lambda}_2(f - z) = \overline{\lambda}_2(f' - z) = \overline{\lambda}_2(f'' - z) = \overline{\lambda}_2(f''' - z) = \overline{\lambda}_2(f^{(i)} - z) = \sigma_2(f) = \sigma(A_0) \qquad i \in \mathbb{N}$$

Théorème 2.3.2 [16] :*soient* $A_j(z), j = 1, 2, ..., k-1$ *des polynômes et* $A_0(z)$ *une fonction entiére transcendante, alors pour chaque solution* $f \neq 0$ *de l'équation*(2.1.3) *et pour toute fonction entière* $\varphi(z) \neq 0$ *d'orde fini, on a :*

$\cdot$ *(i)* $\overline{\lambda}(f - \varphi) = \lambda(f - \varphi) = \sigma(f) = \infty$
$\cdot$ *(ii)* $\overline{\lambda}\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \lambda\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \sigma\left(f^{(i)} - z\right) = \infty \quad (i \geqslant 1, i \in \mathbb{N})$
Corollaire :sous les hypothése du théoreme 2.3.2, si $\varphi(z) = z$, pour chaque solution $f \neq 0$ de l'équation(2.1.3) , nous avons
$\cdot$ *(i)* $\overline{\lambda}(f - z) = \lambda(f - z) = \sigma(f) = \infty$
$\cdot$ *(ii)* $\overline{\lambda}\left(f^{(i)} - z\right) = \lambda\left(f^{(i)} - z\right) = \sigma\left(f^{(i)} - z\right) = \infty \quad (i \geqslant 1, i \in \mathbb{N})$

Théorème 2.3.3 [16] :*soient* $A_j(z), j = 0, 1, ..., k-1$ *des fonctions méromorphe satisfaisant* $\max\{\sigma(A_j : j = 1, 2, ...k-1\} < \sigma(A_0)$ *et* $\delta(\infty, A_0) > 0$. *Alors pour chaque solution méromorphe* $f \neq 0$ *de l"équation* (2.3.1) *et pour fonction méromrphe* $\varphi(z) \neq 0$ *satisfaisant* $\sigma_2(\varphi) < \sigma(A_0)$, *on a*

$$\overline{\lambda_2}(f^{(i)} - \varphi) = \lambda_2(f^{(i)} - \varphi) \geqslant \sigma(A_0) \qquad i = 0, 1, ..., k-1$$

où $f^{(0)} = f$.

Remarque 2.3.1 *:l'exemple suivant montre que le théorème*2.3.3 *n'est pas valide quand* $A_j(z), j = 0, 1, ..., k-1$ *ne vérifient pas la condition* $\max\{\sigma(A_j) : j = 1, 2, ..., k-1\} < \sigma(A_0)$

Exemple 2.3.3 *Pour l'équation*

$$f" + \frac{\exp(2z) + \exp(z) - 1}{1 - \exp(z)} f' + \frac{-\exp(2z)}{1 - \exp(z)} f = 0 \tag{2.3.1}$$

On obient que $f = \exp(\exp(z)) + \exp(z)$ est une solution de l'équation(2.3.2) .Et $\frac{\exp(2z)+\exp(z)-1}{1-\exp(z)}$, $\frac{-\exp(2z)}{1-\exp(z)}$ sont des fonction méromorphes ,de plus on a $\delta\left(\infty, \frac{-\exp(2z)}{1-\exp(z)}\right) = \frac{1}{2}$.On prend $\varphi(z) = \exp(z)$,alors $\sigma_2(\varphi) < \sigma\left(\frac{-\exp(2z)}{1-\exp(z)}\right)$ .Donc, on trouve que $\overline{\lambda_2}(f' - \varphi) = \overline{\lambda_2}\left(e^{e^z} e^z\right) = 0 \neq 1 = \sigma\left(\frac{-e^{2z}}{1-e^z}\right)$.

Corollaire 2.3.2 :*Sous les hypothèses du théorème*2.3.3 ,*si* $\varphi(z) = z$,*pour chaque solution méromorphe* $f \neq 0$ *de l'équation*(2.3.1) ,*àn a*

$$\overline{\lambda}_2(f^{(i)} - z) = \lambda_2\left(f^{(i)} - z\right) \geqslant \sigma_2(A_0) \qquad (i = 0, 1, ...)$$

où $f^{(0)} = f$.

