

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
*MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE  
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE*

*UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS – MOSTAGANEM*

Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique

Département de Mathématiques et Informatique

*THESE DE DOCTORAT*

Option : Analyse Fonctionnelle

*Intitulée*

*CROISSANCE ET LA THÉORIE DE L'OSCILLATION DES SOLUTIONS ENTIÈRES  
DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES*

Présentée par : HABIB Habib.

Soutenue le : 19-01-2015 devant le jury composé de :

Président :

M. MEDEGHRI Ahmed, Professeur, Université Abdelhamid Ibn Badis-Mostaganem.

Examineurs :

M. TERBECHE Mekki, Professeur, Université d'Oran Es senia.

M. BENCHOHRA Mouffak, Professeur, Université de Sidi Bel Abbès.

M. BENBACHIR Maamar, Maître de Conférences A, Université de Khemis Miliana.

M. HAMOUDA Saada, Maître de Conférences A, Université Abdelhamid Ibn Badis-Mostaganem.

Encadreur :

M. BELAÏDI Benharrat, Professeur, Université Abdelhamid Ibn Badis-Mostaganem.

---

# Remerciements

---

Mes premiers remerciements vont bien sûr à Monsieur Belaïdi Benharrat, Professeur à l'université de Mostaganem, pour avoir dirigé cette thèse, pour sa disponibilité, pour toute l'aide et les conseils qu'il a su m'apporter pendant ces années. Je lui exprime donc toute ma reconnaissance.

Je n'oublie pas de remercier également monsieur le président du jury, M. Medeghri Ahmed, Professeur à l'université de Mostaganem, M. Terbeche Mekki, Professeur à l'université d'Oran, M. Benchohra Mouffak, Professeur à l'université de Sidi Bel Abbès, M. Benbachir Maamar, Maître de Conférences à l'université de Khemis Miliana et M. Hamouda Saada, Maître de Conférences à l'université de Mostaganem.

Je dédie ce travail à mes très chers parents, ma femme, mes frères, mes sœurs, et toute ma famille ainsi qu'à mes amis et à toute personne qui a contribué de près ou de loin pour accomplir cette thèse.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>iii</b>
<b>1 Rappels et définitions</b>	<b>1</b>
1.1 La théorie de R. Nevanlinna . . . . .	1
1.1.1 Fonction caractéristique de R. Nevanlinna . . . . .	1
1.1.2 L'exposant de convergence des zéros . . . . .	4
1.1.3 L'ordre de croissance d'une fonction . . . . .	6
1.2 La densité des ensembles . . . . .	7
<b>2 Croissance des solutions de certaines équations différentielles linéaires d'ordre supérieur à coefficients fonctions entières</b>	<b>9</b>
2.1 Introduction et résultats . . . . .	9
2.2 Lemmes préliminaires . . . . .	11
2.3 Preuve du Théorème 2.1.1 . . . . .	13
2.4 Preuve du Corollaire 2.1.1 et Corollaire 2.1.2 . . . . .	21
<b>3 Croissance et points fixes des solutions méromorphes des équations différentielles linéaires d'ordre supérieur</b>	<b>22</b>
3.1 Introduction et résultats . . . . .	22
3.2 Lemmes préliminaires . . . . .	25
3.3 Preuve du Théorème 3.1.1 . . . . .	27
3.4 Preuve du Théorème 3.1.2 . . . . .	33
<b>4 Croissance des solutions de quelques équations différentielles linéaires d'ordre deux à coefficients fonctions entières</b>	<b>41</b>
4.1 Introduction et résultats . . . . .	41
4.2 Lemmes préliminaires . . . . .	42
4.3 Preuve du Théorème 4.1.1 . . . . .	43
4.4 Preuve du Théorème 4.1.2 . . . . .	50
4.5 Preuve du Théorème 4.1.3 . . . . .	51
4.6 Preuve du Corollaire 4.1.1 . . . . .	56

---

<b>5</b>	<b>Croissance des solutions des équations différentielles linéaires non homogènes à coefficients fonctions entières de même ordre</b>	<b>57</b>
5.1	Introduction et résultats . . . . .	57
5.2	Lemmes Préliminaires . . . . .	58
5.3	Preuve du Théorème 5.1.1 . . . . .	59
5.4	Preuve du Théorème 5.1.2 . . . . .	64
<b>6</b>	<b>Croissance des solutions des équations différentielles linéaires d'ordre supérieur à coefficients fonctions entières</b>	<b>65</b>
6.1	Introduction et résultats . . . . .	65
6.2	Lemmes préliminaires . . . . .	68
6.3	Preuve du Théorème 6.1.1 . . . . .	68
6.4	Preuve du Théorème 6.1.2 . . . . .	78
6.5	Preuve du corollaire 6.1.1 . . . . .	85
	<b>Bibliographie</b>	<b>86</b>

# Introduction

La théorie de la distribution des valeurs des fonctions méromorphes fondée par le célèbre mathématicien Rolf Nevanlinna est devenue un outil indispensable dans l'étude des propriétés des solutions des équations différentielles complexes, en particulier la croissance et l'oscillation des solutions. Il y'a beaucoup de résultats des recherches jusqu'à maintenant concernant l'oscillation et les applications de la théorie de Rolf Nevanlinna aux équations différentielles linéaires à coefficients fonctions entières ou méromorphes.

I. Laine et B. Bank (voir [30]) sont parmi les premiers mathématiciens qui se sont intéressés à l'oscillation des solutions des équations différentielles linéaires d'ordre deux à coefficients fonctions entières. En 1982, ils ont étudié la distribution des zéros des solutions de l'équation différentielle linéaire

$$f'' + A(z)f = 0,$$

où  $A(z)$  est un polynôme ou une fonction entière transcendante.

En 1996, K. H. Kwon (voir [29]) a étudié l'hyper-ordre des solutions de l'équation différentielle

$$f'' + A(z)f' + B(z)f = 0,$$

où  $A(z), B(z) \not\equiv 0$  sont des fonctions entières d'ordre fini.

Récemment, les mathématiciens Li et Wang (voir [35]), Cao (voir [7]), Wang et Laine (voir [46]) ont étudié les équations non homogènes d'ordre deux et les équations linéaires d'ordre supérieur et ils ont prouvé que toute solution de ces équations est d'ordre infini.

De nombreux résultats importants ont été obtenus sur les points fixes des fonctions méromorphes transcendantes pendant près de quatre décennies (voir [50]). En 2000, Chen (voir [11]) est le premier qui a souligné la relation entre l'exposant de convergence des points fixes distincts et l'ordre de croissance des solutions des équations différentielles linéaires d'ordre deux à coefficients fonctions entières. En 2006, Chen (voir [10]) a étudié les zéros de  $f^{(j)}(z) - \varphi(z)$  ( $j = 0, 1, 2$ ) où  $\varphi(z) \not\equiv 0$  est une fonction entière d'ordre fini et  $f(z)$  est une solution non triviale de l'équation différentielle

$$f'' + A_1(z)e^{az}f' + A_2(z)e^{bz}f = 0,$$

où  $A_j(z) \not\equiv 0$  ( $j = 1, 2$ ) sont des fonctions entières d'ordre fini et  $a, b$  sont des nombres complexes non nuls. Jusqu'à présent, de nombreux résultats sur les points fixes des solutions des

équations différentielles à coefficients fonctions entières ont été obtenus (voir [32, 36, 43, 47]). Dans l'article ([36]), Liu et Zhang ont étudié les points fixes et l'hyper-ordre des solutions de certaines équations différentielles linéaires d'ordre supérieur à coefficients fonctions méromorphes et leurs dérivées. Récemment, Belaïdi (voir [2, 3]) a donné une extension des résultats de ([36]).

Dans cette thèse, on a donné des extensions des résultats de Peng et Chen et aussi des résultats de Wang et Laine.

Cette thèse est composée de six chapitres.

Le premier chapitre contient des rappels et définitions sur la théorie de R. Nevanlinna qu'on aura besoin par la suite.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de l'ordre et l'hyper-ordre de croissance des solutions de l'équation différentielle linéaire

$$f^{(k)} + (D_{k-1} + B_{k-1}e^{b_{k-1}z}) f^{(k-1)} + \dots + (D_1 + B_1e^{b_1z}) f' + (D_0 + A_1e^{a_1z} + A_2e^{a_2z}) f = 0,$$

où  $A_j(z) (\neq 0)$  ( $j = 1, 2$ ),  $B_l(z) (\neq 0)$  ( $l = 1, \dots, k-1$ ),  $D_m$  ( $m = 0, \dots, k-1$ ) sont des fonctions entières d'ordre fini,  $a_1, a_2, b_l$  ( $l = 1, \dots, k-1$ ) sont des nombres complexes. Sous certaines conditions, on prouve que toute solution non nulle  $f$  de l'équation ci-dessus est d'ordre infini et d'hyper-ordre est égal à 1.

Dans le troisième chapitre, on va étudier la croissance et l'oscillation complexe des solutions et leurs dérivées de l'équation différentielle

$$f^{(k)} + B_{k-1}f^{(k-1)} + \dots + B_2f'' + B_1e^{-z}f' + (A_1e^{a_1z} + A_2e^{a_2z}) f = 0,$$

où  $A_j(z) (\neq 0)$  ( $j = 1, 2$ ),  $B_1(z) (\neq 0)$  et  $B_l(z)$  ( $l = 2, \dots, k-1$ ) sont des fonctions méromorphes d'ordre fini,  $a_1, a_2$  sont des nombres complexes. En effet, sous certaines conditions, on montre que toute solution non nulle  $f$  de l'équation ci-dessus est d'ordre infini et l'exposant de convergence des points fixes distincts de chacune des fonctions  $f, f', f''$  est infini.

Le but du quatrième chapitre est d'étudier les propriétés des solutions de l'équation différentielle linéaire

$$f'' + Q(e^{-z}) f' + (A_1e^{a_1z} + A_2e^{a_2z})^n f = 0,$$

où  $n \geq 2$  est un entier positif,  $A_j(z) (\neq 0)$  ( $j = 1, 2$ ) sont des fonctions entières d'ordre fini,  $Q(z)$  est un polynôme de degré  $m \geq 1$  et  $a_1, a_2$  sont des nombres complexes. En effet, on va étudier la croissance et l'oscillation des solutions non nulles de cette équation différentielle.

Dans le cinquième chapitre, on va étudier le problème de la croissance et l'oscillation des solutions de certaines équations différentielles linéaires non homogènes d'ordre supérieur à coefficients fonctions entières de même ordre.

Et enfin, dans le dernier chapitre, nous discutons l'ordre et l'hyper-ordre des solutions de l'équation différentielle linéaire

$$f^{(k)} + \sum_{j=1}^{k-1} (B_j e^{b_j z} + D_j e^{d_j z}) f^{(j)} + (A_1 e^{a_1 z} + A_2 e^{a_2 z}) f = 0,$$

où  $A_1(z)$ ,  $A_2(z)$ ,  $B_j(z)$ ,  $D_j(z)$  sont des fonctions entières ( $\neq 0$ ) et  $a_1$ ,  $a_2$  sont des nombres complexes ( $\neq 0$ ), et  $b_j$  sont des nombres réels. Sous certaines conditions, nous prouvons que toute solution  $f \neq 0$  de l'équation ci-dessus est d'ordre infini. Ensuite, nous obtenons une estimation de l'hyper-ordre. Enfin, nous donnons une estimation de l'exposant de convergence des zéros distincts des fonctions  $f^{(j)} - \varphi$  ( $j = 0, 1, 2$ ), où  $\varphi (\neq 0)$  est une fonction entière d'ordre  $\sigma(\varphi) < 1$ , tandis que la solution  $f$  de l'équation différentielle est d'ordre infini. Nos résultats généralisent les résultats précédents dus à Chen, Peng et Chen et autres.

# Rappels et définitions

---

## 1.1 La théorie de R. Nevanlinna

### 1.1.1 Fonction caractéristique de R. Nevanlinna

**Théorème 1.1.1** (voir [31]) (Formule de Jensen) Soient  $f$  une fonction méromorphe telle que  $f(0) \neq 0, \infty$ , et  $a_1, a_2, \dots$  (resp.  $b_1, b_2, \dots$ ) ses zéros (resp. ses pôles), chacun étant compté avec son ordre de multiplicité. Alors

$$\log |f(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\varphi})| d\varphi + \sum_{|b_j| < r} \log \frac{r}{|b_j|} - \sum_{|a_i| < r} \log \frac{r}{|a_i|}.$$

**Définition 1.1.1** (voir [31]) Pour tout nombre réel  $\alpha > 0$ , on définit

$$\log^+ \alpha = \max(0, \log \alpha).$$

Les propriétés de bases du logarithme tronqué sont contenues dans le lemme suivant :

**Lemme 1.1.1** (voir [31]) Soient  $\alpha, \beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  des nombres réels strictement positifs. Alors on a

$$\begin{aligned} \log \alpha &\leq \log^+ \alpha, \\ \log^+ \alpha &\leq \log^+ \beta \text{ pour } \alpha \leq \beta, \\ \log \alpha &= \log^+ \alpha - \log^+ \frac{1}{\alpha}, \\ |\log \alpha| &= \log^+ \alpha + \log^+ \frac{1}{\alpha}, \\ \log^+ \left( \prod_{i=1}^n \alpha_i \right) &\leq \sum_{i=1}^n \log^+ \alpha_i, \end{aligned}$$

$$\log^+ \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \right) \leq \log n + \sum_{i=1}^n \log^+ \alpha_i.$$

**Définition 1.1.2** (voir [31]) Soit  $f$  une fonction méromorphe non constante. Soit  $i(z, a, f)$  désignant la multiplicité de  $a$ -points de  $f$  à  $z$ . Ainsi, on définit

$$n(r, a, f) = n \left( r, \frac{1}{f-a} \right) = \sum_{\substack{|z| \leq r \\ f(z)=a}} i(z, a, f),$$

c'est à-dire,  $n(r, a, f)$  est le nombre de racines de  $f(z) = a$  dans  $|z| \leq r$ , chaque racine étant compté avec son ordre de multiplicité. Pour les pôles de  $f$ , on définit pareillement

$$n(r, \infty, f) = n(r, f) = \sum_{\substack{|z| \leq r \\ f(z)=\infty}} i(z, \infty, f).$$

**Définition 1.1.3** (voir [31]) (fonction  $a$ -points). Pour la fonction méromorphe  $f$ , on définit

$$N(r, a, f) = N \left( r, \frac{1}{f-a} \right) = \int_0^r \frac{n(t, a, f) - n(0, a, f)}{t} dt + n(0, a, f) \log r, \quad a \neq \infty$$

et

$$N(r, \infty, f) = N(r, f) = \int_0^r \frac{n(t, \infty, f) - n(0, \infty, f)}{t} dt + n(0, \infty, f) \log r.$$

$N(r, a, f)$  est appelée fonction  $a$ -points de la fonction  $f$  dans le disque  $|z| \leq r$ .

**Définition 1.1.4** (voir [24, 25]) (fonction de proximité). Pour la fonction méromorphe  $f$ , on définit

$$m(r, a, f) = m \left( r, \frac{1}{f-a} \right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \left| \frac{1}{f(re^{i\varphi}) - a} \right| d\varphi, \quad a \neq \infty$$

et

$$m(r, \infty, f) = m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\varphi})| d\varphi.$$

$m(r, a, f)$  est appelée fonction de proximité de la fonction  $f$  au point  $a$ .

**Définition 1.1.5** (voir [27]) (Fonction caractéristique). La fonction caractéristique de la fonction méromorphe  $f$  est définie comme suit

$$T(r, f) = m(r, f) + N(r, f).$$

**Exemple 1.1.1** Pour la fonction  $f(z) = e^{az}$  ( $a \neq 0$ ), on a

$$m(r, f) = \frac{|a|r}{\pi}, \quad N(r, f) = 0.$$

D'où

$$T(r, f) = \frac{|a|r}{\pi}.$$

**Lemme 1.1.2** (voir [31]) Soit  $f$  une fonction méromorphe avec  $a$ -points  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  dans  $|z| \leq r$  tels que  $0 < |\alpha_1| < |\alpha_2| < \dots < |\alpha_n| \leq r$ , chacun étant compté avec son ordre de multiplicité. Alors

$$\int_0^r \frac{n(t, a, f)}{t} dt = \int_0^r \frac{n(t, a, f) - n(0, a, f)}{t} dt = \sum_{0 < |\alpha_i| \leq r} \log \frac{r}{|\alpha_i|}.$$

**Lemme 1.1.3** (voir [31]) Soit  $f$  une fonction méromorphe avec le développement de Laurent

$$f(z) = \sum_{i=m}^{\infty} c_i z^i, \quad c_m \neq 0, \quad m \in \mathbb{Z}$$

à l'origine. Alors

$$\log |c_m| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\varphi})| d\varphi + N(r, f) - N\left(r, \frac{1}{f}\right).$$

**Théorème 1.1.2** (voir [31]) (Premier théorème fondamental) Soient  $f$  une fonction méromorphe,  $a \in \mathbb{C}$  et

$$f(z) - a = \sum_{i=m}^{\infty} c_i z^i, \quad c_m \neq 0, \quad m \in \mathbb{Z}$$

le développement de Laurent de la fonction  $f - a$  à l'origine. Alors

$$T\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = T(r, f) - \log |c_m| + \varphi(r, a),$$

où

$$|\varphi(r, a)| \leq \log 2 + \log^+ |a|.$$

**Remarque 1.1.1** Le premier théorème fondamental peut être exprimé comme suit

$$T\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = T(r, f) + O(1)$$

pour tout  $a \in \mathbb{C}$ . On note que  $O(1)$  dépend de  $a \in \mathbb{C}$ .

**Lemme 1.1.4** (voir [31]) Soient  $f, f_1, \dots, f_n$  des fonctions méromorphes et  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  des nombres complexes tels que  $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ . Alors on a

$$\begin{aligned} m\left(r, \sum_{i=1}^n f_i\right) &\leq \sum_{i=1}^n m(r, f_i) + \log n, \\ m\left(r, \prod_{i=1}^n f_i\right) &\leq \sum_{i=1}^n m(r, f_i), \\ N\left(r, \sum_{i=1}^n f_i\right) &\leq \sum_{i=1}^n N(r, f_i), \\ N\left(r, \prod_{i=1}^n f_i\right) &\leq \sum_{i=1}^n N(r, f_i), \\ T\left(r, \sum_{i=1}^n f_i\right) &\leq \sum_{i=1}^n T(r, f_i) + \log n, \\ T\left(r, \prod_{i=1}^n f_i\right) &\leq \sum_{i=1}^n T(r, f_i), \\ T(r, f^n) &= nT(r, f), \quad n \in \mathbb{N}^*, \\ T\left(r, \frac{\alpha f + \beta}{\gamma f + \delta}\right) &= T(r, f) + O(1). \end{aligned}$$

### 1.1.2 L'exposant de convergence des zéros

**Définition 1.1.6** (voir [24, 31]) Soit  $f$  une fonction méromorphe. On définit l'exposant et l'hyper exposant de convergence des zéros de la fonction  $f$  respectivement par

$$\begin{aligned} \lambda(f) &= \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r}, \\ \lambda_2(f) &= \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r}, \end{aligned}$$

où

$$N\left(r, \frac{1}{f}\right) = \int_0^r \frac{n\left(t, \frac{1}{f}\right) - n\left(0, \frac{1}{f}\right)}{t} dt + n\left(0, \frac{1}{f}\right) \log r,$$

et  $n\left(t, \frac{1}{f}\right)$  désigne le nombre des zéros de la fonction  $f$  situés dans le disque  $|z| \leq t$ .

**Définition 1.1.7** (voir [13, 31]) Soit  $f$  une fonction méromorphe. On définit l'exposant et l'hyper exposant de convergence des zéros distincts de la fonction  $f$  respectivement par

$$\bar{\lambda}(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r},$$

$$\bar{\lambda}_2(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log \bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r},$$

où

$$\bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) = \int_0^r \frac{\bar{n}\left(t, \frac{1}{f}\right) - \bar{n}\left(0, \frac{1}{f}\right)}{t} dt + \bar{n}\left(0, \frac{1}{f}\right) \log r,$$

et  $\bar{n}\left(t, \frac{1}{f}\right)$  désigne le nombre des zéros distincts de la fonction  $f$  situés dans le disque  $|z| \leq t$ .

**Exemple 1.1.2** L'exposant de convergence des zéros distincts de la fonction  $f(z) = e^z - 1$  est égal à 1.

**Exemple 1.1.3** L'exposant et l'hyper exposant de convergence des zéros distincts de la fonction  $f(z) = e^{e^z} + 2$  sont égaux respectivement à  $\infty$  et 1.

**Définition 1.1.8** (voir [11, 31]) Soit  $f$  une fonction méromorphe. On définit l'exposant et l'hyper exposant de convergence des points fixes de la fonction  $f$  respectivement par

$$\tau(f) = \lambda(f - z) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log N\left(r, \frac{1}{f-z}\right)}{\log r},$$

$$\tau_2(f) = \lambda_2(f - z) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log N\left(r, \frac{1}{f-z}\right)}{\log r},$$

où

$$N\left(r, \frac{1}{f-z}\right) = \int_0^r \frac{n\left(t, \frac{1}{f-z}\right) - n\left(0, \frac{1}{f-z}\right)}{t} dt + n\left(0, \frac{1}{f-z}\right) \log r,$$

et  $n\left(t, \frac{1}{f-z}\right)$  désigne le nombre des points fixes de la fonction  $f$  situés dans le disque  $|z| \leq t$ .

**Définition 1.1.9** (voir [11, 31]) Soit  $f$  une fonction méromorphe. On définit l'exposant et l'hyper exposant de convergence des points fixes distincts de la fonction  $f$  respectivement par

$$\bar{\tau}(f) = \bar{\lambda}(f - z) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \bar{N}\left(r, \frac{1}{f-z}\right)}{\log r},$$

$$\bar{\tau}_2(f) = \bar{\lambda}_2(f - z) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log \bar{N}\left(r, \frac{1}{f-z}\right)}{\log r},$$

où

$$\bar{N}\left(r, \frac{1}{f-z}\right) = \int_0^r \frac{\bar{n}\left(t, \frac{1}{f-z}\right) - \bar{n}\left(0, \frac{1}{f-z}\right)}{t} dt + \bar{n}\left(0, \frac{1}{f-z}\right) \log r,$$

et  $\bar{n}\left(t, \frac{1}{f-z}\right)$  désigne le nombre des points fixes distincts de la fonction  $f$  situés dans le disque  $|z| \leq t$ .

**Exemple 1.1.4** L'exposant de convergence des points fixes distincts de la fonction

$$f(z) = e^z + z - 1$$

est égal à 1.

**Exemple 1.1.5** L'exposant et l'hyper exposant de convergence des points fixes de la fonction

$$f(z) = \cos(e^z)$$

sont égaux respectivement à  $\infty$  et 1.

### 1.1.3 L'ordre de croissance d'une fonction

**Définition 1.1.10** (voir [24, 38]) Soit  $f$  une fonction entière. Alors l'ordre et l'hyper-ordre de  $f$  sont définis respectivement par

$$\sigma(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log M(r, f)}{\log r}$$

et

$$\sigma_2(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log \log M(r, f)}{\log r},$$

où  $M(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)|$ . Si  $f$  est une fonction méromorphe, alors l'ordre et l'hyper-ordre de  $f$  sont définis respectivement par

$$\sigma(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r}$$

et

$$\sigma_2(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log T(r, f)}{\log r},$$

où  $T(r, f)$  est la fonction caractéristique de  $f$ .

**Exemple 1.1.6** *La fonction*

$$f(z) = \exp \{ \exp z \}$$

*est d'ordre  $\sigma(f) = \infty$  et d'hyper ordre  $\sigma_2(f) = 1$ .*

**Lemme 1.1.5** (voir [24]) *Soient  $f$  une fonction méromorphe transcendante et  $k \geq 1$  un entier positif. Alors*

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = O(\log(rT(r, f)))$$

*pour  $|z| = r \notin E$  où  $E \subset [0, +\infty)$  est un ensemble exceptionnel de mesure linéaire finie. Si  $f$  est d'ordre fini, alors*

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = O(\log r).$$

## 1.2 La densité des ensembles

**Définition 1.2.1** (voir [25]) *La mesure linéaire d'un ensemble  $E \subset [0, \infty)$  est définie par*

$$m(E) = \int_0^{+\infty} \chi_E(t) dt$$

*où  $\chi_E(t)$  est la fonction caractéristique de l'ensemble  $E$  et la mesure logarithmique d'un ensemble  $F \subset [1, \infty)$  est définie par*

$$lm(F) = \int_1^{+\infty} \frac{\chi_F(t)}{t} dt.$$

**Définition 1.2.2** (voir [25]) *La densité inférieure d'un sous-ensemble  $H \subset [0, +\infty)$  est définie par*

$$\underline{dens}H = \liminf_{r \rightarrow \infty} \left( \int_0^r \chi_H(t) dt \right) / r$$

*et la densité supérieure de  $H$  est définie par*

$$\overline{dens}H = \limsup_{r \rightarrow \infty} \left( \int_0^r \chi_H(t) dt \right) / r.$$

**Définition 1.2.3** (voir [25]) *La densité logarithmique inférieure  $\underline{\log dens}H$  d'un sous-ensemble  $H \subset [1, +\infty)$  est définie par*

$$\underline{\log dens}H = \liminf_{r \rightarrow \infty} \left( \int_1^r \frac{\chi_H(t)}{t} dt \right) / \log r$$

et la densité logarithmique supérieure  $\overline{\log dens}H$  d'un sous-ensemble  $H \subset (1, +\infty)$  est définie par

$$\overline{\log dens}H = \limsup_{r \rightarrow \infty} \left( \int_1^r \frac{\chi_H(t)}{t} dt \right) / \log r$$

où  $\chi_H(t)$  est la fonction caractéristique de l'ensemble  $H$ .

**Exemple 1.2.1** Soit  $E = [1, 2]$ . Alors

$$m(E) = 1, \quad lm(E) = \ln 2, \quad \underline{dens}E = \overline{dens}E = \underline{\log dens}E = \overline{\log dens}E = 0.$$

# Croissance des solutions de certaines équations différentielles linéaires d'ordre supérieur à coefficients fonctions entières

---

## 2.1 Introduction et résultats

Dans ce chapitre on s'intéresse à l'étude de l'ordre et l'hyper-ordre de croissance des solutions des équations différentielles linéaires homogènes d'ordre supérieur.

Pour l'équation différentielle linéaire d'ordre deux

$$f'' + e^{-z}f' + B(z)f = 0, \quad (2.1.1)$$

où  $B(z)$  est une fonction entière, on sait que chaque solution  $f$  de l'équation (2.1.1) est une fonction entière, et si  $f_1, f_2$  sont deux solutions linéairement indépendantes de (2.1.1), alors  $f_1$  ou  $f_2$  est d'ordre infini (voir [14]). Par conséquent, la majorité des solutions de (2.1.1) sont d'ordre infini. Mais l'équation (2.1.1) avec  $B(z) = -(1 + e^{-z})$  possède la solution d'ordre fini  $f(z) = e^z$ .

Une question naturelle se pose : Quelles sont les conditions sur  $B(z)$  qui garantissent que toute solution  $f \neq 0$  de (2.1.1) est d'ordre infini ? Les auteurs, Frei (voir [15]), Ozawa (voir [39]), Amemiya (voir [1]), Gundersen (voir [20]) et Langley (voir [34]) ont étudié ce problème. Ils ont prouvé que toute solution  $f \neq 0$  de (2.1.1) est d'ordre infini lorsque  $B(z)$  est un polynôme non constant ou une fonction entière transcendante avec  $\sigma(B) \neq 1$ . Dans ([12]),

Chen a étudié l'équation (2.1.1) et il a obtenu des résultats différents concernant la croissance de ses solutions quand  $\sigma(B) = 1$ .

Récemment, dans ([40]), Peng et Chen ont étudié l'ordre et l'hyper-ordre des solutions de certaines équations différentielles linéaires d'ordre deux et ils ont prouvé le résultat suivant.

**Théorème A** (voir [40]) *Soient  $A_j(z)$  ( $\neq 0$ ) ( $j = 1, 2$ ) des fonctions entières avec  $\sigma(A_j) < 1$ ,  $a_1, a_2$  des nombres complexes tels que  $a_1 a_2 \neq 0$ ,  $a_1 \neq a_2$  (supposons que  $|a_1| \leq |a_2|$ ). Si  $\arg a_1 \neq \pi$  ou  $a_1 < -1$ , alors toute solution  $f \neq 0$  de l'équation*

$$f'' + e^{-z} f' + (A_1 e^{a_1 z} + A_2 e^{a_2 z}) f = 0$$

*est d'ordre infini et  $\sigma_2(f) = 1$ .*

Dans ce chapitre, on continue la recherche dans ce type de problèmes, le but principal est de généraliser et d'améliorer les résultats du Théorème A à certaines équations différentielles linéaires d'ordre supérieur. En effet, on va prouver les résultats suivants.

**Théorème 2.1.1** (voir [22]) *Soient  $A_j(z)$  ( $\neq 0$ ) ( $j = 1, 2$ ),  $B_l(z)$  ( $\neq 0$ ) ( $l = 1, \dots, k-1$ ),  $D_m$  ( $m = 0, \dots, k-1$ ) des fonctions entières avec  $\max\{\sigma(A_j), \sigma(B_l), \sigma(D_m)\} < 1$ ,  $b_l$  ( $l = 1, \dots, k-1$ ) des constantes complexes telles que (i)  $\arg b_l = \arg a_1$  et  $b_l = c_l a_1$  ( $0 < c_l < 1$ ) ( $l \in I_1$ ) et (ii)  $b_l$  ( $l \in I_2$ ) sont des constantes réelles telles que  $b_l \leq 0$  où  $I_1 \neq \emptyset$ ,  $I_2 \neq \emptyset$ ,  $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ ,  $I_1 \cup I_2 = \{1, 2, \dots, k-1\}$ , et soient  $a_1, a_2$  deux nombres complexes tels que  $a_1 a_2 \neq 0$ ,  $a_1 \neq a_2$  (supposons que  $|a_1| \leq |a_2|$ ). Si  $\arg a_1 \neq \pi$  ou  $a_1$  est un nombre réel tel que  $a_1 < \frac{b}{1-c}$ , où  $c = \max\{c_l : l \in I_1\}$  et  $b = \min\{b_l : l \in I_2\}$ , alors toute solution  $f \neq 0$  de l'équation différentielle*

$$f^{(k)} + (D_{k-1} + B_{k-1} e^{b_{k-1} z}) f^{(k-1)} + \dots + (D_1 + B_1 e^{b_1 z}) f' + (D_0 + A_1 e^{a_1 z} + A_2 e^{a_2 z}) f = 0 \quad (2.1.2)$$

*vérifie  $\sigma(f) = +\infty$  et  $\sigma_2(f) = 1$ .*

**Corollaire 2.1.1** (voir [22]) *Soient  $A_j(z)$  ( $\neq 0$ ) ( $j = 1, 2$ ),  $B_l(z)$  ( $\neq 0$ ) ( $l = 1, \dots, k-1$ ),  $D_m$  ( $m = 0, \dots, k-1$ ) des fonctions entières avec  $\max\{\sigma(A_j), \sigma(B_l), \sigma(D_m)\} < 1$ ,  $b_l$  ( $l = 1, \dots, k-1$ ) des constantes complexes telles que  $\arg b_l = \arg a_1$  et  $b_l = c_l a_1$  ( $0 < c_l < 1$ ) ( $l = 1, \dots, k-1$ ), et soient  $a_1, a_2$  deux nombres complexes tels que  $a_1 a_2 \neq 0$ ,  $a_1 \neq a_2$  (supposons que  $|a_1| \leq |a_2|$ ). Si  $\arg a_1 \neq \pi$  ou  $a_1$  est un nombre réel tel que  $a_1 < 0$ , alors toute solution  $f \neq 0$  de l'équation (2.1.2) vérifie  $\sigma(f) = +\infty$  et  $\sigma_2(f) = 1$ .*

**Corollaire 2.1.2** (voir [22]) Soient  $A_j(z)$  ( $\neq 0$ ) ( $j = 1, 2$ ),  $B_l(z)$  ( $\neq 0$ ) ( $l = 1, \dots, k-1$ ),  $D_m$  ( $m = 0, \dots, k-1$ ) des fonctions entières avec  $\max\{\sigma(A_j), \sigma(B_l), \sigma(D_m)\} < 1$ ,  $b_l$  ( $l = 1, \dots, k-1$ ) des constantes complexes telles que  $b_l \leq 0$ , et soient  $a_1, a_2$  deux nombres complexes tels que  $a_1 a_2 \neq 0$ ,  $a_1 \neq a_2$  (supposons que  $|a_1| \leq |a_2|$ ). Si  $\arg a_1 \neq \pi$  ou  $a_1$  est un nombre réel tel que  $a_1 < b$  où  $b = \min\{b_l : l = 1, \dots, k-1\}$ , alors toute solution  $f \neq 0$  de l'équation (2.1.2) vérifie  $\sigma(f) = +\infty$  et  $\sigma_2(f) = 1$ .

