

REPUE AUBLIQLGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE

LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS MOSTAGANEM

Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et de la vie

Département de Mathématiques

THESE DE MASTER

=====o ○ o=====

Option : Analyse Fonctionnelle

Intitulée

*la croissance des solutions de certaines équations différentielles linéaires non
homogènes*

Présentée par : **Saidane Amina**

Soutenue le : 05/2017

devant le jury composé de :

Encadreur Pr U. MOSTAGANEM.

Examinatrice U. MOSTAGANEM.

Président U. MOSTAGANEM.

Année Universitaire 2015-2016

Table des matières

Résumé	i
Dédicaces	ii
Remerciments	iii
Notation	iv
Introduction	v
1 Notions de bases et préliminaires	2
1.1 Notions sur le produit de kronecker	2
1.1.1 Propriétés du produit de kronecker	3
1.2 Vectorisation d'une matrice	4
1.2.1 Quelques propriétés	4
1.3 La transformée de Laplace	5
1.3.1 La linéarité	5
1.3.2 La transformée inverse de Laplace TL^{-1}	5
1.3.3 Dérivation de Laplace	6
1.3.4 Convolution	6
1.4 Outils d'algèbre linéaire	7
1.4.1 Polynôme caractéristique	7

1.5	Rappels sur les exponentielles des matrices	7
1.5.1	Quelques méthodes de calcul de l'exponentielle d'une matrice	8
1.6	Notion de système	11
1.6.1	Système et représentation d'état	11
1.7	La fonction de transfert	11
2	Systèmes linéaires à Temps Invariant Standards	14
2.1	Description d'un système LTI standard en temps continu	14
2.2	Description d'un système LTI standard en temps discret	15
2.3	Solution des systèmes LTI standards en temps continu	16
2.4	Solution des systèmes LTI standards en temps discret	17
2.5	Notion sur contrôlabilité	18
2.5.1	Critère de contrôlabilité de Kalman	18
3	Système linéaire de Lyapunov en temps continu	23
3.1	Trajectoire d'états et réponse du système de Lyapunov en temps continu	24
3.2	Analyse et propriétés des systèmes linéaires de Lyapunov	26
3.2.1	Contrôlabilité	27
	Conclusion	31
	Bibliographie	32

RÉSUMÉ

Notre objet d'étude dans ce mémoire est "Contrôlabilité des systèmes linéaires de Lyapunov". Tout d'abord, nous fournissons des conditions nécessaires et suffisantes pour la contrôlabilité des systèmes linéaires standards, tout en basant sur les critères de contrôlabilité. Dans un second temps, nous présentons une classe des systèmes de Lyapunov, ensuite nous étudions la contrôlabilité de cette classe de système à l'aide des systèmes linéaires standards.

DÉDICACES

À mes chers parents; Ahmed et Djaballah Fatma;

À mon frère et à mes soeurs,

À mes amis,

Remerciements

Avant tout, je remercie **Dieu** qui m'a donné la volonté et la résignation pour atteindre mon but.

Je tiens à remercier **M^{me} BECHAOUI Khadidja**, mon encadrante pour son aide précieuse, ses conseils, ces critiques constructives et sa disponibilité.

Ainsi, je remercie du fond du coeur **le président et les membres du jury** d'avoir accepté de porter un jugement sur mon travail et de faire partie du jury de soutenance de ce mémoire.

Je tiens à remercier particulièrement l'adorable **Tchouka Salma Sabria**, elle a été comme une grande soeur à moi, elle ma donnée tout ; l'aide, le sourire de chaque matin, le respect et surtout les conseils, je lui dis merci infiniment.

Je dédie ce travail à mes chers parents sans qui je ne serais pas là. Je les remercie infiniment pour leur amour, leur confiance et leur soutien inconditionnel pendant ces années.

Merci aussi à toute ma famille et mes amis pour leur soutien...

Notation

\otimes	Produit de Kronecker.
\mathbb{R}	Corps des nombres réels.
\mathbb{R}^n	Espace des vecteurs à n entiers réelles.
$\mathbb{R}^{n \times n}$	Espace des matrices carrées de dimension n .
$\mathbb{R}^{m \times n}$	Espace des matrices réelles de dimension $m \times n$.
$[a_{ij}]$	Matrice dont le coefficient de la $j^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne est a_{ij} .
A^T	Transposée de matrice.
A^{-1}	Matrice inverse de A .
$\det(A)$	Déterminant de la matrice A .
I_n	Matrice identité d'ordre n
$F(s)$	Transformée de Laplace.
$rg(A)$	Rang de la matrice A .
$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$	Dérivée temporelle
$\ \cdot\ $	Norme euclidienne.

Abréviations

LTI	Linéaire invariant dans le temps
TH	Transformée de Laplace
C.H	Cayley-Hamilton

INTRODUCTION

En mathématiques, le contrôle désigne la théorie qui vise à comprendre la façon dont une commande permet aux humains d'agir sur un système qu'ils souhaitent maîtriser. Cette définition recouvre naturellement de très nombreux champs d'applications ; les sciences de l'ingénieur, la physique, électronique, biologie, chimie, économie, ... etc. Il est intéressant de noter que, malgré la diversité des situations concrètes qui peuvent être appréhendées ainsi, **la théorie du contrôle** fournit un cadre commun à tous ces univers. Il est donc remarquable que l'on parvienne à obtenir des résultats généraux, qui pourront s'appliquer dans de nombreux domaines.

L'objectif de ce mémoire est l'étude de la contrôlabilité des systèmes linéaires de Lyapunov à temps continu, la contrôlabilité qui nous intéresse est l'étude des systèmes commandés, c'est-à-dire des systèmes dynamiques (dépendant du temps noté t) sur lesquels on agit à l'aide d'une commande (ou contrôle).

La notion de la contrôlabilité est d'une grande importance dans la théorie du contrôle, c'est une propriété de base dans l'analyse des systèmes dynamiques. De nombreux problèmes fondamentaux de la théorie du contrôle (stabilité et stabilisation, contrôle optimal) ne peuvent être résolus que sous l'hypothèse que le système soit contrôlable.

Tout au long de ce travail, une analogie entre un système linéaire standard et un système linéaire de Lyapunov tous deux à temps continu a été faite pour déduire que tous les résultats sur le contrôle des systèmes linéaires standards sont étendus au cas des systèmes linéaires de Lyapunov.