Remarque 2.3.2 *:*

Dans le théoreme2.1.2 , si $ab \neq 0$ et $a = cb(0 < c < 1)$, c'est facile de voir que $\sigma(A_1 \exp(az)) = \sigma(A_2 \exp(bz)) = 1$ et $\tau(A_1 \exp(az)) =\mid a \mid< \tau(A_2 \exp(bz)) =\mid b \mid$.
Du théoreme2.3.1 , pour chaque solution $f \neq 0$ de l'équation(2.1.3) et pour toute fonction entière $\varphi(z) \neq 0$ avec $\sigma_2(\varphi) < 1$, on a $\overline{\lambda_2}(f - \varphi) = \overline{\lambda_2}(f' - \varphi) = \overline{\lambda_2}(f'' - \varphi) = 1$.
Donc le théoreme2.1.2 est une extension partielle du théoréme2.3.2 . le théorème2.3.3 est une amélioration du théorème 2.1.3 .Le théorème 2.3.3 et le corollaire 2.3.3 sont des amélioration du théorème 2.1.4 .

2.4 Preuves des théorémes

2.4.1 preuve du théorème 2.3.1

Pour démontrer la conclution du théorème2.1.3 , on a considère deux cas :
Cas 1 : supposons que $\max\{\sigma(A_j) : j = 1, 2, ..., k-1\} < \sigma(A_0) < \infty$.
(i) Premièrement, on démontre que $\overline{\lambda}_2(f - \varphi) = \sigma_2(f)$.
Supposons que $f \neq 0$ est une solution de (2.1.3), de [6], on a $\sigma_2(f) = \sigma(A_0)$.
Posons $g = f - \varphi$. Comme $\sigma_2(f) = \sigma(A_0)$, alors

$$\sigma_2(g) = \sigma_2(f) = \sigma(A_0) \qquad \text{et} \qquad \overline{\lambda}_2(g) = \overline{\lambda}_2(f - \varphi)$$

Par le lemme 2.2.1 , on obtient que g satisfait l'équation (2.2.1). posons

$$F = \varphi^{(k)} + A_{k-1}\varphi^{(k-1)} + ... + A_0\varphi$$

Si $F = 0$, de [6], on a $\sigma_2(\varphi) = \sigma(A_0)$, on obtient une contradiction, alors $F \neq 0$, par le lemme2.2.15 , on a

$$\overline{\lambda}_2(g) = \lambda_2(g) = \sigma_2(g) = \sigma(A_0)$$

Donc, on a

$$\overline{\lambda}_2(f - \varphi) = \lambda_2(f - \varphi) = \sigma_2(f) = \sigma(A_0)$$

(ii) Deuxiémement, on preuve que $\overline{\lambda}_2(f' - \varphi) = \sigma_2(f)$. Posons $g_1 = f' - \varphi$, alors $\sigma_2(g_1) = \sigma_2(f) = \sigma(A_0)$. Par lemme2.2.2, on obtient que g_1 satisfait l'équation (2.2.2).Posons

$$F_1 = \varphi^{(k)} + U^1_{k-1}\varphi^{(k-1)} + ... + U^1_0\varphi$$

,où U^1_j $(j = 0, 1, ..., k-1)$ dans le lemme2.2.2 . Si $F_1 = 0$, par lemme2.2.7 et lemme2.2.8 , on a $\sigma_2(\varphi) \geqslant \sigma(A_0)$, une contradiction avec $\sigma_2(\varphi) < \sigma(A_0)$.Donc $F_1 \neq 0$. Par lemme2.2.15 , on obtient

$$\overline{\lambda}_2(f - \varphi) = \lambda_2(f' - \varphi) = \sigma_2(f)$$

.
(iii) Maintenant, on prouve que $\overline{\lambda}_2(f'' - \varphi) = \sigma_2(f)$. Posons $g_2 = f'' - \varphi$, alors $\sigma_2(g_2) = \sigma_2(f) = \sigma(A_0)$. Par le lemme 2.2.3 , on obtient que g_2 satisfait l'équation (2.2.3). Posons

$$F_2 = \varphi^{(k)} + U^2_{k-1}\varphi^{(k-1)} + ... + U^2_0\varphi$$

, où $U_j^2(j = 0, 1, ..., k-1)$ sont donnés dans le lemme2.2.3. Si $F_2 = 0$, par le lemme2.2.7 et lemme2.2.8 , on a $\sigma_2(\varphi) \geqslant \sigma(A_0)$, une contaradiction avec $\sigma_2(\varphi) < \sigma(A_0)$. Donc $F \neq 0$. Par lemme2.2.15, on obtient

$$\overline{\lambda}_2(f'' - \varphi) \ = \lambda_2(f'' - \varphi) = \sigma_2(f)$$

