REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET SCIENCES DE LA VIE
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Magistèr en Mathématiques

Par

Horiya DIALA

OPTION : ANALYSE SPECTRALE ET MICRO LOCALISATION

Sujet du magistère

Critères de régularité des solutions faibles des équations magnétohydrodynamique (MHD)

Composition du jury de soutenance

Amina	**LAHMAR-BENBERNOU**	**Président**	**prof**	**U.MOSTAGANEM**
Berrabah	**BENDOUKHA**	**Examinateur**	**prof**	**U.MOSTAGANEM**
Mekki	**TERBECHE**	**Examinateur**	**prof**	**U.ORAN**
Sadek	**GALA**	**Encadreur**	**M.C**	**U.MOSTAGANEM**

Année universitaire 2009-2010.

Remerciments

Je remercie tout d'abord mon Dieu qui m'a donné de la volonté et surtout de la patience pour réaliser ce travail.

Ma gratitude va à ma famille ; mes parents ; mes sœurs ; mes frères ; et surtout mon grand père pour leurs encouragements, aide, disponibilité et présence effective.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mon encadreur Monsieur S. GALA qui a supervisé ce travail de recherche dont il est l'initiateur. Je n'oublierais pas également de remercier chaleureusement Madame BENBERNOU professeur à l'université de Mostaganem par sa générosité ; elle ma guidé tout au long de mes études.

Je tiens à adresser mes vifs remerciements à Monsieur B.BENDOUKHA professeur à l'université de Mostaganem et Monsieur M.TERBECHE professeur à l'université d'Oran pour leurs constants encouragements et précieuses remarques et merci pour vos critiques, vos conseils et simplement, pour l'intérêt que vous portez à mon travail.

Table des matières

INTRODUCTION

La magnétohydrodynamique (MHD) est une discipline scientifique qui décrit le comportement d'un fluide conducteur du courant électrique (liquide ou gaz appelé plasma) en présence de champs électromagnétiques. C'est une généralisation de l'hydrodynamique (appelée plus communément mécanique des fluides, définie par les équations de Navier-Stokes) couplée à l'électromagnétisme (équations de Maxwell). Entre la mécanique des fluides « classique » et la magnétohydrodynamique, se situe l'électro hydrodynamique ou mécanique des fluides ionisés en présence de champs électriques (électrostatique), mais sans champ magnétique.
En mécanique des fluides, les équations de Navier-Stokes sont des équations aux dérivées partielles non-linéaires qui décrivent le mouvement des fluides par exemple fluide de Stokes est un fluide visqueux lorsqu'il s'écoule lentement en un lieu étroit ou autour d'un petit objet.
La MHD est utilisée de manière théorique dans le confinement des plasmas (stabilisation, expulsion ou compression), elles gouvernent par exemple les mouvements de l'air de l'atmosphère, les courants océaniques, l'écoulement de l'eau dans un tuyau, et de nombreux autres phénomènes d'écoulement de fluides. Elles sont nommées d'après deux physiciens du XIXe siècle, Claude Navier et George Stokes.
Dans ce travail, on considère les équations magnétohydrodynamique (MHD) visqueuse et incompressible en dimension trois :

$$\left\{\begin{array}{c} \partial_t u - \triangle u + u \cdot \nabla u - b \cdot \nabla b + \nabla p = 0, \\ \partial_t b - \triangle b + u \cdot \nabla b - b \cdot \nabla u = 0, \\ \nabla \cdot u = \nabla \cdot b = 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \qquad b(x,0) = b_0\left(x\right), \end{array}\right.$$

- t représente le temps ;
- $u = u(x,t) \in \mathbb{R}^3$désigne le champ de vitesse ;
- $b \in \mathbb{R}^3$ désigne le champ magnétique ;
- $p = p(x,t)$ désigne le scalaire de la pression ;

- u_0 et b_0 sont le champ de vitesse initiale et le champ magnétique initiale avec l'équation d'incompressibilité $\nabla \cdot u_0 = \nabla \cdot b_0 = 0$;

Pour simplifier, on suppose que les forces externes aient un scalaire potentiel inclus dans le gradient de la pression.

Il est bien connu [7] que le problème précédant est localement bien posé pour toute u_0, $b_0 \in H^s(\mathbb{R}^3)$ avec $s \geq 3$. Quelques critères de type de Serrin fondamentaux en terme de régularité de la vitesse a été fait seulement dans [1] et [18] de façon indépendante. Récemment, des extensions sont basées sur ces deux documents de base, Chen, Miao et Zhang [10, 11] ont prouvé la régularité par la condition $\triangle_j(\nabla \times u)$; Zhou et Gala [19] ont prouvé la régularité pour u et ∇u dans les espaces de multiplicateurs ; Wang [16] à prouvé la régularité pour $u \in L^2(0, T; BMO)$. et Y.Zhou [17] à prouvé la régularité par la condition $\nabla \times u$ la rotation de vitesse.

Ce travail est décomposé en trois chapitres. Le premier chapitre est contient des espaces fonctionnels et outils d'analyse Harmonique. Dans le deuxième chapitre on a étudié le critère de régularité des solutions faibles des équations magnétohydrodynamique dans les espaces de multiplicateurs. Dans le dernier chapitre, on a étudié le critère de régularité des solutions faibles des équations magnétohydrodynamique en termes de champ rotationnel (champ de vorticity).

Chapitre 1

Espaces fonctionnels et outils d'analyse Harmonique

Commençons par rappeler la définition des espaces L^p.

Définition 1.0.1 *Pour* $1 \leq p < \infty$ *, on définit l'espace* L^p *comme l'ensemble des fonctions mesurables de* $\mathbb{R}^3$ *dans* $\mathbb{R}$ *telles que.*

$$\|f\|_{L^p} = \left[\int_{\mathbb{R}^3} |f(x)|^p \, dx \right]^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

S'il existe un $C \in \mathbb{R}_+$ *tel que* $|f| \leq C$ *presque partout, on dit que* $f \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ *avec la nome* $\|\cdot\|_{L^\infty}$ *définie par*

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf \{C \in \mathbb{R}_+ ; |f| \leq C \text{ presque partout}\}.$$

Rappelons le lemme de Gronwall suivant [12] *:*

Lemme 1.0.1 *Soient* $T \in \mathbb{R}_+$ *et* $C \in \mathbb{R}_+$*. Soit* $\varphi \in L^1([0,T])$ *une fonction positive, et soit enfin* $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ *positive, vérifiant*

$$f(t) \leq C + \int_0^t f(s)\varphi(s)ds \quad , \quad \forall t \in [0,T].$$

Alors f vérifie :

$$f(t) \leq C.\exp(\int_0^t \varphi(s)ds) \quad , \forall t \in [0,T].$$

Rappelons également la définition des espaces L^p_{loc}

Définition 1.0.2 *Soit* $1 \leq p < \infty$. *On dit qu'une fonction* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *appartient à* $L^p_{loc}(\mathbb{R}^3)$ *si* $f\chi_k \in L^p(\mathbb{R}^3)$ *pour tout compact* $K \subset \mathbb{R}^3$, *où* χ_k *est la fonction caractéristique.*

1.1 Les espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev jouent un rôle très important dans l'étude des équations aux dérivées partielles [2] et [4].

Définition 1.1.1 *Soit* $r \in \mathbb{R}$. *On définie l'espace de Sobolev inhomogène* H^r *par*

$$H^r\left(\mathbb{R}^3\right) = \left\{u \in S'\left(\mathbb{R}^3\right);\ (1+|\xi|^2)^{\frac{r}{2}}.\widehat{u}(\xi) \in L^2\ \left(\mathbb{R}^3\right)\right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|^2{}_{H^r} = \left\|\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{r}{2}}\ \widehat{u}(\xi)\right\|^2_{L^2} < +\infty.$$

Remarque 1.1.1 *Les espaces* $H^r(\mathbb{R}^3)$ *sont des espaces de Hilbert munis du produit scalaire*

$$\langle u, v\rangle_{H^r} = \int_{\mathbb{R}^3} (1+|\xi|^2)^{\frac{r}{2}}.\widehat{u}(\xi)\,\overline{\widehat{v}(\xi)}d\xi.$$

De plus, si $r_1 \geq r_2$, on a $H^{r_1} \subset H^{r_2}$ et l'injection est continue.

Rappelons également la définition des espaces de Sobolev homogènes.

Définition 1.1.2 *Soit* $|r| < \frac{3}{2}$. *On définit l'espace de Sobolev homogène* $\dot{H}^r$ *comme étant la fermeture de* $S(\mathbb{R}^3)$ *muni de la norme*

$$\|u\|^2_{\dot{H}^r} = \||\xi|^r\ \widehat{u}(\xi)\|^2_{L^2} = \left\|\ (-\Delta)^{\frac{r}{2}}\,u\right\|^2_{L^2}.$$

Si $r = 0$, $\dot{H}^r(\mathbb{R}^3)$ *coïncide avec* $L^2(\mathbb{R}^3)$.
Comme conséquence de la définition de $\dot{H}^r$, *on a le lemme suivant :*

Lemme 1.1.1 *Soit* $f \in \dot{H}^r(\mathbb{R}^3)$, *et soit* $f_\lambda(x) = f(\lambda x)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}^3$*et pour tout* $\lambda > 0$. *Alors*

$$\|f_\lambda\|_{\dot{H}^r(\mathbb{R}^3)} = \lambda^{r-\frac{3}{2}}\,\|f\|_{\dot{H}^r(\mathbb{R}^3)} \qquad ; \forall r \in \left[0, \frac{3}{2}\right[.$$

Preuve. *Soit* $f \in \dot{H}^r(\mathbb{R}^3)$

$$\|f\|_{\dot{H}^r} = \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{2r}\left|\widehat{f}(\xi)\right|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}}$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned}
\|f_\lambda\|_{\dot{H}^r(\mathbb{R}^3)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{2r} \left|\widehat{f_\lambda}(\xi)\right|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{2r} \lambda^{-6} \left|\widehat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)\right|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\lambda z|^{2r} \lambda^{-6}\lambda^3 \left|\widehat{f}(z)\right|^2 dz\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \textit{avec } z = \frac{\xi}{\lambda} \\
&= \lambda^{\frac{2r-3}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |z|^{2r} \left|\widehat{f}(z)\right|^2 dz\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \lambda^{\frac{2r-3}{2}} \|f\|_{\dot{H}^r(\mathbb{R}^3)}
\end{aligned}$$

Donc

$$\|f_\lambda\|_{\dot{H}^r(\mathbb{R}^3)} = \lambda^{r-\frac{3}{2}} \|f\|_{\dot{H}^r(\mathbb{R}^3)}$$

□

Signalons aussi le résultat suivant qui nous sera fort utile :

Lemme 1.1.2 *Pour tout* $0 \le r \le 1$, *on a*

$$\|w\|_{\dot{H}^r} \le C \|\nabla w\|_{L^2}^r \|w\|_{L^2}^{1-r}.$$

Preuve. Pour tout $0 < r < 1$ on a

$$\|w\|_{\dot{H}^r} = \||\xi|^r \widehat{w}\|_{L^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{2r} |\widehat{w}(\xi)|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{2r} |\widehat{w}(\xi)|^{2r} |\widehat{w}(\xi)|^{2-2r} d\xi\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

