Table des Matières

UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de fin d'étude

Pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Cycle LMD

Spécialité :Modélisation Contrôle et Optimisation

Thème:

Systèmes Linéaires à Retards: Positivité et Stabilité.

Présenté par :

ABADA Kheira

Soutenu le 09/06/2014.

Les membres de jury

Président	Hocine	ABLAOUI	M.A.A	**U.Mostaganem.**
Examinateur	M. Amine	GHEZZAR	M.A.B	**U.Mostaganem.**
Encadreur	Djillali	BOUAGADA	Professeur	**U. Mostaganem.**

Remerciements

*Tout d'abord je remercie **ALLAH** le tout puissant de m'avoir donné la santé, la volonté et le courage pour effectuer ce modeste travail.*

Je tiens à remercier

*Monsieur **D. BOUAGADA** Professeur à l'université de Mostaganem, qui a accepté la direction de ce mémoire, et a mis à notre disposition tous les moyens nécessaires ainsi que ses conseils et sa présence pendant la réalisation de ce travail.*

*Monsieur **H.ABLAOUI** Maitre Assistant à l'université de Mostaganem, qui me fait l'honneur de présider ce jury.*

*Monsieur **M.A.GHEZZAR** Maitre Assistant à l'université de Mostaganem, qui a accepté d'analyser ce travail et me fait l'honneur d'être Examinateur.*

Tous les enseignants que j'ai rencontré ou cotoyé durant mon cursus sans oublier tout le personnel administratif.

Un spécial remerciement à tout mes amies pour leur support, encouragement et présence effective.

Dédicace

Je dédie ce travail à

Mes très chers parents et à toutes mes frères et mes soeurs dont l'affection et le soutien continue ont constitué un socle sur lequel j'ai pu m'appuyer pour élaborer ce modeste produit de recherche.

INTRODUCTION

L'insertion de réseaux de communication dans les chaînes d'action et de mesure des systèmes contrôlés en réseau, rend leur analyse complexe, en induisant des problèmes spécifiques. Ces problémes relèvent, entre autres, des inéluctables délais de communication au temps de transmission et au temps de propagation des informations comme est étudié dans [1].

De possibles pertes de données pouvant survenir durant leurs transferts, voir [2], [3].

D'un point de vue Analyse et synthèse des systèmes contrôlés en réseau, mènent à l'instabilité [4].

De ce fait l'étude de tels systèmes ne cesse d'attirer l'attention de nombreux chercheurs.

La prise en compte des retards de communication qui sont définis comme les intervalles de temps entre l'instant sous traité pour remettre une donnée et le moment de son arrivée effective au destinataire.

Beaucoup d'autres applications aboutissent à des différents types de modèles à retards.

Dans notre mémoire, on traite le problème de solvabilité des systèmes à retards en utilisant une approche différente de celles existantes dans la littérature.

Pour ce faire, nous proposons une résolution du système moyennant l'outil transformé de Laplace.

Dans le premier chapitre, nous exposons une synthèse de la transformée de Laplace comme outil servant à répondre à notre problématique.

Le chapitre qui suit est cependant consacré à la recherche de la solution pour les trois types de systèmes à retards considérés. Pour ensuite dériver des résultats sur La Positivité. Enfin, le problème de la stabilité à la Lyapunov a été considéré.

Le mémoire se termine ainsi par la traditionnelle conclusion.

Chapitre 1

Notion de bases

1.1 Transformation de Laplace

La transformée de Laplace est un outil important et très puissant pour résoudre les équations et les systèmes différentiels linéaires en temps continu·

Nous proposerons dans ce chapitre une brève étude sur la transformée de Laplace, tout en s'intéressant taux principales propriétés.

Nous utiliserons ce formalisme pour déterminer la solution des différents types de systèmes à retards considérés.

Nous exposerons dans ce qui suit, les principales définitions et propriétés de la transformée de Laplace tout en s'appuiant sur [5] .

Définition 1.1.1 *Une fonction f est dite causale, si elle est nulle pour $t < 0$·*

Définition 1.1.2 *Soit $f(t)$ une fonction définie pour $t \geq 0$, la transformée de Laplace de $f(t)$ notée $\mathcal{L}\{f(t)\}$; est définie par:*

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \exp(-st)\, dt \tag{1.1.1}$$

où nous supposons que le paramètre s est réel·

1.1.1 Propriétés

Linéarité:

Si a et b sont des constantes quelconques et $f(t)$, $g(t)$ sont des fonctions dont les transformées sont respectivement $F(t)$ et $G(t)$, alors,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{af(t)+bg(t)\} &= a\mathcal{L}\{f(t)\}+b\mathcal{L}\{g(t)\} \\ &= aF(s)+bG(s) \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

Dérivation:

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s)+F(0) \tag{1.1.3}$$

Intégration:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s} \tag{1.1.4}$$

Retard temporel:

$$\mathcal{L}\left[f(t-\tau)\right] = \exp(-s\tau)F(s) \tag{1.1.5}$$

Convolution:

$$\mathcal{L}\left[f(t)\cdot g(t)\right] = F(s)\cdot G(s) \tag{1.1.6}$$

Théorème de la valeur initiale:

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = f(0^+) = \lim_{s\to 0} sf(s) \tag{1.1.7}$$

Théorème de la valeur finale:

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sf(s) \tag{1.1.8}$$

1.2 Transformation de Laplace inverse

Définition 1.2.1 *La transformée de Laplace étant un opérateur bijectif, sa bijection inverse existe. Elle est unique et on l'appelle originale de F, elle est définie par:*

$$\mathcal{L}^{-1}\left(F\left(s\right)\right) = f\left(t\right) \tag{1.2.1}$$

1.2.1 Propriétés

Linéarité:

Si C_1 et C_2 sont des constantes quelconques et $F(s)$, $G(s)$ les transformées de Laplace de $f(t)$ et $g(t)$, respectivement alors,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{C_1F(s) + C_2G(s)\right\} = C_1f\left(t\right) + C_2g\left(t\right) \tag{1.2.2}$$

Propriété de changement d'échelle:

Si

$$\mathcal{L}^{-1}\left(F\left(s\right)\right) = f\left(t\right)$$

alors,

$$\mathcal{L}^{-1}\left(F\left(ks\right)\right) = \frac{1}{k}f\left(\frac{t}{k}\right) \tag{1.2.3}$$

avec $k \in \mathbb{R}$

Propriété de translation:

Si

$$\mathcal{L}^{-1}\left(F\left(s\right)\right)=f\left(t\right)$$

alors,

$$\mathcal{L}^{-1}\left(F\left(s-a\right)\right)=\exp\left(at\right)f\left(t\right) \tag{1.2.4}$$

avec $a\in\mathbb{R}$

Transformée inverse de dérivées:

Si

$$\mathcal{L}^{-1}\left(F\left(s\right)\right)=f\left(t\right)$$

alors,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left(F^{(n)}\left(s\right)\right) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d^n}{dp^n}F\left(s\right)\right\} \\ &= \left(-1\right)^n t^n f\left(t\right)\end{aligned} \tag{1.2.5}$$

et n entier positif.

Multiplication par pavées:

Si

$$\mathcal{L}^{-1}\left(F\left(s\right)\right)=f\left(t\right)$$

et $f\left(0\right)=0$ alors,

$$\mathcal{L}^{-1}\left(sF\left(s\right)\right)=f'\left(t\right) \tag{1.2.6}$$

1.3 Quelques outils d'algèbre linéaire

Dans cette petite section, nous proposons quelques outils d'algèbre linéaire qui sont très utiles dans notre travail. Pour ce faire, nous nous basons sur les références suivantes[6] , [7] , [8] .

Définition 1.3.1 ***(Matrice transposée)*** *Si A est une matrice, alors, la matrice notée*

A^T est sa matrice transposée, et est définie par,

$$(A^T)_{ij} = a_{ji}.$$

Définition 1.3.2 ***(Matrice symétrique)*** *Une matrice A est dite symétrique si*

$$A^T = A.$$

Définition 1.3.3 ***(Matrice définie positive)*** *Une matrice symétrique A dont les éléments sont des nombres réels, est définie positive si pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ non nul on a:*

$$x^T A x > 0$$

1.4 Polynôme caractéristique

Soit $\Bbbk$ un corps commutatif et $n \in \mathbb{N}^*$ un entier non nul. On définit le polynôme caractéristique d'une matrice $A \in M(\Bbbk)$ comme le polynôme,

$$\chi_A = \det (XI_n - A) \tag{1.4.1}$$

tel que χ_A annule A, i.e.

$$\chi_A = 0$$

Remarque 1 *Attention au raisonnement naïf et faux évidement qui consiste à dire, on remplace X par A dans la formule, ce qui donne,*

$$\chi_A(A) = \det (AI_n - A) = \det(A - A) = 0,$$

donc, on écrit les choses proprement comme,

$$\chi_A(A) = [\det (XI_n - A)](A) \tag{1.4.2}$$

On calcule le déterminant dans l'anneau $\mathbb{k}[x]$, puis on évalue ce polynôme en la matrice A dans l'anneau $M_n(\mathbb{k})$.