## 2.2 Lemmes préliminaires

**Lemme 2.2.1** (voir [18]) Soient  $f$  une fonction méromorphe transcendante avec  $\sigma(f) = \sigma < +\infty$ ,  $H = \{(k_1, j_1), (k_2, j_2), \dots, (k_q, j_q)\}$  un ensemble fini de distinctes paires de nombres entiers vérifiant  $k_i > j_i \geq 0$  ( $i = 1, \dots, q$ ) et soit  $\varepsilon > 0$  une constante. Alors, on a

(i) Il existe un ensemble  $E_1 \subset [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$  de mesure linéaire nulle, tel que si  $\psi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \setminus E_1$ , alors il existe une constante  $R_0 = R_0(\psi) > 1$  telle que pour tout  $z$  satisfaisant  $\arg z = \psi$ ,  $|z| \geq R_0$  et pour tout  $(k, j) \in H$ , on a

$$\left| \frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)} \right| \leq |z|^{(k-j)(\sigma-1+\varepsilon)}. \quad (2.2.1)$$

(ii) Il existe un ensemble  $E_2 \subset (1, +\infty)$  de mesure logarithmique finie tel que pour tout  $z$  satisfaisant  $|z| \notin E_2 \cup [0, 1]$  et pour tout  $(k, j) \in H$ , on a

$$\left| \frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)} \right| \leq |z|^{(k-j)(\sigma-1+\varepsilon)}. \quad (2.2.2)$$

(iii) Il existe un ensemble  $E_3 \subset (0, +\infty)$  de mesure linéaire finie tel que pour tout  $z$  satisfaisant  $|z| \notin E_3$  et pour tout  $(k, j) \in H$ , on a

$$\left| \frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)} \right| \leq |z|^{(k-j)(\sigma+\varepsilon)}. \quad (2.2.3)$$

**Lemme 2.2.2** (voir [12]) Supposons que  $P(z) = (\alpha + i\beta)z^n + \dots$  ( $\alpha, \beta$  sont des nombres réels,  $|\alpha| + |\beta| \neq 0$ ) est un polynôme de degré  $n \geq 1$ , et  $A(z)$  ( $\neq 0$ ) est une fonction entière avec  $\sigma(A) < n$ . Posons  $g(z) = A(z)e^{P(z)}$ ,  $z = re^{i\theta}$ ,  $\delta(P, \theta) = \alpha \cos n\theta - \beta \sin n\theta$ . Alors, pour tout  $\varepsilon > 0$  donné, il existe un ensemble  $E_4 \subset [0, 2\pi)$  de mesure linéaire nulle, tel que pour tout  $\theta \in [0, 2\pi) \setminus (E_4 \cup E_5)$ , il existe  $R > 0$  telle que pour  $|z| = r > R$ , on a

(i) Si  $\delta(P, \theta) > 0$ , alors

$$\exp\{(1-\varepsilon)\delta(P, \theta)r^n\} \leq |g(re^{i\theta})| \leq \exp\{(1+\varepsilon)\delta(P, \theta)r^n\}, \quad (2.2.4)$$

(ii) Si  $\delta(P, \theta) < 0$ , alors

$$\exp \{(1 + \varepsilon) \delta(P, \theta) r^n\} \leq |g(re^{i\theta})| \leq \exp \{(1 - \varepsilon) \delta(P, \theta) r^n\}, \quad (2.2.5)$$

où  $E_5 = \{\theta \in [0, 2\pi) : \delta(P, \theta) = 0\}$  est un ensemble fini.

**Lemme 2.2.3** (voir [40]) *Supposons que  $n \geq 1$  est un nombre entier positif. Soient  $P_j(z) = a_{jn}z^n + \dots$  ( $j = 1, 2$ ) des polynômes non constants, où  $a_{jq}$  ( $q = 1, \dots, n$ ) sont des nombres complexes et  $a_{1n}a_{2n} \neq 0$ . Posons  $z = re^{i\theta}$ ,  $a_{jn} = |a_{jn}|e^{i\theta_j}$ ,  $\theta_j \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ ,  $\delta(P_j, \theta) = |a_{jn}| \cos(\theta_j + n\theta)$ , alors il existe un ensemble  $E_6 \subset [-\frac{\pi}{2n}, \frac{3\pi}{2n})$  de mesure linéaire nulle. Si  $\theta_1 \neq \theta_2$ , alors il existe un rayon  $\arg z = \theta$ ,  $\theta \in (-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}) \setminus (E_6 \cup E_7)$  tel que*

$$\delta(P_1, \theta) > 0, \quad \delta(P_2, \theta) < 0 \quad (2.2.6)$$

ou

$$\delta(P_1, \theta) < 0, \quad \delta(P_2, \theta) > 0, \quad (2.2.7)$$

où  $E_7 = \{\theta \in [-\frac{\pi}{2n}, \frac{3\pi}{2n}) : \delta(P_j, \theta) = 0\}$  est un ensemble fini ayant une mesure linéaire nulle.

**Remarque 2.2.1** (voir [40]) *Si on remplace  $\theta \in (-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}) \setminus (E_6 \cup E_7)$  par  $\theta \in (\frac{\pi}{2n}, \frac{3\pi}{2n}) \setminus (E_6 \cup E_7)$  dans le Lemme 2.2.3, alors on obtient le même résultat.*

**Lemme 2.2.4** (voir [9]) *Supposons que  $k \geq 2$  est un nombre entier positif. Soient  $B_0, B_1, \dots, B_{k-1}$  des fonctions entières d'ordre fini et soit  $\sigma = \max\{\sigma(B_j) : j = 0, \dots, k-1\}$ . Alors toute solution  $f$  de l'équation différentielle*

$$f^{(k)} + B_{k-1}f^{(k-1)} + \dots + B_1f' + B_0f = 0 \quad (2.2.8)$$

satisfait  $\sigma_2(f) \leq \sigma$ .

**Lemme 2.2.5** (voir [18]) *Soient  $f(z)$  une fonction méromorphe transcendante et  $\alpha > 1$  une constante donnée. Alors, il existe un ensemble  $E_8 \subset (1, +\infty)$  de mesure logarithmique finie et une constante  $B > 0$  qui dépend uniquement que  $\alpha$  et  $i, j$  ( $0 \leq i < j \leq k$ ), tels que pour tout  $z$  satisfaisant  $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_8$ , on a*

$$\left| \frac{f^{(j)}(z)}{f^{(i)}(z)} \right| \leq B \left\{ \frac{T(\alpha r, f)}{r} (\log^\alpha r) \log T(\alpha r, f) \right\}^{j-i}. \quad (2.2.9)$$

**Lemme 2.2.6** (voir [19]) *Soient  $\varphi : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\psi : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  des fonctions croissantes telles que  $\varphi(r) \leq \psi(r)$  pour tout  $r \notin E_9 \cup [0, 1]$ , où  $E_9 \subset (1, +\infty)$  est un ensemble de mesure logarithmique finie. Soit  $\gamma > 1$  une constante donnée. Alors il existe  $r_1 = r_1(\gamma) > 0$  tel que  $\varphi(r) \leq \psi(\gamma r)$  pour tout  $r > r_1$ .*

## 2.3 Preuve du Théorème 2.1.1

Supposons que  $f (\neq 0)$  est une solution de l'équation (2.1.2).

**Première étape :** Montrons que  $\sigma(f) = +\infty$ . Supposons que  $\sigma(f) = \sigma < +\infty$ .

Posons

$$\max \{ \sigma(A_j), \sigma(B_l), \sigma(D_m) \} = \beta < 1,$$

où  $(j = 1, 2), (l = 1, \dots, k-1), (m = 0, \dots, k-1)$ .

Pour tout  $\varepsilon$  ( $0 < \varepsilon < 1 - \beta$ ) et pour  $r$  suffisamment grand, on a

$$|A_j(z)| \leq \exp \{ r^{\beta+\varepsilon} \}, \quad |B_l(z)| \leq \exp \{ r^{\beta+\varepsilon} \}, \quad |D_m(z)| \leq \exp \{ r^{\beta+\varepsilon} \}. \quad (2.3.1)$$

D'après le Lemme 2.2.1 (i), pour  $\varepsilon$  défini ci-dessus, il existe un ensemble  $E_1 \subset [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$  de mesure linéaire nulle, si  $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \setminus E_1$ , alors il existe une constante  $R_0 = R_0(\theta) > 1$  telle que pour tout  $z$  satisfaisant  $\arg z = \theta$  et  $|z| = r \geq R_0$  on a

$$\left| \frac{f^{(j)}(z)}{f(z)} \right| \leq r^{j(\sigma-1+\varepsilon)} \quad (j = 1, \dots, k). \quad (2.3.2)$$

Soient  $z = re^{i\theta}$ ,  $a_1 = |a_1| e^{i\theta_1}$  et  $a_2 = |a_2| e^{i\theta_2}$  où  $\theta_1, \theta_2 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ . On sait que

$$\delta(b_l z, \theta) = \delta(c_l a_1 z, \theta) = c_l \delta(a_1 z, \theta) \quad (l \in I_1).$$

**Cas 1 :**  $\arg a_1 \neq \pi$ , c'est-à-dire  $\theta_1 \neq \pi$ .

(i) Supposons que  $\theta_1 \neq \theta_2$ . D'après le Lemme 2.2.3, pour  $\varepsilon$  donné,

$$0 < \varepsilon < \min \left\{ \frac{|a_2| - |a_1|}{|a_2| + |a_1|}, 1 - \beta, \frac{1 - c}{2(1 + c)} \right\},$$

il existe un rayon  $\arg z = \theta$  tel que  $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \setminus (E_1 \cup E_6 \cup E_7)$  (où  $E_6$  et  $E_7$  sont définis comme dans le Lemme 2.2.3 et  $E_1 \cup E_6 \cup E_7$  ayant une mesure linéaire nulle), et satisfaisant

$$\delta(a_1 z, \theta) > 0, \delta(a_2 z, \theta) < 0 \text{ ou } \delta(a_1 z, \theta) < 0, \delta(a_2 z, \theta) > 0.$$

a) Quand  $\delta(a_1 z, \theta) > 0, \delta(a_2 z, \theta) < 0$ , pour  $r$  suffisamment grand, on obtient par le Lemme 2.2.2

$$|A_1 e^{a_1 z}| \geq \exp \{ (1 - \varepsilon) \delta(a_1 z, \theta) r \}, \quad (2.3.3)$$

$$|A_2 e^{a_2 z}| \leq \exp \{ (1 - \varepsilon) \delta(a_2 z, \theta) r \} < 1. \quad (2.3.4)$$

Par (2.3.3) et (2.3.4), on obtient

$$\begin{aligned}
|A_1 e^{a_1 z} + A_2 e^{a_2 z}| &\geq |A_1 e^{a_1 z}| - |A_2 e^{a_2 z}| \\
&\geq \exp \{(1 - \varepsilon) \delta(a_1 z, \theta) r\} - 1 \\
&\geq (1 - o(1)) \exp \{(1 - \varepsilon) \delta(a_1 z, \theta) r\}.
\end{aligned} \tag{2.3.5}$$

De l'équation différentielle (2.1.2), on en déduit immédiatement que

$$\begin{aligned}
|A_1 e^{a_1 z} + A_2 e^{a_2 z}| &\leq \left| \frac{f^{(k)}(z)}{f(z)} \right| + (|D_{k-1}| + |B_{k-1}(z) e^{b_{k-1} z}|) \left| \frac{f^{(k-1)}(z)}{f(z)} \right| \\
&\quad + \dots + (|D_1| + |B_1(z) e^{b_1 z}|) \left| \frac{f'(z)}{f(z)} \right| + |D_0(z)|.
\end{aligned} \tag{2.3.6}$$

Pour  $l \in I_1$ , on a

$$|B_l(z) e^{b_l z}| \leq \exp \{(1 + \varepsilon) c_l \delta(a_1 z, \theta) r\} \leq \exp \{(1 + \varepsilon) c \delta(a_1 z, \theta) r\}, \tag{2.3.7}$$

et pour  $l \in I_2$ , on a aussi

$$|B_l(z) e^{b_l z}| = |B_l(z)| |e^{b_l z}| \leq \exp \{r^{\beta+\varepsilon}\} \exp \{b_l r \cos \theta\} \leq \exp \{r^{\beta+\varepsilon}\} \tag{2.3.8}$$

parce que  $b_l \leq 0$  et  $\cos \theta > 0$ .

En substituant (2.3.1), (2.3.2), (2.3.5), (2.3.7) et (2.3.8) dans (2.3.6), on obtient

$$\begin{aligned}
&(1 - o(1)) \exp \{(1 - \varepsilon) \delta(a_1 z, \theta) r\} \\
&\leq r^{k(\sigma-1+\varepsilon)} + (\exp \{r^{\beta+\varepsilon}\} + |B_{k-1}(z) e^{b_{k-1} z}|) r^{(k-1)(\sigma-1+\varepsilon)} \\
&\quad + \dots + (\exp \{r^{\beta+\varepsilon}\} + |B_1(z) e^{b_1 z}|) r^{\sigma-1+\varepsilon} + \exp \{r^{\beta+\varepsilon}\} \\
&\leq M_0 r^{k(\sigma-1+\varepsilon)} \exp \{r^{\beta+\varepsilon}\} \exp \{(1 + \varepsilon) c \delta(a_1 z, \theta) r\},
\end{aligned} \tag{2.3.9}$$

où  $M_0 > 0$  est une certaine constante.

De (2.3.9) et

$$0 < \varepsilon < \frac{1 - c}{2(1 + c)},$$

il vient immédiatement

$$(1 - o(1)) \exp \left\{ \frac{1 - c}{2} \delta(a_1 z, \theta) r \right\} \leq M_0 r^{k(\sigma-1+\varepsilon)} \exp \{r^{\beta+\varepsilon}\}. \tag{2.3.10}$$

Comme  $\delta(a_1z, \theta) > 0$  et  $\beta + \varepsilon < 1$ , alors (2.3.10) est une contradiction.

b) Quand  $\delta(a_1z, \theta) < 0$ ,  $\delta(a_2z, \theta) > 0$ , pour  $r$  suffisamment grand, on obtient par le Lemme 2.2.2

$$|A_1 e^{a_1 z}| \leq \exp \{(1 - \varepsilon) \delta(a_1 z, \theta) r\} < 1, \quad (2.3.11)$$

$$|A_2 e^{a_2 z}| \geq \exp \{(1 - \varepsilon) \delta(a_2 z, \theta) r\}. \quad (2.3.12)$$

Par (2.3.11) et (2.3.12), on obtient

$$|A_1 e^{a_1 z} + A_2 e^{a_2 z}| \geq (1 - o(1)) \exp \{(1 - \varepsilon) \delta(a_2 z, \theta) r\}. \quad (2.3.13)$$

Pour  $l \in I_1$ , on a

$$|B_l(z) e^{b_l z}| \leq \exp \{(1 + \varepsilon) c_l \delta(a_1 z, \theta) r\} < 1. \quad (2.3.14)$$

En substituant (2.3.1), (2.3.2), (2.3.8), (2.3.13) et (2.3.14) dans (2.3.6), on obtient

$$(1 - o(1)) \exp \{(1 - \varepsilon) \delta(a_2 z, \theta) r\} \leq M_0 r^{k(\sigma - 1 + \varepsilon)} \exp \{r^{\beta + \varepsilon}\}. \quad (2.3.15)$$

Comme  $\delta(a_2 z, \theta) > 0$  et  $\beta + \varepsilon < 1$ , alors (2.3.15) est une contradiction.

(ii) Supposons que  $\theta_1 = \theta_2$ . D'après Lemme 2.2.3, pour  $\varepsilon$  défini ci-dessus, il existe un rayon  $\arg z = \theta$  tel que  $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \setminus (E_1 \cup E_6 \cup E_7)$  et  $\delta(a_1 z, \theta) > 0$ . Puisque  $|a_1| \leq |a_2|$ ,  $a_1 \neq a_2$  et  $\theta_1 = \theta_2$  alors  $|a_1| < |a_2|$ , ainsi

$$\delta(a_2 z, \theta) > \delta(a_1 z, \theta) > 0.$$

Pour  $r$  suffisamment grand, on obtient par le Lemme 2.2.2

$$|A_1 e^{a_1 z}| \leq \exp \{(1 + \varepsilon) \delta(a_1 z, \theta) r\}, \quad (2.3.16)$$

$$|A_2 e^{a_2 z}| \geq \exp \{(1 - \varepsilon) \delta(a_2 z, \theta) r\} \quad (2.3.17)$$

et les relations (2.3.7), (2.3.8) sont vérifiées.

Par (2.3.16) et (2.3.17), on en déduit

$$\begin{aligned} & |A_1 e^{a_1 z} + A_2 e^{a_2 z}| \geq |A_2 e^{a_2 z}| - |A_1 e^{a_1 z}| \\ & \geq \exp \{(1 - \varepsilon) \delta(a_2 z, \theta) r\} - \exp \{(1 + \varepsilon) \delta(a_1 z, \theta) r\} \end{aligned}$$

$$= \exp \{(1 + \varepsilon) \delta(a_1 z, \theta) r\} [\exp \{\alpha r\} - 1], \quad (2.3.18)$$

où

$$\alpha = (1 - \varepsilon) \delta(a_2 z, \theta) - (1 + \varepsilon) \delta(a_1 z, \theta).$$

Comme

$$0 < \varepsilon < \frac{|a_2| - |a_1|}{|a_2| + |a_1|},$$

alors

$$\begin{aligned} \alpha &= (1 - \varepsilon) |a_2| \cos(\theta_2 + \theta) - (1 + \varepsilon) |a_1| \cos(\theta_1 + \theta) \\ &= \cos(\theta_1 + \theta) [(1 - \varepsilon) |a_2| - (1 + \varepsilon) |a_1|] \\ &= \cos(\theta_1 + \theta) [|a_2| - |a_1| - \varepsilon(|a_2| + |a_1|)] > 0. \end{aligned}$$

Selon (2.3.18) et  $\alpha > 0$ , on en déduit

$$|A_1 e^{a_1 z} + A_2 e^{a_2 z}| \geq (1 - o(1)) \exp \{(1 + \varepsilon) \delta(a_1 z, \theta) r\} \exp \{\alpha r\}. \quad (2.3.19)$$

En substituant (2.3.1), (2.3.2), (2.3.7), (2.3.8) et (2.3.19) dans (2.3.6), on obtient

$$\begin{aligned} &(1 - o(1)) \exp \{(1 + \varepsilon) \delta(a_1 z, \theta) r\} \exp \{\alpha r\} \\ &\leq M_1 r^{k(\sigma-1+\varepsilon)} \exp \{r^{\beta+\varepsilon}\} \exp \{(1 + \varepsilon) c \delta(a_1 z, \theta) r\}, \end{aligned} \quad (2.3.20)$$

où  $M_1 > 0$  est une certaine constante.

De (2.3.20), il vient immédiatement

$$(1 - o(1)) \exp \{[(1 + \varepsilon)(1 - c) \delta(a_1 z, \theta) + \alpha] r\} \leq M_1 r^{k(\sigma-1+\varepsilon)} \exp \{r^{\beta+\varepsilon}\}. \quad (2.3.21)$$

Comme  $\delta(a_1 z, \theta) > 0$ ,  $\alpha > 0$  et  $\beta + \varepsilon < 1$ , alors (2.3.21) est une contradiction.

**Cas 2 :**  $a_1 < \frac{b}{1-c}$ , c'est-à-dire  $\theta_1 = \pi$ .

(i) Supposons que  $\theta_1 \neq \theta_2$ , donc  $\theta_2 \neq \pi$ . D'après le Lemme 2.2.3, pour  $\varepsilon$  défini ci-dessus, il existe un rayon  $\arg z = \theta$  tel que  $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus (E_1 \cup E_6 \cup E_7)$  et  $\delta(a_2 z, \theta) > 0$ . Comme  $\cos \theta > 0$ , alors

$$\delta(a_1 z, \theta) = |a_1| \cos(\theta_1 + \theta) = -|a_1| \cos \theta < 0.$$

Pour  $r$  suffisamment grand, on obtient par le Lemme 2.2.2

$$|A_1 e^{a_1 z}| \leq \exp \{(1 - \varepsilon) \delta(a_1 z, \theta) r\} < 1, \quad (2.3.22)$$

$$|A_2 e^{a_2 z}| \geq \exp \{(1 - \varepsilon) \delta(a_2 z, \theta) r\} \quad (2.3.23)$$

et les relations (2.3.8), (2.3.14) sont vérifiées.

Des deux relations (2.3.22) et (2.3.23), on en déduit

$$\begin{aligned} |A_1 e^{a_1 z} + A_2 e^{a_2 z}| &\geq |A_2 e^{a_2 z}| - |A_1 e^{a_1 z}| \\ &\geq \exp \{(1 - \varepsilon) \delta(a_2 z, \theta) r\} - 1 \\ &\geq (1 - o(1)) \exp \{(1 - \varepsilon) \delta(a_2 z, \theta) r\}. \end{aligned} \quad (2.3.24)$$

En utilisant le même raisonnement du **cas 1** (i), on peut obtenir une contradiction.

(ii) Supposons que  $\theta_1 = \theta_2$ , donc  $\theta_1 = \theta_2 = \pi$ . D'après le Lemme 2.2.3, pour  $\varepsilon$  défini ci-dessus, il existe un rayon  $\arg z = \theta$  tel que  $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \setminus (E_1 \cup E_6 \cup E_7)$ , alors  $\cos \theta < 0$ ,

$$\delta(a_1 z, \theta) = |a_1| \cos(\theta_1 + \theta) = -|a_1| \cos \theta > 0$$

et

$$\delta(a_2 z, \theta) = |a_2| \cos(\theta_2 + \theta) = -|a_2| \cos \theta > 0.$$

Comme  $|a_1| \leq |a_2|$ ,  $a_1 \neq a_2$  et  $\theta_1 = \theta_2$ , alors  $|a_1| < |a_2|$ , ainsi

$$\delta(a_2 z, \theta) > \delta(a_1 z, \theta) > 0.$$

Pour  $r$  suffisamment grand, les relations (2.3.7), (2.3.16), (2.3.17) et (2.3.19) sont vérifiées.

Pour  $l \in I_2$ , on a donc

$$\begin{aligned} |B_l(z) e^{b_l z}| &= |B_l(z)| |e^{b_l z}| \leq \exp \{r^{\beta+\varepsilon}\} \exp \{b_l r \cos \theta\} \\ &\leq \exp \{r^{\beta+\varepsilon}\} \exp \{b r \cos \theta\}, \end{aligned} \quad (2.3.25)$$

car  $b_l \leq 0$ ,  $b = \min \{b_l : l \in I_2\}$  et  $\cos \theta < 0$ .

En substituant (2.3.1), (2.3.2), (2.3.7), (2.3.19) et (2.3.25) dans (2.3.6), on obtient

$$\begin{aligned} &(1 - o(1)) \exp \{(1 + \varepsilon) \delta(a_1 z, \theta) r\} \exp \{\alpha r\} \\ &\leq M_2 r^{k(\sigma-1+\varepsilon)} \exp \{r^{\beta+\varepsilon}\} \exp \{(1 + \varepsilon) c \delta(a_1 z, \theta) r\} \exp \{b r \cos \theta\}, \end{aligned}$$

où  $M_2 > 0$  est une certaine constante. Ainsi

$$(1 - o(1)) \exp \{ \gamma r \} \leq M_2 r^{k(\sigma-1+\varepsilon)} \exp \{ r^{\beta+\varepsilon} \}, \quad (2.3.26)$$

où

$$\gamma = (1 + \varepsilon) (1 - c) \delta(a_1 z, \theta) + \alpha - b \cos \theta.$$

Comme

$$\alpha > 0, \cos \theta < 0, \delta(a_1 z, \theta) = -|a_1| \cos \theta, a_1 < \frac{b}{1-c} \text{ et } b \leq 0,$$

alors

$$\begin{aligned} \gamma &= -(1 + \varepsilon) (1 - c) |a_1| \cos \theta - b \cos \theta + \alpha \\ &= -[(1 + \varepsilon) (1 - c) |a_1| + b] \cos \theta + \alpha \\ &> -\left[ (1 + \varepsilon) (1 - c) \frac{|b|}{1-c} + b \right] \cos \theta + \alpha \\ &= -[-(1 + \varepsilon) b + b] \cos \theta + \alpha = \alpha + b\varepsilon \cos \theta > 0. \end{aligned}$$

Comme  $\beta + \varepsilon < 1$  et  $\gamma > 0$ , alors (2.3.26) est une contradiction.

On conclut de la preuve ci-dessus que  $\sigma(f) = +\infty$ .

**Deuxième étape :** Montrons que  $\sigma_2(f) = 1$ . Par

$$\max \{ \sigma(D_l + B_l e^{b_l z}) (l = 1, \dots, k-1), \sigma(D_0 + A_1 e^{a_1 z} + A_2 e^{a_2 z}) \} = 1$$

et d'après le Lemme 2.2.4, on obtient  $\sigma_2(f) \leq 1$ .

D'après le Lemme 2.2.5, on sait qu'il existe un ensemble  $E_8 \subset (1, +\infty)$  de mesure logarithmique finie et une constante  $B > 0$  telle que pour tout  $z$  satisfaisant  $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_8$ , on a

$$\left| \frac{f^{(j)}(z)}{f(z)} \right| \leq B [T(2r, f)]^{j+1} (j = 1, \dots, k). \quad (2.3.27)$$

**Cas 1 :**  $\arg a_1 \neq \pi$ .

(i) ( $\theta_1 \neq \theta_2$ ). Dans la première étape, on a prouvé qu'il existe un rayon  $\arg z = \theta$  où  $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \setminus (E_1 \cup E_6 \cup E_7)$  satisfaisant

$$\delta(a_1 z, \theta) > 0, \delta(a_2 z, \theta) < 0 \text{ ou } \delta(a_1 z, \theta) < 0, \delta(a_2 z, \theta) > 0.$$

a) Quand  $\delta(a_1 z, \theta) > 0$  et  $\delta(a_2 z, \theta) < 0$ , pour  $r$  suffisamment grand, la relation (2.3.5) est vérifiée.

En substituant (2.3.1), (2.3.5), (2.3.7), (2.3.8) et (2.3.27) dans (2.3.6), on obtient pour tout  $z = re^{i\theta}$  satisfaisant  $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_8$ ,  $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \setminus (E_1 \cup E_6 \cup E_7)$

$$\begin{aligned}
& (1 - o(1)) \exp \{ (1 - \varepsilon) \delta(a_1 z, \theta) r \} \\
& \leq B [T(2r, f)]^{k+1} + B [\exp \{ r^{\beta+\varepsilon} \} + |B_{k-1}(z) e^{b_{k-1}z}|] [T(2r, f)]^k \\
& \quad + \dots + B [\exp \{ r^{\beta+\varepsilon} \} + |B_1(z) e^{b_1z}|] [T(2r, f)]^2 + \exp \{ r^{\beta+\varepsilon} \} \\
& \leq M_0 \exp \{ r^{\beta+\varepsilon} \} \exp \{ (1 + \varepsilon) c \delta(a_1 z, \theta) r \} [T(2r, f)]^{k+1}, \tag{2.3.28}
\end{aligned}$$

où  $M_0 > 0$  est une certaine constante.

De (2.3.28) et

$$0 < \varepsilon < \frac{1 - c}{2(1 + c)},$$

on déduit

$$(1 - o(1)) \exp \left\{ \frac{1 - c}{2} \delta(a_1 z, \theta) r \right\} \leq M_0 \exp \{ r^{\beta+\varepsilon} \} [T(2r, f)]^{k+1}. \tag{2.3.29}$$

Etant donné que  $\delta(a_1 z, \theta) > 0$  et  $\beta + \varepsilon < 1$ , alors en utilisant le Lemme 2.2.6 et (2.3.29) on obtient  $\sigma_2(f) \geq 1$ , d'où  $\sigma_2(f) = 1$ .

b) Quand  $\delta(a_1 z, \theta) < 0$  et  $\delta(a_2 z, \theta) > 0$ , pour  $r$  suffisamment grand, la relation (2.3.13) est vérifiée.

En substituant (2.3.1), (2.3.8), (2.3.13), (2.3.14) et (2.3.27) dans (2.3.6), on obtient pour tout  $z = re^{i\theta}$  satisfaisant  $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_8$ ,  $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \setminus (E_1 \cup E_6 \cup E_7)$

$$(1 - o(1)) \exp \{ (1 - \varepsilon) \delta(a_2 z, \theta) r \} \leq M_0 \exp \{ r^{\beta+\varepsilon} \} [T(2r, f)]^{k+1}, \tag{2.3.30}$$

où  $M_0 > 0$  est une certaine constante.

Etant donné que  $\delta(a_2 z, \theta) > 0$  et  $\beta + \varepsilon < 1$ , alors en utilisant le Lemme 2.2.6 et (2.3.30) on obtient  $\sigma_2(f) \geq 1$ , d'où  $\sigma_2(f) = 1$ .

(ii) ( $\theta_1 = \theta_2$ ). Dans la première étape, on a démontré qu'il existe un rayon  $\arg z = \theta$  où  $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \setminus (E_1 \cup E_6 \cup E_7)$  satisfaisant

$$\delta(a_2 z, \theta) > \delta(a_1 z, \theta) > 0,$$

et pour  $r$  suffisamment grand, la relation (2.3.19) est vérifiée.

En substituant (2.3.1), (2.3.7), (2.3.8), (2.3.19) et (2.3.27) dans (2.3.6), on obtient pour tout  $z = re^{i\theta}$  satisfaisant  $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_8$ ,  $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \setminus (E_1 \cup E_6 \cup E_7)$

$$(1 - o(1)) \exp \{(1 + \varepsilon) \delta(a_1 z, \theta) r\} \exp \{\alpha r\} \\ \leq M_1 \exp \{r^{\beta+\varepsilon}\} \exp \{(1 + \varepsilon) c \delta(a_1 z, \theta) r\} [T(2r, f)]^{k+1}, \quad (2.3.31)$$

où  $M_1 > 0$  est une certaine constante.

Par (2.3.31), on a donc

$$(1 - o(1)) \exp \{[(1 + \varepsilon)(1 - c) \delta(a_1 z, \theta) + \alpha] r\} \leq M_1 \exp \{r^{\beta+\varepsilon}\} [T(2r, f)]^{k+1}. \quad (2.3.32)$$

Etant donné que  $\delta(a_1 z, \theta) > 0$ ,  $\alpha > 0$  et  $\beta + \varepsilon < 1$ , alors en utilisant le Lemme 2.2.6 et (2.3.32) on obtient  $\sigma_2(f) \geq 1$ , d'où  $\sigma_2(f) = 1$ .

**Cas 2 :**  $a_1 < \frac{b}{1-c}$ .

(i) ( $\theta_1 \neq \theta_2$ ). Dans la première étape, on a démontré qu'il existe un rayon  $\arg z = \theta$  où  $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \setminus (E_1 \cup E_6 \cup E_7)$  satisfaisant

$$\delta(a_2 z, \theta) > 0 \text{ et } \delta(a_1 z, \theta) < 0,$$

et pour  $r$  suffisamment grand, la relation (2.3.24) est vérifiée.

En utilisant le même raisonnement du **cas 1** (i) de la deuxième étape, on peut obtenir  $\sigma_2(f) = 1$ .

(ii) ( $\theta_1 = \theta_2$ ). Dans la première étape, on a démontré qu'il existe un rayon  $\arg z = \theta$  où  $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \setminus (E_1 \cup E_6 \cup E_7)$  satisfaisant

$$\delta(a_2 z, \theta) > \delta(a_1 z, \theta) > 0,$$

et pour  $r$  suffisamment grand, la relation (2.3.19) est vérifiée.

En substituant (2.3.1), (2.3.7), (2.3.19), (2.3.25) et (2.3.27) dans (2.3.6), on obtient pour tout  $z = re^{i\theta}$  satisfaisant  $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_8$ ,  $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \setminus (E_1 \cup E_6 \cup E_7)$

$$(1 - o(1)) \exp \{(1 + \varepsilon) \delta(a_1 z, \theta) r\} \exp \{\alpha r\} \\ \leq M_2 \exp \{r^{\beta+\varepsilon}\} \exp \{(1 + \varepsilon) c \delta(a_1 z, \theta) r\} \exp \{br \cos \theta\} [T(2r, f)]^{k+1},$$

où  $M_2 > 0$  est une certaine constante.

Par conséquent

$$(1 - o(1)) \exp \{ \gamma r \} \leq M_2 \exp \{ r^{\beta+\varepsilon} \} [T(2r, f)]^{k+1}, \quad (2.3.33)$$

où

$$\gamma = (1 + \varepsilon)(1 - c) \delta(a_1 z, \theta) + \alpha - b \cos \theta.$$

Comme  $\gamma > 0$  et  $\beta + \varepsilon < 1$ , alors en utilisant le Lemme 2.2.6 et (2.3.33), on obtient  $\sigma_2(f) \geq 1$ , d'où  $\sigma_2(f) = 1$ .

On conclut de la preuve ci-dessus que toute solution  $f \not\equiv 0$  de l'équation différentielle (2.1.2) satisfait  $\sigma_2(f) = 1$ . La preuve du Théorème 2.1.1 est achevée.

## 2.4 Preuve du Corollaire 2.1.1 et Corollaire 2.1.2

En utilisant le même raisonnement du Théorème 2.1.1, on peut obtenir le Corollaire 2.1.1 et le Corollaire 2.1.2.