Le mémoire que nous présentons est rédigé comme suit :

le premier chapitre est consacré à donner quelques notions de bases et des définitions quand aura besoin dans notre travail.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons des systèmes linéaires à temps invariant standard dans le cas continu et discret, ensuite on donne des notions et des principales méthodes d'étude de la contrôlabilité de ces systèmes.

Le troisième chapitre aborde une étude, sur la contrôlabilité des systèmes linéaires de Lyapunov, en appliquant des critères et des résultats obtenus dans les deux premiers chapitres.

Notions de bases et préliminaires

Ce chapitre a essentiellement pour objectif de présenter quelques rappels sur les systèmes linéaires en temps continu. Nous fournissons au début de ce chapitre des notions préliminaires qu'on va utiliser. Pour ce faire, nous nous basons sur les références suivantes [3], [4], et [8].

1.1 Notions sur le produit de kronecker

Le produit de kronecker est un opérateur portant sur les matrices, il se note par le symbole \otimes .

Définition 1.1.1 Soient A une matrice $m \times n$ et B une matrice $p \times q$. Le produit de kronecker de A et B est la matrice $A \otimes B \in \mathbb{R}^{mp \times nq}$ donnée par :

$$A \otimes B = [a_{ij} B]_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}} \in \mathbb{R}^{mp \times nq}. \quad (1.1.1)$$

Exemple 1.1.1 Soient $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

On obtient :

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} 1. \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} & 0. \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} & 3. \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \\ 2. \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} & 1. \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} & 5. \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

D'où :

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 15 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 6 & 12 \\ 0 & 10 & 0 & 5 & 0 & 25 \\ 4 & 8 & 2 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix}$$

1.1.1 Propriétés du produit de kronecker

P1 : Le produit de kronecker est associatif : pour tout triplet de matrices A , B et C :

$$(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C). \quad (1.1.2)$$

P2 : Le produit de kronecker est distributif par rapport à l'addition : pour tout quadruplet A , B , C et D tel que $(A + B)$ et $(C + D)$ existent, on obtient :

$$(A + B) \otimes (C + D) = (A \otimes C) + (A \otimes D) + (B \otimes C) + (B \otimes D). \quad (1.1.3)$$

P3 : Le produit de kronecker est également distributif par rapport au produit matriciel standard : pour tout quadruplet : A , B , C et D tel que (AB) , (CD) existent, on obtient :

$$(A \otimes C)(B \otimes D) = (AB) \otimes (CD). \quad (1.1.4)$$

P4 : Si $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ et $B \in \mathbb{R}^{p \times p}$ sont deux matrices non singulières, alors la matrice $A \otimes B$ l'est aussi et

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}. \quad (1.1.5)$$

P5 : Pour toute matrice A et B , on a :

$$(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T. \quad (1.1.6)$$

P6 : Le produit de kronecker n'est pas commutatif :

$$A \otimes B \neq B \otimes A. \quad (1.1.7)$$

P7 : On a aussi :

$$I_n \otimes I_p = I_{np}. \quad (1.1.8)$$

P8 : Si $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ et $B \in \mathbb{R}^{p \times p}$, alors :

$$\det(A \otimes B) = \det(A)^p \det(B)^m = \det(B \otimes A). \quad (1.1.9)$$

1.2 Vectorisation d'une matrice

La vectorisation d'une matrice est une transformation qui convertit la matrice dans un vecteur de colonne.

Définition 1.2.1 Soit $A = [a_{ij}]$ une matrice $m \times n$, on associe à A le vecteur noté $vec(A)$, obtenue en empilant les colonnes de la matrice A l'une sur l'autre,

$$vec(A) = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}, a_{12}, \dots, a_{m2}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{mn})^T. \quad (1.2.1)$$

Exemple 1.2.1 Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, la vectorisation de A est :

$$vec(A) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

1.2.1 Quelques propriétés

P1 : L'opérateur vec est linéaire, pour tout A, B et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$vec(\alpha A + \beta B) = \alpha vec(A) + \beta vec(B). \quad (1.2.2)$$

P2 : Soient A, B et X des matrices de dimensions $n \times m$, $m \times l$ et $l \times k$ respectivement, on a alors,

$$vec(AXB) = (B^T \otimes A) vec(X). \quad (1.2.3)$$

P3 : On a aussi deux autres formules :

$$vec(AX) = (I \otimes A) vec(X). \quad (1.2.4)$$

$$vec(XA) = (A^T \otimes I) vec(X). \quad (1.2.5)$$

Tel que I est la matrice identité de dimension appropriée.

1.3 La transformée de Laplace

La transformée de Laplace est un outil important et très puissant pour résoudre les équations et les systèmes différentiels linéaires en temps continu.

Définition 1.3.1 Soit f une fonction de la variable t , sa transformée de Laplace notée $L(f(t))$ est donnée par :

$$L(f(t)) = F(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt, \quad \forall s \in \mathbb{C}, \quad (1.3.1)$$

Exemple 1.3.1 Soit f la fonction Echelon unité

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Sa transformée de Laplace est :

$$L(f(t)) = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-st} = \frac{1}{s}.$$

1.3.1 La linéarité

La transformée de Laplace est linéaire car

$$\begin{aligned} \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, L[\alpha f(t_1) + \beta f(t_2)] &= F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} [\alpha f(t_1) + \beta f(t_2)] dt \\ &= \alpha \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t_1) dt + \beta \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t_2) dt \\ &= \alpha L[f(t_1)] + \beta L[f(t_2)]. \end{aligned}$$

1.3.2 La transformée inverse de Laplace TL^{-1}

Si TL désigne la transformation de Laplace, on note $F = TL(f)$ et alors $f = TL^{-1}(F)$.

On dit que F est la transformée de f tel que f est l'origine de F . Nous rappelons que la transformée inverse de Laplace est aussi linéaire.