1.5 Matrices non-négatives, positives et de Metzler

Soient $A = (a_{ij})_{i,j}$ et $B = (b_{ij})_{i,j} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ des matrices à coefficients réels.

Par la suite, nous notons I_n, la matrice identité d'ordre n ou plus brièvement I, A^T la transposée d'une matrice A, N est l'ensemble des n premiers entiers naturels, $1, ..., n$.

Définition 1.5.1 *A est une matrice **non-négative** si $\forall i \in n$, $\forall j \in m : a_{ij} \geq 0$, autrement dit toutes ses entrées sont non-négatives. Nous noterons une telle matrice par: $A \geq 0$ ou encore, $A \in \mathbb{R}_+^{n\times m}$.*

Définition 1.5.2 *A est une matrice **positive** si A est non-négative et*

$$\exists k \in n, \exists l \in m : a_{kl} > 0$$

c'est à dire toutes ses entrées sont non négatives avec au moins une entrée (strictement) positive. Nous noterons une telle matrice par:

$$A > 0$$

Définition 1.5.3 *A est une matrice **strictement positive** si*

$$\forall i \in n,\ \forall j \in m : a_{ij} > 0$$

i.e. toutes ses entrées sont (strictement) positives. Nous noterons une telle matrice par:

$$A >> 0$$

Ces définitions et notations seront également valables pour des vecteurs de dimension n,

$n \geq 2$. Cependant, pour les scalaires, la propriété strictement positif $\alpha >> 0$ coïncide avec $\alpha > 0$

Définition 1.5.4 *A est une matrice de* ***Metzler*** *si,*

$$\forall i \in n,\ \forall j \in m,\ \forall i \neq j : a_{ij} \geq 0$$

i.e toutes ses entrées hors diagonales sont non négatives.

Exemple 1 *La matrice A suivante est une matrice de Metzler,*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & O \\ 1 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Le résultat suivant est immédiat,

Proposition 1.5.1 *A est une matrice de* ***Metzler*** *si et seulement si*

$$\forall t \geq 0,\ \exp(At) \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$$

ou de manière équivalente, $\forall t \geq 0$, l'orthant positif, $\mathbb{R}_+^n$, est $\exp(At)$-invariant, c'est à dire

$$\forall t \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}_+^n,\ \ \exp(At)\, x \in \mathbb{R}_+^n\cdot$$

Nécessité :

Supposons que A est une matrice de **Metzler**, on peut trouver un réel $\lambda > 0$ tel que $(A + \lambda I_n) > 0$. où,

$$(A + \lambda I_n) + (-\lambda I_n) \ = (-\lambda I_n) + (A + \lambda I_n)$$

il s'ensuit que,

$$
\begin{aligned}
\exp(At) &= \exp\,(A+\lambda I_n)t + (-\lambda I_n)\,t \\
&= \exp(A+\lambda I_n)t\exp(-\lambda I_n)\,t \in \mathbb{R}_+^{n\times n}
\end{aligned}
$$

du fait que: $\exp(A+\lambda I_n)t \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$et $\exp(-\lambda I_n)\,t \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$

Suffisance :

Supposons que $\forall t \geq 0$, $\exp(At) \geq 0$. Ainsi, puisque:

$$
A = \frac{d}{dt}\left(\exp(At)\right)_{t=0} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\exp(At) - I}{t}
$$

Prenons comme e_j le j^{ime} vecteur de la base canonique, nous obtenons pour $i \neq j$,

$$
\begin{aligned}
a_{ij} &= \lim_{t\to 0^+} \frac{\langle \exp(At)\,e_j - e_j, e_i\rangle}{t} \\
&= \left\{ \lim_{t\to 0^+} \frac{\langle \exp(At)\,e_j, e_i\rangle}{t} - \frac{e_j, e_i}{t} \right\} \\
&= \lim_{t\to 0^+} \frac{\langle \exp(At)\,e_j, e_i\rangle}{t} \geq 0
\end{aligned}
$$

puisque $\langle e_j, e_i\rangle = 0$. Dés lors, $a_{ij} \geq 0$ pour $i \neq j$ et la matrice A est donc une matrice de Metzler.

Chapitre 2

Systèmes positifs (sans retards)

Un système positif est un système qui à une entrée (contrôle) positive associe une sortie positive.

En gros, une représentation d'état avec les mêmes conditions que pour les systèmes standards entraîne un état positif si l'état initial est positif.

2.1 Quelques applications

- Systèmes à variables physique positives par nature (niveaux, débits,.....) ;
- Modèles à compartiments: Applications en médecine , cinétique chimique;
- Modèles économique (Leontieff);
- Circuits RLC;
- Sciences de la communication et de l'information;
- Processus industriels impliquant des réacteurs chimiques.

2.2 Principales Propriétés

Si l'état initial est positif (ou au moins non-négatif), alors la trajectoire d'état se situe entièrement dans l'orthant non-négatif.

Notons que les systèmes linéaires positifs sont définis dans des cônes et non pas dans des espaces linéaires.

2.3 Positivité de systèmes linéaires sans retard en temps continus

Considérons le système linéaire standard en temps invariant suivant,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \tag{2.3.1}$$

pour tout $t > t_0$, nous obtenons,

Trajectoire d'état :

$$x(t) = \exp(At)\, x_0 + \int_0^t \exp(A(t-\tau))\, Bu(\tau)\, d\tau$$

Réponse du système :

$$y(t) = C\exp(At)\, x_0 + C\int_0^t \exp(A(t-\tau))\, Bu(\tau)\, d\tau + Du(\tau)$$

Considérons à présent les définitions et quelques résultats de positivité en temps continu.

Nous nous basons dans notre étude, sur [6] et [9] $\cdot$

2.3.1 Positivité externe

Tout d'abord, donnons la première définition de positivité de systèmes linéaires, la positivité externe.

Définition 2.3.1 *Un système linéaire standard est dit* ***externement positif*** *si la sortie correspondant à l'état initial nul est non-négative pour chaque entrée non-négative,* ***i.e.*** *pour* $x_0 = x(0) = 0$ *et pour tout* $u(t) \in \mathbb{R}_+^m$, $t > 0$, *on a* $y(t) \in \mathbb{R}_+^p$, *pour* $t \geq 0$.

2.3.2 Positivité interne

A présent, nous pouvons donner la seconde définition de positivité, qui peut être appelée positivité interne.

Définition 2.3.2 *Le système est dit* ***internement positif*** *si pour tout* $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$ *et tout contrôle* $u(t) \in \mathbb{R}_+^m$ *pour* $t \geq 0$ *on a* $x(t) \in \mathbb{R}_+^n$ *et* $y(t) \in \mathbb{R}_+^p$ *pour* $t \geq 0\cdot$

Cette définition indique que toutes les trajectoires émanant de n'importe quel point dans l'orthant non-négatif $\mathbb{R}_+^n$ (frontières incluses) de l'espace d'état $\mathbb{R}$, obtenues en appliquant une entrée non-négative au système, demeurent dans l'orthant non-négatif et mènent à une sortie non-négative.

Remarque 2 *La positivité interne implique la positivité externe mais l'inverse n'est pas vrai.*

Nous allons alors caractériser la positivité interne des systèmes linéaires standards sans retards en temps continu.

Théorème 2.3.1 *Le système est internement positif si et seulement si* A *est une matrice de Metzler et* $B \in \mathbb{R}_+^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}_+^{p\times m}$ *et* $D \in \mathbb{R}_+^{p\times m}$

Nécessité :

Si le système est internement positif,

alors,

$$x(t) \in \mathbb{R}_+^n \text{ et } y\left(t\right) \in \mathbb{R}_+^p$$

pour

$$x_0 \in \mathbb{R}_+^n \text{ et } u\left(t\right) \in \mathbb{R}_+^n$$

tel que,

$$x\left(t\right) = \exp\left(At\right)x_0 + \int_0^t \exp\left(A\left(t-\tau\right)\right)Bu\left(\tau\right)d\tau$$

et

$$y\left(t\right) = C\exp\left(At\right)x_0 + C\int_0^t \exp\left(A\left(t-\tau\right)\right)Bu\left(\tau\right)d\tau + Du\left(t\right)$$

L'idée est de considérer la i^{eme} composante de la matrice A, B et C respectivement et faire étendre pour toutes les composentes. Pour cela, on se refére à [3] et [4] , d'où le résultat.