# Croissance et points fixes des solutions méromorphes des équations différentielles linéaires d'ordre supérieur

---

## 3.1 Introduction et résultats

Dans ce chapitre, on étudie l'ordre de croissance et les points fixes des solutions méromorphes et leurs dérivées des équations différentielles linéaires d'ordre supérieur à coefficients fonctions méromorphes.

Nos résultats généralisent les résultats précédents dus à Peng et Chen (voir [40]).

Considérons l'équation différentielle linéaire d'ordre deux

$$f'' + A_1(z) e^{P(z)} f' + A_0(z) e^{Q(z)} f = 0, \quad (3.1.1)$$

où  $P(z)$ ,  $Q(z)$  sont des polynômes non constants,  $A_1(z)$ ,  $A_0(z)$  ( $\neq 0$ ) sont des fonctions entières telles que  $\sigma(A_1) < \deg P(z)$ ,  $\sigma(A_0) < \deg Q(z)$ .

Dans ([19], p. 419), Gundersen a montré que si  $\deg P(z) \neq \deg Q(z)$ , alors toute solution non constante de (3.1.1) est d'ordre infini. Si  $\deg P(z) = \deg Q(z)$ , alors (3.1.1) peut avoir des solutions non constantes d'ordre fini.

Par exemple

$$f(z) = e^z + 1$$

satisfait

$$f'' + e^z f' - e^z f = 0.$$

Dans ([8]), Chen et Shon ont étudié le cas où  $\deg P(z) = \deg Q(z)$  et ils ont prouvé les résultats suivants.

**Théorème A** (voir [8]) *Soient  $A_j(z) (\neq 0)$  ( $j = 0, 1$ ) des fonctions méromorphes avec  $\sigma(A_j) < 1$  ( $j = 0, 1$ ),  $a, b$  des nombres complexes tels que  $ab \neq 0$  et  $\arg a \neq \arg b$  ou  $a = cb$  ( $0 < c < 1$ ). Alors, toute solution méromorphe  $f(z) \neq 0$  de l'équation*

$$f'' + A_1(z)e^{az}f' + A_0(z)e^{bz}f = 0 \quad (3.1.2)$$

*est d'ordre infini.*

Dans le même article ([8]), Chen et Shon ont étudié les points fixes des solutions de l'équation (3.1.2), leurs dérivées premières et deuxièmes et les polynômes différentiels, et ils ont obtenu le résultat suivant.

**Théorème B** (voir [8]) *Sous les hypothèses du Théorème A, soient  $d_0, d_1, d_2$  des constantes complexes qui ne sont pas toutes nulles. Si  $f(z) \neq 0$  est une solution méromorphe de l'équation (3.1.2), alors*

(i)  *$f, f', f''$  ont une infinité de points fixes et satisfont*

$$\bar{\lambda}(f - z) = \bar{\lambda}(f' - z) = \bar{\lambda}(f'' - z) = \infty.$$

(ii) *Le polynôme différentiel*

$$g(z) = d_2f'' + d_1f' + d_0f$$

*a une infinité de points fixes et satisfait*

$$\bar{\lambda}(g - z) = \infty.$$

Récemment, dans ([40]), Peng et Chen ont étudié l'ordre et l'hyper-ordre des solutions de certaines équations différentielles linéaires d'ordre deux (voir [Théorème A, chapitre 2]).

Le but principal de ce chapitre est d'étendre et d'améliorer les résultats du théorème de Peng et Chen (voir [Théorème A, chapitre 2]) à certaines équations différentielles linéaires d'ordre supérieur. En effet, on va montrer les résultats suivants.

**Théorème 3.1.1** (voir [21]) Soient  $A_j(z)$  ( $\neq 0$ ) ( $j = 1, 2$ ),  $B_1(z)$  ( $\neq 0$ ) et  $B_l(z)$  ( $l = 2, \dots, k-1$ ) des fonctions méromorphes avec

$$\max\{\sigma(A_j) \ (j = 1, 2), \sigma(B_l) \ (l = 1, \dots, k-1)\} < 1,$$

$a_1, a_2$  des nombres complexes tels que  $a_1 a_2 \neq 0$ ,  $a_1 \neq a_2$  (supposons que  $|a_1| \leq |a_2|$ ). Si  $\arg a_1 \neq \pi$  ou  $a_1 < -1$ , alors toute solution méromorphe  $f$  ( $\neq 0$ ) ayant une multiplicité des pôles uniformément bornée de l'équation

$$f^{(k)} + B_{k-1}f^{(k-1)} + \dots + B_2f'' + B_1e^{-z}f' + (A_1e^{a_1z} + A_2e^{a_2z})f = 0 \quad (3.1.3)$$

vérifie  $\sigma(f) = +\infty$ .

**Exemple 3.1.1** Considérons l'équation différentielle

$$f''' + \frac{4}{z}f'' + \left(-\frac{1}{z} - \frac{1}{2}z - 1\right)e^{-z}f' + \left(\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{2}z + 2\right)e^{-2z} + e^{-3z}\right)f = 0, \quad (3.1.4)$$

où  $B_2(z) = \frac{4}{z}$ ,  $B_1(z) = -\frac{1}{z} - \frac{1}{2}z - 1$ ,  $A_1(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{2}z + 2$ ,  $a_1 = -2$ ,  $A_2(z) = 1$  et  $a_2 = -3$ . Évidemment, les conditions du Théorème 3.1.1 sont satisfaites. La fonction méromorphe  $f(z) = \frac{1}{z^2}e^{e^{-z}}$  d'ordre  $\sigma(f) = +\infty$  est une solution de l'équation (3.1.4).

On sait que toutes les solutions d'une équation différentielle linéaire à coefficients fonctions entières sont des fonctions entières. Ainsi on obtient le corollaire suivant.

**Corollaire 3.1.1** Soient  $A_j(z)$  ( $\neq 0$ ) ( $j = 1, 2$ ),  $B_1(z)$  ( $\neq 0$ ) et  $B_l(z)$  ( $l = 2, \dots, k-1$ ) des fonctions entières avec

$$\max\{\sigma(A_j) \ (j = 1, 2), \sigma(B_l) \ (l = 1, \dots, k-1)\} < 1,$$

$a_1, a_2$  des nombres complexes tels que  $a_1 a_2 \neq 0$ ,  $a_1 \neq a_2$  (supposons que  $|a_1| \leq |a_2|$ ). Si  $\arg a_1 \neq \pi$  ou  $a_1 < -1$ , alors toute solution  $f$  ( $\neq 0$ ) de l'équation (3.1.3) vérifie  $\sigma(f) = +\infty$ .

**Théorème 3.1.2** (voir [21]) Sous les hypothèses du Théorème 3.1.1, soit  $f$  ( $\neq 0$ ) une solution méromorphe ayant une multiplicité des pôles uniformément bornée de l'équation (3.1.3), alors  $f, f', f''$  ont une infinité de points fixes et satisfont

$$\bar{\tau}(f) = \bar{\tau}(f') = \bar{\tau}(f'') = \infty.$$

**Corollaire 3.1.2** Sous les hypothèses du Corollaire 3.1.1, soit  $f$  ( $\neq 0$ ) une solution de l'équation (3.1.3), alors  $f, f', f''$  ont une infinité de points fixes et satisfont

$$\bar{\tau}(f) = \bar{\tau}(f') = \bar{\tau}(f'') = \infty.$$

## 3.2 Lemmes préliminaires

On utilise le Lemme 2.2.3 (voir [chapitre 2]) et les Lemmes suivants pour les démonstrations de nos résultats.

**Lemme 3.2.1** (voir [18]) Soient  $f$  une fonction méromorphe transcendante avec  $\sigma(f) = \sigma < +\infty$ ,  $\varepsilon > 0$  une constante donnée, et soient  $k, j$  deux entiers vérifiant  $k > j \geq 0$ . Alors, il existe un ensemble  $E_1 \subset \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$  de mesure linéaire nulle, tel que si  $\psi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \setminus E_1$ , alors il existe une constante  $R_0 = R_0(\psi) > 1$  telle que pour tout  $z$  satisfaisant  $\arg z = \psi$  et  $|z| \geq R_0$ , on a

$$\left| \frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)} \right| \leq |z|^{(k-j)(\sigma-1+\varepsilon)}. \quad (3.2.1)$$

**Lemme 3.2.2** (voir [8, 37]) Considérons  $g(z) = A(z)e^{az}$  où  $A(z) \not\equiv 0$  est une fonction méromorphe d'ordre  $\sigma(A) = \alpha < 1$ ,  $a$  est une constante complexe avec  $a = |a|e^{i\varphi}$  et  $\varphi \in [0, 2\pi)$ . Posons  $E_2 = \{\theta \in [0, 2\pi) : \cos(\varphi + \theta) = 0\}$ , donc  $E_2$  est un ensemble fini. Alors, pour tout  $\varepsilon$  donné ( $0 < \varepsilon < 1 - \alpha$ ), il existe un ensemble  $E_3 \subset [0, 2\pi)$  de mesure linéaire nulle tel que si  $z = re^{i\theta}$ ,  $\theta \in [0, 2\pi) \setminus (E_2 \cup E_3)$  et pour  $r$  suffisamment grand, on a

(i) Si  $\cos(\varphi + \theta) > 0$ , alors

$$\exp\{(1 - \varepsilon)r\delta(az, \theta)\} \leq |g(z)| \leq \exp\{(1 + \varepsilon)r\delta(az, \theta)\}. \quad (3.2.2)$$

(ii) Si  $\cos(\varphi + \theta) < 0$ , alors

$$\exp\{(1 + \varepsilon)r\delta(az, \theta)\} \leq |g(z)| \leq \exp\{(1 - \varepsilon)r\delta(az, \theta)\}, \quad (3.2.3)$$

où  $\delta(az, \theta) = |a| \cos(\varphi + \theta)$ .

**Lemme 3.2.3** (voir [8]) Soit  $f(z)$  une fonction méromorphe transcendante d'ordre  $\sigma(f) = \alpha < +\infty$ . Donc, pour tout  $\varepsilon > 0$  donné, il existe un ensemble  $E_4 \subset \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$  de mesure linéaire nulle, tel que si  $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \setminus E_4$ , alors il existe une constante  $R_1 = R_1(\theta) > 1$  telle que pour tout  $z$  satisfaisant  $\arg z = \theta$  et  $|z| \geq R_1$ , on a

$$\exp\{-r^{\alpha+\varepsilon}\} \leq |f(z)| \leq \exp\{r^{\alpha+\varepsilon}\}. \quad (3.2.4)$$

**Lemme 3.2.4** (voir [16], p. 30) Soient  $n \geq 1$  un nombre entier positif,  $P_1, P_2, \dots, P_n$  des polynômes non constants de degrés,  $d_1, d_2, \dots, d_n$ , respectivement, tels que  $\deg(P_i - P_j) = \max\{d_i, d_j\}$  pour  $i \neq j$ . Posons  $A(z) = \sum_{j=1}^n B_j(z)e^{P_j(z)}$ , où  $B_j(z) \not\equiv 0$  sont des fonctions méromorphes avec  $\sigma(B_j) < d_j$ . Alors  $\sigma(A) = \max\{d_j : j = 1, \dots, n\}$ .

En utilisant le raisonnement par récurrence, on peut obtenir le lemme suivant.

**Lemme 3.2.5** *Soit  $f(z) = g(z)/d(z)$ , où  $g(z)$  est une fonction entière transcendante et  $d(z)$  est le produit canonique (ou polynômiale) formé des pôles non nuls de  $f(z)$ . Alors*

$$f^{(n)} = \frac{1}{d} [g^{(n)} + D_{n,n-1}g^{(n-1)} + D_{n,n-2}g^{(n-2)} + \cdots + D_{n,1}g' + D_{n,0}g] \quad (3.2.5)$$

et

$$\frac{f^{(n)}}{f} = \frac{g^{(n)}}{g} + D_{n,n-1}\frac{g^{(n-1)}}{g} + D_{n,n-2}\frac{g^{(n-2)}}{g} + \cdots + D_{n,1}\frac{g'}{g} + D_{n,0}, \quad (3.2.6)$$

où  $D_{n,j}$  est la somme d'un nombre fini de termes du type

$$\sum_{(j_1 \cdots j_n)} C_{jj_1 \cdots j_n} \left(\frac{d'}{d}\right)^{j_1} \cdots \left(\frac{d^{(n)}}{d}\right)^{j_n},$$

$C_{jj_1 \cdots j_n}$  sont des constantes et  $j + j_1 + 2j_2 + \cdots + nj_n = n$ .

**Lemme 3.2.6** (voir [13]) *Soient  $A_0, A_1, \dots, A_{k-1}, F \neq 0$  des fonctions méromorphes d'ordre fini. Si  $f$  est une solution méromorphe d'ordre infini de l'équation différentielle*

$$f^{(k)} + A_{k-1}f^{(k-1)} + \cdots + A_1f' + A_0f = F, \quad (3.2.7)$$

alors  $f$  vérifie

$$\bar{\lambda}(f) = \lambda(f) = \sigma(f) = \infty.$$

Le lemme suivant, due à Gross (voir [17]), joue un rôle important dans ce chapitre.

**Lemme 3.2.7** (voir [17, 49]) *Supposons que  $f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z)$  ( $n \geq 2$ ) sont des fonctions méromorphes et  $g_1(z), g_2(z), \dots, g_n(z)$  sont des fonctions entières satisfaisant les conditions suivantes :*

(i)  $\sum_{j=1}^n f_j(z) e^{g_j(z)} \equiv 0$ ;

(ii)  $g_j(z) - g_k(z)$  ne sont pas constantes pour  $1 \leq j < k \leq n$ ;

(iii) Pour  $1 \leq j \leq n, 1 \leq h < k \leq n, T(r, f_j) = o\{T(r, e^{g_h(z) - g_k(z)})\}$  ( $r \rightarrow \infty, r \notin E$ ), où  $E$  est un ensemble de mesure linéaire finie.

Alors  $f_j(z) \equiv 0$  ( $j = 1, \dots, n$ ).

**Lemme 3.2.8** (voir [48]) *Supposons que  $f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z)$  ( $n \geq 2$ ) sont des fonctions méromorphes et  $g_1(z), g_2(z), \dots, g_n(z)$  sont des fonctions entières satisfaisant les conditions suivantes :*

(i)  $\sum_{j=1}^n f_j(z) e^{g_j(z)} \equiv f_{n+1}$ ;

(ii) Si  $1 \leq j \leq n+1, 1 \leq k \leq n$ , l'ordre de  $f_j$  est inférieur à l'ordre de  $e^{g_k(z)}$ . Si  $n \geq 2, 1 \leq j \leq n+1, 1 \leq h < k \leq n$ , l'ordre de  $f_j$  est inférieur à l'ordre de  $e^{g_h - g_k}$ .

Alors  $f_j(z) \equiv 0$  ( $j = 1, 2, \dots, n+1$ ).

### 3.3 Preuve du Théorème 3.1.1

Tout d'abord, on prouve que l'équation différentielle (3.1.3) n'admet pas une solution méromorphe  $f \not\equiv 0$  avec  $\sigma(f) < 1$ . Supposons que  $f \not\equiv 0$  est une solution méromorphe avec  $\sigma(f) < 1$ .

On peut écrire l'équation (3.1.3) comme suit

$$B_1 f' e^{-z} + A_1 f e^{a_1 z} + A_2 f e^{a_2 z} = - \{ f^{(k)} + B_{k-1} f^{(k-1)} + \dots + B_2 f'' \}. \quad (3.3.1)$$

Pour  $a_2 \neq -1$ , en appliquant le Lemme 3.2.4 pour la relation (3.3.1), on a

$$\begin{aligned} 1 &= \sigma \{ B_1 f' e^{-z} + A_1 f e^{a_1 z} + A_2 f e^{a_2 z} \} \\ &= \sigma [ - \{ f^{(k)} + B_{k-1} f^{(k-1)} + \dots + B_2 f'' \} ] < 1. \end{aligned}$$

C'est une contradiction.

Pour  $a_2 = -1$ , en appliquant le Lemme 3.2.4 pour la relation (3.3.1), on a

(i) Si

$$B_1 f' + A_2 f \neq 0,$$

alors

$$\begin{aligned} 1 &= \sigma \{ (B_1 f' + A_2 f) e^{-z} + A_1 f e^{a_1 z} \} \\ &= \sigma [ - \{ f^{(k)} + B_{k-1} f^{(k-1)} + \dots + B_2 f'' \} ] < 1. \end{aligned}$$

C'est une contradiction.

(ii) Si

$$B_1 f' + A_2 f \equiv 0,$$

alors

$$1 = \sigma \{ A_1 f e^{a_1 z} \} = \sigma [ - \{ f^{(k)} + B_{k-1} f^{(k-1)} + \dots + B_2 f'' \} ] < 1.$$

C'est une contradiction.

Par conséquent  $\sigma(f) \geq 1$ .

Maintenant, montrons que  $\sigma(f) = +\infty$ . Supposons que  $f \not\equiv 0$  est une solution méromorphe ayant une multiplicité des pôles uniformément bornée de l'équation différentielle (3.1.3) avec

$$1 \leq \sigma(f) = \sigma < +\infty.$$

D'après l'équation (3.1.3), on sait que les pôles de  $f(z)$  peuvent se produire uniquement des pôles de  $A_j$  ( $j = 1, 2$ ) et  $B_l$  ( $l = 1, \dots, k-1$ ). Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} N(r, f) &\leq M_1 \overline{N}(r, f) \leq M_1 \left( \sum_{j=1}^2 \overline{N}(r, A_j) + \sum_{l=1}^{k-1} \overline{N}(r, B_l) \right) \\ &\leq M \max \{ N(r, A_j) (j = 1, 2), N(r, B_l) (l = 1, \dots, k-1) \} \end{aligned}$$

où  $M_1$  et  $M$  sont des constantes positives. On en déduit que

$$\lambda \left( \frac{1}{f} \right) \leq \alpha = \max \{ \sigma(A_j) (j = 1, 2), \sigma(B_l) (l = 1, \dots, k-1) \} < 1.$$

Soit  $f = g/d$ , où  $d$  est le produit canonique formé des pôles non nuls de  $f(z)$ , avec

$$\sigma(d) = \lambda(d) = \lambda \left( \frac{1}{f} \right) = \beta \leq \alpha < 1$$

et  $g$  est une fonction entière avec

$$1 \leq \sigma(g) = \sigma(f) = \sigma < \infty.$$

En substituant  $f = g/d$  dans (3.1.3), d'après le Lemme 3.2.5, on peut obtenir

$$\begin{aligned} &\frac{g^{(k)}}{g} + [B_{k-1} + D_{k,k-1}] \frac{g^{(k-1)}}{g} + [B_{k-2} + B_{k-1}D_{k-1,k-2} + D_{k,k-2}] \frac{g^{(k-2)}}{g} \\ &+ \dots + \left[ B_2 + D_{k,2} + \sum_{i=3}^{k-1} B_i D_{i,2} \right] \frac{g''}{g} + \left[ B_1 e^{-z} + D_{k,1} + \sum_{i=2}^{k-1} B_i D_{i,1} \right] \frac{g'}{g} \\ &+ B_1 D_{1,0} e^{-z} + \sum_{i=2}^{k-1} B_i D_{i,0} + D_{k,0} + A_1 e^{a_1 z} + A_2 e^{a_2 z} = 0. \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

D'après le Lemme 3.2.3, pour tout  $\varepsilon$  donné ( $0 < \varepsilon < 1 - \alpha$ ), il existe un ensemble  $E_4 \subset \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$  de mesure linéaire nulle, si  $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \setminus E_4$ , alors il existe une constante  $R_1 = R_1(\theta) > 1$  telle que pour tout  $z$  satisfaisant  $\arg z = \theta$  et  $|z| \geq R_1$ , on a

$$|B_l(z)| \leq \exp \{ r^{\alpha+\varepsilon} \} \quad (l = 1, \dots, k-1). \quad (3.3.3)$$

D'après le Lemme 3.2.1, pour tout  $\varepsilon$  donné,

$$0 < \varepsilon < \min \left\{ \frac{|a_2| - |a_1|}{|a_2| + |a_1|}, 1 - \alpha \right\},$$

il existe un ensemble  $E_1 \subset \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$  de mesure linéaire nulle, si  $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \setminus E_1$ , alors il existe une constante  $R_0 = R_0(\theta) > 1$  telle que pour tout  $z$  satisfaisant  $\arg z = \theta$  et  $|z| = r \geq R_0$ , on a

$$\left| \frac{g^{(j)}(z)}{g(z)} \right| \leq r^{k(\sigma-1+\varepsilon)}, \quad j = 1, \dots, k, \quad (3.3.4)$$

$$\left| \frac{d^{(j)}(z)}{d(z)} \right| \leq r^{k(\beta-1+\varepsilon)}, \quad j = 1, \dots, k \quad (3.3.5)$$

et

$$\begin{aligned} |D_{k,j}| &= \left| \sum_{(j_1 \dots j_k)} C_{jj_1 \dots j_k} \left(\frac{d'}{d}\right)^{j_1} \left(\frac{d''}{d}\right)^{j_2} \dots \left(\frac{d^{(k)}}{d}\right)^{j_k} \right| \\ &\leq \sum_{(j_1 \dots j_k)} |C_{jj_1 \dots j_k}| \left|\frac{d'}{d}\right|^{j_1} \left|\frac{d''}{d}\right|^{j_2} \dots \left|\frac{d^{(k)}}{d}\right|^{j_k} \\ &\leq \sum_{(j_1 \dots j_k)} |C_{jj_1 \dots j_k}| r^{j_1(\beta-1+\varepsilon)} r^{2j_2(\beta-1+\varepsilon)} \dots r^{kj_k(\beta-1+\varepsilon)} \\ &= \sum_{(j_1 \dots j_k)} |C_{jj_1 \dots j_k}| r^{(j_1+2j_2+\dots+kj_k)(\beta-1+\varepsilon)}. \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

Par  $j_1 + \dots + kj_k = k - j \leq k$  et (3.3.6), on obtient

$$|D_{k,j}| \leq M r^{k(\beta-1+\varepsilon)}, \quad (3.3.7)$$

où  $M > 0$  est une certaine constante.

Soient  $z = r e^{i\theta}$ ,  $a_1 = |a_1| e^{i\theta_1}$  et  $a_2 = |a_2| e^{i\theta_2}$  où  $\theta_1, \theta_2 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ .

**Cas 1 :**  $\arg a_1 \neq \pi$ , c'est-à-dire  $\theta_1 \neq \pi$ .

(i) Supposons que  $\theta_1 \neq \theta_2$ . D'après le Lemme 3.2.2 et le Lemme 2.2.3, pour  $\varepsilon$  défini ci-dessus, il existe un rayon  $\arg z = \theta$  tel que  $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus (E_1 \cup E_4 \cup E_6 \cup E_7)$  (où  $E_6$  et  $E_7$  sont définis comme dans le Lemme 2.2.3 et  $E_1 \cup E_4 \cup E_5 \cup E_6$  est un ensemble de mesure linéaire nulle) et satisfaisant

$$\delta(a_1 z, \theta) > 0, \quad \delta(a_2 z, \theta) < 0$$

ou

$$\delta(a_1 z, \theta) < 0, \quad \delta(a_2 z, \theta) > 0.$$

Quand  $\delta(a_1 z, \theta) > 0$  et  $\delta(a_2 z, \theta) < 0$ , pour  $r$  suffisamment grand, il vient immédiatement

$$|A_1 e^{a_1 z}| \geq \exp\{(1-\varepsilon)\delta(a_1 z, \theta)r\}, \quad (3.3.8)$$

$$|A_2 e^{a_2 z}| \leq \exp \{ (1 - \varepsilon) \delta(a_2 z, \theta) r \} < 1. \quad (3.3.9)$$

Par (3.3.8) et (3.3.9), on en déduit

$$\begin{aligned} |A_1 e^{a_1 z} + A_2 e^{a_2 z}| &\geq |A_1 e^{a_1 z}| - |A_2 e^{a_2 z}| \geq \exp \{ (1 - \varepsilon) \delta(a_1 z, \theta) r \} - 1 \\ &\geq (1 - o(1)) \exp \{ (1 - \varepsilon) \delta(a_1 z, \theta) r \}. \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

De (3.3.2), on en déduit immédiatement que

$$\begin{aligned} |A_1 e^{a_1 z} + A_2 e^{a_2 z}| &\leq \left| \frac{g^{(k)}}{g} \right| + |B_{k-1} + D_{k,k-1}| \left| \frac{g^{(k-1)}}{g} \right| + |B_{k-2} + B_{k-1} D_{k-1,k-2} + D_{k,k-2}| \left| \frac{g^{(k-2)}}{g} \right| \\ &+ \cdots + \left| B_2 + D_{k,2} + \sum_{i=3}^{k-1} B_i D_{i,2} \right| \left| \frac{g''}{g} \right| + \left[ |B_1| |e^{-z}| + \left| D_{k,1} + \sum_{i=2}^{k-1} B_i D_{i,1} \right| \right] \left| \frac{g'}{g} \right| \\ &+ |B_1 D_{1,0}| |e^{-z}| + \sum_{i=2}^{k-1} |B_i D_{i,0}| + |D_{k,0}|. \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

Etant donné que  $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , il s'ensuit que

$$|e^{-z}| = e^{-r \cos \theta} < 1.$$

En substituant (3.3.3), (3.3.4), (3.3.7) et (3.3.10) dans (3.3.11), on obtient donc

$$(1 - o(1)) \exp \{ (1 - \varepsilon) \delta(a_1 z, \theta) r \} \leq M_1 r^{M_2} \exp \{ r^{\alpha + \varepsilon} \}, \quad (3.3.12)$$

où  $M_1 > 0$  et  $M_2 > 0$  sont des certaines constantes.

Comme  $\delta(a_1 z, \theta) > 0$  et  $\alpha + \varepsilon < 1$ , alors (3.3.12) est une contradiction.

Quand  $\delta(a_1 z, \theta) < 0$  et  $\delta(a_2 z, \theta) > 0$ , en utilisant un raisonnement analogue à celui fait précédemment, on peut aussi obtenir une contradiction.

(ii) Supposons que  $\theta_1 = \theta_2$ . D'après le Lemme 2.2.3, pour  $\varepsilon$  défini ci-dessus, il existe un rayon  $\arg z = \theta$  tel que  $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \setminus (E_1 \cup E_4 \cup E_6 \cup E_7)$  et  $\delta(a_1 z, \theta) > 0$ .

Etant donné que  $|a_1| \leq |a_2|$ ,  $a_1 \neq a_2$  et  $\theta_1 = \theta_2$ , il s'ensuit que  $|a_1| < |a_2|$ , donc

$$\delta(a_2 z, \theta) > \delta(a_1 z, \theta) > 0.$$

Pour  $r$  suffisamment grand, on a par le Lemme 3.2.2

$$|A_1 e^{a_1 z}| \leq \exp \{ (1 + \varepsilon) \delta(a_1 z, \theta) r \}, \quad (3.3.13)$$

$$|A_2 e^{a_2 z}| \geq \exp \{(1 - \varepsilon) \delta(a_2 z, \theta) r\}. \quad (3.3.14)$$

Par (3.3.13) et (3.3.14), on en déduit que

$$\begin{aligned} |A_1 e^{a_1 z} + A_2 e^{a_2 z}| &\geq |A_2 e^{a_2 z}| - |A_1 e^{a_1 z}| \\ &\geq \exp \{(1 - \varepsilon) \delta(a_2 z, \theta) r\} - \exp \{(1 + \varepsilon) \delta(a_1 z, \theta) r\} \\ &= \exp \{(1 + \varepsilon) \delta(a_1 z, \theta) r\} [\exp \{\eta r\} - 1], \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

où

$$\eta = (1 - \varepsilon) \delta(a_2 z, \theta) - (1 + \varepsilon) \delta(a_1 z, \theta).$$

Comme

$$0 < \varepsilon < \frac{|a_2| - |a_1|}{|a_2| + |a_1|},$$

il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \eta &= (1 - \varepsilon) |a_2| \cos(\theta_2 + \theta) - (1 + \varepsilon) |a_1| \cos(\theta_1 + \theta) \\ &= (1 - \varepsilon) |a_2| \cos(\theta_1 + \theta) - (1 + \varepsilon) |a_1| \cos(\theta_1 + \theta) \\ &= [(1 - \varepsilon) |a_2| - (1 + \varepsilon) |a_1|] \cos(\theta_1 + \theta) \\ &= [|a_2| - |a_1| - \varepsilon(|a_2| + |a_1|)] \cos(\theta_1 + \theta) > 0. \end{aligned}$$

Ainsi, d'après (3.3.15), on obtient

$$|A_1 e^{a_1 z} + A_2 e^{a_2 z}| \geq (1 - o(1)) \exp \{[(1 + \varepsilon) \delta(a_1 z, \theta) + \eta] r\}. \quad (3.3.16)$$

Etant donné que  $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , il s'ensuit que

$$|e^{-z}| = e^{-r \cos \theta} < 1.$$

En substituant (3.3.3), (3.3.4), (3.3.7) et (3.3.16) dans (3.3.11), on obtient

$$(1 - o(1)) \exp \{[(1 + \varepsilon) \delta(a_1 z, \theta) + \eta] r\} \leq M_1 r^{M_2} \exp \{r^{\alpha + \varepsilon}\}. \quad (3.3.17)$$

Comme  $\delta(a_1 z, \theta) > 0$ ,  $\eta > 0$  et  $\alpha + \varepsilon < 1$ , alors (3.3.17) est une contradiction.

**Cas 2 :**  $a_1 < -1$ , c'est-à-dire  $\theta_1 = \pi$ .

(i) Supposons que  $\theta_1 \neq \theta_2$ , donc  $\theta_2 \neq \pi$ .

D'après le Lemme 2.2.3, pour  $\varepsilon$  défini ci-dessus, il existe un rayon  $\arg z = \theta$  tel que  $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus (E_1 \cup E_4 \cup E_6 \cup E_7)$  et  $\delta(a_2z, \theta) > 0$ .

Comme  $\cos \theta > 0$ , on a

$$\delta(a_1z, \theta) = |a_1| \cos(\theta_1 + \theta) = -|a_1| \cos \theta < 0.$$

Pour  $r$  suffisamment grand, on a par le Lemme 3.2.2

$$|A_1e^{a_1z}| \leq \exp\{(1 - \varepsilon)\delta(a_1z, \theta)r\} < 1, \quad (3.3.18)$$

$$|A_2e^{a_2z}| \geq \exp\{(1 - \varepsilon)\delta(a_2z, \theta)r\}. \quad (3.3.19)$$

Par (3.3.18) et (3.3.19), on en déduit que

$$\begin{aligned} |A_1e^{a_1z} + A_2e^{a_2z}| &\geq |A_2e^{a_2z}| - |A_1e^{a_1z}| \geq \exp\{(1 - \varepsilon)\delta(a_2z, \theta)r\} - 1 \\ &\geq (1 - o(1)) \exp\{(1 - \varepsilon)\delta(a_2z, \theta)r\}. \end{aligned} \quad (3.3.20)$$

Etant donné que  $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ , il s'ensuit que

$$|e^{-z}| = e^{-r \cos \theta} < 1.$$

En substituant (3.3.3), (3.3.4), (3.3.7) et (3.3.20) dans (3.3.11), on obtient donc

$$(1 - o(1)) \exp\{(1 - \varepsilon)\delta(a_2z, \theta)r\} \leq M_1 r^{M_2} \exp\{r^{\alpha + \varepsilon}\}. \quad (3.3.21)$$

Comme  $\delta(a_2z, \theta) > 0$  et  $\alpha + \varepsilon < 1$ , alors (3.3.21) est une contradiction.

(ii) Supposons que  $\theta_1 = \theta_2$ , donc  $\theta_1 = \theta_2 = \pi$ .

D'après le Lemme 2.2.3, pour  $\varepsilon$  défini ci-dessus, il existe un rayon  $\arg z = \theta$  tel que  $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \setminus (E_1 \cup E_4 \cup E_6 \cup E_7)$ , donc  $\cos \theta < 0$ ,

$$\delta(a_1z, \theta) = |a_1| \cos(\theta_1 + \theta) = -|a_1| \cos \theta > 0$$

et

$$\delta(a_2z, \theta) = |a_2| \cos(\theta_2 + \theta) = -|a_2| \cos \theta > 0.$$

Etant donné que  $|a_1| \leq |a_2|$ ,  $a_1 \neq a_2$  et  $\theta_1 = \theta_2$ , il s'ensuit que  $|a_1| < |a_2|$ , ainsi

$$\delta(a_2z, \theta) > \delta(a_1z, \theta) > 0,$$

pour  $r$  suffisamment grand, les relations (3.3.13), (3.3.14) et (3.3.16) sont vérifiées.