1.3.3 Dérivation de Laplace

Nous rappelons quelques propriétés pour tout fonction f dérivable n fois. on a :

$$1. TL(f'(t)) = sF(s) - f(0).$$

$$2. TL(f''(t)) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0).$$

$$3. TL(f^{(n)}(t)) = s^nF(s) - [s^{(n-1)}f(0) + \dots + f^{(n-1)}(0)].$$

1.3.4 Convolution

Théorème 1.3.1 Soient f et g deux fonctions de $L^1(\mathbb{R})$, la convolée de f par g notée $f * g$ est définie par :

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(y)g(t-y)dy. \quad (1.3.2)$$

Tableau résumé de la transformation de Laplace de quelques fonctions usuelles

Les fonctions	Les transformés de Laplace
a	$\frac{a}{s}, a \in \mathbb{R}$
at	$\frac{a}{s^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$\sin(wt)$	$\frac{w}{s^2+w^2}, w \in \mathbb{R}$
$\sinh(wt)$	$\frac{w}{s^2-w^2}$
$\cos(wt)$	$\frac{s}{s^2+w^2}$
$\cosh(wt)$	$\frac{s}{s^2-w^2}$
$e^{-at} \sin(wt)$	$\frac{w}{(s+a)^2+w^2}$

Exemple 1.3.2 Soit f une fonction définie par :

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)}$$

$F(s)$ peut se décomposer en éléments simples ,

$$\frac{a}{s+1} + \frac{b}{s+2} = \frac{(a+b)s + 2a + b}{(s+1)(s+2)}.$$

Par identification avec l'expression de $F(s)$, on obtient :

$$F(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{2}{s+2}.$$

Par la transformée de Laplace inverse, on obtient :

$$f(t) = 2e^{-t} - 2e^{-2t}.$$

1.4 Outils d'algèbre linéaire

Dans cette section, nous proposons quelques outils d'algèbre linéaire qui sont très utiles dans notre travail.

1.4.1 Polynôme caractéristique

On définit le polynôme caractéristique d'une matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ par

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A). \quad (1.4.1)$$

Théorème 1.4.1 (Cayley- Hamilton) Soit $P_A(\lambda)$ le polynôme caractéristique de la matrice A , alors

$$P_A(A) = 0.$$

1.5 Rappels sur les exponentielles des matrices

Définition 1.5.1 Soit M une matrice carrée de dimension n , l'exponentielle de M se définit par son développement en série entière :

$$\exp(M) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} M^i = I_n + M + \frac{1}{2!} M^2 + \frac{1}{3!} M^3 + \dots, \quad (1.5.1)$$

où I_n est la matrice identité de dimension n .

Quelques propriétés importants concernant l'exponentielle d'une matrice.

◆ Pour toutes M et N deux matrices de dimensions n qui commutent, *i.e.* $MN = NM$, on a :

$$e^M e^N = e^{M+N}$$

◆ Pour toute matrice carrée M de dimension n , on a :

$$(e^M)^{-1} = e^{-M}$$

1.5.1 Quelques méthodes de calcul de l'exponentielle d'une matrice

Plusieurs techniques existent pour calculer e^M , parmi elles, citons les méthodes suivantes :

Le cas d'une matrice diagonale

Si D une matrice diagonale, c'est à dire :

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix}.$$

Alors son exponentielle est obtenue en calculant l'exponentielle de chacun des termes de la diagonale principale :

$$e^D = \begin{bmatrix} e^{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{d_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{d_n} \end{bmatrix}$$

Le cas d'une matrice diagonalisable

Soit A une matrice diagonalisable, *i.e.* (il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale $D = \text{diag}(\lambda_i)$, $\forall i = 1, \dots, n$ tel que : A s'écrit sous la forme : $A = PDP^{-1}$), alors son exponentielle est donnée par ;

$$e^A = Pe^DP^{-1}$$

Exemple 1.5.1 Soit

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pour calculer les valeurs propres de cette matrice on doit d'abord calculer son polynôme caractéristique .

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda_1 - 2)(\lambda_2 - 3).$$

Après le calcul des valeurs propres et leurs vecteurs propres associés, on obtient la matrice de passage et son inverse ;

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Donc,

$$e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{2t} + 2e^{3t} & 2e^{2t} - 2e^{3t} \\ -e^{2t} + e^{3t} & 2e^{2t} - e^{3t} \end{pmatrix}$$

Le cas d'une matrice nilpotente

Soit A une matrice nilpotente d'indice de nilpotence m , i.e. $A^m = [0]$, alors :

$$A^k = [0], \text{ pour } k \geq m.$$

Si on revient à la formule (1.4.1), on s'aperçoit alors que cette dernière ne contient qu'un nombre fini de termes, et on a donc

$$e^A = I_n + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \dots + \frac{A^{m-1}}{(m-1)!} = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{A^i}{i!}.$$

Exemple 1.5.2 Soit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

La matrice A est nilpotente d'indice de nilpotence 2, alors son exponentielle est donnée par :

$$e^A = I_3 + A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Par transformation de Laplace inverse

On utilise l'inverse de la transformée de Laplace pour calculer e^A , alors la formule est donnée par :

$$e^A = L^{-1} [(sI_n - A)^{-1}],$$

Exemple 1.5.3 Soit

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Donc,

$$\det(sI_n - A) = (s + 3)(s + 1).$$

L'inverse de la matrice $(sI_n - A)$ est donnée par :

$$(sI_n - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\frac{s+3}{-4}} & 0 \\ \frac{1}{(s+1)(s+3)} & \frac{1}{(s+1)} \end{pmatrix}.$$

On applique la TL inverse, on obtient :

$$e^A = \begin{pmatrix} e^{-3t} & 0 \\ 2e^{-t} - 2e^{-3t} & e^{-t} \end{pmatrix}$$

Par l'utilisation du théorème de Cayley-Hamilton

Comme

$$e^A = I_n + A + \frac{A^2}{2!} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!}.$$

D'après le théorème de C.H, on peut réécrire e^A par :

$$e^A = \alpha_0 I_n + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \dots + \alpha_{n-1} A^{n-1} \quad (1.5.2)$$

n la dimension de la matrice carrée A .

Et les scalaires $(\alpha_i)_{0 \leq i \leq n-1}$ de l'équation (1.4.2) sont solutions du système formé par les équations :

$$e^{\lambda_i} = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_i + \alpha_2 \lambda_i^2 + \dots + \alpha_{n-1} \lambda_i^{n-1} \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (1.5.3)$$

Avec λ_i les valeurs propres de la matrice A .