Suffisance :

Si on suppose que la matrice A est de **Metzler** et les matrices B, C et D sont positives, alors $\exp\left(At\right)$ est positif d'après la proposition (1.5.1) et cela montre que $x(t) \in \mathbb{R}^n$ et $y\left(t\right) \in \mathbb{R}_+^p$, $\forall t \geq 0$,

L'objectif est d'étendre cette notion importante dans la pratique qui est la positivitè aux systèmes différentiels avec retards.

Chapitre 3

Stabilité des systèmes linéaires sans retard à temps continu

3.1 Généralités:

La notion de stabilité constitue une problématique centrale de la théorie du contrôle.

Souvent liée à la façon d'appréhender un système, Dans ce chapitre, nous nous intéressons à quelques notions particulières de stabilité. En particulier, on cite la stabilité au sens de Lyapunov, pour démontrer des propriétés de stabilité des systèmes à retards étudiés. Nos principales références sont [5] , [6] .

3.2 Notions fondamentales de la stabilité:

On considère un système non linéaire non autonome de la forme suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f\left(t, x\left(t\right)\right), \ t \geq t_0 \qquad (3.2.1) \\ x(t) &= x_0, \ t = t_0 \\ x(t) &= \phi\left(t\right) \in C, \ t_0 - \tau \leq t < t_0 \end{aligned}$$

avec $f: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue en t, localement Lipchitzienne en x et telle que $f(t, 0) = 0$, pour tout $t \geq 0$, de sorte que l'origine soit un point d'équilibre. On désigne tout au long de ce mémoire la condition initiale $x(t_0)$ par x_0. Le paragraphe suivant est dédié à la définition de quelques concepts fondamentaux de stabilité.

Définition 3.2.1 ***(Stabilité):*** *On dit que $x = 0$ est un point d'équilibre stable, si*

$$\forall t_0 \geq 0, \forall \varepsilon \geq 0, \ \exists \delta = \delta(t_0, \varepsilon) \succ 0, \textit{ telque: } \|x_0\| \prec \delta \Rightarrow \|x(t)\| \prec \varepsilon, \forall t \geq t_0 \quad (3.2.2)$$

Autrement dit, la stabilité au sens de Lyapunov de l'origine du système veut dire que $\forall t \geq t_0$, la solution de condition initiale (t_0, x_0) reste au voisinage de l'origine si x_0 est au voisinage de l'origine. En d'autres termes, $\forall t \geq t_0$, une petite perturbation de la condition initiale x_0 autour de l'origine donne naissance à une solution $x(t)$ qui reste proche de l'origine.

Définition 3.2.2 ***(Attractivité):*** *On dit que l'origine $x = 0$ est :*

un point d'équilibre attractif, s'il existe un voisinage de l'origine $U(0)$, tel que:

$$\forall x_0 \in U(0), \ \lim_{t \to +\infty} x(t) = x_0 \quad (3.2.3)$$

un point d'équilibre globalement attractif si :

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}, \ \lim_{t \to +\infty} x(t) = x_0 \quad (3.2.4)$$

Définition 3.2.3 ***(Stabilité asymptotique):*** *On dit que l'origine $x = 0$ est :*

un point d'équilibre asymptotiquement stable, s'il est stable et attractif.

un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable, s'il est stable et globalement attractif.

3.3 Théorie de Lyapunov:

L'utilisation des fonctions définies positives est une technique parmi les plus efficaces pour analyser la stabilité d'un système gouverné par une équation différentielle ordinaire.

Définition 3.3.1 ***(Fonction de classe*** $\mathbf{k}$***):***

Une fonction continue: α*:*$[0, a[\to [0, +\infty[$ *est dite de classe* $\mathbf{k}$*, si elle est strictement croissante et* $\alpha(0) = 0$*, Elle est dite de classe* $\mathbf{k}_\infty$*, si de plus, on a,* $a = +\infty$ *et* $\alpha(r) \to +\infty$ *quand* $r \to +\infty$

Définition 3.3.2 *Une fonction continue* $V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ *est dite:*

définie positive, s'il existe une fonction de classe $\mathbf{k}$*, telle que :*

$$\forall t \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, V(t, x) \geq \alpha(||x||) \cdot \tag{3.3.1}$$

Définition 3.3.3 ***(Fonction de Lyapunov):*** *On considère le système* (3.2.1)*. Soit* $U(0)$ *un voisinage de zéro et* $V : \mathbb{R}_+ \times U(0) \to \mathbb{R}$ *une fonction continue et différentiable sur U(0).*

On dit que V *est une fonction de Lyapunov au sens large en* 0*, si elle vérifie les deux propriétés suivantes:*

i. V *est définie positive.*

ii. $\dot{V}(t, x) \leq 0$ *pour tout* $x \in U(0)$

On dit que V *est une fonction de Lyapunov stricte en* 0*, si elle vérifie les deux propriétés suivantes:*

i. V *est définie positive.*

ii. $\dot{V}(t, x) < 0$ *pour tout* $x \in U(0) \setminus \{0\}$

3.4 Condition de Lyapunov

On considère le problème suivant

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Dans cette section, on va énoncer les conditions de Lyapunov servant à étudier la stabilité des différents systèmes. On va s'intéresser au système linéaire continu suivant

$$\dot{x} = Ax,\ A \in \mathbb{R}^{n\times n} \left\langle \text{système sans contrôle} \right\rangle . \tag{1}$$

Pour cela, notre intérêt portera sur l'analyse de la stabilité par la méthode de Lyapunov.

On considère la fonction condidate de Lyapunov définie par:

$$v(x) := x^T P x,\ P \in \mathbb{R}^{n\times n},\ \text{où } P^T = P.$$

En se basant des références [14] , [13] . Une condition majeure pour garantir la stabilité asymptotique est que la fonction dérivée de $v(x)$ soit définie négative.

on calcule alors,

$$\begin{aligned}
\dot{v}(x) \quad &: \quad = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \\
&: \quad = x^T A^T P x + x^T P A x \\
&: \quad = x^T \overbrace{\left(A^T P + PA\right)}^{Q} x
\end{aligned}$$

et si on pose ,

$$Q = A^T P + PA,\ Q^T = Q \tag{3.4.1}$$

Notons que Q est réelle et que $Q^T = Q$. Le système d'équations (3.4.1) est dit Equation matricielle de Lyapunov

Cela se caractérise par le résultat suivant,

Théorème 3.4.1 *Le système* (1) *est asymptotiquement stable s'il existe une matrice P réelle symétrique de taille $n \times n$ définie positive telle que la matrice Q dans* (3.4.1) *est définie négative.*

3.5 Test par les valeurs propres

3.5.1 Stabilité des Systèmes Dynamiques

Soit le système:

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

à type continu, et sans contrôle.

Le système homogène est stable s'il existe une norme $||x(t)||$ qui décroisse strictement avec le temps.

Preuve.

$$||x(t)|| = P(x(t)) \doteq x^*(t) Px(t), \; P > 0 \tag{1}$$

On veut donc que

$$\dot{P}(x(t)) < 0 \; \forall t, \; \forall x(0), \tag{2}$$

Ce qui permet d'imposer une condition à la matrice P.

Pour cela il suffit d'insérer $(1), (2)$.

$$\begin{aligned} \dot{P}(x(t)) &= \dot{x}^*(t) Px(t) + x^*(t) P\dot{x}(t) \\ &= x^*(t)[A^*P + PA] x(t) \\ &= x^*(t)[-Q] x(t) \end{aligned}$$

puisque $\dot{P}(x(t))$ doit être strictement négatif pour tout t, il faut donc que Q soit une matrice définie positive

$$\Rightarrow A^*P + PA = -Q \quad \text{eq. de Lyapunov.} \tag{3}$$

$$\Rightarrow \text{si } P \text{ et } Q \text{ sont définies positives, } A \text{ est stable.}$$

■

Nous passerons, dans ce qui suit à l'établissement du test par les valeurs propres:

Théorème 3.5.1 *Si A satisfait l'équation (3) avec $P > 0$, $Q > 0$,*
alors $\mathrm{Re}\,\lambda_i(A) < 0$ pour toute valeur propre de A.

