



UNIVERSITE ABDELHAMID IBN-BADIS MOSTAGANEM  
FACULTE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

# MEMOIRE

Présenté pour obtenir

LE DIPLOME DE MAGISTER  
SPECIALITE : GENIE MECANIQUE

OPTION : MODELISATION ET SIMULATION MESOSCOPIQUE DES PHENOMENES  
DE TRANSPORT THERMO-FLUIDE

Par  
**BOUAYED Zine-Elabidine**

**Etude de la convection mixte laminaire dans une cavité ventilée par la méthode de Boltzmann sur réseau**

Soutenu le jeudi 23 janvier 2014 à 14h30 devant le jury composé de :

<b>Président :</b>	Mr. ZENASNI Ramdane	Professeur	Université de Mostaganem
<b>Examineurs :</b>	Mr. AZZI Abbas	Professeur	USTO
	Mr. ABSAR Belkacem	Maître de conférences A	Université de Mostaganem
	Mr. OUADHA Ahmed	Maître de conférences A	USTO
<b>Rapporteur :</b>	Mr. HOUAT Samir	Maître de conférences A	Université de Mostaganem





بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

الحمد لله وحده و الصلاة و السلام على من لا نبي بعده

## Remerciements

*Je tiens à remercier en premier lieu Mr. HOUAT Samir Maitre de conférence à l'Université de Mostaganem, qui a amplement contribué à la direction et à la réalisation de ce projet, et qui n'a jamais été avare de son savoir-faire afin d'améliorer et d'embellir ce travail, merci beaucoup, sans vous je n'aurais jamais pu finir ce Mémoire de Magister.*

*Je tiens à exprimer aussi mes remerciements aux membres du jury, qui ont accepté d'évaluer mon travail de Mémoire.*

*Je remercie aussi tous les enseignants qui ont contribué à l'enrichissement de ce Magister*

*Sans oublier de remercier mes collègues du Magister dont j'ai partagé de très bon moments à savoir : Nassim, Noureddine, Brahim et Benameur*

*Finalement, j'adresse un grand merci à tous ceux qui ont participé de près ou de loin à la finalisation de ce Mémoire, votre soutien s'est avéré déterminant à l'aboutissement de ce projet.*

**Merci**



# Dédicaces

*A la pensée de mon grand-père **Hadj Omar** qui a quitté ce bas monde le 17 janvier 2013 et dont j'espère qu'Allah l'acceptera dans son paradis*

*A mes parents, qui me sont chers et qui m'ont prodigué conseils et encouragements le long de ces années*

*A ma femme Djazia que j'aime beaucoup et qui m'a toujours supporté et soutenu par ces conseils judicieux*

*A mon fils Farouk et ma fille Nesrine mes trésors dont je leurs souhaite un avenir prospère*

*A mon frère Chafik, à son épouse Djazila et à leur fils Amir Merouane*

*A mon frère Badro et ma sœur Ilhem dont je souhaite à tous beaucoup de réussite*

*A ma grand-mère Habiba à qui je prie Allah qu'il lui donne beaucoup de patience*

*A mes beaux-parents Nadéra et Brahim pour leurs soutien moral*

*A toutes mes tantes et leurs époux*

*A tous mes oncles et leurs épouses*

*A mon cousin Nassim dont je lui souhaite beaucoup de réussite*

*A mon cousin Kader*

*A tous mes cousins et cousines*

*A tous mes collègues du projet MAO*

**Zino**

ليس العلم ما حفظ، العلم ما نفع

و أبيت سهران الدجى و تبينه  
نوما و تبني بعد ذلك لحاقى

كلما أدبني الدهر آرائى نقص عقلى  
و إذا ما ازددت علما زادنى علما بجهلى

من أقوال الإمام الشافعي رحمه الله

*"Available energy is the main object at stake in the struggle for existence and the evolution of the world."*



**Ludwig Eduard Boltzmann (1844 - 1906)**

“Father” of Statistical Mechanics

---

---

# Etude de la convection mixte laminaire dans une cavité ventilée par la méthode de Boltzmann sur réseau

## Résumé:

Le travail de Magister exposé dans ce mémoire, porte sur l'étude numérique de la convection mixte laminaire dans une cavité ventilée.

La géométrie étudiée est une cavité carrée équipée par deux ouvertures : l'une est située au coin inférieur gauche, pour le soufflage et l'autre située au coin supérieur droit, pour l'évacuation. Le mur du bas est soumis à une température constante et uniforme, tandis que les autres murs sont considérés adiabatiques

Dans ce travail, une étude détaillée sur le transfert de chaleur par convection notamment la convection mixte a été présentée. Une revue bibliographique sur les travaux les plus importants trouvés dans la littérature pour la configuration physique étudiée a été exposée.

Le travail est poursuivi par une présentation de l'historique de développement de la nouvelle méthode de modélisation et simulation utilisée dans cette étude, notamment la méthode de Boltzmann sur réseau thermique à double population, ainsi que les bases théoriques fondamentales de son application.

Un code de calcul a été développé et testé durant ce travail sous l'éditeur MATLAB, en appliquant la méthode de Boltzmann sur réseau thermique avec le modèle D2Q9 pour le champ dynamique et D2Q5 pour le champ thermique.

Les résultats de calcul ont été obtenus pour un régime laminaire et pour un fluide newtonien et incompressible avec un nombre de Prandtl  $Pr = 0,71$ .

Une configuration classique d'une cavité carrée différentiellement chauffée a été choisie et utilisée pour la validation des résultats obtenus par le code de calcul.

Une première confrontation des résultats obtenus par le LBM, avec ceux obtenus par le code fluent (utilisant les volumes finis) et ceux de la littérature est présentée pour le nombre de Richardson  $Ri = 10$ . Ceci nous a permis de constater une bonne concordance des résultats entre les deux méthodes.

Le reste des résultats de l'analyse CFD ont été présentés, en traçant les lignes de courant, les isothermes, les profils de vitesse et de température au milieu de la cavité. Cette analyse est complétée par la quantification du transfert de chaleur en étudiant la variation du nombre de Nusselt en fonction de la variation du nombre de Richardson, du nombre de Reynold et le nombre de Grashof. Ceci nous a permis d'évaluer la performance et la capacité du LBM pour reproduire le phénomène de convection mixte dans une cavité ventilée.

**Mots clefs :** Convection mixte, méthode de Boltzmann sur réseau thermique, cavité carrée ventilée,

---

---

# Study of laminar mixed convection in a ventilated cavity by lattice Boltzmann method

## ABSTRACT :

Magister work exposed focuses on the numerical study of laminar mixed convection in a ventilated cavity.

The geometry studied is a square cavity equipped with two openings: one is located in the lower left corner for the supply and the other located in the upper right corner, for evacuation. The bottom wall is subjected to a constant and uniform temperature, while the other walls are considered adiabatic.

In this work, a detailed study on heat transfer by convection including mixed convection was presented. A literature review of the most important works found in the literature for the studied physical configuration has been exposed. The work continued with a presentation of the historical development of the new method of modeling and simulation used in this study, including the thermal lattice Boltzmann method with double population, as fundamental theoretical basis for its application.

A computer code was developed and tested in this work with the MATLAB editor, using the thermal lattice Boltzmann method with the D2Q9 model for the dynamic field and D2Q5 for the thermal field.

The calculation results were obtained for laminar flow and a Newtonian incompressible fluid with a Prandtl number  $Pr = 0,71$ .

A typical configuration of a differentially heated square cavity was selected and used to validate the results obtained by the computer code.

A first comparison of the results obtained by the LBM with those obtained by the fluent code (using the finite volume) and those in the literature is presented to the Richardson number  $Ri = 10$ . This allowed us to find a good agreement between the two methods.

The rest of the analysis results of the CFD were presented by plotting the streamlines, the isotherms, velocity profiles and temperature in the middle of the cavity. This analysis is complemented by the quantification of heat transfer by studying the variation of the Nusselt number as a function of the variation of the Richardson number, the Reynolds number and Grashof number. This allowed us to assess the performance and capacity of the LBM to reproduce the phenomenon of mixed convection in a ventilated cavity.

**Keywords:** Mixed convection, thermal lattice Boltzmann method, square ventilated cavity,

---

## دراسة الحمل الحراري المختلط داخل تجويف للتهوية باستعمال طريقة بولتزمان في الشبكة

ملخص :

عمل هذه الماجستير هو دراسة رقمية للحمل الحراري المختلط الصفحي في تجويف للتهوية. الهندسة المدروسة هي حمل حراري مختلط متكوّن من فتحتين : الأولى موجودة في الطرف السفلي من جهة اليسار لدخول التيار الهوائي و الثانية موجودة في الطرف العلوي من جهة اليمين كي يسمح لخروج هذا الهواء , علما أنّ الجدار السفلي معرّض لدرجة حرارة ثابتة على طوله مع أخذ الاعتبار أنّ الجدران الأخرى تعتبر ثابتة الحرارة.

هذ العمل يتضمّن دراسة وثنائية مفصّلة عن التحويل الحراري المختلط و سرد وثنائي لأهم الأعمال الموجودة في المخطوطات لهذه الهندسة المدروسة.

العمل يتضمّن أيضا سرد تاريخ تطور الطريقة الرقمية الجديدة المستخدمة في هذه الدراسة , بالأخص طريقة بولتزمان في الشبكة الحرارية المزدوجة السّكان , أيضا الأسس النظرية الأساسية لتطبيقاتها.

علما أنّ برنامج حاسوبي قد طوّر أثناء هذا العمل باستعمال برنامج ماطلاب , مع استخدام طريقة بولتزمان في الشبكة الحرارية مع D2Q9 (حقل حركي) و D2Q5 (حقل حراري).

نتائج الحسابات تمّ الحصول عليها لتطبيق صفحي و سائل نيوتوني غير قابل للتقلّص باستعمال عدد بروننت = 0.71.

لقد اختير نموذج كلاسيكي لتجويف التهوية مربع و مسخّن جزئيا , و استعمل في استخلاص النتائج باستعمال البرنامج الحاسوبي السابق ذكره.

و لقد قورنت النتائج المحصّل عليها باستعمال طريقة بولتزمان في الشبكة الحرارية مع الطريقة التقليدية للأحجام المحدودة و مع الوثائق من أجل عدد ريتشادسون = 10 . و هذا ما سمح لنا برؤية تقارب نسبي لنتائج الطريقتين.

باقي نتائج التحليل تم إدراجها برسم خطوط تيار السرعة , الخطوط الحرارية , ملامح السرعة و الحرارة في وسط التجويف بالنسبة لتغييرات عدد ريتشادسون , عدد رينولتدس و عدد غراتشوف . هذا التحليل كمل بكميّة التحويل الحراري مع دراسة لتغييرات عدد ريتشادسون , عدد رينولتدس و عدد غراتشوف . هذا ما سهّل لنا تقدير قدرة و فعالية طريقة بولتزمان في الشبكة الحرارية من أجل معاودة إنشاء الحمل الحراري المختلط الصفحي في تجويف للتهوية.

**كلمات البحث:** الحمل الحراري المختلط , طريقة بولتزمان في الشبكة الحرارية , تجويف مربع للتهوية.

# Table des matières

**Nomenclature.....**

**Liste des figures et tableaux.....**

## **Chapitre I : INTRODUCTION**

1. Introduction.....	1
2. Objectif du mémoire.....	2
3. Organisation du mémoire.....	3

## **Chapitre II : ETAT DE L'ART DE TRANSFERT DE CHALEUR PAR CONVECTION MIXTE**

1. Introduction.....	5
2. Formulation générale des équations de la convection.....	7
3. Approximation de Boussinesq.....	8
4. Convection mixte.....	10
4.1. Rappel fondamental de la convection mixte.....	10
4.2. Domaine d'application de la convection mixte.....	12
5. Revue bibliographique sur les écoulements en cavité ventilé.....	12
6. Formulation mathématique du modèle étudié.....	20
6.1. Spécification du modèle utilisé.....	20
6.2. Hypothèses de calcul.....	21
6.3. Equation de bilan.....	21
6.4. Forme adimensionnelle des équations.....	22
6.4.1. Variables adimensionnelles.....	22
6.4.2. Equations adimensionnelles.....	23

---

6.4.2.1.	Equation de continuité.....	23
6.4.2.2.	Equation de quantité de mouvement suivant l'axe x.....	23
6.4.2.3.	Equation de quantité de mouvement suivant l'axe y.....	23
6.4.2.4.	Equation d'énergie.....	23
6.4.3.	Nombres adimensionnels.....	23
6.5.	Conditions aux limites thermiques et hydrodynamiques.....	26
7.	Conclusion.....	26

### Chapitre III : METHODE DE BOLTZMANN SUR RESEAU

1.	Introduction.....	28
2.	Historique de la méthode de Boltzmann sur réseau.....	28
3.	Modèle mathématique.....	33
3.1.	Equation de Boltzmann.....	33
3.2.	Approximation Bhatnagar, Gross et Krook (BGK).....	33
3.3.	Fonction de distribution d'équilibre de Maxwell-Boltzmann.....	34
3.4.	Discrétisation de l'équation de Boltzmann.....	34
3.5.	Réseau d'arrangement.....	37
3.5.1.	Réseau $D_2Q_9$ .....	38
3.5.1.1.	Paramètres du réseau $D_2Q_9$ .....	38
3.5.1.2.	Conditions aux limites.....	40
3.5.1.2.1.	Condition de Bounce-Back.....	40
3.5.1.2.2.	Conditions aux limites avec une vitesse connue.....	41
3.5.1.2.3.	Ouest.....	42
3.5.1.2.4.	Est.....	43
3.5.2.	Réseau $D_2Q_5$ .....	43
3.5.2.1.	Paramètres du réseau $D_2Q_5$ .....	43
3.5.2.2.	Conditions aux limites.....	45
3.5.2.2.1.	Conditions aux limites à l'entrée.....	45
3.5.2.2.2.	Condition de Dirichlet « température constante » à la paroi inférieure.....	45
3.5.2.2.3.	Condition adiabatique aux parois haute, gauche et droite.....	46
3.5.2.2.4.	Conditions aux limites à la sortie.....	46
4.	Mise en œuvre informatique.....	46

5. Conclusion..... 48

**Chapitre IV : RESULTATS & DISCUSSIONS**

1. Introduction..... 50

2. Spécification du modèle utilisé..... 50

3. Hypothèse de calcul..... 51

4. Validation du code de calcul..... 52

4.1. Première validation..... 52

4.2. Deuxième validation..... 58

4.2.1. Méthode des volumes finis..... 58

4.2.2. Méthode de Boltzmann sur réseau..... 60

4.2.3. Validation des résultats de la cavité ventilée..... 61

5. Résultats et interprétations..... 65

5.1. Effets du nombre de Richardson..... 65

5.2. Effets du nombre de Grashof..... 74

5.3. Effets du nombre de Reynolds..... 75

**Conclusion générale et perspective**

1. Conclusion générale..... 77

2. Perspective..... 79

**Références bibliographiques..... 81**

---

# Nomenclature

# Nomenclature

<b>Symbole latin</b>	<b>Définition</b>
$c$	Vitesse [m/s]
$C_p$	Capacité thermique massique [J/Kg.°K]
$L_1$	Hauteur de l'ouverture d'entrée [m]
$L_2$	Hauteur de l'ouverture de sortie [m]
$e_i$	Vitesse de particule [m/s]
$f(r,c,t)$	Fonction de distribution
$f_i$	Fonction de distribution de la densité
$f_i^{eq}$	Fonction de distribution à l'état d'équilibre
$F$	Force extérieure [N]
$g$	Gravitation [m/s <sup>2</sup> ]
$g_i$	Fonction de distribution d'énergie
$H$	Hauteur de la cavité carrée [m]
$h$	Coefficient de transfert thermique [W/m <sup>2</sup> .°K]
$p$	Pression [bars]
$P$	Pression adimensionnelle
$r$	Position [m]
$t$	temps [s]
$T$	Température du fluide [°C]
$T_0$	Température de l'air à l'entrée [°C]
$T_c$	Température chaude de l'air sur la paroi isotherme [°C]
$U$	Vitesse adimensionnelle suivant x
$u_0$	Vitesse d'entrée [m/s]
$V$	Vitesse adimensionnelle suivant y

---

**Symbole Grec**

$\rho$	Masse volume [Kg/m <sup>3</sup> ]
$\rho_e$	Masse volume à T <sub>e</sub> [Kg/m <sup>3</sup> ]
$\beta$	Coefficient d'expansion thermique a pression constante [K <sup>-1</sup> ]
$\theta$	Température adimensionnelle
$\nu$	Viscosité cinématique [m <sup>2</sup> /s]
$\mu$	Viscosité dynamique [Kg/m.s]
$\alpha$	Diffusivité thermique [m <sup>2</sup> /s]
$\lambda$	Conductivité thermique [W/m.°K]
$\Delta x, \Delta y$	Dimensions du volume de contrôle considéré [m]
$\Omega(f)$	Opérateur de collision
$\omega_i$	Fréquence de collision [Hz]
$\tau$	facteur de relaxation
$\delta t$	Variation de temps [s]
$w_i$	Constantes du réseau, facteurs de poids
$c_s$	Vitesse de son [m/s]
$c_i$	Vitesse de propagation [m/s]

**Nombres sans dimension****Définition**

Re	Nombre de Reynolds	$Re = \frac{u_e \cdot H}{\nu}$
Ri	Nombre de Richardson	$Ri = \frac{Gr}{Re^2}$
Gr	Nombre de Grashof	$Gr = \frac{\beta \cdot (T_c - T_e) \cdot g \cdot H^3}{\nu^2}$
Ra	Nombre de Rayleigh	$Ra = Gr * Pr$
Nu	Nombre de Nusselt	$Nu = \frac{h \cdot H}{\lambda}$
Pr	Nombre de Prandtl	$Pr = \frac{\rho \cdot \nu \cdot C_p}{\lambda}$

Ma Nombre de Mach

## **Indice**

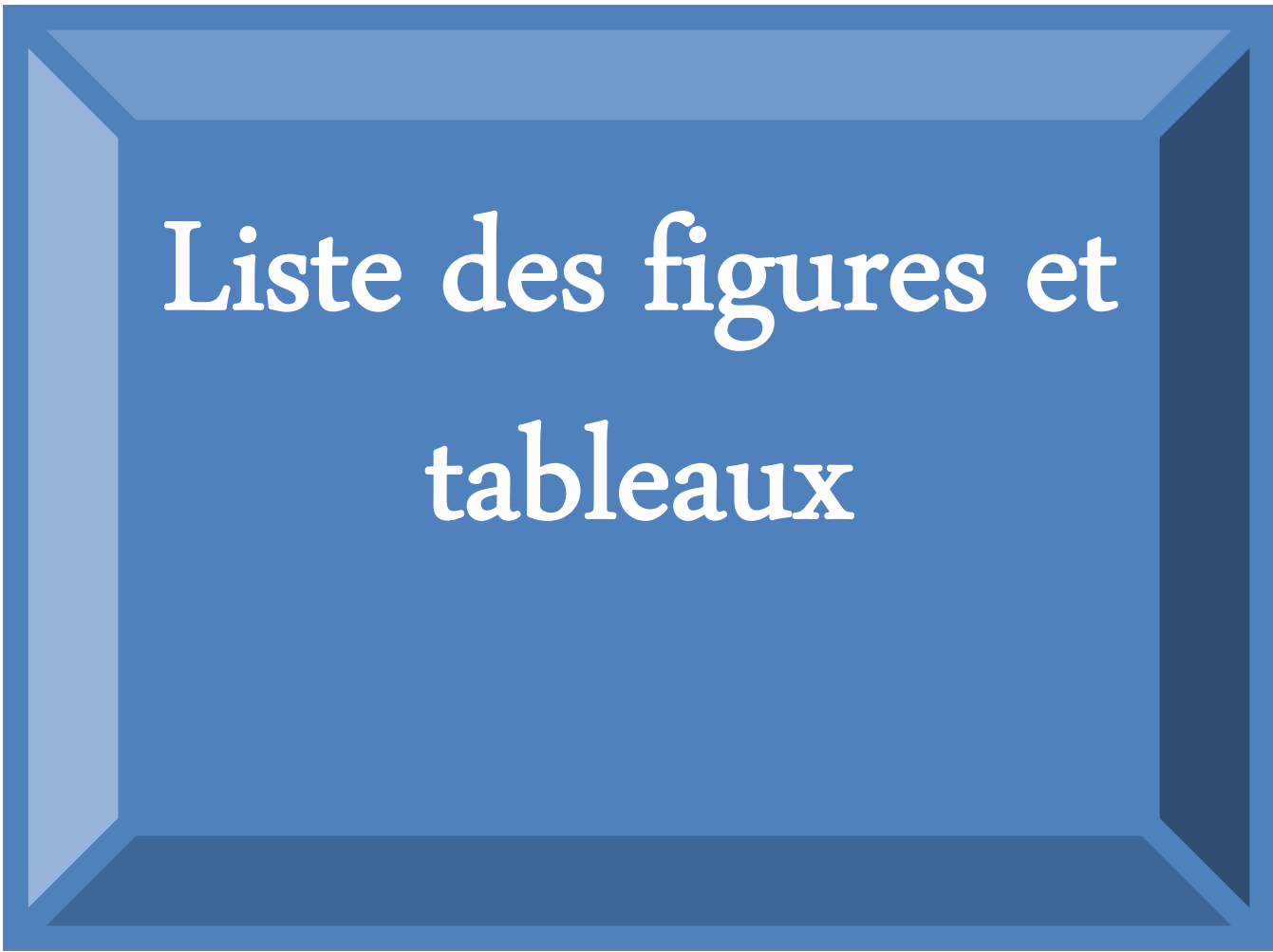
n	dimension du problème (1 pour 1D, 2 pour 2D et 3 pour 3D)
m	modèle de vitesse
o	ouest
e	Est

## **Définition**

## **Glossaire**

BGK	Bhatnagar-Gross-Krook
LBM	Lattice Boltzmann Method
TLBM	Thermical Lattice Boltzmann Method
CFD	Computational Fluid Dynamics

## **Définition**

A blue 3D rectangular box with a white text label inside. The box has a slight perspective, with the top and bottom edges appearing slightly recessed. The text is centered within the box.

Liste des figures et  
tableaux

# Liste des Figures & Tableaux

## 1. Liste des figures :

N°	Définition
<b>Fig. 2.1</b>	Visualisation expérimentale des cellules de Bénard par Koschmieder et al.
<b>Fig. 2.2</b>	Obstacle porté à la température $T_0$ dans un écoulement $T_\infty$ .
<b>Fig. 3.1</b>	Chronologie récapitulative des moments historiques importants dans l'avènement de la méthode Boltzmann sur Réseau. Les cadres en pointillés indiquent les premiers modèles à vitesses discrètes sans discrétisation spatiale et temporelle
<b>Fig. 3.2</b>	Réseau $D_2Q_9$
<b>Fig. 3.3</b>	Distribution des vitesses sur un réseau $D_2Q_9$
<b>Fig. 3.4</b>	Schéma simple de Bounce-back
<b>Fig. 3.5</b>	Fonctions de distribution aux limites du domaine
<b>Fig. 3.6</b>	Réseau $D_2Q_5$
<b>Fig. 3.7</b>	Organigramme de calcul de TLBM
<b>Fig. 4.1</b>	Géométrie et configuration du problème physique
<b>Fig. 4.2</b>	Configuration géométrique du domaine de validation
<b>Fig. 4.3</b>	Comparaison des lignes de courant, $L = H$ , (a) $Ra = 10^3$ , (b) $Ra = 10^4$
<b>Fig. 4.4.</b>	Comparaison des isothermes, $L = H$ , (a) $Ra = 10^3$ , (b) $Ra = 10^4$
<b>Fig. 4.5</b>	Profils de Température $\theta$ à mi-hauteur de l'enceinte, $L = H$ , $Y = 0.5$ , (a) $Ra = 10^3$ , (b) $Ra = 10^4$
<b>Fig. 4.6</b>	Profils de Vitesse adimensionnelle $V$ à mi-hauteur de l'enceinte, $L = H$ , $Y = 0.5$ , (a) $Ra = 10^3$ , (b) $Ra = 10^4$
<b>Fig. 4.7</b>	Profil de température $\theta$ à $y = 0.5$ pour $Ri = 10$ pour différents maillages
<b>Fig. 4.8</b>	Profil de vitesse à $y = 0.5$ pour $Ri = 10$ pour différents maillages

- Fig. 4.9** Comparaison du profil de vitesse à  $y = 0.5$  pour  $Ri = 10$  entre la méthode des volumes finis et Boltzmann sur réseau
- Fig. 4.10** Comparaison du profil de vitesse à  $x = 0.5$  pour  $Ri = 10$  entre la méthode des volumes finis et Boltzmann sur réseau
- Fig. 4.11** Comparaison du profil de température à  $x = 0.5$  pour  $Ri = 10$  entre la méthode des volumes finis et Boltzmann sur réseau
- Fig. 4.12** Comparaison du profil de température à  $y = 0.5$  pour  $Ri = 10$  entre la méthode des volumes finis et Boltzmann sur réseau
- Fig. 4.13** Isothermes pour différentes valeurs de  $Ri = 3, 5, 10, 15, 20, 30, 50$  et  $100$  ( $G_r = 10^5$  et  $Pr = 0,71$ )
- Fig. 4.14** Lignes de courant pour différentes valeurs de  $Ri = 3, 5, 10, 15, 20, 30, 50$  et  $100$  ( $G_r = 10^5$  et  $Pr = 0,71$ )
- Fig. 4.15** Profil de température  $\theta$  à  $x=0.5$  pour différentes valeurs du nombre de Richardson  $Ri = 3, 5, 10, 15, 20, 30, 50$  et  $100$  ( $G_r = 10^5$  et  $Pr = 0,71$ )
- Fig. 4.16** Profil de température  $\theta$  à  $y=0.5$  pour différentes valeurs du nombre de Richardson  $Ri = 3, 5, 10, 15, 20, 30, 50$  et  $100$  ( $G_r = 10^5$  et  $Pr = 0,71$ )
- Fig. 4.17** Profil de vitesse à  $x = 0.5$  pour différentes valeurs du nombre de Richardson  $Ri = 3, 5, 10, 15, 20, 30, 50$  et  $100$  ( $G_r = 10^5$  et  $Pr = 0,71$ )
- Fig. 4.18** Profil de vitesse à  $y = 0.5$  pour différentes valeurs du nombre de Richardson  $Ri = 3, 5, 10, 15, 20, 30, 50$  et  $100$  ( $G_r = 10^5$  et  $Pr = 0,71$ )
- Fig. 4.19** Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Grashof pour différentes valeurs du nombre de Reynolds variant de  $Re = 1, 5, 10, 20, 30, 40$  et  $50$
- Fig. 4.20** Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Reynolds pour différentes valeurs du nombre de Grashof variant de  $Gr = 10^4, 5*10^4$  et  $10^5$
-

## 2. Liste des tableaux :

N°	Définition
----	------------

**Tableau 4.1** Présentation des résultats du nombre de Nusselt moyen pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh avec leur comparaison avec les résultats de la littérature

**Tableau 4.2** Valeurs de  $Nu_{\text{moy}}$  et  $\theta_{\text{max}}$ ,  $U_{\text{max}}$ ,  $U_{\text{min}}$  en fonction du maillage allant pour  $Ri=10$

**Tableau 4.3** Comparaison des valeurs de  $Nu$  pour  $Ri = 10$  entre la méthode des volumes finis et Boltzmann sur réseau

**Tableau 4.4** Comparaison des valeurs de  $U_{\text{max}}$  pour  $Ri = 10$  entre la méthode des volumes finis et Boltzmann sur réseau

**Tableau 4.5** Comparaison des valeurs de  $\theta_{\text{max}}$  pour  $Ri = 10$  entre la méthode des volumes finis et Boltzmann sur réseau

**Tableau 4.6** Valeurs de  $\theta_{\text{max}}$  à  $x = 0.5$  et  $y = 0.5$  pour  $Ri = 3, 5, 10, 15, 20, 30, 50$  et  $100$  par la méthode de Boltzmann sur réseau

**Tableau 4.7** Valeurs de  $U_{\text{max}}$  à  $x = 0.5$  et  $y = 0.5$  pour  $Ri = 3, 5, 10, 15, 20, 30, 50$  et  $100$  par la méthode de Boltzmann sur réseau

---

# Chapitre I

# **Chapitre I**

## Introduction

- 1. Introduction**
- 2. Objectif du mémoire**
- 3. Organisation du mémoire**

# INTRODUCTION

## 1. Introduction :

Le transfert de chaleur par convection mixte est par définition le couplage de deux modes de convection : naturelle et forcée. Ce mode de transfert de chaleur a suscité l'intérêt considérable de plusieurs travaux de recherche, en vue d'applications technologiques telles que : La ventilation des bâtiments, le dépôt chimique des couches minces, le refroidissement des pièces électroniques, les dissipateurs de chaleur dans les collecteurs solaires et réacteurs nucléaires.

