

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة عبد الحميد بن باديس - مستغانم -

كلية العلوم الدقيقة والإعلام الآلي

تصريح شرفي خاص بالالتزام بقواعد النزاهة العلمية
لإنجاز البحث

أنا الممضي أدناه،

الطالب(ة): **بركريسي غاضمة** رقم التسجيل الجامعي: 37035533

الحامل لبطاقة التعريف الوطنية رقم: 1100080.977005360007 والصادرة بتاريخ: 19/10/2022

عن: **بلا بليسي** علي مستغانم

المسجل بكلية العلوم الدقيقة والإعلام الآلي / قسم: **رياضيات وعلوم الإعلام آلي** .
شعبة: **رياضيات نظرية** / التخصص: **ذاتية** تحكم تجويز

والمكلف بإنجاز مذكرة ماستر بعنوان:

Systèmes de particules en interaction et processus de contact

أصرح بشرفي أنني ألتزم بمراعاة المعايير العلمية والمنهجية ومعايير الأخلاقيات العلمية والنزاهة الأكاديمية المطلوبة في إنجاز البحث ، وأتحمل المسؤولية الشخصية عن كل المحتوى المتضمن في البحث المذكور أعلاه .

التاريخ: 18/06/25

إمضاء المعني



* ملحق القرار الوزاري رقم 933 المؤرخ في 28 جويلية 2016 الذي يحدد القواعد المتعلقة بالوقاية من السرقة العلمية ومكافحتها.

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS - MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
FILIÈRE : MATHÉMATIQUES



MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques délivré par

Université de Mostaganem

Spécialité "Modélisation, Contrôle et Optimisation"

présenté par :

Fatma BOUKERSI

Systèmes de particules en interaction et processus de contact

soutenu publiquement le 12 Juin 2025 devant le jury composé de :

Président :	Mustapha MOHAMED I	MCA	UMAB Mostaganem, Algérie
Examineur :	Oussama BOUANANI	MCA	UMAB Mostaganem, Algérie
Encadreur :	Lamia BELHADJI	MCA	UMAB Mostaganem, Algérie

Année Universitaire : 2024 / 2025

M
A
S
T
E
R

Dédicaces

*À mon père **Naceur**,
À ma mère **Aïcha**,
À mes grands-parents, qu'Allah leur fasse miséricorde,
À mes frères **Sidahmed, Abdelbesset, Mohamed, Abdestar**,
À ma famille **BOUKERSI**, ainsi qu'à ma belle-famille **KAOUS**,
À mes collègues de la promotion **2024/2025**.*

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier du fond du cœur Allah, qui m'a donné la force et la volonté d'achever ce travail.

Je souhaite exprimer ma profonde gratitude à mon encadrante, Madame **Lamia Bel-hadji**, pour son aide précieuse et ses conseils avisés tout au long de ce travail. Sa disponibilité, la confiance qu'elle m'a accordée, ainsi que sa bonne volonté, sa patience et la pertinence de ses remarques, ont été d'une grande aide. Je la remercie sincèrement pour tous les efforts qu'elle a fournis afin de faciliter et accompagner la réalisation de mon travail de fin d'études.

Je remercie le **Dr Mustapha Mohamedi** et le **Dr Oussama Bouanani** qui m'ont fait l'honneur de faire partie de mon jury, et je leur suis reconnaissante pour le temps qu'ils consacrent à l'évaluation de mon travail.

Je remercie chaleureusement les professeurs du département de Mathématiques de l'Université Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem pour la qualité de leur enseignement, leur soutien constant et leur accompagnement tout au long de mon parcours académique.

Je voudrais remercier tout particulièrement mes parents, mon père **Naceur** et ma mère **Aïcha**, pour leur amour inconditionnel, leur soutien indéfectible et leurs prières constantes qui m'ont toujours accompagnée.

Un grand merci à mes frères **Sidahmed, Abdelbesset, Mohamed** et **Abdestar** pour leur soutien moral et leur présence précieuse dans ma vie.

Je souhaite également remercier ma belle-famille **KAOUS** pour leur bienveillance et leurs encouragements.

Je n'oublie pas mes collègues de la promotion 2024/2025, avec qui j'ai partagé cette expérience enrichissante. Leurs échanges, leur camaraderie et leur esprit d'entraide ont contribué à rendre cette aventure académique encore plus mémorable.

Enfin, je remercie toutes les personnes qui, d'une manière ou d'une autre, ont contribué à l'aboutissement de ce travail, par leur soutien, leurs conseils ou leurs encouragements.

Index des notations

Ω	: Espace des résultats possibles (univers probabilisable)
$\mathcal{A}$	: Tribu ou σ -algèbre sur Ω
$\mathbb{P}$	: Mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$
X_t	: L'état du système à l'instant t dans un processus stochastique.
$N(t)$	: Nombre d'événements dans un processus de Poisson jusqu'au temps t
λ	: Taux (intensité) d'un processus de Poisson ou paramètre d'une loi exponentielle
τ_i	: Temps inter-arrivées dans un processus de Poisson
T_n	: Instant d'arrivée du n -ième événement dans un processus de Poisson
$\eta(x)$	: État (infecté ou sain) du site x dans le processus de contact
δ	: Taux de guérison dans le processus de contact
α	: Paramètre d'infection dans le processus à longue portée
π	: Distribution stationnaire d'une chaîne de Markov
q_{ij}	: Élément de la matrice des taux de transition d'une chaîne de Markov
$\mathbb{E}[X]$	: Espérance mathématique de X
$\text{Var}(X)$	: Variance de X
$\text{Cov}(X, Y)$	: Covariance entre X et Y
$\mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}$	: Ensembles des naturels, réels, entiers
$\Gamma(n, \lambda)$	: Loi gamma avec paramètres n et λ

Table des matières

Index des notations	iii
Introduction	2
1 Généralités sur les processus stochastiques	4
1 Introduction	4
2 Définitions et propriétés générales	4
2.1 Définition et Propriétés	4
2.2 Processus Stochastiques	5
2.3 Espace d'état d'un processus stochastique	6
3 Caractéristiques des Processus Stochastiques	6
3.1 Loi d'un processus stochastique	6
3.2 Caractéristiques non-aléatoires d'un processus stochastique	7
4 Exemples Classiques de Processus Stochastiques	7
4.1 Marche aléatoire	7
4.2 Processus gaussien	8
5 Chaînes de Markov à Temps Continu	9
5.1 Processus de Markov à Temps Continu avec un Espace d'État Discret	10
5.2 Équations de Kolmogorov	10
5.3 Distribution Stationnaire et Condition de Balance	12
5.4 Exemples	13
6 Conclusion	13
2 Processus de Poisson	14
1 Introduction	14
2 La distribution exponentielle	14
2.1 La propriété de perte de mémoire	16
2.2 Minimum de deux lois exponentielles indépendantes	17
2.3 Somme de variables exponentielles indépendantes	20
3 Définitions du processus de Poisson	21
3.1 Définition du processus de Poisson basée sur les temps inter-arrivées exponentiels	21
3.2 Processus de Poisson à partir des propriétés de comptage	23
3.3 Comportement infinitésimal d'un processus de Poisson	26
4 Processus de Poisson Composé	29
5 Transformations	31
5.1 Amincissement d'un processus de Poisson (Filtrage)	31
5.2 Décomposition d'un processus de Poisson	33
5.3 Superposition de Processus de Poisson	34
5.4 Lois conditionnelles des instants d'arrivée	35

5.5	Processus de Poisson et loi uniforme	36
5.6	Processus de Poisson et loi binomiale	38
5.7	Expression des fonctions moyenne et covariance du processus de Poisson	39
6	Conclusion	40
3	Les systèmes de particules en interaction (IPS)	41
1	Introduction	41
2	Définition générale des IPS	41
2.1	Cadre général	41
3	Interactions locales	42
4	Exemple de SPI	43
4.1	Invasion : Le processus de contact	43
4.2	Compétition : le modèle du voteur	44
5	Représentation graphique	45
6	Simulations numériques en volume fini	47
7	Existence sur du volume infini	49
8	Propriétés du processus de contact	50
8.1	Monotonie	53
8.2	Attractivité	55
8.3	Existence de la mesure invariante supérieure	55
9	Auto-Dualité	56
9.1	Processus dual	57
10	Les valeurs critiques	60
11	Conclusion	65
	Conclusion	66

Table des figures

1.1	Trajectoire d'un marche aléatoire symétrique	8
1.2	Trajectoires du Mouvement Brownien (Processus Gaussien)	9
2.1	Processus de comptage $N(t)$ illustrant les instants d'arrivée T_n , les inter-arrivées τ_n , et la valeur $N(t)$	22
2.2	Trajectoires d'un processus de Poisson avec différentes intensités.	28
2.3	Les instants d'arrivée $T_1 < T_2 < \dots < T_n$ sont des tirages uniformes triés dans $[0, t]$ conditionnellement à $N(t) = n$	37
3.1	Les 4 plus proches voisins en $\mathbb{Z}^2$ selon la norme L^1	43
3.2	Représentation graphique du processus de contact.	46
3.3	Représentation graphique du processus du votant.	47
3.4	Réalisation du processus de contact avec un paramètre de naissance $\beta = 3.30$, sur le tore unidimensionnel à 600 sommets.	52
3.5	Réalisation du processus de contact avec un paramètre de naissance $\beta = 1.70$ sur une grille 200×200	52
3.6	Couplage du processus de contact avec différents paramètres de naissance.	54
3.7	Réalisation du processus de contact à partir d'un seul individu situé à l'origine.	58
3.8	Réalisation du processus dual à partir de $(0, t)$	58

Introduction

Dans le domaine des mathématiques appliquées et plus précisément en probabilités, les processus stochastiques jouent un rôle central dans la modélisation des phénomènes aléatoires qui évoluent soit dans le temps ou dans l'espace. Parmi ces processus, les systèmes de particules en interaction (IPS) sont essentiels pour comprendre les dynamiques collectives, telles que la propagation d'épidémies, les phénomènes d'opinion ou encore les systèmes physiques à plusieurs corps.

Historiquement, Les systèmes de particules en interaction (abrégiés en IPS pour Interacting Particle Systems) constituent un domaine vaste et actif de la théorie des probabilités, consacré à l'étude rigoureuse de certains modèles composés d'un grand (voire infini) nombre de particules évoluant sur un réseau et formant dans leur ensemble un processus de Markov.

Ce domaine a émergé à la fin des années 1960 grâce aux travaux fondateurs menés indépendamment par F. Spitzer aux États-Unis et par R. L. Dobrushin en Union soviétique. Dès 1975, quatre modèles classiques avaient déjà été introduits : le modèle d'Ising stochastique, le processus de contact, le processus d'exclusion et le modèle du voteur. Le premier ouvrage de référence sur les IPS, toujours considéré comme fondamental, a été écrit par T. Liggett [1].

La motivation initiale de ce domaine trouve son origine dans la mécanique statistique, une branche de la physique mathématique qui s'intéresse au comportement collectif de systèmes constitués d'un grand nombre de particules (atomes, molécules, gouttelettes, grains...). Elle utilise des modèles probabilistes décrivant les interactions microscopiques dans le but de comprendre les lois qui régissent le comportement macroscopique de ces systèmes.

Ces systèmes posent plusieurs défis mathématiques majeurs : existence et unicité des processus, comportement à long terme (extinction ou survie), existence de mesures invariantes, phénomènes de coexistence, etc. Pour y répondre, on utilise des outils puissants

comme la construction graphique à l'aide de processus de Poisson, les techniques de dualité, ou encore des résultats d'attractivité et de comparaison.

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à un type particulier de ces systèmes : les processus de contact, qui modélisent la propagation d'une infection à travers un réseau de sites ou d'individus. Ces processus sont fortement liés à la théorie des chaînes de Markov et utilisent des outils issus du calcul stochastique comme les processus de Poisson.

Ces modèles trouvent également de nombreuses **applications concrètes** : en biologie (modèles épidémiologiques), en sociologie (diffusion d'opinions ou de comportements), en écologie (dynamique de populations ou d'espèces en compétition), et même en physique statistique (automates cellulaires, transitions de phase).

L'objectif principal de ce travail est d'étudier, à travers une méthode probabiliste rigoureuse, les propriétés fondamentales des IPS, en s'appuyant notamment sur le modèle de base du processus de contact, tout en explorant certaines extensions comme le modèle du voteur ou le processus de contact à longue portée.

Ce travail de recherche est organisé en trois chapitres :

Le premier chapitre introduit les notions de base des processus stochastiques, en présentant les concepts fondamentaux, les exemples classiques ainsi que les chaînes de Markov à temps continu qui constitueront le contexte général.

Le deuxième chapitre est consacré au processus de Poisson, en même temps comme processus de comptage fondamental et comme outil de construction probabiliste, notamment via ses propriétés d'indépendance des accroissements et de mémoire exponentielle.

Le troisième chapitre constitue le cœur du mémoire : nous y étudions les systèmes de particules en interaction (IPS), en introduisant leur définition, leur construction via les processus de Poisson, et en détaillant des modèles clés comme le processus de contact et le modèle du voteur, tous définis sur une structure spatiale typiquement discrète (par exemple $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}^d$).

Chapitre 1

Généralités sur les processus stochastiques

1 Introduction

Dans ce chapitre, nous introduirons les concepts fondamentaux des processus stochastiques. Nous débuterons par une présentation des principes de base, avant d'examiner quelques exemples classiques, notamment le processus gaussien, la marche aléatoire et les chaînes de Markov à temps continu.

2 Définitions et propriétés générales

2.1 Définition et Propriétés

Dans la théorie des probabilités, un **espace probabilisé** est un triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ défini comme suit :

- L'ensemble Ω représente l'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire.
- La tribu (ou σ -algèbre) $\mathcal{A}$ sur Ω vérifie les propriétés suivantes :
 1. $\Omega \in \mathcal{A}$.
 2. Stabilité par complémentation : Si $A \in \mathcal{A}$, alors $A^c \in \mathcal{A}$.
 3. Stabilité par union dénombrable : Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$, alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

- La mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{A})$, qui attribue une probabilité à chaque événement dans $\mathcal{A}$. Cette mesure doit vérifier les conditions suivantes :
 1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
 2. Pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'ensembles disjoints dans $\mathcal{A}$, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n).$$

En parallèle, la notion de **variable aléatoire** X est une fonction mesurable définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, telle que $X : \Omega \rightarrow E$, où E est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

2.2 Processus Stochastiques

Définition 1.1 *Un processus stochastique est une famille de variables aléatoires notée $X := (X_t, t \in T)$, ou $\{X_t\}_{t \in T}$, ou encore $(X(t))_{t \in T}$, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, où T est un ensemble d'indice, généralement une partie de $\mathbb{R}^+$. Chaque $X_t : \Omega \rightarrow E$ est une variable aléatoire associée à un instant $t \in T$, et la famille $\{X_t\}_{t \in T}$ représente l'évolution aléatoire d'un système au cours du temps.*

Les processus aléatoires sont utilisés pour modéliser de nombreux phénomènes stochastiques qui évoluent dans le temps. Voici quelques exemples :

- Le nombre d'appels arrivant pendant un intervalle de temps $[0, t]$ dans un central téléphonique.
- Le bruit de fond dans un circuit électronique.
- Le nombre de défaillances se produisant par jour dans un système technique.
- La fortune d'un joueur après avoir joué n parties.
- Le nombre de clients dans une file d'attente à un instant donné t .

Remarque 1.1 *Si un processus stochastique $\{X_t\}_{t \in T}$ est défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, alors pour chaque $\omega \in \Omega$, une trajectoire d'un processus stochastique correspond à la fonction :*

$$t \rightarrow X_t(\omega) \quad t \in T$$

Ainsi, une trajectoire est une fonction (ou courbe) décrivant l'évolution du processus pour un scénario ω donné.

2.3 Espace d'état d'un processus stochastique

Définition 1.2 *Espace d'état d'un processus stochastique est l'ensemble E des valeurs possibles que peut prendre X_t pour chaque $t \in T$.*

- Si X_t représente une variable continue (comme une température), alors $E = \mathbb{R}$.
- Si X_t représente une variable discrète (comme le nombre de clients dans une file d'attente), alors $E = \mathbb{N}$.

3 Caractéristiques des Processus Stochastiques

Pour décrire complètement un processus stochastique, il est essentiel d'analyser la manière dont ses valeurs se distribuent dans le temps. Cette information est capturée par la loi du processus, qui décrit la distribution conjointe de ses variables aléatoires à différents instants.

3.1 Loi d'un processus stochastique

Définition 1.3 *Soit $X = (X_t, t \geq 0)$ un processus stochastique à valeurs réelles, défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. La loi de X est caractérisée par la donnée de toutes les lois fini-dimensionnelles des vecteurs $(X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$ pour tout entier k et tous $t_1 < \dots < t_k$. Cela se traduit par la fonction de répartition :*

$$F_{X_{t_1}, \dots, X_{t_k}}(x_1, \dots, x_k) = \mathbb{P}(X_{t_1} \leq x_1, \dots, X_{t_k} \leq x_k).$$

Voici maintenant deux notions importantes liées aux processus stochastiques :

Définition 1.4 *Deux processus stochastiques $X = (X_t, t \geq 0)$ et $Y = (Y_t, t \geq 0)$ à valeurs réelles, définis sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, peuvent être comparés ou combinés selon les critères suivants :*

1. **Même loi :** Les processus X et Y ont la même loi, notée $X \stackrel{d}{=} Y$, si elles ont les mêmes lois fini-dimensionnelles. C'est-à-dire, si pour tout entier k et tous $(X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$, les vecteurs aléatoires $(X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$ et $(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_k})$ ont la même loi.
2. **Indépendance :** Les processus X et Y sont dits indépendants si pour tout entier k et tous $(X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$, les vecteurs aléatoires $(X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$ et $(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_k})$ sont indépendants.

3.2 Caractéristiques non-aléatoires d'un processus stochastique

Le recours à des mesures non aléatoires telles que la fonction moyenne, la variance et la covariance permet de capturer certaines caractéristiques globales d'un processus stochastique, en décrivant ses tendances, sa dispersion et ses dépendances temporelles, facilitant ainsi son analyse et son interprétation.

Moyenne : La fonction moyenne d'un processus stochastique $\{X_t, t \in T\}$ est définie par :

$$\mu(t) = \mathbb{E}[X_t]$$

Elle représente la valeur moyenne du processus à un instant t . Par exemple, si X_t modélise la température à un instant t , $\mu(t)$ correspond à la température moyenne attendue à cet instant.