On utilise l'inégalité de Hölder avec $p = \frac{1}{r}$ et $q = \frac{1}{1-r}$

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\xi\widehat{w}(\xi)|^{2r} |\widehat{w}(\xi)|^{2-2r} d\xi \le \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi\widehat{w}(\xi)|^2 d\xi\right)^r \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\widehat{w}(\xi)|^2 d\xi\right)^{1-r}$$

On trouve

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi \widehat{w}(\xi)|^{2r} |\widehat{w}(\xi)|^{2-2r} d\xi\right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^2 |\widehat{w}(\xi)|^2 d\xi\right)^{\frac{r}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\widehat{w}(\xi)|^2 d\xi\right)^{\frac{1-r}{2}} \\ &\leq \||\xi| \widehat{w}\|_{L^2}^r \|\widehat{w}\|_{L^2}^{1-r} \\ &\leq \|\nabla \widehat{w}\|_{L^2}^r \|\widehat{w}\|_{L^2}^{1-r}.\end{aligned}$$

D'aprés Plancherel $\|\widehat{w}\|_{L^2} = (2\pi)^{\frac{3}{2}} \|w\|_{L^2}$

Donc

$$\|w\|_{\dot{H}^r} \leq C \|w\|_{L^2}^{1-r} \|\nabla w\|_{L^2}^r.$$

□

De la définition des espaces de Sobolev, on déduit facilement que pour tout $0 \leq r < \frac{3}{2}$:

$$H^r(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow \dot{H}^r(\mathbb{R}^3).$$

Corollaire 1.1.1 *Signalons aussi le résultat d'inclusion suivant :*

$$\dot{H}^r(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^{\frac{6}{3-2r}}(\mathbb{R}^3),$$

Pour $0 \leq r < \frac{3}{2}$.

Chapitre 2

Critère de régularité des solutions faibles de l'équation magnétohydrodynamique dans les espaces de multiplicateurs homogène $\dot{X}_r(\mathbb{R}^3)$

2.1 Les espaces de multiplicateur homogène $\dot{X}_r(\mathbb{R}^3)$

L'utilisation des espaces de multiplicateurs pour étudier le problème de régularité pour les équations magnétohydrodynamique à été introduite par Lemarié-Rieusset [9] et [3] et aussi utilisée par Zhou-Gala [19]. Commençons par rappeler ce qu'est un espace de multiplicateurs.

Définition 2.1.1 *Pour $0 \leq r < \frac{3}{2}$, on définit l'espace de multiplicateurs homogène $\dot{X}_r$par*

$$\dot{X}_r(\mathbb{R}^3) = \left\{ f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^3) : \forall g \in \dot{H}^r(\mathbb{R}^3) \ fg \in L^2 \right\},$$

où $\dot{H}^r\left(\mathbb{R}^3\right)$ est la fermeture de l'espace $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^3\right)$ pour la norme

$$\|u\|_{\dot{H}^r} = \left\| (-\Delta)^{\frac{r}{2}} u \right\|_{L^2},$$

Sa norme est définit par

$$\|f\|_{\dot{X}_r} = \sup_{\|g\|_{\dot{H}^r} \leq 1} \|fg\|_{L^2.}$$

On a les propriétés suivantes [19] *:*

Proposition 2.1.1 *Soit* $0 \leq r < \frac{3}{2}$ *. On a*

1. $\|f(\cdot + x_0)\|_{\dot{X}_r} = \|f\|_{\dot{X}_r} \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^3,$
2. $\|f(\lambda \cdot)\|_{\dot{X}_r} = \frac{1}{\lambda^r} \|f\|_{\dot{X}_r}$; $\lambda > 0.$

L'intérêt de l'espace $\dot{X}_r$ *tient tout d'abord à son invariance par le changement d'échelle de l'équation :*

$$\|f_\lambda\|_{L^{\frac{2}{1-r}}\left(0,T;\dot{X}_r\right)} = \|f\|_{L^{\frac{2}{1-r}}\left(0,T;\dot{X}_r\right)}$$

Où $f_\lambda(x,t) = \lambda f\left(\lambda x, \lambda^2 t\right)$ *,* $\quad \forall \lambda > 0$ *et* $\quad \forall x \in \mathbb{R}^3,$

puis à la chaîne d'inclusions suivantes :

Proposition 2.1.2 *Pour* $0 \leq r < \frac{3}{2}$ *on a*

$$\dot{H}^{\frac{3}{2}-r} \subset L^{\frac{3}{r}} \subset \dot{X}_r.$$

La première inclusion est classique, on renvoie le lecteur à [5] *et nous démontrons seulement la dernière.*

Preuve. *Soit* $f \in L^{\frac{3}{r}}(\mathbb{R}^3)$ *d'aprée l'injection de Sobolev* $\dot{H}^r \subset L^q$ *avec* $\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{r}{3}$*.En utilisant l'inégalité de Hölder, il résulte que*

$$\begin{aligned} \|fg\|_{L^2} &\leq \|f\|_{L^{\frac{3}{r}}} \|g\|_{L^q} \\ &\leq \|f\|_{L^{\frac{3}{r}}} \|g\|_{\dot{H}^r}, \end{aligned}$$

et

$$\|f\|_{\dot{X}_r} = \sup_{\|g\|_{\dot{H}^r} \leq 1} \|f.g\|_{L^2} \leq C \|f\|_{L^{\frac{3}{r}}}$$

Donc $\|f\|_{\dot{X}_r} \leq \|f\|_{L^{\frac{3}{r}}}$. □

2.2 L'équation magnétohydrodynamique dans les espaces de multiplicateur

Définition 2.2.1 *L'équation magnétohydrodynamique en dimension trois définie comme suit :*

$$\begin{cases} \partial_t u - \triangle u + u \cdot \nabla u - b \cdot \nabla b + \nabla p = 0, \\ \partial_t b - \triangle b + u \cdot \nabla b - b \cdot \nabla u = 0, \\ \nabla \cdot u = \nabla \cdot b = 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \qquad b(x,0) = b_0(x), \end{cases} \tag{2.2.1}$$

où $u = u(x,t) \in \mathbb{R}^3$ est le champ de vitesse ; $b \in \mathbb{R}^3$ est le champ magnétique, $p = p(x,t)$ est le scalaire de la pression, tandis que u_0 et b_0 sont la vitesse initiale et le champ magnétique initiale avec $\nabla \cdot u_0 = \nabla \cdot b_0 = 0$ dans le sens de distribution.

Pour s'abstraire des difficultés dues aux condition aux limites, on suppose que le fluide remplit tout l'espace(donc x décrit $\mathbb{R}^3$ tout entier).

Nous employons les espaces fonctionnels suivants [13].

$C_{0,\sigma}^{\infty}(\mathbb{R}^3)$ désigne l'espace des fonctions φ tels que $\varphi \in (C_0^{\infty}(\mathbb{R}^3))^3$ et $div\ \varphi = 0$ c'est-à-dire

$$C_{0,\sigma}^{\infty}\left(\mathbb{R}^3\right) = \left\{\varphi \in \left(C_0^{\infty}\left(\mathbb{R}^3\right)\right)^3 : div\ \varphi = 0\right\} \subseteq \left(C_0^{\infty}\left(\mathbb{R}^3\right)\right)^3.$$

$L_{\sigma}^2(\mathbb{R}^3)$ est défini comme suit

$$L_{\sigma}^2\left(\mathbb{R}^3\right) = \overline{C_{0,\sigma}^{\infty}(\mathbb{R}^3)}^{\|\cdot\|_{L^2}} = \left\{u \in L^2\left(\left(\mathbb{R}^3\right)\right)^3 : div\ u = 0\right\}$$

$H_{\sigma}^r(\mathbb{R}^3)$ le complété de $C_{0,\sigma}^{\infty}$ dans $H^r(\mathbb{R}^3)$.

2.2.1 Les solutions faibles de L'équation magnétohydrodynamique au sens de Leray

Définition 2.2.2 [13] *Soient $(u_0, b_0) \in L_{\sigma}^2(\mathbb{R}^3)$ et $T > 0$. La fonction mesurable (u,b) sur $\mathbb{R}^3 \times (0,T)$ est dite solution faible de (1.1) sur $(0,T)$ si u vérifier les propriétés suivantes*

a)

$$(u,b) \in L^{\infty}\left((0,T); L_{\sigma}^2\right) \cap L^2\left((0,T); H_{\sigma}^1\right) \qquad \textit{pour tout } T > 0;$$

b) *$u(t)$ est continue par rapport le temps t de topologie faible de L_{σ}^2 avec*

$$\langle u(t), \phi\rangle \to \langle a, \phi\rangle \qquad \text{quand } t \to 0^+$$

Pour tout $\phi \in L_{\sigma}^2$.

2.3 critère de régularité pour solution faible aux équations (MHD) dans l'espace de multiplicateur homogène

Dans cette partie on a étudié le critère de régularité de solution faible de l'équation MHD dans l'espaces de multiplicateur homogène.

Nous sommes en mesure d'énoncer notre résultat :

Théorème 2.3.1 [19] *Supposons que la vitesse initiale et le champ magnétique* $u_0, b_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$ *.Si le champ de vitesse satisfait*

$$u \in L^{\frac{2}{1-r}}\left(0, T; \dot{X}_r\left(\mathbb{R}^3\right)\right)$$

avec $r \in [0,1[$ où le gradient de champ de vitesse satisfait

$$\nabla u \in L^{\frac{2}{1-\gamma}}\left(0, T; \dot{X}_\gamma\left(\mathbb{R}^3\right)\right)$$

avec $\gamma \in [0,1]$. Alors

$$(u, b) \in L^\infty\left(0, T; H^1\left(\mathbb{R}^3\right)\right) \cap L^2\left(0, T; H^2\left(\mathbb{R}^3\right)\right).$$

Donc la solution faible (u, b) dans C^∞.