Preuve. Soit x_i un vecteur propre correspondant à λ_i,
alors,

$$\begin{aligned} x_i^* Q x_i &= x_i^* \left(A^*P + PA\right) x_i \\ &= x_i^* P x_i \left(\lambda_i + \bar{\lambda}_i\right) \end{aligned}$$

Puisque $x_i^* Q x_i$ et $x_i^* P x_i$ sont strictement positifs, il s'ensuit,

$$\mathrm{Re}\,\lambda_i < 0$$

■

3.6 Cas d'un système à temps discret

considèrons maintenant le cas d'un système discret non contrôlé,

$$x_{k+1} = Ax_k$$

qui est dit stable (on contractif) si les valeurs propres de A sont de module inférieur à 1.

L'équivalent de l'équation de Lyapunov est l'équation de Stein:

$$\dot{P} \ - A^* P A = Q \tag{4}$$

Le théorème suivant analyse la stabilité "discrète" de la matrice A.

Théorème 3.6.1 *Si A satisfait* (4) *avec $P > 0$ et $Q > 0$*

alors $|\lambda_i(A)| < 1$ pour toute valeur propre λ_i de A.

Preuve. *Soit x_i vecteur propre correspandant à la valeur propre λ_i,*

alors

$$x_i^* Q x_i = x_i^* \left(P \ - A^* P A\right) x_i = x_i^* P x_i \left(1 - \lambda_i \bar{\lambda}_i\right)$$

sont strictement positifs, d'où $|\lambda_i| < 1$ ■

Chapitre 4

Solvabilité des systèmes à retards

Nous utiliserons dans ce chapitre l'outil transformée de Laplace pour résoudre cette classe de systèmes.

Il s'agit d'outils servant à répondre à la question de solvabilité des systèmes différentiels notamment avec retards. Leurs applications aux systèmes, décrit une méthode mathématique ayant pour objectif de

1: Contourner la diffculté de résolution des équations et des systèmes différentiels;

2: D'offrir une résolution algébrique;

3: Elle est très bien adapté à l'automatique et à l'electronique.

Nous allons donc introduire cette transformation, pour ensuite l'appliquer aux systèmes différentiels à retards pour les trois types suivant:

1. Systèmes différentiels à retard temporel dans la commande;
2. Système différentiel à retard temporel dans l'état;
3. Systèmes différentiels à retard temporel dans l'état et la commande.

4.1 Généralités sur les systèmes à retards

Cette section vise à présent certaines notions fondamentales relatives aux systèmes à retard, avec un regard porté notamment sur les principaux modéles mathèmatiques de tels systèmes.

Nons commençons notre section par décrire la forme générale d'un système avec retards.

Définition 4.1.1 *Un système à retard est un système régi par un système d'équations différentielles fonctionnelles de la forme:*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t,\ x_t(\theta)),\ t \geq t_0 \\ x_{t_0}(\theta) = \phi(\theta),\ \theta \in [-\tau,0] \end{cases} \tag{4.1.1}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est l'état du système (4.1.1) *à l'instant t, et f une fonction supposée continue, localement Lipschitzienne par rapport à la seconde variable et telle que $f(t,\ 0) = 0$.*

4.2 Modèles de systèmes à retard

Le modèle constitue une représentation générale, qui peut être déclinée sous plusieurs formes, en fonction des classes de systèmes concernées.

Les sections suivantes présentent alors les trois classes citées plus haut et qui sont les plus usuellement considérées

1. Systèmes différentiels à retard temporel dans la commande;
2. Système différentiel à retard temporel dans l'état;
3. Systèmes différentiels à retard temporel dans l'état et la commande.

4.3 Systèmes différentiels linéaires à Retard-Description et résolution

Dans ce chapitre on va résoudre trois types de systèmes différentiels par la transformée de Laplace, on considère par la suite le cas d'un faisceau de matrices régulier qu'on définit par,

Définition 4.3.1 *un faisceau de matrice est une matrice dout les coefficients sont des polynômes de degré 1.*

Définition 4.3.2 *Un faisceau de matrices est dit régulier si son déterminant est non nul pour un certain s dans $\mathbb{C}$. Dans le cas contraire, il est dit singulier.*

4.3.1 Systèmes différentiels à retard temporel dans la commande

Un système différentiel à retard temporel dans le temps est un système de forme générale:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t-h) \tag{1}$$

où $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$; $x(t) \in \mathbb{R}^n$; $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$; $u(t) \in \mathbb{R}^m$, avec conditions initiales.

Résolution:

Utilisons la transformée de Laplace:

$$\mathcal{L}(\dot{x}) = A\mathcal{L}[x(t)] + B\mathcal{L}[u(t-h)]$$

il vient,

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + B\exp(-sh)U(s)$$

donc

$$sX(s) - AX(s) = x(0) + B\exp(-sh)U(s)$$

et si pour $x(0) = x_0 \neq 0$

$$(sI - A)X(s) = x_0 + B\exp(-sh)U(s)$$

Supposons que le faisceau est régulier i.e: $\det(sI - A) \neq 0$ c-à-d $\exists (sI - A)^{-1}$

par suite,

$$X(s) = (sI - A)^{-1}x_0 + (sI - A)^{-1}B\exp(-sh)\,U(s)$$

alors,

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1}[X(s)] \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[(sI - A)^{-1}x_0\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[(sI - A)^{-1}B\exp(-sh)\,U(s)\right] \end{aligned}$$

et par l'utilisation du théorème de convolution et la transformée inverse, on aura,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[(sI - A)^{-1}B\exp(-sh)\,U(s)\right]$$

or pour,

$$\begin{aligned} F(s) &= (sI - A)^{-1} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) = \exp(At) \\ G(s) &= B\exp(-sh)\,U(s) \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = g(t) = Bu(t-h) \end{aligned}$$

alors,

$$\begin{aligned} f * g &= \mathcal{L}^{-1}[F(s) \cdot G(s)] = \int_0^t f(t-\tau)\,g(\tau)\,d\tau \\ &= \int_0^t \exp(A(t-\tau)) \cdot Bu(\tau - h)\,d\tau \end{aligned}$$

Nous caractérisons donc cela par le théorème suivant,

Théorème 4.3.1 *Etant donné le système de forme* (1) *à faisceau régulier de condition initiale* x_0*, alors la solution de ce système est de la forme suivante:*

$$x(t) = \exp(At)\,x_0 + \int_0^t \exp(A(t-\tau))\,Bu(\tau - h)\,d\tau$$

4.3.2 Systèmes différentiels à retard temporel dans l'état

La forme générale d'un système à retard temporel dans l'état est,

$$\dot{x}\left(t\right)=A_{0}x\left(t\right)+A_{1}x\left(t-\tau\right)+Bu\left(t\right) \tag{2}$$

avec A_0, $A_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$; $x\left(t\right) \in \mathbb{R}^{n}$; $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$; $u\left(t\right) \in \mathbb{R}^{m}$, avec conditions initiales.

Résolution:

L'application de la transformée de Laplace, aboutit à,

$$\mathcal{L}(\dot{x})=A_{0}\mathcal{L}(x)+A_{1}\mathcal{L}(x\left(t-\tau\right))+B\mathcal{L}(u\left(t\right))$$

d'où

$$sX\left(s\right)-x\left(0\right)=A_{0}X\left(s\right)+A_{1}\exp\left(-s\tau\right)X\left(s\right)+BU\left(s\right)$$

qui donne

$$sX\left(s\right)-AX\left(s\right)=x\left(0\right)+A_{1}\exp\left(-s\tau\right)X\left(s\right)+BU\left(s\right)$$

et pour $x\left(0\right)=x_{0}\neq0$, et que le faisceau est régulier

$$(sI-A_{0})X\left(s\right)=x_{0}+A_{1}\exp\left(-s\tau\right)X\left(s\right)+BU\left(s\right)$$

il s'ensuit,

$$X\left(s\right)=(sI-A_{0})^{-1}x_{0}+(sI-A_{0})^{-1}A_{1}\exp\left(-s\tau\right)X\left(s\right)+(sI-A_{0})^{-1}BU\left(s\right)$$

alors,

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1}[X(s)] \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[(sI - A_0)^{-1}x_0\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[(sI - A_0)^{-1}A_1 \exp(-s\tau) X(s)\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[(sI - A_0)^{-1}BU(s)\right] \end{aligned}$$

et par l'utilisation de la convolution et la transformée inverse pour

$$\mathcal{L}^{-1}\left[(sI - A_0)^{-1}A_1 \exp(-s\tau) X(s)\right]$$

et si on pose:

$$\begin{aligned} F(s) &= (sI - A_0)^{-1} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) = \exp(A_0 t) \\ G(s) &= A_1 \exp(-s\tau) X(s) \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = g(t) = A_1 x(t-\tau) \end{aligned}$$

alors,

$$\begin{aligned} f * g &= \mathcal{L}^{-1}[F(s) \cdot G(s)] = \int_0^t f(t-v)\, g(v)\, dv \\ &= \int_0^t \exp(A_0(t-v)) \cdot A_1 x(v-\tau)\, dv \end{aligned}$$

et pour les mêmes raisons

$$\mathcal{L}^{-1}\left[(sI - A_0)^{-1}BU(s)\right]$$

pour,

$$F(s) = (sI - A_0)^{-1} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) = \exp(A_0 t)$$

$$G(s) = BU(s) \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = g(t) = Bu(t)$$

alors,

$$\begin{aligned} f * g &= \mathcal{L}^{-1}\left[F(s) \cdot G(s)\right] = \int_0^t f(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau \\ &= \int_0^t \exp\left(A_0(t-v)\right) \cdot Bu(v)\, dv \end{aligned}$$