Variance : La variance d'un processus stochastique $\{X_t, t \in T\}$ est définie par :

$$\text{Var}(X_t) = \mathbb{E}[(X_t - \mathbb{E}[X_t])^2]$$

Elle mesure la dispersion des valeurs possibles de X_t autour de la moyenne.

Covariance : La covariance entre deux variables aléatoires X_t et X_s pour $(t \neq s)$ est donnée par :

$$\text{Cov}(X_t, X_s) = \mathbb{E}[(X_t - \mathbb{E}[X_t])(X_s - \mathbb{E}[X_s])]$$

Elle quantifie la dépendance linéaire entre les valeurs du processus à deux instants différents. Si la covariance est positive, les valeurs de X_t et X_s ont tendance à varier dans le même sens, si elle est négative, elles varient en sens opposé.

4 Exemples Classiques de Processus Stochastiques

4.1 Marche aléatoire

Définition 1.5 Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a(s), défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, i.i.d de loi $\mathcal{B}(p)$ et à valeurs dans $\{-1, 1\}$. Une marche aléatoire symétrique dans $\mathbb{Z}$ est la suite de v.a(s) définies par : $S_0 = 0$ et

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i.$$

$(S_n)_{n \geq 0}$ est donc un processus stochastique à temps discret.

Exemple (Marche aléatoire) Une particule se déplace le long d'un axe. Après chaque unité de temps, la particule se déplace d'une unité à droite avec la probabilité p , ou se déplace à gauche avec la probabilité $1 - p$. Dans le cas particulier d'une marche aléatoire symétrique, on prend $p = 0,5$. Alors la v.a S_n représente la position de la particule au bout de n pas. On a :

$$P(S_{n+1} = j \mid S_n = i) = \begin{cases} 0 & \text{si } |j - i| > 1, \\ p & \text{si } j = i + 1, \\ 1 - p & \text{si } j = i - 1. \end{cases}$$

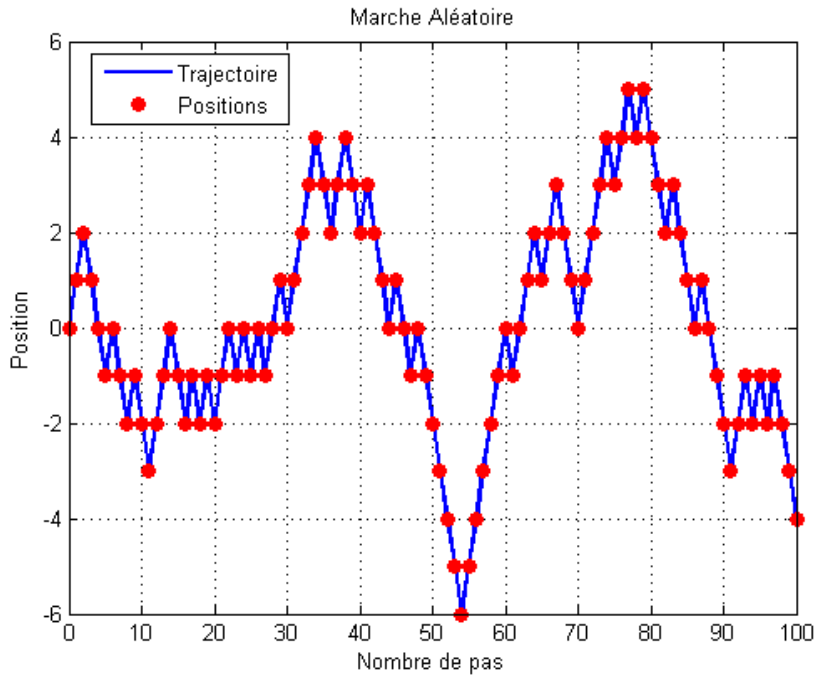


FIGURE 1.1 – Trajectoire d'un marche aléatoire symétrique

4.2 Processus gaussien

Les processus gaussiens occupent une place centrale en probabilité et en statistique, en raison de leurs propriétés analytiques remarquables et de leur large utilisation dans la modélisation des phénomènes aléatoires. Ils généralisent la notion de variables gaussiennes aux trajectoires temporelles et sont définis par le fait que toute collection finie de leurs valeurs suit une loi normale.

Définition 1.6 Un processus stochastique $(X_t)_{t \in T}$ est dit **gaussien** si toutes ses lois finies

dimensionnelles sont gaussiennes, c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t_1, \dots, t_n \in T, \quad \mathcal{L}(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \text{ est une loi gaussienne.}$$

Autrement dit, $X = (X_t)_{t \in T}$ est un processus gaussien si, pour tout choix de $n \in \mathbb{N}$, $t_1, \dots, t_n \in T$ et de coefficients $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, la combinaison linéaire

$$Y = a_1 X_{t_1} + \dots + a_n X_{t_n}$$

suit une loi gaussienne.

Exemple Un mouvement brownien standard n'est autre qu'un processus gaussien centré dont les trajectoires sont presque sûrement continues et dont la fonction de covariance est donnée par :

$$\text{Cov}(X_s, X_t) = \min(s, t).$$

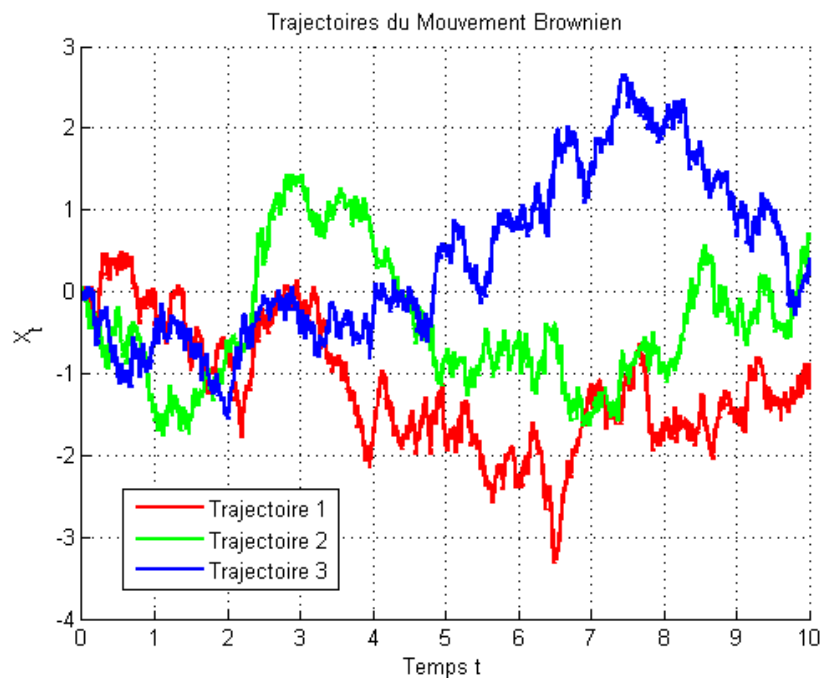


FIGURE 1.2 – Trajectoires du Mouvement Brownien (Processus Gaussien)

5 Chaînes de Markov à Temps Continu

Les chaînes de Markov à temps continu sont des processus stochastiques vérifiant la propriété de Markov, qui stipule que l'évolution future du processus ne dépend que de

son état actuel et non de son passé. Elles sont utilisées dans divers domaines, tels que l'informatique, les communications et la physique, pour modéliser des phénomènes où des événements discrets se produisent de manière aléatoire au cours du temps.

5.1 Processus de Markov à Temps Continu avec un Espace d'État Discret

Définition 1.7 Un *processus de Markov à temps continu* avec un espace d'état discret est un processus stochastique $X = (X_t)_{t \geq 0}$ défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, où l'espace d'état E est un ensemble fini ou dénombrable. Il satisfait la **propriété de Markov**, qui s'exprime de la manière suivante :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout choix de temps $0 \leq t_0 \leq \dots \leq t_n \leq t_{n+1}$ et pour tous états $i_0, i_1, \dots, i_n, i_{n+1} \in E$, on a :

$$\mathbb{P}(X_{t_{n+1}} = i_{n+1} \mid X_{t_0} = i_0, X_{t_1} = i_1, \dots, X_{t_n} = i_n) = \mathbb{P}(X_{t_{n+1}} = i_{n+1} \mid X_{t_n} = i_n).$$

Autrement dit, l'évolution future du processus ne dépend que de son état actuel et non de son passé.

Remarque 1.2 Dans le chapitre 2, nous étudierons les processus de Poisson, qui constituent un exemple fondamental de processus de Markov à temps continu, largement utilisés pour modéliser l'occurrence aléatoire d'événements dans le temps.

5.2 Équations de Kolmogorov

Avant d'introduire les équations de Kolmogorov, il est essentiel de définir la matrice des taux de transition Q , qui joue un rôle central dans la dynamique des chaînes de Markov à temps continu.

Dans une telle chaîne, l'évolution du processus est caractérisée par les probabilités de transition

$$P_{ij}(t) = \mathbb{P}(X_t = j \mid X_0 = i),$$

qui représentent la probabilité qu'un système initialement en état i atteigne l'état j après un temps t .

Pour analyser cette évolution, on introduit la matrice des taux de transition $Q = (q_{ij})_{i,j \in E}$,

définie par :

$$q_{ij} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}(X_{t+h} = j \mid X_t = i) - \delta_{ij}}{h}, \quad \text{pour } i, j \in E.$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker. Autrement dit, q_{ij} représente le taux de transition instantané de l'état i vers l'état j , tandis que q_{ii} (souvent négatif) traduit la vitesse à laquelle le processus quitte l'état i .

Cette matrice permet de caractériser l'évolution temporelle des probabilités de transition $P_{ij}(t)$. En effet, ces dernières satisfont un système d'équations différentielles connu sous le nom d'équations de Kolmogorov, que nous allons maintenant établir.

- Équation de Kolmogorov en avant :

$$\frac{d}{dt} P_{ij}(t) = \sum_k P_{ik}(t) q_{kj}. \quad (1.1)$$

- Équation de Kolmogorov en arrière :

$$\frac{d}{dt} P_{ij}(t) = \sum_k q_{ik} P_{kj}(t). \quad (1.2)$$

Ces équations permettent de déterminer les probabilités de transition à tout instant t à partir de la matrice des taux de transition $Q = (q_{ij})$. Le fait que la somme des probabilités de transition est égale à 1 :

$$\sum_{j \in S} P_{ij}(h) = 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{j \in S} q_{ij} = 0.$$

La matrice $Q = (q_{ij})_{i,j \in S}$ est appelée **matrice d'intensité** ou **générateur infinitésimal** de la chaîne de Markov à temps continu. Elle satisfait les propriétés suivantes :

- Pour tout $i \neq j$, $q_{ij} \geq 0$: c'est le taux de passage de l'état i vers l'état j .
- $q_{ii} = -\sum_{j \neq i} q_{ij} \leq 0$.
- Chaque ligne de Q vérifie : $\sum_{j \in S} q_{ij} = 0$.

En particulier, la matrice Q s'écrit souvent sous la forme :

$$Q = \begin{pmatrix} -q_1 & q_{12} & q_{13} & \cdots \\ q_{21} & -q_2 & q_{23} & \cdots \\ q_{31} & q_{32} & -q_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

où $q_i = \sum_{j \neq i} q_{ij}$ est le taux de sortie de l'état i .

5.3 Distribution Stationnaire et Condition de Balance

Dans de nombreux systèmes dynamiques, on s'intéresse à l'évolution à long terme des probabilités d'occupation des états. Pour une chaîne de Markov à temps continu, la *distribution stationnaire* est un concept clé qui permet de décrire la répartition asymptotique des probabilités lorsque le système atteint un état d'équilibre.

Intuitivement, une distribution stationnaire $\pi = (\pi_i)_{i \in E}$ représente une probabilité invariante dans le temps : si le processus est initialement distribué selon π , alors il le restera à tout instant t . Cela signifie que, à l'équilibre, le flux de probabilité entrant dans un état est exactement compensé par le flux sortant.

Cela se traduit par l'équation :

$$\pi Q = 0.$$

Cette équation s'écrit terme à terme :

$$\sum_{i \in E} \pi_i q_{ij} = 0, \quad \text{pour tout } j \in E.$$

Ce qui équivaut à dire que, pour chaque état j , la somme des flux entrants est égale à la somme des flux sortants :

$$\sum_{\substack{i \in E \\ i \neq j}} \pi_i q_{ij} = \pi_j \sum_{\substack{i \in E \\ i \neq j}} q_{ji}.$$

Dans certains cas particuliers, notamment lorsque la chaîne possède une propriété de réversibilité, la distribution stationnaire est plus facile à calculer. Une chaîne de Markov à temps continu est dite réversible si, sous la distribution stationnaire π , elle satisfait la condition de balance détaillée :

$$\pi_i q_{ij} = \pi_j q_{ji}, \quad \forall i, j \in E.$$

Cette relation exprime que, à l'équilibre, le flux de probabilité allant de i vers j est exactement égal à celui allant de j vers i . Intuitivement, cela signifie que le processus est statistiquement indiscernable lorsqu'on inverse le sens du temps.

La réversibilité est une propriété utile car elle permet souvent de déterminer explicitement la distribution stationnaire sans résoudre directement l'équation $\pi Q = 0$. Elle

apparaît fréquemment dans les modèles physiques et les systèmes en équilibre thermodynamique.

5.4 Exemples

Voici quelques exemples d'applications des chaînes de Markov à temps continu :

- Processus de naissance et de mort : utilisé en modélisation des files d'attente, ce processus décrit l'évolution d'une population où des individus peuvent naître (arrivées) et mourir (départs).
- Modèle épidémiologique (SIR) : permet de modéliser la propagation d'une maladie en divisant la population en trois catégories : Susceptibles (S), Infectés (I) et Retirés (R).
- Modèle M/M/1 : représente une file d'attente avec un seul serveur, où les arrivées suivent un processus de Poisson et les temps de service sont exponentiels.

6 Conclusion

Ce chapitre expose les notions de base des processus stochastiques. Suite à la définition des espaces de probabilités, nous aborderons les variables aléatoires et les processus. Nous avons mis en avant plusieurs cas d'étude significatifs tels que le mouvement brownien, le processus gaussien et les chaînes de Markov continues dans le temps, qui démontrent l'évolution stochastique d'un système au cours du temps. Dans le chapitre suivant, nous allons nous concentrer spécifiquement sur le processus de Poisson, qui est un processus de comptage. Nous examinerons également en profondeur son lien étroit avec la distribution exponentielle.

Chapitre 2

Processus de Poisson

1 Introduction

Le processus de Poisson, nommé d'après le mathématicien français **Siméon Denis Poisson**, est un type de processus stochastique qui modélise l'occurrence d'événements aléatoires, souvent rares, dans le temps ou dans l'espace. C'est un processus de comptage où $N(t)$ représente l'ensemble des événements survenus jusqu'au temps t . Dans ce chapitre, nous étudierons tout d'abord la distribution exponentielle, fortement associée au processus de Poisson. Nous passerons ensuite différentes définitions du processus, ses propriétés fondamentales, ainsi que les processus de Poisson composés et quelques-unes de leurs transformations. Nous étudierons le lien entre le processus de Poisson et la distribution exponentielle.

2 La distribution exponentielle

Avant d'introduire le processus de Poisson, il est essentiel de bien comprendre la loi exponentielle, qui joue un rôle fondamental dans sa définition.

Définition 2.1 Une variable aléatoire continue T suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, notée $T \sim \text{Exp}(\lambda)$, si sa fonction de répartition est donnée par :

$$P(T \leq t) = F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

La densité de probabilité correspondante est la dérivée de la fonction de répartition, soit :

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Espérance et variance

Pour calculer l'espérance de T, on utilise une intégration par parties :

$$\mathbb{E}[T] = \int_0^{\infty} t \lambda e^{-\lambda t} dt.$$

Posons :

$$\begin{cases} u = t \Rightarrow du = dt, \\ dv = \lambda e^{-\lambda t} dt \Rightarrow v = -e^{-\lambda t}. \end{cases}$$

Alors, d'après la formule d'intégration par parties :

$$\mathbb{E}[T] = \left[-te^{-\lambda t} \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt = 0 + \frac{1}{\lambda}.$$

De même, pour $\mathbb{E}[T^2]$:

$$\mathbb{E}[T^2] = \int_0^{\infty} t^2 \lambda e^{-\lambda t} dt.$$

On applique à nouveau l'intégration par parties deux fois. Pour la première :

$$\begin{cases} u = t^2 \Rightarrow du = 2t dt, \\ dv = \lambda e^{-\lambda t} dt \Rightarrow v = -e^{-\lambda t}. \end{cases}$$

On obtient :

$$\mathbb{E}[T^2] = \left[-t^2 e^{-\lambda t} \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2t e^{-\lambda t} dt = 0 + \frac{2}{\lambda^2}.$$

Par conséquent, la variance est donnée par :

$$\text{Var}(T) = \mathbb{E}[T^2] - (\mathbb{E}[T])^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda} \right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Fonction génératrice des moments

La fonction génératrice des moments (FGM) d'une variable aléatoire $T \sim \text{Exp}(\lambda)$ est définie pour $s < \lambda$ par :

$$M_T(s) = \mathbb{E}[e^{sT}] = \int_0^\infty e^{st} \lambda e^{-\lambda t} dt = \lambda \int_0^\infty e^{-(\lambda-s)t} dt.$$

Ce qui donne :

$$M_T(s) = \frac{\lambda}{\lambda - s}, \quad \text{pour } s < \lambda.$$

Par dérivation d'ordre k de cette fonction génératrice des moments, on obtient que les moments d'ordre k d'une variable exponentielle de paramètre λ sont

$$\mathbb{E}[X^k] = \frac{k!}{\lambda^k}.$$

2.1 La propriété de perte de mémoire

L'une des caractéristiques les plus remarquables de la loi exponentielle est sa **propriété de perte de mémoire**.

Intuitivement, cela signifie que si l'on a déjà attendu un certain temps t sans que l'événement ne se produise, le temps qu'il reste à attendre ne dépend pas du passé. Autrement dit, l'attente « repart de zéro ».

Inversement, si une variable aléatoire positive et continue vérifie cette propriété, alors elle suit nécessairement une loi exponentielle.