Preuve. Tout d'abord, nous traitons le cas $u \in L^{\frac{2}{1-r}}(0, T; \dot{X}_r(\mathbb{R}^3))$ et $r \in [0,1[$. Par dérivation la première et la deuxième équation de(2.2.1)par rapport à x_k , nous prenons le produit scalaire avec $\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = \partial_k u$ et $\frac{\partial b_k}{\partial x_k} = \partial_k b$, respectivement et intégrer sur $\mathbb{R}^3$. On a la Première équation de (2.2.1)

$$\partial_t u - \triangle u + u \cdot \nabla u + \nabla p - b \cdot \nabla b = 0.$$

On dérive par rapport à x_k

$$\partial_t \partial_k u - \triangle \partial_k u + \partial_k u \cdot \nabla u + u \cdot \nabla \partial_k u + \nabla \partial_k p - \partial_k b \cdot \nabla b - b \cdot \nabla \partial_k b = 0;$$

on fait le produit scalaire avec $\partial_k u$

$$\langle \partial_t \partial_k u, \partial_k u \rangle - \langle \triangle \partial_k u, \partial_k u \rangle + \langle \partial_k u \cdot \nabla u, \partial_k u \rangle + \langle u \cdot \nabla \partial_k u, \partial_k u \rangle$$
$$+ \langle \nabla \partial_k p, \partial_k u \rangle - \langle \partial_k b \cdot \nabla b, \partial_k u \rangle - \langle b \cdot \nabla \partial_k b, \partial_k u \rangle = 0.$$

Or

$$\langle \nabla \partial_k p, \partial_k u\rangle = -\langle \partial_k p, \partial_k \ div\ u\rangle = 0 \qquad \text{car } div\ u = 0.$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2}\partial_t |\partial_k u|^2 \,dx + \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \partial_k u|^2 \,dx = -\int_{\mathbb{R}^3} (\partial_k u \cdot \nabla)\, u \cdot \partial_k u \ dx - \int_{\mathbb{R}^3} (u \cdot \nabla)\partial_k u \cdot \partial_k u \ dx$$
$$+ \int_{\mathbb{R}^3} (\partial_k b \cdot \nabla)\, b \cdot \partial_k u \ dx + \int_{\mathbb{R}^3} (b \cdot \nabla)\, \partial_k b \cdot \partial_k u \ dx.$$

Mais

$$-\int_{\mathbb{R}^3} (u \cdot \nabla)\partial_k u \cdot \partial_k u \ dx = 0.$$

Car

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} (u \cdot \nabla)\partial_k u \cdot \partial_k u \ dx &= \int_{\mathbb{R}^3} u \cdot \nabla \partial_k u \cdot \partial_k u \ dx \\
&= \sum_{i=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} u \cdot \partial_i \partial_k u \cdot \partial_k u \ dx \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} u \cdot \partial_i \left(\partial_k u \cdot \partial_k u\right)\ dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} u \cdot \nabla \left(\partial_k u \cdot \partial_k u\right)\ dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} div\,(u) \cdot \left(\partial_k u \cdot \partial_k u\right)\ dx \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\partial_k u\|_{L^2}^2 + \|\nabla \partial_k u\|_{L^2}^2 &= -\int_{\mathbb{R}^3} (\partial_k u \cdot \nabla)\, u \cdot \partial_k u \ dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^3} (\partial_k b \cdot \nabla)\, b \cdot \partial_k u \ dx + \int_{\mathbb{R}^3} (b \cdot \nabla)\, \partial_k b \cdot \partial_k u \ dx. \qquad (2.3.1)
\end{aligned}$$

Deuxième équation de (2.2.1)

$$\partial_t b - \triangle b + u \cdot \nabla b - b \cdot \nabla u = 0.$$

On dérive par rapport à x_k

$$\partial_t \partial_k b - \triangle \partial_k b + \partial_k u \cdot \nabla b + u \cdot \nabla \partial_k b - \partial_k b \cdot \nabla u - b \cdot \nabla \partial_k u = 0;$$

on fait le produit scalaire avec $\partial_k b$

$$\langle \partial_t \partial_k b, \partial_k b \rangle - \langle \triangle \partial_k b, \partial_k b \rangle + \langle \partial_k u \cdot \nabla b, \partial_k b \rangle + \langle u \cdot \nabla \partial_k b, \partial_k b \rangle - \langle \partial_k b \cdot \nabla u, \partial_k b \rangle - \langle b \cdot \nabla \partial_k u, \partial_k b \rangle = 0$$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} \partial_t \left| \partial_k b \right|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} \left| \nabla \partial_k b \right|^2 dx &= -\int_{\mathbb{R}^3} \left(\partial_k u \cdot \nabla \right) b \cdot \partial_k b \ dx - \int_{\mathbb{R}^3} \left(u \cdot \nabla \right) \partial_k b \cdot \partial_k b \ dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^3} \left(\partial_k b \cdot \nabla \right) u \cdot \partial_k b \ dx + \int_{\mathbb{R}^3} \left(b \cdot \nabla \right) \partial_k u \cdot \partial_k b \ dx.
\end{aligned}$$

Mais

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left(u \cdot \nabla \right) \partial_k b \cdot \partial_k b \ dx = 0.$$

Car

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} (u \cdot \nabla) \partial_k b \cdot \partial_k b \ dx &= \int_{\mathbb{R}^3} u \cdot \nabla \partial_k b \cdot \partial_k b \ dx \\
&= \sum_{i=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} u \cdot \partial_i \partial_k b \cdot \partial_k b \ dx \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} u \cdot \partial_i \left(\partial_k b \cdot \partial_k b \right) \ dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} u \cdot \nabla \left(\partial_k b \cdot \partial_k b \right) \ dx \\
&= -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} div \left(u \right) \cdot \left(\partial_k b \cdot \partial_k b \right) \ dx \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| \partial_k b \right\|_{L^2}^2 + \left\| \nabla \partial_k b \right\|_{L^2}^2 &= -\int_{\mathbb{R}^3} \left(\partial_k u \cdot \nabla \right) b \cdot \partial_k b dx + \int_{\mathbb{R}^3} \left(\partial_k b \cdot \nabla \right) u \cdot \partial_k b \ dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^3} \left(b \cdot \nabla \right) \partial_k b \cdot \partial_k b \ dx. \qquad (2.3.2)
\end{aligned}$$

Avec

$$\int_{\mathbb{R}^3} (b\cdot\nabla)\,\partial_k b\cdot\partial_k u\ dx+\int_{\mathbb{R}^3} (b\cdot\nabla)\,\partial_k u\cdot\partial_k b\ dx=0$$

Par l'intégration par partie on trouve

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} (b\cdot\nabla)\,\partial_k b\cdot\partial_k u\ dx &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}(b_i\cdot\partial_i\partial_k b_j)\cdot\partial_i u_j dx\\ &= -\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}(\partial_i b_j\cdot b_j)\cdot\partial_k\partial_i u_j dx\\ &= -\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} b_j\cdot\partial_k\partial_i u_j\cdot\partial_i b_j dx\\ &= -\int_{\mathbb{R}^3}(b\cdot\nabla)\,\partial_k u\cdot\partial_k b\ dx\end{aligned}$$

On fait la somme de (2.3.1)et(2.3.2) on obtient

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\partial_k u\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla\partial_k u\right\|_{L^2}^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\partial_k b\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla\partial_k b\right\|_{L^2}^2\\ =\ & -\int_{\mathbb{R}^3}(\partial_k u\cdot\nabla)\,u\cdot\partial_k u\ dx+\int_{\mathbb{R}^3}(\partial_k b\cdot\nabla)\,b\cdot\partial_k u\ dx\\ & -\int_{\mathbb{R}^3}(\partial_k u\cdot\nabla)\,b\cdot\partial_k b dx+\int_{\mathbb{R}^3}(\partial_k b\cdot\nabla)\,u\cdot\partial_k b dx\\ =\ & A_1+A_2+A_3+A_4. \qquad (2.3.3)\end{aligned}$$

Pour le premier terme A_1

$$\begin{aligned}A_1 &= -\int_{\mathbb{R}^3}(\partial_k u\cdot\nabla)\,u\cdot\partial_k u\ dx\\ &= -\int_{\mathbb{R}^3}((\partial_k u_1,\partial_k u_2,\partial_k u_3)\cdot(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\frac{\partial}{\partial x_3}))u\cdot(\partial_k u_1,\partial_k u_2,\partial_k u_3)\ dx_1dx_2dx_3\\ &= -\int_{\mathbb{R}^3}(\partial_k u_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\partial_k u_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\partial_k u_3\frac{\partial}{\partial x_3})\cdot(u_1,u_2,u_3)(\partial_k u_1,\partial_k u_2,\partial_k u_3)dx_1dx_2dx_3\\ &= -\int_{\mathbb{R}^3}(\partial_k u_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\partial_k u_2\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\partial_k u_3\frac{\partial u_1}{\partial x_3},\partial_k u_1\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\partial_k u_2\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\partial_k u_3\frac{\partial u_2}{\partial x_3},\partial_k u_1\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\\ &\quad+\partial_k u_2\frac{\partial u_3}{\partial x_2}+\partial_k u_3\frac{\partial u_3}{\partial x_3})(\partial_k u_1,\partial_k u_2,\partial_k u_3)dx_1dx_2dx_3\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\int_{\mathbb{R}^3} (\partial_k u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \partial_k u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \partial_k u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3})\ \partial_k u_1 + (\partial_k u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \partial_k u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \partial_k u_3 \frac{\partial u_2}{\partial x_3}) \partial_k u_2 \\
&\quad + (\partial_k u_1 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \partial_k u_2 \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \partial_k u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3}) \partial_k u_3 dx_1 dx_2 dx_3 \\
&= -\sum_{i,j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} (\partial_k u_i \cdot \partial_i u_j) \cdot \partial_k u_j dx \\
&= \sum_{i,j=1}^{3} \int (\partial_k u_i) u_j (\partial_i \partial_k u_j) dx
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\begin{aligned}
A_1 &\leq \|u \nabla u\|_{L^2} \left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2} \\
&\leq \|u\|_{\dot{X}_r} \|\nabla u\|_{\dot{H}^r} \left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2} ;
\end{aligned}
$$

On utilise lemme (1.1.2) avec $w = \nabla u$

$$
\|w\|_{\dot{H}^r} \leq \|\nabla w\|_{L^2}^r \|w\|_{L^2}^{1-r} ;
$$

On obtient

$$
A_1 \leq \|u\|_{\dot{X}_r} \|\nabla u\|_{L^2}^{1-r} \left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^{1+r} .
$$

Même estimation pour A_2

$$
\begin{aligned}
A_2 &= \int_{\mathbb{R}^3} (\partial_k b \cdot \nabla)\, b \cdot \partial_k u \ dx = \sum_{i=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \partial_k b \cdot \nabla b \cdot \partial_k u_i dx \\
&= -\sum_{i=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} (\partial_k \partial_k b \cdot \nabla b_i + \partial_k b \cdot \nabla \partial_k b_i) u_i dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^3} |u|\, |\nabla b| \left|\nabla^2 b\right| dx \\
&\leq \|u\|_{\dot{X}_r} \|\nabla b\|_{\dot{H}^r} \left\|\nabla^2 b\right\|_{L^2} \\
&\leq \|u\|_{\dot{X}_r} \|\nabla b\|_{L^2}^{1-r} \left\|\nabla^2 b\right\|_{L^2}^{1+r} .
\end{aligned}
$$

Pour le troisième terme A_3 on peut dominer comme suit

$$\begin{aligned}
A_3 &= -\int\limits_{\mathbb{R}^3} (\partial_k u \cdot \nabla)\, b \cdot \partial_k b dx = -\langle \partial_k u, \nabla b \cdot \partial_k b \rangle = \langle \partial_k (\nabla b \cdot \partial_k b)\,, u \rangle \\
&= \langle (\nabla \partial_k b \cdot \partial_k b + \nabla b \cdot \partial_k \partial_k b)\,, u \rangle \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^3} (\nabla \partial_k b \cdot \partial_k b + \nabla b \cdot \partial_k \partial_k b)\, u dx \\
&\leq \int\limits_{\mathbb{R}^3} |u|\, |\nabla b| \left|\nabla^2 b\right| dx \ \leq \|u\|_{\dot{X}_r} \|\nabla b\|_{L^2}^{1-r} \left\|\nabla^2 b\right\|_{L^2}^{1+r}.
\end{aligned}$$