(iv) Posons $g_3 = f''' - \varphi$. Des lemmes$2.2.4, 2.2.7, 2.2.8, 2.2.15$, en utilisation le même raisonnement que dans le cas (iii), on obtient

$$\overline{\lambda}_2(f'' - \varphi) \ = \lambda_2(f'^{(3)} - \varphi) = \sigma_2(f)$$

(v) On prouve que $\overline{\lambda}_2(f^{(i)} - \varphi) = \sigma_2(f)(i \geqslant 3, i \in \mathbb{N})$.posons $g_i = f^{(i)} - \varphi$, alors $\sigma_2(g_i) = \sigma_2(f) = \sigma(A_0)$. Par le lemme 2.2.5, nous avons g_i satisfait l'équation (2.2.5). posons

$$F_i = \varphi^{(k)} + U_{k-1}^i \varphi^{(k-1)} + ... + U_0^i \varphi$$

, où $U_j^i(j = 0, 1, ..., k-1; i \in \mathbb{N})$ sont donnés dans le lemme 2.2.5. Si $F_i = 0$, par le lemme 2.2.7 et lemme 2.2.8 , on a $\sigma_2(\varphi) \geqslant \sigma(A_0)$ une contaradiction avec $\sigma_2(\varphi) < \sigma(A_0)$. Donc $F_i \neq 0$. Par lemme 2.2.15, on obtient

$$\overline{\lambda}_2(f^{(i)} - \varphi) = \lambda_2(f^{(i)} - \varphi) = \sigma_2(f)$$

.

Cas 2. Supposons que $0 < \sigma(A_{k-1}) = ... = \sigma(A_1) = \sigma(A_0) < \infty$ et $\max\{\tau(A_j) : j = 0, 1, ..., k-1\} = \tau_1 < \tau(A_0) = \tau$.
(i) Montrons que $\overline{\lambda}_2(f - \varphi) = \sigma_2(f)$. Supposons que $f \neq 0$ est une solution de(2.1.6).Du lemme2.2.16 , $\sigma_2(f) = \sigma(A_0) > 0$.posons $g = f - \varphi$. Comme $\varphi \neq 0$ est une fonction entière satisfait $\sigma_2(\varphi) < \sigma(A_0)$,alors on a $\sigma_2(g) = \sigma_2(f) = \sigma(A_0)$ et $\overline{\lambda}_2(g) = \overline{\lambda}_2(f - \varphi)$.
Par le lemme2.2.1 , on obtient que g satisfait l'équation (2.2.1). Si $F = 0$, par le lemme 2.2.16 , on a $\sigma_2(\varphi) = \sigma_2(A_0)$, une contradiction. Donc $F \neq 0$.
Des hypothéses du théorème 2.3.1, on obtient

$$\max\{\sigma_2(F), \sigma_2(A_j) : j = 0, 1, ..., k-1\} < \sigma_2(g) = \sigma_2(A_0)$$

Du lemme 2.2.15 (ii), on a

$$\overline{\lambda}_2(f - \varphi) \ = \lambda_2(f - \varphi) = \sigma_2(f) = \sigma(A_0).$$

(ii) Mantenant on prouve que $\overline{\lambda}_2(f' - \varphi) \ = \sigma_2(f)$. posons $g_1 = f' - \varphi$. Comme $\sigma_2(\varphi) < \sigma(A_0)$, alors on a $\sigma_2(g_1) = \sigma_2(f) = \sigma(A_0)$.
Par le lemme 2.2.2, on obtient que g_1 satisfait l'équation (2.2.5). Si $F_1 = 0$, par le lemme 2.2.11 et lemme 2.2.14 , on a $\sigma_2(\varphi) \geqslant \sigma(A_0)$, alors on a une contradiction avec $\sigma_2(\varphi) < \sigma(A_0)$, Donc, on a $F_1 \neq 0$.
De (2.2.5)et le lemme 2.2.15, on obtient

$$\overline{\lambda}_2(f' - \varphi) \ = \lambda_2(f' - \varphi) = \sigma_2(f) = \sigma(A_0) \qquad (i \in \mathbb{N})$$

Similaire au argument de cas (1)(iii)(v) et en utilisant les lemmes $2.2.3 - 2.2.5 - 2.2.11 - 2.2.14$ on obitient

$$\overline{\lambda}_2(f^{(i)} - \varphi) \ = \lambda_2(f^{(i)} - \varphi) = \sigma_2(f) = \sigma(A_0) \qquad (i \in \mathbb{N})$$

2.4.2 Preuve du théorème 2.3.2

Comme $A_j(z)$ $(j = 1, 2, ..., k - 1)$ sont des polynômes et $A_0(z)$ est une fonction entiére transcendante, alors nous avous que $A_j(z)$ $(j = 0, 1, 2, ..., k - 1)$ satisfaient la condition du théorème2.3.1 .
En utilisaion la même méthode de la preuve du théorème 2.3.1 et le lemme 2.2.15, on obtient facilement la conclusion de théorème 2.3.2

2.4.3 Preuve du théorème 2.3.3

selon les conditions du théorème 2.3.3 , on peut trouver facilement la conclution de théorème2.3.3 en utilisant la même méthode de la preuve du théorème 2.3.1 et le lemme 2.2.15 .