Exemple 1.5.4 On considère

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de cette matrice sont : $\lambda_1 = -3$ et $\lambda_2 = -1$. D'après le théorème de CH, on a :

$$e^A = \alpha_0 I_n + \alpha_1 A$$

où α_0 et α_1 sont solutions de :

$$\begin{cases} e^{-3} = \alpha_0 + \alpha_1 (-3). \\ e^{-1} = \alpha_0 + \alpha_1 (-1). \end{cases}$$

Ce qui donne :

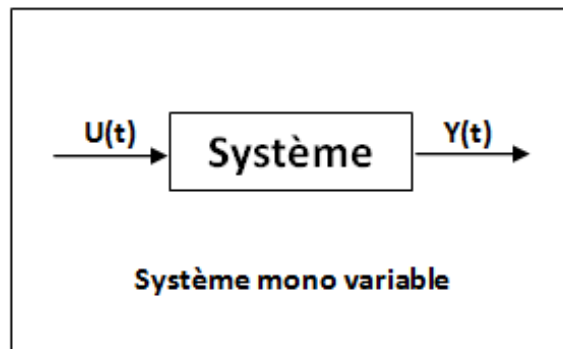
$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{3}{2}e^{-1} - \frac{1}{2}e^{-3} \\ \alpha_1 &= \frac{1}{2}e^{-1} - \frac{1}{2}e^{-3} \end{aligned}$$

Finalement, on trouve :

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{-3} & 0 \\ 2e^{-1} - 2e^{-3} & e^{-1} \end{pmatrix}.$$

1.6 Notion de système

Définition 1.6.1 *Un système est un ensemble de pièces ou objets qui réalisent une opération spécifique, il ya donc une notion d'action sur l'environnement en fonction d'excitation extérieure.*



Un système est ainsi défini par ses entrées et ses sorties qui le relient à l'environnement extérieur.

Remarque 1.6.1 *Un système monovariante SISO : i.e une seule entrée-une seule sortie.*

1.6.1 Système et représentation d'état

Tout système dynamique peut être représenté par ses équations d'état définies comme un ensemble d'équations différentielles du premier ordre appelées équations dynamiques et un ensemble d'équations algébriques appelées équations de sortie ou de mesure :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) & \text{équation dynamique} \\ y(t) = h(x(t), u(t), t) & \text{équation de mesure} \end{cases}$$

Dans notre cas, on intéresse au cas linéaire des systèmes dynamiques.

1.7 La fonction de transfert

Représente un modèle à comportement entrée-sortie, qui s'obtient à partir d'une équation différentielle à coefficient constant.

Comme, il s'agit de déterminer un modèle, nous considérons les conditions initiales nulles et on applique tous simplement la transformation de Laplace.

Comment l'obtenir ? Considérons le système standard suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \\ x(0) = x_0 = 0 \end{cases} \quad (1.7.1)$$

On applique la transformation de Laplace TL , ce qui donne,

$$\begin{cases} TL[\dot{x}(t)] = ATL[x(t)] + BTL[u(t)] \\ TL[y(t)] = CTL[x(t)] + DTL[u(t)] \end{cases}$$

On pose,

$$\begin{cases} TL(x) = X(s) \\ TL(u) = U(s) \\ TL(y) = Y(s) \\ \forall s \in \mathbb{C} \end{cases} \quad (1.7.2)$$

Or,

$$TL[\dot{x}(t)] = sX(s) - x(0) = sX(s) \quad (1.7.3)$$

Maintenant on remplace (1.7.2) et (1.7.3) dans (1.7.1), il s'ensuit,

$$\begin{cases} sX(s) = AX(s) + BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} (sI - A)X(s) = BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases}$$

Le système est régulier donc, $(sI - A)$ est inversible, par conséquent

$$\begin{cases} X(s) = (sI - A)^{-1} BU(s) \\ Y(s) = (C(sI - A)^{-1} B + D) U(s) \end{cases}$$

Soit

$$H(s) = C(sI - A)^{-1} B + D = C \frac{1}{\det(sI - A)} \text{adj}(sI - A) B + D.$$

Donc

$$Y(s) = H(s)U(s).$$

$H(s)$ est appelée la matrice de transfert .

D'où

$$TL^{-1}[Y(s)] = TL^{-1}[H(s)U(s)].$$

On trouve la réponse du système (1.7.1)

$$y(t) = h(t) * u(t), \text{ tel que } TL^{-1}[H(s)] = h(t).$$

Remarque 1.7.1 1. *La transformé de Laplace permet de relier la matrice d'entrée et la matrice de réponse par :*

$$Y(s) = H(s)U(s).$$

2. *Le concept de matrice de transfert permet de représenter le comportement dynamique du système de manière algébrique.*

Systèmes linéaires à Temps Invariant Standards

Ce chapitre présente la description du système, il est basé sur un système des équations différentielles linéaires du premier ordre.

2.1 Description d'un système LTI standard en temps continu

Définition 2.1.1 *La représentation d'état d'un système LTI en temps continu est représentée par,*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.1.1)$$

Où :

$x(t) \in \mathbb{R}^n$: le vecteur d'état, $y(t) \in \mathbb{R}^p$: le vecteur de sortie.

$u(t) \in \mathbb{R}^m$: le vecteur de commande (entrée).

Et : $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$: la matrice d'état.

$B \in \mathbb{R}^{n \times m}$: la matrice d'entrée.

$C \in \mathbb{R}^{p \times n}$: la matrice de sortie.

$D \in \mathbb{R}^{p \times m}$: la matrice de transmission et t est le temps.

2.2 Description d'un système LTI standard en temps discret

Définition 2.2.1 La représentation d'état d'un système LTI à temps discret est de la forme,

$$\begin{cases} x_{k+1}(t) = Ax_k(t) + Bu_k(t) \\ y_k(t) = Cx_k(t) + Du_k(t) \\ x_k(0) = x_0, \forall k \in \mathbb{R}^+, k \geq k_0 = 0. \end{cases} \quad (2.2.1)$$

Où :

$x_k(t) \in \mathbb{R}^m$: le vecteur d'état, $y_k(t) \in \mathbb{R}^p$: le vecteur de sortie.

$u_k(t) \in \mathbb{R}^m$: le vecteur de commande (entrée).

Et : $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$: la matrice d'état.

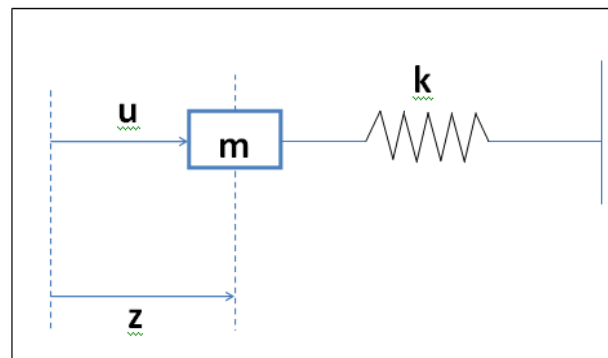
$B \in \mathbb{R}^{n \times m}$: la matrice d'entrée.

$C \in \mathbb{R}^{p \times n}$: la matrice de sortie.

$D \in \mathbb{R}^{p \times m}$: la matrice de transmission et t est le temps.

★ Les deux équations du système (2.2.1) construisent la description d'un système linéaire en temps fini discret.