Comme  $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ , il s'ensuit que

$$|e^{-z}| = e^{-r \cos \theta} > 1.$$

En substituant (3.3.3), (3.3.4), (3.3.7) et (3.3.16) dans (3.3.11), on obtient

$$(1 - o(1)) \exp \{[(1 + \varepsilon) \delta(a_1 z, \theta) + \eta] r\} \leq M_1 r^{M_2} \exp \{r^{\alpha + \varepsilon}\} e^{-r \cos \theta}. \quad (3.3.22)$$

Par conséquent

$$(1 - o(1)) \exp \{\gamma r\} \leq M_1 r^{M_2} \exp \{r^{\alpha + \varepsilon}\}, \quad (3.3.23)$$

où

$$\gamma = (1 + \varepsilon) \delta(a_1 z, \theta) + \eta + \cos \theta.$$

Comme  $\eta > 0$ ,  $\cos \theta < 0$ ,  $\delta(a_1 z, \theta) = -|a_1| \cos \theta$  et  $a_1 < -1$ , il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \gamma &= -(1 + \varepsilon) |a_1| \cos \theta + \cos \theta + \eta = -[(1 + \varepsilon) |a_1| - 1] \cos \theta + \eta \\ &> -[(1 + \varepsilon) - 1] \cos \theta + \eta = -\varepsilon \cos \theta + \eta > 0. \end{aligned}$$

Comme  $\alpha + \varepsilon < 1$ , alors (3.3.23) est une contradiction. On conclut de la preuve ci-dessus que

$$\sigma(f) = \sigma(g) = +\infty.$$

La preuve du Théorème 3.1.1 est achevée.

## 3.4 Preuve du Théorème 3.1.2

Supposons que  $f (\neq 0)$  est une solution méromorphe ayant une multiplicité des pôles uniformément bornée de l'équation différentielle (3.1.3), donc  $\sigma(f) = +\infty$  par le Théorème 3.1.1.

Posons

$$g_0(z) = f(z) - z,$$

alors  $z$  est un point fixe de  $f(z)$  si et seulement si  $g_0(z) = 0$ .

On sait que  $g_0(z)$  est une fonction méromorphe et

$$\sigma(g_0) = \sigma(f) = \infty.$$

En substituant  $f = g_0 + z$  dans (3.1.3), on a donc

$$g_0^{(k)} + B_{k-1} g_0^{(k-1)} + \cdots + B_2 g_0'' + B_1 e^{-z} g_0' + (A_1 e^{a_1 z} + A_2 e^{a_2 z}) g_0$$

$$= - [B_1 e^{-z} + z A_1 e^{a_1 z} + z A_2 e^{a_2 z}]. \quad (3.4.1)$$

On peut écrire (3.4.1) sous la forme suivante

$$g_0^{(k)} + h_{0,k-1} g_0^{(k-1)} + \cdots + h_{0,2} g_0'' + h_{0,1} g_0' + h_{0,0} g_0 = h_0, \quad (3.4.2)$$

où

$$h_0 = - [h_{0,1} + z h_{0,0}] = -B_1 e^{-z} - z A_1 e^{a_1 z} - z A_2 e^{a_2 z}.$$

Montrons maintenant que  $h_0 \neq 0$ . Supposons que

$$-B_1 e^{-z} - z A_1 e^{a_1 z} - z A_2 e^{a_2 z} = 0,$$

donc

$$z A_1 e^{(a_1+1)z} + z A_2 e^{(a_2+1)z} = -B_1.$$

Ainsi, d'après le Lemme 3.2.8, on a  $A_1 \equiv 0$ ,  $A_2 \equiv 0$  et  $B_1 \equiv 0$ , c'est une contradiction.

D'après le Lemme 3.2.6, on sait que

$$\bar{\lambda}(g_0) = \bar{\tau}(f) = \infty$$

est vérifiée.

Maintenant, montrons que  $\bar{\tau}(f') = \infty$ . Posons

$$g_1(z) = f'(z) - z,$$

donc  $z$  est un point fixe de  $f'(z)$  si et seulement si  $g_1(z) = 0$ .

On sait que  $g_1(z)$  est une fonction méromorphe et

$$\sigma(g_1) = \sigma(f') = \sigma(f) = \infty.$$

Posons

$$R(z) = A_1 e^{a_1 z} + A_2 e^{a_2 z},$$

alors

$$R' = (A_1' + a_1 A_1) e^{a_1 z} + (A_2' + a_2 A_2) e^{a_2 z}.$$

En dérivant les deux membres de l'équation différentielle (3.1.3), on obtient

$$f^{(k+1)} + B_{k-1} f^{(k)} + (B_{k-1}' + B_{k-2}) f^{(k-1)} + (B_{k-2}' + B_{k-3}) f^{(k-2)}$$

$$+\dots + (B'_3 + B_2) f''' + (B'_2 + B_1 e^{-z}) f'' + \left[ (B_1 e^{-z})' + R \right] f' + R' f = 0. \quad (3.4.3)$$

Par l'équation (3.1.3), on a donc

$$f = -\frac{1}{R} \left[ f^{(k)} + B_{k-1} f^{(k-1)} + \dots + B_2 f'' + B_1 e^{-z} f' \right]. \quad (3.4.4)$$

En substituant (3.4.4) dans (3.4.3), on trouve

$$\begin{aligned} & f^{(k+1)} + \left( B_{k-1} - \frac{R'}{R} \right) f^{(k)} + \left( B'_{k-1} + B_{k-2} - B_{k-1} \frac{R'}{R} \right) f^{(k-1)} \\ & + \left( B'_{k-2} + B_{k-3} - B_{k-2} \frac{R'}{R} \right) f^{(k-2)} + \dots + \left( B'_3 + B_2 - B_3 \frac{R'}{R} \right) f''' \\ & + \left( B'_2 + B_1 e^{-z} - B_2 \frac{R'}{R} \right) f'' + \left[ (B_1 e^{-z})' + R - B_1 e^{-z} \frac{R'}{R} \right] f' = 0. \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

On peut écrire l'équation (3.4.5) sous la forme suivante

$$f^{(k+1)} + h_{1,k-1} f^{(k)} + h_{1,k-2} f^{(k-1)} + \dots + h_{1,2} f''' + h_{1,1} f'' + h_{1,0} f' = 0, \quad (3.4.6)$$

où  $h_{1,j}$  ( $j = 0, 1, \dots, k-1$ ) sont des fonctions méromorphes définies par l'équation (3.4.5). En substituant  $f' = g_1 + z$ ,  $f'' = g'_1 + 1$ ,  $f^{(j+1)} = g_1^{(j)}$  ( $j = 2, \dots, k$ ) dans (3.4.6), on obtient immédiatement que

$$g_1^{(k)} + h_{1,k-1} g_1^{(k-1)} + h_{1,k-2} g_1^{(k-2)} + \dots + h_{1,2} g_1'' + h_{1,1} g_1' + h_{1,0} g_1 = h_1, \quad (3.4.7)$$

où

$$\begin{aligned} h_1 &= -(h_{1,1} + z h_{1,0}) \\ &= - \left[ B'_2 + B_1 e^{-z} - B_2 \frac{R'}{R} + z (B_1 e^{-z})' + z R - z B_1 e^{-z} \frac{R'}{R} \right] \\ &= -\frac{1}{R} \left\{ B'_2 R - B_2 R' + z R^2 + [B_1 R + z (B'_1 - B_1) R - z B_1 R'] e^{-z} \right\}. \end{aligned}$$

Montrons que  $h_1 \not\equiv 0$ . Supposons que  $h_1 \equiv 0$ , un calcul immédiat donne

$$\begin{aligned} & [B_1 A_1 + z (B'_1 - B_1) A_1 - z B_1 (A'_1 + a_1 A_1)] e^{(a_1-1)z} \\ & + [B_1 A_2 + z (B'_1 - B_1) A_2 - z B_1 (A'_2 + a_2 A_2)] e^{(a_2-1)z} \\ & + [B'_2 A_1 - B_2 (A'_1 + a_1 A_1)] e^{a_1 z} + [B'_2 A_2 - B_2 (A'_2 + a_2 A_2)] e^{a_2 z} \\ & + 2z A_1 A_2 e^{(a_1+a_2)z} + z A_1^2 e^{2a_1 z} + z A_2^2 e^{2a_2 z} = 0. \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

Posons :

$$I_1 = \{a_1 - 1, a_2 - 1, a_1, a_2, a_1 + a_2, 2a_2\},$$

$$I_2 = \{a_1 - 1, a_1, a_2, a_1 + a_2, 2a_1\},$$

$$I_3 = \{a_1 - 1, a_2 - 1, a_1, a_1 + a_2, 2a_1\}.$$

D'après les conditions du Théorème 3.1.1, on constate

(i) Si  $2a_1 \neq \beta \in I_1$ , alors on écrit (3.4.8) sous la forme

$$zA_1^2 e^{2a_1 z} + \sum_{\beta \in \Gamma_1} \alpha_\beta e^{\beta z} = 0, \quad (3.4.9)$$

où  $\Gamma_1 \subseteq I_1$  et  $\alpha_\beta$  ( $\beta \in \Gamma_1$ ) sont des fonctions méromorphes avec  $\sigma(\alpha_\beta) < 1$ .

D'après le Lemme 3.2.7 et le Lemme 3.2.8, on obtient  $A_1 \equiv 0$ , c'est une contradiction.

(ii) Si  $2a_1 = a_2 - 1$ , alors  $2a_2 \neq \beta \in I_2$ , ainsi on écrit (3.4.8) sous la forme

$$zA_2^2 e^{2a_2 z} + \sum_{\beta \in \Gamma_2} \alpha_\beta e^{\beta z} = 0, \quad (3.4.10)$$

où  $\Gamma_2 \subseteq I_2$  et  $\alpha_\beta$  ( $\beta \in \Gamma_2$ ) sont des fonctions méromorphes avec  $\sigma(\alpha_\beta) < 1$ .

D'après le Lemme 3.2.7 et le Lemme 3.2.8, on obtient  $A_2 \equiv 0$ , c'est une contradiction.

(iii) Si  $2a_1 = a_2$ , alors  $2a_2 \neq \beta \in I_3$ , ainsi on écrit (3.4.8) sous la forme

$$zA_2^2 e^{2a_2 z} + \sum_{\beta \in \Gamma_3} \alpha_\beta e^{\beta z} = 0, \quad (3.4.11)$$

où  $\Gamma_3 \subseteq I_3$  et  $\alpha_\beta$  ( $\beta \in \Gamma_3$ ) sont des fonctions méromorphes avec  $\sigma(\alpha_\beta) < 1$ .

D'après le Lemme 3.2.7 et le Lemme 3.2.8, on obtient  $A_2 \equiv 0$ , c'est une contradiction.

Par (3.4.7) et le Lemme 3.2.6 on sait que

$$\bar{\lambda}(g_1) = \bar{\lambda}(f' - z) = \bar{\tau}(f') = \sigma(g_1) = \sigma(f) = \infty.$$

Montrons maintenant que  $\bar{\tau}(f'') = \infty$ . Posons

$$g_2(z) = f''(z) - z,$$

donc  $z$  est un point fixe de  $f''(z)$  si et seulement si  $g_2(z) = 0$ .

On sait que  $g_2(z)$  est une fonction méromorphe et

$$\sigma(g_2) = \sigma(f'') = \sigma(f) = \infty.$$

Posons

$$G(z) = B_1 e^{-z}.$$

En dérivant les deux membres de l'équation différentielle (3.4.3), on trouve

$$\begin{aligned} & f^{(k+2)} + B_{k-1} f^{(k+1)} + (2B'_{k-1} + B_{k-2}) f^{(k)} + (B''_{k-1} + 2B'_{k-2} + B_{k-3}) f^{(k-1)} \\ & + (B''_{k-2} + 2B'_{k-3} + B_{k-4}) f^{(k-2)} + \cdots + (B''_4 + 2B'_3 + B_2) f^{(4)} \\ & + (B''_3 + 2B'_2 + G) f''' + (B''_2 + 2G' + R) f'' + (G'' + 2R') f' + R'' f = 0. \end{aligned} \quad (3.4.12)$$

Par (3.4.4) et (3.4.12), on obtient

$$\begin{aligned} & f^{(k+2)} + B_{k-1} f^{(k+1)} + \left(2B'_{k-1} + B_{k-2} - \frac{R''}{R}\right) f^{(k)} + \left(B''_{k-1} + 2B'_{k-2} + B_{k-3} - B_{k-1} \frac{R''}{R}\right) f^{(k-1)} \\ & + \cdots + \left(B''_4 + 2B'_3 + B_2 - B_4 \frac{R''}{R}\right) f^{(4)} + \left(B''_3 + 2B'_2 + G - B_3 \frac{R''}{R}\right) f''' \\ & + \left(B''_2 + 2G' + R - B_2 \frac{R''}{R}\right) f'' + \left(G'' + 2R' - G \frac{R''}{R}\right) f' = 0. \end{aligned} \quad (3.4.13)$$

Montrons que

$$G' + R - G \frac{R'}{R} \neq 0.$$

Supposons que

$$G' + R - G \frac{R'}{R} \equiv 0,$$

un calcul immédiat donne

$$f_1 e^{(a_1-1)z} + f_2 e^{(a_2-1)z} + 2A_1 A_2 e^{(a_1+a_2)z} + A_1^2 e^{2a_1 z} + A_2^2 e^{2a_2 z} = 0, \quad (3.4.14)$$

où  $f_j$  ( $j = 1, 2$ ) sont des fonctions méromorphes avec  $\sigma(f_j) < 1$ .

Posons  $K = \{a_1 - 1, a_2 - 1, a_1 + a_2, 2a_1, 2a_2\}$ . Par les conditions du Théorème 3.1.1, il est clair que  $2a_1 \neq a_1 - 1$ ,  $a_1 + a_2$ ,  $2a_2$ .

(i) Si  $2a_1 \neq a_2 - 1$ , alors on écrit (3.4.14) sous la forme

$$A_1^2 e^{2a_1 z} + \sum_{\beta \in \Gamma_1} \alpha_\beta e^{\beta z} = 0,$$

où  $\Gamma_1 \subseteq K \setminus \{2a_1\}$  et  $\alpha_\beta$  ( $\beta \in \Gamma_1$ ) sont des fonctions méromorphes avec  $\sigma(\alpha_\beta) < 1$ .

D'après le Lemme 3.2.7 et le Lemme 3.2.8, on obtient  $A_1 \equiv 0$ , c'est une contradiction.

(ii) Si  $2a_1 = a_2 - 1$ , alors  $2a_2 \neq a_1 - 1, a_2 - 1, a_1 + a_2, 2a_1$ .

Ainsi, on écrit (3.4.14) sous la forme

$$A_2^2 e^{2a_2 z} + \sum_{\beta \in \Gamma_2} \alpha_\beta e^{\beta z} = 0,$$

où  $\Gamma_2 \subseteq K \setminus \{2a_2\}$  et  $\alpha_\beta$  ( $\beta \in \Gamma_2$ ) sont des fonctions méromorphes avec  $\sigma(\alpha_\beta) < 1$ .

D'après le Lemme 3.2.7 et le Lemme 3.2.8, on obtient  $A_2 \equiv 0$ , c'est une contradiction.

Par conséquent,

$$G' + R - G \frac{R'}{R} \neq 0$$

est prouvée. Posons

$$\psi(z) = G'R + R^2 - GR' \text{ et } \phi(z) = G''R + 2R'R - GR''. \quad (3.4.15)$$

Par (3.4.5) et (3.4.15), on trouve

$$\begin{aligned} f' = & \frac{-R}{\psi(z)} \left\{ f^{(k+1)} + \left( B_{k-1} - \frac{R'}{R} \right) f^{(k)} + \left( B'_{k-1} + B_{k-2} - B_{k-1} \frac{R'}{R} \right) f^{(k-1)} \right. \\ & + \left( B'_{k-2} + B_{k-3} - B_{k-2} \frac{R'}{R} \right) f^{(k-2)} + \cdots + \left( B'_3 + B_2 - B_3 \frac{R'}{R} \right) f''' \\ & \left. + \left( B'_2 + G - B_2 \frac{R'}{R} \right) f'' \right\}. \end{aligned} \quad (3.4.16)$$

En substituant (3.4.15) et (3.4.16) dans (3.4.13), on obtient donc

$$\begin{aligned} & f^{(k+2)} + \left[ B_{k-1} - \frac{\phi}{\psi} \right] f^{(k+1)} + \left[ 2B'_{k-1} + B_{k-2} - \frac{R''}{R} - \frac{\phi}{\psi} \left( B_{k-1} - \frac{R'}{R} \right) \right] f^{(k)} \\ & + \left[ B''_{k-1} + 2B'_{k-2} + B_{k-3} - B_{k-1} \frac{R''}{R} - \frac{\phi}{\psi} \left( B'_{k-1} + B_{k-2} - B_{k-1} \frac{R'}{R} \right) \right] f^{(k-1)} \\ & + \cdots + \left[ B''_4 + 2B'_3 + B_2 - B_4 \frac{R''}{R} - \frac{\phi}{\psi} \left( B'_4 + B_3 - B_4 \frac{R'}{R} \right) \right] f^{(4)} \\ & + \left[ B''_3 + 2B'_2 + G - B_3 \frac{R''}{R} - \frac{\phi}{\psi} \left( B'_3 + B_2 - B_3 \frac{R'}{R} \right) \right] f''' \\ & + \left[ B''_2 + 2G' + R - B_2 \frac{R''}{R} - \frac{\phi}{\psi} \left( B'_2 + G - B_2 \frac{R'}{R} \right) \right] f'' = 0. \end{aligned} \quad (3.4.17)$$

On écrit l'équation (3.4.17) sous la forme suivante

$$f^{(k+2)} + h_{2,k-1} f^{(k+1)} + h_{2,k-2} f^{(k)} + \cdots + h_{2,1} f''' + h_{2,0} f'' = 0, \quad (3.4.18)$$

où  $h_{2,j}$  ( $j = 0, 1, \dots, k-1$ ) sont des fonctions méromorphes définies par l'équation (3.4.17). En substituant  $f'' = g_2 + z$ ,  $f''' = g_2' + 1$ ,  $f^{(j+2)} = g_2^{(j)}$  ( $j = 2, \dots, k$ ) dans (3.4.18), on obtient

$$g_2^{(k)} + h_{2,k-1}g_2^{(k-1)} + h_{2,k-2}g_2^{(k-2)} + \dots + h_{2,1}g_2' + h_{2,0}g_2 = h_2, \quad (3.4.19)$$

où

$$\begin{aligned} -h_2 &= h_{2,1} + zh_{2,0}, \\ h_{2,0} &= B_2'' + 2G' + R - B_2 \frac{R''}{R} - \frac{\phi(z)}{\psi(z)} \left( B_2' + G - B_2 \frac{R'}{R} \right), \\ h_{2,1} &= B_3'' + 2B_2' + G - B_3 \frac{R''}{R} - \frac{\phi(z)}{\psi(z)} \left( B_3' + B_2 - B_3 \frac{R'}{R} \right). \end{aligned}$$

Posons

$$D_1 = B_3'' + 2B_2' \text{ et } D_2 = B_3' + B_2.$$

Évidemment,  $D_j$  ( $j = 1, 2$ ) sont des fonctions méromorphes avec  $\sigma(D_j) < 1$ .

On peut obtenir

$$h_{2,1} = \frac{L_1(z)}{\psi(z)}, \quad h_{2,0} = \frac{L_0(z)}{\psi(z)}, \quad (3.4.20)$$

$$\frac{-h_2}{z} = \frac{1}{z}h_{2,1} + h_{2,0}, \quad (3.4.21)$$

où

$$\begin{aligned} L_1(z) &= D_1G'R + D_1R^2 - D_1GR' + G'GR + GR^2 - G^2R' - B_3G'R'' \\ &\quad - B_3R''R - D_2G''R + B_3G''R' - 2D_2R'R + 2B_3R'^2 + D_2GR'', \end{aligned} \quad (3.4.22)$$

$$\begin{aligned} L_0(z) &= B_2''G'R + B_2''R^2 - B_2''GR' + 2G'^2R + 3G'R^2 - 2GG'R' + R^3 \\ &\quad - 3GR'R - B_2G'R'' - B_2R''R - B_2'G''R - G''GR + B_2G''R' \end{aligned}$$

$$-2B_2'R'R + 2B_2R'^2 + B_2'GR'' + G^2R''. \quad (3.4.23)$$

Par conséquent, par (3.4.20) et (3.4.21), on a

$$\frac{-h_2}{z} = \frac{1}{\psi(z)} \left[ \frac{1}{z}L_1(z) + L_0(z) \right]. \quad (3.4.24)$$

Montrons maintenant que  $h_2 \neq 0$ . En effet, si  $h_2 \equiv 0$ , alors la relation (3.4.24) donne

$$\frac{1}{z}L_1(z) + L_0(z) = 0. \quad (3.4.25)$$

Par (3.4.22) et (3.4.23), on peut écrire (3.4.25) sous la forme

$$\begin{aligned} & f_1 e^{(a_1-1)z} + f_2 e^{(a_2-1)z} + f_3 e^{(a_1-2)z} + f_4 e^{(a_2-2)z} + f_5 e^{2a_1 z} + f_6 e^{2a_2 z} \\ & + f_7 e^{(a_1+a_2)z} + f_8 e^{(2a_1-1)z} + f_9 e^{(2a_2-1)z} + f_{10} e^{(a_1+a_2-1)z} \\ & + A_1^3 e^{3a_1 z} + A_2^3 e^{3a_2 z} + 3A_1^2 A_2 e^{(2a_1+a_2)z} + 3A_1 A_2^2 e^{(a_1+2a_2)z} = 0, \end{aligned} \quad (3.4.26)$$

où  $f_j$  ( $j = 1, \dots, 10$ ) sont des fonctions méromorphes avec  $\sigma(f_j) < 1$ .

Posons  $J = \{a_1 - 1, a_2 - 1, a_1 - 2, a_2 - 2, 2a_1, 2a_2, a_1 + a_2, 2a_1 - 1, 2a_2 - 1, a_1 + a_2 - 1, 3a_1, 3a_2, 2a_1 + a_2, a_1 + 2a_2\}$ .

Par les conditions du Théorème 3.1.1, il est clair que  $3a_1 \neq a_1 - 1, a_1 - 2, 2a_1, 2a_1 - 1, 3a_2, 2a_1 + a_2, a_1 + 2a_2$  et  $3a_2 \neq 2a_2, 3a_1, 2a_1 + a_2, a_1 + 2a_2$ .

(i) Si  $3a_1 \neq a_2 - 1, a_2 - 2, 2a_2, a_1 + a_2, 2a_2 - 1, a_1 + a_2 - 1$ , alors on écrit (3.4.26) sous la forme

$$A_1^3 e^{3a_1 z} + \sum_{\beta \in \Gamma_1} \alpha_\beta e^{\beta z} = 0,$$

où  $\Gamma_1 \subseteq J \setminus \{3a_1\}$  et  $\alpha_\beta$  ( $\beta \in \Gamma_1$ ) sont des fonctions méromorphes avec  $\sigma(\alpha_\beta) < 1$ .

D'après le Lemme 3.2.7 et le Lemme 3.2.8, on obtient  $A_1 \equiv 0$ , c'est une contradiction.

(ii) Si  $3a_1 = \gamma$  où  $\gamma \in \{a_2 - 1, a_2 - 2, 2a_2, a_1 + a_2, 2a_2 - 1, a_1 + a_2 - 1\}$ , alors  $3a_2 \neq \beta$  pour tout  $\beta \in J \setminus \{3a_2\}$ .

Par conséquent, on écrit (3.4.26) sous la forme

$$A_2^3 e^{3a_2 z} + \sum_{\beta \in \Gamma_2} \alpha_\beta e^{\beta z} = 0,$$

où  $\Gamma_2 \subseteq J \setminus \{3a_2\}$  et  $\alpha_\beta$  ( $\beta \in \Gamma_2$ ) sont des fonctions méromorphes avec  $\sigma(\alpha_\beta) < 1$ .

D'après le Lemme 3.2.7 et le Lemme 3.2.8, on obtient  $A_2 \equiv 0$ , c'est une contradiction. Ainsi,  $h_2 \neq 0$  est prouvée.

Par le Lemme 3.2.6 et (3.4.19), on sait que

$$\bar{\lambda}(g_2) = \bar{\lambda}(f'' - z) = \bar{\tau}(f'') = \sigma(g_2) = \sigma(f) = \infty.$$

La preuve du Théorème 3.1.2 est achevée.

# Croissance des solutions de quelques équations différentielles linéaires d'ordre deux à coefficients fonctions entières

---

## 4.1 Introduction et résultats

Dans ce chapitre, on étudie les propriétés des solutions de certaines équations différentielles linéaires d'ordre deux, en particulier la croissance et l'oscillation de ces solutions.

Dans ([40]), Peng et Chen ont étudié l'ordre et l'hyper-ordre des solutions de certaines équations différentielles linéaires d'ordre deux (voir [Théorème A, chapitre 2]).

Le but principal est d'étendre et d'améliorer les résultats du théorème de Peng et Chen (voir [Théorème A, chapitre 2]) à quelques équations différentielles linéaires d'ordre deux. En effet, on va montrer les résultats suivants.

**Théorème 4.1.1** (voir [4]) Soient  $n \geq 2$  un entier,  $A_j(z) (\neq 0)$  ( $j = 1, 2$ ) des fonctions entières avec  $\max \{\sigma(A_j) : j = 1, 2\} < 1$ ,  $Q(z) = q_m z^m + \dots + q_1 z + q_0$  un polynôme non constant et  $a_1, a_2$  des nombres complexes tels que  $a_1 a_2 \neq 0$ ,  $a_1 \neq a_2$ . Si (1)  $\arg a_1 \neq \pi$  et  $\arg a_1 \neq \arg a_2$  ou (2)  $\arg a_1 \neq \pi$ ,  $\arg a_1 = \arg a_2$  et  $|a_2| > n|a_1|$  ou (3)  $a_1 < 0$  et  $\arg a_1 \neq \arg a_2$  ou (4)  $-\frac{1}{n}(|a_2| - m) < a_1 < 0$ ,  $|a_2| > m$  et  $\arg a_1 = \arg a_2$ , alors toute solution  $f \neq 0$  de l'équation différentielle

$$f'' + Q(e^{-z})f' + (A_1 e^{a_1 z} + A_2 e^{a_2 z})^n f = 0 \quad (4.1.1)$$

vérifie  $\sigma(f) = +\infty$  et  $\sigma_2(f) = 1$ .

**Théorème 4.1.2** (voir [4]) Sous les hypothèses du Théorème 4.1.1, soit  $\varphi \not\equiv 0$  une fonction entière d'ordre fini, alors toute solution  $f \not\equiv 0$  de l'équation (4.1.1) satisfait

$$\bar{\lambda}(f - \varphi) = \lambda(f - \varphi) = \sigma(f) = +\infty,$$

$$\bar{\lambda}_2(f - \varphi) = \lambda_2(f - \varphi) = \sigma_2(f) = 1.$$

**Théorème 4.1.3** (voir [4]) Sous les hypothèses du Théorème 4.1.1, soit  $\varphi \not\equiv 0$  une fonction entière d'ordre  $\sigma(\varphi) < 1$ , alors toute solution  $f \not\equiv 0$  de l'équation (4.1.1) satisfait

$$\bar{\lambda}(f - \varphi) = \bar{\lambda}(f' - \varphi) = +\infty.$$

De plus, si (i)  $(2n + 2)a_1 \neq (2 - p)a_1 + pa_2 - k$  ( $p = 0, 1, 2; k = 0, 1, \dots, 2m$ ),  $(n + 2 - p)a_1 + pa_2 - k$  ( $p = 0, 1, \dots, n + 2; k = 0, 1, \dots, m$ ) ou (ii)  $(2n + 2)a_2 \neq (2 - p)a_1 + pa_2 - k$  ( $p = 0, 1, 2; k = 0, 1, \dots, 2m$ ),  $(n + 2 - p)a_1 + pa_2 - k$  ( $p = 0, 1, \dots, n + 2; k = 0, 1, \dots, m$ ), alors

$$\bar{\lambda}(f'' - \varphi) = +\infty.$$

**Corollaire 4.1.1** (voir [4]) Sous les hypothèses du Théorème 4.1.1, soit  $f \not\equiv 0$  une solution de l'équation (4.1.1), alors  $f, f'$  ont une infinité de points fixes et satisfont

$$\bar{\tau}(f) = \bar{\tau}(f') = \infty.$$

De plus, si (i)  $(2n + 2)a_1 \neq (2 - p)a_1 + pa_2 - k$  ( $p = 0, 1, 2; k = 0, 1, \dots, 2m$ ),  $(n + 2 - p)a_1 + pa_2 - k$  ( $p = 0, 1, \dots, n + 2; k = 0, 1, \dots, m$ ) ou (ii)  $(2n + 2)a_2 \neq (2 - p)a_1 + pa_2 - k$  ( $p = 0, 1, 2; k = 0, 1, \dots, 2m$ ),  $(n + 2 - p)a_1 + pa_2 - k$  ( $p = 0, 1, \dots, n + 2; k = 0, 1, \dots, m$ ), alors  $f''$  a une infinité de points fixes et satisfait

$$\bar{\tau}(f'') = \infty.$$

## 4.2 Lemmes préliminaires

On utilise les Lemmes 2.2.1-2.2.5 (voir [chapitre 2]), les Lemmes 3.2.6-3.2.8 (voir [chapitre 3]) et le Lemme suivant pour les démonstrations de nos résultats.

**Lemme 4.2.1** (voir [2]) Soient  $A_0, A_1, \dots, A_{k-1}, F \not\equiv 0$  des fonctions méromorphes d'ordre fini. Si  $f$  est une solution méromorphe de l'équation

$$f^{(k)} + A_{k-1}f^{(k-1)} + \dots + A_1f' + A_0f = F, \quad (4.2.1)$$

avec  $\sigma(f) = +\infty$  et  $\sigma_2(f) = \sigma$ , alors  $f$  vérifie

$$\bar{\lambda}_2(f) = \lambda_2(f) = \sigma_2(f) = \sigma.$$

### 4.3 Preuve du Théorème 4.1.1

Supposons que  $f (\neq 0)$  est une solution de l'équation différentielle (4.1.1).

**Première étape :** Montrons que  $\sigma(f) = +\infty$ . Supposons que  $\sigma(f) = \sigma < +\infty$ .

L'équation (4.1.1) devient

$$\frac{f''}{f} + Q(e^{-z}) \frac{f'}{f} + A_1^n e^{na_1 z} + A_2^n e^{na_2 z} + \sum_{p=1}^{n-1} C_n^p A_1^{n-p} e^{(n-p)a_1 z} A_2^p e^{pa_2 z} = 0. \quad (4.3.1)$$

D'après le Lemme 2.2.1, pour tout  $\varepsilon$  donné,

$$0 < \varepsilon < \min \left\{ \frac{|a_2| - n|a_1|}{2[(2n-1)|a_2| + n|a_1|]}, \frac{1}{2(2n-1)} \right\},$$

il existe un ensemble  $E_1 \subset [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$  de mesure linéaire nulle, si  $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \setminus E_1$ , alors il existe une constante  $R_0 = R_0(\theta) > 1$  telle que pour tout  $z$  satisfaisant  $\arg z = \theta$  et  $|z| = r \geq R_0$ , on a

$$\left| \frac{f^{(j)}(z)}{f(z)} \right| \leq r^{j(\sigma-1+\varepsilon)} \quad (j = 1, 2). \quad (4.3.2)$$

Soient  $z = re^{i\theta}$ ,  $a_1 = |a_1| e^{i\theta_1}$  et  $a_2 = |a_2| e^{i\theta_2}$  où  $\theta_1, \theta_2 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ . On sait que

$$\delta(pa_1 z, \theta) = p\delta(a_1 z, \theta) \text{ et } \delta(pa_2 z, \theta) = p\delta(a_2 z, \theta), \text{ où } p > 0.$$

**Cas 1 :** Supposons que  $\arg a_1 \neq \pi$  et  $\arg a_1 \neq \arg a_2$ , c'est-à-dire  $\theta_1 \neq \pi$  et  $\theta_1 \neq \theta_2$ .

D'après le Lemme 2.2.2 et le Lemme 2.2.3, pour  $\varepsilon$  défini ci-dessus, il existe un rayon  $\arg z = \theta$  tel que  $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \setminus (E_1 \cup E_6 \cup E_7)$  (où  $E_6$  and  $E_7$  sont définis comme dans le Lemme 2.2.3 et  $E_1 \cup E_6 \cup E_7$  est un ensemble de mesure linéaire nulle) et satisfaisant

$$\delta(a_1 z, \theta) > 0, \delta(a_2 z, \theta) < 0$$

ou

$$\delta(a_1 z, \theta) < 0, \delta(a_2 z, \theta) > 0.$$

a) Quand  $\delta(a_1 z, \theta) > 0$  et  $\delta(a_2 z, \theta) < 0$ , pour  $r$  suffisamment grand, on obtient par le Lemme 2.2.2

$$|A_1^n e^{na_1 z}| \geq \exp\{(1-\varepsilon)n\delta(a_1 z, \theta)r\}, \quad (4.3.3)$$

$$|A_2^n e^{na_2 z}| \leq \exp\{(1-\varepsilon)n\delta(a_2 z, \theta)r\} < 1, \quad (4.3.4)$$

$$\begin{aligned}
|A_1^{n-p} e^{(n-p)a_1 z}| &\leq \exp \{(1 + \varepsilon) (n - p) \delta (a_1 z, \theta) r\} \\
&\leq \exp \{(1 + \varepsilon) (n - 1) \delta (a_1 z, \theta) r\}, \quad p = 1, \dots, n - 1,
\end{aligned} \tag{4.3.5}$$

$$|A_2^p e^{pa_2 z}| \leq \exp \{(1 - \varepsilon) p \delta (a_2 z, \theta) r\} < 1, \quad p = 1, \dots, n - 1. \tag{4.3.6}$$

Pour  $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , il vient

$$\begin{aligned}
|Q(e^{-z})| &= |q_m e^{-mz} + \dots + q_1 e^{-z} + q_0| \\
&\leq |q_m| |e^{-mz}| + \dots + |q_1| |e^{-z}| + |q_0| \\
&\leq |q_m| e^{-mr \cos \theta} + \dots + |q_1| e^{-r \cos \theta} + |q_0| \leq M,
\end{aligned} \tag{4.3.7}$$

où  $M > 0$  est une certaine constante.