Théorème 2.1 *Soit T une variable aléatoire continue. Alors, T suit une loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$ si et seulement si :*

$$\mathbb{P}(T > t + s \mid T > t) = \mathbb{P}(T > s), \quad \text{pour tous } s, t > 0.$$

Preuve. Supposons que $T \sim \text{Exponentiel}(\mu)$. Alors,

$$\mathbb{P}(T > t + s \mid T > t) = \frac{\mathbb{P}(T > t + s)}{\mathbb{P}(T > t)} = \frac{e^{-\mu(t+s)}}{e^{-\mu t}} = e^{-\mu s} = \mathbb{P}(T > s).$$

Réciproquement, supposons que :

$$\mathbb{P}(T > t + s | T > t) = \mathbb{P}(T > s), \quad \forall s, t > 0. \quad (2.1)$$

Posons $\varphi(t) = \mathbb{P}(T > t)$ pour tout $t \geq 0$. L'équation (2.1) donne :

$$\varphi(t + s) = \varphi(t)\varphi(s), \quad \forall s, t > 0.$$

Comme $\varphi(1) \in (0, 1)$, il existe un unique $\mu > 0$ tel que $\varphi(1) = e^{-\mu}$. Montrons que $\varphi(t) = e^{-\mu t}$.

Cas des entiers : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par récurrence :

$$\varphi(n) = \varphi(n-1)\varphi(1) = \dots = (\varphi(1))^n = e^{-\mu n}.$$

Cas des rationnels : Soit $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^+$. Comme $p = qr \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$e^{-\mu p} = \varphi(p) = \varphi(qr) = (\varphi(r))^q \Rightarrow \varphi(r) = (e^{-\mu p})^{1/q} = e^{-\mu r}.$$

Cas des réels positifs Soit $t \in \mathbb{R}^+$, et soit (t_n) une suite décroissante de rationnels positifs telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t$. Par continuité à droite de φ :

$$\varphi(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\mu t_n} = e^{-\mu t}.$$

Ainsi, la fonction de répartition de T est :

$$F_T(t) = 1 - \varphi(t) = 1 - e^{-\mu t},$$

donc $T \sim \text{Exponentiel}(\mu)$. ■

2.2 Minimum de deux lois exponentielles indépendentes

Dans de nombreuses situations aléatoires, plusieurs événements « attendent » de se produire, chacun avec un délai modélisé par une variable exponentielle. Une question naturelle est alors : *lequel de ces événements se produira en premier, et combien de temps faudra-t-il attendre ?* Ce type de situation apparaît fréquemment dans :

1. les systèmes de files d'attente (quel serveur est libre en premier?),
2. la fiabilité (quelle pièce casse en premier?),

3. les chaînes de Markov à temps continu (quelle transition est effectuée en premier?).

Pour répondre à ce type de questions, nous étudions ci-dessous le comportement du minimum de deux variables exponentielles indépendantes.

Théorème 2.2 Soient $S \sim \text{Exp}(\alpha)$ et $T \sim \text{Exp}(\beta)$ deux variables aléatoires indépendantes. Alors :

1. La variable aléatoire $S \wedge T = \min(S, T)$ suit une loi exponentielle de paramètre $\alpha + \beta$.
2. La variable $S \wedge T$ est indépendante de l'événement $\{S \wedge T = S\}$.
3. De plus,

$$\mathbb{P}(S \wedge T = S) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(S \wedge T = T) = \frac{\beta}{\alpha + \beta}.$$

Preuve. Commençons par la loi du minimum. Pour tout $t \geq 0$, on a :

$$\mathbb{P}(S \wedge T > t) = \mathbb{P}(S > t \text{ et } T > t) = \mathbb{P}(S > t) \cdot \mathbb{P}(T > t),$$

car S et T sont indépendantes. En utilisant les lois exponentielles :

$$\mathbb{P}(S > t) = e^{-\alpha t}, \quad \mathbb{P}(T > t) = e^{-\beta t} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}(S \wedge T > t) = e^{-(\alpha + \beta)t}.$$

Cela montre que $S \wedge T \sim \text{Exp}(\alpha + \beta)$.

Passons maintenant à la probabilité que S soit la plus petite :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S < T) &= \int_0^\infty \mathbb{P}(T > s \mid S = s) f_S(s) ds \\ &= \int_0^\infty \mathbb{P}(T > s) f_S(s) ds \quad (\text{car } S \text{ et } T \text{ sont indépendantes}) \\ &= \int_0^\infty e^{-\beta s} \cdot \alpha e^{-\alpha s} ds \\ &= \alpha \int_0^\infty e^{-(\alpha + \beta)s} ds = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}. \end{aligned}$$

De manière symétrique :

$$\mathbb{P}(T < S) = \frac{\beta}{\alpha + \beta}.$$

Indépendance de $S \wedge T$ et $\{S < T\}$: Intuitivement, cela signifie que peu importe lequel

des deux temps gagne la course, la durée d'attente jusqu'au premier événement reste distribuée de la même façon : le gagnant n'influence pas le moment où l'un des deux arrive.

On calcule la loi de $S \wedge T$ conditionnellement à $\{S < T\}$:

$$\mathbb{P}(S \wedge T > t \mid S < T) = \frac{\mathbb{P}(S > t, T > t, S < T)}{\mathbb{P}(S < T)}.$$

Or,

$$\{S > t, T > t, S < T\} = \{t < S < T\},$$

donc

$$\mathbb{P}(S \wedge T > t \mid S < T) = \frac{\mathbb{P}(t < S < T)}{\mathbb{P}(S < T)}.$$

Calculons le numérateur :

$$\mathbb{P}(t < S < T) = \int_t^\infty \mathbb{P}(T > s) f_S(s) ds = \int_t^\infty e^{-\beta s} \alpha e^{-\alpha s} ds = \alpha \int_t^\infty e^{-(\alpha+\beta)s} ds = \alpha \cdot \frac{e^{-(\alpha+\beta)t}}{\alpha+\beta}.$$

Le dénominateur est :

$$\mathbb{P}(S < T) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}.$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}(S \wedge T > t \mid S < T) = e^{-(\alpha+\beta)t},$$

ce qui est la fonction de survie d'une loi $\text{Exp}(\alpha+\beta)$, identique à celle de $S \wedge T$. On en conclut que $S \wedge T$ est indépendante de l'événement $\{S < T\}$. ■

Remarque 2.1 Ce résultat se généralise au cas de n variables exponentielles indépendantes $T_1, \dots, T_n$, avec $T_i \sim \text{Exp}(\lambda_i)$. Dans ce cas, on a :

$$\min(T_1, \dots, T_n) \sim \text{Exp}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n), \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(T_i = \min(T_1, \dots, T_n)) = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}.$$

En effet si $S = T_i$ et U le minimum des T_j pour $j \neq i$. D'après la remarque précédente, U suit une loi exponentielle avec paramètre :

$$\mu = (\lambda_1 + \dots + \lambda_n) - \lambda_i.$$

Nous utilisons ensuite le résultat classique pour deux variables aléatoires exponentielles indépendantes :

$$P(T_i = \min(T_1, \dots, T_n)) = P(S < U).$$

Puisque S suit une loi exponentielle de paramètre λ_i et U suit une loi exponentielle de paramètre μ , on applique la propriété :

$$P(S < U) = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu}.$$

En remplaçant μ par sa valeur :

$$\begin{aligned} P(T_i = \min(T_1, \dots, T_n)) &= \frac{\lambda_i}{\lambda_i + (\lambda_1 + \dots + \lambda_n - \lambda_i)} \\ &= \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}. \end{aligned}$$

2.3 Somme de variables exponentielles indépendantes

Théorème 2.3 Soient $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ des variables aléatoires indépendantes, chacune suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, c'est-à-dire $\tau_i \sim \text{Exp}(\lambda)$ pour tout $i = 1, \dots, n$.

Alors, la somme

$$T_n = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n$$

suit une loi gamma $\Gamma(n, \lambda)$. Autrement dit, la densité de T_n est donnée par :

$$f_{T_n}(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}, & \text{si } t \geq 0, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.2)$$

Preuve. Les variables $\tau_1, \dots, \tau_n$ étant indépendantes, la FGM de leur somme T_n est le produit des FGM individuelles :

$$M_{T_n}(s) = \mathbb{E}[e^{sT_n}] = (M_{\tau}(s))^n = \left(\frac{\lambda}{\lambda - s} \right)^n.$$

On reconnaît ici la FGM de la loi gamma $\Gamma(n, \lambda)$, ce qui permet de conclure que :

$$T_n \sim \Gamma(n, \lambda).$$

■

Remarque 2.2 La variable T_n peut être interprétée comme le temps d'attente jusqu'à la survenue du n ème événement dans un phénomène aléatoire où les événements surviennent à un rythme constant λ . Cette interprétation préfigure la notion de processus de Poisson, qui sera définie plus loin dans ce chapitre, et joue un rôle central dans la modélisation des temps d'attente dans les files d'attente ou les systèmes de fiabilité.

3 Définitions du processus de Poisson

3.1 Définition du processus de Poisson basée sur les temps inter-arrivées exponentiels

Définition 2.2 Soient $\tau_1, \tau_2, \dots$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.), chacune suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, c'est-à-dire $\tau_i \sim \text{Exp}(\lambda)$ pour tout $i \geq 1$.

On définit les sommes partielles :

$$T_n = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n, \quad \text{pour tout } n \geq 1, \quad \text{et } T_0 = 0.$$

La variable T_n représente alors le temps d'arrivée du n -ième événement.

On définit ensuite un processus de comptage $(N(t))_{t \geq 0}$ par :

$$N(t) = \max\{n \in \mathbb{N} : T_n \leq t\} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{T_n \leq t\}}.$$

Autrement dit, $N(t)$ donne le nombre total d'événements survenus (ou d'arrivées enregistrées) jusqu'à l'instant t . Ce processus $(N(t))_{t \geq 0}$ est appelé **processus de Poisson homogène de paramètre λ** .

Dans une interprétation concrète, on peut voir τ_n comme le temps séparant l'arrivée du $(n-1)$ -ième client de celle du n -ième client à un distributeur automatique. Ainsi, T_n est le temps d'arrivée du n -ième client, et $N(t)$ indique combien de clients sont arrivés durant l'intervalle de temps $[0, t[$.

Lemme 2.1 $N(s)$ suit une distribution de Poisson avec une moyenne λs .

Preuve. On a $N(s) = n$ si et seulement si $T_n < s < T_{n+1}$. Autrement dit, le n -ième client

arrive avant le temps s mais le $(n + 1)$ -ième arrive après s , il en découle que

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(N(s) = n) &= \mathbb{P}(T_n \leq s < T_{n+1}) \\
 &= \mathbb{P}(0 \leq s - T_n < \tau_{n+1}) \\
 &= \int_0^s f_{T_n}(t) \mathbb{P}(\tau_{n+1} > s - t \mid T_n = t) dt \quad (\text{par indépendance des inter-arrivées}) \\
 &= \int_0^s f_{T_n}(t) \mathbb{P}(\tau_{n+1} > s - t) dt.
 \end{aligned}$$

Or, la probabilité que τ_{n+1} soit supérieure à $s - t$ est donnée par :

$$\mathbb{P}(\tau_{n+1} > s - t) = e^{-\lambda(s-t)}.$$

En remplaçant (2.2) par la densité gamma, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(N(s) = n) &= \int_0^s \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot e^{-\lambda(s-t)} dt \\
 &= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda s} \int_0^s t^{n-1} dt \\
 &= e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^n}{n!}.
 \end{aligned}$$

D'où $N(s) \sim \text{Poisson}(\lambda s)$. ■

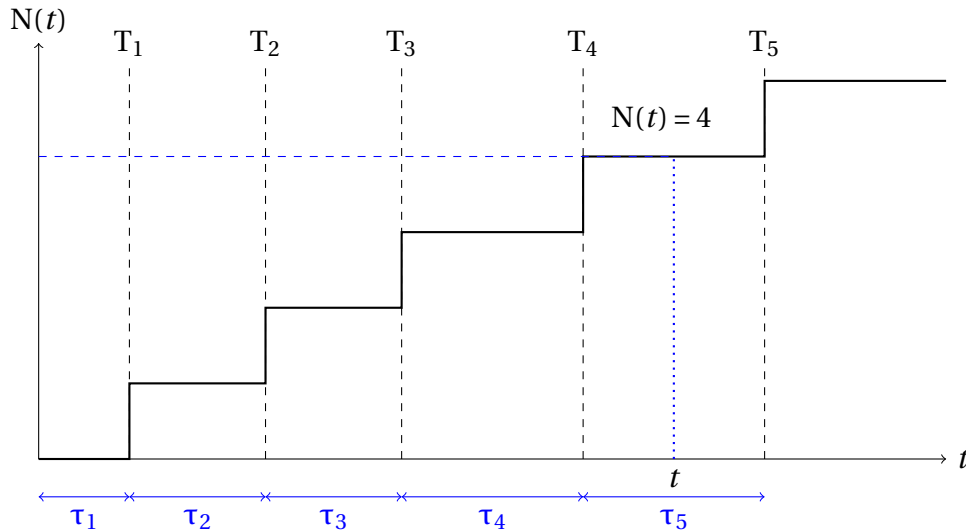


FIGURE 2.1 – Processus de comptage $N(t)$ illustrant les instants d'arrivée T_n , les inter-arrivées τ_n , et la valeur $N(t)$.

3.2 Processus de Poisson à partir des propriétés de comptage

Définition 2.3 Un processus $\{N(s), s \geq 0\}$ d'intensité $\lambda > 0$ définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un **processus de Poisson** si :

- $N(0) = 0$ avec probabilité 1.
- $N(t)$ a des accroissements indépendants, c'est-à-dire que si $t_0 < t_1 < \dots < t_n$, alors

$$N(t_1) - N(t_0), \quad N(t_2) - N(t_1), \dots, N(t_n) - N(t_{n-1})$$

sont des variables aléatoires indépendantes.

- $N(t + s) - N(s)$ suit une loi de Poisson de paramètre λt , c'est-à-dire :

$$\mathbb{P}(N(s + t) - N(s) = k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad k \geq 0.$$

Théorème 2.4 Les définitions 2.3 et 2.2 sont équivalentes.

Preuve. Soit $N_t, t \geq 0$, nous montrons que la définition 2.2 implique la définition 2.3.

Nous supposons que les temps d'inter-arrivées $\tau_1, \tau_2, \dots$ sont des variables aléatoires exponentielles indépendantes un paramètre λ . Nous définissons le processus de comptage comme suit :

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\}, \quad \text{où} \quad T_n = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n.$$

Nous devons vérifier que $N(t)$ respecte les propriétés du processus de Poisson.

- D'après la définition 2.2, $T_0 = 0$, donc $N(0) = \max\{n : T_n \leq 0\}$. Par conséquent, $N(0) = 0$ avec probabilité 1.
- Par définition, les variables aléatoires τ_i possèdent une indépendance et suivent une distribution exponentielle. Ainsi, le nombre d'arrivées dans les intervalles $[s, t]$ et $[t, u]$ est indépendant des τ_i qui se produisent durant cette période. Étant donné que les τ_i sont indépendants, les accroissements $N(t) - N(s)$ et $N(u) - N(t)$ sont également indépendants.
- Montrons que pour tout $s, t \geq 0$,

$$N(s + t) - N(s) \sim \text{Poisson}(\lambda t).$$

Ceci revient à montrer que pour tout $s \geq 0$, le processus

$$M(t) := N(t + s) - N(s)$$

est un processus de Poisson de paramètre λ , indépendant du passé.

Supposons $n_0 := N(s)$. Par définition, on a :

$$T_{n_0} \leq s < T_{n_0+1}$$

Cela signifie que le premier temps d'arrivée après s est $T_{n_0+1} = T_{n_0} + \tau_{n_0+1}$.

Posons :

$$\tau'_1 := T_{n_0+1} - s = \tau_{n_0+1} - (s - T_{n_0})$$

Sachant que $\tau_{n_0+1} > s - T_{n_0}$, la propriété de *perte de mémoire* de la loi exponentielle nous donne :

$$\mathbb{P}(\tau_{n_0+1} > s - T_{n_0} + t \mid \tau_{n_0+1} > s - T_{n_0}) = \mathbb{P}(\tau_{n_0+1} > t) = e^{-\lambda t}$$

Ainsi, $\tau'_1 \sim \text{Exp}(\lambda)$ et est indépendante du passé $(\tau_1, \dots, \tau_{n_0})$.

On définit alors les inter-arrivées après s comme :

$$\tau'_1 = T_{n_0+1} - s, \quad \tau'_2 = \tau_{n_0+2}, \quad \tau'_3 = \tau_{n_0+3}, \dots$$

On en déduit que la suite $(\tau'_k)_{k \geq 1}$ est une famille de variables i.i.d. de loi $\text{Exp}(\lambda)$, indépendante du passé.

On pose :

$$T'_n := \sum_{k=1}^n \tau'_k$$

et :

$$M(t) = \max\{n : T'_n \leq t\}$$

On reconnaît alors un processus de Poisson de paramètre λ . Par conséquent et par le lemme 2.1 :

$$M(t) = N(t + s) - N(s) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$$

La construction des inter-arrivées après s montre que $M(t)$ est un processus de Poisson de paramètre λ , indépendant de l'histoire avant s . Cela prouve que $N(t + s) - N(s)$ suit une loi $\text{Poisson}(\lambda t)$, et que le processus possède des incréments stationnaires et indépen-

dants.

Ainsi, $N(t)$, $t \geq 0$ satisfait toutes les conditions de la définition 2.3.

Réciproquement, nous montrons que la définition 2.3 implique la définition 2.2.

Supposons que $N(t)$, $t \geq 0$ satisfait aux conditions de la définition 2.3. Nous devons montrer qu'il existe une suite de variables aléatoires $\tau_1, \tau_2, \dots$ indépendantes suivant une loi exponentielle de paramètre λ , telles que

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\}, \quad \text{où } T_n = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n.$$

Définissons les temps d'inter-arrivée comme suit :

$$\tau_1 = T_1, \tau_2 = T_2 - T_1, \tau_3 = T_3 - T_2, \dots$$

où τ_i mesure la durée depuis l'événement précédent, T_n est le temps d'arrivée du n -ième événement, défini par :

$$T_n = \inf\{t \geq 0 : N(t) \geq n\}.$$

Par la propriété des accroissements indépendants de $N(t)$ implique que les intervalles entre les arrivées τ_i sont indépendants.