D'où ,

$$x(t) = \exp\left(A_0 t\right) x_0 + \int_0^t \exp\left(A_0(t-v)\right) A_1 x(v-\tau)\, dv + \int_0^t \exp\left(A_0(t-v)\right) Bu(v)\, dv$$

On résume alors, ceci dans le théorème suivant.

Théorème 4.3.2 *Etant donné le système de forme* (2) *à faisceau régulier de condition initiale x_0, alors la solution de ce système est de la forme suivante:*

$$x(t) = \exp\left(A_0 t\right) x_0 + \int_0^t \exp\left(A_0(t-v)\right) A_1 x(v-\tau)\, dv + \int_0^t \exp\left(A_0(t-v)\right) Bu(v)\, dv$$

4.3.3 Systèmes différentiels à retard temporel dans l'état et la commande

Forme générale:

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-\tau) + Bu(t-\tau) \tag{3}$$

avec $A_0,\ A_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$; $x(t) \in \mathbb{R}^n$; $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$; $u(t) \in \mathbb{R}^m$, avec condition initiale

Solution:

L'application de la transformée de Laplace, aboutit à,

$$\mathcal{L}(\dot{x}) = A_0\mathcal{L}(x) + A_1\mathcal{L}(x(t-\tau)) + B\mathcal{L}(u(t-\tau))$$

d'où,

$$sX(s) - x(0) = A_0X(s) + A_1\exp(-s\tau)X(s) + B\exp(-s\tau)U(s)$$

qui donne

$$sX(s) - AX(s) = x(0) + A_1\exp(-s\tau)X(s) + B\exp(-s\tau)U(s)$$

et pour $x(0) = x_0 \neq 0$, et que le faisceau est régulier

$$(sI - A_0)X(s) = x_0 + A_1\exp(-s\tau)X(s) + B\exp(-s\tau)U(s)$$

il s'ensuit,

$$X(s) = (sI - A_0)^{-1}x_0 + (sI - A_0)^{-1}A_1\exp(-s\tau)X(s) + (sI - A_0)^{-1}B\exp(-s\tau)U(s)$$

alors,

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1}[X(s)] \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[(sI - A_0)^{-1}x_0\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[(sI - A_0)^{-1}A_1\exp(-s\tau)X(s)\right] \\ &\quad + \mathcal{L}^{-1}\left[(sI - A_0)^{-1}B\exp(-s\tau)U(s)\right] \end{aligned}$$

et par l'utilisation du théorème de convolution et la transformée inverse, on obtient,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[(sI - A_0)^{-1}A_1\exp(-s\tau)X(s)\right]$$

et si on pose:

$$\begin{aligned} F(s) &= (sI - A_0)^{-1} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) = \exp(A_0 t) \\ G(s) &= A_1 \exp(-s\tau) X(s) \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = g(t) = A_1 x(t-\tau) \end{aligned}$$

alors,

$$\begin{aligned} f * g &= \mathcal{L}^{-1}[F(s) \cdot G(s)] = \int_0^t f(t-v)\, g(v)\, dv \\ &= \int_0^t \exp(A(t-v)) \cdot A_1 x(v-\tau)\, dv \end{aligned}$$

et pour les mêmes raisons

$$\mathcal{L}^{-1}\left[(sI - A_0)^{-1} B \exp(-s\tau) U(s)\right]$$

et,

$$F(s) = (sI - A)^{-1} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) = \exp(At)$$

$$G(s) = B \exp(-s\tau) U(s) \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = g(t) = Bu(t-\tau)$$

par suite,

$$\begin{aligned} f * g &= \mathcal{L}^{-1}[F(s) \cdot G(s)] = \int_0^t f(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau \\ &= \int_0^t \exp(A(t-v)) \cdot Bu(v-\tau)\, dv \end{aligned}$$

D'où,

$$x(t) = \exp(A_0 t)\, x_0 + \int_0^t \exp(A_0(t-v))\, A_1 x(v-\tau)\, dv + \int_0^t \exp(A_0(t-v))\, Bu(v-\tau)\, dv$$

En résumé il s'ensuit le théorème suivant.

Théorème 4.3.3 *Etant donné le système de forme* (3) *à faisceau régulier de condition initiale* x_0*, alors la solution de ce système est de la forme suivante :*

$$x(t) = \exp(A_0 t)\, x_0 + \int_0^t \exp(A_0 (t-v))\, A_1 x(v-\tau)\, dv + \int_0^t \exp(A_0 (t-v))\, Bu(v-\tau)\, dv$$

4.3.4 Généralisation:

On considère le système linéaire général de la forme:

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + \sum_{i=1}^{m} A_i x(t-h_i) + \sum_{j=0}^{k} B_j u(t-\tau_j) \tag{4}$$

avec $A_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pour $i = 1, ..., m$; $x(t) \in \mathbb{R}^n$; $B_j \in \mathbb{R}^{n\times m}$ pour $j = 0, ..., k$; $u(t) \in \mathbb{R}^m$, avec conditions initiales.

Approche de résolution:

L'application de la transformée de Laplace: nous permet d'avoir,

$$\mathcal{L}(\dot{x}) = A_0 \mathcal{L}(x(t)) + \sum_{i=1}^{m} A_i \mathcal{L}[x(t-h_i)] + \sum_{j=0}^{k} B_j \mathcal{L}(u(t-\tau_j))$$

d'où,

$$sX(s) - x(0) = A_0 X(s) + \sum_{i=1}^{m} A_i \exp(-sh_i)\, X(s) + \sum_{j=0}^{k} B_j \exp(-s\tau_j)\, U(s)$$

qui donne,

$$\Rightarrow sX(s) - A_0 X(s) = x(0) + \sum_{i=1}^{m} A_i \exp(-sh_i)\, X(s) + \sum_{j=0}^{k} B_j \exp(-s\tau_j)\, U(s)$$

et pour $x(0) = x_0 \neq 0$, et que le faisceau est régulier

$$(sI - A_0)X(s) = x_0 + \sum_{i=1}^{m} A_i \exp(-sh_i) X(s) + \sum_{j=0}^{k} B_j \exp(-s\tau_j) U(s)$$

il s'ensuit,

$$X(s) = (sI - A_0)^{-1}x_0 + (sI - A_0)^{-1} \sum_{i=1}^{m} A_i \exp(-sh_i) X(s) + (sI - A_0)^{-1} \sum_{j=0}^{k} B_j \exp(-s\tau_j) U(s)$$

alors,

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1}[X(s)] \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[(sI - A_0)^{-1}x_0\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[(sI - A_0)^{-1} \sum_{i=1}^{m} A_i \exp(-s\tau) X(s)\right] \\ &\quad + \mathcal{L}^{-1}\left[(sI - A_0)^{-1} \sum_{j=0}^{k} B_j \exp(-s\tau) U(s)\right] \end{aligned}$$

et par l'utilisation du théorème de convolution et la transformée inverse pour

$$\mathcal{L}^{-1}\left[(sI - A_0)^{-1} \sum_{i=1}^{m} A_i \exp(-s\tau) X(s)\right]$$

et pour,

$$\begin{aligned} F(s) &= (sI - A_0)^{-1} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) = \exp(A_0 t) \\ G(s) &= \sum_{i=1}^{m} A_i \exp(-s\tau) X(s) \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = g(t) = \sum_{i=1}^{m} A_i x(t - \tau) \end{aligned}$$

alors,

$$\begin{aligned} f * g &= \mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\cdot G(s)\right] = \int_0^t f(t-v)\, g(v)\, dv \\ &= \int_0^t \exp\left(A_0(t-v)\right)\cdot \sum_{i=1}^{m} A_i x(v-\tau)\, dv \end{aligned}$$