CONCLUSION

Au cours de ces dernières années, une recherche active s'est développée sur l'étudede la croissance et la distribution des valeurs notamment les zéros et les points fixes des solutions et leurs dérivées des équations différentielles dans le plan
en utilisant la théorie de R. Nevanlinna, Dans cette mémoire, on a étudié certains problèmes liés à l'ordre de croissance et à la distribution des valeurs notamment les zéros et les points fixes des solutions et leurs dérivées des équations différentielles dans le plan.
Des résultats importants on été obtenus sur les équations homogènes et non homogènes à Coefficients fonctions entières et fonctions méromorphes transcendantes. L'outil principal utilisé dans cette étude étant la théorie de Nevanlinna. Cette théorie est la plus approprié dans l'étude des équations différentielles

Bibliographie

[1] **Amemmiya, I, Ozawa, M** Non-existence of finite order solutions of $\omega" + e^{-z}\omega' + Q(z)\omega = 0$,Hokkaido Mathe.J.10, 1-17 (1981).

[2] **Belaïdi, B, Al Farissi** Differentail polynomails generated by some complex lineard ifferentail equations withe meromorphic coefficients , Glas,Mat, 43(2), 363-373 (2008).

[3] **Chen, ZX** On the hyper ordre of solution of some second order linear differentail equations, Acta Math, Sin, Engl, Ser, 18(1), 79-88 (2002).

[4] **Chen, ZX** The growthe of solution of the differentail equation $f" + e^{-z}f' + Q(z)f = 0$,Sci, China Ser , A 31, 775-784 (2001) (in Chinese).

[5] **Chen, ZX, Shon, KH** The relation betwen solution of class of second ordre differentail equation with function of small growth, Chin, Ann, Math, Ser, A 27(A4), 431-442 (2006) (Chinese).

[6] **Chen, ZX, Yang, CC** Quantitative estimations on the zrro and growth of entier solutions of linear differentail equations, Complexe Var, Elliptic Equ, 42, 119-133 (2000).

[7] **Frei, M** Uber die subnormalen losungen der differentailgeichung $\omega"+e^{-z}\omega'+(konst)\,\omega = 0$, Comment, Math,Helv,36,1-8 (1962)

[8] **Gundersen, CG** Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function, plus similar estimates, J.Lond, Mathe,Soc, 305(2),88-104 (1988)

[9] **Gundersen, CG** On the quations of whether $f" + e^{-z}f' + B(z)f = 0$ can admit a solution $f \neq 0$ of finit order.Proc. R.Soc. Edinb, Sect.A, Math.102,9-17 (1986)

[10] **Hayman, W** Meromorphic Functions. Clarendon, Oxiord (1964)

[11] **Lain, I** Nevanllinna theory and complex c. de Gruyter, Berlin (1993)

[12] **Shon, KH** On The growthe of entier function satisfiying second order lineair differentail equation.Bull.Korean Math. Soc 3, 487-496 (1996)

[13] **Tu, J, Long, T** Oxillation of complex high order linear differentail equations with coefficients of finite iterated order. Electron.J.Qual.Theory Differ.Equ.66, 1-13 (2009)

[14] **Tu, Z-X Xuan, H-Y Xu** On the iterated exponent of convergence of zeros of $f^{(j)} - \varphi$, Adv, Differ, equ, 2013,1-15 (2013)

[15] **Tu, J, Yi, CF** On the growth of solutions of class of higher order linear differentail equations with coefficients having the same order.J.Math.Anal Appl. 340,487-497 (2008)

[16] **Xu, Hong-Yan, Jin, Zheng, Xiu-Min** On the hyper exponent of convergence of zeros of$f^{(j)} - \varphi$ of higher order lineaire differeential equations.Adv.Differeential Equ.(2012).114,16 pp

[17] **Xu, HY, Tu, J, Zheng, XM** On the typer exponent of convergence of zeros of higher order linear differentail equations , Adv, Differ Equ, 2012, 114 (2012)