Montrons que chaque τ_i suit une loi exponentielle de paramètre λ . Fixons un intervalle $[0, t]$, la probabilité qu'aucun événement ne survienne dans cet intervalle est donnée par :

$$\mathbb{P}(\tau_1 > t) = \mathbb{P}(N(t) = 0).$$

Or, d'après la définition 2.3, $N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$, donc :

$$\mathbb{P}(N(t) = 0) = e^{-\lambda t} \text{ et } \mathbb{P}(\tau_1 > t) = e^{-\lambda t}.$$

Cela montre que τ_1 suit une loi exponentielle de paramètre λ . De même, par la propriété des accroissements indépendants, chaque τ_i suit une loi exponentielle de paramètre λ .

$$\mathbb{P}(\tau_2 > t \mid T_1 = s) = \mathbb{P}(\text{pas d'événement dans } (s, s+t] \mid T_1 = s)$$

$$= \mathbb{P}(N(t+s) - N(s) = 0 \mid N(r) = 0 \text{ pour } r < s, N(s) = 1)$$

$$= \mathbb{P}(N(t+s) - N(s) = 0) = e^{-\lambda t}$$

ce qui montre que τ_2 suit également une loi exponentielle de paramètre λ et est indépendante de τ_1 . En répétant cet argument, on constate que les $\tau_1, \tau_2, \dots$ sont indépendantes et suivent toutes une loi exponentielle de paramètre λ .

Enfin, le nombre total d'événements survenus avant ou à l'instant t est donné par :

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\}, \quad \text{où} \quad T_n = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n.$$

Cette construction correspond à celle présentée dans la définition 2.2. Par conséquent, nous avons montré que chaque définition implique l'autre, ce qui prouve leur équivalence. ■

3.3 Comportement infinitésimal d'un processus de Poisson

Pour un processus de Poisson, il est important d'analyser son comportement sur de très petits intervalles de temps. Le théorème suivant précise la probabilité d'observer un saut au cours d'un court laps de temps, ce qui permet d'interpréter λ comme le taux instantané d'occurrence des événements.

Théorème 2.5 *Soit $(N_t)_{t \geq 0}$ un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Alors, pour tout $t \geq 0$, on a :*

$$\mathbb{P}(N_{t+h} - N_t = 1 \mid N_t = n) = \lambda h + o(h),$$

$$\mathbb{P}(N_{t+h} - N_t = 0 \mid N_t = n) = 1 - \lambda h + o(h),$$

$$\mathbb{P}(N_{t+h} - N_t \geq 2 \mid N_t = n) = o(h).$$

Preuve. Par indépendance et stationnarité des accroissements, on a :

$$\mathbb{P}(N_{t+h} - N_t = k \mid N_t = n) = \mathbb{P}(N_h = k),$$

où $N_h \sim \text{Poisson}(\lambda h)$. On développe les premiers termes :

$$\mathbb{P}(N_h = 0) = e^{-\lambda h} = 1 - \lambda h + o(h),$$

$$\mathbb{P}(N_h = 1) = e^{-\lambda h} \lambda h = \lambda h + o(h),$$

$$\mathbb{P}(N_h \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(N_h = 0) - \mathbb{P}(N_h = 1) = o(h).$$

Ce qui conclut la démonstration. ■

Enfin, un *processus de Poisson* $(N_t)_{t \geq 0}$ sur $\mathbb{R}_+$, d'intensité $\lambda > 0$, est un processus à valeurs dans $\mathbb{N}$, partant de 0, dont les trajectoires sont croissantes, continues à droite avec limites à gauche, et qui satisfait l'un des trois jeux de propriétés équivalents suivants :

1. **(Temps inter-arrivées)** : Les temps inter-arrivées $(\tau_i)_{i \geq 1}$ sont i.i.d. de loi exponentielle de paramètre λ , et les instants d'arrivée sont donnés par :

$$T_i = \sum_{j=1}^i \tau_j.$$

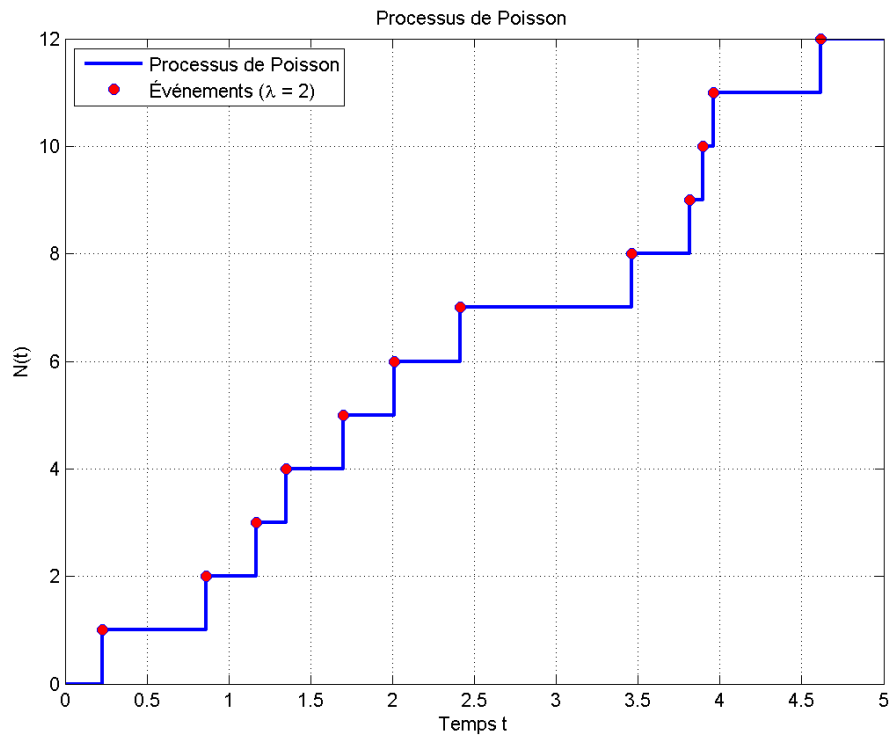
Le processus saute de $i - 1$ à i à l'instant T_i .

2. **(Comportement infinitésimal)** : Les accroissements sont indépendants, et pour tout $t \geq 0$, tout $n \in \mathbb{N}$,

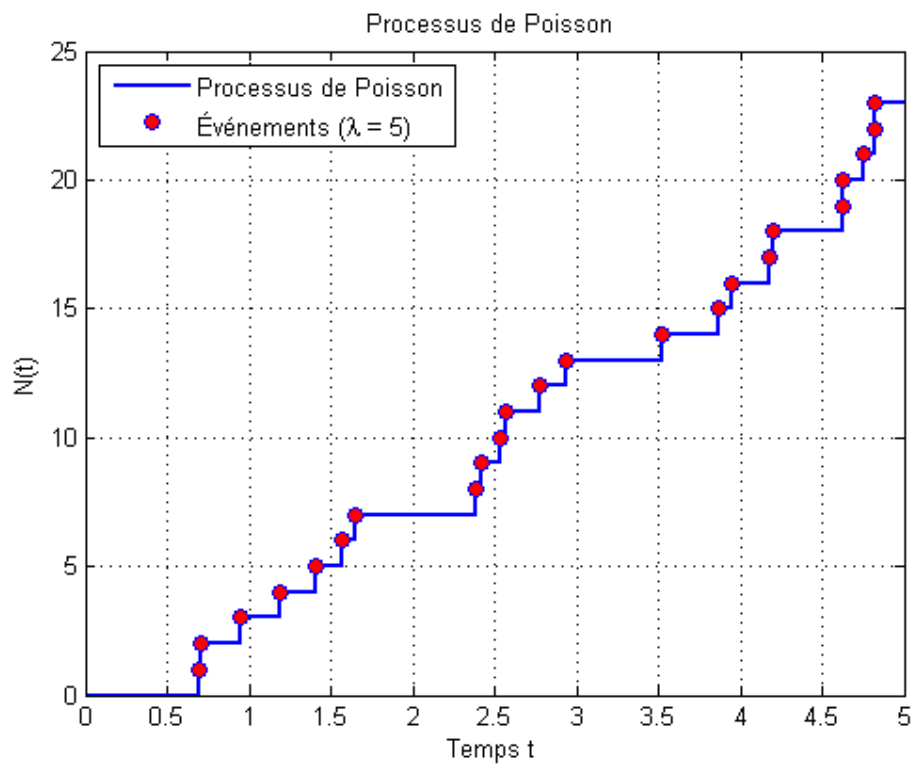
$$\mathbb{P}(N_{t+h} = n + m \mid N_t = n) = \begin{cases} \lambda h + o(h), & \text{si } m = 1, \\ 1 - \lambda h + o(h), & \text{si } m = 0, \\ o(h), & \text{si } m \geq 2. \end{cases}$$

3. **(Accroissements stationnaires et indépendants)** : Le processus a des accroissements indépendants et stationnaires, et pour tout $t \geq 0$, on a :

$$N_t \sim \text{Poisson}(\lambda t).$$



(a) $\lambda = 2$



(b) $\lambda = 5$

FIGURE 2.2 – Trajectoires d'un processus de Poisson avec différentes intensités.

4 Processus de Poisson Composé

Dans cette section, on va rendre notre processus de Poisson un peu plus riche : à chaque arrivée, on associera une variable aléatoire Y_i , tirée de la même loi que les autres, et indépendante. Cela signifie que les Y_i ne dépendent ni les unes des autres, ni du moment où les arrivées se produisent dans le processus de Poisson.

Définition 2.4 Soient N un processus de Poisson de paramètre λ , et $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires iid et indépendantes du processus N . Le processus défini par

$$S_t = \sum_{k=1}^{N_t} Y_k$$

est appelé un processus de Poisson composé sur $\mathbb{R}_+$.

Remarque 2.3 Lorsque l'on choisit les Y_n comme des variables déterministes égales à 1, on retrouve

$$S_t = N_t,$$

c'est-à-dire un processus de Poisson.

Exemple 2.1 Supposons que le nombre de clients arrivés à un service à l'instant t suive un processus de Poisson N , et qu'un client dépense une quantité aléatoire Y , indépendante des autres clients ainsi que du nombre total de clients. Alors, le montant total gagné par le service jusqu'à l'instant t suit un processus de Poisson composé S .

Exemple 2.2 Imaginons un magasin où les clients arrivent en voiture, selon un processus de Poisson. On modélise les instants d'arrivée des voitures comme les temps d'un processus de Poisson. Si l'on note Y_i le nombre de personnes dans la i -ème voiture, il est naturel de supposer que les $Y_1, Y_2, \dots$ sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.), et indépendantes du processus de Poisson des arrivées.

On peut alors s'intéresser au nombre total de personnes arrivées au magasin jusqu'au temps t :

$$S(t) = Y_1 + \dots + Y_{N(t)}$$

avec la convention $S(t) = 0$ si aucune voiture n'est encore arrivée avant t , c'est-à-dire si $N(t) = 0$.

Dans ce cadre, $S(t)$ représente le nombre total de clients présents dans toutes les voitures arrivées jusqu'au temps t . Il devient alors pertinent d'étudier l'espérance et la variance de $S(t)$.

Théorème 2.6 Soit $Y_1, Y_2, \dots$ des variables indépendantes et identiquement distribuées, soit N une variable aléatoire entière positive indépendante, et soit

$$S = Y_1 + \dots + Y_N, \quad \text{avec } S = 0 \text{ lorsque } N = 0.$$

- i. Si $\mathbb{E}[Y_i] < \infty$ et $\mathbb{E}[N] < \infty$, alors $\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[N] \cdot \mathbb{E}[Y_i]$.
- ii. Si $\mathbb{E}[Y_i^2] < \infty$ et $\mathbb{E}[N^2] < \infty$, alors $\text{Var}(S) = \mathbb{E}[N] \text{Var}(Y_i) + \text{Var}(N)(\mathbb{E}[Y_i])^2$.
- iii. Si N suit une loi de Poisson de paramètre λ , alors $\text{Var}(S) = \lambda \mathbb{E}[Y_i^2]$.

Preuve. En utilisant la linéarité de l'espérance et la définition de S , on a :

$$\mathbb{E}[S] = \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^N Y_i \right].$$

Par propriété de l'espérance conditionnelle :

$$\mathbb{E}[S] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[S|N=n] P(N=n).$$

Sachant que $S|N=n$ est une somme de n variables i.i.d. Y_i , on a :

$$\mathbb{E}[S|N=n] = n\mathbb{E}[Y_i].$$

En prenant l'espérance sur N :

$$\mathbb{E}[S] = \sum_{n=0}^{\infty} n\mathbb{E}[Y_i] P(N=n) = \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[Y_i].$$

Pour la variance, on applique la loi totale de la variance :

$$\text{Var}(S) = \mathbb{E}[\text{Var}(S|N)] + \text{Var}(\mathbb{E}[S|N]).$$

Sachant que $S|N=n$ est une somme de n variables indépendantes :

$$\text{Var}(S|N=n) = n\text{Var}(Y_i).$$

En prenant l'espérance sur N :

$$\mathbb{E}[\text{Var}(S|N)] = \mathbb{E}[N]\text{Var}(Y_i).$$

De plus, comme $\mathbb{E}[S|N] = N\mathbb{E}[Y_i]$, on a :

$$\text{Var}(\mathbb{E}[S|N]) = (\mathbb{E}[Y_i])^2 \text{Var}(N).$$

En combinant ces résultats :

$$\text{Var}(S) = \mathbb{E}[N]\text{Var}(Y_i) + \text{Var}(N)(\mathbb{E}[Y_i])^2.$$

Dans le cas particulier où $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$, on sait que :

$$\mathbb{E}[N] = \lambda, \quad \text{Var}(N) = \lambda.$$

En remplaçant :

$$\text{Var}(S) = \lambda \text{Var}(Y_i) + \lambda (\mathbb{E}[Y_i])^2.$$

Enfin, en utilisant la propriété $\text{Var}(Y_i) + (\mathbb{E}[Y_i])^2 = \mathbb{E}[Y_i^2]$, on obtient :

$$\text{Var}(S) = \lambda \mathbb{E}[Y_i^2].$$

■

5 Transformations

5.1 Amincissement d'un processus de Poisson (Filtrage)

Soit $N_j(t)$ le nombre d'indices $i \leq N(t)$ tels que $Y_i = j$. Dans le cadre de notre exemple des voitures arrivant à un magasin, où Y_i représente le *nombre de personnes* dans la i -ième voiture, $N_j(t)$ correspond donc au *nombre de voitures contenant exactement j personnes* qui sont arrivées avant l'instant t .

Le résultat suivant montre que l'on peut découper un processus de Poisson en plusieurs processus indépendants selon la valeur de Y_i :

Théorème 2.7 Les processus $N_j(t)$ sont des processus de Poisson indépendants de taux $\lambda P(Y_i = j)$.

Preuve. Soit $N(t)$ un processus de Poisson de taux λ , et soit (Y_i) une suite de variables aléatoires indépendantes telles que

$$P(Y_i = j) = p_j, \quad \sum_j p_j = 1.$$

Le processus $N_j(t)$ compte les événements de type j , c'est-à-dire :

$$N_j(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} \mathbf{1}_{\{Y_i=j\}}.$$

1. Montrons que $N_j(t)$ suit une loi de Poisson

Sachant que $N(t)$ suit une loi de Poisson de paramètre λt , nous avons :

$$P(N(t) = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

Sous la condition que $N(t) = n$, chaque événement est associé à la catégorie j avec une probabilité de p_j . Ainsi, $N_j(t)$ suit une loi binomiale :

$$P(N_j(t) = k \mid N(t) = n) = \binom{n}{k} p_j^k (1 - p_j)^{n-k}.$$

En appliquant une marginalisation sur $N(t)$, nous obtenons :

$$P(N_j(t) = k) = \sum_{n=k}^{\infty} P(N_j(t) = k \mid N(t) = n) P(N(t) = n).$$

En remplaçant les distributions :

$$P(N_j(t) = k) = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} p_j^k (1 - p_j)^{n-k} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

On factorise les termes constants par rapport à la somme :

$$\mathbb{P}(N_j(t) = k) = \frac{p_j^k}{k!} e^{-\lambda t} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} (1 - p_j)^{n-k} \frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

En simplifiant :

$$\mathbb{P}(N_j(t) = k) = \frac{(p_j \lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{[(1-p_j)\lambda t]^{n-k}}{(n-k)!}.$$

On effectue le changement d'indice $m = n - k$, donc $n = m + k$, ce qui donne :

$$\mathbb{P}(N_j(t) = k) = \frac{(p_j \lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[(1-p_j)\lambda t]^m}{m!}.$$

La somme est la série exponentielle :

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{[(1-p_j)\lambda t]^m}{m!} = e^{(1-p_j)\lambda t}.$$

Ainsi, on obtient :

$$\mathbb{P}(N_j(t) = k) = \frac{(p_j \lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} e^{(1-p_j)\lambda t} = \frac{(p_j \lambda t)^k}{k!} e^{-p_j \lambda t}.$$

Ce qui montre que $N_j(t) \sim \text{Poisson}(p_j \lambda t)$.

2. Indépendance des processus $N_j(t)$

Soient $j \neq k$. Nous devons prouver que $N_j(t)$ et $N_k(t)$ sont indépendants. Étant donné que chaque événement est classé indépendamment dans une catégorie, et que le processus de Poisson a des incréments indépendants, les comptages $N_j(t)$ et $N_k(t)$ sont construits à partir d'affectations indépendantes, ce qui implique leur indépendance.

Ainsi, les processus $(N_j(t))_j$ sont des processus de Poisson indépendants de taux λp_j .

■

5.2 Décomposition d'un processus de Poisson

Grâce au théorème sur le filtrage et comme application directe, nous savons que si l'on décompose un processus de Poisson selon des classes, on obtient alors plusieurs processus de Poisson.

Proposition 2.1 *Soit $(X(t))_{t \geq 0}$ un processus de Poisson de paramètre λ permettant de comptabiliser une population divisée en deux classes. La proportion d'individus dans la première*

classe est égale à p et la proportion d'individus dans la seconde classe est $(1 - p)$. Les processus $(N(t))_{t \geq 0}$ et $(M(t))_{t \geq 0}$, obtenus en séparant les sauts par rapport à chaque classe, sont des processus de Poisson indépendants d'intensité respective $p\lambda$ et $(1 - p)\lambda$.