Mais, les écoulements de convection mixte sont souvent rencontrés dans les écoulements laminaires ou des écoulements de fluide non-newtonien à cause de leurs fortes viscosités. Plusieurs configurations géométriques simples et complexes ont été examinées par rapport à une approche théorique, numérique et expérimentale.

Nous nous intéressons dans ce travail à étudier numériquement le transfert de chaleur en convection mixte dans une cavité ventilée, munie de deux ouvertures pour l'entrée et la sortie d'un fluide newtonien, dont la paroi basse est considérée isotherme. Nous contribuerons dans ce travail par l'utilisation de la nouvelle approche numérique notamment la méthode de Boltzmann sur réseau avec le modèle thermique.

La méthode de Boltzmann sur réseau (LBM : *Lattice Boltzmann Method*) est une nouvelle méthode numérique qui a vu le jour au début des années 90. Elle est initialement issue de la méthode de gaz sur Réseau [1], de la théorie des automates cellulaires [2] et en se basant sur le formalisme de la physique statistique [3].

Ainsi, contrairement aux approches classiques basées sur la discrétisation des équations de Navier-Stokes, la méthode de Boltzmann sur Réseau permet la résolution numérique de l'équation de Boltzmann avec l'approche hydrodynamique. Elle s'intéresse, non plus aux quantités macroscopiques (vitesse, pression, densité), mais directement à la répartition des différentes particules constituant un fluide. On parle alors de représentation mésoscopique. Ce qui la rend concurrentiel avec les autres

méthodes conventionnelles telles que les volumes finis, éléments finis et différences finis.

L'intérêt de la LBM réside avant tout dans la simplicité et la localité de son algorithme rendant ainsi sa parallélisation aisée et efficace. Très vite, la LBM est utilisée pour les calculs CFD instationnaires et incompressibles [4]. Par conséquent, cette méthode permet de simuler le comportement d'un fluide régi par les équations de Navier-Stokes instationnaires faiblement compressibles. Dès lors, tant que le nombre de Mach de l'écoulement reste suffisamment faible, la LBM peut être utilisée pour l'étude des écoulements instationnaires et incompressibles. Il est donc légitime de vouloir utiliser ce type de méthode pour les simulations en convection mixte de la même façon que les approches directes basées sur Navier-Stokes.

## **2. Objectif du mémoire :**

Le LBM étant une méthode numérique relativement récente et originale. Il est important de pouvoir situer ses performances par rapport à celles des méthodes numériques classiques utilisées pour simuler et reproduire les écoulements avec échange de chaleur dans les enceintes ventilées. De ce fait, l'étude présentée dans ce travail a pour but l'analyse du phénomène de transfert de chaleur avec un écoulement de convection mixte en régime laminaire, dans une cavité carré munie de deux ouvertures. Les parois intérieures de cette dernière sont supposées adiabatiques sauf pour celle située sur le côté bas, elle est considérée isotherme. Le modèle thermique de la méthode de Boltzmann sur réseau à double population en deux dimensions est appliqué. Le réseau à neuf vitesses (D2Q9) est utilisé pour reproduire le champ dynamique et celui simplifié à cinq vitesses (D2Q5) est utilisé pour le champ de température.

Ainsi, une analyse thermique et une comparaison rigoureuse devra être menée entre les approches classiques et la LBM. Cela nous permettra de déterminer les performances de cette nouvelle méthode numérique dans ce domaine.

### **3. Organisation du mémoire :**

Ce mémoire de Magistère s'organise comme suit :

Après ce premier chapitre où nous exposons une introduction générale sur le travail de ce mémoire et les objectifs tracés ainsi que son organisation ; le deuxième chapitre présente la formulation générale des équations de la convection suivi d'un rappel fondamental de la convection mixte et une revue bibliographique sur les écoulements en cavité ventilée. La formulation mathématique du modèle étudié est traitée pour le cas de la configuration géométrique étudié.

Une présentation de la nouvelle méthode utilisée dans ce travail notamment la méthode de Boltzmann sur réseau est exposée dans le troisième chapitre. Nous présentons l'évolution historique de son élaboration ainsi que les bases théorique et la formulation mathématique de la méthode. Un algorithme de calcul basé sur le LBM Thermique à double population est présenté.

Le Quatrième chapitre est consacré aux résultats des simulations numériques.

Deux validations de code de calcul sont présentées : la première est effectuée pour une configuration physique intensivement étudié et utilisée pour vérifier l'exactitude des codes numériques notamment la convection naturelle dans une cavité carrée différentiellement chauffée. La deuxième validation est pour le cas de la cavité carrée ventilée avec le nombre de Richardson  $Ri=10$ . Le calcul est effectué par les deux méthodes : Le LBM thermique et Les volumes finis et ce pour les deux validations. Les résultats obtenus sont comparé à ceux de la littérature.

Enfin les résultats des simulations numériques en utilisant la méthode de Boltzmann sur réseau incluant l'influence du nombre de Richardson, de Grashof et de Reynolds seront traités.

Nous terminerons notre travail par une conclusion générale accompagnée par des perspectives pour des développements futurs.

# Chapitre II

# **Chapitre II**

## Etat de l'art de transfert de chaleur par convection mixte

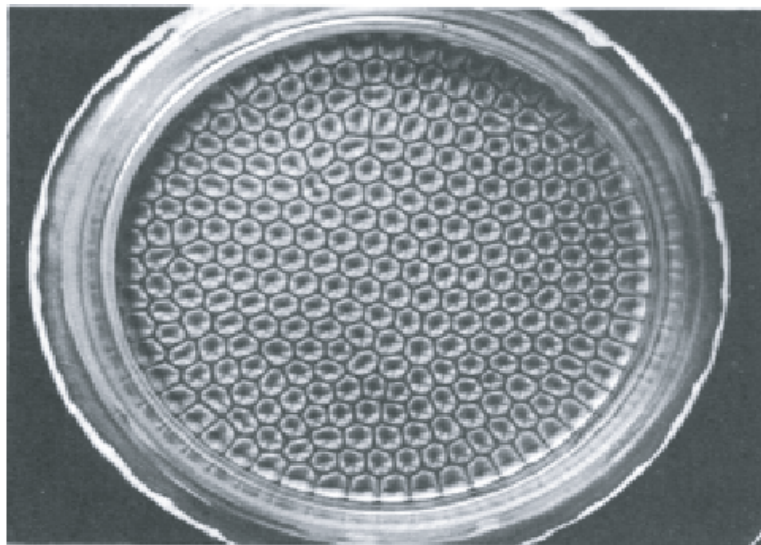
- 1. Introduction**
- 2. Formulation générale des équations de la convection**
- 3. Approximation de Boussinesq**
- 4. La convection mixte**
  - 4.1. Rappel fondamental de la convection mixte
  - 4.2. Domaine d'application de la convection mixte
- 5. Revue bibliographique sur les écoulements en cavité ventilée**
- 6. Formulation mathématique du modèle étudié**
  - 6.1. Spécification du modèle utilisé
  - 6.2. Hypothèses de calcul
  - 6.3. Equation de bilan
  - 6.4. Forme adimensionnelle des équations
    - 6.4.1. Variables adimensionnelles
    - 6.4.2. Equations adimensionnelles
    - 6.4.3. Les nombres adimensionnels
  - 6.5. Conditions aux limites thermiques et hydrodynamiques
- 7. Conclusion**

# Chapitre II

## ETAT DE L'ART DE TRANSFERT DE CHALEUR PAR CONVECTION MIXTE

### 1. Introduction :

La convection est un mode de transport d'énergie par l'action combinée de la conduction, de l'accumulation de l'énergie et du mouvement du milieu. Elle est considérée comme le mécanisme le plus important de transport d'énergie entre une surface solide et un liquide ou un gaz. Le transport d'énergie par convection d'une surface dont la température est supérieure à celle du fluide qui l'entoure s'effectue en plusieurs étapes. D'abord la chaleur s'écoule par conduction de la surface aux molécules du fluide adjacentes. L'énergie ainsi transmise sert à augmenter la température et l'énergie interne de ces molécules du fluide. Ensuite les molécules vont se mélanger avec d'autres molécules situées dans une région à basse température et transférer une partie de leur énergie. Dans ce cas l'écoulement transporte, simultanément, le fluide et l'énergie. L'énergie est, à présent, emmagasinée dans les molécules du fluide et elle est transportée sous l'effet de leur mouvement.



**Fig. 2.1** : Visualisation expérimentale des cellules de Bénard par Koschmieder et al. [5]

La première étude systématique des schémas de convection est due à Henri Bénard publié dans deux journaux en 1900 [6] et en 1901 [7]. Son dispositif expérimental était composé d'une couche d'huile de baleine mince (1 mm d'épaisseur) chauffée par le bas par la vapeur alors que la surface supérieure libre a été refroidie par l'atmosphère. Malgré le manque de précision, il a observé un schéma régulier stable de cellules hexagonales utilisant de l'aluminium et de la poudre de graphite (voir Fig. 2.1). Il a également observé une dépression locale dans le centre de chaque cellule. Cet effet a été modélisé 50 ans plus tard par Pearson [8] et reproduit expérimentalement par Block [9].

La première étude théorique de la convection a été réalisée par Lord Rayleigh (John William Strutt, 3ème baron Rayleigh) en 1916. Il a tenté d'expliquer l'expérience de Bénard par la théorie linéaire [10]. Bien que son travail ait été inspiré par l'expérience de Bénard avec une flottabilité comme seuls effets, il ne correspondait pas à ses expériences, mais à la densité de convection entraînée. En utilisant l'Approximation de Boussinesq [11] (toutes les propriétés du fluide à l'exception de la densité sont supposées être des termes de température non linéaires et indépendants) et en négligeant l'équation du mouvement et de l'énergie, il a posé la base de ce que nous appelons aujourd'hui l'(RB) convection de Rayleigh-Bénard. Les valeurs critiques qui caractérisent l'apparition de ce phénomène ont finalement été calculées par Jeffreys ([12] et [13]). Une analyse linéaire complète peut être trouvée dans le deuxième chapitre du livre par Chandrasekhar [14].

Il existe trois modes de transfert de chaleur par convection : convection naturelle, convection forcée et convection mixte :

- **Convection naturelle** : elle se déclenche et se poursuit spontanément à cause de différences de températures sur les frontières et d'un champ de forces extérieures (le champ gravitationnel) qui à leurs tour engendrent des différences de densité au sein du fluide.
- **Convection forcée** : est obtenue en soumettant un fluide à une augmentation de pression par des moyens mécaniques externes comme les ventilateurs ou les pompes. Le transfert est plus rapide que dans le cas de convection naturelle.

- **Convection mixte** : correspond au couplage des deux phénomènes précédents (convection naturelle et forcée) quand les vitesses d'écoulement, fictives, dues aux deux types de convections sont considérées séparément, du même ordre de grandeur.

La convection mixte peut être aidée (favorable) lorsque les effets de la convection naturelle et de la convection forcée sont dans la même direction. Elle est dite défavorable quand ces derniers effets sont de sens opposés.

En général, les problèmes de la convection thermique s'intéressent à la détermination du taux de transfert thermique et/ou la température de surface. Ces facteurs importants d'ingénierie sont établis une fois la distribution de température dans le fluide en mouvement est déterminée. Le point focal dans le transfert thermique par convection est la détermination de la distribution de la température dans un fluide mobile.

## 2. Formulation générale des équations de la convection :

L'analyse de la convection thermique se fonde sur l'application des trois lois fondamentales de la physique générale : conservation de la masse, de la quantité de mouvement, et de l'énergie. L'objectif visé étant la détermination de la distribution de la température, de la pression et des vitesses dans le système considéré.

Dans le but d'établir la formulation du phénomène de la convection nous considérons les équations classiques de Navier-Stokes écrites sous forme vectorielle:

- **Equation de conservation de la masse :**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{V} = 0 \quad (2.1)$$

- **Equation de conservation de la quantité de mouvement :**

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (2.2)$$

- **Equation de l'énergie :**

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \nabla \cdot k \nabla T + \beta T \frac{DP}{Dt} + \mu \Phi \quad (2.3)$$

En deux dimensions, L'opérateur  $\nabla$  est un vecteur est défini comme suit :

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j \quad (2.4)$$

Et :

$$\frac{D}{Dt} = u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial t} \quad (2.5)$$

$\Phi$  est la fonction de la dissipation définie en deux dimensions comme suit :

$$\Phi = 2 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \quad (2.6)$$

### 3. Approximation de Boussinesq :

Dans le cas de la convection naturelle, le mouvement de fluide est produit par le changement de la densité. Donc la supposition de la densité constante ne peut pas être faite dans l'analyse des problèmes de la convection naturelle. Au lieu de cela une simplification alternative appelée "approximation de Boussinesq" est faite. L'approche de base dans cette approximation est de considérer la densité comme constante dans l'équation de continuité et le terme d'inertie de l'équation de quantité de mouvement, mais elle change avec la température dans le terme de pesanteur. Dans ce cas l'équation (2.1) devient :

$$\rho_\infty \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (2.7)$$

Où  $\rho_\infty$  est la densité de fluide à un certain état de référence où la température est uniforme et le fluide est stationnaire ou en mouvement avec une vitesse uniforme. Donc à l'état de référence nous avons :

$$\frac{D\vec{V}_\infty}{Dt} = \nabla^2 \vec{V}_\infty = 0 \quad (2.8)$$

L'application de (2.7) à l'état de référence  $\infty$  et l'utilisation de (2.8) donnent :

$$\rho_\infty \vec{g} - \nabla p_\infty = 0 \quad (2.9)$$

La soustraction de (2.9) de (2.7) donne :

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = (\rho - \rho_\infty) \vec{g} - \nabla(p - p_\infty) + \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (2.10)$$

Le terme  $(\rho - \rho_\infty)$  peut s'exprimer en terme de différence de température. Cela est accompli à travers l'introduction du coefficient d'expansion  $\beta$  défini comme suit :

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad (2.11)$$

La variation de la pression dans la convection naturelle est habituellement petite, en outre l'effet de la pression sur  $\beta$  est aussi petit. En d'autres termes, dans la convection naturelle  $\beta$  peut être considéré comme indépendant de  $p$ . Ce qui donne :

$$\beta \approx -\frac{1}{\rho_\infty} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right) \quad (2.12)$$

Par ailleurs, Nous constatons que pour un petit changement de température le changement de la densité est approximativement linéaire. Ce qui permet d'écrire :

$$\beta \approx -\frac{1}{\rho_\infty} \left( \frac{\rho - \rho_\infty}{T - T_\infty} \right) \quad (2.13)$$

Et par conséquent :

$$\rho - \rho_\infty = -\beta \rho_\infty (T - T_\infty) \quad (2.14)$$

Cette équation relie la variation de la densité en fonction de la variation de la température. On la substituant dans l'équation de la quantité de mouvement d'un fluide en mouvement du à la convection naturelle à partir de l'approximation Boussinesq. Nous obtenons :

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = -\beta \vec{g}(T - T_{\infty}) - \frac{1}{\rho_{\infty}} \nabla(p - p_{\infty}) + \nu \nabla^2 \vec{V} \quad (2.15)$$

#### 4. La convection mixte :

##### 4.1. Rappel fondamentale de la convection mixte :

La convection mixte est le résultat de la compétition entre un écoulement de convection naturelle et un écoulement de convection forcée. La mise en place des grandeurs caractéristiques de la convection mixte peut s'appuyer sur le cas d'un obstacle à la température  $T_0$  placé dans un écoulement à la température  $T_{\infty}$  (Fig.2.2). Donc, la convection mixte peut être trouvée à partir de l'évaluation des différences de pression susceptibles de générer les écoulements.

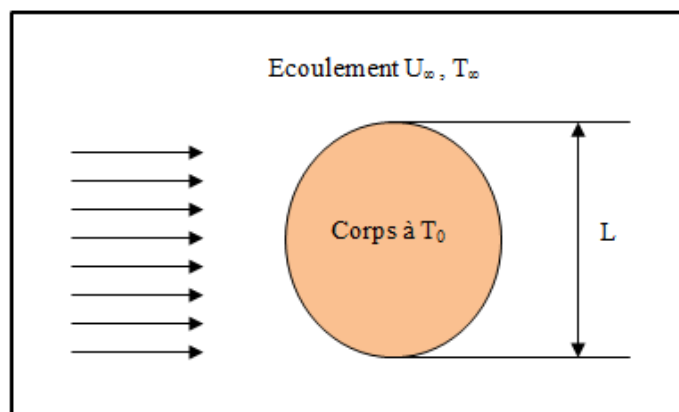


Fig. 2.2 : Obstacle porté à la température  $T_0$  dans un écoulement  $T_{\infty}$

Si l'on admet, en première approximation, que ces écoulements sont simplement dus à un transfert d'énergie de pression en énergie cinétique pour la convection forcée, et à un transfert d'énergie potentielle en énergie cinétique pour la convection naturelle. Si

on appelle  $L$  la longueur caractéristique de l'obstacle porté à une température  $T_0$ , différente de la température ambiante  $T_\infty$ , il est possible d'écrire :

$$\Delta P_\infty \approx \frac{1}{2} \rho \cdot V_\infty^2 \quad (2.16)$$

$$\rho \cdot g \cdot \beta (T_0 - T_\infty) \cdot L \approx \frac{1}{2} \rho \cdot V_n^2 \quad (2.17)$$

Où :

$g$  : représente l'accélération de la pesanteur

$\beta$  : le coefficient de dilatation

Le critère de définition de la convection mixte revient à comparer la différence de pression de la convection forcée  $\Delta P_\infty$  à la différence de pression équivalente  $\Delta P_n$ , qu'il faudrait produire pour créer un écoulement de même impulsion que celui créée par les forces de poussée d'Archimède. En considérant  $V_n^2$  la vitesse caractéristique de la convection naturelle,  $\Delta P_n$  est exprimée par :

$$\Delta P_n \approx \frac{1}{2} \rho \cdot V_n^2 \quad (2.18)$$

Ainsi, en formant le rapport de ces 2 différences de pression, on obtient :

$$\frac{\Delta P_n}{\Delta P_\infty} \approx \frac{V_n^2}{V_\infty^2} \approx \frac{g \cdot \beta \cdot (T_0 - T_\infty) \cdot L}{V_\infty^2} = \frac{g \cdot \beta \cdot (T_0 - T_\infty) \cdot L^3}{\nu^2} \left( \frac{\nu}{L \cdot V_\infty} \right)^2 \quad (2.19)$$

$$\frac{\Delta P_n}{\Delta P_\infty} \approx \frac{Gr_L}{Re_L^2} = Ri \quad (2.20)$$

Dans ces conditions, il en résulte que si :

**Ri** >> 1 : la convection naturelle est dominante

**Ri** << 1 : la convection forcée est dominante

**Ri** ≈ 1 : la convection est dite mixte.

#### **4.2. Domaine d'application de la convection mixte:**

Le phénomène de convection mixte est rencontré dans diverses applications concernant les échangeurs de chaleur destinés au chauffage ou au refroidissement des fluides visqueux dans les procédés chimiques et les industries alimentaires, le transport des huiles par pipelines, l'évacuation de la chaleur dans les réacteurs nucléaires et le refroidissement des composants électroniques qui représente un cas concret de combinaison des deux modes de convection forcée et libre.

D'autres champs d'applications peuvent être aussi considérés, il s'agit entre autres des collecteurs solaires, les écoulements géophysiques (couches limites atmosphériques, courants marins) sont souvent des écoulements siège de phénomènes de convection mixte. Cela est très important pour les problèmes de pollution, les effets de gravité pouvant, selon le cas, augmenter ou diminuer l'intensité de turbulence et par conséquent augmenter ou diminuer les transferts.

#### **5. Revue bibliographique sur les écoulements en cavité ventilée :**

L'amélioration du transfert de chaleur par convection mixte dans une cavité est l'objet principal de plusieurs travaux, un grand nombre de chercheurs ont mené une multitude d'essais numériques et expérimentaux portant sur la description des phénomènes régissant la convection mixte et l'effet de la nature des systèmes dans lesquels elle a eu lieu (géométrie spécialement). Beaucoup des travaux publiés ont été élaborés concernant la convection dans des cavités ventilées qui sont en relation directe avec notre étude. Parmi ces travaux nous citons :

**S. Zermane, S. Boudebous et N. Boulkroune (2005) [15]** ont étudié la convection mixte laminaire dans des cavités ventilées. La paroi latérale verticale gauche de la cavité est soumise à une température constante supérieure à la température ambiante, tandis que les autres parois sont considérées comme adiabatiques. En se basant sur la méthode des différences finies pour discrétiser les équations gouvernant ce phénomène, les fonctions de courant, les isothermes, les profils des vitesses et des

températures, ainsi que les variations du nombre de Nusselt en fonction du temps, pour la géométrie considérée et pour différentes valeurs du nombre de Richardson et de Grashof ont été déterminés. Les résultats obtenus montrent que l'écoulement principal du fluide a eu lieu le long de la paroi chaude verticale et de la paroi supérieure jusqu'à la sortie de la cavité lorsque la convection naturelle prédomine. Par contre lorsque la convection forcée prédomine l'écoulement principal du fluide a eu lieu le long de la diagonale de la cavité, avec l'apparition des zones de recirculation multicellulaires de part et d'autre de la diagonale de la cavité.

**S.M. Saeidi, J.M. Khodadadi (2006) [16]** ont traité un écoulement transitoire et périodique pour un transfert de chaleur par convection dans une cavité avec des orifices d'entrée et de sortie et avec une variation de la vitesse d'oscillation à l'orifice d'entrée. Les effets du nombre de Strouhal et le nombre de Reynolds oscillant sont étudiés. Les résultats se révéleront très utiles pour la conception de systèmes efficaces et ayant recours à l'oscillation de la vitesse pour contrôler le transfert de chaleur.

Les deux modèles d'écoulement et des champs de température dans une cavité en raison d'une vitesse d'oscillation à l'orifice d'entrée ont atteint leurs états périodiques après certaines durées. Il faut plus de cycles pour le champ de température pour atteindre son état périodique par rapport au champ d'écoulement correspondant. Pour les cas de grandes valeurs du nombre de Strouhal, il faut plus de cycles pour atteindre l'état périodique.

- L'oscillation de la vitesse à l'orifice d'entrée provoque la croissance et de décroissance cyclique de l'écoulement. Le flux d'écoulement est en contact constant avec le vortex en rotation primaire, qui interagit à son tour avec deux tourbillons en rotation sur le mur de gauche. Un tourbillon CCW tournant à l'angle supérieur droit connaît également une croissance périodique et de décadence.
- Le champ de température est directement affecté par le champ d'écoulement dans la mesure où il prend en charge le transfert de chaleur minimum sur le mur de gauche.

- Pour de faible nombre de Strouhal 0,1, les nombres de Nusselt moyens sur les quatre murs montrent clairement de grandes amplitudes d'oscillation et de périodicité. À l'autre extrême, avec  $St = 10$ , les amplitudes des oscillations sont dégradées. Ces comportements sont directement liés à la relation entre la période d'oscillation et l'échelle de temps de convection.
- Quel que soit la valeur du nombre de Strouhal, une augmentation du transfert de chaleur par rapport à la performance du système pour un nombre de Reynolds moyen est systématiquement observée. Le meilleur taux de transfert de chaleur est réalisé lorsque le nombre de Strouhal est proche de l'unité. C'est le cas lorsque la période du flux entrant en résonance avec l'échelle de temps de convection.

**M. M. Rahman, M. A. Alim, M. A. H. Mamun, M. K. Chowdhury and A. K. M. S. Islam (2007) [17]** ont analysé les effets des nombres de Prandtl, Richardson et Reynolds sur les caractéristiques de transfert de chaleur par convection mixte laminaire sur une cavité carrée avec une entrée située sur le côté gauche de la paroi verticale isolée, où l'orifice de sortie est fixé à la partie supérieure de la surface verticale chauffée.. Un total d'emplacements de dix entrées a été pris en compte. L'étude englobe une gamme de nombre de Reynolds de 50 à 200, une gamme de nombre de Prandtl de 0,71 à 50 et une gamme de nombre de Richardson de 0 à 10. Une étude détaillée du transfert de chaleur en termes de température du fluide et du nombre de Nusselt moyen a été entreprise pour différentes valeurs  $Ri$ ,  $Re$  et  $Pr$ . L'objectif principal de cette étude porte sur l'influence de l'emplacement des ports d'entrée sur le transfert de chaleur en surface. La visualisation du débit et des mesures de transfert de chaleur sont effectués pour acquérir une bonne compréhension du processus physique et de fournir des données utiles.

- Pour de faible valeur de  $Ri$ , le nombre de Nusselt atteint un minimum au voisinage de la zone de l'apparition de la séparation de l'écoulement le long de la paroi chauffée. Avec l'augmentation de  $Ri$  et étant donné qu'aucune séparation de l'écoulement existe le long de la paroi chauffée, le comportement est plus linéaire.

- L'effet de l'augmentation du nombre de Prandtl sur le transfert de chaleur total est nettement supérieur à l'effet de l'augmentation de  $Ri$ .
- Les solutions numériques indiquent que l'augmentation de la valeur de  $Re$  fait augmenter le taux de transfert de chaleur, la température et l'intensité de recirculation.

**T.V. Radhakrishnana, A.K. Vermaa, C. Balajib et S.P. Venkateshanb (2007) (2007) [18]** ont réalisé des expériences afin d'étudier le refroidissement de l'élément générateur de chaleur dans une cavité ventilée sous le régime de convection mixte dans une soufflerie à basse vitesse. L'étude a mis en évidence l'importance de combiner l'expérience avec des simulations numériques pour optimiser l'emplacement de l'élément chauffant afin d'avoir un refroidissement maximal. L'objectif de cette étude est la maximisation de la conductance globale. Cela se traduit par la minimisation de la température maximale. Des appareils de chauffage de différentes dimensions, 150 mm \* 25 mm et 150 mm \* 50 mm ont été choisis pour les expériences. Les résultats expérimentaux ont été traités pour le maximum de température adimensionnel et en fonction du nombre de Reynolds  $Re$  et nombre de Richardson  $Ri$ . Une corrélation a été obtenue pour le nombre de Nusselt  $Nu$  en fonction de  $Re$  et  $Ri$ . L'intrigue de parité des deux corrélations a montré un excellent accord entre les valeurs prédites et les données.

Une étude numérique de l'écoulement du fluide et du transfert de chaleur du chauffe-eau pour une même configuration a été réalisée. Les simulations numériques ont révélé que le flux principal à l'intérieur de la chambre est concentré près de la paroi droite. Ceci indique que si l'appareil est déplacé vers la droite, le refroidissement de l'appareil de chauffage peut être amélioré. Par conséquent, les expériences ont été réalisées en déplaçant un élément de l'appareil de chauffage vers le mur et comme prévu, on obtient 10 à 50% de réduction des températures maximales dans cette nouvelle position. Ces réductions ont également été observées avec des simulations numériques réalisées par la nouvelle position de l'appareil. En outre, un certain nombre de simulations numériques ont été effectuées lorsque l'élément chauffant est situé à des positions différentes, à savoir le milieu, la région supérieure et inférieure. La vitesse et

les contours de température ont été étudiés pour ces cas. Chaque fois que la vitesse augmente près de la paroi de l'appareil de chauffage, ceci fait augmenter le taux de transfert et entraîne la chute de température. L'effet de l'orientation de l'appareil en position horizontale et inclinée a également été étudié numériquement. La position inclinée offre une baisse du taux de transfert de chaleur par rapport à l'horizontale. Les températures obtenues avec les simulations numériques sont globalement indicatif et une différence a été observée avec les mesures. Ces constatations soulignent au mieux la nécessité de l'expérimentation pour faire ressortir les aspects plus fine de l'écoulement et du transfert de chaleur. L'étude souligne la possibilité d'utiliser une soufflerie expérimentale-numérique pour les problèmes de cette catégorie, dont l'objectif final est l'optimisation de la performance thermique. Des économies considérables peuvent être obtenues en exploitant la synergie entre une étude expérimentale et numérique.