Exemple 2.2.1 (Exemple d'application) On considère le système formé d'une masse m liée à un ressort de raideur k et soumise à l'action d'une force u .



Si z désigne l'écart à la position d'équilibre du centre de gravité de la masse ($z = 0$ est l'abscisse du système au repos, ressort non tendus), alors le principe fondamental de la dynamique fournit l'équation :

$$m\ddot{z} = -kz + u.$$

Soit le vecteur $x = [x_1, x_2]^T$, appelé vecteur l'état du système.

On pose :

$$\begin{cases} x_1 = z \\ x_2 = \dot{z} \end{cases},$$

Après dérivation, on obtient :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{z} = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{z} = \frac{-k}{m}z + \frac{1}{m}u \end{cases}$$

Ce qui peut s'écrire :

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-k}{m} & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} u.$$

Remarque 2.2.1 La représentation d'état n'est pas unique pour le même système physique.

2.3 Solution des systèmes LTI standards en temps continu

Plusieurs techniques sont établies pour la recherche de la solution du(2.1.1). On citera parmi eux, l'utilisation de la transformée de Laplace.

Notre système d'écrit par les équations

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.3.1)$$

Dans un premier temps, on considère l'équation homogène corespondante à (2.3.1),

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

Et considérons que le système est régulier, autrement dit,

$$\det(sI - A) \neq 0, \forall s \in \mathbb{C}.$$

L'application de la transformation de Laplace de cette équation donne,

$$sX(s) - x(0) = AX(s).$$

Remarque 2.3.1 Ici $X(s)$ représente le vecteur des TL des x_i .

On aura donc

$$X(s) = (sI - A)^{-1} x(0) \quad (2.3.2)$$

Puis on applique la transformation de Laplace inverse sur (2.3.2),

$$TL^{-1}[X(s)] = TL^{-1}[(sI - A)^{-1}]x(0)$$

Ceci implique que,

$$x(t) = TL^{-1}[(sI - A)^{-1}]x(0)$$

Or,

$$e^{At} = TL^{-1}[(sI - A)^{-1}].$$

Qui représente la matrice de transition du système, par conséquent,

$$x(t) = e^{At}x(0)$$

L'équation d'évolution de x sera,

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s) \Rightarrow X(s) = (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}BU(s)$$

Par la transformée inverse TL^{-1} , on trouve,

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau) d\tau. \quad (2.3.3)$$

Et la sortie sera donc,

$$y(t) = Ce^{At}x_0 + C \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau) d\tau + Du(t). \quad (2.3.4)$$

2.4 Solution des systèmes LTI standards en temps discret

Considérons le système LTI standard en temps discret suivant,

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \\ y_k = Cx_k + Du_k \\ x_k(0) = x_{k_0} \end{cases}$$

La solution du système est,

$$x_k(t) = A^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-(i+1)} Bu_i, \quad k > 0. \quad (2.4.1)$$

Par suite,

$$y_k(t) = CA^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} CA^{k-(i+1)} Bu_i + Du_i, \quad k > 0$$

Le premier membre de cette équation correspond au régime libre, le deuxième au régime forcé.

Définition 2.4.1 (*La réponse libre*)

La réponse libre d'un système est la réponse du système à ses seules conditions initiales. Dans le cas d'un système LTI, elle est donnée par la forme,

$$x(t) = e^{At} x_0.$$

Définition 2.4.2 (*La réponse forcée*)

La réponse forcé d'un système est la réponse du système au seul signal d'entrée et pour des conditions initiales nulles. Dans le cas d'un système LTI, elle est décrite par :

$$x(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau.$$

2.5 Notion sur contrôlabilité

Dans cette section, on va définir quelques concepts de contrôlabilité du système (2.1.1).

Définition 2.5.1 *Le système est dit contrôlable si on peut l'amener, en un temps fini, d'un état initial $x(t_0) = x_0$ vers un état final $x(t_f) = x_f$ désiré au moyen d'un contrôle.*

Autrement dit, pour tout $x_0, x_f \in \mathbb{R}^n$, il existe un contrôle u tel que la trajectoire associée relie x_0 à x_f en temps t , i.e.

$$x_f = x(t, x_0, u).$$

2.5.1 Critère de contrôlabilité de Kalman

Il existe une caractérisation algébrique de la contrôlabilité d'un système linéaire due à Kalman.

Théorème 2.5.1 *Le système linéaire (2.1.1) est contrôlable (ou commandable) si et seulement si la matrice*

$$C = (B, AB, \dots, A^{n-1}B) \quad (2.5.1)$$

est de rang n . On dit alors que la paire (A, B) est commandable.

La matrice C est appelée matrice de Kalman, et la condition $\text{rang}(C) = n$ est appelée condition de Kalman.

Exemple 2.5.1 *Soit le système suivant :*

$$\dot{x} = Ax + Bu.$$

Où

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La matrice de Kalman est :

$$C = [B \ AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Qui est de rang,

$$\text{rg}C = 2$$

Donc le système est contrôlable.

Définition 2.5.2 *Le Grammien de contrôlabilité est la matrice symétrique définie positive noté $W_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$ définie par :*

$$W_c = \int_0^{t_f} e^{-A\tau} B B^T e^{-A^T \tau} d\tau.$$

Le contrôle qui transfère x_0 en $x_1 = x(t, x_0, u(\cdot))$ est simplement donné par :

$$U(t) = -B^T e^{-A^T t} W_c^{-1} x_0. \quad (2.5.2)$$

Proposition 2.5.1 *La paire (A, B) est dit contrôlable si et seulement si*

$$W_c = \int_0^{t_f} e^{-A\tau} B B^T e^{-A^T \tau} d\tau,$$

soit inversible.

Preuve. Supposons que W_c est inversible, alors le contrôle défini par (2.5.2) existe. donc,

$$\begin{aligned}
 x(t) &= e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}B \left(-B^T e^{-A^T\tau}W_c^{-1}x_0 \right) d\tau \\
 &= e^{At}x_0 - \int_0^t e^{At}e^{-A\tau}BB^T e^{-A^T\tau}W_c^{-1}x_0 d\tau \\
 &= e^{At} \left(x_0 - W_c W_c^{-1}x_0 \right) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

donc la paire (A, B) est contrôlable.

Inversement, supposons que le système (2.3.1) est contrôlable, alors nous devons montrer que W_c est inversible.