Remarque 2.4 Cette proposition se généralise facilement lorsque l'on découpe la population en k sous-groupes qui sont distribués selon les proportions $p_1, p_2, \dots, p_k$ telles que

$$\sum_{i=1}^k p_i = 1.$$

5.3 Superposition de Processus de Poisson

Avant d'aborder l'étude de la superposition de processus de Poisson, prenons un instant pour rappeler un fait simple mais fondamental : lorsqu'on additionne deux variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois de Poisson, on obtient encore une variable de Poisson, dont le paramètre est la somme des deux paramètres initiaux. Ce résultat, bien connu, sera au cœur de ce qui suit. Il nous permettra notamment de comprendre comment se comporte le nombre total d'événements quand on regroupe plusieurs sources indépendantes d'événements aléatoires.

Théorème 2.8 Si $X_1, X_2, \dots, X_k$ sont des variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, alors leur somme suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \dots + \lambda_k$:

$$X_1 + X_2 + \dots + X_k \sim \text{Poisson}(\lambda_1 + \dots + \lambda_k).$$

Preuve. Nous allons prouver le résultat pour $k = 2$, le cas général s'en déduira par induction.

La probabilité que $X_1 + X_2 = n$ est donnée par :

$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 = n) = \sum_{m=0}^n \mathbb{P}(X_1 = m) \mathbb{P}(X_2 = n - m). \quad (2.3)$$

Or, puisque $X_1 \sim \text{Poisson}(\lambda_1)$ et $X_2 \sim \text{Poisson}(\lambda_2)$, nous avons :

$$\mathbb{P}(X_1 = m) = \frac{e^{-\lambda_1} \lambda_1^m}{m!}, \quad \mathbb{P}(X_2 = n - m) = \frac{e^{-\lambda_2} \lambda_2^{n-m}}{(n - m)!}.$$

En remplaçant ces expressions dans (2.3) :

$$\begin{aligned} P(X_1 + X_2 = n) &= \sum_{m=0}^n \frac{e^{-\lambda_1} \lambda_1^m}{m!} \cdot \frac{e^{-\lambda_2} \lambda_2^{n-m}}{(n-m)!} \\ &= e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \sum_{m=0}^n \frac{\lambda_1^m}{m!} \cdot \frac{\lambda_2^{n-m}}{(n-m)!}. \end{aligned}$$

Cette somme peut être réécrite comme :

$$e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^n}{n!} \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^m \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^{n-m}.$$

Or, la somme correspond à la somme des probabilités d'une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ avec $p = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$, qui vaut 1. Il ne reste alors que :

$$P(X_1 + X_2 = n) = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^n}{n!},$$

ce qui est exactement la loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$:

$$X_1 + X_2 \sim \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2).$$

■

Théorème 2.9 Soient $N_1(t), N_2(t), \dots, N_k(t)$ des processus de Poisson indépendants de taux respectifs $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$. Alors, leur somme $N(t) = N_1(t) + \dots + N_k(t)$ est un processus de Poisson de taux $\lambda = \sum_{i=1}^k \lambda_i$.

Preuve. Il est clair que le processus $N(t)$ possède des incréments indépendants puisque les processus $N_i(t)$ sont eux-mêmes indépendants. De plus, pour établir que ces incréments suivent une loi de Poisson, on se réfère au résultat précédent selon lequel la somme de k variables de Poisson indépendantes, de paramètres respectifs λ_i , suit une loi de Poisson de paramètre $\sum_{i=1}^k \lambda_i$. ■

5.4 Lois conditionnelles des instants d'arrivée

Dans le cadre d'un processus de Poisson, les arrivées d'événements au fil du temps sont caractérisées par des intervalles indépendants entre chaque événement, suivant une loi exponentielle. Cependant, il existe une propriété intéressante qui relie ces instants

d'arrivée à une loi uniforme. Plus précisément, une fois que l'on connaît le nombre total d'événements $N(t) = n$ arrivés jusqu'à un instant donné t , les n instants d'arrivée $T_1, T_2, \dots, T_n$ sont indépendants et distribués de manière uniforme dans l'intervalle $[0, t]$. Autrement dit, conditionnellement à $N(t) = n$, les T_i sont les n plus petits éléments tirés indépendamment d'une distribution uniforme sur $[0, t]$.

Cette propriété est cruciale pour la simulation de processus de Poisson. En effet, elle permet de générer directement les instants d'arrivée d'un processus de Poisson sans avoir à recourir à des tirages exponentiels successifs pour les temps d'attente. Pour ce faire, il suffit de tirer n nombres indépendants uniformément répartis dans l'intervalle $[0, t]$ et de les trier. Cette méthode est non seulement plus rapide mais aussi plus facile à implémenter dans les simulations numériques.

5.5 Processus de Poisson et loi uniforme

Théorème 2.10 (*Loi de $(T_1, \dots, T_n)$ sachant $N(t) = n$*) Conditionnellement à l'événement $\{N(t) = n\}$, le n -uplet $(T_1, \dots, T_n)$ a la même loi que le n -uplet ordonné obtenu à partir de n variables aléatoires i.i.d. suivant la loi uniforme sur $[0, t]$.

Preuve. Pour $n = 1$, considérons le cas où $N(t) = 1$. Calculons la loi conditionnelle de T_1 sachant que $N(t) = 1$. Pour $0 < x < t$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[T_1 \leq x \mid N(t) = 1] &= \mathbb{P}[N(x) = 1 \mid N(t) = 1] \\ &= \frac{\mathbb{P}[N(x) = 1, N(t) = 1]}{\mathbb{P}[N(t) = 1]} \\ &= \frac{\mathbb{P}[N(x) = 1, N(t) - N(x) = 0]}{\mathbb{P}[N(t) = 1]} \\ &= \frac{\mathbb{P}[N(x) = 1] \cdot \mathbb{P}[N(t - x) = 0]}{\mathbb{P}[N(t) = 1]} \\ &= \frac{(\lambda x) e^{-\lambda x} \cdot e^{-\lambda(t-x)}}{(\lambda t) e^{-\lambda t}} = \frac{x}{t}. \end{aligned}$$

Donc, conditionnellement à $N(t) = 1$, la loi de T_1 est uniforme sur $[0, t]$.

Considérons maintenant la loi conjointe de $(T_1, \dots, T_n)$ sachant $N(t) = n$. Soient $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < t$ une suite strictement croissante, et $h_1, \dots, h_n > 0$ assez petits pour que :

$$x_1 + h_1 < x_2, \quad x_2 + h_2 < x_3, \quad \dots, \quad x_{n-1} + h_{n-1} < x_n, \quad x_n + h_n < t.$$

On considère l'événement :

$$A_n = \{T_1 \in [x_1, x_1 + h_1], \dots, T_n \in [x_n, x_n + h_n]\}.$$

Alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[A_n \mid N(t) = n] &= \frac{\mathbb{P}[A_n \cap \{N(t) = n\}]}{\mathbb{P}[N(t) = n]} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^n (\lambda h_i) e^{-\lambda h_i} \cdot e^{-\lambda(t - \sum_{i=1}^n h_i)}}{(\lambda t)^n \frac{e^{-\lambda t}}{n!}} \\ &= \frac{\lambda^n h_1 \cdots h_n \cdot e^{-\lambda t}}{(\lambda t)^n \cdot \frac{e^{-\lambda t}}{n!}} \\ &= \frac{n!}{t^n} h_1 \cdots h_n. \end{aligned}$$

En divisant par $h_1 \cdots h_n$ et en faisant tendre $h_i \rightarrow 0$, on obtient la densité conjointe :

$$f(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \frac{n!}{t^n}, & \text{si } 0 < x_1 < \cdots < x_n < t, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

■

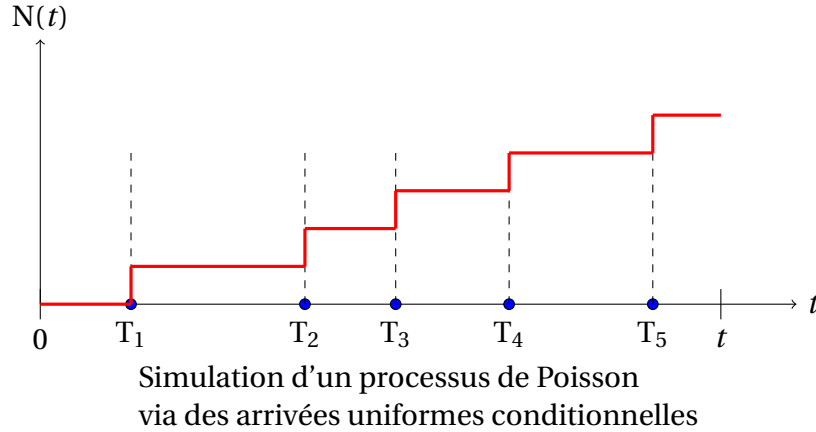


FIGURE 2.3 – Les instants d'arrivée $T_1 < T_2 < \cdots < T_n$ sont des tirages uniformes triés dans $[0, t]$ conditionnellement à $N(t) = n$

Comme nous l'avons déjà mentionné plus haut, ce résultat est très utile en pratique, car il fournit un moyen simple de simuler les trajectoires d'un processus de Poisson. En effet, il suffit de :

1. Simuler une réalisation n d'une loi de Poisson de paramètre λt .
2. Simuler n réalisations i.i.d. d'une loi uniforme sur $[0, t]$.

3. Ordonner ces n valeurs de manière croissante.

Les valeurs obtenues sont alors les instants de saut du processus sur l'intervalle $[0, t]$.

5.6 Processus de Poisson et loi binomiale

Cette première proposition donne la loi conditionnelle du nombre d'événements jusqu'au temps s , sachant le nombre total d'événements jusqu'au temps t , pour un processus de Poisson homogène.

Proposition 2.2 *Pour $s < t$, la loi conditionnelle de N_s sachant $N_t = n$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(n; \frac{s}{t})$.*

Preuve. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_s = k \mid N_t = n) &= \frac{\mathbb{P}(N_s = k, N_t = n)}{\mathbb{P}(N_t = n)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(N_s = k) \mathbb{P}(N_t - N_s = n - k)}{\mathbb{P}(N_t = n)} \\ &= \frac{e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda(t-s)} \frac{[\lambda(t-s)]^{n-k}}{(n-k)!}}{e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}} \\ &= \binom{n}{k} \left(\frac{s}{t}\right)^k \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-k}. \end{aligned}$$

On reconnaît la loi binomiale $\mathcal{B}(n; \frac{s}{t})$. ■

Cette seconde proposition étend la précédente à la somme de deux processus de Poisson indépendants. Elle donne la loi conditionnelle d'un des deux processus sachant la somme à un instant donné.

Proposition 2.3 *Si $N_t^{(1)}$ et $N_t^{(2)}$ sont deux processus de Poisson indépendants de paramètres respectifs λ et μ , alors, sachant que*

$$N_t^{(1)} + N_t^{(2)} = n,$$

la variable $N_t^{(1)}$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n; \frac{\lambda}{\lambda+\mu})$.

Preuve. On a

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(N_t^{(1)} = k \mid N_t^{(1)} + N_t^{(2)} = n) &= \frac{\mathbb{P}(N_t^{(1)} = k, N_t^{(2)} = n - k)}{\mathbb{P}(N_t^{(1)} + N_t^{(2)} = n)} \\
 &= \frac{\mathbb{P}(N_t^{(1)} = k) \cdot \mathbb{P}(N_t^{(2)} = n - k)}{\mathbb{P}(N_t^{(1)} + N_t^{(2)} = n)} \\
 &= \frac{e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \cdot e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^{n-k}}{(n-k)!}}{e^{-(\lambda+\mu)t} \frac{[(\lambda+\mu)t]^n}{n!}} \\
 &= \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^k \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu} \right)^{n-k}.
 \end{aligned}$$

On reconnaît la loi binomiale $\mathcal{B}(n; \frac{\lambda}{\lambda+\mu})$. ■

5.7 Expression des fonctions moyenne et covariance du processus de Poisson

Proposition 2.4 Soit un processus de Poisson $(N_t)_{t \geq 0}$ d'intensité λ , alors pour tous $t, s \geq 0$:

$$\mathbb{E}[N_t] = \text{Var}(N_t) = \lambda t, \quad \text{et} \quad \text{Cov}(N_t, N_s) = \lambda \min(s, t).$$

Preuve. Le résultat pour l'espérance et la variance est immédiat car $N_t \sim \mathcal{P}(\lambda t)$, donc :

$$\mathbb{E}[N_t] = \lambda t, \quad \text{Var}(N_t) = \lambda t.$$

Pour la covariance, supposons sans perte de généralité que $s \leq t$. On utilise :

$$\text{Cov}(N_t, N_s) = \mathbb{E}[N_t N_s] - \mathbb{E}[N_t] \mathbb{E}[N_s].$$

On écrit $N_t = N_s + (N_t - N_s)$, et comme le processus a des accroissements indépendants :

$$\mathbb{E}[N_t N_s] = \mathbb{E}[(N_s + (N_t - N_s)) N_s] = \mathbb{E}[N_s^2] + \mathbb{E}[N_s] \mathbb{E}[N_t - N_s].$$

Or :

$$\mathbb{E}[N_s^2] = \text{Var}(N_s) + (\mathbb{E}[N_s])^2 = \lambda s + (\lambda s)^2,$$

$$\mathbb{E}[N_s] = \lambda s, \quad \mathbb{E}[N_t - N_s] = \lambda(t - s).$$

Donc :

$$\mathbb{E}[N_t N_s] = \lambda s + (\lambda s)^2 + \lambda s \cdot \lambda(t - s) = \lambda s + \lambda^2 s t.$$

Ainsi :

$$\text{Cov}(N_t, N_s) = \lambda s + \lambda^2 s t - \lambda t \cdot \lambda s = \lambda s.$$

D'où :

$$\text{Cov}(N_t, N_s) = \lambda \min(s, t).$$

■

6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié en détail le processus de Poisson, un modèle fondamental pour modéliser l'apparition d'événements aléatoires dans le temps ou l'espace. Nous avons commencé par une présentation de la loi exponentielle, suivie de la définition du processus de Poisson sous différentes formes. Nous avons également abordé les processus de Poisson composés et exploré plusieurs transformations importantes.

Le chapitre suivant sera consacré aux systèmes de particules en interaction (IPS), qui généralisent les processus stochastiques classiques en introduisant des dynamiques d'interaction locale entre particules sur des réseaux spatiaux.

Chapitre 3

Les systèmes de particules en interaction (IPS)

1 Introduction

Les **systèmes de particules en interaction** (IPS) modélisent de nombreux phénomènes collectifs en physique, biologie ou sociologie. De manière concrète, les IPS trouvent des applications dans des contextes variés : par exemple, le *processus de contact* permet de modéliser la propagation d'une épidémie dans une population, tandis que le *modèle du voteur* simule l'évolution des opinions dans une société. En physique, des modèles comme le *modèle d'Ising* dynamique décrivent l'alignement de spins sur un réseau, illustrant des phénomènes de transition de phase. Ces exemples montrent l'intérêt des IPS pour représenter des phénomènes collectifs émergents à partir de règles locales d'interaction. Ce chapitre présente leur définition formelle, leur construction, ainsi que des exemples classiques et des propriétés fondamentales.

2 Définition générale des IPS

2.1 Cadre général

D'un point de vue mathématique, un système de particules en interaction est une chaîne de Markov en temps continu dont l'état à un instant t est la fonction

$$\xi_t : \mathbb{Z}^d \rightarrow \{0, 1, \dots, \kappa - 1\}.$$

Dans la terminologie des systèmes de particules en interaction :

- Les éléments $x \in \mathbb{Z}^d$ sont appelés **sites** ou, en utilisant la terminologie de la théorie des graphes, **sommets**, et doivent être considérés comme des positions spatiales.
- Les éléments $i \in \{0, 1, \dots, \kappa - 1\}$ sont appelés **types** ou **couleurs**. Par exemple, dans la dynamique des populations, les types peuvent être *vide* et *occupé*; dans la dynamique des maladies, *sain* et *infecté*; dans la dynamique des opinions, *Démocrate* et *Républicain*, et ainsi de suite.
- L'état du processus à un instant donné est appelé une **configuration spatiale**.
- Nous avons donc $\xi_t(x) = \text{type du sommet } x \text{ à l'instant } t$.

3 Interactions locales

Dans les systèmes de particules en interaction, la dynamique est décrite par des interactions locales. Ces interactions définissent le taux auquel un sommet (ou site) change de type en fonction de l'état du système dans un voisinage donné.

La dépendance uniquement locale du taux de transition reflète la présence d'une **structure spatiale** dans le modèle. Pour formaliser cela, on introduit le *voisinage d'interaction* d'un sommet $x \in \mathbb{Z}^d$:

$$N_x := \{y \in \mathbb{Z}^d : \|x - y\|_1 = 1\} \quad (3.1)$$

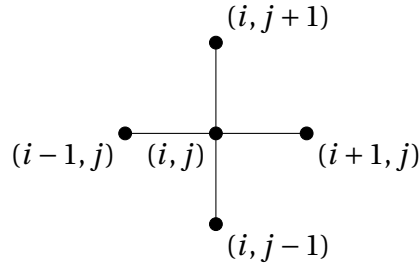
Ce voisinage contient tous les sites adjacents à x (dans la norme L^1 , sauf mention contraire).

La norme L^1 (ou distance de Manhattan) entre deux vecteurs $x = (x_1, \dots, x_d)$ et $y = (y_1, \dots, y_d)$ dans $\mathbb{Z}^d$ est définie par :

$$\|x - y\|_1 = \sum_{i=1}^d |x_i - y_i|.$$

Dans $\mathbb{Z}^d$, cela correspond au nombre minimal de déplacements unitaires nécessaires pour aller de x à y , en se déplaçant d'une seule unité à la fois sur un axe.

Voisinage dans $\mathbb{Z}^2$ selon la norme L^1 : Un point $x = (i, j) \in \mathbb{Z}^2$ a pour voisins (à distance L^1 égale à 1) les 4 points suivants : $(i + 1, j)$, $(i - 1, j)$, $(i, j + 1)$ et $(i, j - 1)$.

FIGURE 3.1 – Les 4 plus proches voisins en $\mathbb{Z}^2$ selon la norme L^1 .