Pour dèrnier terme A_4on peut estimer comme suit

$$\begin{aligned}
A_4 &= \int\limits_{\mathbb{R}^3} (\partial_k b \cdot \nabla)\, u \cdot \partial_k b \ dx \\
&= \sum_{i,j=1}^{3} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \partial_k b_i \cdot \partial_j u_i \cdot \partial_k b_i \ dx \\
&= -\sum_{i,j=1}^{3} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \partial_k b_j \cdot u_i \cdot \partial_k \partial_j b_i \ dx \\
&\leq \int\limits_{\mathbb{R}^3} |u|\, |\nabla b| \left|\nabla^2 b\right| dx \\
&\leq \|u\|_{\dot{X}_r} \|\nabla b\|_{L^2}^{1-r} \left\|\nabla^2 b\right\|_{L^2}^{1+r}.
\end{aligned}$$

L' inégalité précédente (2.3.3) devient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \|\partial_k u\|_{L^2}^2 + \|\nabla \partial_k u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \|\partial_k b\|_{L^2}^2 + \|\nabla \partial_k b\|_{L^2}^2 \\
\leq\ & \|u\|_{\dot{X}_r} \|\nabla u\|_{L^2}^{1-r} \left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^{1+r} + 3 \|u\|_{\dot{X}_r} \|\nabla b\|_{L^2}^{1-r} \left\|\nabla^2 b\right\|_{L^2}^{1+r}.
\end{aligned}$$

Pour $1 \leq k \leq 3$, on a

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \|\nabla b\|_{L^2}^2 + \left\|\nabla^2 b\right\|_{L^2}^2 \\
\leq\ & \|u\|_{\dot{X}_r} \|\nabla u\|_{L^2}^{1-r} \left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^{1+r} + 3 \|u\|_{\dot{X}_r} \|\nabla b\|_{L^2}^{1-r} \left\|\nabla^2 b\right\|_{L^2}^{1+r}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \left[\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla b\|_{L^2}^2\right] + \left\|\nabla^2 b\right\|_{L^2}^2 + \left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2 \\
\leq\ & \|u\|_{\dot{X}_r} \|\nabla u\|_{L^2}^{1-r} \left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^{1+r} + 3 \|u\|_{\dot{X}_r} \|\nabla b\|_{L^2}^{1-r} \left\|\nabla^2 b\right\|_{L^2}^{1+r}.
\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Young, on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \left[\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla b\|_{L^2}^2\right] + \left\|\nabla^2 b\right\|_{L^2}^2 + \left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2 \\
\leq\ & \left(\|u\|_{\dot{X}_r}^{\frac{2}{1-r}} \|\nabla u\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1-r}{2}} \left(\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1+r}{2}} + 3 \left(\|u\|_{\dot{X}_r}^{\frac{2}{1-r}} \|\nabla b\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1-r}{2}} \left(\left\|\nabla^2 b\right\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1+r}{2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\nabla b\|_{L^2}^2\right]+\left\|\nabla^2 b\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2\\
\leq\;& C_1\left[\left(\|u\|_{\dot{X}_r}^{\frac{2}{1-r}}\|\nabla u\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1-r}{2}}\right]^{\frac{2}{1-r}}+\frac{1}{2}\left[\left(\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1+r}{2}}\right]^{\frac{2}{1+r}}\\
&+C_2\left[\left(\|u\|_{\dot{X}_r}^{\frac{2}{1-r}}\|\nabla b\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1-r}{2}}\right]^{\frac{2}{1-r}}+\frac{1}{2}\left[\left(\left\|\nabla^2 b\right\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1+r}{2}}\right]^{\frac{2}{1+r}}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\nabla b\|_{L^2}^2\right]+\left\|\nabla^2 b\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2\\
\leq\;& C_1\|u\|_{\dot{X}_r}^{\frac{2}{1-r}}\|\nabla u\|_{L^2}^2+\frac{1}{2}\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2+C_2\|u\|_{\dot{X}_r}^{\frac{2}{1-r}}\|\nabla b\|_{L^2}^2+\frac{1}{2}\left\|\nabla^2 b\right\|_{L^2}^2\\
\leq\;& \frac{C}{2}\|u\|_{\dot{X}_r}^{\frac{2}{1-r}}\left(\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\nabla b\|_{L^2}^2\right)+\frac{1}{2}\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2+\frac{1}{2}\left\|\nabla^2 b\right\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

On implique que

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left[\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\nabla b\|_{L^2}^2\right]+\left\|\nabla^2 b\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2\\
\leq\;& C\|u\|_{\dot{X}_r}^{\frac{2}{1-r}}\left(\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\nabla b\|_{L^2}^2\right). \qquad (2.3.4)
\end{aligned}$$

On applique lemme(1.0.1) à (2.3.4) on obtient

$$\underset{0\leq t\leq T}{Sup}\left[\|\nabla u(.,t)\|_{L^2}^2+\|\nabla b(.,t)\|_{L^2}^2\right]\leq\left(\|\nabla u_0\|_{L^2}^2+\|\nabla b_0\|_{L^2}^2\right)\exp\left(C\int_0^T\|u(.,t)\|_{\dot{X}_r}^{\frac{2}{1-r}}dt\right).$$

Puisque

$$u\in L^{\frac{2}{1-r}}(0,T;\dot{X}_r(\mathbb{R}^3)).$$

Et

$$\left(\|\nabla u_0\|_{L^2}^2+\|\nabla b_0\|_{L^2}^2\right)<+\infty$$

Alors

$$\underset{0\leq t\leq T}{Sup}\left[\|\nabla u(.,t)\|_{L^2}^2+\|\nabla b(.,t)\|_{L^2}^2\right]<+\infty$$

Donc

$$\underset{0\leq t\leq T}{Sup}\|u(.,t)\|_{H^1}^2<+\infty \quad et\ \underset{0\leq t\leq T}{Sup}\|b(.,t)\|_{H^1}^2<+\infty;$$

ce qui implique

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;H^1(\mathbb{R}^3))}^2<+\infty\ \ et\ \ \|b\|_{L^\infty(0,T;H^1(\mathbb{R}^3))}^2<+\infty;$$

d'ou

$$(u,b) \in L^{\infty}(0,T;H^{1}(\mathbb{R}^{3})).$$

D'autre coté on intègre(2.3.4) par rapport à t avec $0 \leq t \leq T$

$$\left[\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla b\|_{L^2}^2\right] - \left[\|\nabla u_0\|_{L^2}^2 + \|\nabla b_0\|_{L^2}^2\right] + \int_0^T \left[\left\|\nabla^2 b\,(.,t)\right\|_{L^2}^2 + \left\|\nabla^2 u\,(.,t)\right\|_{L^2}^2\right] dt$$

$$\leq \; C\int_0^T \|u\,(.,t)\|_{\dot{X}_r}^{\frac{2}{1-r}} \left(\|\nabla u\,(.,t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla b\,(.,t)\|_{L^2}^2\right) dt$$

$$\leq \; C'\int_0^T \|u\,(.,t)\|_{\dot{X}_r}^{\frac{2}{1-r}}\, dt$$

Car

$$(u,b) \in L^{\infty}(0,T;H^{1}(\mathbb{R}^{3})).$$

Donc

$$\int_0^T \left[\left\|\nabla^2 b\,(.,t)\right\|_{L^2}^2 + \left\|\nabla^2 u\,(.,t)\right\|_{L^2}^2\right] dt \;\leq \infty\,;$$

implique

$$\int_0^T \|b\,(.,t)\|_{H^2}^2\, dt + \int_0^T \|u\,(.,t)\|_{H^2}^2\, dt \;\leq \infty;$$

donc

$$(u,b) \in L^{2}(0,T;H^{2}(\mathbb{R}^{3})).$$

D'ou

$$(u,b) \in L^{\infty}(0,T;H^{1}(\mathbb{R}^{3})) \cap L^{2}(0,T;H^{2}(\mathbb{R}^{3})).$$

Pour $r = 1$ lemme (1.1.2)devient

$$\|w\|_{\dot{H}^1} = \|\nabla w\|_{L^2}\,.$$

Alors

$$A_1 \leq \|u\|_{\dot{X}_1} \left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2 \qquad \text{et} \qquad A_2 + A_3 + A_4 \leq 3\,\|u\|_{\dot{X}_1} \left\|\nabla^2 b\right\|_{L^2}^2,$$

On obtient l'inégalité suivante

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla b\|_{L^2}^2\right] + \left\|\nabla^2 b\right\|_{L^2}^2 + \left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2 \;\leq \|u\|_{\dot{X}_1} \left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2 + 3\,\|u\|_{\dot{X}_1} \left\|\nabla^2 b\right\|_{L^2}^2$$

$$\leq 3\left\|u\right\|_{\dot{X}_1}\left(\left\|\nabla^2 b\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2\right).$$

Aprés l'intégration par rapport a t

$$\left\|\nabla u\left(.,t\right)\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla b\left(.,t\right)\right\|_{L^2}^2-\left\|\nabla u_0\right\|_{L^2}^2-\left\|\nabla b_0\right\|_{L^2}^2+2\int_0^T\left[\left\|\nabla^2 b\left(.,t\right)\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^2 u\left(.,t\right)\right\|_{L^2}^2\right]dt$$

$$\leq\ 6\int_0^T\left[\left\|u\left(.,t\right)\right\|_{\dot{X}_1}\left(\left\|\nabla^2 b\left(.,t\right)\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^2 u\left(.,t\right)\right\|_{L^2}^2\right)\right]dt. \qquad (2.3.5)$$

Comme $(u_0,b_0)\in H^1$donc(2.3.5) devient

$$\left\|\nabla u_0\right\|_{L^2}^2\ +\left\|\nabla b_0\right\|_{L^2}^2\leq C.$$

$$\begin{aligned}\left\|\nabla u\left(.,t\right)\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla b\left(.,t\right)\right\|_{L^2}^2 &\leq 6\int_0^T\left[\left\|u\left(.,t\right)\right\|_{\dot{X}_1}\left(\left\|\nabla^2 b\left(.,t\right)\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^2 u\left(.,t\right)\right\|_{L^2}^2\right)\right]dt\\ &\quad -2\int_0^T\left[\left\|\nabla^2 b\left(.,t\right)\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^2 u\left(.,t\right)\right\|_{L^2}^2\right]dt+C\\ &\leq \left[6\left\|u\right\|_{L^\infty\left(0,T;\,\dot{X}_1\right)}-2\right]\left[\int_0^T\left[\left\|\nabla^2 b\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2\right]dt\right]+C\end{aligned}$$