Si on suppose que W_c n'est pas inversible *i.e.*;

$$\begin{aligned}
 \exists Z &\neq 0 \text{ tq } W_c Z = 0 \\
 &\Rightarrow Z^T W_c Z = 0 \\
 &\Rightarrow Z^T \left(\int_0^{t_f} e^{-A\tau} B B^T e^{-A^T\tau} d\tau \right) Z = 0 \\
 &\Rightarrow \int_0^{t_f} Z^T e^{-A\tau} B B^T e^{-A^T\tau} Z d\tau = 0 \\
 &\Rightarrow \int_0^{t_f} \|Z^T e^{-A\tau} Z\|^2 d\tau = 0 \\
 &\Rightarrow \|Z^T e^{-A\tau} Z\|^2 = 0 \\
 &\Rightarrow Z^T e^{-A\tau} Z = 0 \quad (*)
 \end{aligned}$$

On a la paire (A, B) est contrôlable $\Leftrightarrow \forall x_0 \exists u$ tq $x(t) = 0$

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau) d\tau = 0 \\ \Leftrightarrow e^{At} \left[x_0 + \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau) d\tau \right] &= 0 \\ \Leftrightarrow \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau) d\tau &= -x_0 \\ \Leftrightarrow \int_0^t x_0^T e^{-A\tau}Bu(\tau) d\tau &= -x_0^T x_0 \end{aligned}$$

si on pose : $x_0 = Z$, alors

$$\int_0^t Z^T e^{-A\tau}Bu(\tau) d\tau = -Z^T Z$$

d'après (*),

$$-Z^T Z = 0$$

ceci est vrai si $Z = 0$ (contradiction avec la supposition)

donc, la gramienn W_c est inversible. □

Exemple 2.5.2 On considère le système L.T.I à temps continue décrit par l'équation suivante :

$$\dot{X} = AX + BU.$$

Où

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ B &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On calcule $e^{A(t_f-\tau)}$, on remarque que A est une matrice nilpotente d'indice de nilpotence 2, alors

$$e^{A(t_f-\tau)} = I_2 + A(t_f - \tau) = \begin{pmatrix} 1 & t_f - \tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'où,

$$\begin{aligned} W_c(0, t_f) &= \int_0^{t_f} \begin{pmatrix} 1 & t_f - \tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t_f - \tau & 1 \end{pmatrix} d\tau \\ &= \int_0^{t_f} \begin{pmatrix} t_f - \tau \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_f - \tau & 1 \end{pmatrix} d\tau \\ &= \int_0^{t_f} \begin{pmatrix} (t_f - \tau)^2 & t_f - \tau \\ t_f - \tau & 1 \end{pmatrix} d\tau \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}t_f^3 & \frac{1}{2}t_f^2 \\ \frac{1}{2}t_f^2 & t_f \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc,

$$\det W_c(0, t_f) = \frac{1}{12}t_f^4 \neq 0.$$

D'où, le système est contrôlable.

Système linéaire de Lyapunov en temps continu

Dans ce chapitre, on va étudier le système linéaire de Lyapunov en temps continu. Dans un premier temps nous aurons à réécrire le système de Lyapunov sous forme d'un système LTI pour faciliter l'étude des propriétés de cette classe de système par la suite, nous nous basons pour ce faire sur les références suivantes : [7] , [9] et [10]

définition

Un système décrit par les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + X(t)B + FU(t) \\ Y(t) = CX(t) \end{cases} \quad (3.0.1)$$

est appelé système linéaire de Lyapunov à temps continu, où $X(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est l'état, $U(t) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est le contrôle, $Y(t) \in \mathbb{R}^{p \times n}$ est la sortie, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $F \in \mathbb{R}^{n \times m}$ et $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ sont des matrices de dimensions appropriées.

La technique utilisée pour étudier le système de Lyapunov en temps continu est la vecto-risation moyennant le produit de kronecker. Cette technique nous permettra de réécrire le système sous forme d'un système LTI.

Maintenant, en appliquant l'opérateur vec au système de Lyapunov (3.0.1), nous aurons :

$$\begin{aligned} vec(\dot{X}(t)) &= vec(AX(t)) + vec(X(t)B) + vec(FU(t)) \\ &= (I_n \otimes A) vec(X(t)) + (B^T \otimes I_n) vec(X(t)) + (I_n \otimes F) vec(U(t)). \end{aligned}$$

Après simplification, on obtient :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = \bar{A}\tilde{x}(t) + \bar{B}\tilde{u}(t) \\ \tilde{y}(t) = \bar{C}\tilde{x}(t) \\ \tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0 \end{cases} \quad (3.0.2)$$

Où $\tilde{x}(t) \in \mathbb{R}^{n^2}$, $\tilde{u}(t) \in \mathbb{R}^{mn}$, $\tilde{y}(t) \in \mathbb{R}^{pn}$, $\bar{A} \in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2}$, $\bar{B} \in \mathbb{R}^{n^2 \times nm}$ et $\bar{C} \in \mathbb{R}^{np \times n^2}$ tel que :

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= \text{vec}(X(t)), \quad \tilde{u}(t) = \text{vec}(U(t)), \\ \tilde{y}(t) &= \text{vec}(Y(t)) \\ \dot{\tilde{x}}(t) &= \text{vec}(\dot{X}(t)) \\ \bar{A} &= I_n \otimes A + B^T \otimes I_n, \\ \bar{B} &= I_n \otimes F, \quad \bar{C} = I_n \otimes C. \end{aligned}$$

3.1 Trajectoire d'états et réponse du système de Lyapunov en temps continu

Notre objectif est d'analyser cette classe de système.

Proposition 3.1.1 *On appelle une matrice de transition, l'unique solution du système différentiel*

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \bar{A}\tilde{x}(t) \quad (3.1.1)$$

satisfaisant la condition initiale $\tilde{x}(t_0)$, et qui est donnée par :

$$\Phi(t, t_0) = \Phi_1(t, t_0) \Phi_2(t, t_0).$$

Avec

$$\begin{aligned} \Phi_1(t, t_0) &= \exp((I_n \otimes A)(t - t_0)) \\ \Phi_2(t, t_0) &= \exp((B^T \otimes I_n)(t - t_0)). \end{aligned}$$

Les matrices de transition du système $\dot{\tilde{x}}(t) = (I_n \otimes A)\tilde{x}(t)$ et $\dot{\tilde{x}}(t) = (B^T \otimes I_n)\tilde{x}(t)$ respectivement, et toute solution de (3.1.1) est de la forme $\tilde{x}(t) = \Phi(t, t_0)\tilde{x}(t_0)$ avec $\tilde{x}(t_0)$ est un vecteur constant d'ordre n^2 .