**Mamdouh Belhi et Saadoun Boudebous (2007) [19]** ont étudié la convection mixte au sein d'une cavité dont la paroi verticale gauche est soumise à une température fixe et dont la paroi inférieure possède plusieurs entrées. Les résultats montrent qu'au-delà d'un nombre d'entrées critique (12 pour le cas considéré) la répartition des isothermes et des lignes de courant dans la cavité étudiée reste pratiquement inchangée. Les prochaines étapes permettront une étude plus détaillée de ce nombre critique pour les autres cas de ventilation de la cavité (convection naturelle et forcée).

**Md. Mustafizur Rahman, M. A. Alim, Sumon Saha et M. K. Chowdhury (2008) [20]** ont étudié l'effet d'un cylindre centré comme source de chaleur dans une cavité carrée ventilée soumise à une convection mixte laminaire. Le nombre de Richardson ( $Ri$ ) varie de 0 à 5,0 pour simuler la convection forcée, mixte pur et naturelle prédominante dans la cavité. La taille de la bouteille à gaz varie de 0 à 0,6 pour comprendre l'effet du diamètre du cylindre sur l'écoulement et le transfert de chaleur dans la cavité.

La valeur de nombre de Nusselt moyen à la surface chaude est la plus grande pour le plus grand diamètre du cylindre 0.6 où la convection forcée est dominante.

L'augmentation du transfert de chaleur varie avec l'augmentation du  $Ri$  pour des valeurs constantes du diamètre du cylindre. De plus, la température moyenne du fluide et la température au centre du cylindre dans la cavité n'est pas monotone avec l'augmentation des valeurs des paramètres.

**A. Raji, M. Hasnaoui et A. Bahlaoui (2008) [21]** ont présenté la convection mixte dans une cavité ventilée, chauffée à partir de sa paroi verticale gauche avec un flux de chaleur constant et thermiquement isolé de ses frontières restantes. Le flux de chaleur transféré généré par la convection forcée et utilisé dans la normalisation de  $Nu$  était corrélée par  $Q$  (pour  $Ra = 0$ ) =  $1,2573 * Re^{0,234}$  et  $Q = 1,82 * Re^{0,182}$  pour  $Re \leq 1000$  et  $Re > 1000$ , respectivement. Les résultats de l'étude montrent que la structure d'écoulement est considérablement influencée par l'interaction entre la convection naturelle (soutenu par le nombre de Rayleigh) et la convection forcée (soutenu par le Nombre de Reynolds). Les différents régimes d'écoulement ont été identifiés et délimités dans le plan  $Ra-Re$ . Les couples  $(Ra, Re)$  menant à un maximum de  $Nu$  ont été identifiées et corrélées comme  $Re_m = 3,7896 * Ra^{0,2753}$ . Au-dessus de cette limite de  $Re$ , le nombre de Nusselt diminue de façon monotone vers  $Nu = 1$ , valeur marquant la prédominance de convection forcée. Les valeurs de  $Re$  à partir de laquelle  $Nu = 1$ , sont également corrélées comme  $Re_f = 0,0724 * Ra^{0,7654}$ .

**E. Benachour, B. Draoui, L. Rahmani, B.Mebarki, K.Asnoune et B. Imine (2010) [22]** ont étudié la convection mixte laminaire dans une cavité carrée ventilées. Les parois latérales verticales gauche et droite de la cavité sont soumises à une température constante froide, tandis que les autres parois sont considérées comme adiabatiques.

Le nombre de Reynolds est fixé à 100, le nombre de Prandtl égale à 0.71 et le nombre Richardson varie de telle sorte que le nombre prend les valeurs : 0.1, 1 et 10. Les résultats numériques obtenus montrent un régime d'écoulement instationnaire multicellulaire dont la taille et la forme des cellules dépendent fortement du nombre de Richardson. La variation du transfert de chaleur exprimé par le nombre du Nusselt moyen, en fonction du nombre de Richardson montre une augmentation sensible quand la convection forcée est dominante ( $0.1 \leq Ri \leq 1$ ). Cependant pour des valeurs

importantes du nombre de Richardson ( $Ri \geq 1$ ), celui-ci devient encore plus élever d'une manière monotone et presque linéaire. Pour garder l'échauffement de la pièce pour la période hivernale, il faut éviter la position haute de l'évacuation.

**Amir Houshang Mahmoudi, Mina Shahi et Farhad Talebi (2010) [23]** ont étudié l'effet de l'entrée et l'emplacement de sortie sur le flux de convection mixte et les champs de température dans une cavité ventilée carré avec deux ouvertures d'entrée, soumise à un écran externe en cuivre-eau nano-fluide sur la surface basse. Quatre configurations différentes de placement de l'entrée et de sortie sont prises en considération. Dans chacun d'eux, à la fois l'orifice d'entrée et de sortie sont alternativement situées sur le haut ou le bas des parois latérales. En effet, cette géométrie a le potentiel d'application dans un dispositif électronique de refroidissement. Afin de détecter le meilleur emplacement possible de l'ouverture d'entrée et de sortie et obtenir un refroidissement plus efficace, l'étude numérique est réalisée sur une gamme vaste des nombres de Reynolds et de Richardson.

Le minimum et le maximum du transfert de chaleur de ces configurations sont obtenus pour TT (position de l'ouverture d'entrée haute et sortie haute) et BB (position de l'ouverture d'entrée basse et sortie basse) respectivement.

A chaque fois que les valeurs  $Re$  et  $Ri$  augmentent la présence des nanoparticules a plus d'effet à augmenter la performance du transfert de chaleur. La présence de ces nanoparticules est plus efficace dans une configuration BT (position de l'ouverture d'entrée basse et sortie haute) par rapport aux autres configurations. L'augmentation de la concentration du solide a un effet minimum pour une configuration TT.

**Hakan F. Oztop (2010) [24]** a étudié l'influence de l'emplacement des ports de sortie et du nombre de Richardson sur la convection mixte avec une source de chaleur interne. Pour chaque configuration de géométrie, le champ de l'écoulement et de la distribution de température est affecté à partir du nombre de Richardson. Le transfert de chaleur diminue avec l'augmentation du Nombre de Richardson en raison de la diminution de la vitesse d'écoulement. Pour des nombres de Richardson élevés, les

effets du rapport d'aspect deviennent insignifiants. La meilleure géométrie est trouvée lorsque le transfert de chaleur est plus faible.

**Zainab K. Radhi (2011) [25]** a traité la convection mixte de l'air pour une cavité double carrée. L'objectif est d'étudier l'effet des ouvertures de sortie et le rapport d'aspect de la paroi chaude ainsi que l'effet des nombres de Reynolds et de Richardson sur les caractéristiques de transfert de chaleur.

- Le Nombre de Nusselt Moyen à la surface chaude augmente avec la diminution des valeurs du rapport de l'aspect  $H_0$ . La température moyenne du fluide diminue avec la diminution de  $H_0$ .

L'emplacement du port de sortie n'a pas des effets importants sur le nombre de Nusselt moyen et de la température moyenne du fluide.

- La solution numérique indique que l'augmentation de la valeur de  $Re$  fait augmenter le coefficient de transfert de chaleur et accentue l'intensité de recirculation.
- L'augmentation du nombre de Richardson améliore le processus de transfert de chaleur.
- Les résultats de l'étude montrent que la structure de l'écoulement et de la température sont considérablement influencés par l'interaction entre la convection naturelle et forcée dans une cavité double.

**Hamini, S. Bouabdallah et A. Benchatti (2012) [26]** ont traité la convection mixte laminaire pour une cavité carrée avec une ouverture à l'entrée et à la sortie et soumis à une température constante sur la paroi basse. Les autres parois sont considérées adiabatiques. Les nombres suivants ont été fixés comme suit : le nombre de Grashof a été fixé à  $10^5$ , le nombre de Richardson à 0.1, 1, 2, 5, 10 et 20. Les effets du nombre de Grashof, les positions des ouvertures entrées et sortie ont été examinés.

- Pour un régime d'écoulement stationnaire multicellulaire, la forme et la taille des cellules dépendent fortement de la valeur du nombre de Richardson.
- Avec l'augmentation des valeurs des nombre de Grashof et de Reynolds, le transfert de chaleur augmente mais avec des pourcentages différents.

- La position de l'entrée de l'air et de la sortie a un grand effet sur les structures hydrodynamiques et thermiques.

Les résultats montrent que la configuration (B-B : position de l'ouverture d'entrée basse et sortie basse) a le plus grands taux de transfert de chaleur tandis que la configuration (T-T : position de l'ouverture d'entrée haute et sortie haute) a le plus bas taux de transfert de chaleur par rapport aux trois configurations. Les paramètres géométriques ont un effet significatif sur le transfert de chaleur. En outre, l'augmentation de la valeur du nombre de Reynolds provoque une amélioration du transfert de chaleur (dissipation de la chaleur), pour bon refroidissement du milieu de la cavité.

## 6. Formulation mathématique du modèle étudié :

### 6.1. Spécification du modèle utilisé :

Le modèle choisi est une cavité carrée de côté  $H$  munie de deux ouvertures de ventilation, la première située dans le coin bas gauche de côté  $L_1$  et la deuxième située dans le coin haut droit de côté  $L_2$  où  $L_1 = L_2 = 20\% H$ .

Les parois de cette cavité sont adiabatiques sauf la paroi basse qui est maintenue à une température constante  $T_c$  (chaude). Un fluide incompressible et newtonien entre à travers l'ouverture gauche de la paroi avec une température  $T_f$  et une vitesse uniforme  $U_0$ .

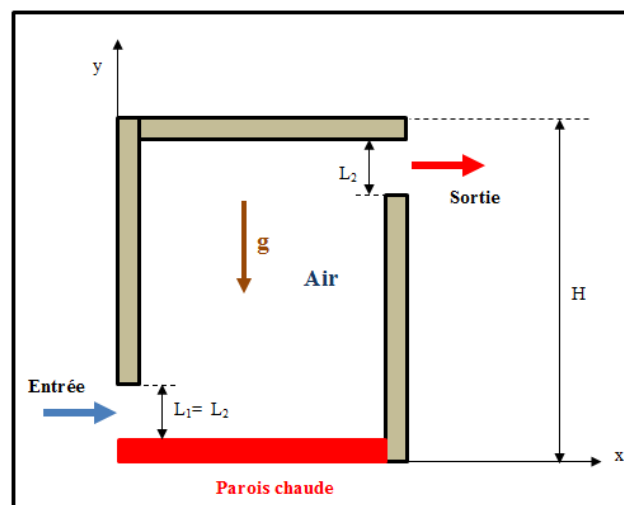


Fig. 2.3 : Géométrie et configuration du problème physique

## 6.2. Hypothèses de calcul :

Les hypothèses simplificatrices retenues dans notre étude sont les suivantes :

- Le fluide considéré est un fluide newtonien, incompressible et satisfait l'hypothèse de Boussinesq.
- La masse volumique varie linéairement avec la température et elle est donnée par la relation suivante :

$$\rho = \rho_{\infty} [1 - \beta \cdot (T - T_{\infty})] \quad (2.21)$$

- L'écoulement est de type mixte « convection naturelle et forcée » et reste laminaire.
- L'écoulement est considéré 2D et stationnaire.
- Le transfert de chaleur par radiation est négligeable.
- La dissipation de la chaleur par effet de viscosité est négligeable.
- Les propriétés thermo physiques du fluide sont constantes et sont évaluées à la température de référence.

## 6.3. Equation de bilan :

Les équations régissant l'écoulement sont les équations de continuité, de Navier-Stokes et l'équation d'énergie, qui expriment respectivement, la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Ces équations se résument pour le cas étudié comme suit :

- **Equation de continuité :**

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.22)$$

- **Equations de quantité de mouvement :**

Suivant x :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(p - p_0)}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2.23)$$

Suivant y :

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(p - p_0)}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + g\beta(T - T_0) \quad (2.24)$$

- **Equations de l'énergie :**

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (2.25)$$

#### 6.4. Forme adimensionnelle des équations :

Pour donner une forme sans dimension des variables dépendantes et indépendantes, nous employons des quantités caractéristiques qui sont constantes dans tout le champ de l'écoulement thermique. Ces quantités sont :  $H$ ,  $U_0$ ,  $T_w$ ,  $T_0 = T_f$  et  $p_0$ . Nous considérons des coordonnées cartésiennes et définissons les variables adimensionnelles suivantes :

##### 6.4.1. Variables adimensionnelles :

Les équations ci-dessus ont été ramené à une forme adimensionnelle où :

$$X = \frac{x}{H} \quad (2.26)$$

$$Y = \frac{y}{H} \quad (2.27)$$

$$U = \frac{u}{U_0} \quad (2.28)$$

$$V = \frac{v}{U_0} \quad (2.29)$$

$$\theta = \frac{T - T_f}{T_c - T_f} \quad (2.30)$$

$$P = \frac{p - P_0}{\rho U_0^2} \quad (2.31)$$

#### 6.4.2. Equations adimensionnelles :

##### 6.4.2.1. Equation de continuité :

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (2.32)$$

##### 6.4.2.2. Equation de continuité de mouvement suivant l'axe x :

$$U \cdot \frac{\partial U}{\partial X} + V \cdot \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) \quad (2.33)$$

##### 6.4.2.3. Equation de continuité de mouvement suivant l'axe y :

$$U \cdot \frac{\partial V}{\partial X} + V \cdot \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) + \text{Ri} \cdot \theta \quad (2.34)$$

##### 6.4.2.4. Equation d'énergie :

$$\frac{\partial \theta}{\partial X} + V \cdot \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Re} \cdot \text{Pr}} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \quad (2.35)$$

#### 6.4.3. Nombres adimensionnels :

La forme adimensionnelle des équations ont aboutis à faire apparaitre Trois nombres adimensionnels, caractérisant ainsi l'écoulement par convection mixte à

l'intérieur de la cavité : le nombre de Reynolds **Re**, le nombre de Prandtl **Pr** et le nombre de Richardson **Ri**.

**Nombre de Reynolds :**

$$Re = \frac{U_0 \cdot H}{\nu} \quad (2.36)$$

Il représente le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses. Il caractérise un écoulement, en particulier la nature de son régime (laminaire, transitoire, turbulent).

**Nombre de Grashof :**

$$Gr = \frac{\beta(T_c - T_f)gH^3}{\nu^2} \quad (2.37)$$

Qui caractérise et mesure le rapport des forces de gravité sur les forces de viscosité agissant sur le fluide.

**Nombre de Richardson :**

$$Ri = \frac{Gr}{Re^2} \quad (2.38)$$

Le nombre de Richardson a été mis en évidence par Lewis Fry Richardson (1881-1953). C'est le rapport du nombre de Grashof sur le carré du nombre de Reynolds. Il indique le mode de la convection (Naturelle, forcée ou mixte).

**Nombre de Prandtl :**

$$Pr = \frac{\rho \nu c_p}{\lambda} = \frac{\nu}{\alpha} \quad (2.39)$$

Il représente le rapport entre la diffusivité de quantité de mouvement  $\nu$  (ou viscosité cinématique) et la diffusivité thermique  $\alpha$ .

**Nombre de Rayleigh :**

$$Ra = Gr \cdot Pr \quad (2.40)$$

Ce nombre caractérise le transfert de chaleur au sein d'un fluide. Au-delà d'une valeur critique  $Ra_{cr}$  le mouvement du fluide par convection apparaît et devient important.

**Nombre de Nusselt :**

Il caractérise le transfert de chaleur entre la plaque et le fluide environnant. Il représente le rapport entre le flux transmis réellement de la plaque vers le fluide et le flux qui serait transmis en régime de conduction pure.

$$\Phi_{réel} \rightarrow -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = h_c (T_p - T_0) \quad (2.41)$$

$$\Phi_{conductif} \rightarrow \frac{\lambda (T_p - T_0)}{H} \quad (2.42)$$

Avec  $h_c$  coefficient d'échange convectif local.

En formant le rapport de ces deux flux, on obtient l'expression du nombre de Nusselt local présentée dans la relation (2.43).

$$Nu = \frac{\Phi_{réel}}{\Phi_{conductif}} = \frac{-\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0}}{\frac{(T_p - T_0)}{H}} = \frac{h_c H}{\lambda} \quad (2.43)$$

La solution globale du système est donc une relation de la forme  $Nu = f(Gr, Pr)$  ou  $Nu = f(Ra, Pr)$ . D'autre part, on obtient l'échange global entre la plaque et le fluide en remplaçant  $h_c$  par  $\overline{h_c}$ , le coefficient d'échange moyen défini par la relation (2.44) :

$$\overline{h_c} = \frac{1}{S} \int h_c dS \quad (2.44)$$

### 6.5. Conditions aux limites thermiques et hydrodynamiques :

$$u = U_0, v = 0 \text{ et } T = T_f \quad \text{à l'entrée} \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad \text{à la sortie} \quad (2.19)$$

$$u = v = 0 \text{ et } T = T_c \quad \text{à la paroi chaude} \quad (2.20)$$

$$u = v = 0 \text{ et } \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad \text{aux parois verticales} \quad (2.21)$$

$$u = v = 0 \text{ et } \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad \text{à la paroi du haut} \quad (2.22)$$

### 7. Conclusion :

Dans ce chapitre, les notions fondamentales sur le transfert de chaleur par convection ont été présentées, notamment la convection mixte et son domaine d'application. Poursuivi par une revue bibliographique sur les travaux qui ont traité le cas des écoulements en cavité ventilée.

Une description classique généralisée du phénomène physique en se basant sur les équations de Navier-Stokes est exposée. Suivi d'une formulation mathématique pour la configuration géométrique étudié dans ce travail en se basant sur des hypothèses de travail adaptées.

Dans le chapitre suivant, nous présentons les bases fondamentales de la nouvelle méthode utilisée dans cette étude notamment la méthode de Boltzmann sur réseau.

# Chapitre III

# **Chapitre III**

## Méthode de Boltzmann sur réseau

### **1. Introduction :**

### **2. Historique de la méthode de Boltzmann :**

### **3. Méthode mathématique :**

#### 3.1. Equation de Boltzmann

#### 3.2. Approximation Bhatnagar, Gross et Krook (BGK)

#### 3.3. Fonction de distribution d'équilibre de Maxwell-Boltzmann

#### 3.4. Discrétisation de l'équation de Boltzmann

#### 3.5. Réseau d'arrangement

##### 3.5.1. Réseau D2Q9

###### 3.5.1.1. Paramètres du réseau D2Q9

###### 3.5.1.2. Conditions aux limites

###### 3.5.1.2.1. Conditions de Bounce-Back

###### 3.5.1.2.2. Conditions aux limites avec une vitesse connue

###### 3.5.1.2.3. Ouest

###### 3.5.1.2.4. Est

##### 3.5.2. Réseau D2Q5

###### 3.5.2.1. Paramètres du réseau D2Q5

###### 3.5.2.2. Conditions aux limites

###### 3.5.2.2.1. Conditions aux limites à l'entrée

###### 3.5.2.2.2. Conditions de Dirichlet « température constante » à la paroi inférieure

###### 3.5.2.2.3. Conditions adiabatiques aux parois haute, gauche et droite

###### 3.5.2.2.4. Conditions aux limites à la sortie

### **4. Mise en œuvre informatique**

### **5. Conclusion**

# **Chapitre III**

## **METHODE DE BOLTZMANN SUR RESEAU**

### **1. Introduction :**

La plus grande réalisation scientifique du physicien autrichien Ludwig Eduard Boltzmann (1844-1906), a été le développement de la mécanique statistique. Dans cette théorie, il explique comment les propriétés des atomes et des molécules (propriétés microscopiques) peuvent déterminer les propriétés macroscopique des matériaux telles que le la viscosité, la conductivité thermique et le coefficient de diffusion. La fonction de répartition (qui est la probabilité de trouver des particules à l'intérieur d'une certaine plage de vitesses, à un certain lieu et à un moment donné) remplace le marquage de chaque particule, comme dans la simulation dynamique moléculaire. La méthode permet d'économiser considérablement les ressources informatiques.

La méthode de Boltzmann sur Réseau est une méthode numérique relativement nouvelle par rapport aux approches classiques utilisées en simulation numérique. Pourtant, entre le fondement de la physique statistique sur laquelle elle est basée et son achèvement théorique, il s'est écoulé plus d'un siècle. Ainsi, en guise d'introduction, nous allons présenter les grandes lignes historiques, nécessaires pour comprendre les différents aspects théoriques de cette méthode. Nous essaierons de faire ressortir les étapes fondamentales dans l'élaboration de l'équation de Boltzmann sur Réseau dont la partie théorique sera détaillée par la suite.

### **2. Historique de la méthode de Boltzmann sur réseau:**

La construction de la méthode Boltzmann sur Réseau peut se résumer en deux étapes paradoxalement indépendantes : le développement de la physique statistique d'une part et l'apparition des automates cellulaires d'autre part.

La première étape nous propulse au milieu du XIX<sup>ème</sup> siècle avec l'avènement de la physique statistique basée sur les travaux de l'Américain Josiah Willard Gibbs, des Anglais Lord Kelvin et James Clerk Maxwell et de l'Autrichien Ludwig Eduard Boltzmann. La physique statistique, dérivée de la théorie cinétique des gaz, s'intéresse non plus à l'évolution globale des quantités macroscopiques (densité, vitesse, pression) mais au comportement microscopique de la matière et tente de décrire l'évolution des particules qui la constitue. Ainsi en 1872, Boltzmann propose sa célèbre équation (3.1) décrivant l'évolution spatio-temporelle d'une fonction  $f$  représentant la distribution des particules ayant une vitesse donnée à un endroit et à un temps donnés. Cette fonction est souvent appelée fonction de distribution et dépend donc de l'espace, de la vitesse et du temps :  $f = f(x, c, t)$ .

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c_i \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{f_i}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial c_i} = \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} \quad (3.1)$$

Le membre de droite de l'équation de Boltzmann, appelé opérateur de collision, représente l'effet des collisions entre particules. Si ce terme est nul, les particules sont alors simplement advectées et soumises à l'action de la force  $F$  présente dans le membre de gauche. Si les particules se rencontrent, l'évolution du système dépend alors de la forme de l'opérateur de collision. A la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle Boltzmann lui-même n'avait qu'une idée approximative de cet opérateur et ne considérait que les collisions à deux particules (dites collisions binaires). On sait aujourd'hui depuis les travaux de Cohen et Dorfman (1970) que l'équation de Boltzmann avec un tel opérateur de collision ne peut pas s'appliquer aux liquides et aux gaz de haute densité. Les travaux de Boltzmann [27], très controversés à l'époque ne furent validés expérimentalement qu'après sa mort en 1906. Ce n'est que plus tard, dans les années 1920 que les travaux indépendants d'un astronome anglais, Sydney Chapman et d'un mathématicien suisse, David Enskog s'intéressent à des collisions plus complexes mettant en jeu plus de deux particules. Le jeune Enskog eut l'idée d'utiliser la méthode de Hilbert (1912) pour effectuer un développement systématique de la fonction de distribution de l'équation de Boltzmann. Chapman approfondi alors l'idée d'Enskog et décide de considérer les particules comme des sphères dures pour prendre en compte

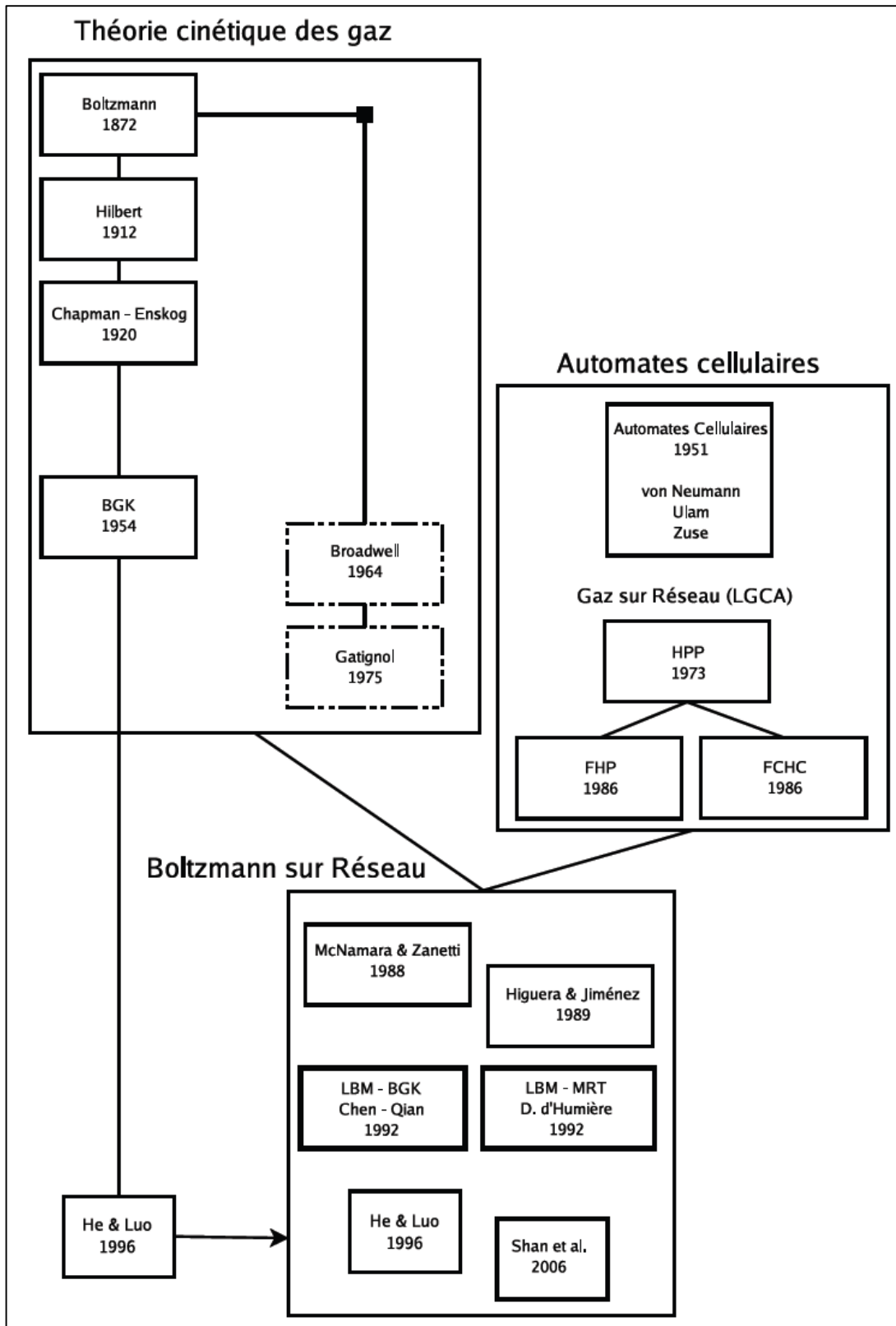
les collisions complexes. Ainsi, à partir de 1921 les travaux de Chapman et Enskog [28] et [29], validés expérimentalement par le chimiste F.W. Dootson, permettent d'établir des liens directs entre l'équation de Boltzmann et celles de Navier-Stokes (1823). Par conséquent, l'opérateur de collision utilisé par Chapman et Enskog reste très complexe et très spécifique. Il faut alors attendre une trentaine d'années pour qu'un modèle de collision simple voie le jour. Ce sont les mathématiciens Prabhu Lal Bhatnagar, E.P. Gross et Max Krook qui lui donneront naissance en 1954 [30]. Ce modèle, établi à partir de développements théoriques complexes, est basé sur l'idée que la collision des particules peut être décrite comme la relaxation en un temps donné des particules, vers un état d'équilibre donné. Cette idée fondamentale permet ainsi d'écrire l'opérateur de collision sous une forme très simple qui porte le nom d'opérateur BGK, du nom de ses créateurs. Ainsi dès 1954, la physique statistique a montré que l'équation de Boltzmann munie de l'opérateur BGK permettait de décrire les écoulements de la mécanique des fluides régis par les équations de Navier-Stokes. La méthode de Boltzmann sur Réseau aurait alors pu naître à cette époque. Mais la notion de discrétisation et de réseau, propres aux usages informatiques, ne verra le jour que bien plus tard avec le développement intensif de la simulation numérique. La notion de discrétisation naît donc dans la seconde moitié du XX<sup>ème</sup> siècle avec l'apparition des premières machines de calculs.