Par les relations (4.3.1)-(4.3.7), on obtient

$$\begin{aligned}
&\exp \{(1 - \varepsilon) n \delta (a_1 z, \theta) r\} \leq |A_1^n e^{na_1 z}| \\
&\leq \left| \frac{f''}{f} \right| + |Q(e^{-z})| \left| \frac{f'}{f} \right| + |A_2^n e^{na_2 z}| + \sum_{p=1}^{n-1} C_n^p |A_1^{n-p} e^{(n-p)a_1 z}| |A_2^p e^{pa_2 z}| \\
&\leq r^{2(\sigma-1+\varepsilon)} + M r^{\sigma-1+\varepsilon} + 2^n \exp \{(1 + \varepsilon) (n - 1) \delta (a_1 z, \theta) r\} \\
&\leq M_1 r^{M_2} \exp \{(1 + \varepsilon) (n - 1) \delta (a_1 z, \theta) r\},
\end{aligned} \tag{4.3.8}$$

où  $M_1 > 0$  et  $M_2 > 0$  sont des certaines constantes.

Par

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{2(2n - 1)}$$

et (4.3.8), on déduit immédiatement que

$$\exp \left\{ \frac{1}{2} \delta (a_1 z, \theta) r \right\} \leq M_1 r^{M_2}. \tag{4.3.9}$$

Comme  $\delta (a_1 z, \theta) > 0$ , alors (4.3.9) est une contradiction.

b) Quand  $\delta (a_1 z, \theta) < 0$  et  $\delta (a_2 z, \theta) > 0$ , en utilisant un raisonnement analogue à celui fait précédemment, on peut aussi obtenir une contradiction.

**Cas 2 :** Supposons que  $\arg a_1 \neq \pi$ ,  $\arg a_1 = \arg a_2$  et  $|a_2| > n |a_1|$ , c'est-à-dire  $\theta_1 \neq \pi$ ,  $\theta_1 = \theta_2$  et  $|a_2| > n |a_1|$ .

D'après le Lemme 2.2.3, pour  $\varepsilon$  défini ci-dessus, il existe un rayon  $\arg z = \theta$  tel que  $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \setminus (E_1 \cup E_6 \cup E_7)$  et  $\delta(a_1 z, \theta) > 0$ .

Étant donné  $|a_2| > n |a_1|$  et  $n \geq 2$ , alors  $|a_2| > |a_1|$ , donc

$$\delta(a_2 z, \theta) > \delta(a_1 z, \theta) > 0.$$

Pour  $r$  suffisamment grand, d'après le Lemme 2.2.2, on a donc

$$|A_2^n e^{na_2 z}| \geq \exp \{(1 - \varepsilon) n \delta(a_2 z, \theta) r\}, \quad (4.3.10)$$

$$|A_1^n e^{na_1 z}| \leq \exp \{(1 + \varepsilon) n \delta(a_1 z, \theta) r\}, \quad (4.3.11)$$

$$|A_1^{n-p} e^{(n-p)a_1 z}| \leq \exp \{(1 + \varepsilon) (n - 1) \delta(a_1 z, \theta) r\}, \quad p = 1, \dots, n - 1, \quad (4.3.12)$$

$$|A_2^p e^{pa_2 z}| \leq \exp \{(1 + \varepsilon) (n - 1) \delta(a_2 z, \theta) r\}, \quad p = 1, \dots, n - 1. \quad (4.3.13)$$

Par (4.3.1), (4.3.2), (4.3.7) et (4.3.10)-(4.3.13), on obtient

$$\begin{aligned} & \exp \{(1 - \varepsilon) n \delta(a_2 z, \theta) r\} \leq |A_2^n e^{na_2 z}| \\ & \leq \left| \frac{f''}{f} \right| + |Q(e^{-z})| \left| \frac{f'}{f} \right| + |A_1^n e^{na_1 z}| + \sum_{p=1}^{n-1} C_n^p |A_1^{n-p} e^{(n-p)a_1 z}| |A_2^p e^{pa_2 z}| \\ & \leq r^{2(\sigma-1+\varepsilon)} + M r^{\sigma-1+\varepsilon} + \exp \{(1 + \varepsilon) n \delta(a_1 z, \theta) r\} \\ & \quad + 2^n \exp \{(1 + \varepsilon) (n - 1) \delta(a_1 z, \theta) r\} \exp \{(1 + \varepsilon) (n - 1) \delta(a_2 z, \theta) r\} \\ & \leq M_1 r^{M_2} \exp \{(1 + \varepsilon) n \delta(a_1 z, \theta) r\} \exp \{(1 + \varepsilon) (n - 1) \delta(a_2 z, \theta) r\}. \end{aligned} \quad (4.3.14)$$

Par conséquent, d'après (4.3.14), on obtient

$$\exp \{\alpha r\} \leq M_1 r^{M_2}, \quad (4.3.15)$$

où

$$\alpha = [1 - \varepsilon (2n - 1)] \delta(a_2 z, \theta) - (1 + \varepsilon) n \delta(a_1 z, \theta).$$

Comme

$$0 < \varepsilon < \frac{|a_2| - n|a_1|}{2[(2n-1)|a_2| + n|a_1|]}, \quad \theta_1 = \theta_2 \text{ et } \cos(\theta_1 + \theta) > 0,$$

alors

$$\begin{aligned} \alpha &= [1 - \varepsilon(2n-1)]|a_2| \cos(\theta_2 + \theta) - (1 + \varepsilon)n|a_1| \cos(\theta_1 + \theta) \\ &= \{|a_2| - n|a_1| - \varepsilon[(2n-1)|a_2| + n|a_1|]\} \cos(\theta_1 + \theta) \\ &> \frac{|a_2| - n|a_1|}{2} \cos(\theta_1 + \theta) > 0. \end{aligned}$$

Ainsi (4.3.15) est une contradiction.

**Cas 3 :** Supposons que  $a_1 < 0$  et  $\arg a_1 \neq \arg a_2$ , c'est-à-dire  $\theta_1 = \pi$  et  $\theta_2 \neq \pi$ .

D'après le Lemme 2.2.3, pour  $\varepsilon$  défini ci-dessus, il existe un rayon  $\arg z = \theta$  tel que  $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \setminus (E_1 \cup E_6 \cup E_7)$  et  $\delta(a_2z, \theta) > 0$ .

Puisque  $\cos \theta > 0$ , on sait que

$$\delta(a_1z, \theta) = |a_1| \cos(\theta_1 + \theta) = -|a_1| \cos \theta < 0.$$

Pour  $r$  suffisamment grand, on obtient par le Lemme 2.2.2

$$|A_2^n e^{na_2z}| \geq \exp\{(1 - \varepsilon)n\delta(a_2z, \theta)r\}, \quad (4.3.16)$$

$$|A_1^n e^{na_1z}| \leq \exp\{(1 - \varepsilon)n\delta(a_1z, \theta)r\} < 1, \quad (4.3.17)$$

$$|A_1^{n-p} e^{(n-p)a_1z}| \leq \exp\{(1 - \varepsilon)(n-p)\delta(a_1z, \theta)r\} < 1, \quad p = 1, \dots, n-1, \quad (4.3.18)$$

$$|A_2^p e^{pa_2z}| \leq \exp\{(1 + \varepsilon)(n-1)\delta(a_2z, \theta)r\}, \quad p = 1, \dots, n-1. \quad (4.3.19)$$

En utilisant le même raisonnement du **cas 1** (a), on peut obtenir une contradiction.

**Cas 4 :** Supposons que  $-\frac{1}{n}(|a_2| - m) < a_1 < 0$ ,  $|a_2| > m$  et  $\arg a_1 = \arg a_2$ , c'est-à-dire  $\theta_1 = \theta_2 = \pi$  et  $|a_1| < \frac{1}{n}(|a_2| - m)$ , donc  $|a_2| > n|a_1| + m$ , ainsi  $|a_2| > n|a_1|$ .

D'après le Lemme 2.2.3, pour  $\varepsilon$  défini ci-dessus, il existe un rayon  $\arg z = \theta$  tel que  $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \setminus (E_1 \cup E_6 \cup E_7)$ , alors  $\cos \theta < 0$ ,

$$\delta(a_1z, \theta) = |a_1| \cos(\theta_1 + \theta) = -|a_1| \cos \theta > 0$$

et

$$\delta(a_2 z, \theta) = |a_2| \cos(\theta_2 + \theta) = -|a_2| \cos \theta > 0.$$

Étant donné  $|a_2| > n|a_1|$  et  $n \geq 2$ , alors  $|a_2| > |a_1|$ , donc

$$\delta(a_2 z, \theta) > \delta(a_1 z, \theta) > 0,$$

pour  $r$  suffisamment grand, les relations (4.3.10)-(4.3.13) sont vérifiées.

Pour  $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ , on a donc

$$|Q(e^{-z})| \leq M e^{-mr \cos \theta}. \quad (4.3.20)$$

Par (4.3.1), (4.3.2), (4.3.10)-(4.3.13) et (4.3.20), on en déduit que

$$\begin{aligned} & \exp\{(1 - \varepsilon) n \delta(a_2 z, \theta) r\} \leq |A_2^n e^{na_2 z}| \\ & \leq \left| \frac{f''}{f} \right| + |Q(e^{-z})| \left| \frac{f'}{f} \right| + |A_1^n e^{na_1 z}| + \sum_{p=1}^{n-1} C_n^p |A_1^{n-p} e^{(n-p)a_1 z}| |A_2^p e^{pa_2 z}| \\ & \leq r^{2(\sigma-1+\varepsilon)} + M r^{\sigma-1+\varepsilon} e^{-mr \cos \theta} + \exp\{(1 + \varepsilon) n \delta(a_1 z, \theta) r\} \\ & \quad + 2^n \exp\{(1 + \varepsilon)(n-1) \delta(a_1 z, \theta) r\} \exp\{(1 + \varepsilon)(n-1) \delta(a_2 z, \theta) r\} \\ & \leq M_1 r^{M_2} e^{-mr \cos \theta} \exp\{(1 + \varepsilon) n \delta(a_1 z, \theta) r\} \\ & \quad \times \exp\{(1 + \varepsilon)(n-1) \delta(a_2 z, \theta) r\}. \end{aligned} \quad (4.3.21)$$

Par conséquent, d'après (4.3.21), on obtient immédiatement que

$$\exp\{\beta r\} \leq M_1 r^{M_2}, \quad (4.3.22)$$

où

$$\beta = [1 - \varepsilon(2n-1)] \delta(a_2 z, \theta) - (1 + \varepsilon) n \delta(a_1 z, \theta) + m \cos \theta.$$

Comme  $|a_2| - n|a_1| - m > 0$ , alors

$$2[(2n-1)|a_2| + n|a_1|] > |a_2| - n|a_1| - m > 0.$$

Par conséquent,

$$\frac{|a_2| - n|a_1| - m}{2[(2n-1)|a_2| + n|a_1|]} < 1.$$

Ensuite, en choisissant

$$0 < \varepsilon < \frac{|a_2| - n|a_1| - m}{2[(2n-1)|a_2| + n|a_1|]},$$

et comme  $\theta_1 = \theta_2 = \pi$  et  $\cos \theta < 0$ , alors

$$\begin{aligned} \beta &= -\cos \theta \{ |a_2| - n |a_1| - m - \varepsilon [(2n-1) |a_2| + n |a_1|] \} \\ &> -\frac{1}{2} [|a_2| - n |a_1| - m] \cos \theta > 0. \end{aligned}$$

Et, par suite, (4.3.22) est une contradiction. On conclut de la preuve ci-dessus que  $\sigma(f) = +\infty$ .

**Deuxième étape :** Montrons que  $\sigma_2(f) = 1$ . Par

$$\max \{ \sigma [Q(e^{-z})], \sigma [(A_1 e^{a_1 z} + A_2 e^{a_2 z})^n] \} = 1$$

et d'après le Lemme 2.2.4, on obtient  $\sigma_2(f) \leq 1$ .

D'après le Lemme 2.2.5, on sait qu'il existe un ensemble  $E_8 \subset (1, +\infty)$  de mesure logarithmique finie et une constante  $B > 0$  telle que pour tout  $z$  satisfaisant  $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_8$ , on a

$$\left| \frac{f^{(j)}(z)}{f(z)} \right| \leq B [T(2r, f)]^{j+1} \quad (j = 1, 2). \quad (4.3.23)$$

**Cas 1 :**  $\theta_1 \neq \pi$  et  $\theta_1 \neq \theta_2$ . Dans la première étape, on a prouvé qu'il existe un rayon  $\arg z = \theta$  où  $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \setminus (E_1 \cup E_6 \cup E_7)$  satisfaisant

$$\delta(a_1 z, \theta) > 0, \delta(a_2 z, \theta) < 0 \text{ ou } \delta(a_1 z, \theta) < 0, \delta(a_2 z, \theta) > 0.$$

a) Quand  $\delta(a_1 z, \theta) > 0$  et  $\delta(a_2 z, \theta) < 0$ , pour  $r$  suffisamment grand, les relations (4.3.3)-(4.3.7) sont vérifiées.

Par (4.3.1), (4.3.3)-(4.3.7) et (4.3.23), on peut obtenir

$$\begin{aligned} &\exp \{ (1 - \varepsilon) n \delta(a_1 z, \theta) r \} \leq |A_1^n e^{n a_1 z}| \\ &\leq \left| \frac{f''}{f} \right| + |Q(e^{-z})| \left| \frac{f'}{f} \right| + |A_2^n e^{n a_2 z}| + \sum_{p=1}^{n-1} C_n^p |A_1^{n-p} e^{(n-p) a_1 z}| |A_2^p e^{p a_2 z}| \\ &\leq B [T(2r, f)]^3 + MB [T(2r, f)]^2 + 2^n \exp \{ (1 + \varepsilon) (n-1) \delta(a_1 z, \theta) r \} \\ &\leq M_1 \exp \{ (1 + \varepsilon) (n-1) \delta(a_1 z, \theta) r \} [T(2r, f)]^3. \end{aligned} \quad (4.3.24)$$

Par

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{2(2n-1)}$$

et (4.3.24), on a donc

$$\exp \left\{ \frac{1}{2} \delta(a_1 z, \theta) r \right\} \leq M_1 [T(2r, f)]^3. \quad (4.3.25)$$

Par  $\delta(a_1 z, \theta) > 0$  et (4.3.25), on déduit que  $\sigma_2(f) \geq 1$ , d'où  $\sigma_2(f) = 1$ .

b) Quand  $\delta(a_1 z, \theta) < 0$  et  $\delta(a_2 z, \theta) > 0$ , en utilisant un raisonnement analogue à celui fait précédemment, on peut aussi obtenir  $\sigma_2(f) = 1$ .

**Cas 2 :**  $\theta_1 \neq \pi$ ,  $\theta_1 = \theta_2$  et  $|a_2| > n|a_1|$ . Dans la première étape, on a prouvé qu'il existe un rayon  $\arg z = \theta$  où  $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus (E_1 \cup E_6 \cup E_7)$  satisfaisant

$$\delta(a_2 z, \theta) > \delta(a_1 z, \theta) > 0,$$

et pour  $r$  suffisamment grand, les relations (4.3.7) et (4.3.10)-(4.3.13) sont vérifiées.

Par (4.3.1), (4.3.7), (4.3.10)-(4.3.13) et (4.3.23), on obtient

$$\exp \{\alpha r\} \leq M_1 [T(2r, f)]^3, \quad (4.3.26)$$

où

$$\alpha = [1 - \varepsilon(2n - 1)] \delta(a_2 z, \theta) - (1 + \varepsilon)n \delta(a_1 z, \theta) > 0.$$

Par  $\alpha > 0$  et (4.3.26), on déduit que  $\sigma_2(f) \geq 1$ , d'où  $\sigma_2(f) = 1$ .

**Cas 3 :**  $a_1 < 0$  et  $\theta_1 \neq \theta_2$ . Dans la première étape, on a prouvé qu'il existe un rayon  $\arg z = \theta$  où  $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus (E_1 \cup E_6 \cup E_7)$  satisfaisant

$$\delta(a_2 z, \theta) > 0 \text{ et } \delta(a_1 z, \theta) < 0,$$

et pour  $r$  suffisamment grand, les relations (4.3.16)-(4.3.19) sont vérifiées. En utilisant le même raisonnement du **cas 1** (a) de la deuxième étape, on peut obtenir  $\sigma_2(f) = 1$ .

**Cas 4 :**  $-\frac{1}{n}(|a_2| - m) < a_1 < 0$ ,  $|a_2| > m$  et  $\theta_1 = \theta_2$ . Dans la première étape, on a prouvé qu'il existe un rayon  $\arg z = \theta$  où  $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \setminus (E_1 \cup E_6 \cup E_7)$  satisfaisant

$$\delta(a_2 z, \theta) > \delta(a_1 z, \theta) > 0,$$

et pour  $r$  suffisamment grand, les relations (4.3.10)-(4.3.13) sont vérifiées.

Par (4.3.1), (4.3.10)-(4.3.13), (4.3.20) et (4.3.23), on obtient

$$\exp \{\beta r\} \leq M_1 [T(2r, f)]^3, \quad (4.3.27)$$

où

$$\beta = [1 - \varepsilon(2n - 1)] \delta(a_2 z, \theta) - (1 + \varepsilon)n \delta(a_1 z, \theta) + m \cos \theta > 0.$$

Par  $\beta > 0$  et (4.3.27), on trouve  $\sigma_2(f) \geq 1$ , d'où  $\sigma_2(f) = 1$ . En concluant de la preuve ci-dessus, on obtient ainsi  $\sigma_2(f) = 1$ . La preuve du Théorème 4.1.1 est achevée.

**Exemple 4.3.1** *Considérons l'équation différentielle*

$$f'' + (-4e^{-3z} - 4ie^{-z} - 1) f' + (ie^z + 2e^{-z})^2 f = 0, \quad (4.3.28)$$

où  $Q(z) = -4z^3 - 4iz - 1$ ,  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = -1$ ,  $A_1(z) = i$  et  $A_2(z) = 2$ .

Évidemment, les conditions du Théorème 4.1.1 (1) sont satisfaites. La fonction entière  $f(z) = e^{e^z}$  d'ordre  $\sigma(f) = +\infty$  et d'hyper-ordre  $\sigma_2(f) = 1$  est une solution de l'équation (4.3.28).

**Exemple 4.3.2** *Considérons l'équation différentielle*

$$f'' + \left(-8e^{-2z} - 12e^{i\frac{\pi}{3}}e^{-z} - 1 - 6e^{i\frac{2\pi}{3}}\right) f' + \left(e^{i\frac{\pi}{3}}e^{\frac{2}{3}z} + 2e^{-\frac{1}{3}z}\right)^3 f = 0, \quad (4.3.29)$$

où  $Q(z) = -8z^2 - 12e^{i\frac{\pi}{3}}z - 1 - 6e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ,  $a_1 = \frac{2}{3}$ ,  $a_2 = \frac{-1}{3}$ ,  $A_1(z) = e^{i\frac{\pi}{3}}$  et  $A_2(z) = 2$ .

Évidemment, les conditions du Théorème 4.1.1 (1) sont satisfaites. La fonction entière  $f(z) = e^{e^z}$  d'ordre  $\sigma(f) = +\infty$  et d'hyper-ordre  $\sigma_2(f) = 1$  est une solution de l'équation (4.3.29).

**Exemple 4.3.3** *Considérons l'équation différentielle*

$$f'' + \left(-e^{-3z} - 4e^{i\frac{\pi}{4}}e^{-2z} - 6ie^{-z} - 1 - 4e^{i\frac{3\pi}{4}}\right) f' + \left(e^{-\frac{1}{2}z} + e^{i\frac{\pi}{4}}e^{\frac{1}{2}z}\right)^4 f = 0, \quad (4.3.30)$$

où  $Q(z) = -z^3 - 4e^{i\frac{\pi}{4}}z^2 - 6iz - 1 - 4e^{i\frac{3\pi}{4}}$ ,  $a_1 = \frac{-1}{2}$ ,  $a_2 = \frac{1}{2}$ ,  $A_1(z) = 1$  et  $A_2(z) = e^{i\frac{\pi}{4}}$ .

Évidemment, les conditions du Théorème 4.1.1 (3) sont satisfaites. La fonction entière  $f(z) = e^{e^z}$  d'ordre  $\sigma(f) = +\infty$  et d'hyper-ordre  $\sigma_2(f) = 1$  est une solution de l'équation (4.3.30).

## 4.4 Preuve du Théorème 4.1.2

Montrons que

$$\bar{\lambda}(f - \varphi) = \lambda(f - \varphi) = \sigma(f) = +\infty$$

et

$$\bar{\lambda}_2(f - \varphi) = \lambda_2(f - \varphi) = \sigma_2(f) = 1.$$

Tout d'abord, Posons  $\omega = f - \varphi$ . Étant donné  $\sigma(\varphi) < \infty$ , alors on a

$$\sigma(\omega) = \sigma(f) = +\infty.$$

De (4.1.1), on a donc

$$\omega'' + Q(e^{-z})\omega' + (A_1e^{a_1z} + A_2e^{a_2z})^n\omega = H, \quad (4.4.1)$$

où

$$H = -[\varphi'' + Q(e^{-z})\varphi' + (A_1e^{a_1z} + A_2e^{a_2z})^n\varphi].$$

Montrons maintenant que  $H \not\equiv 0$ . En effet, si  $H \equiv 0$ , alors

$$\varphi'' + Q(e^{-z})\varphi' + (A_1e^{a_1z} + A_2e^{a_2z})^n\varphi = 0. \quad (4.4.2)$$

Ainsi  $\varphi$  est une solution de l'équation (4.1.1) d'ordre  $\sigma(\varphi) = \infty$  par le Théorème 4.1.1, c'est une contradiction.

Étant donné  $\sigma(f) = \infty$ ,  $\sigma(\varphi) < \infty$  et  $\sigma_2(f) = 1$ , on obtient

$$\sigma_2(\omega) = \sigma_2(f - \varphi) = \sigma_2(f) = 1.$$

D'après le Lemme 3.2.6 et le Lemme 4.2.1, on a

$$\bar{\lambda}(\omega) = \lambda(\omega) = \sigma(\omega) = \sigma(f) = +\infty$$

et

$$\bar{\lambda}_2(\omega) = \lambda_2(\omega) = \sigma_2(\omega) = \sigma_2(f) = 1,$$

i.e.,

$$\bar{\lambda}(f - \varphi) = \lambda(f - \varphi) = \sigma(f) = +\infty$$

et

$$\bar{\lambda}_2(f - \varphi) = \lambda_2(f - \varphi) = \sigma_2(f) = 1.$$

## 4.5 Preuve du Théorème 4.1.3

Supposons que  $f \not\equiv 0$  est une solution de l'équation différentielle (4.1.1), donc  $\sigma(f) = +\infty$  par le Théorème 4.1.1.

Étant donné  $\sigma(\varphi) < 1$ , alors d'après le Théorème 4.1.2, on a

$$\bar{\lambda}(f - \varphi) = +\infty.$$

Montrons maintenant que  $\bar{\lambda}(f' - \varphi) = \infty$ . Posons

$$g_1(z) = f'(z) - \varphi(z),$$

donc

$$\sigma(g_1) = \sigma(f') = \sigma(f) = \infty.$$

Posons aussi

$$B(z) = Q(e^{-z}) \text{ et } R(z) = A_1 e^{a_1 z} + A_2 e^{a_2 z},$$

alors

$$B'(z) = -e^{-z} Q'(e^{-z}) \text{ et } R' = (A'_1 + a_1 A_1) e^{a_1 z} + (A'_2 + a_2 A_2) e^{a_2 z}.$$

En dérivant les deux membres de l'équation différentielle (4.1.1), on trouve

$$f''' + Bf'' + [B' + R^n] f' + nR'R^{n-1} f = 0. \quad (4.5.1)$$

La relation (4.1.1) donne

$$f = -\frac{1}{R^n} [f'' + Bf']. \quad (4.5.2)$$

En substituant (4.5.2) dans (4.5.1), on a

$$f''' + \left(B - n\frac{R'}{R}\right) f'' + \left[B' + R^n - nB\frac{R'}{R}\right] f' = 0. \quad (4.5.3)$$

En substituant  $f' = g_1 + \varphi$ ,  $f'' = g'_1 + \varphi'$ ,  $f''' = g''_1 + \varphi''$  dans (4.5.3), on a donc

$$g''_1 + E_1 g'_1 + E_0 g_1 = E, \quad (4.5.4)$$

où

$$E_1 = B - n\frac{R'}{R}, \quad E_0 = B' + R^n - nB\frac{R'}{R},$$

$$E = -\left\{ \varphi'' + \left[B - n\frac{R'}{R}\right] \varphi' + \left[B' + R^n - nB\frac{R'}{R}\right] \varphi \right\}.$$

Montrons maintenant que  $E \not\equiv 0$ . En effet, si  $E \equiv 0$ , alors on obtient

$$\frac{\varphi''}{\varphi} R + \frac{\varphi'}{\varphi} [BR - nR'] + B'R - nBR' + R^{n+1} = 0. \quad (4.5.5)$$

Évidemment  $\frac{\varphi''}{\varphi}$ ,  $\frac{\varphi'}{\varphi}$  sont des fonctions méromorphes avec  $\sigma\left(\frac{\varphi''}{\varphi}\right) < 1$ ,  $\sigma\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right) < 1$ .

On peut écrire (4.5.5) sous la forme

$$\sum_{k=0}^m f_k e^{(a_1-k)z} + \sum_{l=0}^m h_l e^{(a_2-l)z} + \sum_{p=1}^n C_{n+1}^p A_1^{n+1-p} A_2^p e^{[(n+1-p)a_1 + pa_2]z}$$

$$+ A_1^{n+1} e^{(n+1)a_1 z} + A_2^{n+1} e^{(n+1)a_2 z} = 0, \quad (4.5.6)$$

où  $f_k$  ( $k = 0, 1, \dots, m$ ) et  $h_l$  ( $l = 0, 1, \dots, m$ ) sont des fonctions méromorphes avec  $\sigma(f_k) < 1$  et  $\sigma(h_l) < 1$ .

Posons  $I = \{a_1 - k \ (k = 0, 1, \dots, m), a_2 - l \ (l = 0, 1, \dots, m), (n+1-p)a_1 + pa_2 \ (p = 1, 2, \dots, n), (n+1)a_1, (n+1)a_2\}$ .

Par les conditions du Théorème 4.1.1, il est clair que  $(n+1)a_1 \neq a_1, (n+1)a_2, (n+1-p)a_1 + pa_2 \ (p = 1, 2, \dots, n)$ .

(i) Si  $(n+1)a_1 \neq a_1 - k \ (k = 1, \dots, m), a_2 - l \ (l = 0, 1, \dots, m)$ , alors on écrit (4.5.6) sous la forme

$$A_1^{n+1} e^{(n+1)a_1 z} + \sum_{\beta \in \Gamma_1} \alpha_\beta e^{\beta z} = 0,$$

où  $\Gamma_1 \subseteq I \setminus \{(n+1)a_1\}$  et  $\alpha_\beta \ (\beta \in \Gamma_1)$  sont des fonctions méromorphes avec  $\sigma(\alpha_\beta) < 1$ .

D'après le Lemme 3.2.7 et le Lemme 3.2.8, on obtient  $A_1 \equiv 0$ , c'est une contradiction.

(ii) Si  $(n+1)a_1 = \gamma$  où  $\gamma \in \{a_1 - k \ (k = 1, \dots, m), a_2 - l \ (l = 0, 1, \dots, m)\}$ , alors  $(n+1)a_2 \neq \beta$  pour tout  $\beta \in I \setminus \{(n+1)a_2\}$ .

Par conséquent, on écrit (4.5.6) sous la forme

$$A_2^{n+1} e^{(n+1)a_2 z} + \sum_{\beta \in \Gamma_2} \alpha_\beta e^{\beta z} = 0,$$

où  $\Gamma_2 \subseteq I \setminus \{(n+1)a_2\}$  et  $\alpha_\beta \ (\beta \in \Gamma_2)$  sont des fonctions méromorphes avec  $\sigma(\alpha_\beta) < 1$ .

D'après le Lemme 3.2.7 et le Lemme 3.2.8, on obtient  $A_2 \equiv 0$ , c'est une contradiction. Ainsi,  $E \not\equiv 0$  est prouvée.

On sait que les fonctions  $E_1, E_0$  et  $E$  sont d'ordre fini. Par le Lemme 3.2.6 et (4.5.4), on a

$$\bar{\lambda}(g_1) = \bar{\lambda}(f' - \varphi) = \infty.$$

Montrons maintenant que  $\bar{\lambda}(f'' - \varphi) = \infty$ . Posons

$$g_2(z) = f''(z) - \varphi(z),$$

donc

$$\sigma(g_2) = \sigma(f'') = \sigma(f) = \infty.$$

En dérivant les deux membres de l'équation (4.1.1), on peut obtenir

$$f^{(4)} + Bf''' + (2B' + R^n)f'' + (B'' + 2nR'R^{n-1})f'$$

$$+ n[R''R^{n-1} + (n-1)R'^2R^{n-2}]f = 0. \quad (4.5.7)$$

En combinant (4.5.2) avec (4.5.7), on trouve

$$\begin{aligned} & f^{(4)} + Bf''' + \left(2B' + R^n - n\frac{R''}{R} - n(n-1)\frac{R'^2}{R^2}\right) f'' \\ & + \left(B'' + 2nR'R^{n-1} - nB\frac{R''}{R} - n(n-1)B\frac{R'^2}{R^2}\right) f' = 0. \end{aligned} \quad (4.5.8)$$

Montrons que

$$B' + R^n - nB\frac{R'}{R} \neq 0.$$

Supposons que

$$B' + R^n - nB\frac{R'}{R} \equiv 0,$$

ainsi

$$B'R + R^{n+1} - nBR' = 0. \quad (4.5.9)$$

En utilisant (4.5.9) et un raisonnement analogue à celui fait précédemment, on peut obtenir une contradiction. Posons

$$\psi(z) = B'R + R^{n+1} - nBR', \quad (4.5.10)$$

$$S_1 = 2B'R^2 + R^{n+2} - nR''R - n(n-1)R^2, \quad (4.5.11)$$

$$S_2 = B''R^2 + 2nR'R^{n+1} - nBR''R - n(n-1)BR^2, \quad (4.5.12)$$

$$S_3 = BR - nR'. \quad (4.5.13)$$

Par (4.5.3), (4.5.10) et (4.5.13), on obtient

$$f' = -\frac{R}{\psi(z)} \left[ f''' + \frac{S_3}{R} f'' \right]. \quad (4.5.14)$$

Et par (4.5.14), (4.5.11), (4.5.12) et (4.5.8), on obtient aussi

$$f^{(4)} + \left[ B - \frac{S_2}{R\psi(z)} \right] f''' + \left[ \frac{S_1}{R^2} - \frac{S_2S_3}{R^2\psi(z)} \right] f'' = 0. \quad (4.5.15)$$

En substituant  $f'' = g_2 + \varphi$ ,  $f''' = g_2' + \varphi'$ ,  $f^{(4)} = g_2'' + \varphi''$  dans (4.5.15), on obtient donc

$$g_2'' + H_1g_2' + H_0g_2 = H, \quad (4.5.16)$$

où

$$H_1 = B - \frac{S_2}{R\psi(z)}, \quad H_0 = \frac{S_1}{R^2} - \frac{S_2S_3}{R^2\psi(z)},$$

$$-H = \varphi'' + \varphi' H_1 + \varphi H_0.$$

On peut obtenir

$$H_1 = \frac{L_1(z)}{R\psi(z)}, \quad H_0 = \frac{L_0(z)}{R\psi(z)}, \quad (4.5.17)$$

où

$$\begin{aligned} L_1(z) = & B'BR^2 + BR^{n+2} - nB^2R'R - B''R^2 - 2nR'R^{n+1} \\ & + nBR''R + n(n-1)BR'^2, \end{aligned} \quad (4.5.18)$$

$$\begin{aligned} L_0(z) = & 2B'^2R^2 + 3B'R^{n+2} - 2nB'BR'R + R^{2n+2} - 3nBR'R^{n+1} \\ & - nB'R''R - nR''R^{n+1} - n(n-1)B'R'^2 + (n^2+n)R'^2R^n - B''BR^2 \\ & + nB^2R''R + n(n-1)B^2R'^2 + nB''R'R. \end{aligned} \quad (4.5.19)$$

Par conséquent

$$\frac{-H}{\varphi} = \frac{1}{R\psi(z)} \left( \frac{\varphi''}{\varphi} R\psi(z) + \frac{\varphi'}{\varphi} L_1(z) + L_0(z) \right), \quad (4.5.20)$$

$$R\psi(z) = B'R^2 + R^{n+2} - nBR'R. \quad (4.5.21)$$

Montrons que  $-H \not\equiv 0$ . En effet, si  $-H \equiv 0$ , alors  $\frac{-H}{\varphi} \equiv 0$ . Ainsi, (4.5.20) nous donne

$$\frac{\varphi''}{\varphi} R\psi(z) + \frac{\varphi'}{\varphi} L_1(z) + L_0(z) = 0. \quad (4.5.22)$$

Évidemment,  $\frac{\varphi''}{\varphi}$  et  $\frac{\varphi'}{\varphi}$  sont des fonctions méromorphes avec  $\sigma\left(\frac{\varphi''}{\varphi}\right) < 1$ ,  $\sigma\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right) < 1$ .