Propriétés de la matrice de transition

La matrice de transition Φ vérifie :

$$* \Phi(t, t) = I.$$

$$* (\Phi(t, t_0))^{-1} = \Phi(t_0, t).$$

$$* \dot{\Phi}(t, t_0) = \bar{A}\Phi(t, t_0).$$

$$* \Phi(t_0, t_1) \Phi(t_1, t) = \Phi(t_0, t) \quad \forall (t_0, t_1, t) \in \mathbb{R}^3.$$

Preuve On considère

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(t, t_0) &= \dot{\Phi}_1(t, t_0) \Phi_2(t, t_0) + \Phi_1(t, t_0) \dot{\Phi}_2(t, t_0) \\ &= (I_n \otimes A) \Phi_1(t, t_0) \Phi_2(t, t_0) + (B^T \otimes I_n) \Phi_1(t, t_0) \Phi_2(t, t_0) \\ &= (I_n \otimes A + B^T \otimes I_n) \Phi_1(t, t_0) \Phi_2(t, t_0) \end{aligned}$$

Par conséquent $\dot{\Phi} = \bar{A}\Phi$, de plus

$$\Phi(t, t) = \Phi_1(t, t) \Phi_2(t, t) = I_{n^2} I_{n^2} = I_{n^2}.$$

Alors Φ est la matrice de transition de (3.1.1), et chaque solution de (3.1.1) est de cette forme.

Théorème 3.1.1 [9] Soit $\Phi(t, t_0)$ la matrice de transition de (3.0.2), alors la solution unique de (3.0.2) satisfaisant la condition initiale $\tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0$ est :

$$\tilde{x}(t) = \Phi(t, t_0) \left[\tilde{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t_0, \tau) (I_n \otimes F) \tilde{u}(\tau) d\tau \right]. \quad (3.1.2)$$

Preuve. Nous passons par deux étapes.

La première étape : la solution de l'équation homogène qui est donnée par,

$$\tilde{x}(t) = \Phi(t, t_0) \tilde{x}(t_0)$$

La deuxième étape : la solution de l'équation complète (non homogène),

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \bar{A}\tilde{x}(t) + \bar{B}\tilde{u}(t) \quad (3.1.3)$$

Par la méthode de la variation de la constante, on a donc $\tilde{x}(t) = \Phi(t, t_0) h(t)$ avec $h(t) = \tilde{x}(t_0)$,

par dérivation, on obtient :

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \dot{\Phi}(t, t_0) h(t) + \Phi(t, t_0) \dot{h}(t)$$

l'équation (3.1.3) devient :

$$(I_n \otimes A + B^T \otimes I_n) \Phi(t, t_0) h(t) + \Phi(t, t_0) \dot{h}(t) = \bar{A} \Phi(t, t_0) h(t) + \bar{B} \tilde{u}(t).$$

Après simplification,

$$\Phi(t, t_0) \dot{h}(t) = \bar{B} \tilde{u}(t).$$

On obtient, alors,

$$\dot{h}(t) = \Phi(t_0, t) \bar{B} \tilde{u}(t)$$

et après intégration, nous obtenons :

$$h(t) = h(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t_0, \tau) \bar{B} \tilde{u}(\tau) d\tau.$$

D'où

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= \Phi(t, t_0) \left(h(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t_0, \tau) \bar{B} \tilde{u}(\tau) d\tau \right) \\ &= \Phi(t, t_0) \left[\tilde{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t_0, \tau) \bar{B} \tilde{u}(\tau) d\tau \right]. \end{aligned}$$

La réponse du système(3.0.2) est donnée par :

$$\tilde{y}(t) = (I_n \otimes C) \Phi(t, t_0) \left[\tilde{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t_0, \tau) (I_n \otimes F) \tilde{u}(\tau) d\tau \right]. \quad (3.1.4)$$

□

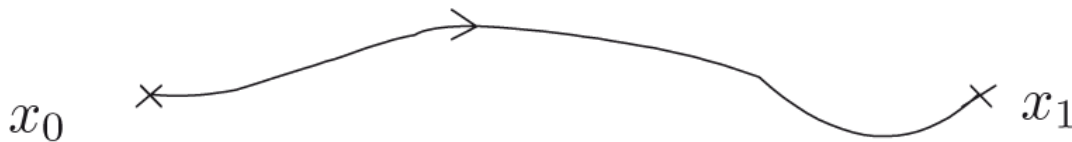
3.2 Analyse et propriétés des systèmes linéaires de Lyapunov

Les définitions et les résultats concernant les notions de contrôlabilité pour les systèmes linéaires en temps continu restent valables dans le cas des systèmes linéaires de Lyapunov.

3.2.1 Contrôlabilité

Etant donné un point x_0 , existe-t-il un contrôle $u : [t_0; T] \rightarrow \mathbb{R}^{mn}$ tel que la trajectoire associée à ce contrôle joigne x_0 à x_1 en un temps fini T ? ,c'est le problème de contrôlabilité.

Définition 3.2.1 *Le système (3.0.2) est dit contrôlable en temps T , pour tous $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, il existe un contrôle u tel que la trajectoire associée relie x_0 à x_1 , i.e; $\exists u(\cdot) : [0; T] \rightarrow \mathbb{R}^{mn}$ tel que $x_1 = x(T, x_0, u(\cdot))$.*



Contrôlabilité

Définition 3.2.2 *Le système (2.1) est dit complètement contrôlable si et seulement si tous les états sont contrôlables.*

Théorème 3.2.1 (Le critère de Kalman) *Le système est contrôlable si et seulement si la matrice φ définie par :*

$$\varphi = \begin{bmatrix} \bar{B} & \bar{A}\bar{B} & \bar{A}^2\bar{B} & \dots & \bar{A}^{n-1}\bar{B} \end{bmatrix} \quad (3.2.1)$$

est de rang plein, i.e. $\text{rg}(\varphi) = n^2$, avec $\bar{A} = I_n \otimes A + B^T \otimes I_n$ et $\bar{B} = I_n \otimes F$.

La matrice φ est appelée la matrice de contrôlabilité, dans ce cas, la paire (\bar{A}, \bar{B}) est dite contrôlable.