Les automates cellulaires apparaissent pour la première fois dans les années 50 avec John Von Neumann, Stanislas Ulam et Konrad Zuse et utilisent des opérations booléennes (0 ou 1) très proches du langage machine [31]. Les premiers modèles à vitesses discrètes sont introduits par Broadwell [32] en 1964 puis par Gatignol [33] en 1973. Pourtant dans ces premiers modèles, la discrétisation spatiale et temporelle en vue d'une résolution numérique n'est pas introduite. C'est en fait le développement en 1973 des premiers automates cellulaires appliqués à la simulation en mécanique des fluides qui feront le lien avec la discrétisation de l'espace et du temps avec l'apparition des gaz sur réseau (LGCA pour Lattice Gas Cellular Automata). Le premier modèle de gaz sur réseau fut développé par Hardy, Pomeau et Pazzis (modèle HPP) en 1973 [34] et utilisait les distributions de Fermi-Dirac pour l'état d'équilibre mais ne permettait

---

pas de retrouver les équations de Navier-Stokes. Il fut suivi en 1986 par le modèle 2D FHP (Frisch, Hasslacher et Pomeau) [35] basé sur une meilleure symétrie du réseau permettant de retrouver les équations de Navier-Stokes puis par le modèle 3D FCHC (pour Face Centered HyperCube) proposé par d'Humière quelques mois plus tard [36]. Très vite, les modèles de gaz sur réseau souffrent d'inconvénients importants comme la brisure de l'invariance galiléenne due à l'utilisation des distributions de Fermi-Dirac et du bruit numérique dû à l'utilisation de variables booléennes.

Ainsi, à la fin des années 80, les travaux sur les gaz sur réseau se tournent vers l'équation de Boltzmann. Une étude reprenant l'ensemble des modèles de gaz sur réseau, menée par Wolfram en 1986 [37] puis par Frisch l'année suivante [38], permet de faire le lien entre les gaz sur réseau et l'équation de Boltzmann. Les variables booléennes sont alors remplacées par des variables réelles et les distributions de Maxwell-Boltzmann sont utilisées pour l'état d'équilibre. Ces modifications entraînent la suppression des inconvénients majeurs des gaz sur réseau. On peut alors parler des premiers modèle Boltzmann sur Réseau à proprement parler, introduit par McNamara et Zanetti en 1988 [39]. L'apparition des modèles Boltzmann sur Réseau actuels se fera progressivement avec la linéarisation de l'opérateur de collision par Higuera et Jiménez en 1989 [40] et enfin, par l'utilisation de l'opérateur BGK par Koelman en 1991 puis par Chen [41] et Qian en 1992 [42]. L'équation de Boltzmann sur Réseau est alors née et, au début des années 90 la méthode de Boltzmann sur Réseau est présentée comme une amélioration des gaz sur réseau. On peut alors remonter aux équations de Navier-Stokes et à l'équation de Boltzmann continue par un développement a posteriori. Pourtant, en 1996, He & Luo [43] montrent que l'équation de Boltzmann sur Réseau peut être dérivée directement de l'équation de Boltzmann continue. On parle alors de dérivation a priori de la méthode Boltzmann sur Réseau. Cette dérivation a priori fixe un cadre théorique pour la méthode Boltzmann sur Réseau sans passer par les gaz sur réseau dont elle est initialement issu. Cet aspect historique montre bien la longue évolution qui s'est écoulée entre l'apparition de l'équation de Boltzmann en 1872 et l'équation de Boltzmann sur Réseau en 1992. Aujourd'hui la méthode de Boltzmann sur Réseau est utilisée dans de nombreux domaines [44] et [45].



**Fig. 3.1 :** Chronologie récapitulative des moments historiques importants dans l'avènement de la méthode Boltzmann sur Réseau. Les cadres en pointillés indiquent les premiers modèles à vitesses discrètes sans discrétisation spatiale et temporelle [46].

### 3. Modèle mathématique :

#### 3.1. Equation de Boltzmann :

En physique statistique, un gaz est décrit par un nuage de particules obéissant à l'équation de Boltzmann. Cette équation continue telle qu'elle fut proposée par Boltzmann en 1872 peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{c} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{c}} = \Omega(f) \quad (3.2)$$

Où :

$f(\mathbf{r}, \mathbf{c}, t)$  : fonction de distribution des particules.

$\mathbf{r}$  : position.

$\mathbf{c}$  : vitesse.

$t$  : temps.

$\mathbf{F}$  : force extérieure.

$\Omega(f)$  : opérateur de collision.

Cette équation est l'équation de base de la théorie cinétique des gaz. Elle décrit la fonction de distribution des molécules de gaz qui est une fonction du temps, de l'espace et de la vitesse de la molécule.

#### 3.2. Approximation Bhatnagar, Gross et Krook (BGK) :

Il est difficile de résoudre l'équation de Boltzmann (3.2), car le terme de collision est très compliqué. Le résultat de la collision de deux corps n'est pas de nature à influencer de manière significative, les valeurs de plusieurs grandeurs mesurées (Cercignani, 1990). Par conséquent, il est possible de rapprocher l'opérateur de collision avec l'opérateur simple, sans introduire une erreur importante à l'issue de la solution. Bhatnagar, Gross et Krook (BGK) en 1954 ont introduit un modèle simplifié pour l'opérateur de collision. Au même temps, Welander (1954), de façon indépendante, a présenté un opérateur similaire. L'opérateur de collision est remplacé comme suit :

$$\Omega = \omega(f^{eq} - f) = \frac{1}{\tau} \cdot (f^{eq} - f) \quad (3.3)$$

Où :

$\tau$  : facteur de relaxation.

$\omega$  : fréquence de collision

$$\omega = \frac{1}{\tau} \quad (3.4)$$

La fonction de répartition d'équilibre local est désignée par  $f^{eq}$ ; qui est la fonction de distribution de Maxwell-Boltzmann.

### 3.3. Fonction de distribution d'équilibre de Maxwell-Boltzmann :

En général la fonction de distribution d'équilibre de Maxwell Boltzmann [47] s'exprime par :

$$f_i^{eq}(x, t) = \rho \cdot w_i \cdot \left[ 1 + \frac{e_i \cdot u}{c_s^2} + \frac{(e_i \cdot u)^2 - c_s^2 |u|^2}{2 \cdot c_s^4} \right] \quad (3.5)$$

Où :

$w_i$  : Constantes du réseau.

$c_s$  : vitesse de son.

Les valeurs de  $w_i$  et  $c_s$  dépendent du modèle de la vitesse sur réseau dans la simulation.

Après simplification, l'équation (3.5) devient :

$$f_i^{eq}(x, t) = \rho \cdot w_i \cdot \left[ 1 + \frac{e_i \cdot u}{c_s^2} + \frac{(e_i \cdot u)^2}{2 \cdot c_s^4} - \frac{u^2}{2 \cdot c_s^2} \right] \quad (3.6)$$

### 3.4. Discrétisation de l'équation de Boltzmann :

La discrétisation de l'équation (3.1) dans l'espace, dans le temps et par rapport aux vitesses donne l'équation de Boltzmann sur réseau donnée par la formule suivante :

$$f_i(r + c_i, t + \delta t) = f_i(r, t) - \Omega(f) + \omega_i \cdot c_i \cdot F \quad (3.7)$$

Où :

$\omega_i$  : Fréquence de collision.

Avec l'hypothèse des forces extérieures nulles associée à l'approximation de BGK :

$$f_i(r + e_i \delta t, t + \delta t) - f_i(r, t) = -\frac{1}{\tau} \left( f_i(r, t) - f_i^{eq}(r, t) \right) \quad (3.8)$$

Où :

$f_i$  : La fonction de distribution de densité.

$f_i^{eq}$  : L'état d'équilibre.

$e_i$  : La vitesse de particule.

$\delta t$  : La variation de temps.

Il existe deux étapes dans la méthode de Boltzmann sur réseau :

- Etape de collision.
- Etape de propagation.

**L'équation des étapes de collisions** sans la fonction de force extérieure est :

$$f_i(r, t + \Delta t) = f_i(r, t) \cdot [1 - \omega] + \omega \cdot f_i^{eq}(r, t) \quad (3.9)$$

Où :

$i$  dépend du réseau (nombre de vitesse)

$\omega$  : temps de relaxation

$$\omega = \frac{\Delta t}{\tau} \quad (3.10)$$

**L'équation de l'étape de propagation** est :

$$f_i(r + \Delta r, t + \Delta t) = f_i(r, t + \Delta t) \quad (3.11)$$

Où :

$i$  dépend du réseau (nombre de vitesse)

**Quantification macroscopique :**

Les lois de conservation locale [48] s'expriment comme suit :

**Densité :**

$$\rho(x, t) = \sum_{i=0}^{i=N} f_i(x, t) = \sum_{i=0}^{i=N} f_i^{eq}(x, t) \quad (3.12)$$

**Vitesse :**

$$u = u(x, t) = \frac{1}{\rho(x, t)} \sum_{i=0}^{i=N} e_i \cdot f_i(x, t) = \frac{1}{\rho(x, t)} \sum_{i=0}^{i=N} e_i \cdot f_i^{eq}(x, t) \quad (3.13)$$

**Energie :**

$$\begin{aligned} E = E(x, t) &= \frac{1}{\rho(x, t)} \sum_{i=0}^{i=N} \frac{1}{2} (e_i - u)^2 \cdot f_i(x, t) \\ &= \frac{1}{\rho(x, t)} \sum_{i=0}^{i=N} \frac{1}{2} \cdot (e_i - u)^2 \cdot f_i^{eq}(x, t) \end{aligned} \quad (3.14)$$

L'analyse montre que LBM ressemble aux équations de Navier-Stokes pour un écoulement incompressible et de faible nombre de Mach. L'erreur dans LBM est de l'ordre de  $Ma^2$ .

La viscosité du liquide est liée à la fréquence de relaxation que par la relation suivante :

$$\nu = \frac{\Delta x^2}{3 \Delta t} \cdot (\omega - 0,5) \quad (3.15)$$

$$Re = \frac{u \cdot H}{\nu} \quad (3.16)$$

Où :

**Re** : nombre de Reynolds

**u** et **H** : la vitesse et longueur caractéristique dans l'échelle macroscopique respectivement.

En divisant l'équation (3.15) par (u.H) nous trouvons :

$$Ma = \frac{\Delta x}{L\sqrt{3}} \cdot (\omega - 0,5) \cdot Re \quad (3.17)$$

Où :

$H/\Delta x$  : Nombre du réseau par la direction de la longueur caractéristique « N ».

**Pour**  $\Delta x$  = unité prise comme une pratique normale dans LBM.

D'où :

$$Re = \frac{uN}{\nu} \quad (\text{appelé nombre de Reynolds du réseau}) \quad (3.18)$$

Pour des solutions précises, le nombre de Mach **Ma** devrait être réduit. Par conséquent,  $\omega$  ou **N** doivent être choisis pour assurer une faible valeur de **Ma**.

### 3.5. Réseau d'arrangement :

Dans LBM, les domaines de solutions ont besoin d'être divisée en réseau. Pour chaque réseau son propre nombre de nœud et leurs particules artificielles (fonction de distribution). Certaines de ces flux de particule se déplacent dans les directions indiquées aux nœuds voisins. Le nombre de direction et liaison dépendent de l'arrangement du réseau.

La terminologie usuelle utilisée par LBM doit se référer à la dimension du problème et du nombre de vitesse qui utilise  $D_n Q_m$  [49]

Où :

**n** : représente la dimension du problème (1 pour 1D, 2 pour 2D et 3 pour 3D).

**m** : désigne le modèle de vitesse,

Dans notre cas nous avons utilisé deux réseaux :

- $D_2 Q_9$  : pour la discrétisation des vitesses.
- $D_2 Q_5$  : pour la discrétisation de la température.

### 3.5.1. Réseau $D_2Q_9$ :

#### 3.5.1.1. Paramètres du réseau $D_2Q_9$ :

Ce modèle est très fréquent, en particulier pour résoudre les problèmes d'écoulement de fluide.

On considère un modèle bidimensionnel de la méthode LBM à neuf vitesses discrètes appelé modèle  $D_2Q_9$  sur une grille carrée de pas  $\delta x = \delta y = 1$ , comme le montre la figure 3.2

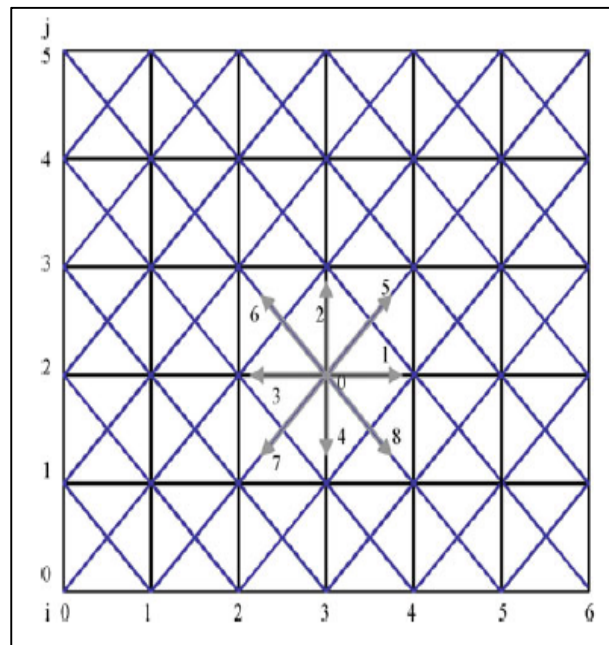


Fig. 3.2 : Réseau  $D_2Q_9$

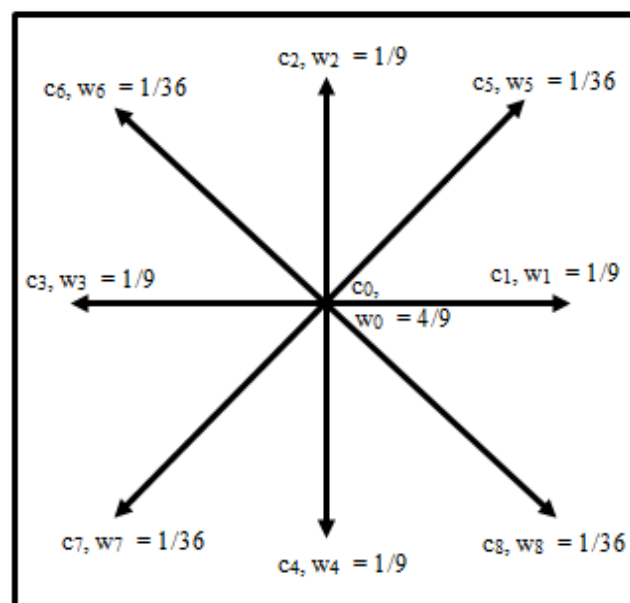


Fig. 3.3 : Distribution des vitesses sur un réseau  $D_2Q_9$

$e_i$  sont les vitesses du réseau définies par :

$$e_i = c \cdot \left( \cos \frac{2\pi(i-1)}{8}, \sin \frac{2\pi(i-1)}{8} \right) \quad i = 0, \dots, 8 \quad (3.19)$$

D'où :

$$e_i = \begin{cases} 0 & i = 0 \\ c \left( \cos((i-1)\pi), \sin((i-1)\pi) \right) & i = 1, 2, 3, 4 \\ \sqrt{2}c \left( \cos \left( (i-5)\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right), \sin \left( (i-5)\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right) & i = 5, 6, 7, 8 \end{cases} \quad (3.20)$$

Où :

$$c = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (3.21)$$

Les valeurs des vitesses de propagation sont :

$$\begin{array}{lll} e_0 = (0,0) & e_1 = (1,0) & e_2 = (0,1) \\ e_3 = (-1,0) & e_4 = (0,-1) & e_5 = (1,1) \\ e_6 = (-1,1) & e_7 = (-1,-1) & e_8 = (1,-1) \end{array}$$

Les facteurs de poids correspondant sont :

$$\begin{array}{l} w_0 = 4/9 \\ w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = 1/9 \\ w_5 = w_6 = w_7 = w_8 = 36 \end{array}$$

La vitesse du son est donnée par :

$$c_s = \frac{c}{\sqrt{3}} \quad (3.22)$$

La viscosité dynamique est donnée par la formule :

$$\mu = \left( \tau - \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{\rho \cdot c^2}{3} \quad (3.23)$$

### 3.5.1.2. Conditions aux limites :

Une des questions importantes et cruciales en matière de simulation de Boltzmann sur réseau sont les modélisations des conditions aux limites. Les conditions de spécification des conditions aux limites pour la méthode de Navier- Stokes sont en quelque sorte simple. Ce n'est pas le cas pour les LBM, où les fonctions de distribution à l'intérieur dans le domaine de l'intégration devront être déterminées au niveau des frontières.

#### 3.5.1.2.1. Condition de Bounce-Back :

Cette méthode est utilisée pour modéliser un solide stationnaire, des conditions aux limites mobiles, des conditions de non-glissement ou à la rencontre d'obstacles. La méthode est assez simple et définit qu'une particule entrant vers la limite du solide rebondit dans domaine de l'écoulement.

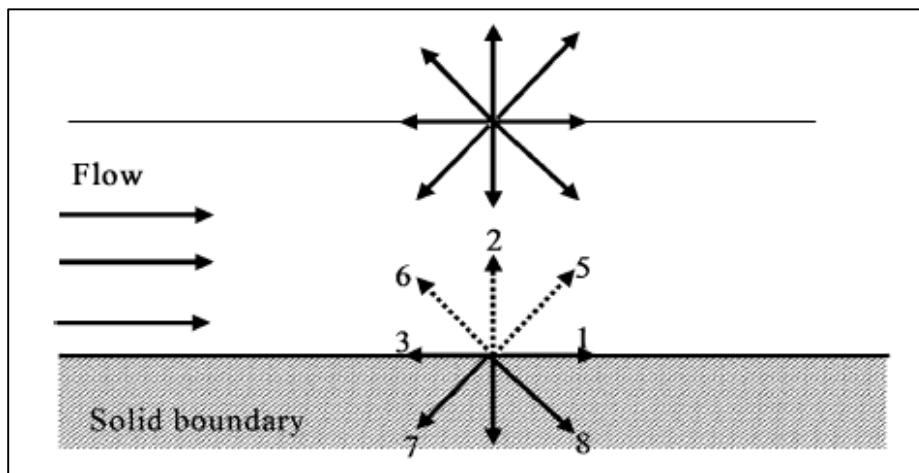


Fig. 3.4 : Schéma simple de Bounce-back [50]

Les réseaux sont situés directement sur la surface solide et non pas au milieu du plan, comme représentée sur la Fig. 3.4.

Sachant que pour un même nœud à l'intérieur de la paroi :

$$f_5 = f_7$$

$$f_6 = f_8$$

$$f_2 = f_4$$

Ces fonctions sont connues à partir de processus de propagation.

### 3.5.1.2.2. Conditions aux limites avec une vitesse connue :

Il est très fréquent dans les applications pratiques que nous connaissons les composantes de la vitesse sur les parois, par exemple la vitesse d'entrée pour un écoulement de canal.

**Zhu et He** ont décrit une méthode pour calculer les trois fonctions inconnues de distribution basées sur les équations de densité et du moment suivantes avec des conditions d'équilibre normales aux limites:

$$\rho = \sum_{i=0}^8 f_i \quad (3.24)$$

$$\rho \cdot u = \sum_{i=0}^8 f_i \cdot e_i \quad (3.25)$$

L'équation (3.24) peut s'écrire :

$$\rho = f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7 + f_8 \quad (3.26)$$

**Suivant la composante x :**

$$\rho \cdot u = f_1 + f_5 + f_8 - f_6 - f_3 - f_7 \quad (3.27)$$

**Suivant la composante y :**

$$\rho \cdot v = f_5 + f_2 + f_6 - f_7 - f_4 - f_8 \quad (3.28)$$

Nous avons quatre inconnues : trois fonctions de distribution et un inconnu supplémentaire  $\rho$  aux limites. Cependant, nous ne disposons que de trois équations, nous avons besoin d'une autre équation ou d'une condition à résoudre pour quatre inconnues (trois fonctions de distribution et  $\rho$ ). La condition vient de l'hypothèse de la condition, normale à la surface.

Fig. 3.5 montre un domaine à l'est, à l'ouest, au nord et au sud des frontières. Les composantes de la vitesse sont connues dans ces limites. Dans la figure suivante, les fonctions inconnues de distribution sont indiquées par des lignes en pointillés. Les fonctions de distribution connus après la propagation sont indiquées par des lignes pleines. Dans notre cas seuls les limites OUEST et EST sont utilisées.

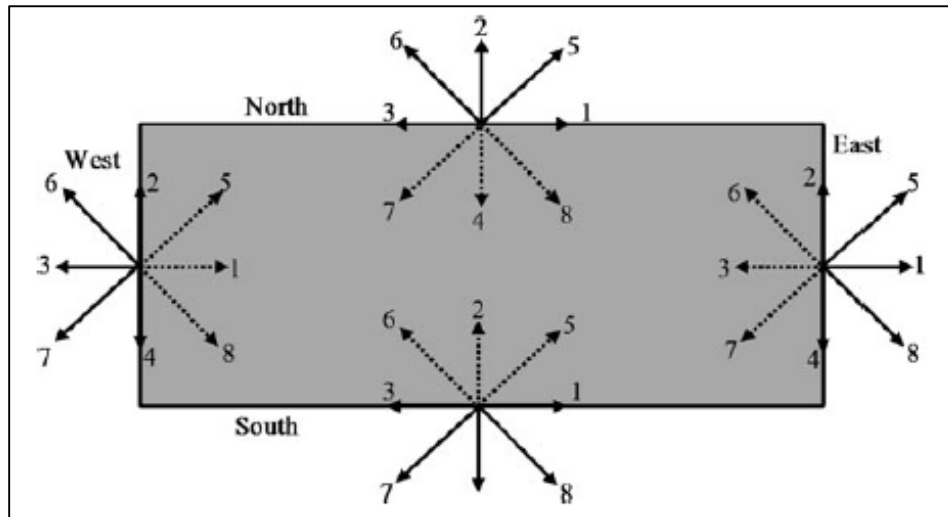


Fig. 3.5 : Fonctions de distribution aux limites du domaine [50]

### 3.5.1.2.3. Ouest :

Pour les limites ouest, les fonctions de distribution non données sont :  $f_1, f_5$  et  $f_8$ .

La résolution des quatre inconnus :  $\rho_0, f_1$  et  $f_5$  est donnée par les équations suivantes :

$$\rho_0 = \frac{1}{1-u_0} \cdot [f_0 + f_2 + f_4 + 2(f_3 + f_6 + f_7)] \quad (3.29)$$

$$f_1 = f_3 + \frac{2}{3} \cdot \rho_0 \cdot u_0 \quad (3.30)$$

$$f_5 = f_7 - \frac{1}{2}(f_2 - f_4) + \frac{1}{6}\rho_0 \cdot u_0 + \frac{1}{2}\rho_0 \cdot v_0 \quad (3.31)$$

$$f_8 = f_6 + \frac{1}{2}(f_2 - f_4) + \frac{1}{6}\rho_0 \cdot u_0 - \frac{1}{2}\rho_0 \cdot v_0 \quad (3.32)$$

Par conséquent quatre inconnus sont spécifiés aux limites Ouest. Cette méthode peut être appliquée pour les autres limites.

### 3.5.1.2.4. Est :

$$\rho_E = \frac{1}{1+u_E} \cdot [f_0 + f_2 + f_4 + 2(f_1 + f_5 + f_8)] \quad (3.33)$$

$$f_3 = f_1 - \frac{2}{3} \rho_E \cdot u_E \quad (3.34)$$

$$f_7 = f_5 + \frac{1}{2} (f_2 - f_4) + \frac{1}{6} \rho_E \cdot u_E - \frac{1}{2} \rho_E \cdot v_E \quad (3.35)$$

$$f_6 = f_8 - \frac{1}{2} (f_2 - f_4) - \frac{1}{6} \rho_E \cdot u_E + \frac{1}{2} \rho_E \cdot v_E \quad (3.36)$$

## 3.5.2. Réseau D<sub>2</sub>Q<sub>5</sub> :

### 3.5.2.1. Paramètres du réseau D<sub>2</sub>Q<sub>5</sub> :

On considère un modèle bidimensionnel de la méthode LBM à cinq vitesses discrètes appelé modèle D<sub>2</sub>Q<sub>5</sub> sur une grille carrée de pas  $\Delta x = \Delta y = 1$ , comme le montre la figure 3.6

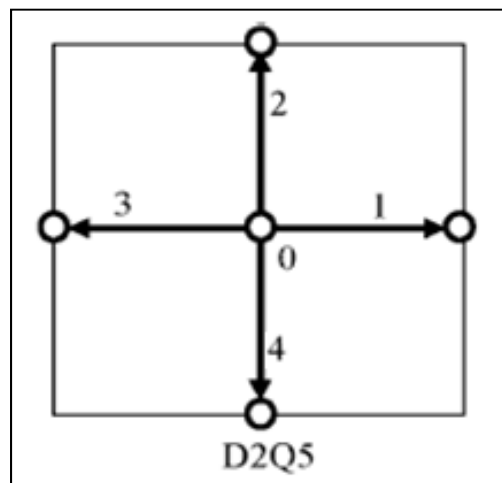


Fig. 3.6 : Réseau D<sub>2</sub>Q<sub>5</sub>

Comme il n'y a pas de couplage entre l'équation de vitesse et celle d'énergie, deux fonctions de distribution différentes doivent être résolues, par exemple  $f$  pour la vitesse et  $g$  pour l'énergie.

L'effort fournis pour l'établissement d'un modèle stable pour la méthode de Boltzmann sur réseaux thermique (TLBM) n'a porté ses fruits que récemment.

L'équation de la fonction de vitesse a déjà été résolue le long de ce chapitre.

Pour la fonction d'énergie, l'équation est la suivante :

$$g_i(x + \Delta x, t + \Delta t) = g_i(x, t) \cdot [1 - \omega_s] + \omega_s \cdot g_k^{eq}(x, t) \quad (3.37)$$

La sommation des fonctions de distributions dans chaque nœud du réseau D2Q5 nous donne la température :

$$T = \sum_{i=1}^5 g_i \quad (3.38)$$

La fonction d'équilibre de distribution est :

$$g_i^{eq} = w_i \cdot \phi(x, t) \cdot \left[ 1 + e_i \cdot \frac{\vec{u}}{c_s^2} \right] \quad (3.39)$$

$e_i$  sont les vitesses du réseau définies par :

$$e_i = c \cdot \left( \cos \frac{2\pi(i-1)}{4}, \sin \frac{2\pi(i-1)}{4} \right) i = 1, \dots, 5 \quad (3.40)$$

**Les valeurs des vitesses de propagation sont :**

$$c_0 = (0,0)$$

$$c_1 = (1,0)$$

$$c_2 = (0,1)$$

$$c_3 = (-1,0)$$

$$c_4 = (0,-1)$$

**Les facteurs de poids correspondant sont :**

$$w_0 = 1/3$$

$$w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = 1/6$$

L'équation du coefficient de diffusion thermique est donnée par :

$$\alpha = \frac{\Delta x^2}{3 \cdot \Delta t} \cdot \left( \frac{1}{\omega} - \frac{1}{2} \right) \quad (3.41)$$

### 3.5.2.2. Conditions aux limites :

L'établissement des conditions aux limites pour l'approche TLBM est différent dans la mesure où il faut déterminer les fonctions de distributions entrantes du réseau D<sub>2</sub>Q<sub>5</sub> avec la température comme donnée.

Nous devons déterminer et résoudre les équations adéquates pour calculer les fonctions de distributions inconnues.

Dans notre cas nous avons deux températures imposées : une à l'entrée  $T_f$  et vers le bas  $T_c$ .

#### 3.5.2.2.1. Condition aux limites à l'entrée :

Les conditions aux limites de température d'entrée sont imposées au fluide sur l'ouverture gauche . en se basant sur l'équation suivante:

$$T = \sum_{k=1}^5 g_k \quad (3.42)$$

On détermine  $g_3$  comme suit :

$$g_1 = T_e - (g_0 + g_2 + g_3 + g_4) \quad (3.43)$$

#### 3.5.2.2.2. Condition de Dirichlet « Température constante » à la paroi inférieure :

Les conditions aux limites de Dirichlet sont imposées à la paroi du bas. Selon LBM la condition au limite est élaborée de tel sorte que l'équation (3.38) soit satisfaite.