Pour $\left\|u\right\|_{L^\infty\left(0,T;\,\dot{X}_1\right)}$trés petit $\left(\left\|u\right\|_{L^\infty\left(0,T;\,\dot{X}_1\right)}\leq\frac{\epsilon}{3}\leq\frac{1}{3}\right)$On trouve

$$\left\|\nabla u\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla b\right\|_{L^2}^2+2\left(1-\epsilon\right)\int_0^T\left[\left\|\nabla^2 b\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2\right]dt\leq C.$$

Donc

$$\begin{aligned}\left\|\nabla u\left(.,t\right)\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla b\left(.,t\right)\right\|_{L^2}^2 &< \infty\ \text{ et }\ \int_0^T\left[\left\|\nabla^2 b\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2\right]dt<\infty\\ \sup_{0\leq t\leq T}\left\|u\left(.,t\right)\right\|_{\dot{H}^1}^2 &< \infty\text{ et }\sup_{0\leq t\leq T}\left\|b\left(.,t\right)\right\|_{\dot{H}^1}^2<\infty\\ \int_0^T\left\|\nabla^2 b\left(.,t\right)\right\|_{L^2}^2dt &< \infty\ \text{ et }\int_0^T\left\|\nabla^2 u\left(.,t\right)\right\|_{L^2}^2dt<\infty\end{aligned}$$

Ceci donne

$$(u,b)\in L^{\infty}(0,T;H^{1}(\mathbb{R}^{3}))\cap L^{2}(0,T;H^{2}(\mathbb{R}^{3})).$$

Le cas $\nabla u\in L^{\frac{2}{1-\gamma}}(0,T;\ \dot{X}_{\gamma}(\mathbb{R}^{3}))$ et $\gamma\in[0.1]$,

$$\begin{aligned}
A_{1} &= \int_{\mathbb{R}^{3}}\partial_{k}u\cdot\nabla u\cdot\partial_{k}u\ dx\\
&\leq \int_{\mathbb{R}^{3}}|\nabla u|\,|\nabla u\nabla u|\,dx\\
&\leq \|\nabla u\nabla u\|_{L^{2}}\|\nabla u\|_{L^{2}}\\
&\leq \|\nabla u\|_{\dot{X}_{\gamma}}\|\nabla u\|_{\dot{H}^{\gamma}}\|\nabla u\|_{L^{2}}\\
&\leq \|\nabla u\|_{\dot{X}_{\gamma}}\|\nabla u\|_{L^{2}}^{2-\gamma}\left\|\nabla^{2}u\right\|_{L^{2}}^{\gamma}.
\end{aligned}$$

Même estimation pour A_2

$$\begin{aligned}
A_{2} &= \int_{\mathbb{R}^{3}}\partial_{k}b\cdot\nabla b\cdot\partial_{k}u\ dx\\
&\leq \int_{\mathbb{R}^{3}}|\nabla b|\,|\nabla b\nabla u|\,dx\\
&\leq \|\nabla b\nabla u\|_{L^{2}}\|\nabla b\|_{L^{2}}\\
&\leq \|\nabla u\|_{\dot{X}_{\gamma}}\|\nabla b\|_{L^{2}}^{2-\gamma}\left\|\nabla^{2}b\right\|_{L^{2}}^{\gamma}
\end{aligned}$$

Pour le troisième terme A_3 on peut dominer comme suit

$$\begin{aligned}
A_{3} &= -\int_{\mathbb{R}^{3}}\partial_{k}u\cdot\nabla b\cdot\partial_{k}b dx\\
&\leq \int_{\mathbb{R}^{3}}|\nabla u\nabla b|\,|\nabla b|\,dx\\
&\leq \|\nabla u\|_{\dot{X}_{\gamma}}\|\nabla b\|_{L^{2}}^{2-\gamma}\left\|\nabla^{2}b\right\|_{L^{2}}^{\gamma}
\end{aligned}$$

Pour le dèrnier terme A_4on peut estimer comme suit

$$\begin{aligned}
A_{4} &= \int_{\mathbb{R}^{3}}\partial_{k}b\cdot\nabla u\cdot\partial_{k}b\ dx\\
&\leq \int_{\mathbb{R}^{3}}|\nabla b\nabla u|\,|\nabla b|\,dx\\
&\leq \|\nabla u\|_{\dot{X}_{\gamma}}\|\nabla b\|_{L^{2}}^{2-\gamma}\left\|\nabla^{2}b\right\|_{L^{2}}^{\gamma}
\end{aligned}$$

Donc

$$A_2 + A_3 + A_4 \leq 3 \|\nabla u\|_{\dot{X}_\gamma} \|\nabla b\|_{L^2}^{2-\gamma} \left\|\nabla^2 b\right\|_{L^2}^{\gamma}.$$

Alors(2.3.3) devient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla b\|_{L^2}^2\right] + \left\|\nabla^2 b\right\|_{L^2}^2 + \left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2 \\
\leq\ & \|\nabla u\|_{\dot{X}_\gamma} \|\nabla u\|_{L^2}^{2-\gamma} \left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^{\gamma} + 3 \|\nabla u\|_{\dot{X}_\gamma} \|\nabla b\|_{L^2}^{2-\gamma} \left\|\nabla^2 b\right\|_{L^2}^{\gamma}. \\
\leq\ & \left(\|\nabla u\|_{\dot{X}_\gamma}^{\frac{2}{2-\gamma}} \|\nabla u\|_{L^2}^2\right)^{\frac{2-\gamma}{2}} \left(\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2\right)^{\frac{\gamma}{2}} + 3\left(\|\nabla u\|_{\dot{X}_\gamma}^{\frac{2}{2-\gamma}} \|\nabla b\|_{L^2}^2\right)^{\frac{2-\gamma}{2}} \left(\left\|\nabla^2 b\right\|_{L^2}^2\right)^{\frac{\gamma}{2}}
\end{aligned}$$

avec $\frac{2-\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2} = 1$

$$\leq \frac{\beta}{2} \|\nabla u\|_{\dot{X}_r}^{\frac{2}{1-r}} \left(\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla b\|_{L^2}^2\right) + \frac{1}{2}\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\left\|\nabla^2 b\right\|_{L^2}^2$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla b\|_{L^2}^2\right] + \left\|\nabla^2 b\right\|_{L^2}^2 + \left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2 \\
\leq\ & \beta_1 \|\nabla u\|_{\dot{X}_\gamma}^{\frac{2}{2-\gamma}} \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2 + \beta_2 \|\nabla u\|_{\dot{X}_\gamma}^{\frac{2}{2-\gamma}} \|\nabla b\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\left\|\nabla^2 b\right\|_{L^2}^2 \\
\leq\ & \frac{\beta}{2} \|\nabla u\|_{\dot{X}_\gamma}^{\frac{2}{2-\gamma}} \left(\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla b\|_{L^2}^2\right) + \frac{1}{2}\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\left\|\nabla^2 b\right\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{d}{dt}\left[\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla b\|_{L^2}^2\right] + \left\|\nabla^2 b\right\|_{L^2}^2 + \left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2 \leq \beta \|\nabla u\|_{\dot{X}_\gamma}^{\frac{2}{2-\gamma}} \left(\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla b\|_{L^2}^2\right) \quad (2.3.6)$$

On applique lemme(1.0.1) à (2.3.6)

$$\underset{0\leq t\leq T}{Sup}\left[\|\nabla u(.,t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla b(.,t)\|_{L^2}^2\right] \leq \left(\|\nabla u_0\|_{L^2}^2 + \|\nabla b_0\|_{L^2}^2\right) \exp\left(\beta \int_0^T \|\nabla u(.,t)\|_{\dot{X}_\gamma}^{\frac{2}{2-\gamma}} dt\right)$$

Puisque

$$\nabla u \in L^{\frac{2}{2-\gamma}}(0,T;\dot{X}_\gamma(\mathbb{R}^3));$$

et

$$\left(\|\nabla u_0\|_{L^2}^2 + \|\nabla b_0\|_{L^2}^2\right) < +\infty$$

Alors

$$\underset{0\leq t\leq T}{Sup}\left[\|\nabla u(.,t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla b(.,t)\|_{L^2}^2\right] < +\infty.$$

Donc

$$\underset{0\leq t\leq T}{Sup}\ \|u(.,t)\|_{H^1}^2 < +\infty \quad \text{et} \quad \underset{0\leq t\leq T}{Sup}\ \|b(.,t)\|_{H^1}^2 < +\infty.$$

Ce qui implique

$$\|u(.,t)\|_{L^\infty(0,T;H^1(\mathbb{R}^3))}^2 < +\infty\ et\ \|b(.,t)\|_{L^\infty(0,T;H^1(\mathbb{R}^3))}^2 < +\infty$$

Donc

$$(u,b) \in L^\infty(0,T;H^1(\mathbb{R}^3)).$$

D'autre coté on intègre (2.3.6) par rapport à t avec $0 \leq t \leq T$

$$\left[\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla b\|_{L^2}^2\right] - \left[\|\nabla u_0\|_{L^2}^2 + \|\nabla b_0\|_{L^2}^2\right] + \int_0^T \left[\left\|\nabla^2 b(\cdot,t)\right\|_{L^2}^2 + \left\|\nabla^2 u(\cdot,t)\right\|_{L^2}^2\right] dt$$

$$\leq \beta \int_0^T \|\nabla u(\cdot,t)\|_{\dot{X}_r}^{\frac{2}{1-r}} \left(\|\nabla u(\cdot,t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla b(\cdot,t)\|_{L^2}^2\right) dt$$

$$\leq \beta' \int_0^T \|\nabla u(\cdot,t)\|_{\dot{X}_r}^{\frac{2}{1-r}} \ .$$

Car

$$\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla b\|_{L^2}^2 \leq \underset{0\leq t\leq T}{Sup} \left[\|u(\cdot,t)\|_{H^1}^2 + \|b(\cdot,t)\|_{H^1}^2\right] < \beta''$$

$$\int_0^T \left[\left\|\nabla^2 b(\cdot,t)\right\|_{L^2}^2 + \left\|\nabla^2 u(\cdot,t)\right\|_{L^2}^2\right] dt \ \leq \infty\ .$$

Implique

$$\int_0^T \|b(\cdot,t)\|_{H^2}^2\, dt \leq \infty \quad \text{et} \quad \int_0^T \|u(\cdot,t)\|_{H^2}^2\, dt\ \leq \infty.$$

Donc la solution

$$(u,b) \in L^2(0,T;H^2(\mathbb{R}^3));$$

d'ou

$$(u,b) \in L^\infty(0,T;H^1(\mathbb{R}^3)) \cap L^2(0,T;H^2(\mathbb{R}^3)).$$

ce qui donne que la solution faible (u,b) dans C^∞. □

C'est la fin de la preuve de théorème (2.2.1). Ce Théorème reste vraie pour l'équation de Navier-Stokes avec $b \equiv 0$, alors on a donné une extension de critère de régularité (type de Serrin) de l'équation Navier -Stokes.