Le théorème de convolution nous permet,donc d'avoir,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[(sI - A_0)^{-1} \sum_{j=0}^{k} B_j \exp(-s\tau)\, U(s)\right]$$

On pose:

$$\begin{aligned} F(s) &= (sI - A_0)^{-1} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right] = f(t) = \exp(A_0 t) \\ G(s) &= \sum_{j=0}^{k} B_j \exp(-s\tau)\, U(s) \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left[G(s)\right] = g(t) = \sum_{j=0}^{k} B_j u(t-\tau) \end{aligned}$$

alors,

$$\begin{aligned} f * g &= \mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\cdot G(s)\right] = \int_0^t f(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau \\ &= \int_0^t \exp\left(A_0(t-v)\right)\cdot \sum_{j=0}^{k} B_j u(v-\tau)\, dv \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned} x(t) &= \exp(A_0 t)\, x_0 + \sum_{i=1}^{m} A_i \int_0^t \exp\left(A_0(t-v)\right)\cdot x(v-\tau)\, dv \\ &\quad + \sum_{j=0}^{k} B_j \int_0^t \exp\left(A_0(t-v)\right)\cdot u(v-\tau)\, dv \end{aligned}$$

On caractérise, ceci dans le théorème suivant,

Théorème 4.3.4 *Etant donné le système de forme* (4) *à faisceau régulier de condition* *initiale x_0, alors la solution de ce système est de la forme suivante :*

$$x(t) = \exp(A_0 t)\, x_0 + \sum_{i=1}^{m} A_i \int_0^t \exp(A_0(t-v)) \cdot x(v-\tau)\, dv + \sum_{j=0}^{k} B_j \int_0^t \exp(A_0(t-v)) \cdot u(v-\tau)\, dv$$

4.4 Application:

4.4.1 Réaction chimique avec recirculation

On considère un réacteur chimique où se produit la réaction

$$A \to B. \tag{1}$$

Au fur et à mesure de l'avancement de la réaction, on admet à l'entrée une solution de réactif A, dont la concentration est notée A_0. Si on note $A(t)$ la concentration en le produit A au temps t, un modèle mathématique simple s'écrit

$$A'(t) = \alpha [A_0 - A(t)] - kA(t), \tag{2}$$

où k est la constante de la réaction (1) et α un paramètre lié au débit d'admission. La transformation du réactif A en le produit B n'est pas instantanée, si bien qu'à la sortie du réacteur, on retrouve une partie du produit A, non transformée. Afin d'améliorer le rendement de la réaction, on procède à une recirculation, comme l'indique la figure suivante

Figure 1 Un réacteur chimique avec recirculation.

Le modèle (2) régissant l'évolution de $A(t)$ devient

$$A'(t) = \alpha\left[(1-\lambda) A_0 + \lambda A(t-\tau) - A(t)\right] - kA(t) \tag{3}$$

où $\lambda \in [0,1]$ désigne le taux de recirculation et τ le retard dû au transport dans la boucle de recirculation.

Lorsque τ est strictement positif, l'équation différentielle (3) ne relève pas de la théorie générale des équation différentielles ordinaires (EDO) car elle comporte le terme de retard $A(t-\tau)$ .Toutefois, on peut utiliser les résultats sur les EDO pour étudier l'équation (3) .

$$\begin{aligned} A'(t) &= \alpha\left[(1-\lambda) A_0 + \lambda A(t-\tau) - A(t)\right] - kA(t) \qquad (4) \\ &= \alpha(1-\lambda) A_0 + \alpha\lambda A(t-\tau) - \alpha A(t) - kA(t) \\ &= \alpha(1-\lambda) A_0 + \alpha\lambda A(t-\tau) - (\alpha+k) A(t) \end{aligned}$$

Nous proposerons une résolution par le biais de la transformée de Laplace.

4.4.2 Recherche de la solution:

Utilisons la transformée de Laplace à l'equation (4):

soit alors,

$$\mathcal{L}(A'(t)) = \mathcal{L}\left[\alpha(1-\lambda) A_0\right] + \alpha\lambda\mathcal{L}\left[A(t-\tau)\right] - (\alpha+k)\mathcal{L}\left[A(t)\right]$$

d'où,

$$sA(s) - a(0) = \alpha(1-\lambda) A_0 + \alpha\lambda\exp(-s\tau) A(s) - (\alpha+k) A(s)$$

on aura,

$$sA(s) + (\alpha + k)A(s) = a(0) + \alpha(1-\lambda)A_0 + \alpha\lambda\exp(-s\tau)A(s)$$

Supposons: $a(0) = a_0 \neq 0$

$$(sI + (\alpha + k))A(s) = a_0 + \alpha(1-\lambda))A_0 + \alpha\lambda\exp(-s\tau)A(s)$$

et que le faisceau est régulier i.e: $\det(sI + (\alpha + k)) \neq 0$ c-à-d $\exists(sI + (\alpha + k))^{-1}$ il s'ensuit alors,

$$A(s) = (sI + (\alpha + k))^{-1}a_0 + \alpha(1-\lambda))A_0 + (sI + (\alpha + k))^{-1}\alpha\lambda\exp(-s\tau)A(s)$$

par suite,

$$\begin{aligned} A(t) &= \mathcal{L}^{-1}[A(s)] \\ &= \mathcal{L}^{-1}(sI + (\alpha + k))^{-1}a_0] + \mathcal{L}^{-1}\left[(sI + (\alpha + k))^{-1}\alpha(1-\lambda))A_0\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[(sI + (\alpha + k))^{-1}\alpha\lambda\exp\right. \end{aligned}$$

On a à utiliser la propriété du produit de convolution de la transformée inverse pour

$$\mathcal{L}^{-1}\left[(sI + (\alpha + k))^{-1}\alpha\lambda\exp(-s\tau)A(s)\right]$$

On pose pour cela,

$$\begin{aligned} F(s) &= (sI + (\alpha + k))^{-1} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) = \exp(-(\alpha + k)t) \\ G(s) &= \alpha\lambda\exp(-s\tau)A(s) \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = g(t) = \alpha\lambda a(t-\tau) \end{aligned}$$

En conséquence,

$$\begin{aligned} f * g &= \mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\cdot G(s)\right] = \int_0^t f(t-u)\, g(u)\, du \\ &= \int_0^t \exp\left(-(\alpha+k)(t-u)\right)\alpha\lambda a(u-\tau)\, du \end{aligned}$$

On résume alors, ceci dans le théorème suivant.

Théorème 4.4.1 *Etant donné le système de forme* (4) *à faisceau régulier de condition initiale* a_0 *, alors la solution de ce système est de la forme suivante :*

$$a(t) = \exp\left(-(\alpha+k)\,t\right)a_0 + \exp\left(-(\alpha+k)\,t\right)A_0 \int_0^t \exp\left(-(\alpha+k)(t-u)\right)\cdot\alpha\lambda a(u-\tau)\, du$$

4.5 Autres approches:

4.5.1 Approche du pas à pas

I) On se donne le système suivant,

$$\dot{x} = A_0 x(t) + A_1 x(t-h) + Bu(t) \tag{1}$$

avec,

$t \geq 0,\ h \succ 0,\ x(t) \in \mathbb{R}^n,\ u(t) \in \mathbb{R}^m;\ A_o,\ A_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$x(0) = x_0$ et $x(t) = \varphi(t)$ pour $-h \leq t < 0$

Pour $t \in [0,h]$,

$$\begin{cases} \dot{x} = A_0 x(t) + A_1 x_1(t-h) + Bu(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{2}$$

et si on pose:

$$f(t) = A_1 x(t-h) + Bu(t)$$

le système devient,

$$\dot{x} = A_0 x(t) + f(t)$$

La solution de (2) sera alors,

$$x_1(t) = \exp(A_0 t) x_0 + \int_0^t \exp(A_0(t-\tau)) f(\tau) d\tau \text{ pour } 0 \leq t \leq h$$

Pour $t \in [h, 2h]$

$$\dot{x} = A_0 x(t) + A_1 x_1(t-h) + Bu(t)$$

etc.....

et nous allons vers la construction de la solution $x(t)$ pas à pas.