### 3.5.2.2.3. Condition adiabatique aux parois haute, gauche et droite :

Les trois parois avec des conditions adiabatiques satisferont la condition  $\varphi = 0$  ce qui fait que :

$$\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right| = 0 \quad n = x, y, z \quad (3.44)$$

D'après LBM avec l'approche du second degré, nous trouvons que la fonction de distribution inconnue est donnée par la formule suivante :

$$g_k(i, j) = \frac{(4 \cdot g_k(i, j-1) - g_k(i, j-2))}{3} \quad (3.45)$$

### 3.5.2.2.4. Conditions aux limites à la sortie :

A la sortie on considère que la température aux nœuds sur la sortie est égale à celle qui des nœuds précédents :

$$T(i, j) = T(i - 1, j) \quad (3.46)$$

## 4. Mise en œuvre informatique :

Nous avons élaboré un code de calcul sous l'éditeur MATLAB en appliquant la méthode de Boltzmann sur réseau thermique à double populations en deux dimensions. Le modèle D2Q9 pour le champ dynamique et le modèle simplifié D2Q5 pour le champ thermique ont été implémentés et élaborés.

Le choix de l'éditeur MATLAB est guidé par la richesse de ses procédures et fonctions prédéfinies, par conséquent une mise en œuvre facile du programme de calcul.

L'organigramme de calcul est présenté dans la figure (Fig .3 .7):

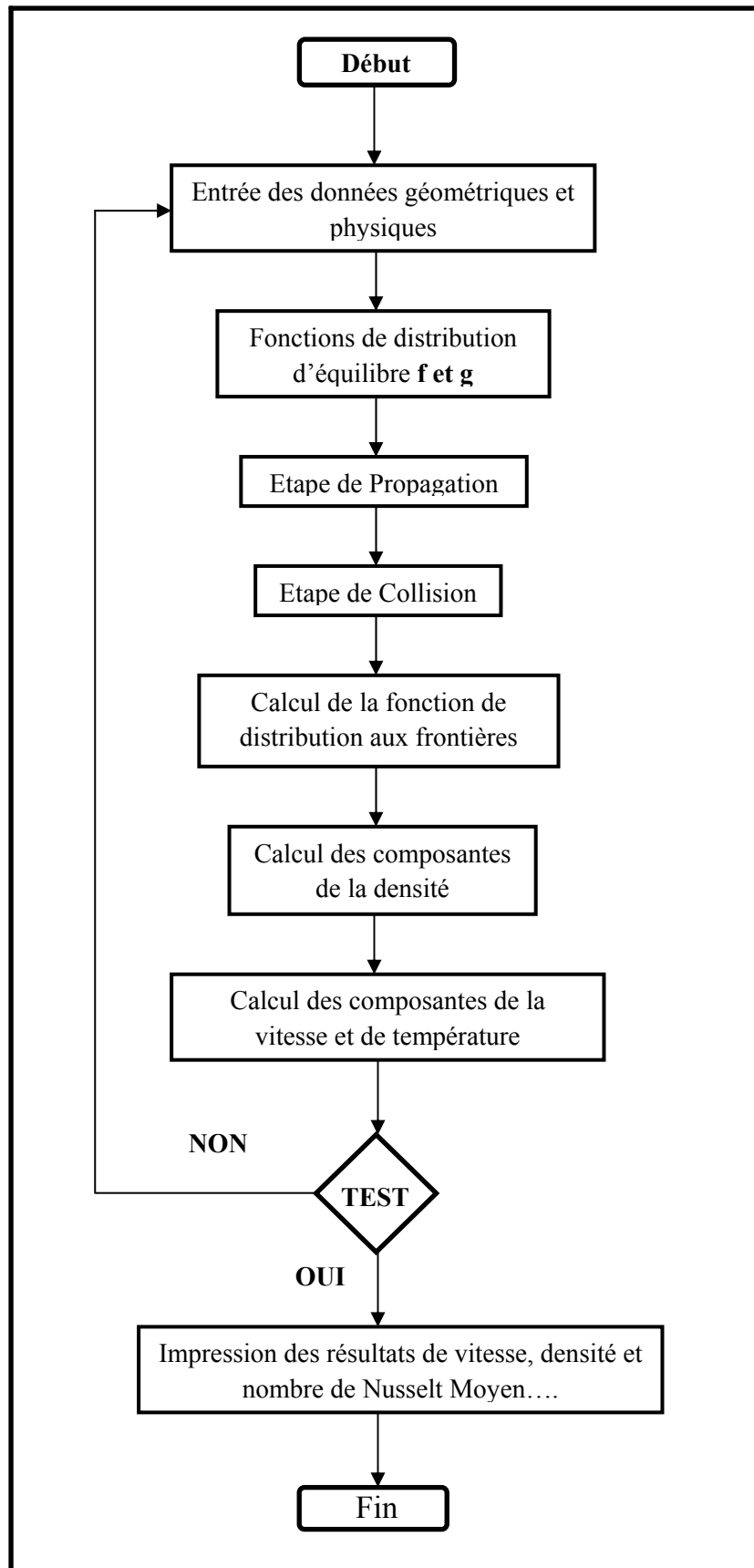


Fig. 3.7 : Organigramme de calcul de TLBM

Après avoir implémenté la configuration géométrique étudiée, les entrées du programme sont :

- Le nombre de Richardson  $Ri$ .
- Le nombre de Grashof  $Gr$ .
- Le nombre de Reynolds  $Re$ .
- Le nombre de Rayleigh  $Ra$ .

Les résultats du calcul se manifestent d'une manière numérique et graphique des champs de température, des vitesses, des lignes de courant ainsi que le calcul du nombre de Nusselt moyen  $Nu$ .

Ce code de calcul a été testé et comparé aux résultats obtenus par le logiciel de calcul FLUENT basé sur les volumes finis et ceux de la littérature. Ces résultats de la validation sont présentés dans le chapitre suivant.

## **5. Conclusion :**

Dans ce chapitre, nous avons présenté la nouvelle méthode numérique basée sur l'équation de Boltzmann notamment la méthode de Boltzmann sur réseau. L'historique de son élaboration et son développement a été exposé ainsi que les bases théoriques fondamentales de son application. Un algorithme de calcul basé sur LBM thermique à double populations est présenté ainsi qu'un code de calcul sur l'éditeur MATLAB a été élaboré.

Dans le chapitre suivant, nous présenterons les résultats de la validation du code élaboré et celles de l'étude numériques d'un transfert de chaleur en convection mixte dans une cavité ventilée

# Chapitre IV

# **Chapitre IV**

## **Résultats & Discussions**

### **1. Introduction :**

### **2. Spécification du modèle utilisé :**

### **3. Hypothèses de calcul :**

### **4. Validation du code de calcul**

#### 4.1. Première validation

#### 4.2. Deuxième validation

##### 4.2.1. Méthodes des volumes finis

##### 4.2.2. Méthode de Boltzmann sur réseau

### **5. Validation des résultats de la cavité ventilée**

#### 5.1. Résultats et interprétations

##### 5.1.1. Effets du nombre de Richardson

##### 5.1.2. Effets du nombre de Grashof

##### 5.1.3. Effets du nombre de Reynolds

# **Chapitre IV**

## **RESULTATS & INTERPRETATIONS**

### **1. Introduction :**

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats de l'étude numérique de la convection mixte, laminaire en deux dimensions dans une cavité carrée ventilée avec deux ouvertures en régime permanent.

L'étude numérique est effectuée en utilisant le code de calcul élaboré et implémenté sur l'éditeur Matlab. Dans ce travail, nous avons utilisé aussi le code Fluent pour simuler le cas étudié afin de confronter et comparer les deux méthodes, ceci a permis aussi la validation des résultats obtenus par le TLBM.

### **2. Spécification du modèle utilisé :**

Le modèle choisi est une cavité carrée de côté  $H$  avec deux ouvertures de ventilation, la première située dans le coin bas gauche de côté  $L_1$  et la deuxième située dans le coin haut droit de côté  $L_2$ , avec  $L_2 = L_1 = 20\%$  de la hauteur de la cavité  $H$ .

Toutes les parois de la cavité sont adiabatiques sauf pour la paroi basse est maintenue par une source de chaleur chaude à une température constante  $T_c$ .

L'air entrant à travers l'ouverture gauche de la paroi avec une température froide  $T_f$  et une vitesse uniforme  $U_0$  comme le montre la figure (Fig.4.1). Le fluide choisi est l'air considéré incompressible et newtonien avec ( $Pr = 0.71$ ).

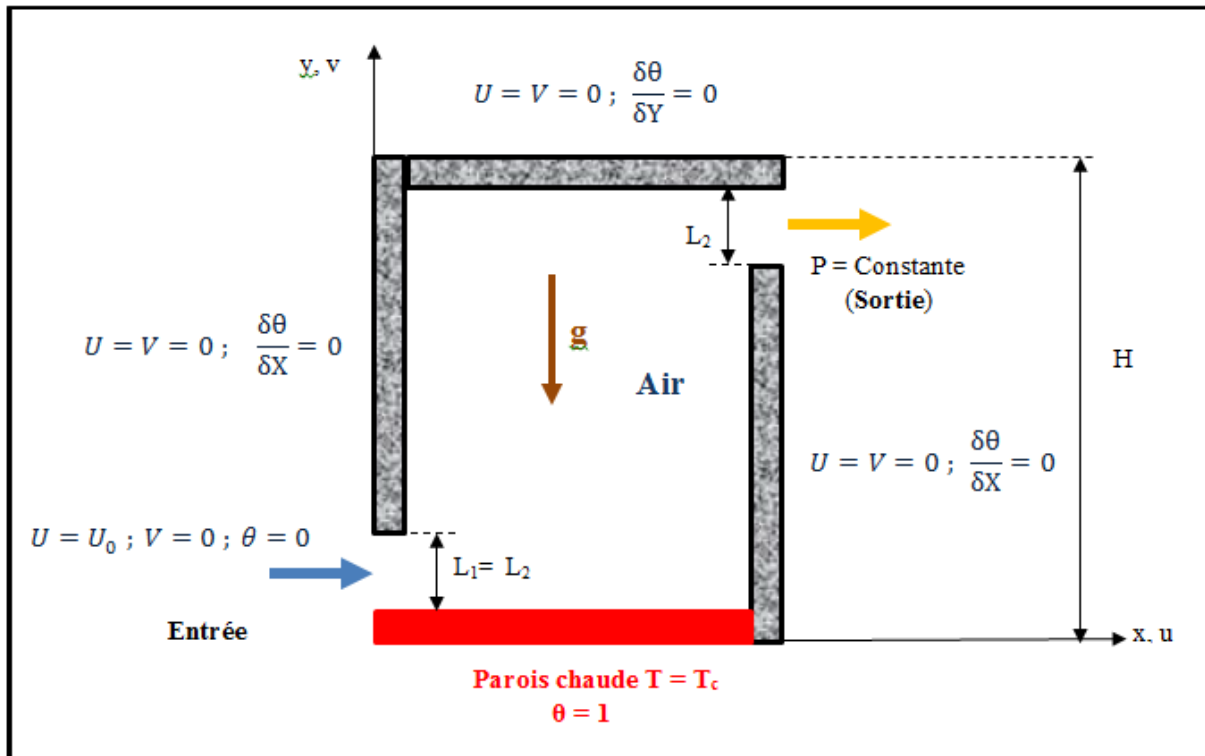


Fig. 4.1 : Géométrie et configuration du problème physique

### 3. Hypothèses de calcul :

Les hypothèses simplificatrices retenues dans notre étude sont les suivantes :

- Le fluide utilisé est un fluide newtonien, incompressible et qui satisfait l'hypothèse de Boussinesq.
- La masse volumique varie linéairement avec la température et elle est donnée par la relation suivante :

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta \cdot (T - T_0)] \quad (4.1)$$

- L'écoulement est de type convection mixte et reste laminaire.
- Les propriétés thermo physiques du fluide sont constantes et sont évaluées à la température de référence.
- L'écoulement est considéré 2D et stationnaire.
- Le transfert de chaleur par radiation est négligeable.
- La dissipation de la chaleur par effet de viscosité est négligeable.

## 4. Validation du code de calcul :

### 4.1 Première validation :

Dans la première validation nous avons étudié la convection naturelle dans une cavité carrée fermée différentiellement chauffée, dont les deux parois horizontales du haut et du bas sont considérées adiabatiques. Ce type de configuration est associé à un problème classique intensivement étudié et utilisé pour vérifier l'exactitude des codes numériques (voir fig.4.2). On souligne que la paroi latérale de droite de la cavité est soumise à une température froide et celle de gauche à une température chaude, ce qui produit entre les deux faces, un gradient de température horizontale ( $\Delta T = T_c - T_f$ ). Nous comparons les résultats de la valeur de Nusselt moyen des deux méthodes avec ceux de la littérature.

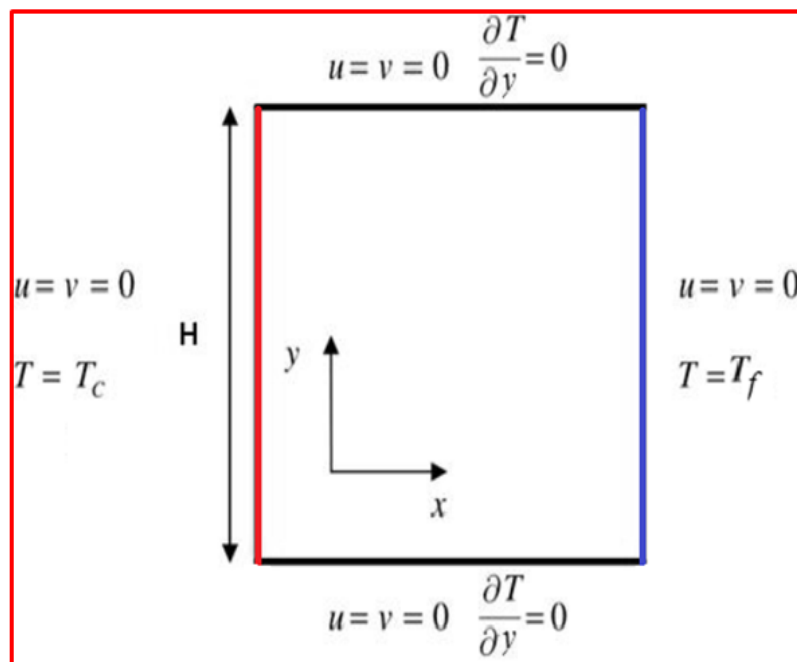


Fig. 4.2 : Configuration géométrique du domaine de validation

Dans cette étude, nous effectuons les simulations pour des nombres de Rayleigh modérés  $10^3 \leq Ra \leq 10^5$  et un nombre de Prandtl  $Pr = 0,71$ .

L'étude de maillage basée sur la Méthode de Boltzmann sur réseau à double population (TLBM) a été réalisée au niveau du laboratoire. Le maillage de résolution était satisfaisant entre  $71 \times 71$  et  $151 \times 151$  pour les différents nombres de Rayleigh.

Nous avons aussi effectué la solution numérique des équations de Navier-Stokes pour ce cas test. En utilisant le logiciel Fluent 6.3.26. Ce logiciel est basé sur la méthode des volumes finis (Patankar [50]). L'algorithme SIMPLE a été choisi pour le couplage vitesse pression dans les équations de Navier-Stokes. L'équation de pression est discrétisée par le schéma PRESTO, des schémas d'interpolation du deuxième ordre ont été adoptés pour les autres équations.

La solution est considérée comme convergente quand le résidu des équations algébriques est inférieur à  $10^{-5}$ .

**Tableau 4.1. :** Présentation des résultats du nombre de Nusselt moyen pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh avec leur comparaison avec les résultats de la littérature

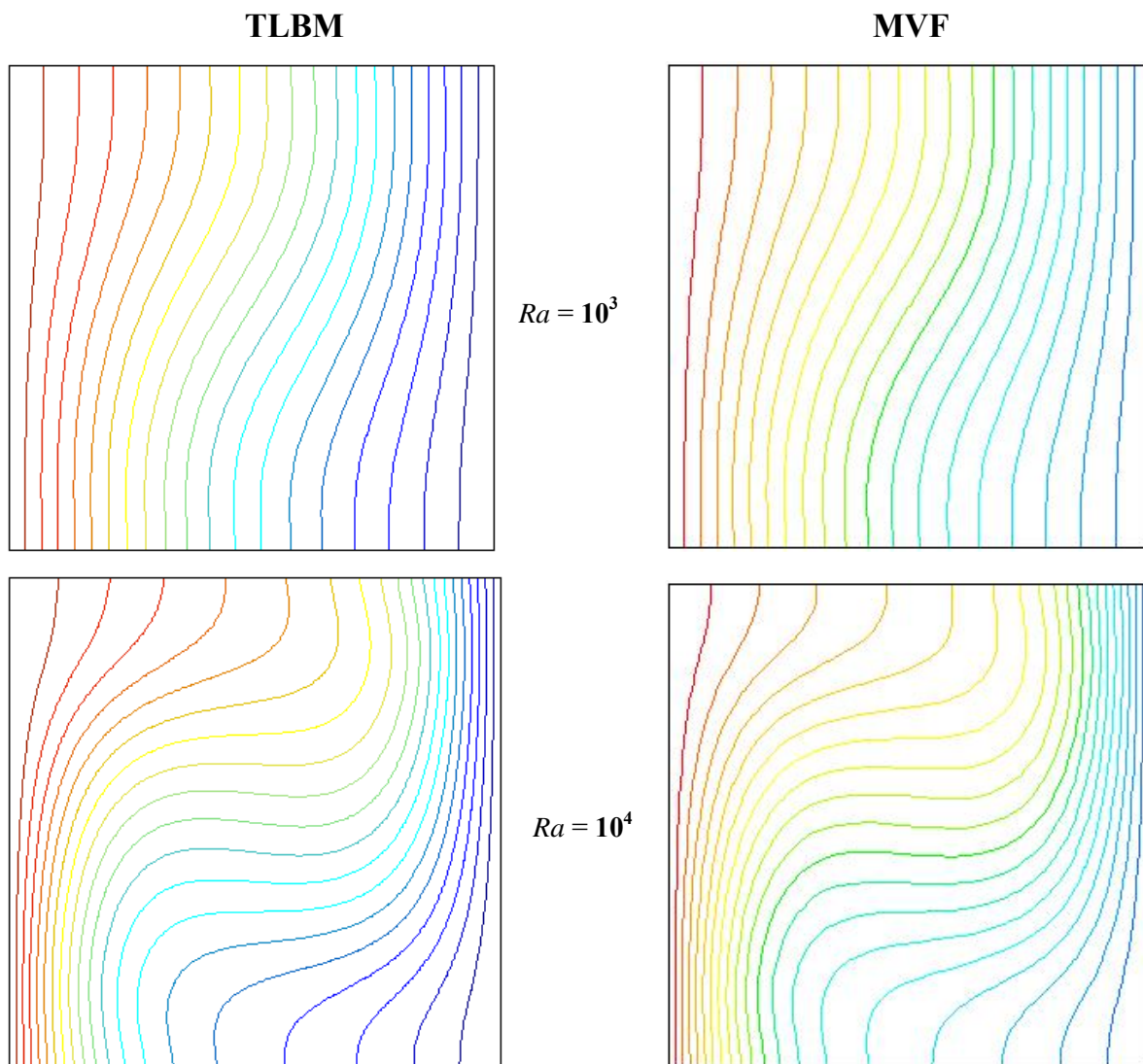
Ra	Présent travail		Résultats de la littérature	
	TLBM	FVM	De Vahl Davis [54]	Markatos & Pericleous [55]
$10^3$	<b>1,115</b>	<b>1,116</b>	1,118	1,108
$10^4$	<b>2,221</b>	<b>2,242</b>	2,243	2,201
$10^5$	<b>4.461</b>	<b>4,515</b>	4,519	4,430

Le tableau 4.1 présente les résultats de calcul numérique obtenus du nombre de Nusselt moyen avec le code de TLBM. Ces derniers sont comparés avec les résultats de la simulation en volume finis, utilisant le code Fluent et ceux de la littérature, utilisant différentes méthodes numériques. Il est clair que les résultats de notre modèle TLBM sont en bon accord avec les résultats de la littérature dans la gamme des nombres de Rayleigh testées. L'erreur, calculée pour le nombre de Nusselt moyen Nu, ne dépasse pas 1,2% par rapport aux résultats de la référence [54], 1,9% par rapport à [55]. De même, les résultats obtenus avec le code Fluent montrent un bon accord avec ceux obtenus par le code de TLBM ou l'erreur n'accède pas 1,2%.

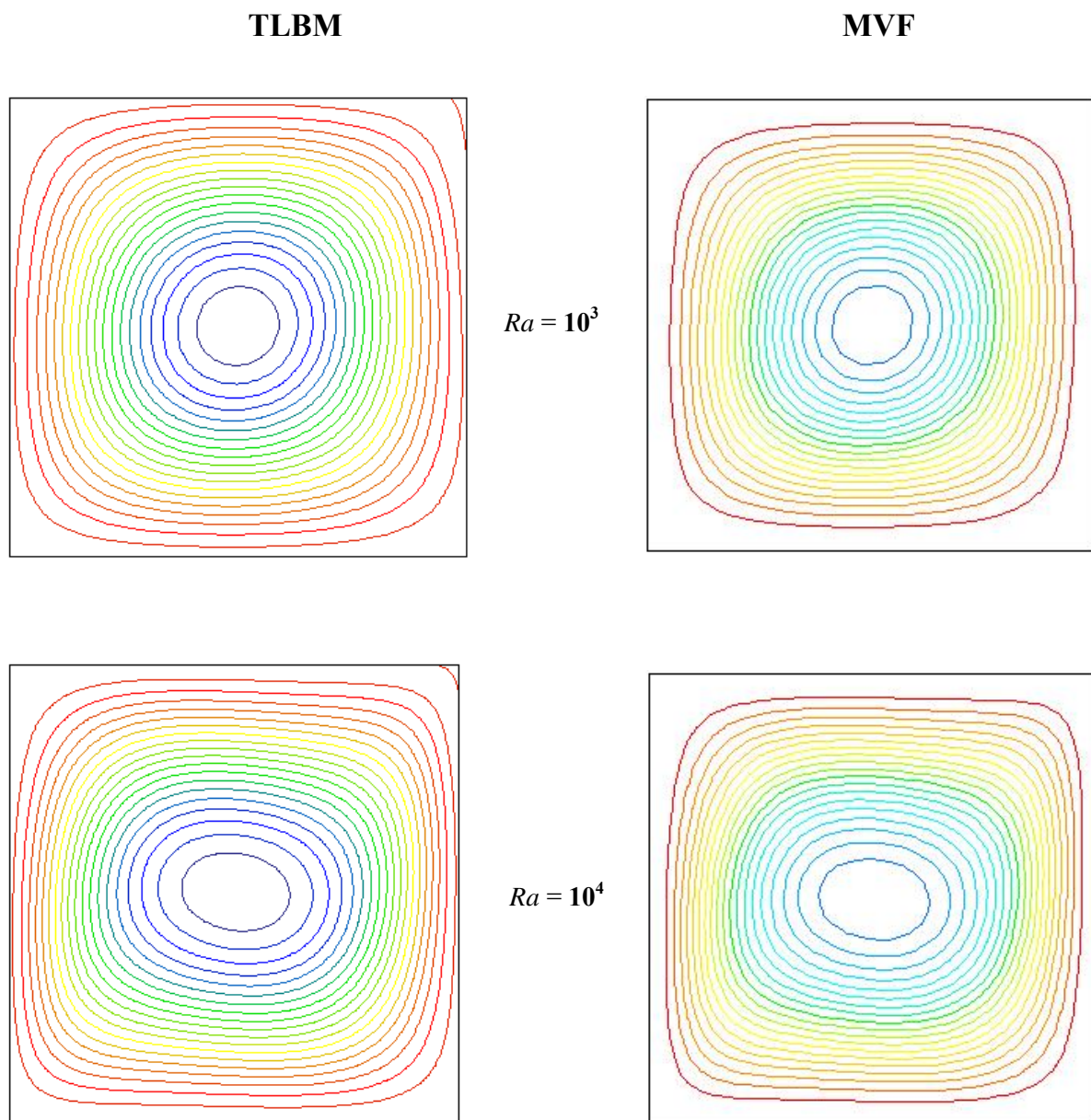
Les résultats, tracés dans les graphes (**Fig.4.3, Fig.4.4, Fig.4.5 et Fig.4.6**) représentent des comparaisons respectivement, des isothermes, des lignes de courants,

des profils de température et de vitesse à demi-hauteur de la cavité. Ces résultats sont obtenus par les deux méthodes : le TLBM et les volumes finis (code Fluent).

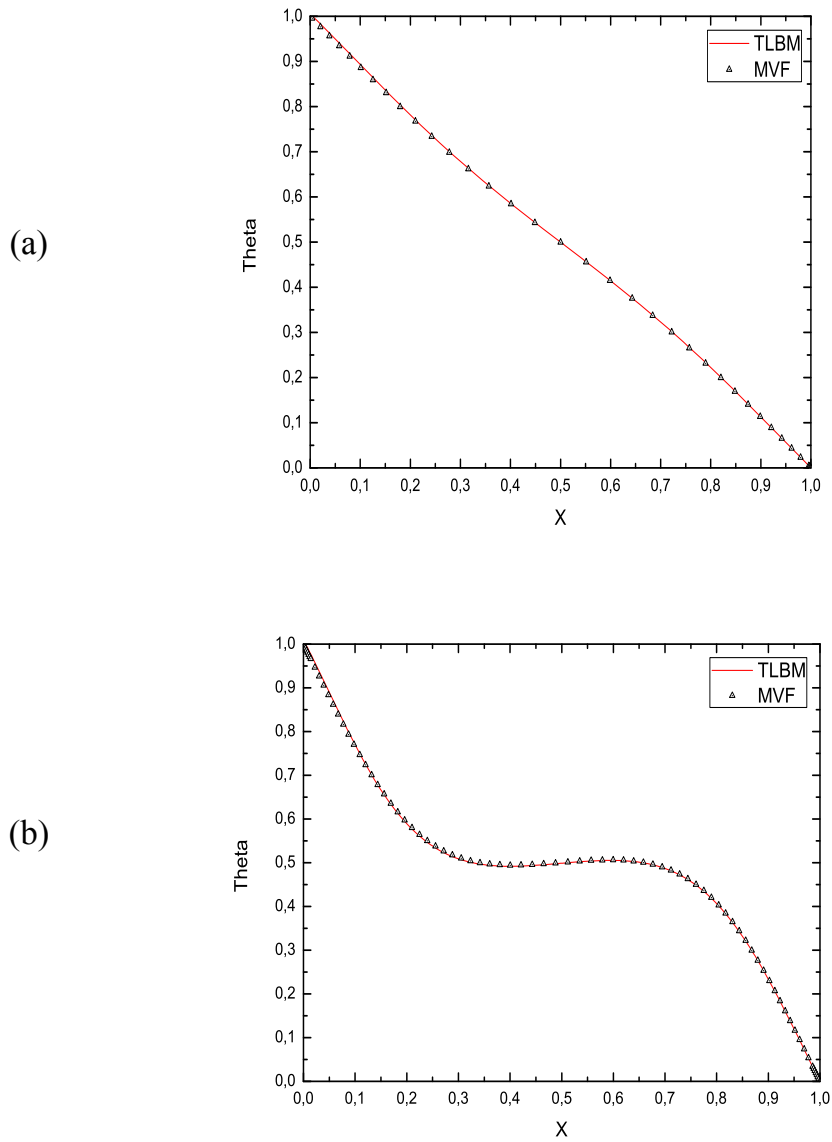
L'examen de ces figures permet de bien cerner la description du transport thermo-fluide ayant lieu lors de la convection naturelle à l'intérieur de l'enceinte en régime laminaire et permanent. La concordance des graphes tracés montre la validité des résultats obtenus par le code élaboré en se basant sur la méthode de Boltzmann sur réseau, ainsi que sa capacité de reproduire le phénomène de la convection naturelle dans la cavité carrée.