Chapitre 3

Critère de régularité des solutions faibles de l'équation magnétohydrodynamique en terme de champ rotationnel

L'espace de Morrey-Companato $\dot{\mathcal{M}}_{p,q}$joue un rôle trés important dans la régularité des solutions de l'équation aux dérivée partielle voir $[15, 6]$

3.1 L'espace de Morrey-Companato$\dot{\mathcal{M}}_{p,q}$

Nous rappelons dans cette partie la définition de l'espace de Morrey-Companato et quelques propriétés de cet espace.

Définition 3.1.1 *Pour $1 < p \leq q \leq +\infty$, l'espace de Morrey-Campanato $\dot{\mathcal{M}}_{p,q}$est définit par*

$$\dot{\mathcal{M}}_{p,q} = \left\{ f \in L^p_{loc}\left(\mathbb{R}^3\right) : \|f\|_{\dot{\mathcal{M}}_{p,q}} = \sup_{x\in\mathbb{R}^3} \sup_{R>0} R^{\frac{3}{q}-\frac{3}{p}} \|f\|_{L^p(B(x,R))} \right\}, \quad (3.1.1)$$

Où $B(x,R)$ désigne la boule fermé du centre x et de rayon R

Remarque 3.1.1 *l'espace $\dot{\mathcal{M}}_{p,q}\left(\mathbb{R}^3\right)$ est un espace de Banach de norme $\|\|_{\dot{\mathcal{M}}_{p,q}}$*

Lemme 3.1.1 *Pour tout $\lambda > 0$ on a*

$$\|f(\lambda\cdot)\|_{\dot{\mathcal{M}}_{p,q}} = \frac{1}{\lambda^{\frac{3}{q}}} \|f\|_{\dot{\mathcal{M}}_{p,q}}.$$

Preuve. Pour tout $\lambda > 0$et pour tout $f \in \dot{\mathcal{M}}_{p,q}$on a

$$\begin{aligned}
R^{\frac{3}{q}-\frac{3}{p}} \|f(\lambda\cdot)\|_{L^P(B(x,R))} &= R^{\frac{3}{q}-\frac{3}{p}} \left(\int\limits_{B(x,R)} |f(\lambda y)|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= R^{\frac{3}{q}-\frac{3}{p}} \left(\lambda^{-3} \int\limits_{B(x,R)} |f(z)|^p \, dz \right)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{avec } z = \lambda y \\
&= R^{\frac{3}{q}-\frac{3}{p}} \frac{1}{\lambda^{\frac{3}{p}}} \left(\int\limits_{B(x,R)} |f(z)|^p \, dz \right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

Et par suite

$$\begin{aligned}
\|f(\lambda\cdot)\|_{\dot{\mathcal{M}}_{p,q}} &= \sup_{x\in\mathbb{R}^3} \sup_{R>0} R^{\frac{3}{q}-\frac{3}{p}} \|f(\lambda\cdot)\|_{L^p(B(x,R))} \\
&= \frac{1}{\lambda^{\frac{3}{q}}} \sup_{x\in\mathbb{R}^3} \sup_{R>0} R^{\frac{3}{q}-\frac{3}{p}} \|f\|_{L^p(B(x,R))} \\
&= \frac{1}{\lambda^{\frac{3}{q}}} \|f\|_{\dot{\mathcal{M}}_{p,q}}
\end{aligned}$$

D'ou

$$\|f(\lambda\cdot)\|_{\dot{\mathcal{M}}_{p,q}} = \frac{1}{\lambda^{\frac{3}{q}}} \|f\|_{\dot{\mathcal{M}}_{p,q}}$$

$\square$

Remarque 3.1.2 *L'espace Morrey-Companato peut être considérée comme un complément à l'espace L^p ; on a le lemme suivant*

Lemme 3.1.2 *Pour $1 < p \leq q$ on a*

$$L^q = \dot{\mathcal{M}}_{q,q} \subset \dot{\mathcal{M}}_{p,q}$$

Et on a le cas particulier $q = \frac{3}{r}$avec $p \geq 2$,

$$L^{\frac{3}{r}}\left(\mathbb{R}^3\right) \subset \dot{\mathcal{M}}_{p,\frac{3}{r}}\left(\mathbb{R}^3\right)$$

Preuve. On a pour toute $f \in \dot{\mathcal{M}}_{q,q}$,

$$\begin{aligned}\|f\|_{\dot{\mathcal{M}}_{q,q}} &= \sup_{x\in\mathbb{R}^3}\sup_{R>0} R^{\frac{3}{q}-\frac{3}{q}}\|f\|_{L^q(B(x,R))} \\ &= \|f\|_{L^q(B(x,R))} \leq \|f\|_{L^q(\mathbb{R}^3)}\end{aligned}$$

D'autre côté

$$\|f\|_{\dot{\mathcal{M}}_{q,q}} \geq \|f\|_{L^q(B(x,R))}$$

Alors

$$L^q = \dot{\mathcal{M}}_{q,q}$$

Et on a

$$\|f\|_{\dot{\mathcal{M}}_{p,q}} = \sup_{x\in\mathbb{R}^3}\sup_{R>0} R^{\frac{3}{q}-\frac{3}{p}}\|f\|_{L^q(B(x,R))}$$

Puisque $p \leq q$ alors $R^{\frac{3}{q}-\frac{3}{p}} \leq 1$

Donc

$$\begin{aligned}\|f\|_{\dot{\mathcal{M}}_{p,q}} &= \sup_{x\in\mathbb{R}^3}\sup_{R>0} R^{\frac{3}{q}-\frac{3}{p}}\|f\|_{L^q(B(x,R))} \\ &\leq \|f\|_{L^q(B(x,R))}\end{aligned}$$

D'ou

$$L^q = \dot{\mathcal{M}}_{q,q} \subset \dot{\mathcal{M}}_{p,q}$$

□

En raison du lemme suivant données dans [8] :

Lemme 3.1.3 *Pour $0 \leq r < \frac{3}{2}$, l'espace $\dot{Z}_r$ est défini comme l'espace de $f(x) \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$ tel que*

$$\|f\|_{\dot{Z}_r} = \sup_{\|g\|_{\dot{B}^r_{2,1}} \leq 1} \|fg\|_{L^2} < \infty$$

Alors $f \in \dot{\mathcal{M}}_{2,\frac{3}{r}}$ si et seulement si $f \in \dot{Z}_r$ de norme équivalente.

Et le fait que

$$L^2 \cap \dot{H}^1 \subset \dot{B}^r_{2,1} \subset \dot{H}^r \qquad \text{pour } 0 < r < 1,$$

Nous avons le lemme suivant :

Lemme 3.1.4 *Pour* $0 < r \leq 1$ *on a*

$$\dot{X}_r\left(\mathbb{R}^3\right) \subset \dot{\mathcal{M}}_{2,\frac{3}{r}}\left(\mathbb{R}^3\right),$$

Preuve. Soit $f \in \dot{X}_r\left(\mathbb{R}^3\right)$ avec $0 < R \leq 1$, $x_0 \in \mathbb{R}^3$ et $\varphi \in D\left(\mathbb{R}^3\right)$ tel que $\varphi \equiv 1$ sur $B\left(\frac{x_0}{R}, 1\right)$on a

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\dot{\mathcal{M}}_{2,\frac{3}{r}}} &= \sup_{x\in\mathbb{R}^3}\sup_{0<R\leq 1} R^{r-\frac{3}{2}}\left(\int\limits_{|x-x_0|\leq R}|f(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sup_{y\in\mathbb{R}^3}\sup_{0<R\leq 1} R^{r-\frac{3}{2}}\left(R^3\int\limits_{\left|y-\frac{x_0}{R}\right|\leq 1}|f(Ry)|^2\,dy\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{avec } x = Ry \\
&= \sup_{y\in\mathbb{R}^3}\sup_{0<R\leq 1} R^{r-\frac{3}{2}}R^{\frac{3}{2}}\left(\int\limits_{\left|y-\frac{x_0}{R}\right|\leq 1}|f(Ry)\,\varphi(y)|^2\,dy\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sup_{y\in\mathbb{R}^3}\sup_{0<R\leq 1} R^{r}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^3}|f(Ry)\,\varphi(y)|^2\,dy\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sup_{y\in\mathbb{R}^3}\sup_{0<R\leq 1} R^{r}\,\|f(Ry)\,\varphi(y)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\
&\leq \sup_{y\in\mathbb{R}^3}\sup_{0<R\leq 1} \|f\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\
&\leq \sup_{y\in\mathbb{R}^3}\sup_{0<R\leq 1} \|f\|_{\dot{X}_r(\mathbb{R}^3)}\,\|\varphi\|_{\dot{H}^{r}(\mathbb{R}^3)}
\end{aligned}$$

Donc

$$\|f\|_{\dot{\mathcal{M}}_{2,\frac{3}{r}}} \leq C\,\|f\|_{\dot{X}_r(\mathbb{R}^3)}$$

D'ou

$$\dot{X}_r \subset \dot{\mathcal{M}}_{2,\frac{3}{r}}$$

□

On a le lemme suivant qui sera utilisé dans la preuve de notre résultat.

Lemme 3.1.5 *Pour* $0 < r < 1$, *on a*

$$\|f\|_{\dot{B}^r_{2,1}} \leq C \|f\|^{1-r}_{L^2} \|\nabla f\|^r_{L^2}$$

Où C ne depend que de r. L'idée de la preuve vient de [14].

Proposition 3.1.1 *Soit $\omega = curl\ u$*

On a

$$\|\nabla u\|_{\dot{\mathcal{M}}_{p,\frac{3}{r}}} \leq \|\omega\|_{\dot{\mathcal{M}}_{p,\frac{3}{r}}} \qquad (3.1.2)$$

L'idée de la preuve vient de [20]

Remarque 3.1.3 *Par le prolongement $L^{\frac{3}{r}}(\mathbb{R}^3) \subset \dot{X}_r(\mathbb{R}^3) \subset \dot{\mathcal{M}}_{2,\frac{3}{r}}(\mathbb{R}^3)$ d'améliorer nos résultat dans* [1] *et* [18, 19]*. En fait, on peut trouver que l'espace $\dot{\mathcal{M}}_{2,\frac{3}{r}}(\mathbb{R}^3)$ est très grand.*

3.2 critère de régularité pour solution faible aux équations (MHD) de terme de champ rotationnel

Dans cette partie on a étudié le critère de régularité de solution faible de l'équation MHD en terme de champ rotationnel ; nous sommes en mesure d'énoncer notre résultat.

Théorème 3.2.1 *Soit $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^3), b_0 \in L^4 \cap L^2(\mathbb{R}^3)$ .Supposons que (u, b) est une solution faible de l'équation MHD* (2.2.1) *dans*$]0, T)$ *avec* $0 < T \leq \infty$. *Si le champ rotationnel $\omega = \nabla \times u$ satisfait*

$$\omega \in L^{\frac{2}{2-r}}\left(0, T; \dot{\mathcal{M}}_{2,\frac{3}{r}}(\mathbb{R}^3)\right) \quad \text{pour } 0 < r \leq 1,$$

Alors la solution faible

$$(u, b) \in L^\infty\left(0, T; H^1\left(\mathbb{R}^3\right)\right) \cap L^2\left(0, T; H^2\left(\mathbb{R}^3\right)\right).$$

Donc la solution faible (u, b) dans C^∞.