Exemple 3.2.1 *On considère le système linéaire de Lyapunov suivant :*

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + X(t)B + FU(t) \\ Y(t) = CX(t). \end{cases} \quad (3.2.2)$$

Avec

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

et $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$

Les matrices du système standard équivalent à des matrices suivantes :

$$\begin{aligned}\bar{A} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ \bar{B} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \\ \bar{C} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

La matrice de Kalman est donnée par :

$$\begin{aligned}\varphi &= [\bar{B} \quad \bar{A}\bar{B} \quad \bar{A}^2\bar{B} \quad \bar{A}^3\bar{B}] \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & -12 & -4 & 0 & 0 & 60 & 18 & 0 & 0 & -288 & -84 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 6 & 1 & 0 & 0 & -24 & -6 & 0 & 0 & 108 & 30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & -10 & -3 & -22 & -7 & 34 & 9 & 142 & 41 & -106 & -27 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 8 & 1 & -2 & 0 & -32 & -7 & 2 & 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Le rang de la matrice φ est :

$$rg(\varphi) = 4$$

D'où, le système est contrôlable.

Par conséquent, le système de Lyapunov (3.2.2) est contrôlable.

Proposition 3.2.1 *Le système (3.0.2) est contrôlable si et seulement si la matrice de commandabilité de dimension $n^2 \times n^2$*

$$W(t_0, t_f) = \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_0, \tau) (I_n \otimes F) (I_n \otimes F)^T \Phi^T(t_0, \tau) d\tau$$

est inversible.

La matrice W est appelée grammien de contrôlabilité. Dans ce cas, le contrôle est

$$\tilde{u}(t) = -(I_n \otimes F)^T \Phi^T(t_0, t) W^{-1}(t_0, t_f) \{\tilde{x}_0 - \Phi(t_0, t_f) \tilde{x}_f\} \quad (3.2.3)$$

définie sur $t_0 \leq t \leq t_f$, et transférant $\tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0$ en $\tilde{x}(t_f) = \tilde{x}_f$.

Preuve Supposons que $W(t_0, t_f)$ est inversible, alors le contrôle défini par (3.2.3) existe.

Maintenant en remplace (3.2.3) dans (3.1.1) avec $t = t_f$, nous avons,

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t_f) &= \Phi(t_f, t_0) \left[\tilde{x}(t_0) - \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_0, \tau) (I_n \otimes F) (I_n \otimes F)^T \Phi^T(t_0, \tau) W^{-1}(t_0, t_f) \{\tilde{x}_0 - \Phi(t_0, t_f) \tilde{x}_f\} d\tau \right] \\ &= \Phi(t_f, t_0) \Phi(t_0, t_f) \tilde{x}_f = \tilde{x}_f. \end{aligned}$$

Donc, (3.0.2) est contrôlable.

Inversement, supposons que le système (3.0.2) est contrôlable, alors nous montrons que $W(t_0, t_f)$ est inversible.

W est symétrique, nous pouvons construire la forme quadratique

$$\begin{aligned} \alpha^T W \alpha &= \int_{t_0}^{t_f} \theta^T(\tau, t_0) \theta(\tau, t_0) d\tau \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \|\theta\|_e^2 d\tau \geq 0 \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

où α est un vecteur constante arbitraire de dimension n^2 et

$$\theta(\tau, t_0) = (I_n \otimes F)^T \Phi^T(t_0, \tau) \alpha.$$

De (3.2.4), $W(t_0, t_f)$ est semi définie positive. Supposons qu'il existe un certain $\beta \neq 0$ tel que $\beta^T W(t_0, t_f) \beta = 0$, puis à partir de l'équation (3.2.4) avec $\theta = \eta$ quand $\alpha = \beta$, ceci implique

$$\int_{t_0}^{t_f} \|\eta\|_e^2 d\tau = 0.$$

D'après les propriétés des normes, nous aurons

$$\eta(\tau, t_0) = 0, \quad t_0 \leq \tau \leq t_f.$$

Comme (3.0.2) est contrôlable, alors il existe un contrôle $\tilde{U}(t)$ rendant $\tilde{x}(t_f) = 0$ si $\tilde{x}(t_0) = \beta$.

D'où, à partir de (3.1.1), nous aurons

$$\beta = - \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_0, \tau) (I_n \otimes F) \tilde{U}(\tau) d\tau.$$

On considère,

$$\begin{aligned}\|\beta\|_e^2 &= \beta^T \beta = - \int_{t_0}^{t_f} \tilde{U}^T(\tau) (I_n \otimes F)^T \Phi^T(t_0, \tau) \beta d\tau \\ &= - \int_{t_0}^{t_f} \tilde{U}^T(\tau) \eta(\tau, t_0) d\tau = 0.\end{aligned}$$

D'où $\beta = 0$, contradiction avec notre supposition, donc $W(t_0, t_f)$ symétrique et définie positive, par conséquent elle est inversible.

CONCLUSION

Dans ce mémoire, nous avons étudié la contrôlabilité des systèmes linéaires de Lyapunov à temps continu standards, on basons sur deux critères importants : critère de Kalman et le Gramien de contrôlabilité et une intention particulière était donnée au une classe des systèmes linéaire de Lyapunov à temps continu.

Tout au long de ce travail, des exemples d'applications on été introduit pour mieux illustré cette étude.

Bibliographie

- [1] D. Arzelier : Représentation et analyse des systèmes linéaires. Notes de cours.5.2.LAAS-CNRS.France.
- [2] D. Bouagada : Théorie de contrôle, cours pour M1 : MCO et L3 : CAS.
- [3] B. Broxson, The Kronecker product, UNF Thesis, 2006
- [4] Frédéric. Gouaisbaut, Résolution des Equations Différentielles Ordinaires. 1.2.LAAS-CNRS, Université de Toulouse, 2009.
- [5] Graham. Alexander, Kronecker products and matrix calculus ; with applications, Ellis Horwood Ltd. England, 1981.
- [6] B. D'Andréa-Novel, M. Cohen de Lara, Cours d'automatique, Commande linéaire des systèmes dynamiques, Les Presses de l'Ecole des Mines, Paris (2000).
- [7] S. Barnett, Introduction to mathematical control theory, Clarenton Press, Oxford, 1975.
- [8] Jean. Paul ING, Contrôlabilité, stabilité, observabilité,le cas des systèmes linéaires.Paris, 2014
- [9] MSN. Murty, B.V.App Rao and G. Suresh Kumar, Contrôlabilité, Observabilité, and realizability of matrix Lyapunov systems, Bull Korean Math soc.43/pp 149-159, 2006.
- [10] T. Kaczorek, Vectors and Matrices in Automation and Electrotechnics, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1998.
- [11] Jean-Michel Coron : Controllability and nonlinearity. In CANUM 2006 Congrès National d'Analyse Numérique, volume 22 de ESAIM Proc., pages 21 39. EDP Sci., Les Ulis, 2008.