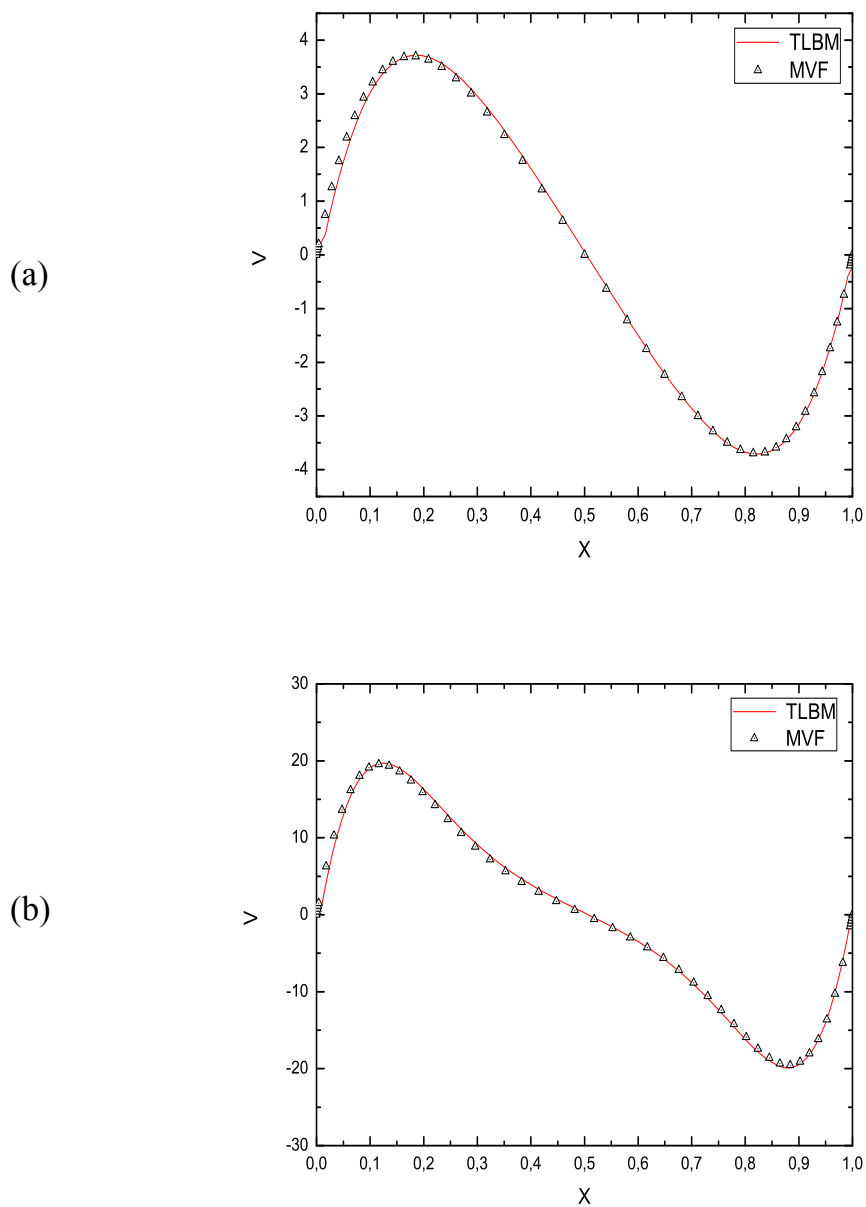
**Fig. 4.3.** Comparaison des isothermes pour  $Ra = 10^3$  et  $10^4$ ,



**Fig. 4.4.** Comparaison des lignes de courant pour  $Ra = 10^3$  et  $10^4$



**Fig.4.5.** Profils de Température  $\theta$  à mi-hauteur de l'enceinte,  
 $Y = 1/2$ , (a)  $Ra = 10^3$ , (b)  $Ra = 10^4$



**Fig.4.6.** Profils de Vitesse adimensionnelle  $V$  à mi-hauteur de l'enceinte,  
 $Y = 1/2$ , (a)  $Ra = 10^3$ , (b)  $Ra = 10^4$

## 4.2 Deuxième validation :

Dans cette deuxième validation, nous allons utiliser la configuration géométrique traitée dans cette étude, notamment la cavité carrée ventilée pour un nombre de Richardson  $Ri = 10$ , et un nombre de Grashof  $Gr = 10^5$ . Le fluide choisi est considéré incompressible et newtonien avec le nombre de Prandtl  $Pr = 0,71$ .

Le calcul est effectué avec les deux méthodes numériques : celle de Boltzmann sur réseau thermique en utilisant le code élaboré et celle des volumes finis pour la résolution des équations de Navier-Stokes en utilisant le code Fluent.

### 4.2.1. Méthode des volumes finis :

L'algorithme SIMPLE a été choisi pour le couplage vitesse pression dans les équations de Navier-Stokes. L'équation de pression est discrétisée par le schéma PRESTO, des schémas d'interpolation du deuxième ordre ont été adoptés pour les autres équations.

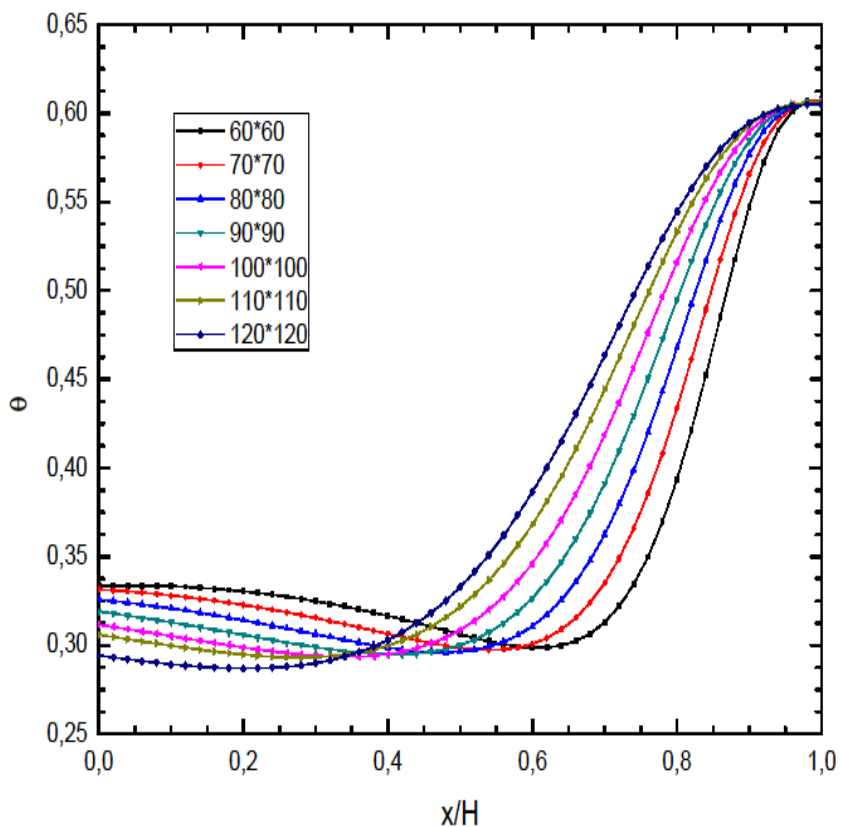
La solution est considérée comme convergente quand le résidu des équations algébriques est inférieur à  $10^{-5}$ .

Plusieurs maillages ont été utilisés pour voir leurs effets sur la solution numérique : **60\*60, 70\*70, 80\*80, 90\*90, 100\*100, 110\*110 et 120\*120**.

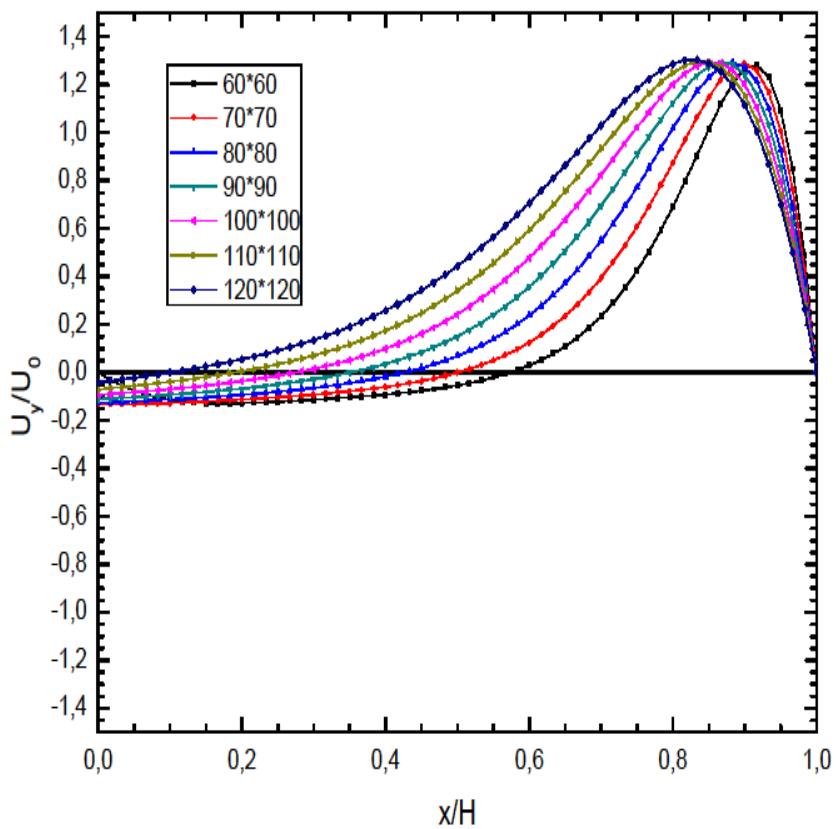
Afin de valider le maillage, nous avons constaté que la convergence dans ce type de problème est très difficile de l'obtenir, car chaque fois que le maillage augmente le nombre de Nusselt augmente.

D'après [51], [52] et [53], le maillage est validé dans ce type de problème avec l'étude de la convergence du profil de vitesse et de température à  $Y = 1/2$ .

Nous avons constaté que les profils de vitesse et de température à  $Y = 1/2$  pour  $Ri=10$  convergent vers un maillage de **120\*120** (fig 4.7 et fig 4.8). De ce fait, ce maillage sera adopté pour le reste du travail. Le tableau (4.2) montre l'évolution des paramètres tels que  $Nu_{moy}$  et  $\theta_{max}$ ,  $U_{max}$ ,  $U_{min}$  en fonction de maillage pour  $Ri=10$ .



**Fig. 4.7 :** Profil de température  $\theta$  à  $Y = 1/2$  pour  $Ri = 10$  pour différents maillages



**Fig. 4.8 :** Profil de vitesse à  $Y = 1/2$  pour  $Ri = 10$  pour différents maillages

**Tableau 4.2** : Valeurs de  $Nu_{moy}$  et  $\theta_{max}$ ,  $U_{max}$ ,  $U_{min}$  en fonction du maillage allant pour  $Ri=10$ 

maillage	$Nu_{moy}$	$\theta_{max}$	$U_{max}$	$U_{min}$
60*60	<b>6,08256</b>	0,60775	1,28234	-0,12885
70*70	<b>6,13145</b>	0,60720	1,28788	-0,1314
80*80	<b>6,17824</b>	0,60680	1,29124	-0,13433
90*90	<b>6,22203</b>	0,60650	1,29363	-0,13754
100*100	<b>6,26359</b>	0,60615	1,29556	-0,14111
110*110	<b>6,30058</b>	0,60620	1,29602	-0,14887
<b>120*120</b>	<b>6,34063</b>	<b>0,60495</b>	<b>1,29630</b>	<b>-0,16150</b>
130*130	<b>6,35121</b>	0,59910	1,29658	-0,17411

#### 4.2.2. Méthode de Boltzmann sur réseau :

Nous avons utilisé le code de calcul développé sur l'éditeur Matlab, basé sur la méthode de Boltzmann sur réseau thermique, à double population. Le champ hydrodynamique est modélisé par le réseau  $D_2Q_9$  et le champ thermique par le réseau  $D_2Q_5$  [49]. La solution est considérée comme convergente lorsque :

$$\frac{\sum_{i,j} \|u(x_{i,j}, t + \delta T) - u(x_{i,j}, t)\|}{\sum_{i,j} \|u(x_{i,j}, t)\|} \leq 10^{-10}$$

La validation du modèle est faite pour différents maillages 81\*81, 91\*91, 101\*101, 121\*121, 131\*131 et 151\*151. Nous avons remarqué que le maillage de 121\*121 est suffisant pour le cas à étudier et permet d'avoir des résultats satisfaisantes en comparant avec celles obtenues par la méthode des volumes finis sous Fluent.

### 4.2.3. Validation des résultats de la cavité ventilée :

La confrontation des résultats obtenus par les deux méthodes de calcul, nous a permis de comparer les différents paramètres caractérisant ce phénomène physique de la cavité ventilée, notamment la valeur de Nusselt moyen (voir tableau 4.3). Nous remarquons que les deux valeurs calculées par les deux méthodes : celle de Boltzmann sur réseau et celle des volumes finis sont très proche avec un taux d'erreur de **0,10%**.

**Tableau 4.3 :** Comparaison des valeurs de Nu pour  $Ri = 10$  entre la méthode des volumes finis et Boltzmann sur réseau

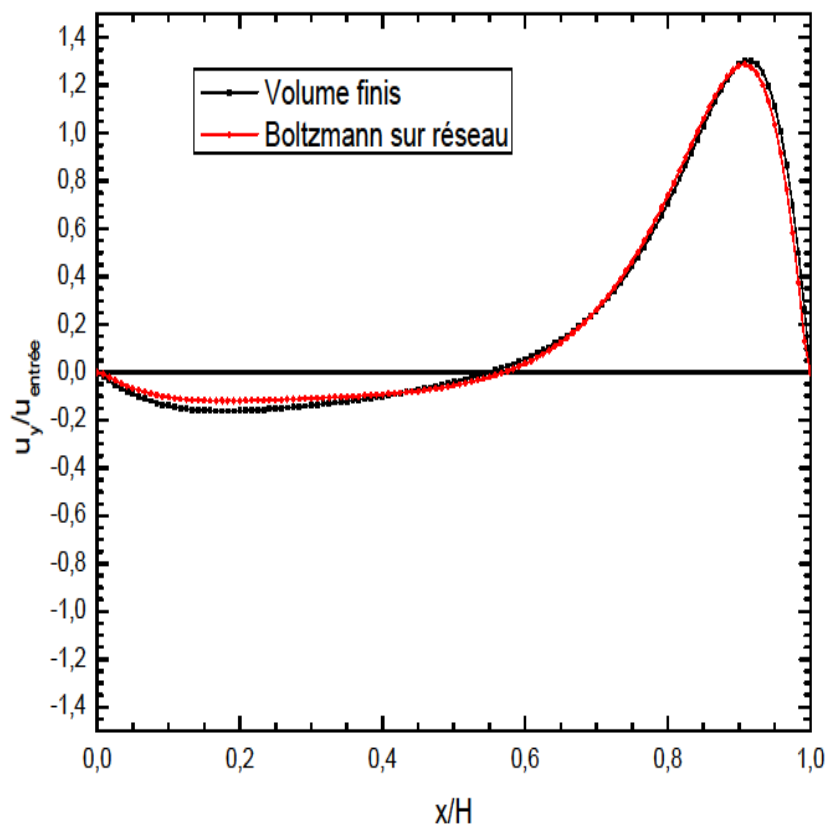
Méthode utilisée	$Nu_{moy}$	Erreur
MVF (Fluent)	<b>6,34063</b>	<b>0,10%</b>
TLBM code	<b>6,34710</b>	

Nous avons poursuivi la confrontation des résultats obtenus par les deux méthodes en comparant les profils de vitesse et de température à la demi hauteur de la cavité, c-à-d, à  $Y = 1/2$ .

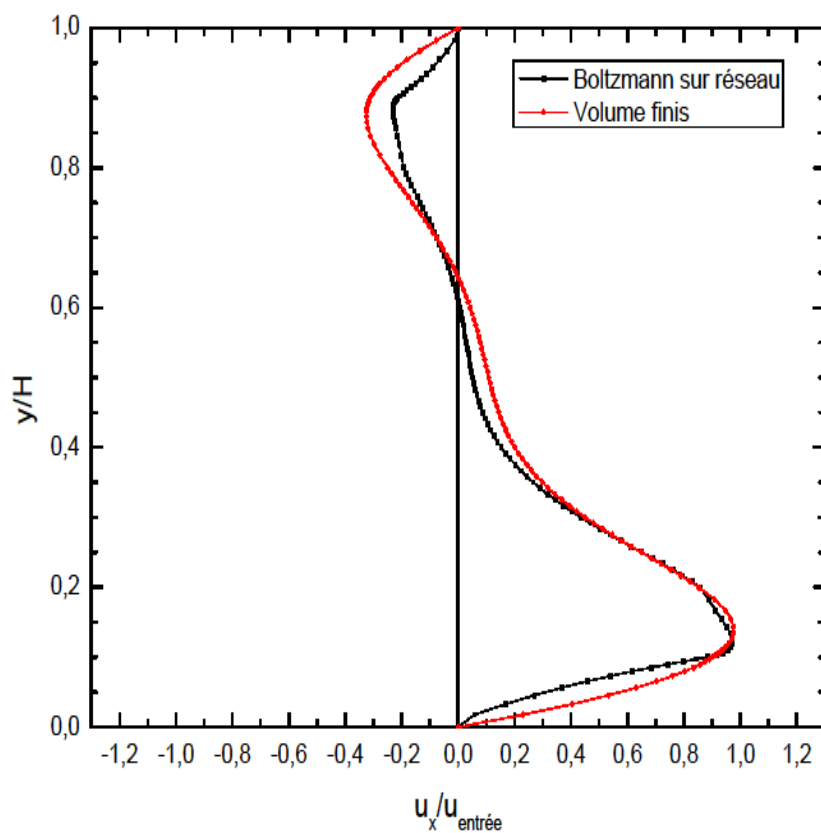
Les figures (fig 4.9) et (fig 4.12) illustrent le bon accord entre le profil de vitesse  $V=Uy/U_{entrée}$  et de température à  $Y=1/2$ , obtenus par le LBM et celui obtenus par MVF sous Fluent.

Les résultats de comparaison entre les deux méthodes montrent une concordance très satisfaisante. La différence des valeurs calculées variée entre 0,90% à 1,31% pour la vitesse adimensionnelle c-à-d  $V_{max}=Uy_{max}/U_{entrée}$  (tableaux 4.4).

Les valeurs de la température adimensionnelle optimale sont calculées à mi-hauteur et mi-largeur de la cavité. La différence de ces valeurs entre les deux méthodes sont de 3,66% pour  $\theta_{max}(Y/2)$ , de  $\theta_{min}(Y/2)$  est de 1,40% et 2,46% pour  $\theta_{min}$  à  $X/2$  (tableaux 4.5).



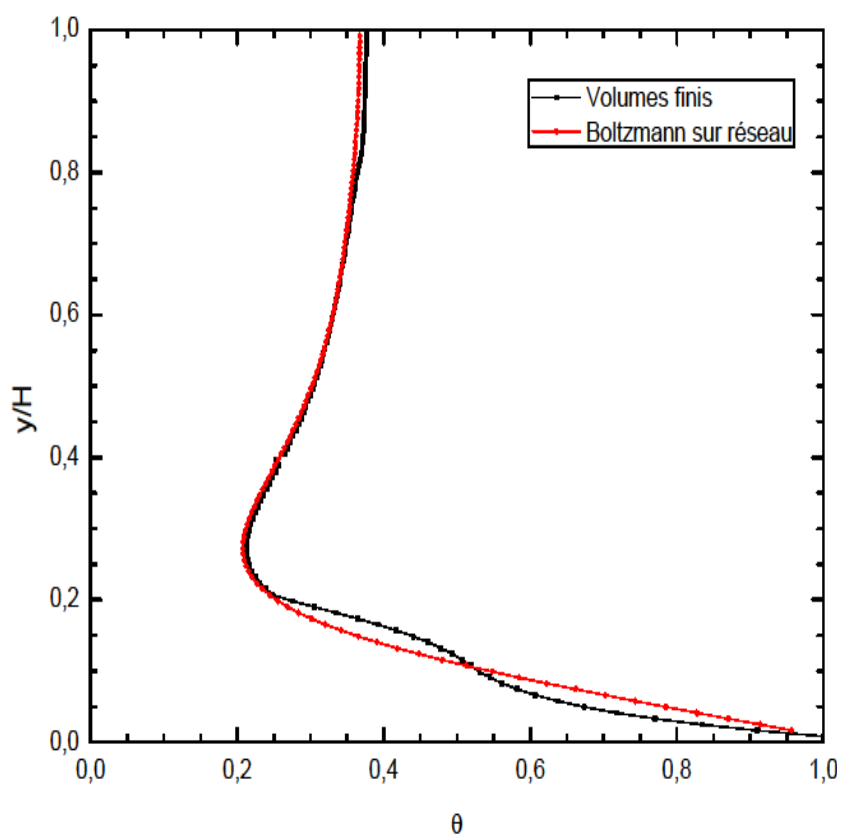
**Fig. 4.9 :** Comparaison du profil de vitesse à  $Y = 1/2$  pour  $Ri = 10$  entre la méthode des volumes finis et Boltzmann sur réseau



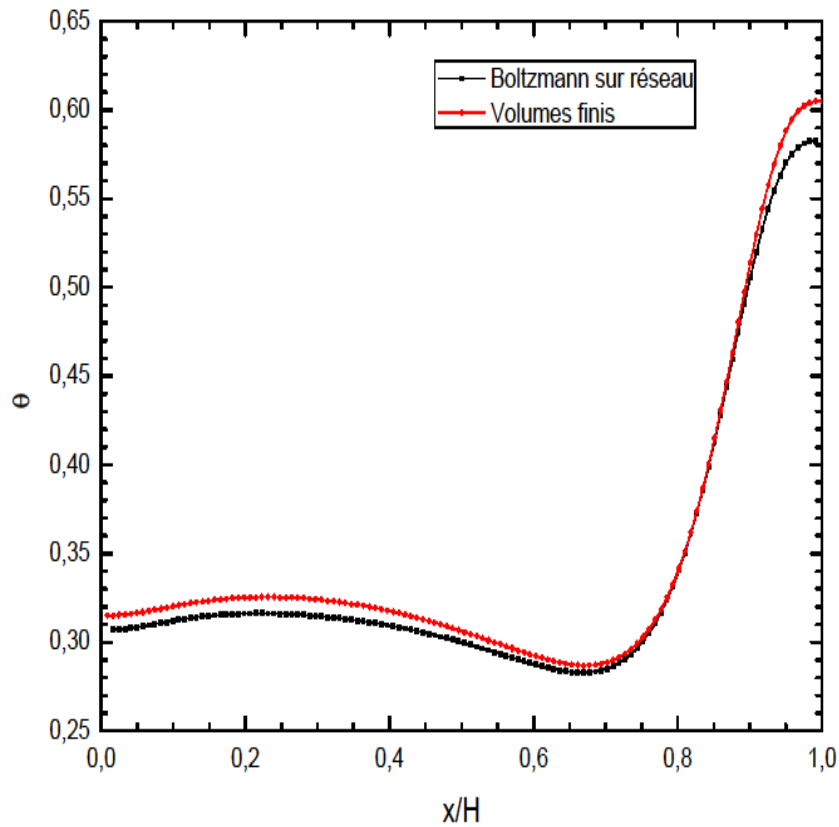
**Fig. 4.10 :** Comparaison du profil de vitesse à  $X = 1/2$  pour  $Ri = 10$  entre la méthode des volumes finis et Boltzmann sur réseau

**Tableau 4.4** : Comparaison des valeurs de  $U_{\max}$  pour  $Ri = 10$   
entre la méthode des volumes finis et Boltzmann sur réseau

Ri	10		
Travail	Present Boltzmann sur réseau	Present Volumes finis	Erreur
$U_{x_{\max}}/U_{\text{entrée}}$ ( $X=1/2$ )	0,97231	0,9759	<b>0,37%</b>
Y	0,14876	0,17355	<b>14,28%</b>
$U_{y_{\max}}/U_{\text{entrée}}$ ( $Y=1/2$ )	1,2872	1,30423	<b>1,31%</b>
X	0,90909	0,91736	<b>0,90%</b>



**Fig. 4.11** : Comparaison du profil de température à  $X=1/2$  pour  $Ri = 10$  entre la méthode des volumes finis et Boltzmann sur réseau



**Fig. 4.12** : Comparaison du profil de température à  $Y=1/2$  pour  $Ri = 10$  entre la méthode des volumes finis et Boltzmann sur réseau

**Tableau 4.5** : Comparaison des valeurs de température  $\theta_{max}$  pour  $Ri = 10$  entre la méthode des volumes finis et Boltzmann sur réseau

Ri	10		
Travail	Present Boltzmann sur réseau	Present Volumes finis	Erreur
$\theta_{min}$ ( $X=1/2$ )	0,20781	0,21305	2,46%
Y	0,27273	0,27273	0,00%
$\theta_{max}$ ( $Y=1/2$ )	0,58279	0,60495	3,66%
X	0,99174	1	0,83%
$\theta_{min}$ ( $Y=1/2$ )	0,28294	0,28695	1,40%
X	0,66942	0,66942	0,00%

## 5. Résultats et Interprétations :

Les résultats de l'étude qui suit sont obtenus seulement en utilisant la modélisation et simulation par la méthode de Boltzmann sur réseau. La configuration géométrique est celle d'une cavité carrée ventilée (fig.4.1). Le fluide choisi est l'air avec ( $Pr = 0.71$ ) et le phénomène de la convection mixte est étudié. Nous avons choisi le maillage de  $121 \times 121$  pour la méthode de Boltzmann sur réseau dans tous nos calculs.

Cette partie d'étude, nous permettra d'analyser l'influence de certain paramètre tel que le nombre Richardson, le nombre de Reynolds et le nombre de Grashof sur une structure de l'écoulement convectif produit dans la cavité. Et tester la capacité du LBM de reproduire ce type d'écoulement.

### 5.1. Effets du nombre de Richardson :

On étudie l'influence du nombre de Richardson sur la structure globale de l'écoulement. Pour ce cas, le nombre de Grashof est fixé à  $Gr = 10^5$ , et le nombre de Richardson est varié en prenant les valeurs suivantes :  $Ri = 3, 5, 10, 15, 20, 30, 50$  et  $100$ . La solution est considérée comme convergente lorsque :

$$\frac{\sum_{i,j} \|u(x_{i,j}, t + \delta T) - u(x_{i,j}, t)\|}{\sum_{i,j} \|u(x_{i,j}, t)\|} \leq 10^{-10}$$

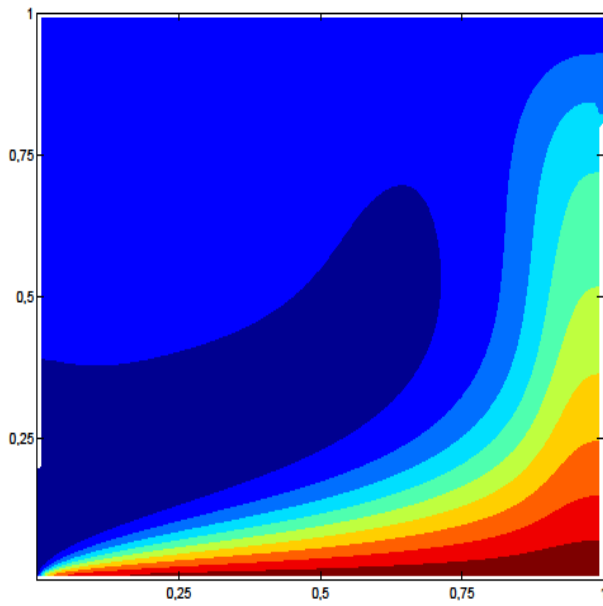
#### A. Isothermes :

Les isothermes sont présentées dans la figure 4.13 pour des nombres de Richardson variant de  $Ri = 3$  à  $100$ .