Par (4.5.18), (4.5.19) et (4.5.21), on peut écrire (4.5.22) sous la forme

$$\begin{aligned} & A_1^{2n+2} e^{(2n+2)a_1 z} + A_2^{2n+2} e^{(2n+2)a_2 z} + \sum_{p=1}^{2n+1} C_{2n+2}^p A_1^{2n+2-p} A_2^p e^{[(2n+2-p)a_1 + pa_2]z} \\ & + \sum_{\substack{0 \leq p \leq 2 \\ 0 \leq k \leq 2m}} f_{p,k} e^{[(2-p)a_1 + pa_2 - k]z} + \sum_{\substack{0 \leq p \leq n+2 \\ 0 \leq k \leq m}} h_{p,k} e^{[(n+2-p)a_1 + pa_2 - k]z} = 0, \end{aligned} \quad (4.5.23)$$

où  $f_{p,k}$  ( $0 \leq p \leq 2, 0 \leq k \leq 2m$ ) et  $h_{p,k}$  ( $0 \leq p \leq n+2, 0 \leq k \leq m$ ) sont des fonctions méromorphes avec  $\sigma(f_{p,k}) < 1$  et  $\sigma(h_{p,k}) < 1$ .

Posons  $J = \{(2n+2)a_1, (2n+2)a_2, (2n+2-p)a_1 + pa_2 \ (p = 1, 2, \dots, 2n+1), (2-p)a_1 + pa_2 - k \ (p = 0, 1, 2; k = 0, \dots, 2m), (n+2-p)a_1 + pa_2 - k \ (p = 0, 1, \dots, n+2; k = 0, 1, \dots, m)\}$ .

Par les conditions du Théorème 4.1.3, il est clair que  $(2n+2)a_1 \neq (2n+2)a_2$ ,  $(2n+2-p)a_1 + pa_2$  ( $p = 1, 2, \dots, 2n+1$ ),  $2a_1$ ,  $(n+2)a_1$  et  $(2n+2)a_2 \neq (2n+2)a_1$ ,  $(2n+2-p)a_1 + pa_2$  ( $p = 1, 2, \dots, 2n+1$ ),  $2a_2$ ,  $(n+2)a_2$ .

(1) Par les conditions du Théorème 4.1.3 (i), on obtient  $(2n+2)a_1 \neq \beta$  pour tout  $\beta \in J \setminus \{(2n+2)a_1\}$ , ainsi on écrit (4.5.23) sous la forme

$$A_1^{2n+2} e^{(2n+2)a_1 z} + \sum_{\beta \in \Gamma_1} \alpha_\beta e^{\beta z} = 0,$$

où  $\Gamma_1 \subseteq J \setminus \{(2n+2)a_1\}$  et  $\alpha_\beta$  ( $\beta \in \Gamma_1$ ) sont des fonctions méromorphes avec  $\sigma(\alpha_\beta) < 1$ . D'après le Lemme 3.2.7 et le Lemme 3.2.8, on obtient  $A_1 \equiv 0$ , c'est une contradiction.

(2) Par les conditions du Théorème 4.1.3 (ii), on obtient  $(2n+2)a_2 \neq \beta$  pour tout  $\beta \in J \setminus \{(2n+2)a_2\}$ , ainsi on écrit (4.5.23) sous la forme

$$A_2^{2n+2} e^{(2n+2)a_2 z} + \sum_{\beta \in \Gamma_2} \alpha_\beta e^{\beta z} = 0,$$

où  $\Gamma_2 \subseteq J \setminus \{(2n+2)a_2\}$  et  $\alpha_\beta$  ( $\beta \in \Gamma_2$ ) sont des fonctions méromorphes avec  $\sigma(\alpha_\beta) < 1$ . D'après le Lemme 3.2.7 et le Lemme 3.2.8, on obtient  $A_2 \equiv 0$ , c'est une contradiction. Ainsi,  $H \not\equiv 0$  est prouvée. On sait que les fonctions  $H_1$ ,  $H_0$  et  $H$  sont d'ordre fini. Par le Lemme 3.2.6 et (4.5.16), on a

$$\bar{\lambda}(g_2) = \bar{\lambda}(f'' - \varphi) = \infty.$$

La preuve du Théorème 4.1.3 est achevée.

## 4.6 Preuve du Corollaire 4.1.1

En utilisant le même raisonnement du Théorème 4.1.3, on peut obtenir le Corollaire 4.1.1.

# Croissance des solutions des équations différentielles linéaires non homogènes à coefficients fonctions entières de même ordre

---

## 5.1 Introduction et résultats

Dans ce chapitre, on va étudier le problème de la croissance et l'oscillation des solutions de certaines équations différentielles linéaires non homogènes d'ordre supérieur à coefficients fonctions entières d'ordre fini.

Dans ([45]), Wang et Laine ont étudié la croissance des solutions des équations différentielles linéaires non homogènes d'ordre supérieur et ils ont obtenu le résultat suivant.

**Théorème A** (voir [45]) *Supposons que  $A_j(z) = h_j(z) e^{P_j(z)}$  ( $j = 0, 1, \dots, k-1$ ) où  $P_j(z) = a_{jn}z^n + \dots + a_{j0}$  ( $j = 0, 1, \dots, k-1$ ) sont des polynômes de degré  $n \geq 1$  et  $h_j(z) (\neq 0)$  ( $j = 0, 1, \dots, k-1$ ),  $H(z) (\neq 0)$  sont des fonctions entières d'ordre inférieur à  $n$ . Si  $a_{jn}$  ( $j = 0, 1, \dots, k-1$ ) sont des nombres complexes distincts, alors toute solution  $f$  de l'équation différentielle*

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + \dots + A_1(z) f' + A_0(z) f = H(z)$$

*est d'ordre infini.*

Plus tard, dans ([40]), Peng et Chen ont étudié l'ordre et l'hyper-ordre des solutions de certaines équations différentielles linéaires d'ordre deux (voir [Théorème A, chapitre 2]).

Le but principal de ce chapitre est d'étendre et d'améliorer le Théorème A de Wang et Laine et le Théorème de Peng et Chen (voir [Théorème A, chapitre 2]) à certaines équations différentielles linéaires d'ordre supérieur. En effet, on va montrer les résultats suivants.

**Théorème 5.1.1** (voir [5]) Soient  $k \geq 2$  un entier,  $I_j \subset \mathbb{N}$  ( $j = 0, 1, \dots, k-1$ ) des ensembles finis tels que  $I_j \cap I_m = \emptyset$  ( $j \neq m$ ) et  $I = \bigcup_{j=0}^{k-1} I_j$ . Supposons que  $B_j = \sum_{i \in I_j} A_i e^{P_i(z)}$  ( $j = 0, 1, \dots, k-1$ ) où  $A_i(z) (\neq 0)$  ( $i \in I$ ) sont des fonctions entières avec  $\max\{\sigma(A_i), i \in I\} < n$ ,  $P_i(z) = a_{in}z^n + \dots + a_{i0}$  ( $i \in I$ ) sont des polynômes de degré  $n \geq 1$  et  $F(z) (\neq 0)$  est une fonction entière avec  $\sigma(F) < n$ . Si  $a_{in}$  ( $i \in I$ ) sont des nombres complexes distincts, alors toute solution  $f$  de l'équation différentielle

$$f^{(k)} + B_{k-1}f^{(k-1)} + \dots + B_l f^{(l)} + \dots + B_1 f' + B_0 f = F \quad (5.1.1)$$

vérifie  $\sigma(f) = +\infty$ .

**Théorème 5.1.2** (voir [5]) Sous les hypothèses du Théorème 5.1.1, supposons en outre que  $\varphi(z) (\neq 0)$  est une fonction entière d'ordre fini, alors toute solution  $f \neq 0$  de (5.1.1) satisfait

$$\bar{\lambda}(f - \varphi) = \lambda(f - \varphi) = \sigma(f) = +\infty.$$

## 5.2 Lemmes Préliminaires

On utilise le Lemme 2.2.2 (voir [chapitre 2]), le Lemme 3.2.6 (voir [chapitre 3]) et les lemmes suivants pour les démonstrations de nos résultats.

**Lemme 5.2.1** (voir [16]) Soient  $P_1, P_2, \dots, P_n$  ( $n \geq 1$ ) des polynômes non constants de degrés,  $d_1, d_2, \dots, d_n$ , respectivement, tels que  $\deg(P_i - P_j) = \max\{d_i, d_j\}$  pour  $i \neq j$ . Posons  $A(z) = \sum_{j=1}^n B_j(z) e^{P_j(z)}$ , où  $B_j(z) (\neq 0)$  sont des fonctions entières avec  $\sigma(B_j) < d_j$ . Alors  $\sigma(A) = \max\{d_j : j = 1, \dots, n\}$ .

**Lemme 5.2.2** (voir [18]) Soit  $f$  une fonction méromorphe transcendante avec  $\sigma(f) = \sigma < +\infty$ . Soient  $\varepsilon > 0$  une constante donnée et  $k, j$  des entiers positifs satisfaisant  $k > j \geq 0$ . Alors, on a

(i) Il existe un ensemble  $E_1 \subset (1, +\infty)$  de mesure logarithmique finie tel que pour tout  $z$  satisfaisant  $|z| \notin E_1 \cup [0, 1]$ , on a

$$\left| \frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)} \right| \leq |z|^{(k-j)(\sigma-1+\varepsilon)}. \quad (5.2.1)$$

(ii) Il existe un ensemble  $E_2 \subset [0, 2\pi)$  de mesure linéaire nulle, tel que si  $\theta \in [0, 2\pi) \setminus E_2$ , alors il existe une constante  $R = R(\theta) > 0$  telle que (5.2.1) soit vérifiée pour tout  $z$  satisfaisant  $\arg z = \theta$  et  $|z| \geq R$ .

**Lemme 5.2.3** (voir [45]) Soient  $f(z)$  une fonction entière et  $\rho > 0$  une constante. Supposons que

$$G(z) := \frac{\log^+ |f^{(k)}(z)|}{|z|^\rho} \quad (5.2.2)$$

est non bornée sur un certain rayon  $\arg z = \theta$ . Alors il existe une suite infinie de points  $z_n = r_n e^{i\theta}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), où  $r_n \rightarrow +\infty$ , telle que  $G(z_n) \rightarrow \infty$  et

$$\left| \frac{f^{(j)}(z_n)}{f^{(k)}(z_n)} \right| \leq \frac{1}{(k-j)!} (1 + o(1)) r_n^{k-j}, \quad j = 0, 1, \dots, k-1 \quad (5.2.3)$$

quand  $n \rightarrow +\infty$ .

**Lemme 5.2.4** (voir [45]) Soit  $f(z)$  une fonction entière avec  $\sigma(f) = \sigma < +\infty$ . Supposons qu'il existe un ensemble  $E_3 \subset [0, 2\pi)$  de mesure linéaire nulle, tel que  $\log^+ |f(re^{i\theta})| \leq Mr^\rho$  pour tout rayon  $\arg z = \theta \in [0, 2\pi) \setminus E_3$ , où  $M$  est une constante positive dépendante de  $\theta$ , tandis que  $\rho$  est une constante positive indépendante de  $\theta$ . Alors  $\sigma(f) \leq \rho$ .

## 5.3 Preuve du Théorème 5.1.1

Tout d'abord, montrons que toute solution  $f$  de l'équation différentielle (5.1.1) satisfait  $\sigma(f) \geq n$ . Supposons que  $\sigma(f) < n$ .

L'équation différentielle (5.1.1) devient

$$\sum_{i \in I_{k-1}} A_i f^{(k-1)} e^{P_i(z)} + \dots + \sum_{i \in I_1} A_i f' e^{P_i(z)} + \sum_{i \in I_0} A_i f e^{P_i(z)} = F - f^{(k)}. \quad (5.3.1)$$

Puisque  $a_{i_n}$  ( $i \in I$ ) sont des nombres complexes distincts, en appliquant le Lemme 5.2.1 pour la relation (5.3.1), on a ainsi

$$n = \sigma \left\{ \sum_{i \in I_{k-1}} A_i f^{(k-1)} e^{P_i(z)} + \dots + \sum_{i \in I_0} A_i f e^{P_i(z)} f \right\} = \sigma \{F - f^{(k)}\} < n,$$

c'est une contradiction.

Par conséquent,  $\sigma(f) \geq n$ . Donc  $f$  est une solution transcendante de l'équation différentielle (5.1.1).

Montrons maintenant que  $\sigma(f) = +\infty$ . Supposons que  $\sigma(f) = \sigma < +\infty$ .

Etant donné que  $\sigma(F) < n$ , alors pour tout  $\varepsilon$  donné,

$$0 < 2\varepsilon < \min \{1, n - \sigma(F)\},$$

et pour  $r$  suffisamment grand, on a donc

$$|F(z)| \leq \exp \{r^{\sigma(F)+\varepsilon}\}. \quad (5.3.2)$$

D'après le Lemme 2.2.2, il existe un ensemble  $E \subset [0, 2\pi)$  de mesure linéaire nulle, si  $\theta \in [0, 2\pi) \setminus E$  alors  $\delta(P_i, \theta) \neq 0$  pour tout  $i \in I$  et  $\delta(P_i, \theta) \neq \delta(P_m, \theta)$  pour tout  $i, m$  avec  $m < i$  ( $i, m \in I$ ).

Si  $z = re^{i\theta}$  et  $r$  est assez grand, alors  $A_i(z) e^{P_i(z)}$  satisfait (2.2.4) ou (2.2.5).

D'après le Lemme 5.2.2, il existe un ensemble  $E_2 \subset [0, 2\pi)$  de mesure linéaire nulle, si  $\theta \in [0, 2\pi) \setminus E_2$  alors il existe une constante  $R = R(\theta) > 1$  telle que pour tout  $z$  satisfaisant  $\arg z = \theta$  et  $|z| \geq R$ , on a

$$\left| \frac{f^{(j)}(z)}{f^{(i)}(z)} \right| \leq |z|^{k\sigma}, \quad 0 \leq i < j \leq k. \quad (5.3.3)$$

Puisque  $a_{in}$  ( $i \in I$ ) sont des nombres complexes distincts, alors pour tout  $\theta$  fixé où  $\theta \in [0, 2\pi) \setminus (E \cup E_2)$  il existe exactement un seul  $s \in I$  tel que

$$\delta(P_s, \theta) = \delta = \max \{\delta(P_i, \theta), i \in I\}$$

et il existe  $l \in \{0, 1, \dots, k-1\}$  tel que  $s \in I_l$ .

Posons

$$\delta_1 = \max \{\delta(P_i, \theta) : i \neq s, i \in I\},$$

alors  $\delta_1 < \delta$  et  $\delta \neq 0$ .

Discutons maintenant deux cas séparément.

**Cas 1 :** Supposons que  $\delta > 0$ . D'après le Lemme 2.2.2, pour tout  $\varepsilon$  donné avec

$$0 < 2\varepsilon < \min \left\{ \frac{\delta - \delta_1}{\delta}, n - \sigma(F) \right\},$$

on obtient

$$|A_s(z) e^{P_s(z)}| \geq \exp \{(1 - \varepsilon) \delta r^n\}, \quad s \in I_l, \quad (5.3.4)$$

$$|A_i(z) e^{P_i(z)}| \leq \exp \{(1 + \varepsilon) \delta_1 r^n\} \quad (5.3.5)$$

pour  $i \neq s$  et pour  $r$  suffisamment grand.

Montrons maintenant que

$$\log^+ |f^{(l)}(z)| / |z|^{\sigma(F)+\varepsilon}$$

est bornée sur le rayon  $\arg z = \theta$ .

Supposons que

$$\log^+ |f^{(l)}(z)| / |z|^{\sigma(F)+\varepsilon}$$

est non bornée sur le rayon  $\arg z = \theta$ .

Donc, d'après le Lemme 5.2.3, il existe une suite de points  $z_m = r_m e^{i\theta}$  telle que  $r_m \rightarrow +\infty$  et

$$\frac{\log^+ |f^{(l)}(z_m)|}{r_m^{\sigma(F)+\varepsilon}} \rightarrow +\infty, \quad (5.3.6)$$

$$\left| \frac{f^{(j)}(z_m)}{f^{(l)}(z_m)} \right| \leq \frac{1}{(l-j)!} (1 + o(1)) r_m^{l-j}, \quad (j = 0, \dots, l-1). \quad (5.3.7)$$

Des relations (5.3.2) et (5.3.6), on obtient

$$\left| \frac{F(z_m)}{f^{(l)}(z_m)} \right| \rightarrow 0 \quad (5.3.8)$$

quand  $m \rightarrow +\infty$ .

De (5.1.1), on déduit immédiatement que

$$\begin{aligned} |A_s e^{P_s(z_m)}| &\leq \left| \frac{f^{(k)}(z_m)}{f^{(l)}(z_m)} \right| + \left| \sum_{i \in I_{k-1}} A_i e^{P_i(z_m)} \right| \left| \frac{f^{(k-1)}(z_m)}{f^{(l)}(z_m)} \right| \\ &+ \dots + \left| \sum_{i \in I_{l+1}} A_i e^{P_i(z_m)} \right| \left| \frac{f^{(l+1)}(z_m)}{f^{(l)}(z_m)} \right| + \left| \sum_{i \in I_l, i \neq s} A_i e^{P_i(z_m)} \right| \\ &+ \left| \sum_{i \in I_{l-1}} A_i e^{P_i(z_m)} \right| \left| \frac{f^{(l-1)}(z_m)}{f^{(l)}(z_m)} \right| + \dots + \left| \sum_{i \in I_1} A_i e^{P_i(z_m)} \right| \left| \frac{f'(z_m)}{f^{(l)}(z_m)} \right| \\ &+ \left| \sum_{i \in I_0} A_i e^{P_i(z_m)} \right| \left| \frac{f(z_m)}{f^{(l)}(z_m)} \right| + \left| \frac{F(z_m)}{f^{(l)}(z_m)} \right|. \end{aligned} \quad (5.3.9)$$

En substituant (5.3.3)-(5.3.5), (5.3.7) et (5.3.8) dans (5.3.9), on a donc

$$\exp \{(1 - \varepsilon) \delta r_m^n\} \leq M_0 \exp \{(1 + \varepsilon) \delta_1 r_m^n\} r_m^{M_1}, \quad (5.3.10)$$

où  $M_0 > 0$  et  $M_1 > 0$  sont des certaines constantes.

Par  $0 < \varepsilon < \frac{\delta - \delta_1}{2\delta}$  et (5.3.10), on peut obtenir

$$\exp \left\{ \frac{(\delta - \delta_1)^2}{2\delta} r_m^n \right\} \leq M_0 r_m^{M_1},$$

c'est une contradiction.

Par conséquent,

$$\log^+ |f^{(l)}(z)| / |z|^{\sigma(F)+\varepsilon}$$

est bornée, et par suite on a

$$|f^{(l)}(z)| \leq M \exp \{r^{\sigma(F)+\varepsilon}\}$$

sur le rayon  $\arg z = \theta$ .

Par le même raisonnement du Lemme 3.1 dans ([33]), on conclut immédiatement que

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq (1 + o(1)) r^l |f^{(l)}(z)| \leq (1 + o(1)) M r^l \exp \{r^{\sigma(F)+\varepsilon}\} \\ &\leq M \exp \{r^{\sigma(F)+2\varepsilon}\} \end{aligned}$$

sur le rayon  $\arg z = \theta$ .

**Cas 2 :** Supposons maintenant que  $\delta < 0$ .

De l'équation différentielle (5.1.1), on obtient

$$-1 = B_{k-1} \frac{f^{(k-1)}}{f^{(k)}} + \dots + B_1 \frac{f'}{f^{(k)}} + B_0 \frac{f}{f^{(k)}} - \frac{F}{f^{(k)}}. \quad (5.3.11)$$

D'après le Lemme 2.2.2, pour tout  $\varepsilon$  donné avec

$$0 < 2\varepsilon < \min \{1, n - \sigma(F)\},$$

on a

$$|A_i(z) e^{P_i(z)}| \leq \exp \{(1 - \varepsilon) \delta r^n\}, \quad i \in I \quad (5.3.12)$$

pour  $r$  suffisamment grand.

Montrons maintenant que

$$\log^+ |f^{(k)}(z)| / |z|^{\sigma(F)+\varepsilon}$$

est bornée sur le rayon  $\arg z = \theta$ .

Supposons que

$$\log^+ |f^{(k)}(z)| / |z|^{\sigma(F)+\varepsilon}$$

est non bornée sur le rayon  $\arg z = \theta$ .

Donc, d'après le Lemme 5.2.3, il existe une suite de points  $z_m = r_m e^{i\theta}$  telle que  $r_m \rightarrow +\infty$  et

$$\frac{\log^+ |f^{(k)}(z_m)|}{r_m^{\sigma(F)+\varepsilon}} \rightarrow +\infty, \quad (5.3.13)$$

$$\left| \frac{f^{(j)}(z_m)}{f^{(k)}(z_m)} \right| \leq \frac{1}{(k-j)!} (1 + o(1)) r_m^{k-j}, \quad (j = 0, \dots, k-1). \quad (5.3.14)$$

Des relations (5.3.2) et (5.3.13), on a

$$\left| \frac{F(z_m)}{f^{(k)}(z_m)} \right| \rightarrow 0 \quad (5.3.15)$$

quand  $m \rightarrow +\infty$ .

En substituant (5.3.12), (5.3.14) et (5.3.15) dans (5.3.11), on obtient

$$\begin{aligned} 1 &\leq \left| \sum_{i \in I_{k-1}} A_i e^{P_i(z_m)} \right| \left| \frac{f^{(k-1)}(z_m)}{f^{(k)}(z_m)} \right| + \dots + \left| \sum_{i \in I_1} A_i e^{P_i(z_m)} \right| \left| \frac{f'(z_m)}{f^{(k)}(z_m)} \right| \\ &\quad + \left| \sum_{i \in I_0} A_i e^{P_i(z_m)} \right| \left| \frac{f(z_m)}{f^{(k)}(z_m)} \right| + \left| \frac{F(z_m)}{f^{(k)}(z_m)} \right| \\ &\leq M_2 \exp \{ (1 - \varepsilon) \delta r_m^n \} r_m^{M_3}, \end{aligned} \quad (5.3.16)$$

où  $M_2 > 0$  et  $M_3 > 0$  sont des certaines constantes.

Comme  $\delta < 0$ , on a

$$M_2 \exp \{ (1 - \varepsilon) \delta r_m^n \} r_m^{M_3} \rightarrow 0$$

quand  $r_m \rightarrow +\infty$ .

De (5.3.16), on trouve  $1 \leq 0$  quand  $r_m \rightarrow +\infty$ , c'est une contradiction.

Par conséquent, on a

$$|f^{(k)}(z)| \leq M \exp \{ r^{\sigma(F)+\varepsilon} \}$$

sur le rayon  $\arg z = \theta$ . Ceci implique

$$|f(z)| \leq M \exp \{ r^{\sigma(F)+2\varepsilon} \}. \quad (5.3.17)$$

Par conséquent, pour tout  $\theta$  donné où  $\theta \in [0, 2\pi) \setminus (E \cup E_2)$ , on a obtenu la relation (5.3.17) sur le rayon  $\arg z = \theta$  pour  $r$  assez grand.

Alors, d'après le Lemme 5.2.4, on a

$$\sigma(f) \leq \sigma(F) + 2\varepsilon < n,$$

c'est une contradiction. Ainsi, toute solution transcendante  $f$  de (5.1.1) est d'ordre infini.

## 5.4 Preuve du Théorème 5.1.2

Supposons que  $f$  est une solution de l'équation (5.1.1). Alors, d'après le Théorème 5.1.1, on a  $\sigma(f) = +\infty$ .

Posons

$$g(z) = f(z) - \varphi(z),$$

on sait que  $g(z)$  est une fonction entière et

$$\sigma(g) = \sigma(f) = +\infty.$$

En utilisant  $f = g + \varphi$  dans l'équation différentielle (5.1.1), on obtient

$$g^{(k)} + B_{k-1}g^{(k-1)} + \dots + B_1g' + B_0g = D, \quad (5.4.1)$$

où

$$D = F - [\varphi^{(k)} + B_{k-1}\varphi^{(k-1)} + \dots + B_1\varphi' + B_0\varphi].$$

Montrons que  $D \not\equiv 0$ . En effet, si  $D \equiv 0$ , alors

$$\varphi^{(k)} + B_{k-1}\varphi^{(k-1)} + \dots + B_1\varphi' + B_0\varphi = F.$$

Ainsi  $\sigma(\varphi) = +\infty$ , c'est une contradiction. Par conséquent  $D \not\equiv 0$ .

On sait que les fonctions  $B_j$  ( $j = 0, \dots, k-1$ ) et  $D$  sont d'ordre fini. Par le Lemme 3.2.6 et (5.4.1), on déduit

$$\bar{\lambda}(g) = \lambda(g) = \sigma(g) = \sigma(f) = +\infty.$$

Par conséquent,

$$\bar{\lambda}(f - \varphi) = \lambda(f - \varphi) = \sigma(f) = +\infty,$$

ce qui achève la démonstration.

# Croissance des solutions des équations différentielles linéaires d'ordre supérieur à coefficients fonctions entières

---

## 6.1 Introduction et résultats

Dans ce chapitre, nous étudions la croissance et l'oscillation des solutions entières de certaines équations différentielles linéaires d'ordre supérieur à coefficients fonctions entières. Sous certaines conditions, nous prouvons que toute solution non triviale  $f$  de ces équations est d'ordre infini. Ensuite, nous obtenons une estimation de l'hyper-ordre. Enfin, nous donnons une estimation de l'exposant de convergence des zéros distincts des fonctions  $f^{(j)} - \varphi$  ( $j = 0, 1, 2$ ), où  $\varphi (\neq 0)$  est une fonction entière d'ordre  $\sigma(\varphi) < 1$ , tandis que la solution  $f$  de l'équation différentielle est d'ordre infini. Nos résultats généralisent les résultats précédents dus à Chen, Peng et Chen et autres.

En 2002, Chen ([12]) a étudié le problème de croissance des solutions de certaines équations différentielles linéaires d'ordre deux à coefficients fonctions entières de même ordre 1 et il a obtenu le résultat suivant.

**Théorème A** ([12]) *Soient  $A_j(z)$  ( $\neq 0$ ) ( $j = 1, 2$ ) des fonctions entières avec  $\sigma(A_j) < 1$ ,  $a, b$  des nombres complexes tels que  $ab \neq 0$  et  $a \neq b$ . Alors toute solution  $f \neq 0$  de l'équation différentielle*

$$f'' + A_1(z)e^{az}f' + A_2(z)e^{bz}f = 0$$

est d'ordre infini.

Dans ([40]), Peng et Chen ont étudié l'ordre et l'hyper-ordre des solutions de certaines équations différentielles linéaires d'ordre deux et ils ont prouvé que toute solution non triviale de ces équations est d'ordre infini et d'hyper-ordre est égal à 1 (voir [Théorème A, chapitre 2]).

Récemment, dans ([22]), les auteurs étendent et améliorent les résultats du Théorème A de Peng et Chen à certaines équations différentielles linéaires d'ordre supérieur à coefficients fonctions entières (voir [Théorème 2.1.1, chapitre 2]).

Dans ce chapitre, nous continuons la recherche dans ce type de problèmes, le but principal de ce chapitre est d'étendre et d'améliorer les résultats du Théorème A de Peng et Chen et du Théorème 2.1.1 à certaines équations différentielles linéaires d'ordre supérieur. En effet, nous allons démontrer les résultats suivants.

**Théorème 6.1.1** (voir [23]) Soient  $k \geq 2$  un entier positif,  $A_j(z) (\neq 0)$  ( $j = 1, 2$ ) et  $B_j(z) (\neq 0)$ ,  $D_j(z) (\neq 0)$  ( $j = 1, \dots, k-1$ ) des fonctions entières avec

$$\max \{ \sigma(A_j) (j = 1, 2), \sigma(B_j) (j = 1, \dots, k-1), \sigma(D_j) (j = 1, \dots, k-1) \} < 1,$$

$a_1, a_2$  des nombres complexes tels que  $a_1 a_2 \neq 0$ ,  $a_1 \neq a_2$ ,  $d_j \neq 0$  ( $j = 1, \dots, k-1$ ) des nombres complexes et  $b_j$  ( $j = 1, \dots, k-1$ ) des nombres réels tels que  $b_j < 0$ . Supposons qu'il existe  $\alpha_j, \beta_j$  ( $j = 1, \dots, k-1$ ) où  $0 < \alpha_j < 1$ ,  $0 < \beta_j < 1$  et  $d_j = \alpha_j a_1 + \beta_j a_2$ . Posons  $\alpha = \max \{ \alpha_j : j = 1, \dots, k-1 \}$ ,  $\beta = \max \{ \beta_j : j = 1, \dots, k-1 \}$  et  $b = \min \{ b_j : j = 1, \dots, k-1 \}$ . Si

- (1)  $\arg a_1 \neq \pi$  et  $\arg a_1 \neq \arg a_2$ ; ou
- (2)  $\arg a_1 \neq \pi$ ,  $\arg a_1 = \arg a_2$  et (i)  $|a_2| > \frac{|a_1|}{1-\beta}$  ou (ii)  $|a_2| < (1-\alpha)|a_1|$ ; ou
- (3)  $a_1 < 0$  et  $\arg a_1 \neq \arg a_2$ ; ou
- (4) (i)  $(1-\beta)a_2 - b < a_1 < 0$ ,  $a_2 < \frac{b}{1-\beta}$  ou (ii)  $a_1 < \frac{a_2+b}{1-\alpha}$  et  $a_2 < 0$ ,

alors toute solution  $f (\neq 0)$  de l'équation différentielle

$$f^{(k)} + \sum_{j=1}^{k-1} (B_j e^{b_j z} + D_j e^{d_j z}) f^{(j)} + (A_1 e^{a_1 z} + A_2 e^{a_2 z}) f = 0 \quad (6.1.1)$$

vérifie  $\sigma(f) = +\infty$  et  $\sigma_2(f) = 1$ .

Posons

$$I_1 = \{2a_1, 2a_2, a_1 + a_2, a_1, a_2, a_1 + b_i, a_2 + b_i, a_1 + d_i, a_2 + d_i \ (i = 1, \dots, k-1)\},$$

$$I_2 = \{2a_1, 2a_2, a_1 + a_2, a_1 + b_1, a_2 + b_1, a_1 + d_1, a_2 + d_1\},$$

$$I_3 = \{3a_1, 3a_2, 2a_1 + a_2, a_1 + 2a_2, 2a_1, 2a_2, a_1 + a_2, a_1 + b_1, a_2 + b_1, a_1 + d_1, a_2 + d_1, 2a_1 + b_i, 2a_2 + b_i, 2a_1 + d_i, 2a_2 + d_i, a_1 + a_2 + b_i, a_1 + a_2 + d_i, a_1 + b_1 + b_i, a_2 + b_1 + b_i, a_1 + d_1 + d_i, a_2 + d_1 + d_i, a_1 + b_1 + d_i, a_2 + b_1 + d_i \ (i = 1, \dots, k-1), a_1 + d_1 + b_i, a_2 + d_1 + b_i \ (i = 2, \dots, k-1)\}.$$

**Théorème 6.1.2** (voir [23]) *Sous les hypothèses du Théorème 6.1.1, si  $\varphi (\neq 0)$  est une fonction entière d'ordre  $\sigma(\varphi) < 1$ , alors toute solution  $f (\neq 0)$  de l'équation (6.1.1) satisfait*

$$\bar{\lambda}(f - \varphi) = +\infty.$$

De plus, on a

1) Si  $(2a_1) \notin I_1 \setminus \{2a_1\}$  ou  $(2a_2) \notin I_1 \setminus \{2a_2\}$ , alors

$$\bar{\lambda}(f' - \varphi) = +\infty.$$

2) Si (i)  $(2a_1) \notin I_2 \setminus \{2a_1\}$  ou  $(2a_2) \notin I_2 \setminus \{2a_2\}$  et (ii)  $(3a_1) \notin I_3 \setminus \{3a_1\}$  ou  $(3a_2) \notin I_3 \setminus \{3a_2\}$ , alors

$$\bar{\lambda}(f'' - \varphi) = +\infty.$$

Posons maintenant

$$J_1 = \{2a_1, 2a_2, a_1 + a_2, a_1 + b_i, a_2 + b_i, a_1 + d_i, a_2 + d_i \ (i = 1, 2)\},$$

$$J_2 = \{3a_1, 3a_2, 2a_1 + a_2, a_1 + 2a_2, 2a_1 + b_i, 2a_2 + b_i, 2a_1 + d_i, 2a_2 + d_i, a_1 + a_2 + b_i, a_1 + a_2 + d_i, a_1 + b_1 + b_i, a_2 + b_1 + b_i, a_1 + d_1 + d_i, a_2 + d_1 + d_i, a_1 + b_1 + d_i, a_2 + b_1 + d_i \ (i = 1, 2, 3), a_1 + d_1 + b_i, a_2 + d_1 + b_i \ (i = 2, 3)\}.$$

En posant  $\varphi(z) = z$  dans le Théorème 6.1.2, on obtient le corollaire suivant.