Preuve. fin de démontrer le théorème (2.2.1) premièrement nous devons créer

$b \in L^\infty(0, T; L^4)$ et $|b| \nabla b \in L^2(0, T; L^2)$, si $\omega \in L^{\frac{2}{2-r}}\left(0,T;\dot{\mathcal{M}}_{2,\frac{3}{r}}(\mathbb{R}^3)\right)$ pour $0 < r \leq 1$. D'abord, nous considérons le cas $0 < r < 1$. Nous multiplions les deux membre de la second équation de (2.2.1) par $b\,|b|^2$, l'intégration sur $\mathbb{R}^3$pour obtenir, avec l'aide de l'intégration par parties.

$$\partial_t b - \triangle b + u \cdot \nabla b - b \cdot \nabla u = 0.$$

Devient

$$\left\langle \partial_t b, b\,|b|^2 \right\rangle - \left\langle \triangle b, b\,|b|^2 \right\rangle + \left\langle u \cdot \nabla b, b\,|b|^2 \right\rangle - \left\langle b \cdot \nabla u, b\,|b|^2 \right\rangle = 0.$$

Donc

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \partial_t b.\,|b|^2\, bdx + \int\limits_{\mathbb{R}^3} \nabla b.\nabla b\,|b|^2\, dx + \int\limits_{\mathbb{R}^3} 2\,|b|^2 . \left|\nabla\,|b|^2\right|^2 dx - \int\limits_{\mathbb{R}^3} (b \cdot \nabla u)\,|b|^2\, bdx = 0.$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\frac{d}{dt}\|b\|_{L^4}^4 + \int\limits_{\mathbb{R}^3} |b|^2\,|\nabla b|^2 + 2\,|b|^2 \left|\nabla\,|b|^2\right|^2 dx &\leq \left|\int\limits_{\mathbb{R}^3} (b \cdot \nabla u)\,|b|^2\, bdx\right| \\
&\leq \left(\int\limits_{\mathbb{R}^3} \left||b|^2 .\nabla u\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^3} \left|b^2\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left\||b|^2\,\nabla u\right\|_{L^2} . \left\|b^2\right\|_{L^2} \\
&\leq C\,\|\nabla u\|_{\dot{\mathcal{M}}_{2,\frac{3}{r}}} \left\||b|^2\right\|_{\dot{B}^{r}_{2,1}} \left\|b^2\right\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

D'après le lemme (3.1.5)

$$\frac{1}{4}\frac{d}{dt}\|b\|_{L^4}^4 + \int\limits_{\mathbb{R}^3} |b|^2\,|\nabla b|^2 + 2\,|b|^2 \left|\nabla\,|b|^2\right|^2 dx \leq C\,\|\nabla u\|_{\dot{\mathcal{M}}_{2,\frac{3}{r}}} \left\||b|^2\right\|_{L^2}^{1-r} \left\|\nabla\,|b|^2\right\|_{L^2}^{r} \|b\|_{L^4}^2 .$$

D'après (3.1.2)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\frac{d}{dt}\|b\|_{L^4}^4 + \int\limits_{\mathbb{R}^3} |b|^2\,|\nabla b|^2 + 2\,|b|^2 \left|\nabla\,|b|^2\right|^2 dx &\leq C\,\|\omega\|_{\dot{\mathcal{M}}_{2,\frac{3}{r}}} \|b\|_{L^4}^{2(2-r)} \||b|\,\nabla b\|_{L^2}^{r} \\
&\leq C\left(\|\omega\|_{\dot{\mathcal{M}}_{2,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{2-r}} \|b\|_{L^4}^{4}\right)^{\frac{2-r}{2}} \left(\||b|\,\nabla b\|_{L^2}^{2}\right)^{\frac{r}{2}}.
\end{aligned}$$

On applique Inégalité de Young ;

$$\frac{1}{4}\frac{d}{dt}\|b\|_{L^4}^4+\||b|\nabla b\|_{L^2}^2\leq\frac{2-r}{2}\left(\frac{C}{\varepsilon}\right)^{\frac{2}{2-r}}\|\omega\|_{\dot{\mathcal{M}}_{2,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{2-r}}\|b\|_{L^4}^4+\frac{r}{2}\varepsilon^{\frac{2}{r}}\||b|\nabla b\|_{L^2}^2.$$

On choisit ε pour que $\frac{r}{2}\varepsilon^{\frac{2}{r}}=\frac{1}{2}$. Alors

$$\frac{d}{dt}\|b\|_{L^4}^4+\||b|\nabla b\|_{L^2}^2\leq C_r\|\omega\|_{\dot{\mathcal{M}}_{2,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{2-r}}\|b\|_{L^4}^4\qquad(3.1.3).$$

Puisque $\omega\in L^{\frac{2}{2-r}}\left(0,T;\dot{\mathcal{M}}_{2,\frac{3}{r}}(\mathbb{R}^3)\right)$, il résulte de l'inégalité différentielle

$$\frac{d}{dt}\|b\|_{L^4}^4\leq C_r\|\omega\|_{\dot{\mathcal{M}}_{2,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{2-r}}\|b\|_{L^4}^4\qquad(3.1.4)$$

On applique le lemme (1.0.1) à (3.1.4)

$$\|b(\cdot,t)\|_{L^4}^4\leq C_r\|b_0\|_{L^4}^4\exp\left(\int_0^T\|\omega(\cdot,t)\|_{\dot{\mathcal{M}}_{2,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{2-r}}dt\right)\qquad(3.1.5)$$

Donc

$$\underset{0<t\leq T}{Sup}\|b(\cdot,t)\|_{L^4}^4<\infty$$

D'où $b\in L^\infty(0,T;L^4)$

Pour $0<t\leq T$ on intègre $(3.1.3)$, on obtient l'estimation suivante :

$$\begin{aligned}\|b\|_{L^4}^4-\|b_0\|_{L^4}^4+\int_0^T\||b|\nabla b(\cdot,t)\|_{L^2}^2dt&\leq C_r\int_0^T\|\omega(\cdot,t)\|_{\dot{\mathcal{M}}_{2,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{2-r}}\|b(\cdot,t)\|_{L^4}^4dt\\&\leq C_r\int_0^T\|\omega(\cdot,t)\|_{\dot{\mathcal{M}}_{2,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{2-r}}\sup_{0<t\leq T}\|b(\cdot,t)\|_{L^4}^4dt\\&\leq C_r\|b\|_{L^\infty(0,T;L^4)}^4\int_0^T\|\omega(\cdot,t)\|_{\dot{\mathcal{M}}_{2,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{2-r}}dt\end{aligned}$$

On a utilisé (3.1.5)

$$\begin{aligned}\int_0^T\||b|\nabla b(\cdot,t)\|_{L^2}^2dt&\leq C_r\|b\|_{L^\infty(0,T;L^4)}^4\int_0^T\|\omega(\cdot,t)\|_{\dot{\mathcal{M}}_{2,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{2-r}}dt+\|b_0\|_{L^4}^4\\&\leq C_r\|b_0\|_{L^4}^4\exp\left(\int_0^T\|\omega(\cdot,t)\|_{\dot{\mathcal{M}}_{2,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{2-r}}dt\right)\int_0^T\|\omega(\cdot,t)\|_{\dot{\mathcal{M}}_{2,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{2-r}}dt+\|b_0\|_{L^4}^4\quad(3.1.6)\end{aligned}$$

Donc

$$\| |b| \nabla b(\cdot,t) \|_{L^2}^2 < \infty$$

D'où $|b| \nabla b \in L^2(0,T;L^2)$. Maintenant on démontre que $u \in L^\infty(0,T;H^1(\mathbb{R}^3)) \cap L^2(0,T;H^2(\mathbb{R}^3))$.

On multiplier la première équation de (2.2.1) par Δu, et après on intègre par partie comme suit

$$\langle \partial_t u, \Delta u \rangle - \langle \triangle u, \Delta u \rangle + \langle (u \cdot \nabla u), \Delta u \rangle - \langle (b \cdot \nabla b), \Delta u \rangle + \langle \nabla p, \Delta u \rangle = 0.$$

Avec $\langle \nabla p, \Delta u \rangle = -\langle p, \Delta div\ u \rangle = 0$

$$\begin{aligned} \langle \nabla \partial_t u, \nabla u \rangle + \langle \triangle u, \Delta u \rangle &= \langle (u \cdot \nabla) u, \Delta u \rangle - \langle (b \cdot \nabla) b, \Delta u \rangle \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

On obtient I_1

$$\begin{aligned} I_1 &= \langle (u \cdot \nabla) u, \Delta u \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \left((u_1, u_2, u_3) \cdot (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}) \right) \cdot (u_1, u_2, u_3) \cdot \Delta u\ dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} (u_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial}{\partial x_3}) \cdot (u_1, u_2, u_3) \cdot \Delta u\ dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} (u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3}, u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, u_1 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3}) \cdot \Delta u dx \\ &= \sum_{k,j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} u_k \cdot \partial_k u_j \cdot \Delta u_j dx \\ &= -\sum_{k,j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \partial_i u_k \cdot \partial_k u_j \cdot \partial_i u_j dx. \end{aligned}$$

Pour I_2

$$\begin{aligned} I_2 &= -\langle (b \cdot \nabla) b, \Delta u \rangle \\ &= -\int_{\mathbb{R}^3} \left((b_1, b_2, b_3) \cdot (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}) \right) \cdot (b_1, b_2, b_3) \cdot \Delta u\ dx \\ &= -\sum_{k,j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} b_k \cdot \partial_k b_j \cdot \Delta u_j dx. \end{aligned}$$

Par l'intégration par partie

$$I_2 = -\sum_{k,j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \partial_i b_k b_j \partial_k \partial_i u_j dx - \sum_{k,j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} b_k \cdot \partial_i \partial_k u_j \cdot \partial_i b_j dx$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_{L^4}^2 + \|\Delta u\|_{L^2}^2 &= -\sum_{k,j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \partial_i u_k \cdot \partial_k u_j \cdot \partial_i u_j dx \\
&\quad - \sum_{k,j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \partial_i b_k b_j \partial_k \partial_i u_j dx - \sum_{k,j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} b_k \cdot \partial_i \partial_k u_j \cdot \partial_i b_j dx \\
&= I + II + III. \qquad (3.1.7)
\end{aligned}$$

On trouve

$$\begin{aligned}
|I| &\leq \|\nabla u \cdot \nabla u\|_{L^2} \|\nabla u\|_{L^2} \\
&\leq C \|\nabla u\|_{\dot{\mathcal{M}}_{2,\frac{3}{r}}} \|\nabla u\|_{\dot{B}^r_{2,1}} \|\nabla u\|_{L^2} \\
&\leq C \|\nabla u\|_{\dot{\mathcal{M}}_{2,\frac{3}{r}}} \|\nabla u\|_{L^2}^{2-r} \|\Delta u\|_{L^2}^r \\
&\leq C \left(\|\omega\|_{\dot{\mathcal{M}}_{2,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{2-r}} \|\nabla u\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{2-r}{2}} \left(\|\Delta u\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{r}{2}} \\
&\leq \frac{1}{4} \|\Delta u\|_{L^2}^2 + C \|\omega\|_{\dot{\mathcal{M}}_{2,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{2-r}} \|\nabla u\|_{L^2}^2 . \qquad (3.1.8)
\end{aligned}$$