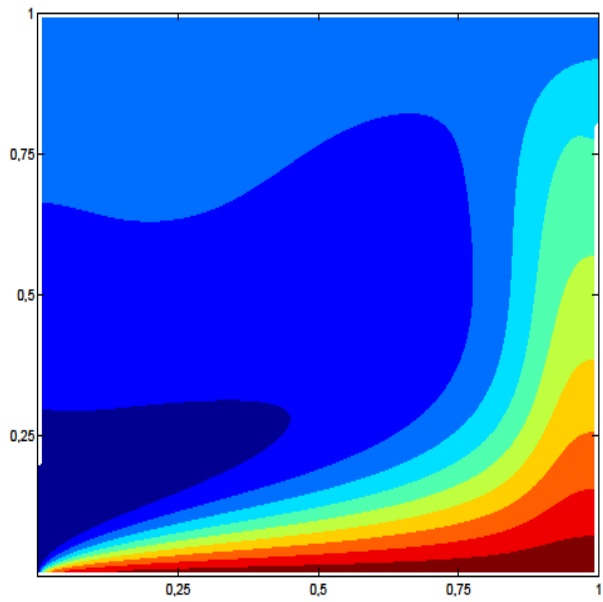
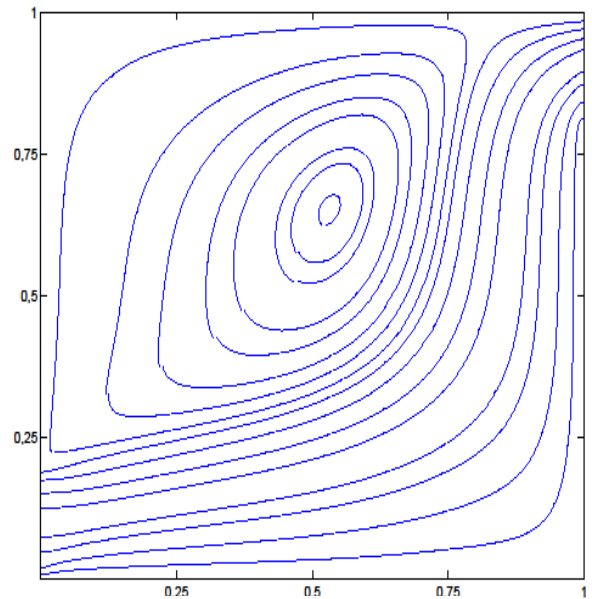
La répartition de la chaleur dans la cavité est conforme à la circulation du fluide. En effet, nous constatons un échauffement du fluide à partir de l'entrée (coin bas gauche) tout au long de la paroi basse jusqu'à la sortie (coin haut droit) pour les huit valeurs du nombre de Richardson.

Pour un nombre de Richardson =  $3$ , nous constatons une absence de stratification thermique, qui coïncide avec le début de la convection mixte.

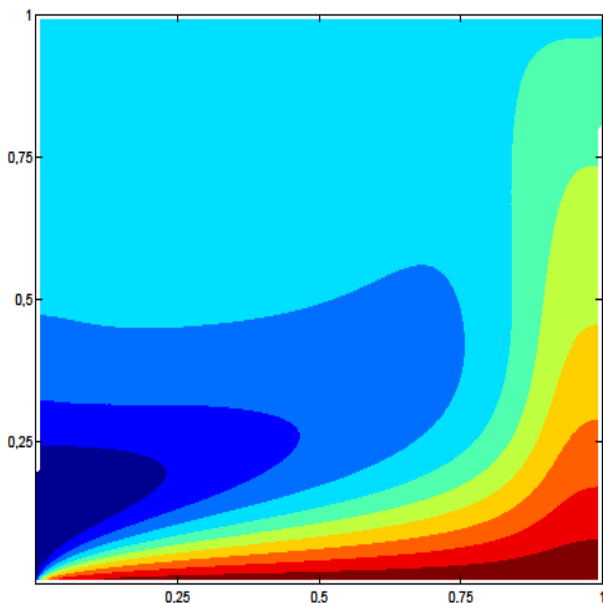
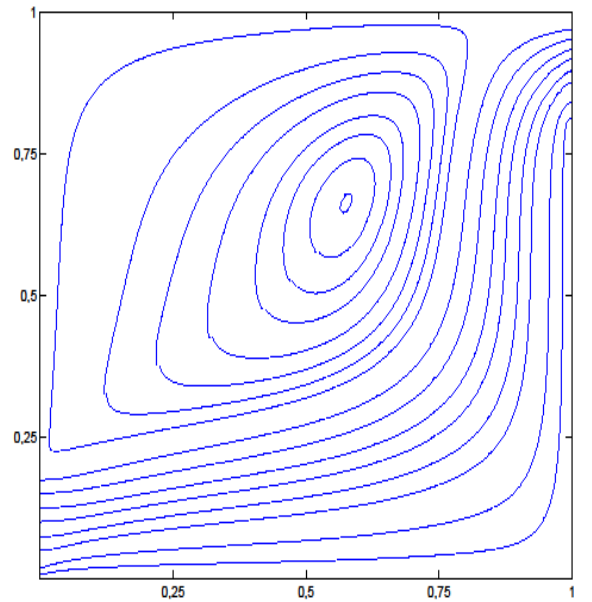
Pour un nombre de Richardson =  $5$ , nous constatons une stratification thermique.



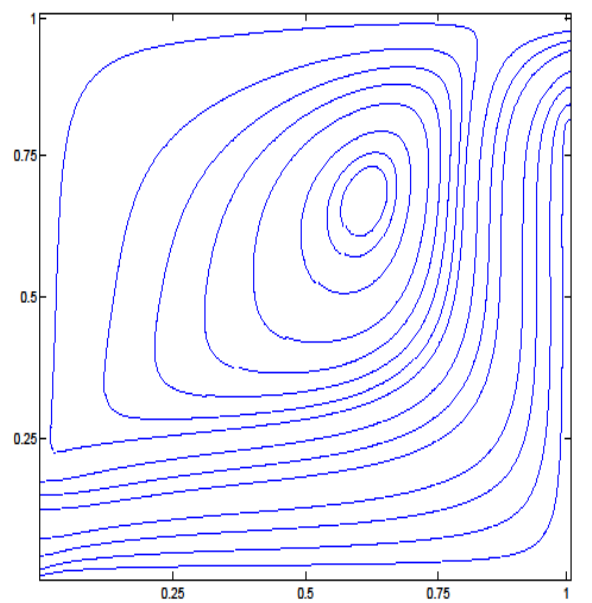
$Ri = 3$



$Ri = 5$

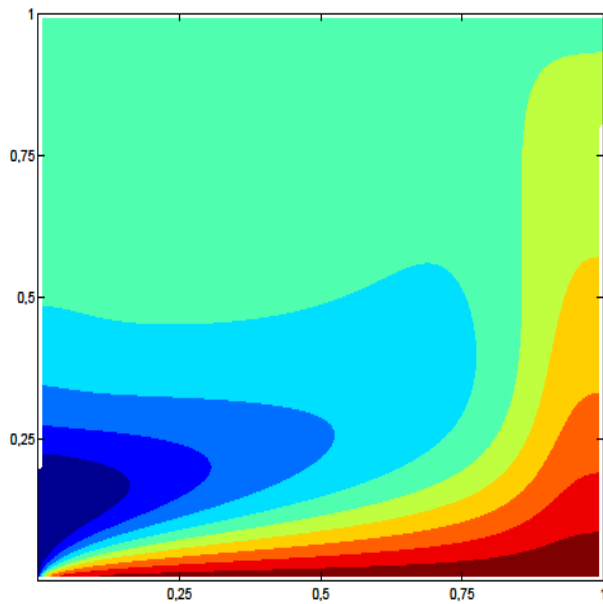


$Ri = 10$

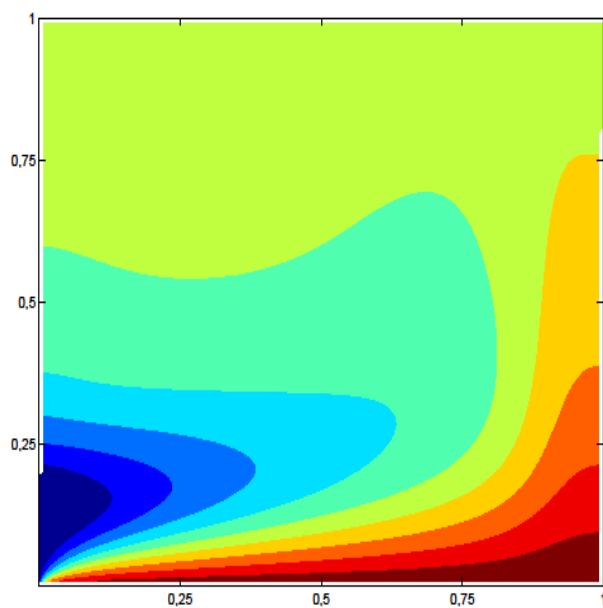
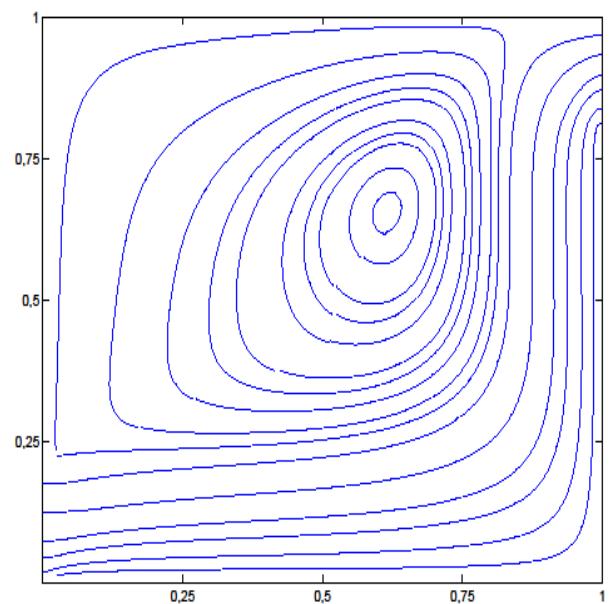


**Fig. 4.13** : Isothermes pour des valeurs de  $Ri=3$  à 10 ( $G_r = 10^5$  et  $Pr = 0,71$ )

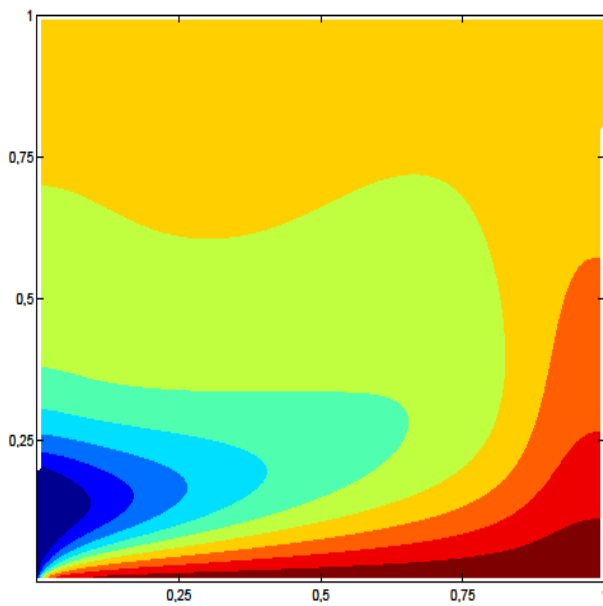
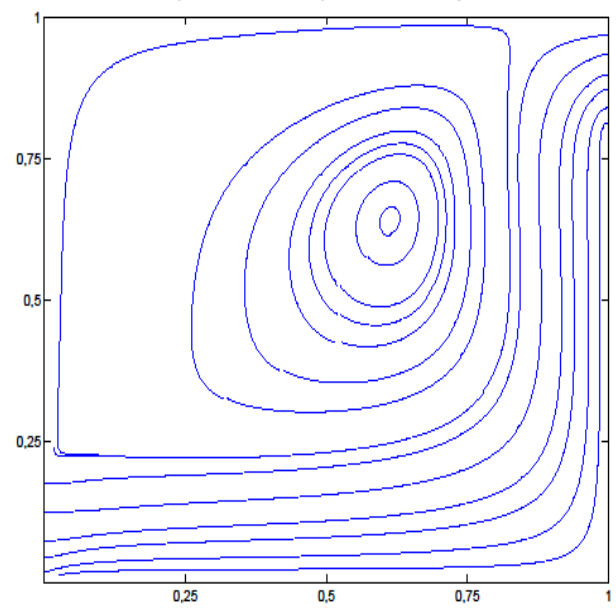
**Fig. 4.14** : Lignes de courant pour des valeurs de  $Ri = 3$  à 10



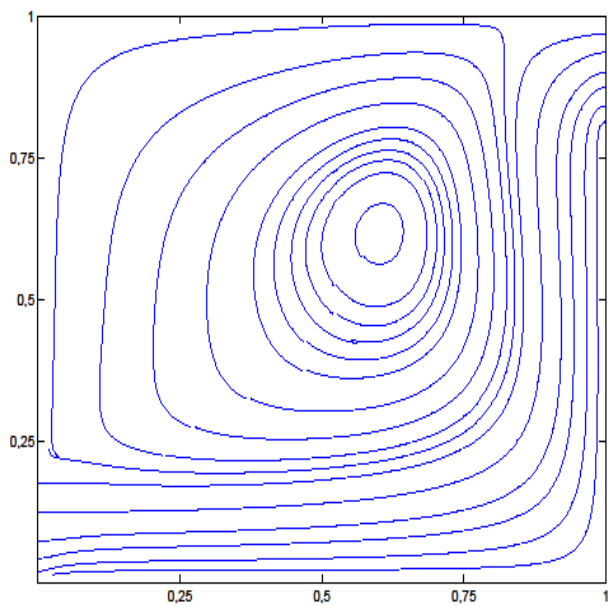
**Ri = 15**



**Ri = 20**

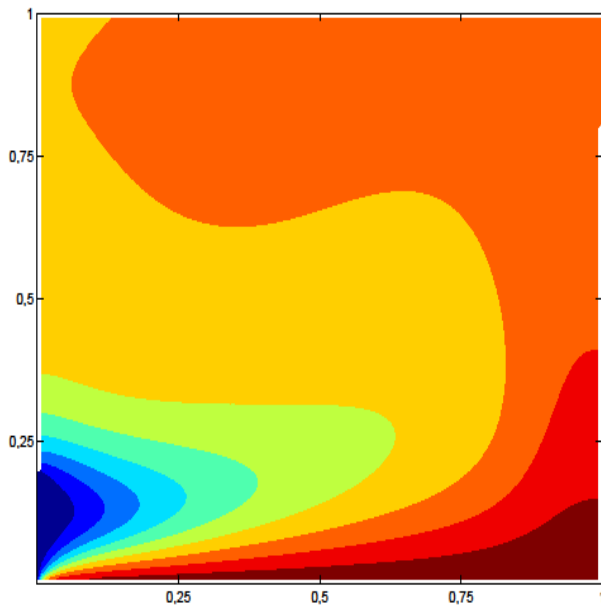


**Ri = 30**

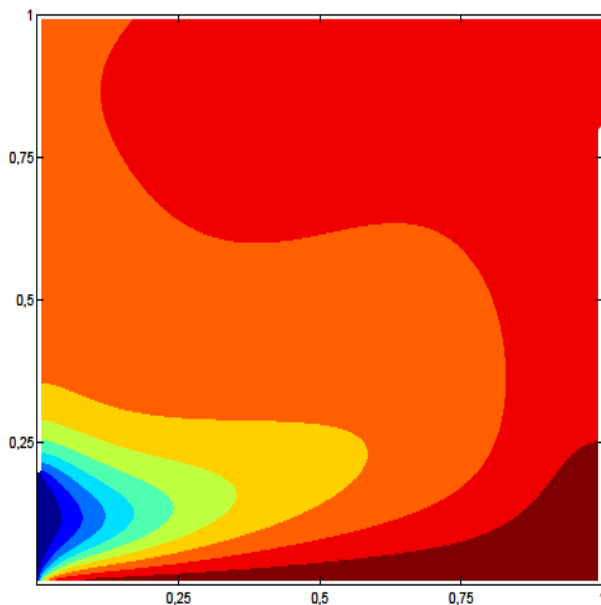
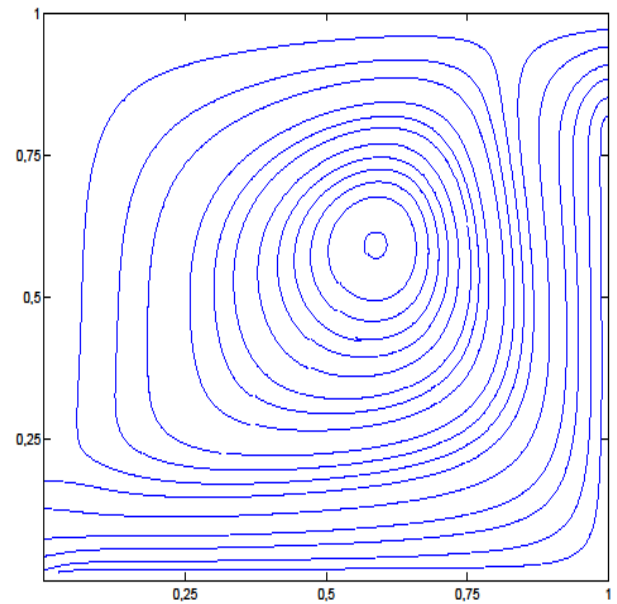


**Fig. 4.13 (suite) :** Isothermes pour des valeurs de  $Ri=15$  à  $30$  ( $G_r = 10^5$  et  $Pr = 0,71$ )

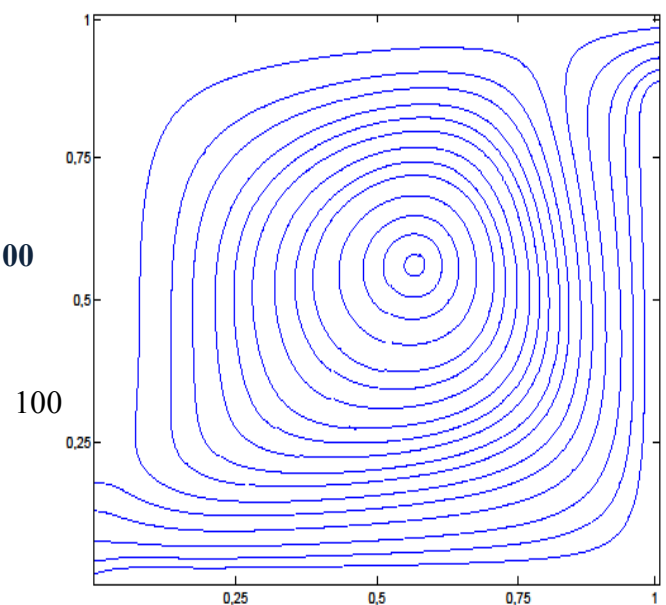
**Fig. 4.14 (suite) :** Lignes de courant pour des valeurs de  $Ri = 15$  à  $30$



**Ri = 50**



**Ri = 100**



**Fig. 4.13 (suite) :** Isothermes pour des valeurs de  $Ri=50$  à  $100$  ( $G_r = 10^5$  et  $Pr = 0,71$ )

**Fig. 4.14 (suite) :** Lignes de courant pour des valeurs de  $Ri = 50$  à  $100$

A partir de valeurs du nombre de Richardson  $\geq 10$ , nous notons un élargissement de température occupant une portion considérable de la cavité, aussi nous observons une stratification horizontale des couches d'air dans lequel la convection naturelle est prédominante.

La position de la paroi chaude à une influence sur le transfert thermique. Nous remarquons que les températures élevées sont localisées dans des espaces étroits au voisinage de la paroi chaude qui correspondent à l'épaisseur des couches limites

thermiques et qui sont largement influencées par le nombre de Richardson. Loin de la paroi chaude, les gradients de la température sont faibles.

### **B. Lignes de courant :**

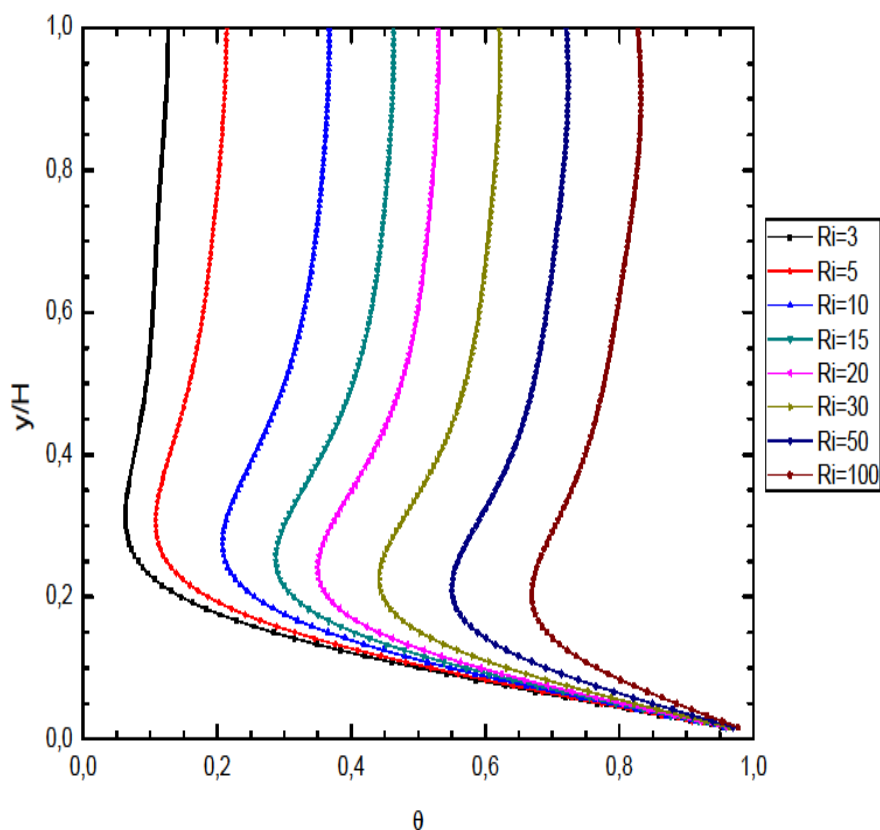
Les lignes de courant sont présentées dans fig. 4.14 pour des nombres de Richardson variant de  $Ri = 3, 5, 10, 15, 20, 30, 50$  et  $100$ .

Nous constatons une apparition de vortex situé en haut droit de la paroi chaude pour des valeurs du nombre de Richardson entre 3 et 5 (convection mixte dominée par une convection naturelle).

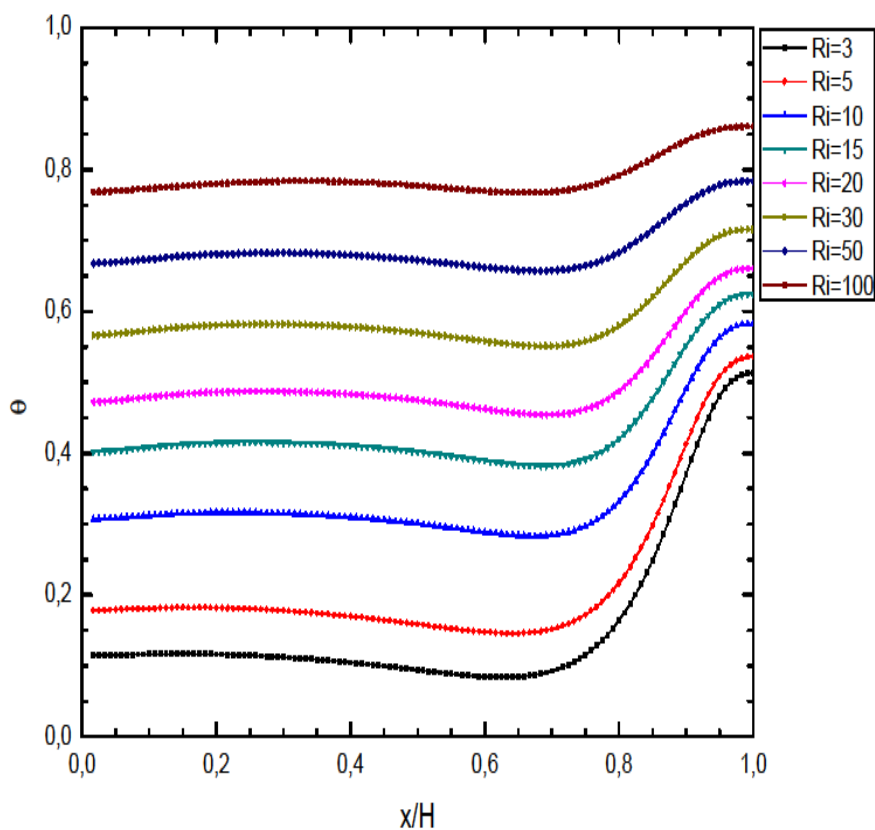
Pour des valeurs du nombre de Richardson  $\geq 10$ , la taille du vortex tournant au sens inverse de la montre s'accroît progressivement ce qui s'explique que la majorité de la cavité est occupée par une zone de recirculation (convection naturelle prédominante).

### **C. Profil de température :**

Les figures 4.15 et 4.16 représentant les profils de température pour  $X = 1/2$  et  $Y=1/2$  montrent que les maxima sont proportionnels au nombre de Richardson et que ses positions se rapprochent d'avantage de la paroi chaude lorsque nous augmentons le nombre de Richardson. Cela est dû aux effets combinés de la convection du jet et de la poussée thermique suivant la direction verticale où les couches limites deviennent moins épaisses avec l'intensification de l'écoulement ascendant. A partir de ces maxima une diminution brusque de la température est notée jusqu'à atteindre des valeurs minimales dans l'intervalle  $0,61983 < X < 0,66116$  et pour différentes valeurs de  $Ri$ .