II) Prenons maintenant le système

$$\begin{cases} \dot{x} = A_0 x(t) + A_1 x_1(t-h) + f(t) \\ x(0) = x_0 \\ x(t) = \varphi(t), \text{ si } t \in [-h, 0] \end{cases} \tag{3}$$

Notre problème est de trouver la solution globale de (3) On cherche ce qu'on appelle solution formelle on posera pour cela, $f(t) \approxeq 0$ et $\varphi(t) \approxeq 0$ et on considère l'équation

$$\begin{cases} \dot{x} = A_0 x(t) + A_1 x(t-h) \\ x(0) = x_0 \\ x(t) \approxeq 0, \; t < 0 \end{cases} \tag{4}$$

Recherche de la solution formelle de (4)

Soit $F(t)$ une matrice telle que:

$$\begin{cases} \dot{F}(t) = A_0 F(t) + A_1 F(t-h) \\ F(0) = I \\ F(t) = 0, \; t < 0 \end{cases}$$

Alors la solution de (4) est donnée par:

$$x(t) = F(t)\, x_0$$

où $F(t) = [f_1(t), ..., f_n(t)]$, chaque colonne vérifie (4)

$F(0) = I$, soit alors $f_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots\cdots\cdot, \cdots\cdots\cdot$

vérifions le:

Pour cela on dérive et on aura

$$\begin{cases} \dot{x} = A_0 x(t) + A_1 x(t-h) \\ x(0) = F(0)\, x_0 = x_0 \end{cases}$$

La solution du problème est donnée par: l'expression suivante;

$$x(t) = F(t)\, x_0 + \int_0^t F(t-h)\, \varphi(t-h)\, dh + \int_0^t F(t-\tau)\, f(\tau)\, d\tau$$

qui se vérifie par dérivation.

4.6 Positivé des systèmes à retard

4.6.1 Système à temps continu à retard

Considérous le système multivariable à temps continu avec retard définie par:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=0}^{h} A_i\, x(t-id) + \sum_{j=0}^{k} B_j\, u(t-jd) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \qquad (4.6.1)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ sont les vecteurs d'états, d'entrées, sorties, respectivement, $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $i = 0, \cdots, h$, $B_j \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $j = 0, \cdots, q$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$ et $d \succ 0$ est le retard·

Les conditions initiales sont donneés par:

$$x_0(t) \text{ pour } t \in [-hd,\ 0] \text{ et } u_0(t) \text{ pour } t \in [-hq,\ 0]$$

La solution $x(t)$ de (4.6.1) peut être trouvé par l'utilisation du la méthode de pas ou par Laplace·

Nous poserons dans ce qui suit quelques définitions et caractérisations des systèmes positifs avec retards.

Définition 4.6.1 *Le système* (4.6.1) *est dit internement positif si pour tout* $x_0(t) \in \mathbb{R}^m_+$, $t \in [-hd, 0]$ *et* $u_0(t) \in \mathbb{R}^m_+$, $t \in [-hq, 0]$ *et toutes entrées* $u(t) \in \mathbb{R}_+$, $t \geq 0$, *alors* $x(t) \in \mathbb{R}^m_+$ *et* $y(t) \in \mathbb{R}_+$ *pour* $t \geq 0$

On note par M_n l'ensemble des matrices de Metzler, qui sont des $n\times n$ matrices réelles à coefficients positifs hors diagonales non négatifs·

Proposition 4.6.1 *Le système* (4.6.1) *est positif si et seulement si* A_0 *est une matrice de Metzler et les matrices* A_i, $i = 1, \cdots\cdot, q$; B_j, $j = 0, \cdots, q; C; D$ *ont des coefficients positifs* $A_0 \in M_n$, $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}_+$, $i = 1, \cdots, h$; $B_j \in \mathbb{R}^{n\times m}_+$, $j = 0{,}1, \cdots, q$; $C \in \mathbb{R}^{p\times n}_+$; $D \in \mathbb{R}^{p\times m}_+$·

Preuve. Pour simplifier les notations, on donnera l'essentiel de la preuve. Pour cela, on prend le cas on $h = q = 1$.

Le système devient alors,

$$\dot{x} = A_0 x(t) + A_1 x(t-d) + B_0 x(t) + B_1 x(t-d)$$

on pose cependant

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t+d) \\ . \\ . \\ . \\ x(t+kd) \end{bmatrix}, \ \bar{u}(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ u(t+d) \\ . \\ . \\ . \\ u(t+kd) \end{bmatrix}, z_0(t) = \begin{bmatrix} A_1(t-d) + B_1 u(t-d) \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix},$$

on obtient, les équations suivantes:

$$\begin{aligned} \bar{x}^{\cdot} &= \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}\bar{u}(t) + z_0 \quad t \in [0,\ d], \\ y(t) &= \bar{C}\bar{x}(t) + \bar{D}\bar{u}(t). \end{aligned}$$

Il est donc possible d'appliquer les résultats sur la positivité des systèmes standards du chapitre (2)

$\bar{A}$ est donc une matrice de Metzler, $\bar{B}$, $\bar{C}$ et $\bar{D}$ sont non négatives. ■

Chapitre 5

Stabilité des systèmes linéaires avec retard à temps continu

5.1 Stabilité asymptotique

Considérons le système linéaire à temps continu avec retard décrit par l'équation homogène

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + \sum_{i=1}^{h} A_i \; x(t-i), \; i \in \mathbb{Z}_+ \tag{5.1.1}$$

ou h est un entier positif et $A_i \in \mathbb{R}_+^{n\times n}\,(i = 0, \cdots, h)$,

on procède à un passage aux systèmes standards, pour cela, on pose,

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-1) \\ \vdots \\ \cdot \\ \cdot \\ x(t-h) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\tilde{n}},\; \tilde{n} = (h+1) \;\text{ et }\; A = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & \cdot & \cdot & \cdot & A_h \\ I_n & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & I_n & & & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\tilde{n}\times\tilde{n}} \tag{5.1.2}$$

on peut alors traonsformer le système (5.1.1) en un système de la forme:

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x}\,(t) \quad ....\,(1)$$

Une premiére définition de stabilité pour les systémes à retard est:

Définition 5.1.1 *Le système*

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x}\,(t) \tag{5.1.3}$$

positive est appelé asymptotiquement stable si sa solution

$$\bar{x} = \exp\left(At\right)\bar{x}_0$$

satisfait $\lim \bar{x}\,(t) = 0$ *pour chaque* $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}_+^{\tilde{n}}\cdot$

Une autre caractérisation est alors déduite,

Théorème 5.1.1 *Le système positif est asymptotiquement stable si et seulement si toutes les valeurs propres de la matrice* A *sont à parties réelles négatives.*

Preuve. *Une application directe du théorème* (3.6.1) *et du théorème* (3.6.2) *au système* (5.1.3) ■

5.2 Stabilité des systèmes à retards par la seconde méthode de Lyapunov

Dans cette partie, nous allons rappeler quelques résultats concernant la stabilité asymptotique des systèmes à retards en se focalisant sur l'approche temporelle liée à la seconde mèthode de Lyapunov

5.2.1 Seconde méthode de Lyapunov

La seconde méthode de Lyapunov concerne l'analyse de la stabilité interne d'un système dynamique (5.1.1). L'originalité de la méthode directe de Lyapunov consiste à étudier la convergence de l'état $x(t)$ vers l'origine à travers une fonction scalaire V de l'état. V est appelée fonction candidate de Lyapunov, qui peut être appréhendée comme une représentation énergétique du système.

Bien que la méthode soit abstraite, on conçoit naturellement qu'en "mouvement", le système possède une certaine quantité d'énergie mesurée par V et qu'à l'équilibre, en phase statique, celle-ci soit minimale. Sommairement, dans le cas des systèmes sans retard, ceci se traduit mathématiquement par les conditions :

$$\begin{array}{rrcl} - & V(x(t)) & > & 0,\ \forall t > 0,\ \forall x(t) \neq x_{equilibre}, \\ - & V(x(t)) & = & 0\ si\ x(t) = x_{equilibre} \\ - & \|x(t)\| & \to & \infty\ implique\ V(x(t)) \to \infty. \end{array}$$

Intuitivement, on comprend alors que si l'énergie totale d'un système se dissipe continuement avec le temps alors ce système tend à rejoindre sa position d'équilibre.

$$\frac{dV\left(x\left(t\right)\right)}{dt} \prec 0,\ \forall t \succ 0,\ \forall x(t) \neq x_{equilibre}, \tag{5.2.1}$$

Enfin, si la fonction candidate $V(x(t))$ vérifie le long des trajectoires du système $x(t)$ alors l'origine est un point d'équilibre asymptotiquement stable et V est une fonction de Lyapunov pour le système.