On suppose alors que le site x change de type ou de couleur, passant d'un état i à un état $j \neq i$, à un taux donné par :

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{P}(\xi_{t+\varepsilon}(x) = j \mid \xi_t, \xi_t(x) = i) = c_{i \rightarrow j}(x, \xi_t) = c_{i \rightarrow j}(\xi_t(y) : y \in N_x) \quad (3.2)$$

Ce taux $c_{i \rightarrow j}$ dépend uniquement de la configuration locale autour du site x , ce qui justifie le terme d'**interaction locale**.

4 Exemple de SPI

4.1 Invasion : Le processus de contact

Le *processus de contact*, introduit dans les années soixante-dix par Harris [7], est le modèle d'invasion le plus simple basé sur le cadre des systèmes de particules. Pour fixer les idées, nous décrivons ce modèle dans le contexte de la dynamique des populations, mais il peut être transformé en un modèle épidémiologique en remplaçant “vide” par “sain” et “occupé” par “infecté”. Chaque site du réseau entier $\mathbb{Z}^d$ est soit vide, soit occupé par un individu, et l'évolution est décrite par les règles suivantes :

- Indépendamment les uns des autres, les individus donnent naissance à une seule progéniture à un taux β et meurent à un taux normalisé égal à un.
- À la naissance, la progéniture est envoyée vers l'un des $2d$ plus proches voisins de l'emplacement du parent, choisi uniformément au hasard. Si ce site cible est vide, il devient occupé, sinon la naissance est supprimée.

Les taux de transition locaux du processus de contact peuvent être calculés en utilisant les propriétés de superposition et d'écrémage des processus de Poisson : étant donné qu'un site vide reçoit une progéniture de chacun de ses voisins occupés à un taux $\beta/2d$,

les taux de transition locaux pour le processus de contact sont donnés par

$$c_{0 \rightarrow 1}(x, \xi_t) = \frac{\beta}{2d} \sum_{y \in N_x} \xi_t(y), \quad \text{et} \quad c_{1 \rightarrow 0}(x, \xi_t) = 1,$$

où N_x désigne l'ensemble des $2d$ plus proches voisins du site x , et $\xi_t(y)$ vaut 1 si le site y est occupé au temps t , et 0 sinon.

4.2 Compétition : le modèle du voteur

Le **modèle du votant** a été introduit dans les années 1970 indépendamment par Clifford et Sudbury [3] et Holley et Liggett [8]. Il constitue l'exemple le plus simple de modèle de compétition fondé sur le cadre des systèmes de particules en interaction.

Dans ce modèle, chaque site du réseau des entiers à d dimensions est occupé par un individu qui peut être de type 0 ou de type 1. Comme pour le processus de contact, plusieurs interprétations sont possibles. On peut, par exemple, considérer ces deux types comme deux opinions possibles, ce qui explique le nom du modèle.

Dans ce contexte, l'évolution est décrite par la règle simple suivante :

- Indépendamment les uns des autres, les individus mettent à jour leur opinion à taux un en **copiant celle de l'un de leurs $2d$ voisins** les plus proches, choisi uniformément au hasard.

Une autre interprétation possible est génétique : les deux types représentent alors deux allèles différents dans une population d'individus haploïdes. Dans ce contexte de génétique des populations, l'évolution suit les règles suivantes :

- Les individus se reproduisent indépendamment à taux un, en donnant naissance à un unique descendant,
- Ce descendant **remplace l'un des $2d$ voisins du parent**, choisi uniformément au hasard,
- Chaque descendant est du **même type que son parent**.

Qu'on considère le modèle du votant comme un modèle d'opinions ou comme un modèle génétique, les **taux de transition** sont identiques, et peuvent être obtenus en utilisant les propriétés de superposition et d'amincissement des processus de Poisson.

En utilisant la terminologie de la génétique des populations, chaque individu reçoit des descendants du type opposé provenant de ses voisins d'un type différent à un taux

$\frac{1}{2d}$. Les taux de transition du modèle du votant sont donc donnés par :

$$c_{0 \rightarrow 1}(x, \xi) = \frac{1}{2d} \sum_{y \in N_x} \xi(y), \quad c_{1 \rightarrow 0}(x, \xi) = \frac{1}{2d} \sum_{y \in N_x} (1 - \xi(y)).$$

5 Représentation graphique

Comme pour les chaînes de Markov en temps continu avec un espace d'états fini, les systèmes de particules en interaction peuvent être construits à partir d'une collection de processus de Poisson indépendants. Cependant, puisque a priori il y a infiniment de sites, il y a également infiniment de collections de processus de Poisson, mais parce que la dynamique est décrite par des interactions locales, il n'y a qu'un nombre fini de processus de Poisson à chaque site. En observant la grille d'entiers en dimension d et en ajoutant une dimension pour le temps, la représentation graphique peut être vue comme un graphe aléatoire en dimension $d + 1$, que nous appelons typiquement une structure de percolation.

Pour être plus concret, nous traitons ici du processus de contact. Il existe deux types d'événements pour ce processus : les naissances et les décès. Pour gérer les événements de naissance, nous attachons $2d$ processus de Poisson indépendants à chaque site, un pour chaque voisin, tandis que pour gérer les événements de décès, qui sont spontanés, nous attachons un seul processus de Poisson à chaque site. Plus précisément, nous définissons :

- $\{T_n(x, y) : n \geq 1\}$ **pour** $y \in N_x$ **comme les temps d'un processus de Poisson de taux** $\frac{\beta}{2d}$,
- $\{U_n(x) : n \geq 1\}$ **pour** $x \in \mathbb{Z}^d$ **comme les temps d'un processus de Poisson de taux un.**

Pour transformer ceci en une structure de percolation, nous procédons comme suit :

- Nous traçons une flèche $x \rightarrow y$ aux instants $T_n(x, y)$ pour indiquer qu'une naissance a lieu si la queue de la flèche est occupée et que la pointe de la flèche est vide.
- Nous plaçons une croix au site x aux instants $U_n(x)$ pour indiquer qu'un décès se produit au sommet x si ce dernier est occupé.

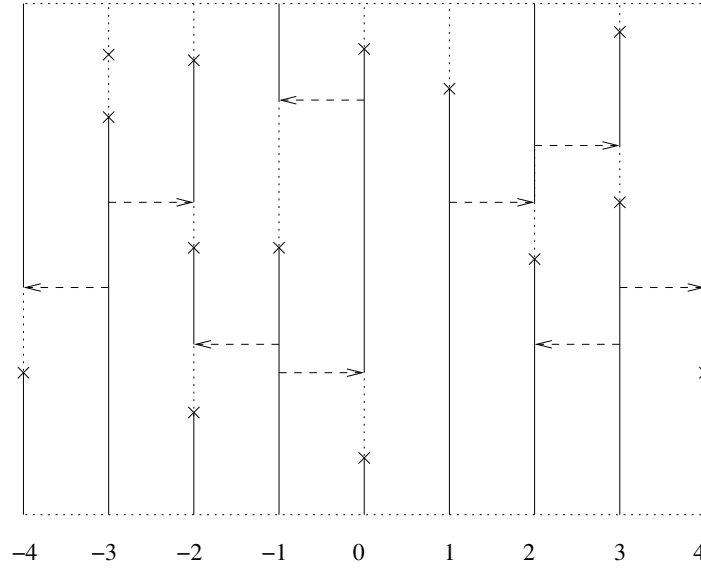


FIGURE 3.2 – Représentation graphique du processus de contact.

Une réalisation du graphe résultant est représentée sur **la figure 3.2** où il est utilisé pour construire le processus de contact en commençant avec tous les sites occupés : les points espace-temps occupés sont dessinés par des lignes épaisses.

La représentation graphique du modèle du votant est plus simple car elle ne comporte qu'un type d'événement à chaque sommet. Dans ce cas, nous attachons $2d$ processus de Poisson indépendants à chaque site en définissant :

- $\{T_n(x, y) : n \geq 1\}$ pour $y \in N_x$ comme les temps d'un processus de Poisson de taux $\frac{1}{2d}$,

que nous transformons en une structure de percolation en traçant une flèche $x \rightarrow y$ aux instants $T_n(x, y)$ pour indiquer que l'individu à la pointe de la flèche prend le type de celui à la queue de la flèche.

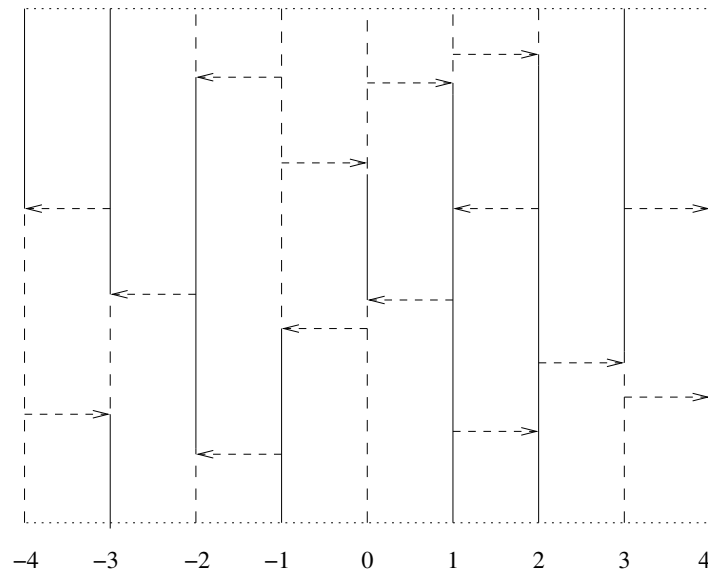


FIGURE 3.3 – Représentation graphique du processus du votant.

La figure 3.5 montre comment construire le modèle du votant à partir d'une configuration initiale particulière et d'une réalisation de la représentation graphique. Les lignes épaisses représentent la région espace-temps occupée par les individus de type 1.

6 Simulations numériques en volume fini

La représentation graphique peut être utilisée pour simuler numériquement des systèmes de particules en interaction. Ici, nous présentons d'abord un algorithme permettant de simuler le processus de contact sur une grille finie avec conditions aux limites périodiques. Cet algorithme repose sur les propriétés de superposition et d'amincissement des processus de Poisson.

Algorithm 3.1 Simulation du processus de contact sur une grille finie avec conditions périodiques

- 1: **Initialisation** : Considérer un réseau $N \times N$ avec conditions aux limites périodiques.
- 2: **while** simulation en cours **do**
- 3: Calculer le temps du premier événement potentiel :

$$T = \min\{T_1(x, y) : (x, y) \in E\} \wedge \min\{U_1(x) : x \in V\} \sim \text{Exponential}((\beta + 1)N^2).$$

- 4: Sélectionner uniformément un sommet X dans $\{1, 2, \dots, N\}^2$.
 - 5: **if** le site X est vide **then**
 - 6: Ne rien faire, passer à l'étape suivante.
 - 7: **else**
 - 8: Tirer un événement selon la loi exponentielle :
 - avec probabilité $\frac{1}{\beta+1}$: mort au sommet X (on supprime la particule);
 - avec probabilité $\frac{\beta}{\beta+1}$: reproduction vers un voisin choisi uniformément parmi les 4 voisins de X , si ce voisin est vide, on place une particule.
 - 9: **end if**
 - 10: Recommencer depuis l'étape 2 (mémoire nulle de la loi exponentielle).
 - 11: **end while**
-

Algorithm 3.2 Simulation du modèle du voteur sur une grille $N \times N$

- 1: **Initialisation** : Considérer un réseau $N \times N$ avec conditions aux limites périodiques.
- 2: **while** simulation en cours **do**
- 3: Calculer le temps du premier événement potentiel :

$$T = \min\{T_1(x, y) : (x, y) \in E\} \sim \text{Exponential}(N^2).$$

- 4: Sélectionner uniformément un sommet X dans $\{1, 2, \dots, N\}^2$.
 - 5: Choisir uniformément un des quatre voisins de X , noté Y .
 - 6: Mettre à jour le type de X en le remplaçant par celui de son voisin Y .
 - 7: Recommencer depuis l'étape 2 (absence de mémoire de la loi exponentielle).
 - 8: **end while**
-

7 Existence sur du volume infini

La construction de notre processus repose sur la représentation graphique, qui revient à attacher une infinité de processus de Poisson indépendants aux sommets d'un graphe. Comme il y a une infinité de processus de Poisson, et donc pas de premier événement, il faut montrer que l'on peut utiliser cette procédure pour calculer l'évolution dans le temps. Pour cela, nous utilisons un argument dû à Harris (1972).

On fixe un temps $t_0 > 0$. Pour chaque paire de sites voisins x et y , on trace une arête entre eux s'il existe un événement (arrivée d'un des processus de Poisson associés) ayant provoqué une interaction entre x et y avant t_0 . Cela donne naissance à un graphe aléatoire dont les sommets sont les sites, et dont les arêtes traduisent les interactions effectives avant t_0 .

Les composantes connexes de ce graphe (c'est-à-dire les ensembles de sites reliés entre eux par un chemin d'arêtes) correspondent alors aux régions du système ayant pu interagir avant t_0 . Si toutes les composantes connexes de ce graphe sont finies avec probabilité 1, on peut alors construire le processus jusqu'au temps t_0 en traitant séparément l'évolution dans chaque composante, puisque celles-ci n'ont pas pu s'influencer mutuellement.

Comme t_0 est indépendant de la configuration initiale, on peut itérer la construction par tranches de temps de longueur t_0 , et ainsi définir le processus pour tout $t \geq 0$.

Théorème 3.1 *Si t_0 est choisi suffisamment petit, alors avec probabilité 1, toutes les composantes connexes du graphe aléatoire construit sont finies.*

Dans chaque composante connexe finie, il existe alors un premier basculement (changement d'état), et l'on peut déterminer l'évolution du système en suivant les événements dans l'ordre chronologique. Ainsi, la procédure permet bien de construire le processus dans le temps.

On considère le processus de contact sur le réseau $\mathbb{Z}^2$ avec conditionnement périodique, où chaque site guérit à taux 1 et infecte chacun de ses quatre voisins à taux $\beta > 0$. Nous utilisons la représentation graphique de Harris : pour chaque arête non orientée $\{x, y\}$, on réalise un processus de Poisson de taux $(\beta + 1)$ (superposition des flèches d'infection de taux β et des croix de guérison de taux 1) en orientation $x \rightarrow y$ et un pareil pour $y \rightarrow x$.

Preuve. Cette preuve adaptée au processus de contact.

1. On fixe un temps $t_0 > 0$.
2. On définit un sous-graphe aléatoire à l'instant t_0 dont les sommets sont ceux de $\mathbb{Z}^d$ et dont on trace une arête non orientée entre deux voisins x, y si au moins l'une des deux flèches orientées $x \rightarrow y$ ou $y \rightarrow x$ (processus de taux $\beta/(2d)$) a eu une arrivée avant t_0 .
3. Pour chaque paire non orientée $\{x, y\}$, on trace une arête non orientée entre deux voisins x et y si au moins l'un des deux processus de Poisson $x \rightarrow y$ ou $y \rightarrow x$ a eu une arrivée avant t_0 . Or chaque orientation ne voit pas d'arrivée avec probabilité $e^{-\frac{\beta}{2d}t_0}$, d'où :

$$\mathbb{P}(\text{arête présente}) = 1 - e^{-\frac{\beta}{d}t_0}.$$

4. Notons $N = 2d$ le nombre de voisins de chaque site. Le nombre de chemins auto-évités de longueur n partant d'un sommet fixé est majoré par N^n .
5. Pour qu'un chemin auto-évitable de longueur n soit entièrement actif, chacune de ses n arêtes doit être présente. Par indépendance, on obtient

$$\mathbb{P}(\exists \text{ chemin auto-évitable de longueur } n) \leq N^n (1 - e^{-\frac{\beta}{d}t_0})^n.$$

6. Choisissons t_0 assez petit pour que

$$N(1 - e^{-\frac{\beta}{d}t_0}) < \frac{1}{2}.$$

Alors la probabilité ci-dessus décroît exponentiellement en n , ce qui implique que toutes les composantes connexes du sous-graphe sont presque sûrement finies.

7. Dans chaque composante connexe finie, il existe un premier événement d'infection, ce qui permet de construire récursivement le processus jusqu'à t_0 , puis par itération pour tout $t > 0$.

Ainsi, l'existence du processus de contact sur $\mathbb{Z}^d$ est assurée. ■

8 Propriétés du processus de contact

Dans ce chapitre, nous montrons que, comme d'autres modèles d'invasion présentés dans ce mémoire, le processus de contact présente une **transition de phase**. Plus précisément, il existe une valeur critique du paramètre de naissance :

- au-dessus de ce seuil, le processus démarré avec un seul individu a une probabilité strictement positive de survivre indéfiniment;
- en dessous de ce seuil, il s'éteint presque sûrement, c'est-à-dire avec probabilité 1.

En raison des interactions locales, plusieurs définitions de la **survie** peuvent être formulées. En identifiant la configuration du processus à l'instant t à l'ensemble ξ_t des sites occupés ($\xi_t = \{x \in \mathbb{Z}^d : \xi_t(x) = 1\}$), on distingue :

- **Extinction** : le processus s'éteint s'il existe un instant t tel que $\xi_t = \emptyset$;
- **Survie faible** : le processus survit faiblement si à tout instant t il y a au moins un site infecté :

$$\mathbb{P}_\beta(\xi_t \neq \emptyset \text{ pour tout } t \mid \xi_0 = \{0\}) > 0.$$

- **Survie forte** : le processus survit fortement si le site 0 est infecté une infinité de temps t :

$$\mathbb{P}_\beta(0 \in \xi_t \text{ pour une infinité de } t \mid \xi_0 = \{0\}) > 0.$$

La survie faible signifie que l'infection persiste quelque part dans le réseau, tandis que la survie forte garantit qu'elle revient infiniment souvent au site d'origine.

L'étude du processus s'appuie sur sa **représentation graphique**, présentée précédemment. Cette représentation permet de démontrer trois propriétés fondamentales :

Monotonie La probabilité de survie augmente avec le paramètre de naissance. Comme pour les modèles de percolation, cela garantit l'existence d'un seuil critique unique de transition de phase.

Attractivité Si l'on compare deux configurations initiales incluses l'une dans l'autre, alors les configurations ultérieures le seront aussi. En conséquence, le processus démarré de la configuration entièrement occupée converge en distribution vers une mesure invariante appelée *mesure invariante supérieure*, car elle domine toutes les autres.