**Fig. 4.15 :** Profil de température  $\theta$  à  $X = 1/2$  pour différentes valeurs du nombre de Richardson  $Ri = 3$  à  $100$  ( $G_r = 10^5$  et  $Pr = 0,71$ )



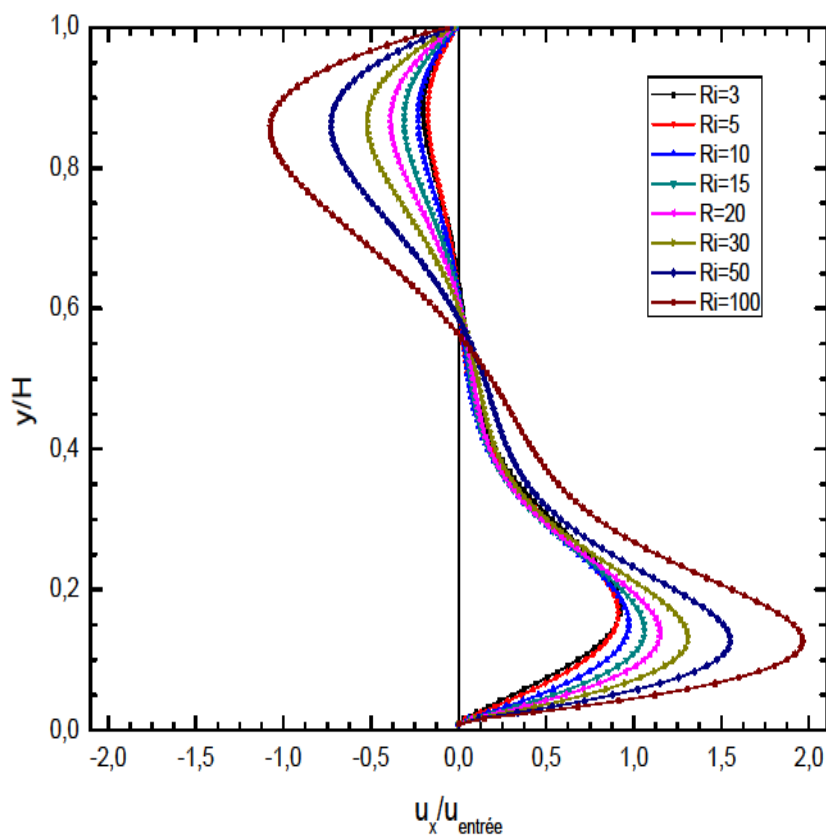
**Fig. 4.16 :** Profil de température  $\theta$  à  $Y = 1/2$  pour différentes valeurs du nombre de Richardson  $Ri = 3$  à  $100$  ( $G_r = 10^5$  et  $Pr = 0,71$ )

**Tableau 4.6 :** Valeurs de  $\theta_{\max}$  à  $X = 1/2$  et  $Y = 1/2$  pour  $Ri = 3$  à  $100$   
par la méthode de Boltzmann sur réseau

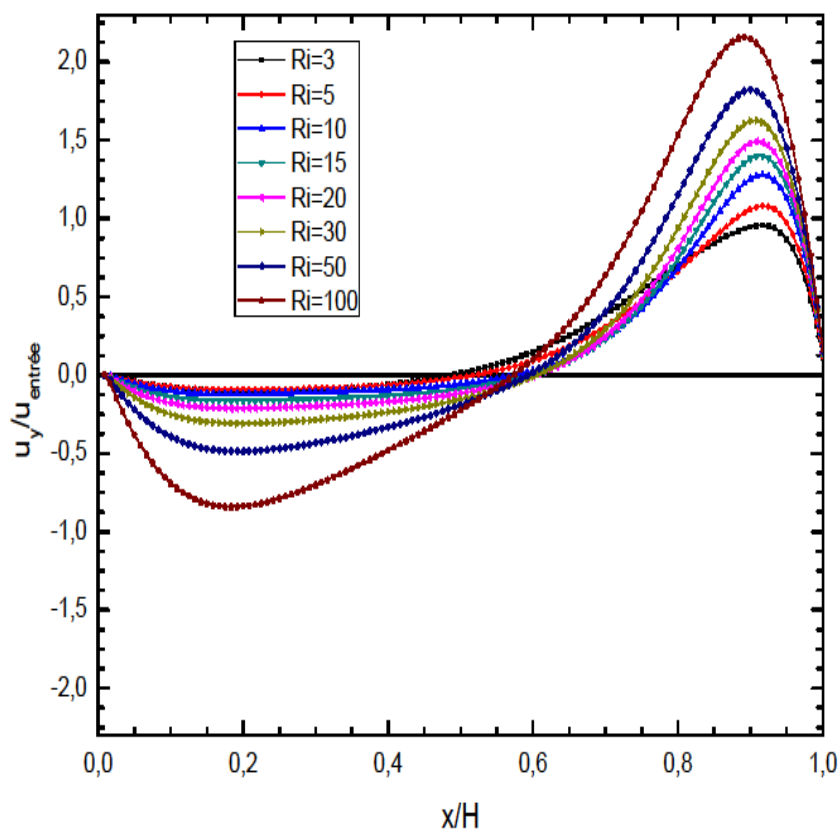
<b>Ri</b>	<b>3</b>	<b>5</b>	<b>10</b>	<b>15</b>	<b>20</b>	<b>30</b>	<b>50</b>	<b>100</b>
$\theta_{\max}$ ( $X=1/2$ )	0,95336	0,95472	0,95707	0,95901	0,96090	0,96445	0,96993	0,97720
Y	0,01653	0,01653	0,01653	0,01653	0,01653	0,01653	0,01653	0,01653
$\theta_{\max}$ ( $Y=1/2$ )	0,51354	0,53619	0,58279	0,62474	0,66073	0,71605	0,78434	0,86096
X	0,99174	0,99174	0,99174	0,99174	0,99174	0,99174	0,99174	0,99174
$\theta_{\min}$ ( $Y=1/2$ )	0,08407	0,14605	0,28294	0,38235	0,45431	0,55095	0,65717	0,76741
X	0,61983	0,63636	0,66942	0,67769	0,68595	0,68595	0,67769	0,66116

#### **D. Profil de vitesse :**

Les figures 4.17 et 4.18 représentant les profils de vitesse pour  $X = 1/2$  et  $Y = 1/2$  montrent que les maxima sont proportionnels au nombre de Richardson et que ses positions se rapprochent d'avantage de la paroi chaude lorsque nous augmentons le nombre de Richardson. Cela est dû aux effets combinés de la convection du jet et de la poussée thermique suivant la direction verticale où les couches limites deviennent moins épaisses avec l'intensification de l'écoulement ascendant. A partir de ces maxima une diminution brusque de la vitesse verticale est notée jusqu'à atteindre des valeurs minimales environ  $X = 0,2$  et pour différentes valeurs de  $Ri$ . Cependant les valeurs maximales de vitesse sont rencontrées dans l'intervalle  $0,8843 < X < 0,9090$ . Ces valeurs indiquent les endroits où les particules fluides suivent les lignes de courant en mouvement ascendant puis descendant. Il y'a aussi la présence des valeurs négatives de la vitesse, ce qui reflète la présence d'une zone de recirculation dans la cavité.



**Fig. 4.17 :** Profil de vitesse à  $X=1/2$  pour différentes valeurs du nombre de Richardson  $Ri = 3$  à  $100$  ( $G_r = 10^5$  et  $Pr = 0,71$ )



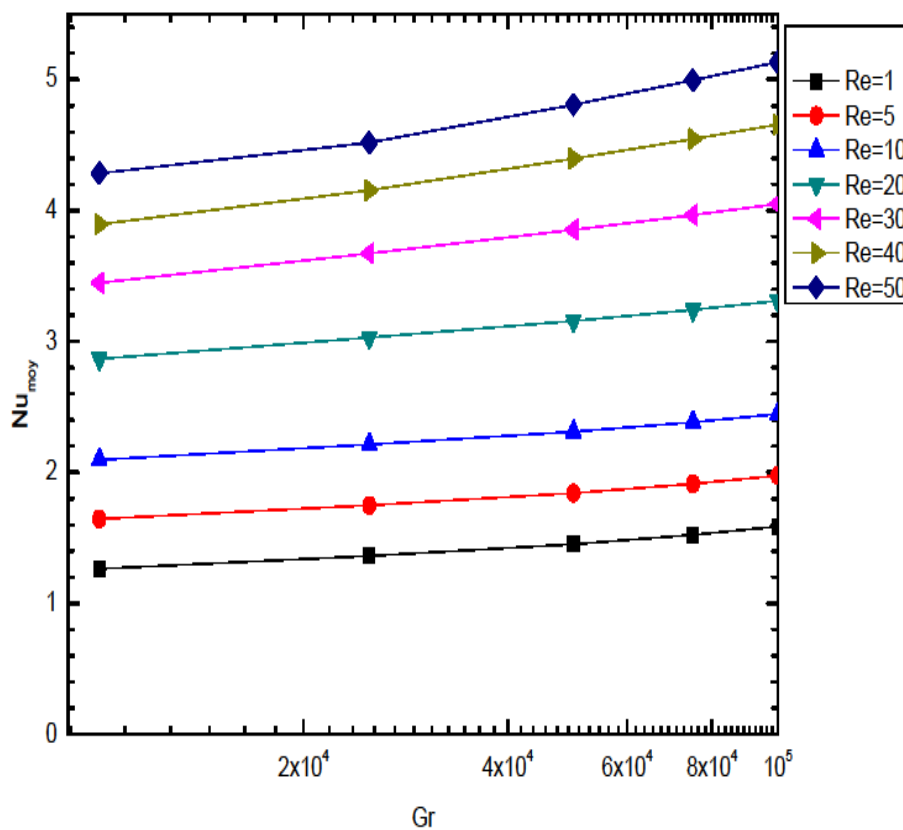
**Fig. 4.18 :** Profil de vitesse à  $Y = 1/2$  pour différentes valeurs du nombre de Richardson  $Ri = 3$  à  $100$  ( $G_r = 10^5$  et  $Pr = 0,71$ )

**Tableau 4.7 :** Valeurs de  $U_{\max}$  à  $X = 1/2$  et  $Y = 1/2$  pour  $Ri = 3$  à  $100$   
par la méthode de Boltzmann sur réseau

<b>Ri</b>	<b>3</b>	<b>5</b>	<b>10</b>	<b>15</b>	<b>20</b>	<b>30</b>	<b>50</b>	<b>100</b>
$U_{\max}/U_{\text{entrée}}$ ( $X=1/2$ )	0,92385	0,91274	0,97231	1,06187	1,15028	1,30823	1,55009	1,96492
Y	0,17355	0,16529	0,14876	0,1405	0,1405	0,13223	0,12397	0,12397
$U_{\max}/U_{\text{entrée}}$ ( $Y=1/2$ )	0,95828	1,08076	1,27839	1,4002	1,49187	1,62767	1,82264	2,15887
X	0,90909	0,90909	0,90909	0,90909	0,90083	0,90083	0,89256	0,88430
$U_{\min}/U_{\text{entrée}}$ ( $Y=1/2$ )	-0,10476	-0,09271	-0,11974	-0,16422	-0,21204	-0,30813	-0,48576	-0,84257
X	0,21488	0,19835	0,18182	0,18182	0,19008	0,19835	0,19008	0,18182

## 5.2. Effets du nombre de Grashof :

Pour examiner l'effet du nombre de Grashof sur le taux de transfert de chaleur, l'étude de la variation du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Grashof pour des nombres de Reynolds variant de  $Re = 1, 5, 10, 20, 30, 40$  et  $50$ . Est illustrée dans graphe de la figure Fig 4.19.

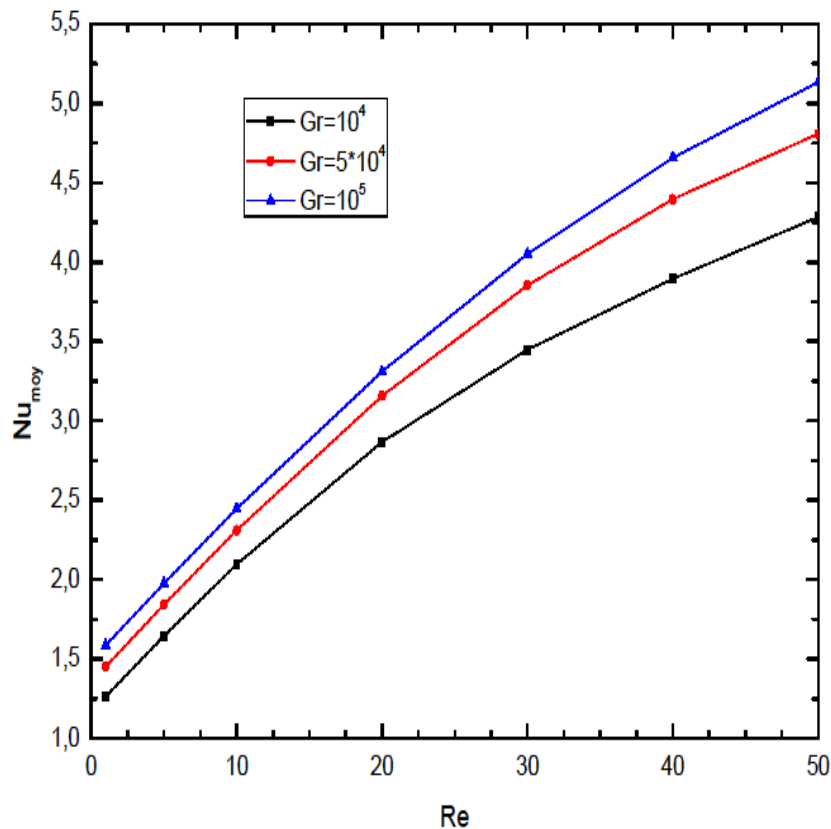


**Fig. 4.19 :** Variation du nombre de  $Nu$  en fonction du nombre de  $Gr$  pour différentes valeurs du nombre de  $Re = 1, 5, 10, 20, 30, 40$  et  $50$

Nous notons que l'intensité du transfert de chaleur augmente avec l'augmentation des valeurs du nombre de Grashof pour un nombre de Reynolds fixe. Ceci entraînera une augmentation de taux de transfert de chaleur. Et de même la variation du nombre de Reynolds porte une influence considérablement dans la variation du Nombre de Nusselt moyen et par conséquent sur le taux de transfert de chaleur.


### 5.3. Effets du nombre de Reynolds :

Pour examiner l'effet du nombre de Reynolds sur le taux de transfert de chaleur, nous présentons la figure 4.20 illustrant la variation du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Reynolds pour des nombres de Grashof  $Gr = 10^4$ ,  $5 \cdot 10^4$  et  $10^5$ .



**Fig. 4.20 :** Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Reynolds pour différentes valeurs du nombre de Grashof variant de  $Gr = 10^4$ ,  $5 \cdot 10^4$  et  $10^5$

Nous constatons que l'intensité du transfert de chaleur augmente avec l'augmentation des valeurs du nombre de Reynolds pour un nombre de Grashof fixe. Ceci entraînera une augmentation du taux de transfert de chaleur.



Conclusion  
générale et  
Perspectives

# Conclusion générale

Le présent travail porte sur l'étude numérique de la convection mixte laminaire dans une cavité ventilée. La géométrie étudiée est une cavité carrée équipée par deux ouvertures : l'une est située au coin inférieur gauche, pour le soufflage et l'autre située au coin supérieur droit, pour l'évacuation. Le mur de bas est soumis à une température constante et uniforme, tandis que les autres murs sont considérés adiabatiques.

Un code de calcul a été développé et testé durant ce travail sous l'éditeur MATLAB, en appliquant la méthode de Boltzmann sur réseau thermique avec le modèle D2Q9 pour le champ dynamique et D2Q5 pour le champ thermique.

Les résultats de calcul ont été obtenus pour un régime laminaire et pour un fluide newtonien et incompressible avec un nombre de Prandtl  $Pr = 0,71$ .

Une configuration classique d'une cavité carrée différentiellement chauffée a été choisie et utilisée pour la validation des résultats obtenus par le code de calcul.

Une confrontation des résultats obtenus par le LBM, avec ceux obtenus par le code fluent (utilisant les volumes finis) et ceux de la littérature est présentée pour le cas de la cavité ventilée pour le cas de nombre de Richardson  $Ri=10$ . Ceci nous a permis de constater une bonne concordance des résultats entre les deux méthodes.

L'analyse des résultats CFD obtenus nous a permis de constater que :

- A chaque fois que le nombre de Richardson augmente, le nombre de Nusselt augmente ce qui justifie une augmentation du transfert thermique.
- Les températures élevées sont localisées dans des espaces étroits au voisinage de la paroi chaude qui correspondent à l'épaisseur des couches limites thermiques et qui sont largement influencées par le nombre de Richardson. Loin de la paroi chaude, les gradients de la température sont faibles.
- L'apparition de vortex situé en haut gauche de la paroi chaude pour des valeurs du nombre de Richardson entre 3 et 5 (convection mixte dominée par une convection naturelle). Et pour des valeurs du nombre de Richardson supérieures

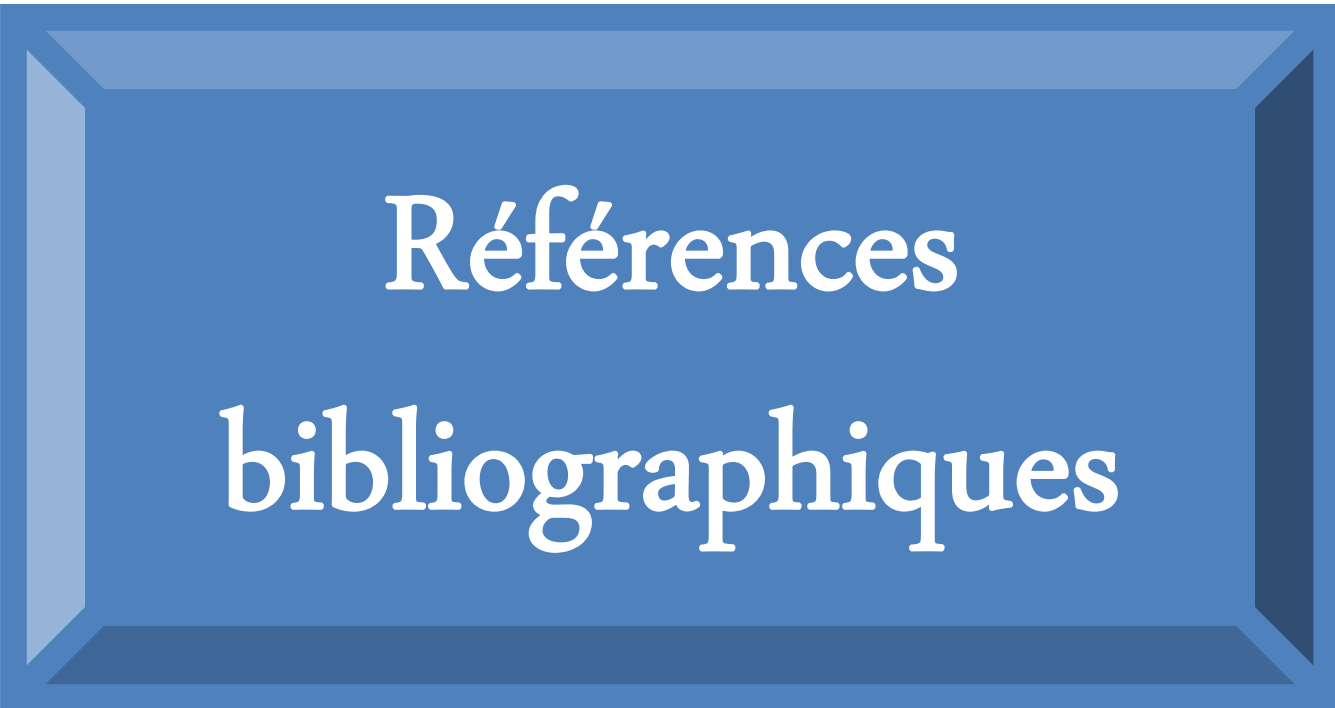
à 10, la taille du vortex tournant au sens inverse de la montre s'accroît progressivement ce qui s'explique que la majorité de la cavité est occupée par une zone de recirculation (convection naturelle prédominante).

- Les profils de température montrent que les maxima sont proportionnels au nombre de Richardson et que ses positions se rapprochent d'avantage de la paroi chaude lorsque la valeur du nombre de Richardson augmente. Les effets combinés de la convection du jet et de la poussée thermique suivant la direction verticale où les couches limites deviennent moins épaisses avec l'intensification de l'écoulement ascendant.
- L'intensité du transfert de chaleur augmente avec l'augmentation des valeurs
  - Du nombre de Grashof pour un nombre de Reynolds fixe.
  - Du nombre de Reynolds pour un nombre de Grashof fixe.

Les résultats obtenus dans ce travail ont permis d'évaluer la performance et la capacité du LBM pour reproduire le phénomène de convection mixte dans une cavité ventilée. Le modèle TLBM à double population utilisé, a tous les avantages, y compris une bonne stabilité numérique et la capacité à gérer en général les problèmes de transfert de chaleur par convection

Dans un proche avenir nous envisageons d'étudier d'autres aspects en utilisant toujours la méthode thermique de Boltzmann sur réseau, en particulier :

- l'influence de la hauteur des ouvertures de ventilation (dans notre cas elle représente 20% de la hauteur de la cavité).
- l'influence du changement d'emplacement des ports d'ouvertures d'entrée et de sortie.
- l'influence de l'utilisation d'un flux de chaleur au lieu d'une plaque isotherme.



Références  
bibliographiques

# Références Bibliographiques

- [1] Dieter A. Wolf-Gladrow, (2005). *Lattice-Gas Cellular Automata and Lattice Boltzmann Models - An Introduction*. Springer edition. June 26.
- [2] Biggs, M.J. and S.J. Humby, (1998). Lattice-gas automata methods for engineering. *Chemical Engineering Research & Design*, 76 (A2):162-174.
- [3] E.M. Lifshitz, L.P. Pitaevskii, (1980). *Statistical Physics, Part 1*, Pergamon Press, Oxford.
- [4] C. Seror, P. Sagaut, C. Bailly, and D. Juvé, (2000). Subgrid-scale contribution to noise production in decaying turbulence. *AIAA J.* 38, 1795.
- [5] E.L. Koschmieder and S.G. Pallas, (1974). Heat transfer through a shallow, horizontal convecting fluid layer. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 17:991–1002.
- [6] H. Bénard, (1900). Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide. *Revue Générale des Sciences Pures et Appliquées*, 11:1261–1271.
- [7] H. Bénard, (1901). Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide transportant de la chaleur en régime permanent. *Annales de Chimie et de Physique*, 23:62–144.
- [8] J. R. A. Pearson, (1958). On convection cells induced by surface tension. *Journal of Fluid Mechanics*, 4:489–500.
- [9] M.J. Block. Surface tension as the cause of B´enard cells and surface deformation in a liquid. *Nature*, 178:650–651.
- [10] L. Rayleigh, (1956). On convection currents in a horizontal layer of fluid when the higher temperature is on the under side. *Philosophical Magazine*, 32:529–546. (1916).
- [11] J. Boussinesq, (1903). *Théorie analytique de la chaleur, mise en harmonie avec la thermodynamique et la théorie mécanique de la lumière, Tome II: Refroidissement et échauffement par rayonnement. Conductibilité. Courant de convection*. Gauthier-Villars.

- 
- [12] H. Jeffreys, (1926). The stability of a layer of fluid heated from below. *Philosophical Magazine*.
- [13] H. Jeffreys, (1928). Some cases of instability in fluid motion. *Proceedings of the Royal Society of London, Serie A*, pages 195–208.
- [14] S. Chandrasekhar, (1961). Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. *Oxford University Press*.
- [15] S. Zermane, S. Boudebous et N. Boulkroune, (2005). Etude numérique de la convection mixte laminaire dans des cavités ventilées. *Sciences & Technologie B – N°23*, pp. 34-44.
- [16] S.M. Saeidi et J.M. Khodadadi, (2007). Transient flow and heat transfer leading to periodic state in a cavity with inlet and outlet ports due to incoming flow oscillation. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 50 - 530–538.
- [17] M. M. Rahman, M. A. Alim, M. A. H. Mamun, M. K. Chowdhury and A. K. M. S. Islam, (2007). Numerical study of opposing mixed convection in a vented enclosure. *Asian Research Publishing Network (ARPN)*. Vol. 2, N°2, April,
- [18] T.V. Radhakrishnan, A.K. Verma, C. Balaji, S.P. Venkateshan, (2007). An experimental and numerical investigation of mixed convection from a heat generating element in a ventilated cavity. *Experimental Thermal and Fluid Science* 32 - 502–520.
- [19] Mamdouh BELHI et Saadoun BOUDEBOUS, (2007). Etude numérique de la convection mixte dans une cavité carrée munie de plusieurs entrées. *Congrès Français de Thermique, SFT 2007, Île des Embiez, 29 mai - 1 juin*,
- [20] Md. Mustafizur Rahman, M. A. Alim, Sumon Saha and M. K. Chowdhury, (2008). Mixed convection in a vented square cavity with a heat conducting horizontal solid circular cylinder. *Journal of naval architecture and marine engineering*. Decembre,
- [21] A. Raji, M. Hasnaoui et A. Bahlaoui, (2008). Numerical study of natural convection dominated heat transfer in a ventilated cavity: Case of forced flow playing simultaneous assisting and opposing roles. *International Journal of Heat and Fluid Flow* 29 - 1174–1181.
- [22] E. Benachour, B. Draoui, L. Rahmani , B.Mebarki, K.Asnoune et B. Imine, (2010). Simulation Numérique de la Convection Mixte d'une pièce (type d'habitat)

---

avec la présence d'un Corps de Chauffe. 10<sup>th</sup> *International Meeting on Energetical Physics SIPE 10. Journal of Scientific Research* N° 0 Vol. 1.

[23] Amir Houshang Mahmoudi, Mina Shahi et Farhad Talebi, (2010). Effect of inlet and outlet location on the mixed convective cooling inside the ventilated cavity subjected to an external nanofluid. *International Communications in Heat and Mass Transfer* 37 - 1158–1173.

[24] Hakan F. Oztop, (2010). Influence of exit opening location on mixed convection in a channel with volumetric heat sources. *International Communications in Heat and Mass Transfer* 37 - 410–415.

[25] Zainab K. Radhi, (2011). Numerical study of mixed convection heat transfer through double square cavity connected with each other. *Al-Qadisiya Journal For Engineering Sciences* Vol. 4 No. 4.

[26] Hamini, S. Bouabdallah et A. Benchatti, (2012). Numerical study of Mixed Convection in a Square Cavity Containing Inlet and Outlet air. *JM'EMP08 EMP*, Bordj El Bahri. 10-11 Avril.

[27] Boltzmann, Ludwig, (1878). Weiter Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gas-molekülen. *Wien. Ber.* 66, 275-370.

[28] Chapman, S. and Cowling, T.G, (1991). *The Mathematical theory of Non Uniform gases. Cambridge, 3<sup>rd</sup> edition.*

[29] Enskog, D, (1917). Kinetische Theorie der Vorgänge in mässig verdünnten Gasen. PhD thesis. *Uppsala*,

[30] Bhatnagar, P., Gross, E., and Krook. M, (1954). A model for collision process in gases. I. Small amplitude process in charged and neutral one-component systems. *Phys.Rev.* 94(3), 511-525.

[31] Von Neumann. J, (1966). The theory of self-reproducing Automata. University of Illinois *Press*.

[32] Broadwell, J, (1964). Study of rarified shear flow by the discrete velocity method. *Journal of Fluid Mechanics* 19, 401-414.

[33] Gatignol, R, (1975). *Théorie cinétique des gaz à répartition dicrète des vitesses. Vol. 36. Springer, Berlin,*

- [34] Hardy, J., Pomeau, Y., and de Pazzis, O, (1973). Time evolution of twodimensional model system. I. Invariant states and time correlation functions. *J. Math. Phys.* 14(12), 1746-1759.
- [35] Frisch, U., B., H., and Pomeau, Y, (1986). Lattice-gas automata for the Navier-Stokes equation. *Phys. Rev. Letter* 56(14), 1505-1508.
- [36] D'Humière, D., Lallemand, P., and Frisch, U, (1986). Lattice gas models for 3D hydrodynamics. *Europhys. Letter* 2(4), 291-297.
- [37] Wolfram, S, (1986). *Theory and application of Cellular Automata*. World Publishing Co.
- [38] Frisch, U., d'Humière, D., Hasslacher, B., Lallemand, P., Pomeau, Y., and Rivet, J, (1987). Lattice-gas hydrodynamics in two and three dimensions. *Complex System* 1, 649-707.
- [39] McNamara, G. and Zanetti, G, (1988). Use of the Boltzmann equation to simulate lattice-gas Automata. *Phys. Rev. Lett.* 61, 2332-2335.
- [40] Higuera, F. and Jimenez, J, (1989). Boltzmann approach to lattice-gas simulations. *Europhys. Lett.* 9(7), 663-668.
- [41] Chen, H. and Matthaeus, W.H, (1992). Recovery of Navier-Stokes equations using a lattice-gas Boltzmann method. *Phys.Rev.A* 45, R5339-42.
- [42] Qian, Y.-H., d'Humières, D., and Lallemand, P, (1992). Lattice BGK models for Navier-Stokes equation. *Europhys.Lett.* 17, 479-484.
- [43] He, X. and Luo, L.S, (1997). A priori derivation of the lattice Boltzmann equation. *Phys. Rev. E* 55, R6333.
- [44] Thürey, N., Rude, U., and Stamminger, M, (2006). Animation of Open Water phenomena with coupled Shallow water and free surface simulations. *In Eurographics/ACM SIGGRAPH Symposium on Computer animation*.
- [45] Zhong, L., Feng, S., Dong, P., and Gao, S, (2006). Lattice Boltzmann schemes for the nonlinear Schrödinger equation. *Phys. Rev. E.* 74, 036704.
- [46] Simon Marié, (2008). Etude de la méthode Boltzmann sur Réseau pour les simulations en aéroacoustique. Thèse de Doctorat. *Université Pierre et Marie Curie, France*.

- [47] K. Han, Y.T. Feng, D.R.J. Owen, (2008). Modelling of thermal contact resistance within the framework of the thermal lattice Boltzmann method. *International Journal of Thermal Sciences* 47 - 1276–128.
- [48] Dieter A. Wolf-Gladrow, (2005). *Lattice-Gas Cellular Automata and Lattice Boltzmann Models - An Introduction – Springer*.
- [49] A.A. Mohamad, (2011). *Lattice Boltzmann Method Fundamentals and Engineering Applications with Computer Codes – Springer*.
- [50] S.V. Patankar, (1980). *Numerical heat transfer and fluid flow. Hemisphere, Washington DC*.
- [51] A. Belaid, (2007). Etude de la convection mixte (favorable / défavorable) dans un tube vertical. Thèse de Magister .*Université de Constantine, Algérie*.
- [52] H. Benhacine, (2010). Etude de l'écoulement convectif d'un fluide dans une cavité. Thèse de Magister .*Université de Constantine, Algérie*.
- [53] A. Hamouche, (2012). Étude de la Convection Mixte dans un Canal Contenant des Sources de Chaleur. Thèse de Magister .*Université de Constantine, Algérie*.
- [54] G DE Vahl Davis, (1983). Natural convection of air in a square cavity: a benchmark numerical solution. *Int. J. Numer. Meth, Fluids*3, pp249.
- [55] Markatos, N.C., Pericleous, K.A, (1984). Laminar and turbulent natural convection in an enclosed cavity, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 27, 755-772.