La seconde méthode de Lyapunov, ainsi énoncée, n'est pas directement applicable aux systèmes héréditaires d'état x_t. Deux extensions ont alors été développées dans le cadre des équations différentielles à retards: la méthode de Lyapunov-Krasovskii et la méthode de Lyapunov-RazumikIin.

5.3 Condition de Lyapunov

On s'intéresse à l' extension des résultats (théorème (3.4.1), chapitre 3), pour les systèmes à retards

On considère pour cela le problème suivant

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^{h} A_i \ x(t - id) + \sum_{j=0}^{k} B_j \ u(t - jd)$$

Dans cette section on va donc énoncer les conditions de Lyapunov servant à étudier la stabilité des différents systèmes avec retards. On va s'intéresser tout d'abord au système linéaire continu suivant

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + \sum_{i=1}^{h} A_i \ x(t - i), \ i \in \mathbb{Z}_+ \tag{1}$$

La polynôme caractéristique est représenté par:

$$B(s) = \det \left[Is - A_0 - \sum_{i=1}^{K} A_i \exp(s\tau_i) \right]$$

Théorème 5.3.1 *le système est asymptotiquement stable si il existe deux matrices symetriques et définies positives P_0, $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telles que*

$$A_0^T P + P A_0 + \sum_{i=1}^{K} P_i + P_0 A_i P_i^{-1} P_0 \prec 0 \tag{5.3.1}$$

alors: La fonction condidate de lyapunov est donnée par:

$$V(x) = x(t)^T P_0 x(t) + \sum_{i=1}^{K} \int_{t-\tau_i}^{t} x(s)^T P_i x(s) \, ds \tag{5.3.2}$$

et c'est la condition suffisante de la stabilité

$$W_1\left(\left|x\left(t\right)\right|\right)\leq V\left(x\right)\leq W_2\left(\left|x_t\right|\right)$$

$$\dot{V}\left(x_t\right)\leq -W_3\left(\left|x_t\right|\right)$$

On a W_1, W_2 deux fonctions vérifiant

$$W_1\left(\left|x\left(t\right)\right|\right)=\lambda_{\min}\left(P_0\right)\left|x\left(t\right)\right|^2\leq V\left(x_t\right)$$

$$V\left(x_t\right)\leq\left[\lambda_{\max}\left(P_0\right)+\sum_{i=1}^{K}\tau_i\lambda_{\max}\left(P_i\right)\right]\left|x\left(t\right)\right|^2=W_2\left(\left|x_t\right|\right)$$

et puisque,

$$V\left(x\right)=x\left(t\right)^T P_0 x\left(t\right)+\sum_{i=1}^{K}\int_{t-\tau_i}^{t}x\left(s\right)^T P_i x\left(s\right)ds$$

$$\begin{aligned}
\dot{V}\left(x\right) &= \dot{x}\left(t\right)^T P_0 x\left(t\right)+x\left(t\right)^T P_0\dot{x}\left(t\right)+\sum_{i=1}^{K}\left[x\left(t\right)^T P_i x\left(t\right)-x\left(t-\tau_i\right)^T P_i x\left(t-\tau_i\right)\right] \\
&= [A_0^T x\left(t\right)^T+\sum_{i=1}^{k}A_i^T x\left(t-\tau_i\right)^T]P_0 x\left(t\right)+x\left(t\right)^T P_0\left[A_0 x+\sum_{i=1}^{k}A_i x\left(t-\tau_i\right)\right] \\
&\quad +\sum_{i=1}^{K}x\left(t\right)^T P_i x\left(t\right)-\sum_{i=1}^{K}x\left(t-\tau_i\right)^T P_i x\left(t-\tau_i\right) \\
&= x\left(t\right)^T\left[A_0^T P_0+P_0 A_0+\sum_{i=1}^{K}P_i\right]x\left(t\right)+\sum_{i=1}^{k}x\left(t-\tau_i\right)^T A_i^T P_0 x\left(t\right) \\
&\quad +\sum_{i=1}^{k}x\left(t\right)^T P_0 A_i x\left(t-\tau_i\right)-\sum_{i=1}^{K}x\left(t-\tau_i\right)^T P_i x\left(t-\tau_i\right)
\end{aligned}$$

alors:

$$V\left(t\right)^T M V\left(t\right)\prec 0$$

Où: $V\left(t\right)^T=\left[x\left(t\right)^T, x\left(t-\tau_1\right)^T,\cdots\cdots, x\left(t-\tau_k\right)^T\right]$

et: $V(t) = [x(t), x(t-\tau_1), \cdots\cdots, x(t-\tau_k)]$

$$\text{et: } M = \begin{bmatrix} A_0^T P + P A_0 + \sum_{i=1}^{K} P_i & P_0 A_1 & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & P_0 A_K \\ A_1^T P_0 & -P_1 & & 0 \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \quad \cdot & \cdot \\ \cdot & & \qquad \cdot & \cdot \\ A_K^T P_0 & 0 & & -P_K \end{bmatrix}$$

Utilisant un Théorème de base sur les matrices partitionnées symmétriques Kreinller et Jamesou (1572) out constaté que pour les matrices U_{11}, U_{12}, U_{22} avec:

$$\begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{vmatrix} \prec 0$$

$$\Rightarrow U_{11} \prec 0 \; et \; U_{11} - U_{12} U_{22}^{-1} U_{12}^T \prec 0$$

On applique à la matrice M et on aura,

$$\Rightarrow A_0^T P + P A_0 + \sum_{i=1}^{K} P_i \prec 0$$

et

$$A_0^T P + P A_0 + \sum_{i=1}^{K} P_i + P_0 A_1 P_1^{-1} A_0^T P_0 \prec 0$$

Donc il existe une constante C_3 Telle que:

$$\dot{V}(x_t) \leq -C_3(|x_t|)$$

CONCLUSION GÉNÉRALE

Ce mémoire est balayé rapidement sur les concepts de base de l'automatique des systèmes linéaires dans l'espace d'état.

L'intérêt est porté sur une classe très spéciale qui est la classe des systèmes linéaires avec retard. Trois grands systèmes ont été abordés.

1. Les systèmes différentiels à retard temporel dans la commande;
2. Les système différentiel à retard temporel dans l'état;
3. Les systèmes différentiels à retard temporel dans l'état et la commande.

Nous avons mis en évidence une méthode de résolution différente de celles existante dans la lifférature. L'application de la transformée de Laplace a été cependant utilisée. L'approche peut être adapté au cas des systèmes discréts, avec retards dans ces trois catégories.

La classe des systèmes positifs est de même étudiée aux cas des systèmes à retards, Pour enfin établir le certificat de garantie de la stabilité de cette classe de systèmes.

Les tests de stabilité par les valeurs propres et à la Lyapunov ont été cependant dérivés.

La classe des systèmes à retards positifs a été de même initiée

Bibliographie

[1] Senret A. Commande et observation des sysèmes à retards variables:Théorie et applications Ph.D-Thesiz USTL (2006) .

[2] Jianyong Y.,Shimin Y. and Haiqing W survey on the per formance analyez of networked control systèms, Man and cybernetics 6,5068-5073.(2004)

[3] Senamer 0, sur la commandabilité et le décupage des systèmes linèaires à retards. Thése de doctorat, Labratire d'Automatique (1994).

[4] Hespanha, J. Naghsh tasuzi; and Xu.Y. A survey of recent result in networked control systems Proceedings of the IEEE, 95(1) ,138-162 (2007).

[5] P. de Larminat."Automatique, commande des systèmes linéaires". Hermès, Paris, France, traité des nouvelles technologies edition, 1993.

[6] D.BOUAGADA "Systèmes Différentiels Singuliers Positifs et LMIs" UCL-Blgique-2007 Thèse de doctorat

[7] A. Doneddu "Polynôme et Algébre linéaire" Tome 2 Vuibert.

[8] D.BOUAGADA "Cours Théorie des Matrices" 2012/2013

[9] Jan H. Van Schuppen, Control and system theory of positive system, 2007.

[10] L.Farina, S.Rinaldi, Positive linear systems: Theory and Applications, Wiley, New York, 200.

[11] Positive 1D and 2D systems 431 pages Springer Verlag 2002.

[12] D. Hinrichsen, A.J.Pritchard,Mathematical systems theory I, stability and robustness, 805 pages,(2005).

[13] P. Van Dooren "Theorie des Matrices" 2009.

[14] D.BOUAGADA "Cours Systèmes et Représentations d'états" 2011/2012