**Corollaire 6.1.1** (voir [23]) *Sous les hypothèses du Théorème 6.1.1, si  $f (\neq 0)$  est une solution de l'équation (6.1.1), alors  $f$  a une infinité de points fixes et satisfait*

$$\bar{\tau}(f) = \infty.$$

De plus, on a

1) Si  $(2a_1) \notin J_1 \setminus \{2a_1\}$  ou  $(2a_2) \notin J_1 \setminus \{2a_2\}$ , alors  $f'$  a une infinité de points fixes et satisfait

$$\bar{\tau}(f') = \infty.$$

2) Si (i)  $(2a_1) \notin J_2 \setminus \{2a_1\}$  ou  $(2a_2) \notin J_2 \setminus \{2a_2\}$  et (ii)  $(3a_1) \notin J_2 \setminus \{3a_1\}$  ou  $(3a_2) \notin J_2 \setminus \{3a_2\}$ , alors  $f''$  a une infinité de points fixes et satisfait

$$\bar{\tau}(f'') = \infty.$$

## 6.2 Lemmes préliminaires

On utilise les Lemmes 2.2.2-2.2.6 (voir [chapitre 2]) et les Lemmes 3.2.1, 3.2.6-3.2.8 (voir [chapitre 3]) pour les démonstrations de nos résultats.

## 6.3 Preuve du Théorème 6.1.1

Supposons que  $f (\neq 0)$  est une solution de l'équation (6.1.1).

**Première étape :** Montrons que  $\sigma(f) = +\infty$ . Supposons que  $\sigma(f) = \sigma < +\infty$ .

On écrit l'équation (6.1.1) comme suit

$$\frac{f^{(k)}}{f} + \sum_{j=1}^{k-1} \left( B_j e^{b_j z} + D_j e^{(\alpha_j a_1 + \beta_j a_2) z} \right) \frac{f^{(j)}}{f} + A_1 e^{a_1 z} + A_2 e^{a_2 z} = 0. \quad (6.3.1)$$

Posons

$$\gamma = \max \{ \sigma(B_j) \mid (j = 1, \dots, k-1) \} < 1.$$

Alors, pour tout  $\varepsilon$  donné ( $0 < \varepsilon < 1 - \gamma$ ) et pour  $r$  suffisamment grand, on a

$$|B_j(z)| \leq \exp \{ r^{\gamma + \varepsilon} \} \quad (j = 1, \dots, k-1). \quad (6.3.2)$$

D'après le Lemme 3.2.1, pour tout  $\varepsilon$  ( $0 < \varepsilon < 1 - \gamma$ ) donné, il existe un ensemble  $E_1 \subset [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$  de mesure linéaire nulle, si  $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \setminus E_1$  alors il existe une constante  $R_0 = R_0(\theta) > 1$  telle que pour tout  $z$  satisfaisant  $\arg z = \theta$  et  $|z| = r \geq R_0$ , on a

$$\left| \frac{f^{(j)}(z)}{f(z)} \right| \leq r^{j(\sigma - 1 + \varepsilon)} \quad (j = 1, \dots, k). \quad (6.3.3)$$

Soient  $z = r e^{i\theta}$ ,  $a_1 = |a_1| e^{i\theta_1}$ ,  $a_2 = |a_2| e^{i\theta_2}$ ,  $\theta_1, \theta_2 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ . On sait que

$$\delta(\alpha_j a_1 z, \theta) = \alpha_j \delta(a_1 z, \theta), \quad \delta(\beta_j a_2 z, \theta) = \beta_j \delta(a_2 z, \theta) \quad (j = 1, \dots, k-1)$$

et  $\alpha < 1$ ,  $\beta < 1$ .

**Cas 1 :** Supposons que  $\arg a_1 \neq \pi$  et  $\arg a_1 \neq \arg a_2$ , c'est-à-dire  $\theta_1 \neq \pi$  et  $\theta_1 \neq \theta_2$ .

D'après le Lemme 2.2.2 et le Lemme 2.2.3, pour tout  $\varepsilon$  donné tel que

$$0 < \varepsilon < \min \left\{ 1 - \gamma, \frac{1 - \alpha}{2(1 + \alpha)}, \frac{1 - \beta}{2(1 + \beta)} \right\},$$

il existe un rayon  $\arg z = \theta$  tel que  $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus (E_1 \cup E_6 \cup E_7)$  (où  $E_6$  et  $E_7$  sont définis comme dans le Lemme 2.2.3 et  $E_1 \cup E_6 \cup E_7$  est un ensemble de mesure linéaire nulle) et satisfaisant

$$\delta(a_1 z, \theta) > 0, \delta(a_2 z, \theta) < 0$$

ou

$$\delta(a_1 z, \theta) < 0, \delta(a_2 z, \theta) > 0.$$

a) Quand  $\delta(a_1 z, \theta) > 0, \delta(a_2 z, \theta) < 0$ , pour  $r$  suffisamment grand, on obtient par le Lemme 6.2.2

$$|A_1 e^{a_1 z}| \geq \exp\{(1 - \varepsilon) \delta(a_1 z, \theta) r\}, \quad (6.3.4)$$

$$|A_2 e^{a_2 z}| \leq \exp\{(1 - \varepsilon) \delta(a_2 z, \theta) r\} < 1, \quad (6.3.5)$$

$$|D_j e^{\alpha_j a_1 z}| \leq \exp\{(1 + \varepsilon) \alpha_j \delta(a_1 z, \theta) r\}$$

$$\leq \exp\{(1 + \varepsilon) \alpha \delta(a_1 z, \theta) r\} \quad (j = 1, \dots, k - 1), \quad (6.3.6)$$

$$|e^{\beta_j a_2 z}| \leq \exp\{(1 - \varepsilon) \beta_j \delta(a_2 z, \theta) r\} < 1 \quad (j = 1, \dots, k - 1). \quad (6.3.7)$$

Par (6.3.6) et (6.3.7), on obtient donc

$$\left| D_j e^{(\alpha_j a_1 + \beta_j a_2) z} \right| = |D_j e^{\alpha_j a_1 z}| |e^{\beta_j a_2 z}| \leq \exp\{(1 + \varepsilon) \alpha \delta(a_1 z, \theta) r\}, \quad (6.3.8)$$

où  $j = 1, \dots, k - 1$ .

Pour  $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  et par (6.3.2) on a

$$|B_j e^{b_j z}| = |B_j| |e^{b_j z}| \leq \exp\{r^{\gamma+\varepsilon}\} e^{b_j r \cos \theta} \leq \exp\{r^{\gamma+\varepsilon}\}, \quad (6.3.9)$$

car  $b_j < 0$  et  $\cos \theta > 0$  ( $j = 1, \dots, k - 1$ ).

D'après (6.3.1), on obtient

$$|A_1 e^{a_1 z}| \leq \left| \frac{f^{(k)}}{f} \right| + \sum_{j=1}^{k-1} \left( |B_j e^{b_j z}| + |D_j e^{(\alpha_j a_1 + \beta_j a_2) z}| \right) \left| \frac{f^{(j)}}{f} \right| + |A_2 e^{a_2 z}|. \quad (6.3.10)$$

En substituant (6.3.3)-(6.3.5), (6.3.8) et (6.3.9) dans (6.3.10), on obtient facilement que

$$\exp\{(1 - \varepsilon) \delta(a_1 z, \theta) r\} \leq |A_1 e^{a_1 z}|$$

$$\leq M_1 r^{M_2} \exp\{r^{\gamma+\varepsilon}\} \exp\{(1 + \varepsilon) \alpha \delta(a_1 z, \theta) r\}, \quad (6.3.11)$$

où  $M_1 > 0$  et  $M_2 > 0$  sont des certaines constantes.

Par  $0 < \varepsilon < \frac{1-\alpha}{2(1+\alpha)}$  et (6.3.11), on déduit immédiatement que

$$\exp \left\{ \frac{1-\alpha}{2} \delta(a_1 z, \theta) r \right\} \leq M_1 r^{M_2} \exp \{r^{\gamma+\varepsilon}\}. \quad (6.3.12)$$

Comme  $\delta(a_1 z, \theta) > 0$  et  $\gamma + \varepsilon < 1$ , donc (6.3.12) est une contradiction.

b) Quand  $\delta(a_1 z, \theta) < 0$ ,  $\delta(a_2 z, \theta) > 0$ , pour  $r$  suffisamment grand, on obtient par le Lemme 2.2.2

$$|A_2 e^{a_2 z}| \geq \exp \{(1-\varepsilon) \delta(a_2 z, \theta) r\}, \quad (6.3.13)$$

$$|A_1 e^{a_1 z}| \leq \exp \{(1-\varepsilon) \delta(a_1 z, \theta) r\} < 1, \quad (6.3.14)$$

$$|D_j e^{\alpha_j a_1 z}| \leq \exp \{(1-\varepsilon) \alpha_j \delta(a_1 z, \theta) r\} < 1 \quad (j = 1, \dots, k-1), \quad (6.3.15)$$

$$|e^{\beta_j a_2 z}| \leq \exp \{(1+\varepsilon) \beta_j \delta(a_2 z, \theta) r\}$$

$$\leq \exp \{(1+\varepsilon) \beta \delta(a_2 z, \theta) r\} \quad (j = 1, \dots, k-1). \quad (6.3.16)$$

Des relations (6.3.15) et (6.3.16), on a ainsi

$$\left| D_j e^{(\alpha_j a_1 + \beta_j a_2) z} \right| = |D_j e^{\alpha_j a_1 z}| |e^{\beta_j a_2 z}| \leq \exp \{(1+\varepsilon) \beta \delta(a_2 z, \theta) r\}, \quad (6.3.17)$$

où  $j = 1, \dots, k-1$ .

En utilisant (6.3.1), il vient

$$|A_2 e^{a_2 z}| \leq \left| \frac{f^{(k)}}{f} \right| + \sum_{j=1}^{k-1} \left( |B_j e^{b_j z}| + \left| D_j e^{(\alpha_j a_1 + \beta_j a_2) z} \right| \right) \left| \frac{f^{(j)}}{f} \right| + |A_1 e^{a_1 z}|. \quad (6.3.18)$$

En substituant (6.3.3), (6.3.9), (6.3.13), (6.3.14) et (6.3.17) dans (6.3.18), on obtient

$$\exp \{(1-\varepsilon) \delta(a_2 z, \theta) r\} \leq |A_2 e^{a_2 z}|$$

$$\leq M_1 r^{M_2} \exp \{r^{\gamma+\varepsilon}\} \exp \{(1+\varepsilon) \beta \delta(a_2 z, \theta) r\}. \quad (6.3.19)$$

Par  $0 < \varepsilon < \frac{1-\beta}{2(1+\beta)}$  et (6.3.19), on en déduit que

$$\exp \left\{ \frac{1-\beta}{2} \delta(a_2 z, \theta) r \right\} \leq M_1 r^{M_2} \exp \{r^{\gamma+\varepsilon}\}. \quad (6.3.20)$$

Comme  $\delta(a_2z, \theta) > 0$  et  $\gamma + \varepsilon < 1$ , alors (6.3.20) est une contradiction.

**Cas 2 :** Supposons que  $\arg a_1 \neq \pi$  et  $\arg a_1 = \arg a_2$ , c'est-à-dire  $\theta_1 \neq \pi$  et  $\theta_1 = \theta_2$ . D'après le Lemme 2.2.3, pour tout  $\varepsilon$  donné tel que

$$0 < \varepsilon < \min \left\{ 1 - \gamma, \frac{(1 - \alpha) |a_1| - |a_2|}{2[(1 + \alpha) |a_1| + |a_2|]}, \frac{(1 - \beta) |a_2| - |a_1|}{2[(1 + \beta) |a_2| + |a_1|]} \right\},$$

il existe un rayon  $\arg z = \theta$  tel que  $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \setminus (E_1 \cup E_6 \cup E_7)$  et  $\delta(a_1z, \theta) > 0$ .

Comme  $\theta_1 = \theta_2$ , alors  $\delta(a_2z, \theta) > 0$ .

(i)  $|a_2| > \frac{|a_1|}{1-\beta}$ . Pour  $r$  suffisamment grand, les relations (6.3.6), (6.3.13), (6.3.16) sont vérifiées et on a

$$|A_1 e^{a_1 z}| \leq \exp \{(1 + \varepsilon) \delta(a_1 z, \theta) r\}. \quad (6.3.21)$$

Par (6.3.6) et (6.3.16), on déduit que

$$\left| D_j e^{(\alpha_j a_1 + \beta_j a_2) z} \right| \leq \exp \{(1 + \varepsilon) \alpha \delta(a_1 z, \theta) r\} \exp \{(1 + \varepsilon) \beta \delta(a_2 z, \theta) r\}, \quad (6.3.22)$$

où  $j = 1, \dots, k - 1$ .

En substituant (6.3.3), (6.3.9), (6.3.13), (6.3.21) et (6.3.22) dans (6.3.18), on obtient immédiatement que

$$\begin{aligned} & \exp \{(1 - \varepsilon) \delta(a_2 z, \theta) r\} \leq |A_2 e^{a_2 z}| \\ & \leq k \exp \{r^{\gamma + \varepsilon}\} \exp \{(1 + \varepsilon) \alpha \delta(a_1 z, \theta) r\} \exp \{(1 + \varepsilon) \beta \delta(a_2 z, \theta) r\} r^{k(\sigma - 1 + \varepsilon)} \\ & \quad + \exp \{(1 + \varepsilon) \delta(a_1 z, \theta) r\} \\ & \leq M_1 r^{M_2} \exp \{r^{\gamma + \varepsilon}\} \exp \{(1 + \varepsilon) \delta(a_1 z, \theta) r\} \exp \{(1 + \varepsilon) \beta \delta(a_2 z, \theta) r\}. \end{aligned} \quad (6.3.23)$$

Selon (6.3.23), il vient

$$\exp \{\eta_1 r\} \leq M_1 r^{M_2} \exp \{r^{\gamma + \varepsilon}\}, \quad (6.3.24)$$

où

$$\eta_1 = (1 - \varepsilon) \delta(a_2 z, \theta) - (1 + \varepsilon) \delta(a_1 z, \theta) - (1 + \varepsilon) \beta \delta(a_2 z, \theta).$$

Comme

$$0 < \varepsilon < \frac{(1 - \beta) |a_2| - |a_1|}{2[(1 + \beta) |a_2| + |a_1|]}, \quad \theta_1 = \theta_2 \text{ et } \cos(\theta_1 + \theta) > 0,$$

alors

$$\eta_1 = [1 - \beta - \varepsilon(1 + \beta)] \delta(a_2 z, \theta) - (1 + \varepsilon) \delta(a_1 z, \theta)$$

$$\begin{aligned}
&= [1 - \beta - \varepsilon(1 + \beta)] |a_2| \cos(\theta_1 + \theta) - (1 + \varepsilon) |a_1| \cos(\theta_1 + \theta) \\
&= \cos(\theta_1 + \theta) \{ [1 - \beta - \varepsilon(1 + \beta)] |a_2| - (1 + \varepsilon) |a_1| \} \\
&= \cos(\theta_1 + \theta) \{ (1 - \beta) |a_2| - |a_1| - \varepsilon [(1 + \beta) |a_2| + |a_1|] \} \\
&> \frac{(1 - \beta) |a_2| - |a_1|}{2} \cos(\theta_1 + \theta) > 0.
\end{aligned}$$

Comme  $\eta_1 > 0$  et  $\gamma + \varepsilon < 1$ , alors (6.3.24) est une contradiction.

(ii)  $|a_2| < (1 - \alpha) |a_1|$ . Pour  $r$  suffisamment grand, les relations (6.3.4), (6.3.6), (6.3.16) et (6.3.22) sont vérifiées et on obtient

$$|A_2 e^{a_2 z}| \leq \exp \{ (1 + \varepsilon) \delta(a_2 z, \theta) r \}. \quad (6.3.25)$$

En substituant (6.3.3), (6.3.4), (6.3.9), (6.3.22) et (6.3.25) dans (6.3.10), on a donc

$$\begin{aligned}
&\exp \{ (1 - \varepsilon) \delta(a_1 z, \theta) r \} \leq |A_1 e^{a_1 z}| \\
&\leq k \exp \{ r^{\gamma + \varepsilon} \} \exp \{ (1 + \varepsilon) \alpha \delta(a_1 z, \theta) r \} \exp \{ (1 + \varepsilon) \beta \delta(a_2 z, \theta) r \} r^{k(\sigma - 1 + \varepsilon)} \\
&\quad + \exp \{ (1 + \varepsilon) \delta(a_2 z, \theta) r \} \\
&\leq M_1 r^{M_2} \exp \{ r^{\gamma + \varepsilon} \} \exp \{ (1 + \varepsilon) \alpha \delta(a_1 z, \theta) r \} \exp \{ (1 + \varepsilon) \delta(a_2 z, \theta) r \}. \quad (6.3.26)
\end{aligned}$$

De (6.3.26), on en déduit que

$$\exp \{ \eta_2 r \} \leq M_1 r^{M_2} \exp \{ r^{\gamma + \varepsilon} \}, \quad (6.3.27)$$

où

$$\eta_2 = (1 - \varepsilon) \delta(a_1 z, \theta) - (1 + \varepsilon) \alpha \delta(a_1 z, \theta) - (1 + \varepsilon) \delta(a_2 z, \theta).$$

Comme

$$0 < \varepsilon < \frac{(1 - \alpha) |a_1| - |a_2|}{2 [(1 + \alpha) |a_1| + |a_2|]}, \quad \theta_1 = \theta_2 \text{ et } \cos(\theta_1 + \theta) > 0,$$

alors

$$\begin{aligned}
\eta_2 &= \cos(\theta_1 + \theta) \{ (1 - \alpha) |a_1| - |a_2| - \varepsilon [(1 + \alpha) |a_1| + |a_2|] \} \\
&> \frac{(1 - \alpha) |a_1| - |a_2|}{2} \cos(\theta_1 + \theta) > 0.
\end{aligned}$$

Puisque  $\eta_2 > 0$  et  $\gamma + \varepsilon < 1$ , alors (6.3.27) est une contradiction.

**Cas 3 :** Supposons que  $a_1 < 0$  et  $\arg a_1 \neq \arg a_2$ , c'est-à-dire  $\theta_1 = \pi$  et  $\theta_2 \neq \pi$ .

D'après le Lemme 2.2.2, pour  $\varepsilon$  défini ci-dessus, il existe un rayon  $\arg z = \theta$  tel que  $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \setminus (E_1 \cup E_6 \cup E_7)$  et  $\delta(a_2 z, \theta) > 0$ .

Puisque  $\cos \theta > 0$ , alors

$$\delta(a_1 z, \theta) = |a_1| \cos(\theta_1 + \theta) = -|a_1| \cos \theta < 0.$$

En utilisant le même raisonnement du cas 1 (b), on peut obtenir une contradiction.

**Cas 4 :** Supposons que (i)  $(1 - \beta)a_2 - b < a_1 < 0$  et  $a_2 < \frac{b}{1-\beta}$  ou (ii)  $a_1 < \frac{a_2+b}{1-\alpha}$  et  $a_2 < 0$ , c'est-à-dire  $\theta_1 = \theta_2 = \pi$ .

D'après le Lemme 2.2.2, pour tout  $\varepsilon$  donné tel que

$$0 < \varepsilon < \min \left\{ 1 - \gamma, \frac{(1 - \alpha)|a_1| - |a_2| + b}{2[(1 + \alpha)|a_1| + |a_2|]}, \frac{(1 - \beta)|a_2| - |a_1| + b}{2[(1 + \beta)|a_2| + |a_1|]} \right\},$$

il existe un rayon  $\arg z = \theta$  tel que  $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \setminus (E_1 \cup E_6 \cup E_7)$ , alors  $\cos \theta < 0$ ,

$$\delta(a_1 z, \theta) = |a_1| \cos(\theta_1 + \theta) = -|a_1| \cos \theta > 0,$$

et

$$\delta(a_2 z, \theta) = |a_2| \cos(\theta_2 + \theta) = -|a_2| \cos \theta > 0.$$

(i)  $(1 - \beta)a_2 - b < a_1 < 0$  et  $a_2 < \frac{b}{1-\beta}$ . Pour  $r$  suffisamment grand, les relations (6.3.6), (6.3.13), (6.3.16), (6.3.21) et (6.3.22) sont vérifiées.

Pour  $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$  et par (6.3.2) on a ainsi

$$|B_j e^{b_j z}| = |B_j| |e^{b_j z}| \leq \exp\{r^{\gamma+\varepsilon}\} e^{b_j r \cos \theta} \leq \exp\{r^{\gamma+\varepsilon}\} e^{br \cos \theta}, \quad (6.3.28)$$

car  $b \leq b_j < 0$  et  $\cos \theta < 0$  ( $j = 1, \dots, k-1$ ).

En substituant (6.3.3), (6.3.13), (6.3.21), (6.3.22) et (6.3.28) dans (6.3.18), on obtient

$$\begin{aligned} & \exp\{(1 - \varepsilon) \delta(a_2 z, \theta) r\} \leq |A_2 e^{a_2 z}| \\ & \leq M_1 r^{M_2} e^{br \cos \theta} \exp\{r^{\gamma+\varepsilon}\} \exp\{(1 + \varepsilon) \delta(a_1 z, \theta) r\} \\ & \quad \times \exp\{(1 + \varepsilon) \beta \delta(a_2 z, \theta) r\}. \end{aligned} \quad (6.3.29)$$

De (6.3.29), on en déduit que

$$\exp\{\eta_3 r\} \leq M_1 r^{M_2} \exp\{r^{\gamma+\varepsilon}\}, \quad (6.3.30)$$

où

$$\eta_3 = (1 - \varepsilon) \delta(a_2 z, \theta) - (1 + \varepsilon) \delta(a_1 z, \theta) - (1 + \varepsilon) \beta \delta(a_2 z, \theta) - b \cos \theta.$$

Comme  $(1 - \beta) a_2 - b < a_1$ ,  $a_2 = -|a_2|$  et  $a_1 = -|a_1|$ , alors

$$(1 - \beta) |a_2| - |a_1| + b > 0.$$

On peut voir que

$$0 < (1 - \beta) |a_2| - |a_1| + b < (1 - \beta) |a_2| - |a_1| < 2[(1 + \beta) |a_2| + |a_1|].$$

Par conséquent

$$0 < \frac{(1 - \beta) |a_2| - |a_1| + b}{2[(1 + \beta) |a_2| + |a_1|]} < 1.$$

Par

$$0 < \varepsilon < \frac{(1 - \beta) |a_2| - |a_1| + b}{2[(1 + \beta) |a_2| + |a_1|]},$$

$\theta_1 = \theta_2 = \pi$  et  $\cos \theta < 0$ ,

$$\begin{aligned} \eta_3 &= [1 - \beta - \varepsilon(1 + \beta)] \delta(a_2 z, \theta) - (1 + \varepsilon) \delta(a_1 z, \theta) - b \cos \theta \\ &= -[1 - \beta - \varepsilon(1 + \beta)] |a_2| \cos \theta + (1 + \varepsilon) |a_1| \cos \theta - b \cos \theta \\ &= (-\cos \theta) \{[1 - \beta - \varepsilon(1 + \beta)] |a_2| - (1 + \varepsilon) |a_1| + b\} \\ &= (-\cos \theta) \{(1 - \beta) |a_2| - |a_1| + b - \varepsilon[(1 + \beta) |a_2| + |a_1|]\} \\ &> \frac{-1}{2} [(1 - \beta) |a_2| - |a_1| + b] \cos \theta > 0. \end{aligned}$$

Puisque  $\eta_3 > 0$  et  $\gamma + \varepsilon < 1$ , alors (6.3.30) est une contradiction.

(ii)  $a_1 < \frac{a_2 + b}{1 - \alpha}$  et  $a_2 < 0$ . Pour  $r$  suffisamment grand, les relations (6.3.4), (6.3.6), (6.3.16), (6.3.22) et (6.3.25) sont vérifiées.

En substituant (6.3.3), (6.3.4), (6.3.22), (6.3.25) et (6.3.28) dans (6.3.10), on obtient donc

$$\begin{aligned} &\exp \{(1 - \varepsilon) \delta(a_1 z, \theta) r\} \leq |A_1 e^{a_1 z}| \\ &\leq M_1 r^{M_2} e^{br \cos \theta} \exp \{r^{\gamma + \varepsilon}\} \exp \{(1 + \varepsilon) \alpha \delta(a_1 z, \theta) r\} \\ &\quad \times \exp \{(1 + \varepsilon) \delta(a_2 z, \theta) r\}. \end{aligned} \tag{6.3.31}$$

D'où

$$\exp \{\eta_4 r\} \leq M_1 r^{M_2} \exp \{r^{\gamma + \varepsilon}\}, \tag{6.3.32}$$

où

$$\eta_4 = (1 - \varepsilon) \delta(a_1 z, \theta) - (1 + \varepsilon) \alpha \delta(a_1 z, \theta) - (1 + \varepsilon) \delta(a_2 z, \theta) - b \cos \theta.$$

Comme  $a_1 < \frac{a_2 + b}{1 - \alpha}$ ,  $a_2 = -|a_2|$  et  $a_1 = -|a_1|$ , alors

$$(1 - \alpha)|a_1| - |a_2| + b > 0.$$

On peut voir que

$$0 < (1 - \alpha)|a_1| - |a_2| + b < (1 - \alpha)|a_1| - |a_2| < 2[(1 + \alpha)|a_1| + |a_2|].$$

Par conséquent

$$0 < \frac{(1 - \alpha)|a_1| - |a_2| + b}{2[(1 + \alpha)|a_1| + |a_2|]} < 1.$$

Par

$$0 < \varepsilon < \frac{(1 - \alpha)|a_1| - |a_2| + b}{2[(1 + \alpha)|a_1| + |a_2|]},$$

$\theta_1 = \theta_2 = \pi$  et  $\cos \theta < 0$ ,

$$\begin{aligned} \eta_4 &= (-\cos \theta) \{(1 - \alpha)|a_1| - |a_2| + b - \varepsilon[(1 + \alpha)|a_1| + |a_2|]\} \\ &> \frac{-1}{2} [(1 - \alpha)|a_1| - |a_2| + b] \cos \theta > 0. \end{aligned}$$

Puisque  $\eta_4 > 0$  et  $\gamma + \varepsilon < 1$ , alors (6.3.32) est une contradiction. On conclut de la preuve ci-dessus que  $\sigma(f) = +\infty$ .

**Deuxième étape :** Montrons que  $\sigma_2(f) = 1$ . Par

$$\max \{ \sigma(B_j e^{b_j z} + D_j e^{d_j z}) (j = 1, \dots, k-1), \sigma(A_1 e^{a_1 z} + A_2 e^{a_2 z}) \} = 1$$

et d'après le Lemme 2.2.4, on obtient  $\sigma_2(f) \leq 1$ .

D'après le Lemme 2.2.5, il existe un ensemble  $E_8 \subset (1, +\infty)$  de mesure logarithmique finie et une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $z$  satisfaisant  $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_8$ , on a

$$\left| \frac{f^{(j)}(z)}{f(z)} \right| \leq C [T(2r, f)]^{j+1} \quad (j = 1, \dots, k). \quad (6.3.33)$$

**Cas 1 :**  $\arg a_1 \neq \pi$  et  $\arg a_1 \neq \arg a_2$ . Dans la première étape, on a prouvé qu'il existe un rayon  $\arg z = \theta$  où  $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \setminus (E_1 \cup E_6 \cup E_7)$  satisfaisant

$$\delta(a_1 z, \theta) > 0, \delta(a_2 z, \theta) < 0 \text{ ou } \delta(a_1 z, \theta) < 0, \delta(a_2 z, \theta) > 0.$$

a) Quand  $\delta(a_1 z, \theta) > 0$  et  $\delta(a_2 z, \theta) < 0$ , pour  $r$  suffisamment grand, les relations (6.3.4)-(6.3.8) sont vérifiées.

En substituant (6.3.4), (6.3.5), (6.3.8), (6.3.9) et (6.3.33) dans (6.3.10), on obtient pour tout  $z = re^{i\theta}$  satisfaisant  $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_8$ ,  $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus (E_1 \cup E_6 \cup E_7)$

$$\begin{aligned} & \exp \{(1 - \varepsilon) \delta(a_1 z, \theta) r\} \leq |A_1 e^{a_1 z}| \\ & \leq M \exp \{r^{\gamma+\varepsilon}\} \exp \{(1 + \varepsilon) \alpha \delta(a_1 z, \theta) r\} [T(2r, f)]^{k+1}, \end{aligned} \quad (6.3.34)$$

où  $M > 0$  est une certaine constante.

De (6.3.34) et  $0 < \varepsilon < \frac{1-\alpha}{2(1+\alpha)}$ , on a donc

$$\exp \left\{ \frac{1-\alpha}{2} \delta(a_1 z, \theta) r \right\} \leq M \exp \{r^{\gamma+\varepsilon}\} [T(2r, f)]^{k+1}. \quad (6.3.35)$$

Comme  $\delta(a_1 z, \theta) > 0$  et  $\gamma + \varepsilon < 1$ , alors en utilisant le Lemme 2.2.6 et (6.3.35), on trouve  $\sigma_2(f) \geq 1$ , d'où  $\sigma_2(f) = 1$ .

b) Quand  $\delta(a_1 z, \theta) < 0$  et  $\delta(a_2 z, \theta) > 0$ , pour  $r$  suffisamment grand, les relations (6.3.13)-(6.3.17) sont vérifiées. En utilisant un raisonnement analogue à celui fait précédemment, on peut aussi obtenir  $\sigma_2(f) = 1$ .

**Cas 2 :**  $\arg a_1 \neq \pi$  et  $\arg a_1 = \arg a_2$ . Dans la première étape, on a prouvé qu'il existe un rayon  $\arg z = \theta$  où  $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus (E_1 \cup E_6 \cup E_7)$  satisfaisant

$$\delta(a_1 z, \theta) > 0 \text{ et } \delta(a_2 z, \theta) > 0.$$

(i)  $|a_2| > \frac{|a_1|}{1-\beta}$ . Pour  $r$  suffisamment grand, les relations (6.3.6), (6.3.13), (6.3.16), (6.3.21) et (6.3.22) sont vérifiées.

En substituant (6.3.9), (6.3.13), (6.3.21), (6.3.22) et (6.3.33) dans (6.3.18), on obtient pour tout  $z = re^{i\theta}$  satisfaisant  $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_8$ ,  $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus (E_1 \cup E_6 \cup E_7)$

$$\begin{aligned} & \exp \{(1 - \varepsilon) \delta(a_2 z, \theta) r\} \leq |A_2 e^{a_2 z}| \\ & \leq M \exp \{r^{\gamma+\varepsilon}\} \exp \{(1 + \varepsilon) \delta(a_1 z, \theta) r\} \exp \{(1 + \varepsilon) \beta \delta(a_2 z, \theta) r\} \\ & \quad \times [T(2r, f)]^{k+1}. \end{aligned} \quad (6.3.36)$$

De (6.3.36), on en déduit que

$$\exp \{\eta_1 r\} \leq M \exp \{r^{\gamma+\varepsilon}\} [T(2r, f)]^{k+1}, \quad (6.3.37)$$

où

$$\eta_1 = (1 - \varepsilon) \delta(a_2 z, \theta) - (1 + \varepsilon) \delta(a_1 z, \theta) - (1 + \varepsilon) \beta \delta(a_2 z, \theta).$$

Comme  $\eta_1 > 0$  et  $\gamma + \varepsilon < 1$ , alors en utilisant le Lemme 2.2.6 et (6.3.37), on trouve  $\sigma_2(f) \geq 1$ , d'où  $\sigma_2(f) = 1$ .

(ii)  $|a_2| < (1 - \alpha)|a_1|$ . Pour  $r$  suffisamment grand, les relations (6.3.4), (6.3.6), (6.3.16), (6.3.22) et (6.3.25) sont vérifiées. En utilisant un raisonnement analogue à celui fait précédemment, on peut aussi obtenir  $\sigma_2(f) = 1$ .

**Cas 3 :**  $a_1 < 0$  et  $\arg a_1 \neq \arg a_2$ . Dans la première étape, on a prouvé qu'il existe un rayon  $\arg z = \theta$  où  $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus (E_1 \cup E_6 \cup E_7)$  satisfaisant

$$\delta(a_2 z, \theta) > 0 \text{ et } \delta(a_1 z, \theta) < 0.$$

En utilisant le même raisonnement du cas 1 (b) de la deuxième étape, on peut obtenir  $\sigma_2(f) = 1$ .