De même, par l'inégalité de Cauchy, on obtient

$$\begin{aligned}
II + III &\leq C \|\Delta u\|_{L^2} \||b| \nabla b\|_{L^2} \\
&\leq \frac{1}{2} \|\Delta u\|_{L^2}^2 + C \||b| \nabla b\|_{L^2}^2 , \quad (3.1.9)
\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_{L^4}^2 + \|\Delta u\|_{L^2}^2 \leq C \|\omega\|_{\dot{\mathcal{M}}_{2,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{2-r}} \|\nabla u\|_{L^2}^2 + C \||b| \nabla b\|_{L^2}^2 \qquad (3.1.10)$$

On applique le lemme (1.0.1) à (3.1.10)

$$\begin{aligned}
\|\nabla u(\cdot,t)\|_{L^2}^2 &\leq C \|\nabla u_0\|_{L^2}^2 \exp\left(\int_0^T \|\omega(\cdot,t)\|_{\dot{\mathcal{M}}_{2,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{2-r}} dt \right) + \\
&\quad \left(\int_0^T \||b| \nabla b(\cdot,t)\|_{L^2}^2 dt \right) \exp\left(\int_0^T \|\omega(\cdot,t)\|_{\dot{\mathcal{M}}_{2,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{2-r}} dt \right)
\end{aligned}$$

On utilise(3.1.6)

$$\begin{aligned}\|\nabla u(\cdot,t)\|_{L^2}^2 &\leq C\|\nabla u_0\|_{L^2}^2 \exp\left(\int_0^T \|\omega(\cdot,t)\|_{\dot{\mathcal{M}}_{2,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{2-r}} dt\right) + \left\{C_r\|b_0\|_{L^4}^4 \exp\left(\int_0^T \|\omega(\cdot,t)\|_{\dot{\mathcal{M}}_{2,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{2-r}} dt\right)\right.\\ &\quad \left.\times \int_0^T \|\omega(\cdot,t)\|_{\dot{\mathcal{M}}_{2,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{2-r}} dt + C\|b_0\|_{L^4}^4\right\} \exp\left(\int_0^T \|\omega(\cdot,t)\|_{\dot{\mathcal{M}}_{2,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{2-r}} dt\right),\end{aligned}$$

puisque $\omega \in L^{\frac{2}{2-r}}\left(0,T;\dot{\mathcal{M}}_{2,\frac{3}{r}}(\mathbb{R}^3)\right)$. Alors

$$\sup_{0<t\leq T}\|u(\cdot,t)\|_{H^1}^2 < \infty.$$

Donc

$$u \in L^\infty\left(0,T;H^1\left(\mathbb{R}^3\right)\right).$$

Ensuite, nous obtenons l'estimation de Δu, on intègre(3.1.10) par rapport à t

$$\begin{aligned}\int_0^T \|\Delta u(\cdot,t)\|_{L^2}^2 dt &\leq C\int_0^T \|\omega(\cdot,t)\|_{\dot{\mathcal{M}}_{2,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{2-r}} \|\nabla u\|_{L^2}^2 dt + \|\nabla u_0\|_{L^2}^2 + C\int_0^T \||b|\nabla b(\cdot,t)\|_{L^2}^2 dt\\ &\leq C\sup_{0<t\leq T}\|\nabla u\|_{L^2}^2 \int_0^T \|\omega(\cdot,t)\|_{\dot{\mathcal{M}}_{2,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{2-r}} dt + \|\nabla u_0\|_{L^2}^2 + C\int_0^T \||b|\nabla b(\cdot,t)\|_{L^2}^2\\ &\leq C\|\nabla u\|_{L^\infty(0,T;L^2)}^2 \int_0^T \|\omega(\cdot,t)\|_{\dot{\mathcal{M}}_{2,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{2-r}} dt + \|\nabla u_0\|_{L^2}^2 + C\int_0^T \||b|\nabla b(\cdot,t)\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

Donc

$$\int_0^T \|u(\cdot,t)\|_{H^2}^2 dt < \infty.$$

Alors $u \in L^2(0,T;H^2(\mathbb{R}^3))$ Par conséquent $u \in L^\infty(0,T;H^1(\mathbb{R}^3)) \cap L^2(0,T;H^2(\mathbb{R}^3))$; ce qui donne que u et b dans C^∞. □

Pour le cas $r = 1$, nous avons besoin définir l'espace BMO [13]

Définition 3.2.1 *Une fonction $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^3)$ appartient à l'espace BMO s'il existe $A > 0$ telle que :*

$$\underset{B}{Sup}\frac{1}{|B|}\int_{y\in B(x,R)} |f(y) - a|\, dy \leq A < \infty.$$

Où $B = B(x, R)$est une boule de $\mathbb{R}^3$. et $a = \frac{1}{|B(x,R)|} \int\limits_{y \in B(x,R)} f(y)\, dy$.

On note $\|f\|_{BMO} = \inf A$

Exemple 3.2.1 *La fonction $Log\,|x| \in BMO$.*

Lemme 3.2.1 *Si $f \in H^1(\mathbb{R}^3)$ et $\nabla f \in \dot{\mathcal{M}}_{2,3}$, alors*

$f \in BMO(\mathbb{R}^3)$.

Preuve. par l'inégalité de poincaré, on a

$$\begin{aligned}
\int\limits_{B(x,R)} \left| f(y) - m_{B(x,R)} f(y) \right|^2 dy &\leq CR^2 \int\limits_{B(x,R)} |\nabla f(y)|^2 dy \\
&\leq CR^3 \|\nabla f\|^2_{\dot{\mathcal{M}}_{2,3}}.
\end{aligned}$$

Avec $B(x, R)$est une boule de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
\|f\|_{BMO} &= \underset{x \in \mathbb{R}^3}{Sup} \underset{R>0}{Sup} \frac{1}{|B(x,R)|} \int\limits_{B(x,R)} \left| f(y) - m_{B(x,R)} f(y) \right|^2 dy \\
&\leq C \|\nabla f\|^2_{\dot{\mathcal{M}}_{2,3}}
\end{aligned}$$

□

D'aprés (3.1.2) et le lemme (3.2.1)et si $w \in L^2\left(0, T; \dot{\mathcal{M}}_{2,3}\right)$, alors $u \in L^2(0, T; BMO)$. Et d'aprés le théorème (2.1) dans[16] la démonstration est complète.

CONCLUSION

Ce travail nous a permis de conclure que les espaces de Sobolev et les espaces de multiplicteur et les espaces de Morrey-Companato sont des outils très important et très adapté à l'étude des équations aux dérivées partielles par exemple l'equation magnétohydrodynamique. En effet, les solutions faibles de l'équation magnétohydrodynamique (MHD) sont continues sous les conditions suivantes :

$$u \in L^{\frac{2}{1-r}}\left(0, T; \dot{X}_r\left(\mathbb{R}^3\right)\right)$$

avec $r \in [0, 1[$ où le gradient de champ de vitesse satisfait

$$\nabla u \in L^{\frac{2}{1-\gamma}}\left(0, T; \dot{X}_\gamma\left(\mathbb{R}^3\right)\right)$$

avec $\gamma \in [0, 1]$

Où bien le champ rotationnel

$$\omega = \nabla \times u \in L^{\frac{2}{2-r}}\left(0, T; \dot{\mathcal{M}}_{2,\frac{3}{r}}\left(\mathbb{R}^3\right)\right) \quad \text{pour } 0 < r \leq 1,$$

Avec $\dot{X}_r\left(\mathbb{R}^3\right) \subset \dot{\mathcal{M}}_{2,\frac{3}{r}}\left(\mathbb{R}^3\right)$,

Donc on a fait une extension de critère de régularité pour des solutions faible aux équations magnétohydrodynamique (MHD).

Bibliographie

[1] C. He, Z. Xin, On the regularity of solutions to the magneto-hydrodynamics equations,J.Differential Equations 213 (2)(2005) 235-254.

[2] C. Zuily. Eléments de distributions, Dunod Paris,2002.

[3] G.P. Lemarié-Rieusset ; Gala, S, Multipliers between Sobolev spaces and fractional differentiation. J. Math. Anal. Appl. 322(2)(2006) , 1030–1054

[4] H. Brézis, Analyse fonctionelle. La première édition, Dunod Paris, 1999.

[5] L. Triebel. Theory of function spaces, Birkhauser, 1992.

[6] M. E. Taylor, Analysis on Morrey spaces and applications to Navier-Stokes equations and other evolutions equations, Comm. partial Differential Equations 17(1992)1407-1456.

[7] M. Sermange, R. Temam, Some mathematical questions related to the MHD equations. Commun. Pure Appl. Math 36(5),(1983)635–664

[8] P. G. Lemarié-Rieusset, the Navier–Stokes equations in the critical Morrey-Companato space, Rev. Mat, lberoam. 23(3)(2007)897-930.

[9] P.G.Lemarié-Rieusset : Recent Developments in the Navier–Stokes Problem. Chapman and Hall/CRC Research Notes in Mathematics, vol. 431. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton (2002).

[10] Q.Chen, C.Miao, Z.Zhang : On the regularity criterion of weak solution for the 3D viscous magneto-hydrodynamics equations. Commum. Math. Phys. 284(3)(2008), 919–930.

[11] Q.Chen, C.Miao, Z.Zhang : The Beale-Kato-Majda criterion for the 3D magneto-hydrodynamics equations. Commun. Math. Phys. 275(3)(2007), 861–872.

[12] S.D. Chatterji cours d'analyse 3 ; 1998.

[13] S. Gala, Uniqueness of weak solutions of the Navier-Stokes equations. 53(6)(2008)561-582.

[14] S. Machihara, T, Ozawa, Interpolation inequalities in Besov spaces, Pro. Amer. Math. Soc,131(2003) 1553-1556.

[15] T. Kato, Strong L^psolutions of the Navier-Stokes equations in Morrey spaces, Bol.Soc. Bras. Mat. 22(2)(1992) 127-155.

[16] Y. Wang : BMO and the regularity criterion for weak solutions to the magnetohydrodynamic equations. J. Math. Anal. Appl. 328(2)(2007), 1082–1086.

[17] Y. Zhou ; Regularity criteria for the generalized viscous MHD equations. Ann. Inst. H. Poincar Anal. Nonlinaire 24(3)(2007), 491–505.

[18] Y. Zhou, Remarks on regularities for the 3D MHD equations. Discrete Continuous Dyn. Syst. 12(2005), 881–886.

[19] Y. Zhou, S. Gala, Regularity criteria for the solutions to the 3D MHD equations in the multiplier space, Z. Angew. Math. Phys. (2009), in press.

[20] Y. Zhou, S. Gala, A new Regularity criterion for weak solutions to the viscoux MHD equations in terms of the vorticity field, Nonlinear Analysis 72(2010)3643-3648.