Auto-dualité En suivant les ancêtres potentiels d'un point de l'espace-temps à rebours, à l'aide de la représentation graphique, on obtient un nouveau processus appelé *processus dual*. Ce processus a la même loi que le processus de contact original. Cela permet de relier la probabilité de survie à la mesure invariante supérieure.

Évolution du processus de contact 1D (haut = passé, bas = présent)

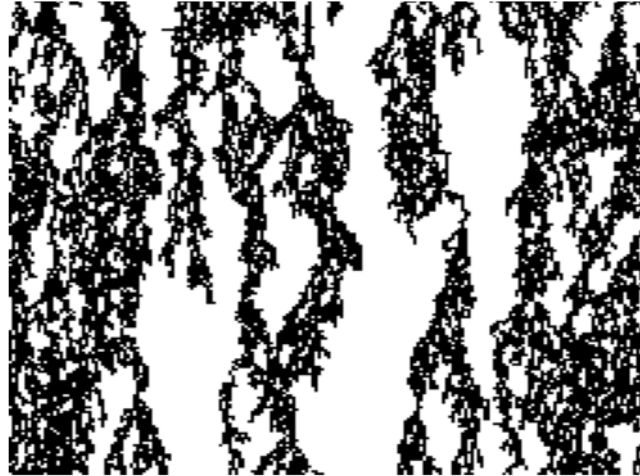


FIGURE 3.4 – Réalisation du processus de contact avec un paramètre de naissance $\beta = 3.30$, sur le tore unidimensionnel à 600 sommets.

Propagation - Processus de contact

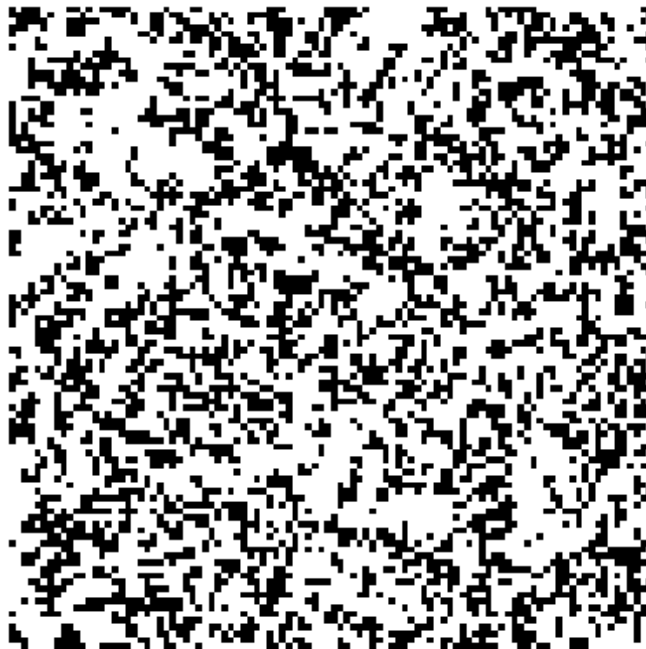


FIGURE 3.5 – Réalisation du processus de contact avec un paramètre de naissance $\beta = 1.70$ sur une grille 200×200 .

8.1 Monotonie

Dans cette section, nous montrons que la région occupée dans l'espace-temps par le processus de contact est croissante au sens stochastique, à la fois par rapport au paramètre de naissance et à la configuration initiale. Les démonstrations reposent sur des arguments de couplage, permettant de comparer des processus ayant des paramètres ou des conditions initiales différents.

Soit (ξ_t^i) le processus de contact associé au paramètre β_i et démarré de la configuration initiale ξ_0^i .

Lemme 3.1 [*Monotonie*] Pour tout $(x, t) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{R}_+$,

$$\mathbb{P}(x \in \xi_t^1) \leq \mathbb{P}(x \in \xi_t^2) \quad \text{lorsque } \xi_0^1 = \xi_0^2 \text{ et } \beta_1 \leq \beta_2.$$

Preuve. L'idée centrale est de coupler les deux processus de manière à ce que la région occupée par le premier soit incluse dans celle du second. Pour cela, on construit un couplage de leurs représentations graphiques en utilisant la propriété de superposition des processus de Poisson comme suit :

- Pour tous $x, y \in \mathbb{Z}^d$ tels que $\|x - y\| = 1$, on trace une flèche continue $x \rightarrow y$ aux temps d'arrivée d'un processus de Poisson de paramètre $\beta_1/(2d)$.
- Pour les mêmes x et y , on trace une flèche pointillée $x \rightarrow y$ aux temps d'arrivée d'un processus de Poisson de paramètre $(\beta_2 - \beta_1)/(2d)$.
- Pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$, on place une marque de mort (symbole $\times$) au sommet x aux temps d'arrivée d'un processus de Poisson de paramètre 1.

Le processus de contact (ξ_t^1) est alors obtenu à partir de cette représentation graphique en ignorant les flèches pointillées. Par ailleurs, la superposition des deux premiers processus de Poisson donne un processus de Poisson d'intensité $\beta_2/(2d)$, permettant ainsi de construire (ξ_t^2) à partir de la même représentation en utilisant toutes les flèches (continues et pointillées), c'est-à-dire en permettant les naissances via les deux types de flèches.

Comme l'ensemble des flèches utilisées pour le processus (ξ_t^1) est inclus dans celui de (ξ_t^2) , la région occupée dans l'espace-temps par (ξ_t^1) est incluse dans celle de (ξ_t^2) , comme illustré par la Figure 3.6.

Enfin, posons :

$$f_{x,t}(\{\xi_s : s \in \mathbb{R}_+\}) = \mathbf{1}_{\{x \in \xi_t\}} \quad \text{pour toute trajectoire } \xi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}.$$

Puisque $f_{x,t}$ est une fonction croissante, on en déduit que :

$$\mathbb{P}(x \in \xi_t^1) = \mathbb{E}[f_{x,t}(\{\xi_s^1\})] \leq \mathbb{E}[f_{x,t}(\{\xi_s^2\})] = \mathbb{P}(x \in \xi_t^2),$$

ce qui termine la démonstration. ■

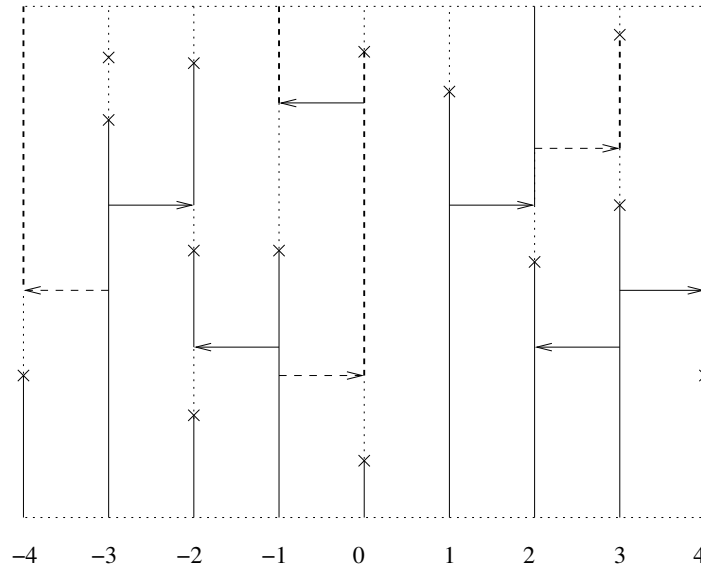


FIGURE 3.6 – Couplage du processus de contact avec différents paramètres de naissance.

Il découle directement du lemme que la probabilité de survie faible ou forte du processus, lorsqu'il démarre avec un seul individu, est croissante par rapport au paramètre de naissance. Plus précisément, les deux fonctions de β définies par :

$$\begin{aligned} \theta_W(\beta) &= \mathbb{P}_\beta(\xi_t \neq \emptyset \text{ pour tout } t \mid \xi_0 = \{0\}) \\ \theta_S(\beta) &= \mathbb{P}_\beta(0 \in \xi_t \text{ pour une infinité de } t \mid \xi_0 = \{0\}) \end{aligned} \tag{3.3}$$

sont croissantes. La monotonie de la probabilité de survie faible ou forte par rapport au paramètre de naissance motive l'introduction des valeurs critiques suivantes :

$$\beta_W = \sup\{\beta : \theta_W(\beta) = 0\}, \quad \beta_S = \sup\{\beta : \theta_S(\beta) = 0\}. \tag{3.4}$$

Certaines propriétés importantes de ces valeurs critiques seront données dans la dernière section.

8.2 Attractivité

Ayant démontré la propriété de monotonie, nous étudions à présent l'attractivité. Le processus est dit attractif si la région occupée dans l'espace-temps est stochastiquement croissante par rapport à la configuration initiale (et non plus par rapport au paramètre de naissance).

Lemme 3.2 [Attractivité] *Pour tout $(x, t) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{R}_+$, on a*

$$\mathbb{P}(x \in \xi_t^1) \leq \mathbb{P}(x \in \xi_t^2) \quad \text{lorsque } \xi_0^1 \subset \xi_0^2 \text{ et } \beta_1 = \beta_2.$$

Preuve. La démonstration est similaire à celle du Lemme 3.1. Étant donné que les paramètres de naissance sont égaux, les deux processus peuvent être construits à partir de la même représentation graphique. L'idée essentielle est que, pour une représentation graphique fixée, la région occupée dans l'espace-temps est croissante (au sens de l'inclusion) par rapport à la configuration initiale. On utilise ensuite la fonction $f_{x,t}$ pour conclure. ■

8.3 Existence de la mesure invariante supérieure

Soit μ_t la loi à l'instant t du processus de contact démarrant avec la configuration entièrement occupée. Il est clair que $\mu_t \leq \mu_0$. Ensuite, en utilisant l'attractivité et le fait que le processus de contact est un processus de Markov, on en déduit que

$$\mu_{t+s} \leq \mu_s \quad \text{pour tout } s \geq 0.$$

En partant de la configuration entièrement occupée, la loi du processus à l'instant t , notée μ_t , forme une suite de mesures décroissante (pour l'ordre stochastique) et minorée. Par conséquent, la limite

$$\bar{\mu} = \lim_{t \rightarrow \infty} \mu_t$$

existe. Cette mesure est appelée la **mesure invariante supérieure** du processus de contact.

Grâce à la propriété d'attractivité, $\bar{\mu}$ constitue **la plus grande mesure stationnaire** du processus, au sens de l'ordre stochastique sur les mesures de probabilité.

9 Auto-Dualité

Dans cette section, nous définissons le **processus dual** du processus de contact et mettons en évidence le lien entre la **mesure invariante supérieure** et la **probabilité de survie**.

La *dualité* est un outil puissant dans l'étude des systèmes de particules en interaction. Toutefois, elle dépend fortement du modèle considéré : elle n'est donc pas toujours disponible ou facilement exploitable d'un point de vue mathématique.

Le processus dual est défini à partir d'une représentation graphique du processus, que nous supposons désormais fixée.

Définition 3.1 (Chemin dual) *On dit qu'il existe un chemin $(z, s) \rightarrow (x, t)$ s'il existe :*

$$s = s_0 < s_1 < \dots < s_{n+1} = t \quad \text{et} \quad z = x_0, x_1, \dots, x_n = x \in \mathbb{Z}^d$$

tels que les deux conditions suivantes soient satisfaites :

- *pour tout $i = 1, 2, \dots, n$, il existe une flèche $x_{i-1} \rightarrow x_i$ à l'instant s_i ;*
- *pour tout $i = 0, 1, \dots, n$, il n'y a pas de symbole $\times$ sur le segment $\{x_i\} \times (s_i, s_{i+1})$.*

Dans ce cas, on dit également qu'il existe un chemin dual $(x, t) \rightarrow (z, s)$. En d'autres termes, les chemins duaux sont définis de manière analogue aux chemins classiques, à ceci près qu'ils évoluent en sens inverse dans le temps et suivent les flèches de la représentation graphique en direction opposée.

La définition d'un chemin dual impose deux conditions principales :

- Il existe une suite de points dans l'espace-temps reliés par des flèches dans la représentation graphique, mais parcourues *à l'envers* dans le temps.
- Entre deux flèches consécutives, il ne doit pas y avoir de marque de mort (croix) sur le site considéré.

La raison pour laquelle on impose l'absence de croix sur les segments $\{x_i\} \times (s_i, s_{i+1})$ est que la présence d'une croix signifie la disparition d'un individu sur ce site à un instant donné.

Ainsi, si un chemin passait par un tel intervalle contenant une croix, la trajectoire serait interrompue, rendant le chemin invalide.

Cette condition garantit que le chemin dual est une trajectoire continue *dans la représentation graphique* qui peut exister en remontant le temps.

En résumé, un chemin dual valide est un chemin dans le graphe des flèches, parcouru à rebours, sans interruption due à un décès.

9.1 Processus dual

Le processus dual démarrant en (x, t) est défini par

$$\hat{\xi}_s(x, t) = \{z \in \mathbb{Z}^d : \text{il existe un chemin dual } (x, t) \rightarrow (z, t - s)\}$$

pour tout $0 \leq s \leq t$.

Le processus dual du processus de contact est donc les positions possibles à temps $t - s$ d'un individu ayant pu infecter x à l'instant t , via une chaîne de transmissions sans interruption (pas de croix entre les flèches).

Le processus dual du processus de contact possède deux propriétés importantes. Premièrement, comme inverser la direction des flèches ainsi que la direction du temps ne modifie pas la loi de la représentation graphique, la loi du processus démarrant d'un individu unique au sommet x est égale à celle de son processus dual démarrant en (x, t) , c.à.d

$$\{\xi_s : 0 \leq s \leq t\} = \{\hat{\xi}_s(x, t) : 0 \leq s \leq t\} \quad \text{en loi, à condition que } \xi_0 = \{x\}. \quad (3.5)$$

Rappelons que $x \in \xi_s$ signifie que le site x est infecté au temps s . L'évolution $\{\xi_s : 0 \leq s \leq t\}$ représente donc l'ensemble des configurations du processus de contact entre les temps 0 et t . Autrement dit, le processus de contact et son processus dual (défini à partir du même graphe) ont la même loi lorsqu'ils sont vus depuis (x, t) en inversant le temps.

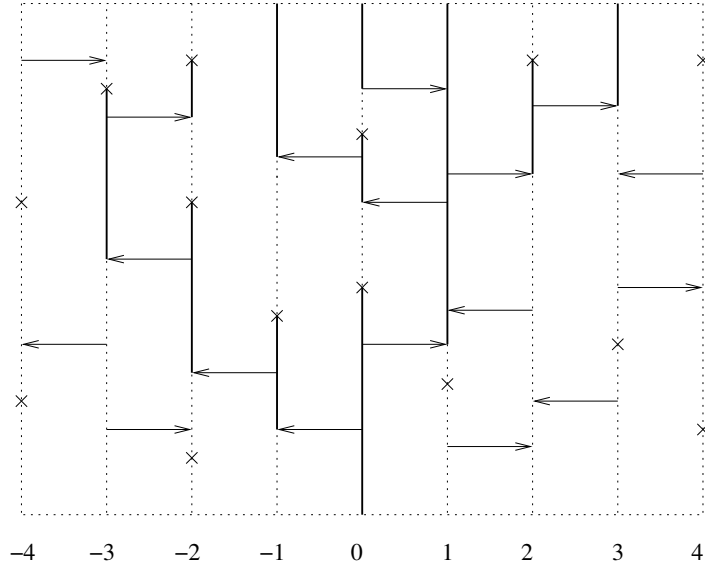
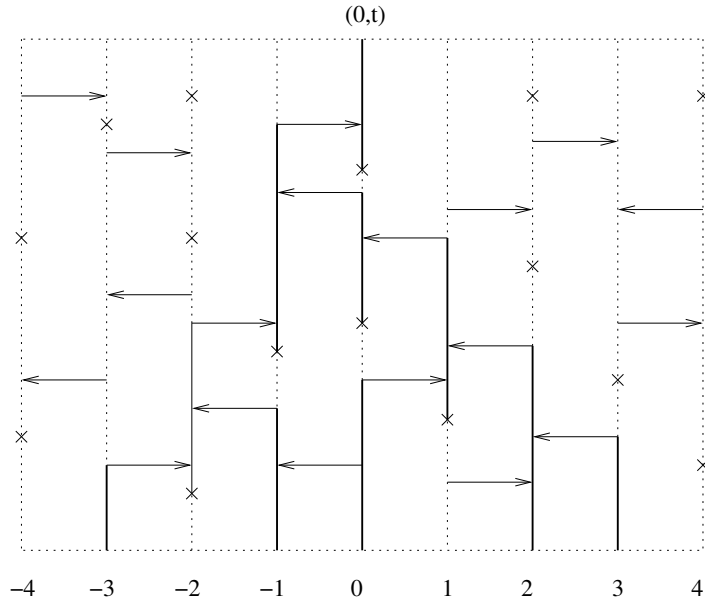


FIGURE 3.7 – Réalisation du processus de contact à partir d'un seul individu situé à l'origine.


 FIGURE 3.8 – Réalisation du processus dual à partir de $(0, t)$.

Les figures 3.7 et 3.8 illustre ces deux ensembles aléatoires par des lignes épaisses. De plus, il découle de la définition des chemins et des chemins duaux, ainsi que de la construction du processus de contact à partir de la représentation graphique, que l'on dispose de la propriété importante suivante, appelée *relation de d'auto dualité* :

$$\begin{aligned}
 x \in \xi_t &\iff \xi_s \cap \{z : \text{il existe un chemin } (z, s) \rightarrow (x, t)\} \neq \emptyset \\
 &\iff \xi_s \cap \{z : \text{il existe un chemin dual } (x, t) \rightarrow (z, s)\} \neq \emptyset \\
 &\iff \xi_s \cap \hat{\xi}_{t-s}(x, t) \neq \emptyset.
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Interprétation de l'auto-dualité : L'auto-dualité du processus de contact implique que,

pour toute configuration initiale ξ_0 et tout site $x \in \mathbb{Z}^d$,

$$\mathbb{P}(x \in \xi_t) = \mathbb{P}(\hat{\xi}_t(x, t) \cap \xi_0 \neq \emptyset),$$

où $\hat{\xi}_t(x, t)$ désigne le processus dual démarrant d'un seul site (x, t) et remontant le temps.