**Cas 4 :** (i)  $(1 - \beta)a_2 - b < a_1 < 0$  et  $a_2 < \frac{b}{1 - \beta}$  ou (ii)  $a_1 < \frac{a_2 + b}{1 - \alpha}$  et  $a_2 < 0$ . Dans la première étape, on a prouvé qu'il existe un rayon  $\arg z = \theta$  où  $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \setminus (E_1 \cup E_6 \cup E_7)$  satisfaisant

$$\delta(a_2 z, \theta) > 0 \text{ et } \delta(a_1 z, \theta) > 0.$$

(i)  $(1 - \beta)a_2 - b < a_1 < 0$  et  $a_2 < \frac{b}{1 - \beta}$ . Pour  $r$  suffisamment grand, les relations (6.3.6), (6.3.13), (6.3.16), (6.3.21) et (6.3.22) sont vérifiées.

En substituant (6.3.13), (6.3.21), (6.3.22), (6.3.28) et (6.3.33) dans (6.3.18), on obtient pour tout  $z = re^{i\theta}$  satisfaisant  $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_8$ ,  $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \setminus (E_1 \cup E_6 \cup E_7)$

$$\begin{aligned} & \exp \{(1 - \varepsilon) \delta(a_2 z, \theta) r\} \leq |A_2 e^{a_2 z}| \\ & \leq M e^{br \cos \theta} \exp \{r^{\gamma + \varepsilon}\} \exp \{(1 + \varepsilon) \delta(a_1 z, \theta) r\} \exp \{(1 + \varepsilon) \beta \delta(a_2 z, \theta) r\} \\ & \quad \times [T(2r, f)]^{k+1}. \end{aligned} \tag{6.3.38}$$

De (6.3.38), on en déduit que

$$\exp \{\eta_3 r\} \leq M \exp \{r^{\gamma + \varepsilon}\} [T(2r, f)]^{k+1}, \tag{6.3.39}$$

où

$$\eta_3 = (1 - \varepsilon) \delta(a_2 z, \theta) - (1 + \varepsilon) \delta(a_1 z, \theta) - (1 + \varepsilon) \beta \delta(a_2 z, \theta) - b \cos \theta.$$

Comme  $\eta_3 > 0$  et  $\gamma + \varepsilon < 1$ , en utilisant le Lemme 2.2.6 et (6.3.39), on trouve  $\sigma_2(f) \geq 1$ , d'où  $\sigma_2(f) = 1$ .

(ii)  $a_1 < \frac{a_2+b}{1-\alpha}$  et  $a_2 < 0$ . Pour  $r$  suffisamment grand, les relations (6.3.4), (6.3.6), (6.3.16), (6.3.22) et (6.3.25) sont vérifiées. En utilisant un raisonnement analogue à celui fait précédemment, on peut aussi obtenir  $\sigma_2(f) = 1$ .

On conclut que pour toute solution  $f (\neq 0)$  de (6.1.1) satisfait  $\sigma_2(f) = 1$ . La preuve du Théorème 6.1.1 est achevée.

## 6.4 Preuve du Théorème 6.1.2

Posons

$$R_0(z) = A_1 e^{a_1 z} + A_2 e^{a_2 z}$$

et

$$R_i(z) = B_i e^{b_i z} + D_i e^{d_i z} \quad (i = 1, \dots, k-1).$$

Supposons que  $f (\neq 0)$  est une solution de l'équation (6.1.1), donc  $\sigma(f) = +\infty$  par le Théorème 6.1.1.

Posons

$$g_0(z) = f(z) - \varphi(z),$$

et par suite

$$\sigma(g_0) = \sigma(f) = \infty.$$

En substituant  $f = g_0 + \varphi$  dans (6.1.1), on trouve

$$\begin{aligned} & g_0^{(k)} + R_{k-1} g_0^{(k-1)} + \dots + R_2 g_0'' + R_1 g_0' + R_0 g_0 \\ &= - [\varphi^{(k)} + R_{k-1} \varphi^{(k-1)} + \dots + R_2 \varphi'' + R_1 \varphi' + R_0 \varphi]. \end{aligned} \quad (6.4.1)$$

On peut écrire (6.4.1) sous la forme suivante

$$g_0^{(k)} + h_{0,k-1} g_0^{(k-1)} + \dots + h_{0,2} g_0'' + h_{0,1} g_0' + h_{0,0} g_0 = h_0, \quad (6.4.2)$$

où

$$h_0 = - [\varphi^{(k)} + R_{k-1} \varphi^{(k-1)} + \dots + R_2 \varphi'' + R_1 \varphi' + R_0 \varphi].$$

Montrons maintenant que  $h_0 \neq 0$ . En effet, si  $h_0 \equiv 0$  alors

$$\varphi^{(k)} + R_{k-1} \varphi^{(k-1)} + \dots + R_2 \varphi'' + R_1 \varphi' + R_0 \varphi = 0.$$

Par conséquent,  $\varphi \not\equiv 0$  est une solution d'ordre infini de l'équation (6.1.1) par le Théorème 6.1.1, c'est une contradiction. Ainsi,  $h_0 \not\equiv 0$  est prouvée.

D'après le Lemme 3.2.6 et (6.4.2), on sait que

$$\bar{\lambda}(g_0) = \bar{\lambda}(f - \varphi) = \sigma(g_0) = \sigma(f) = \infty.$$

Montrons maintenant que  $\bar{\lambda}(f' - \varphi) = \infty$ .

Posons

$$g_1(z) = f'(z) - \varphi(z),$$

on obtient donc

$$\sigma(g_1) = \sigma(f') = \sigma(f) = \infty.$$

En dérivant les deux membres de l'équation différentielle (6.1.1), on trouve

$$\begin{aligned} f^{(k+1)} + R_{k-1}f^{(k)} + (R'_{k-1} + R_{k-2})f^{(k-1)} + (R'_{k-2} + R_{k-3})f^{(k-2)} \\ + \dots + (R'_3 + R_2)f''' + (R'_2 + R_1)f'' + (R'_1 + R_0)f' + R'_0f = 0. \end{aligned} \quad (6.4.3)$$

Par l'équation (6.1.1), on a donc

$$f = -\frac{1}{R_0} [f^{(k)} + R_{k-1}f^{(k-1)} + \dots + R_2f'' + R_1f']. \quad (6.4.4)$$

En substituant (6.4.4) dans (6.4.3), on trouve

$$\begin{aligned} f^{(k+1)} + \left(R_{k-1} - \frac{R'_0}{R_0}\right)f^{(k)} + \left(R'_{k-1} + R_{k-2} - R_{k-1}\frac{R'_0}{R_0}\right)f^{(k-1)} \\ + \left(R'_{k-2} + R_{k-3} - R_{k-2}\frac{R'_0}{R_0}\right)f^{(k-2)} + \dots + \left(R'_3 + R_2 - R_3\frac{R'_0}{R_0}\right)f''' \\ + \left(R'_2 + R_1 - R_2\frac{R'_0}{R_0}\right)f'' + \left(R'_1 + R_0 - R_1\frac{R'_0}{R_0}\right)f' = 0. \end{aligned} \quad (6.4.5)$$

On peut écrire l'équation (6.4.5) sous la forme suivante

$$f^{(k+1)} + h_{1,k-1}f^{(k)} + h_{1,k-2}f^{(k-1)} + \dots + h_{1,2}f''' + h_{1,1}f'' + h_{1,0}f' = 0, \quad (6.4.6)$$

où

$$\begin{aligned} h_{1,i} &= R'_{i+1} + R_i - R_{i+1}\frac{R'_0}{R_0} \quad (i = 0, 1, \dots, k-2), \\ h_{1,k-1} &= R_{k-1} - \frac{R'_0}{R_0}. \end{aligned}$$

En substituant  $f^{(j+1)} = g_1^{(j)} + \varphi^{(j)}$  ( $j = 0, \dots, k$ ) dans (6.4.6), on obtient immédiatement que

$$g_1^{(k)} + h_{1,k-1}g_1^{(k-1)} + h_{1,k-2}g_1^{(k-2)} + \dots + h_{1,2}g_1'' + h_{1,1}g_1' + h_{1,0}g_1 = h_1, \quad (6.4.7)$$

où

$$h_1 = - [\varphi^{(k)} + h_{1,k-1}\varphi^{(k-1)} + h_{1,k-2}\varphi^{(k-2)} + \dots + h_{1,2}\varphi'' + h_{1,1}\varphi' + h_{1,0}\varphi].$$

On peut obtenir

$$h_{1,i}(z) = \frac{N_i(z)}{R_0(z)} \quad (i = 0, 1, \dots, k-1), \quad (6.4.8)$$

où

$$N_0 = R_1' R_0 + R_0^2 - R_1 R_0', \quad (6.4.9)$$

$$N_i = R_{i+1}' R_0 + R_i R_0 - R_{i+1} R_0' \quad (i = 1, 2, \dots, k-2), \quad (6.4.10)$$

$$N_{k-1} = R_{k-1} R_0 - R_0'. \quad (6.4.11)$$

Montrons que  $h_1 \not\equiv 0$ . En effet, si  $h_1 \equiv 0$  alors  $\frac{h_1}{\varphi} \equiv 0$ . Ainsi, par (6.4.8), on a

$$\frac{\varphi^{(k)}}{\varphi} R_0 + \frac{\varphi^{(k-1)}}{\varphi} N_{k-1} + \frac{\varphi^{(k-2)}}{\varphi} N_{k-2} + \dots + \frac{\varphi''}{\varphi} N_2 + \frac{\varphi'}{\varphi} N_1 + N_0 = 0. \quad (6.4.12)$$

Évidemment,  $\frac{\varphi^{(j)}}{\varphi}$  ( $j = 1, \dots, k$ ) sont des fonctions méromorphes avec  $\sigma\left(\frac{\varphi^{(j)}}{\varphi}\right) < 1$ . D'après les relations (6.4.9)-(6.4.11), on peut écrire (6.4.12) sous la forme

$$A_1^2 e^{2a_1 z} + A_2^2 e^{2a_2 z} + \sum_{\lambda \in I_1'} f_\lambda e^{\lambda z} = 0, \quad (6.4.13)$$

où  $I_1' = I_1 \setminus \{2a_1, 2a_2\}$  et  $f_\lambda$  ( $\lambda \in I_1'$ ) sont des fonctions méromorphes d'ordre inférieur strictement à 1.

1) Si  $(2a_1) \notin I_1 \setminus \{2a_1\}$ , ainsi on écrit (4.13) sous la forme

$$A_1^2 e^{2a_1 z} + \sum_{\lambda \in \Gamma_1} g_{1,\lambda} e^{\lambda z} = 0,$$

où  $\Gamma_1 \subseteq I_1 \setminus \{2a_1\}$ ,  $g_{1,\lambda}$  ( $\lambda \in \Gamma_1$ ) sont des fonctions méromorphes d'ordre inférieur strictement à 1 et  $2a_1, \lambda$  ( $\lambda \in \Gamma_1$ ) sont des nombres complexes distincts.

D'après le Lemme 3.2.7 et le Lemme 3.2.8, on obtient  $A_1 \equiv 0$ , c'est une contradiction.

2) Si  $(2a_2) \notin I_1 \setminus \{2a_2\}$ , ainsi on écrit (6.4.13) sous la forme

$$A_2^2 e^{2a_2 z} + \sum_{\lambda \in \Gamma_2} g_{2,\lambda} e^{\lambda z} = 0,$$

où  $\Gamma_2 \subseteq I_1 \setminus \{2a_2\}$ ,  $g_{2,\lambda}$  ( $\lambda \in \Gamma_2$ ) sont des fonctions méromorphes d'ordre inférieur strictement à 1 et  $2a_2$ ,  $\lambda$  ( $\lambda \in \Gamma_2$ ) sont des nombres complexes distincts.

D'après le Lemme 3.2.7 et le Lemme 3.2.8, on obtient  $A_2 \equiv 0$ , c'est une contradiction. Ainsi,  $h_1 \not\equiv 0$  est prouvée.

Par le Lemme 3.2.6 et (6.4.7) on sait que

$$\bar{\lambda}(g_1) = \bar{\lambda}(f' - \varphi) = \sigma(g_1) = \sigma(f) = \infty.$$

Montrons maintenant que  $\bar{\lambda}(f'' - \varphi) = \infty$ .

Posons

$$g_2(z) = f''(z) - \varphi(z),$$

donc

$$\sigma(g_2) = \sigma(f'') = \sigma(f) = \infty.$$

En dérivant les deux membres de l'équation différentielle (6.1.1), on trouve

$$\begin{aligned} & f^{(k+2)} + R_{k-1} f^{(k+1)} + (2R'_{k-1} + R_{k-2}) f^{(k)} + (R''_{k-1} + 2R'_{k-2} + R_{k-3}) f^{(k-1)} \\ & + (R''_{k-2} + 2R'_{k-3} + R_{k-4}) f^{(k-2)} + \dots + (R''_3 + 2R'_2 + R_1) f''' \\ & + (R''_2 + 2R'_1 + R_0) f'' + (R''_1 + 2R'_0) f' + R''_0 f = 0. \end{aligned} \quad (6.4.14)$$

Des relations (6.4.4) et (6.4.14) on obtient

$$\begin{aligned} & f^{(k+2)} + R_{k-1} f^{(k+1)} + \left(2R'_{k-1} + R_{k-2} - \frac{R''_0}{R_0}\right) f^{(k)} \\ & + \left(R''_{k-1} + 2R'_{k-2} + R_{k-3} - R_{k-1} \frac{R''_0}{R_0}\right) f^{(k-1)} \\ & + \dots + \left(R''_4 + 2R'_3 + R_2 - R_4 \frac{R''_0}{R_0}\right) f^{(4)} + \left(R''_3 + 2R'_2 + R_1 - R_3 \frac{R''_0}{R_0}\right) f''' \\ & + \left(R''_2 + 2R'_1 + R_0 - R_2 \frac{R''_0}{R_0}\right) f'' + \left(R''_1 + 2R'_0 - R_1 \frac{R''_0}{R_0}\right) f' = 0. \end{aligned} \quad (6.4.15)$$

Prouvons que

$$R'_1 + R_0 - R_1 \frac{R''_0}{R_0} \neq 0.$$

Supposons que

$$R'_1 + R_0 - R_1 \frac{R'_0}{R_0} \equiv 0,$$

un calcul immédiat donne

$$A_1^2 e^{2a_1 z} + A_2^2 e^{2a_2 z} + \sum_{\lambda \in I'_2} f_\lambda e^{\lambda z} = 0, \quad (6.4.16)$$

où  $I'_2 = I_2 \setminus \{2a_1, 2a_2\}$  et  $f_\lambda$  ( $\lambda \in I'_2$ ) sont des fonctions entières d'ordre inférieur strictement à 1.

En utilisant le même raisonnement ci-dessus, on peut obtenir une contradiction. Ainsi,

$$R'_1 + R_0 - R_1 \frac{R'_0}{R_0} \not\equiv 0$$

est prouvée. Posons

$$\psi(z) = R'_1 R_0 + R_0^2 - R_1 R'_0 \text{ et } \phi(z) = R''_1 R_0 + 2R'_1 R_0 - R_1 R''_0. \quad (6.4.17)$$

En utilisant (6.4.5) et (6.4.17), on trouve

$$\begin{aligned} f' = & \frac{-R_0}{\psi(z)} \left\{ f^{(k+1)} + \left( R_{k-1} - \frac{R'_0}{R_0} \right) f^{(k)} + \left( R'_{k-1} + R_{k-2} - R_{k-1} \frac{R'_0}{R_0} \right) f^{(k-1)} \right. \\ & \left. + \left( R'_{k-2} + R_{k-3} - R_{k-2} \frac{R'_0}{R_0} \right) f^{(k-2)} + \dots + \left( R'_2 + R_1 - R_2 \frac{R'_0}{R_0} \right) f'' \right\}. \end{aligned} \quad (6.4.18)$$

En substituant (6.4.17) et (6.4.18) dans (6.4.15), on obtient donc

$$\begin{aligned} f^{(k+2)} + & \left[ R_{k-1} - \frac{\phi}{\psi} \right] f^{(k+1)} + \left[ 2R'_{k-1} + R_{k-2} - \frac{R''_0}{R_0} - \frac{\phi}{\psi} \left( R_{k-1} - \frac{R'_0}{R_0} \right) \right] f^{(k)} \\ & + \left[ R''_{k-1} + 2R'_{k-2} + R_{k-3} - R_{k-1} \frac{R''_0}{R_0} - \frac{\phi}{\psi} \left( R'_{k-1} + R_{k-2} - R_{k-1} \frac{R'_0}{R_0} \right) \right] f^{(k-1)} \\ & + \dots + \left[ R''_3 + 2R'_2 + R_1 - R_3 \frac{R''_0}{R_0} - \frac{\phi}{\psi} \left( R'_3 + R_2 - R_3 \frac{R'_0}{R_0} \right) \right] f''' \\ & + \left[ R''_2 + 2R'_1 + R_0 - R_2 \frac{R''_0}{R_0} - \frac{\phi}{\psi} \left( R'_2 + R_1 - R_2 \frac{R'_0}{R_0} \right) \right] f'' = 0. \end{aligned} \quad (6.4.19)$$

On écrit l'équation (6.4.19) sous la forme suivante

$$f^{(k+2)} + h_{2,k-1} f^{(k+1)} + h_{2,k-2} f^{(k)} + \dots + h_{2,2} f^{(4)} + h_{2,1} f''' + h_{2,0} f'' = 0, \quad (6.4.20)$$

où

$$h_{2,i} = R''_{i+2} + 2R'_{i+1} + R_i - R_{i+2} \frac{R''_0}{R_0}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\phi(z)}{\psi(z)} \left( R'_{i+2} + R_{i+1} - R_{i+2} \frac{R'_0}{R_0} \right) \quad (i = 0, 1, \dots, k-3), \\
& h_{2,k-2} = 2R'_{k-1} + R_{k-2} - \frac{R''_0}{R_0} - \frac{\phi(z)}{\psi(z)} \left( R_{k-1} - \frac{R'_0}{R_0} \right), \\
& h_{2,k-1} = R_{k-1} - \frac{\phi(z)}{\psi(z)}.
\end{aligned}$$

En substituant  $f^{(j+2)} = g_2^{(j)} + \varphi^{(j)}$  ( $j = 0, \dots, k$ ) dans (6.4.20), on obtient

$$g_2^{(k)} + h_{2,k-1}g_2^{(k-1)} + h_{2,k-2}g_2^{(k-2)} + \dots + h_{2,1}g_2' + h_{2,0}g_2 = h_2, \quad (6.4.21)$$

où

$$h_2 = - \left[ \varphi^{(k)} + h_{2,k-1}\varphi^{(k-1)} + h_{2,k-2}\varphi^{(k-2)} + \dots + h_{2,2}\varphi'' + h_{2,1}\varphi' + h_{2,0}\varphi \right].$$

On peut obtenir

$$h_{2,i} = \frac{L_i(z)}{\psi(z)} \quad (i = 0, 1, \dots, k-1), \quad (6.4.22)$$

où

$$\begin{aligned}
L_0(z) &= R_2''R_1R_0 + R_2''R_0^2 - R_2''R_1R_0' + 2R_1'^2R_0 + 3R_1'R_0^2 - 2R_1'R_1R_0' + R_0^3 \\
&\quad - 3R_1R_0'R_0 - R_2R_1'R_0'' - R_2R_0''R_0 - R_2'R_1''R_0 - 2R_2'R_0'R_0 + R_2'R_1R_0'' \\
&\quad - R_1''R_1R_0 + R_1^2R_0'' + R_2R_1''R_0' + 2R_2R_0'^2, \quad (6.4.23)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_i &= R_{i+2}''R_1R_0 + R_{i+2}''R_0^2 - R_{i+2}''R_1R_0' + 2R_{i+1}'R_1R_0 + 2R_{i+1}'R_0^2 - 2R_{i+1}'R_1R_0' \\
&\quad + R_iR_1'R_0 + R_iR_0^2 - R_iR_1R_0' - R_{i+2}R_1'R_0'' - R_{i+2}R_0''R_0 - R_{i+2}'R_1''R_0 \\
&\quad - 2R_{i+2}'R_0'R_0 + R_{i+2}'R_1R_0'' - R_{i+1}R_1''R_0 - 2R_{i+1}R_0'R_0 + R_{i+1}R_1R_0'' \\
&\quad + R_{i+2}R_1''R_0' + 2R_{i+2}R_0'^2 \quad (i = 1, 2, \dots, k-3), \quad (6.4.24)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{k-2} &= 2R_{k-1}'R_1R_0 + 2R_{k-1}'R_0^2 - 2R_{k-1}'R_1R_0' + R_{k-2}R_1'R_0 + R_{k-2}R_0^2 \\
&\quad - R_{k-2}R_1R_0' - R_1'R_0'' - R_0''R_0 - R_{k-1}R_1''R_0 - 2R_{k-1}R_0'R_0 \\
&\quad + R_{k-1}R_1R_0'' + R_1''R_0' + 2R_0'^2, \quad (6.4.25)
\end{aligned}$$

$$L_{k-1} = R_{k-1}R_1'R_0 + R_{k-1}R_0^2 - R_{k-1}R_1R_0' - R_1''R_0 - 2R_0'R_0 + R_1R_0''. \quad (6.4.26)$$

Par conséquent

$$\frac{-h_2}{\varphi} = \frac{1}{\psi} \left[ \frac{\varphi^{(k)}}{\varphi} \psi + \frac{\varphi^{(k-1)}}{\varphi} L_{k-1} + \dots + \frac{\varphi''}{\varphi} L_2 + \frac{\varphi'}{\varphi} L_1 + L_0 \right]. \quad (6.4.27)$$

Montrons maintenant que  $h_2 \neq 0$ . Si  $h_2 \equiv 0$  alors  $\frac{-h_2}{\varphi} \equiv 0$ , et par suite

$$\frac{\varphi^{(k)}}{\varphi} \psi + \frac{\varphi^{(k-1)}}{\varphi} L_{k-1} + \dots + \frac{\varphi''}{\varphi} L_2 + \frac{\varphi'}{\varphi} L_1 + L_0 = 0. \quad (6.4.28)$$

Evidemment,  $\frac{\varphi^{(j)}}{\varphi}$  ( $j = 1, \dots, k$ ) sont des fonctions méromorphes avec  $\sigma\left(\frac{\varphi^{(j)}}{\varphi}\right) < 1$ .

Par (6.4.17) et (6.4.23)-(6.4.26), on peut écrire (6.4.28) sous la forme

$$A_1^3 e^{3a_1 z} + A_2^3 e^{3a_2 z} + \sum_{\lambda \in I'_3} f_\lambda e^{\lambda z} = 0, \quad (6.4.29)$$

où  $I'_3 = I_3 \setminus \{3a_1, 3a_2\}$  et  $f_\lambda$  ( $\lambda \in I'_3$ ) sont des fonctions méromorphes d'ordre inférieur strictement à 1.

1) Si  $(3a_1) \notin I_3 \setminus \{3a_1\}$ , alors on écrit (6.4.29) sous la forme

$$A_1^3 e^{3a_1 z} + \sum_{\lambda \in \Gamma_1} g_{1,\lambda} e^{\lambda z} = 0,$$

où  $\Gamma_1 \subseteq I_3 \setminus \{3a_1\}$ ,  $g_{1,\lambda}$  ( $\lambda \in \Gamma_1$ ) sont des fonctions méromorphes d'ordre inférieur strictement à 1 et  $3a_1, \lambda$  ( $\lambda \in \Gamma_1$ ) sont des nombres complexes distincts.

D'après le Lemme 3.2.7 et le Lemme 3.2.8, on obtient  $A_1 \equiv 0$ , c'est une contradiction.

2) Si  $(3a_2) \notin I_3 \setminus \{3a_2\}$ , alors on écrit (6.4.29) sous la forme

$$A_2^3 e^{3a_2 z} + \sum_{\lambda \in \Gamma_2} g_{2,\lambda} e^{\lambda z} = 0,$$

où  $\Gamma_2 \subseteq I_3 \setminus \{3a_2\}$ ,  $g_{2,\lambda}$  ( $\lambda \in \Gamma_2$ ) sont des fonctions méromorphes d'ordre inférieur strictement à 1 et  $3a_2, \lambda$  ( $\lambda \in \Gamma_2$ ) sont des nombres complexes distincts.

D'après le Lemme 3.2.7 et le Lemme 3.2.8, on obtient  $A_2 \equiv 0$ , c'est une contradiction. Ainsi,  $h_2 \neq 0$  est prouvée.

Par le Lemme 3.2.6 et (4.21), on sait que

$$\bar{\lambda}(g_2) = \bar{\lambda}(f'' - \varphi) = \sigma(g_2) = \sigma(f) = \infty.$$

La preuve du Théorème 6.1.2 est achevée.

## 6.5 Preuve du corollaire 6.1.1

En posant  $\varphi(z) = z$  et en utilisant la même démonstration du Théorème 6.1.2, on peut obtenir le Corollaire 6.1.1.

# Bibliographie

- [1] I. Amemiya and M. Ozawa, *Non-existence of finite order solutions of  $w'' + e^{-z}w' + Q(z)w = 0$* , Hokkaido Math. J. 10 (1981), Special Issue, 1–17.
- [2] B. Belaïdi, *Growth and oscillation theory of solutions of some linear differential equations*, Mat. Vesnik 60 (2008), no. 4, 233-246.
- [3] B. Belaïdi, *Oscillation of fixed points of solutions of some linear differential equations*. Acta Math. Univ. Comenian. (N.S.) 77, 2 (2008), 263–269.
- [4] B. Belaïdi and H. Habib, *On the growth of solutions of some second order linear differential equations with entire coefficients*, An. Șt. Univ. Ovidius Constanța, Vol. 21(2), 2013, 35-52.
- [5] B. Belaïdi and H. Habib, *On the growth of solutions to non-homogeneous linear differential equations with entire coefficients having the same ordre*, Facta Universitatis (NIS). Ser. Math. Inform. 28, No 1 (2013), 17–26.
- [6] B. Belaïdi and H. Habib, *Properties of meromorphic solutions of a class of second order linear differential equations*, International Journal of Analysis and Applications, ISSN 2291-8639, Volume 5, Number 2 (2014), 198-211.
- [7] T. B. Cao, *Growth of solutions of a class of complex differential equations*, Ann. Polon. Math. 95 (2) (2009), 141-152.
- [8] Z. X. Chen and K. H. Shon, *On the growth and fixed points of solutions of second order differential equations with meromorphic coefficients*, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) 21 (2005), no. 4, 753–764.
- [9] Z. X. Chen and K. H. Shon, *On the growth of solutions of a class of higher order differential equations*, Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed. 24 (2004), no. 1, 52–60.

- [10] Z. X. Chen and K. H. Shon, *The relation between solutions of a class of second order differential equation with functions of small growth*. Chinese. Ann. Math., 27(A4), 2006, 431-442 (Chinese).
- [11] Z. X. Chen, *The fixed points and hyper-order of solutions of second order complex differential equations* (in Chinese), Acta Math. Sci. Ser. A Chin. Ed. 20 (2000), no. 3, 425-432.
- [12] Z. X. Chen, *The growth of solutions of  $f'' + e^{-z}f' + Q(z)f = 0$  where the order( $Q$ ) = 1*, Sci. China Ser. A 45 (2002), no. 3, 290-300.
- [13] Z. X. Chen, *Zeros of meromorphic solutions of higher order linear differential equations*, Analysis 14 (1994), no. 4, 425-438.
- [14] M. Frei, *Über die Lösungen linearer Differentialgleichungen mit ganzen Funktionen als Koeffizienten*, Comment. Math. Helv. 35 (1961), 201-222.
- [15] M. Frei, *Über die Subnormalen Lösungen der Differentialgleichung  $w'' + e^{-z}w' + (\text{Konst.})w = 0$* , Comment. Math. Helv. 36, 1961, 1-8.
- [16] S. A. Gao and Z. X. Chen and T. W. Chen, *Oscillation Theory of Linear Differential Equations*, Huazhong University of Science and Technology Press, Wuhan, 1998. (in Chinese).
- [17] F. Gross, *On the distribution of values of meromorphic functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 131(1968), 199-214.
- [18] G. G. Gundersen, *Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function, plus similar estimates*, J. London Math. Soc. (2) 37 (1988), no. 1, 88-104.
- [19] G. G. Gundersen, *Finite order solutions of second order linear differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc. 305 (1988), no. 1, 415-429.
- [20] G. G. Gundersen, *On the question of whether  $f'' + e^{-z}f' + B(z)f = 0$  can admit a solution  $f \not\equiv 0$  of finite order*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 102 (1986), no. 1-2, 9-17.
- [21] H. Habib and B. Belaïdi, *Growth and fixed points of meromorphic solutions of higher order linear differential equations*, Ann. Pol. Math. 107, No. 3 (2013), 243-257.
- [22] H. Habib and B. Belaïdi, *On the Growth of Solutions of Some Higher Order Linear Differential Equations With Entire Coefficients*, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations 2011, No. 93, 1-13.
- [23] H. Habib and B. Belaïdi, *Growth of solutions to higher-order linear differential equations with entire coefficients*, Electron. J. Diff. Equ., Vol. 2014 (2014), No. 114, 1-17.

- [24] W. K. Hayman, *Meromorphic functions*, Oxford Mathematical Monographs Clarendon Press, Oxford 1964.
- [25] W. K. Hayman, *The local growth of power series : a survey of the Wiman–Valiron method*. *Canad. Math. Bull.*, 17 (1974), 317–358.
- [26] E. Hille, *Ordinary differential equations in the complex domain*, Wiley, New York, 1976.
- [27] G. Jank and L. Volkmann, *Einführung in die Theorie der ganzen und Meromorphen Funktionen mit Anwendungen auf Differentialgleichungen*, Birkhäuser, Basel-Boston, 1985.
- [28] K. H. Kwon, *Nonexistence of finite order solutions of certain second order linear differential equations*, *Kodai Math J.* 19 (1996), no. 3, 378–387.
- [29] K. H. Kwon, *On the growth of entire functions satisfying second order linear differential equation*. *Bull. Korean. Math. Soc.*, 3, 1996, 487–496.
- [30] I. Laine and S. B. Bank, *On the oscillation theory of  $f'' + Af = 0$ , where  $A$  is entire*, *Tran. Amer. Math. Soc.*, 273 (1982), 351–363.
- [31] I. Laine, *Nevalinna Theory and Complex Differential Equations*, W. de Gruyter, New York, 1993.
- [32] I. Laine and J. Rieppo, *Differential polynomials generated by linear differential equations*, *Complex Variables. Theory and Application*, vol. 49 (2004), no. 12, 897–911.
- [33] I. Laine and R. Yang, *Finite order solutions of complex linear differential equations*, *Electron. J. Diff. Equ.*, 2004, No. 65, 1–8.
- [34] J. K. Langley, *On complex oscillation and a problem of Ozawa*, *Kodai Math. J.* 9 (1986), no. 3, 430–439.
- [35] Y. Z. Li and J. Wang, *Oscillation of solutions of linear differential equations*, *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)*. 24 (1) (2008), 167–178.
- [36] M. S Liu and X. M. Zhang, *Fixed points of meromorphic solutions of higher order Linear differential equations*, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* 31 (2006), no. 1, 191–211.
- [37] A. I. Markushevich, *Theory of functions of a complex variable*, Vol. II, translated by R. A. Silverman, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1965.
- [38] R. Nevanlinna, *Eindeutige analytische Funktionen*, Zweite Auflage. Reprint. *Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, Band 46. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1974.

- [39] M. Ozawa, *On a solution of  $w'' + e^{-z}w' + (az + b)w = 0$* , Kodai Math. J. 3 (1980), no. 2, 295–309.
- [40] F. Peng and Z. X. Chen, *On the growth of solutions of some second-order linear differential equations*, J. Inequal. Appl. 2011, Art. ID 635604, 1–9.
- [41] J. Rossi, *Second order differential equations with transcendental coefficients*, Proc. Amer. Math. Soc, 97, No. 1 (1986), 61-66.
- [42] L. C. Shen, *Solution to a problem of S. Bank regarding the exponent of convergence of the solutions of the differential equation  $f'' + Af = 0$* , Kexue Tongbao., 30 (1985) 1579-1585.
- [43] J. Tu and C. F. Yi, *On the growth of solutions of a class of higher order linear differential equations with coefficients having the same order*, J. Math. Anal. Appl. 340(1) (2008), 487-497.
- [44] J. Wang and H. X. Yi, *Fixed points and hyper order of differential polynomials generated by solutions of differential equation*, Complex Var. Theory Appl. 48 (2003), no. 1, 83–94.
- [45] J. Wang and I. Laine, *Growth of solutions of nonhomogeneous linear differential equations*, Abstr. Appl. Anal. 2009, Art. ID 363927, 1-11.
- [46] J. Wang and I. Laine, *Growth of solutions of second order linear differential equations*. J. Math. Anal. Appl. 342, 1 (2008), 39–51.
- [47] J. Wang and W. R. Lü, *The fixed points and hyper-order of solutions of second order linear differential equations with meromorphic coefficients*, Acta Mathematicae Applicatae Sinica, vol. 27 (2004), no. 1, 72–80.
- [48] J. F. Xu and H. X. Yi, *The relation between solutions of higher order differential equations with functions of small growth*, Acta Math. Sin., Chinese Series, 53 (2010), 291-296.
- [49] C. C. Yang and H. X. Yi, *Uniqueness theory of meromorphic functions*, Mathematics and its Applications, 557. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 2003.
- [50] Q. T. Zhang and C. C. Yang, *The Fixed Points and Resolution Theory of Meromorphic Functions*. Beijing University Press, Beijing, 1988 (in Chinese).