En particulier, si l'on part d'une configuration initiale totalement occupée $\xi_0 = \mathbb{Z}^d$, alors cette probabilité devient :

$$\mathbb{P}(x \in \xi_t) = \mathbb{P}(\hat{\xi}_t(x, t) \neq \emptyset).$$

Autrement dit, un site x est occupé au temps t si et seulement s'il existe un chemin dual partant de (x, t) et atteignant un site initialement occupé. Ce chemin dual peut être interprété comme une trajectoire d'infection "en sens inverse du temps".

En posant $\xi_0 = \mathbb{Z}^d$ et $s = 0$ dans 3.6 puis en prenant la probabilité, on obtient que, pour le processus de contact démarrant de la configuration entièrement occupée,

$$\mathbb{P}(x \in \xi_t) = \mathbb{P}(\hat{\xi}_t(x, t) \cap \xi_0 \neq \emptyset) = \mathbb{P}(\hat{\xi}_t(x, t) \neq \emptyset).$$

Ensuite, en utilisant 3.5 et en faisant tendre t vers l'infini, on obtient

$$\begin{aligned} \bar{\mu}(\{x \in \xi\}) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(x \in \xi_t) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\hat{\xi}_t(x, t) \neq \emptyset) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_x(\xi_t \neq \emptyset) \\ &= \mathbb{P}_x(\xi_t \neq \emptyset \text{ pour tout } t) \text{ (Par le théorème de la convergence monotone),} \\ &= \theta_W(\beta). \end{aligned} \tag{3.7}$$

où l'indice x indique que le processus démarre avec un seul individu au sommet x .

Autrement dit, l'auto-dualité implique que la probabilité qu'un sommet donné soit occupé sous la mesure invariante supérieure est égale à la probabilité que le processus démarrant d'un seul individu survive faiblement. Ainsi, la relation 3.7 entraîne directement que :

$$\bar{\mu} \neq \delta_\emptyset \quad \text{si et seulement si} \quad \theta_W(\beta) > 0,$$

où la mesure $\delta_\emptyset$ est la mesure concentrée sur la configuration où tous les sites sont vides, ce qui signifie que le processus démarrant de la configuration entièrement occupée survive

fortement si et seulement si la probabilité de survie faible démarrant d'un seul individu est positive.

Autrement dit, le processus converge vers l'état absorbant (extinction forte) si et seulement si la probabilité de survie faible est nulle. Ainsi, le comportement à long terme du processus démarrant de la configuration entièrement occupée est entièrement déterminé par la probabilité de survie du processus démarrant d'un seul individu.

Le processus de contact présente donc une **transition de phase** :

- **Sous-critique** : si $\beta \leq \beta_w$, alors $\bar{\mu} = \delta_\emptyset$ et le processus s'éteint presque sûrement, c'est-à-dire que l'infection disparaît avec probabilité 1 à long terme et ceci indépendamment de la configuration initiale.
- **Surcritique** : si $\beta > \beta_w$, alors $\bar{\mu} \neq \delta_\emptyset$ et le processus peut **survivre avec une probabilité strictement positive**, c'est-à-dire que l'infection persiste indéfiniment avec une chance non nulle.

Ainsi, le comportement asymptotique du processus dépend de manière critique de la valeur du paramètre β .

10 Les valeurs critiques

Dans cette section nous examinons de plus près les deux valeurs critiques définies en 3.4. Puisque la survie forte implique la survie faible, on a clairement $\beta_w \leq \beta_s$. En fait, on sait que, du moins pour le processus de contact sur le réseau des entiers $\mathbb{Z}$, ces deux valeurs critiques sont égales. En particulier, sauf peut-être au point critique, le processus ne peut pas survivre faiblement sans survivre fortement, ce qui signifie que le processus s'éteint ou bien s'étend dans l'espace.

Dans toute cette section, nous notons β_c la valeur critique commune pour la survie faible et la survie forte.

Avant de poursuivre, nous présentons un résultat classique sur le processus de naissance et mort simple, afin de le comparer avec le processus de contact. La démonstration de ce résultat peut être consultée, par exemple, dans *Markov Chains* de J. R. Norris [12].

Processus simple de naissance et de mort : On considère un processus de naissance et de mort dans lequel chaque individu : donne naissance à un nouvel individu à un taux β , et meurt à un taux 1, Par la propriété de superposition de processus de poisson ceci

donne si la population est de taille x , les taux de transition sont :

$$\begin{cases} \mathbb{P}(X_{t+h} = x + 1 \mid X_t = x) = \beta x h + o(h), \\ \mathbb{P}(X_{t+h} = x - 1 \mid X_t = x) = x h + o(h), \end{cases}$$

L'état 0 est un **état absorbant**, c'est-à-dire qu'une fois atteint, le processus y reste bloqué. La probabilité que le processus reste toujours strictement positif (c'est-à-dire que $X_t \neq 0$ pour tout $t \geq 0$) est donnée par :

$$\mathbb{P}_x(X_t \neq 0 \text{ pour tout } t \geq 0) = \begin{cases} 0 & \text{si } \beta \leq 1, \\ 1 - \beta^{-x} & \text{si } \beta > 1. \end{cases} \quad (3.8)$$

Le processus de contact modifié de sorte que les naissances sur des sites déjà occupés ne soient pas supprimées est appelé *marche aléatoire branchante*. Le nombre d'individus dans ce processus évolue selon un processus de naissance et mort simple avec taux de naissance β . En particulier, on déduit d'un argument classique de couplage que, à condition que les deux processus commencent à partir d'un seul individu, le nombre d'individus dans le processus de naissance et mort domine stochastiquement celui du processus de contact. Ceci avec 3.8, implique que $\beta_w \geq 1$.

Un aspect intéressant du processus de contact est que, contrairement au processus de naissance et mort simple, la valeur critique est strictement supérieure à 1, ce qui est dû à la structure spatiale imposée sous forme d'interactions locales. Pour démontrer ce résultat, on définit d'abord :

$$\sigma(A) = \mathbb{P}(\xi_t \neq \emptyset \text{ pour tout } t \mid \xi_0 = A), \quad \text{pour tout ensemble fini } A \subset \mathbb{Z}^d, \quad (3.9)$$

et on montre le lemme suivant.

Lemme 3.3 *La probabilité définie en 3.9 est submodulaire, c'est-à-dire que :*

$$\sigma(A \cup B) + \sigma(A \cap B) \leq \sigma(A) + \sigma(B) \quad \text{pour tous } A, B \subset \mathbb{Z}^d \text{ finis.} \quad (3.10)$$

Preuve. Cela découle une nouvelle fois d'un argument de couplage. En utilisant une représentation graphique du processus de contact pour un paramètre de naissance donné, on construit simultanément les quatre processus de contact dont les configurations ini-

tiales sont les quatre ensembles mentionnés dans l'énoncé ($A, B, A \cap B$ et $A \cup B$), en utilisant cette même représentation graphique.

Avec ce couplage, on a :

$$\mathbb{P}(\xi_t^{A \cup B} = \xi_t^A \cup \xi_t^B) = 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\xi_t^{A \cap B} \subset \xi_t^A \cap \xi_t^B) = 1 \quad \text{pour tout } t > 0.$$

où par exemple $\xi_t^A = \{y \in \mathbb{Z}^d : \text{pour un certain } x \in A, \text{ il existe un chemin } (x, 0) \rightarrow (y, t)\}$, ce sont les site occupés à l'instant t partant d'une configuration initiale A .

En particulier, en définissant les variables aléatoires de Bernoulli suivantes :

$$\varphi(D) = \mathbf{1}\{\xi_t^D = \emptyset \text{ pour tout } t > 0\} \quad \text{pour tout } D \subset \mathbb{Z}^d,$$

on en déduit, avec probabilité 1 :

$$\varphi(A \cup B) = \varphi(A) \vee \varphi(B) \quad \text{et} \quad \varphi(A \cap B) \leq \varphi(A) \wedge \varphi(B).$$

En prenant l'espérance, il vient :

$$\begin{aligned} \sigma(A \cup B) + \sigma(A \cap B) &= \mathbb{E}[\varphi(A \cup B)] + \mathbb{E}[\varphi(A \cap B)] \\ &\leq \mathbb{E}[\varphi(A) \vee \varphi(B)] + \mathbb{E}[\varphi(A) \wedge \varphi(B)] \\ &= \mathbb{E}[\varphi(A)] + \mathbb{E}[\varphi(B)] = \sigma(A) + \sigma(B). \end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration. ■

En utilisant le lemme précédent, nous pouvons maintenant démontrer que la valeur critique du processus de contact est strictement supérieure à un.

Théorème 3.2 *Pour le processus de contact sur $\mathbb{Z}^d$, on a : $\beta_s \geq \beta_w \geq \frac{2d}{2d-1} > 1$.*

Preuve. Il est clair que la survie forte entraîne la survie faible. Il en résulte que la valeur critique associée à la survie faible β_w est inférieure ou égale à celle associée à la survie forte β_s .

Pour la seconde inégalité, considérons $A \subset \mathbb{Z}^d$ un ensemble fini. Rappelons que :

- un site occupé $x \in A$ devient vide au taux 1 ;
- un site vide z ayant un voisin occupé $x \in A$ devient occupé par une naissance issue de x au taux $\beta/(2d)$.

En particulier, une analyse de premier saut donne :

$$\sigma(A) = \frac{1}{(\beta + 1) \text{card}(A)} \left(\sum_{x \in A} \sigma(A \setminus \{x\}) + \frac{\beta}{2d} \sum_{z \in N_x} \sigma(A \cup \{z\}) \right), \quad (3.11)$$

Considérons maintenant les deux probabilités suivantes :

$$\sigma_1 = \sigma(\{x\}) \quad \text{et} \quad \sigma_2 = \sigma(\{x, y\}) \quad \text{avec} \quad \|x - y\| = 1.$$

Par invariance par translation, ces probabilités ne dépendent pas du choix de x et y .

En appliquant la formule ci-dessus 3.11 à $A = \{x, y\}$ et en utilisant la sous-modularité de σ 3.10, on obtient :

$$2(\beta + 1)\sigma_2 = 2\sigma_1 + \frac{\beta}{d} \sum_{z \in \mathcal{N}_x} \sigma(\{x, y, z\}) = 2\sigma_1 + \frac{\beta}{d}\sigma_2 + \frac{\beta}{d} \sum_{z \in \mathcal{N}_x \setminus \{y\}} \sigma(\{x, y, z\}),$$

et donc,

$$2(\beta + 1)\sigma_2 \leq 2\sigma_1 + \frac{\beta}{d}\sigma_2 + \frac{\beta}{d}(2d - 1)(2\sigma_2 - \sigma_1).$$

Quelques manipulations algébriques simples donnent :

$$(\sigma_1 - \sigma_2)(2d - \beta(2d - 1)) = 2d\sigma_1 + \beta\sigma_2 + \beta(2d - 1)(2\sigma_2 - \sigma_1) - 2d(\beta + 1)\sigma_2 \geq 0. \quad (3.12)$$

Observons maintenant que, lorsque $\beta > \beta_w$, la probabilité de survie en partant de deux individus est strictement supérieure à la probabilité de survie en partant d'un seul individu, ce qui implique que

$$\text{si } \beta > \beta_w, \quad \sigma_2 > \sigma_1 > 0, \quad \text{et si } \beta < \beta_w, \quad \sigma_2 = \sigma_1 = 0. \quad (3.13)$$

En combinant les inégalités 3.12 et 3.13, on déduit que si

$$\begin{aligned} \beta < \frac{2d}{2d-1} &\implies \sigma_1 \geq \sigma_2 \\ &\implies \sigma_1 = \sigma_2 = 0, \\ &\implies \text{le processus s'éteint.} \end{aligned}$$

Par conséquent, on a nécessairement : $\beta_w \geq \frac{2d}{2d-1}$. ■

Propriétés graphiques du processus de contact

- **Attractivité** : Le processus de contact est attractif. Si $A \subset B$, alors pour tout $t \geq 0$, on a $\xi_t^A \subset \xi_t^B$.

- **Additivité** : Le processus est additif, c'est-à-dire que pour tout $t \geq 0$, on a

$$\xi_t^{A \cup B} = \xi_t^A \cup \xi_t^B.$$

- **État absorbant** : L'ensemble vide est un état absorbant pour le processus de contact.
- **Couplage avec différents paramètres** : Il est possible de coupler des processus de contact avec différents paramètres d'infection β , sur un même espace probabilisé.
- **Auto-dualité** : Le processus est auto-dual : pour tous ensembles finis A et B ,

$$\mathbb{P}(\xi_t^A \cap B \neq \emptyset) = \mathbb{P}(\hat{\xi}_t(B, t) \cap A \neq \emptyset).$$

où $\hat{\xi}_s(B, t) = \{z \in \mathbb{Z}^d : \text{pour un certain } x \in B, \text{ il existe un chemin dual } (x, t) \rightarrow (z, t-s)\}$. Cette propriété peut se visualiser en renversant le sens du temps dans la représentation graphique.

11 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les systèmes de particules en interaction (IPS), en mettant l'accent sur leur définition, leur construction via des processus de Poisson et leurs principales propriétés. Le processus de contact a servi de modèle central pour illustrer des notions clés comme l'attractivité et la dualité.

Nous avons également étudié d'autres exemples classiques, comme le modèle du voteur, qui illustrent la diversité des dynamiques possibles dans les IPS.

Ce cadre offre une base solide pour la modélisation de phénomènes collectifs aléatoires sur réseau.

Conclusion

Ce mémoire nous a permis d'explorer un domaine passionnant des probabilités : les systèmes de particules en interaction. En partant des outils fondamentaux comme les processus stochastiques, les chaînes de Markov à temps continu, puis le processus de Poisson, nous avons progressivement construit les bases nécessaires pour comprendre comment des comportements collectifs peuvent émerger à partir d'interactions locales simples.

Nous avons ensuite concentré notre étude sur un modèle central : le processus de contact, qui simule la propagation d'une infection sur un réseau. À travers ce modèle, nous avons mis en évidence des propriétés importantes telles que l'attractivité et l'existence de mesures invariantes, et nous avons étudié les conditions qui permettent l'extinction ou la survie de l'infection dans le système. Des modèles complémentaires comme le modèle du voteur ou le processus de contact à longue portée nous ont permis d'élargir notre compréhension de ces dynamiques.

Ce travail nous a montré comment des phénomènes complexes peuvent être étudiés de manière rigoureuse à l'aide de modèles mathématiques relativement simples. Il ouvre aussi la voie à de nombreuses perspectives, comme l'étude des IPS sur des réseaux aléatoires, en dimension plus élevée, ou encore avec des règles d'interaction plus élaborées.

Systèmes de particules en interaction et processus de contact

Résumé : Dans ce mémoire, nous nous intéressons à une classe particulière de modèles probabilistes appelés systèmes de particules en interaction. Ces modèles permettent de représenter des phénomènes collectifs tels que la propagation d'une épidémie ou la diffusion d'une opinion au sein d'une population. Nous nous concentrons plus particulièrement sur un modèle central : le processus de contact, qui décrit la manière dont une infection peut se transmettre ou disparaître dans un système.

Le mémoire est composé de trois chapitres. Le premier pose les bases nécessaires sur les processus stochastiques, comme les chaînes de Markov à temps continu. Le deuxième chapitre est consacré au processus de Poisson, un outil fondamental dans la construction de ce type de modèles. Enfin, dans le troisième chapitre, nous étudions plus en détail les systèmes de particules en interaction, leur définition, leur construction à l'aide du processus de Poisson et quelques modèles classiques comme le modèle du voteur et le processus de contact à longue portée.

Mots-Clés. Processus stochastiques, chaînes de Markov, processus de Poisson, systèmes de particules en interaction, processus de contact, modèle du voteur, processus à longue portée, extinction, dualité.

Interacting Particle Systems and the Contact Process

Abstract : In this thesis, we focus on a specific class of probabilistic models known as interacting particle systems (IPS). These models are used to represent collective phenomena such as the spread of an epidemic or the diffusion of an opinion within a population. We concentrate in particular on a central model : the contact process, which describes how an infection can either spread or die out within a system.

The thesis is structured into three chapters. The first chapter introduces the foundational concepts of stochastic processes, including continuous-time Markov chains. The

second chapter is devoted to the Poisson process, a fundamental tool in the construction of this type of model. Finally, in the third chapter, we study interacting particle systems in more detail, presenting their definition, their construction via the Poisson process, and classic examples such as the voter model and the long-range contact process.

Key Words. Stochastic processes, Markov chains, Poisson process, interacting particle systems, contact process, voter model, long-range process, extinction, duality.

Bibliographie

- [1] Billingsley, P. (1995). *Probability and Measure* (3rd ed.). Wiley, New York.
- [2] Bezuidenhout, C. and Grimmett, G. R. (1990). The critical contact process dies out. *The Annals of Probability*, Vol. 18, **4**, 1462–1482,
- [3] Clifford, P., & Sudbury, A. (1973). A model for spatial conflict. *Biometrika*, **60**, 581–588. [44](#)
- [4] Dobrushin, R. L. (1979). Gibbs states describing coexistence of phases for a three-dimensional Ising model. *Theory of Probability and its Applications*, Vol. 24, **3**, 558–581.
- [5] Durrett, R. (2006). *Ten Lectures on Particle Systems*. Springer, Berlin, Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/BFb0095747>
- [6] Durrett, R. (2016). *Essentials of Stochastic Processes*. Springer Nature, Switzerland. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-45614-0>
- [7] Harris, T. E. (1974). Contact interactions on a lattice. *Annals of Probability*, **2**, 969–988. [43](#)
- [8] Holley, R. A., & Liggett, T. M. (1975). Ergodic theorems for weakly interacting infinite systems and the voter model. *Annals of Probability*, **3**(4), 643–663. [44](#)
- [9] Lanchier, N. (2017). *Stochastic Modeling*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-50038-6>
- [10] Liggett, T. M. (2010). *Continuous Time Markov Processes : An Introduction*. Graduate Studies in Mathematics, Vol. 113. American Mathematical Society (AMS).
- [11] Liggett, T. M. (1985). *Interacting Particle Systems*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Vol. 276. Springer-Verlag, New York. [2](#)
- [12] *Markov Chains*. Cambridge University Press, Cambridge, UK. <https://doi.org/10.1017/CB09780511810633> [60](#)

- [13] Ross, S. M. (2011). *Introduction to Probability Models* (10th ed.). Elsevier, Amsterdam.

