

Université Abd elhamid Ibn Badis

Faculté des Sciences et sciences exactes

Mémoire de Master en Mathématiques

Présenté à

L'Université de Mostaganem

Présenté

Par

HADJ – BENHALIMA SOMIA

LA FORMULE SOMMATOIRE DE POISSON DANS $L^1(\mathbb{R})$
ET SES APPLICATIONS

Soutenue le 22. 06. 2014

Devant le jury :

Encadreur : SADEK GALA

Professeur, Univ. de Mostaganem

Examineur : SIDI MOHAMMED BAHRI

M.C.A., Univ. de Mostaganem

Examineur : ZOUBIR DAHMANI

M.C.A., Univ. de Mostaganem

Table des matières

Remerciements	3
Dédicace	4
Résumé	5
1 Introduction	6
1.1 Transformation de Fourier des fonctions intégrables	6
1.2 Propriétés relatives à la dérivation.	7
2 Formule sommatoire de Poisson	8
3 Applications	15
3.1 Développement eulérien de $\coth$	15
3.2 Fonction θ de Jacobi	17
Conclusion	19
Bibliographie	20

Remerciements

Je tiens à remercier Monsieur SADEK GALA Professeur à l'université de Mostaganem qui a accepté la direction de ce mémoire et a mis à mes dispositions tout les moyens nécessaires ainsi que ses conseils et sa présence pendant la réalisation de ce travail.

Je remercie vivement Monsieur Sidi Mohammed Bahri M.C.A. à l'université de Mostaganem pour l'honneur qu'il m'a fait d'accepter de présider mon jury.

Je tiens aussi à remercier Monsieur Zoubir Dahmani M.C.A. à l'université de Mostaganem qui a voulu s'intéresser à ce travail et me fait l'honneur d'être examinateur.

Dédicace

Je dédie ce travail à
Mes chères parents
Mes soeurs et mes frères et mes amies

Résumé

On définit la transformée de Fourier $\widehat{f}$ d'une fonction intégrable sur la droite réelle avec la normalisation suivante :

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\omega} dx, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

La formule sommatoire de Poisson s'écrit alors :

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(m) = 2\pi \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(2\pi m).$$

Nous allons discuter dans ce mémoire un critère simple de validité de cette formule et d'en donner certaines applications.

Chapitre 1

Introduction

L'objectif de ce travail est d'établir sous quelles conditions la formule sommatoire de Poisson est vraie et d'en étudier certaines applications. C'est une identité entre deux sommes infinies, la première construite avec une fonction f , la seconde avec sa transformée de Fourier $\widehat{f}$. La formule a été découverte par Siméon Denis Poisson. Elle est très importante dans plusieurs domaines des mathématiques, dont la théorie des nombres, l'analyse harmonique, et la géométrie riemannienne.

Les fonctions considérées dans ce mémoire sont toutes définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. $L^1(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$, où on identifie les fonctions égales presque partout. Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, on pose

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx.$$

Nous allons discuter dans ce mémoire un critère simple de validité de la formule sommatoire de Poisson :

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(m) = 2\pi \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(2\pi m). \quad (1.1)$$

En effet, sous la seule hypothèse " $f \in L^1(\mathbb{R})$ ", la formule (1.1) ne peut avoir de sens, puisqu'elle fait appel à des valeurs ponctuelles de f . L'hypothèse " $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ " (assurant que f et $\widehat{f}$ sont continues) ne suffit pas plus à assurer la validité de la formule (1.1). On trouve dans un exercice de Bourbaki [2] un exemple où les deux séries

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(m) \quad \text{et} \quad \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(2\pi m)$$

sont divergentes quoique f et $\widehat{f}$ sont intégrables, tandis que Y. Katznelson [4, 5] a donné un exemple pour lequel

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(m) \quad \text{et} \quad \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(2\pi m)$$

sont convergentes mais de sommes distinctes.

1.1 Transformation de Fourier des fonctions intégrables

La transformation de Fourier est un outil important en sciences de l'ingénieur. En plus d'être linéaire, elle vérifie de nombreuses propriétés. Après avoir introduit les propriétés

fondamentales de la transformée de Fourier des fonctions de $L^1(\mathbb{R})$, nous verrons comment la transformée de Fourier permet l'étude de la convergence des séries. Cette étude débouche naturellement sur l'exemple le plus célèbre de l'analyse harmonique. Il s'agit de la formule sommatoire de Poisson. Pour cette partie, nous renvoyons à [1, 6].

Pour démontrer la formule sommatoire de Poisson, nous commencerons par introduire la définition suivante.

Définition 1.1 Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On appelle transformée de Fourier de f la fonction, notée $\widehat{f}$ ou $\mathcal{F}(f)$, définie pour $\omega \in \mathbb{R}$ par

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\omega} dx.$$

Remarque 1.1 Cette intégrale a un sens puisqu'elle porte sur le produit d'une fonction intégrable et d'une fonction continue bornée, en fait de module 1. Il est clair que la transformation de Fourier est une application linéaire.

Remarque 1.2 Par le théorème de Riemann-Lebesgue, on sait déjà que $\widehat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$, tend vers 0 à l'infini et vérifie

$$\|\widehat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

En général, la transformée de Fourier d'une fonction intégrable n'est pas intégrable.

Si l'on veut exploiter pleinement les bonnes propriétés de la transformée de Fourier pour résoudre des équations de convolution ou des équations différentielles, il importe de savoir l'inverser.

Théorème 1.1 (Inversion de Fourier [6]) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. On a alors la relation

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\omega) e^{ix\omega} d\omega$$

en tout point x où f est continue.

Preuve. Pour la démonstration de ce théorème, nous renvoyons à [6]. ■

1.2 Propriétés relatives à la dérivation.

Proposition 1.1 Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

a) Si $x \mapsto x^k f(x)$ aussi est intégrable, alors $\widehat{f}$ admet des dérivées continues jusqu'à l'ordre k inclus, données par

$$\widehat{f}^{(q)} = (-i)^q \mathcal{F}(x^q f(x)), \quad q \leq k.$$

b) Inversement, si f admet des dérivées continues et intégrables jusqu'à l'ordre k inclus, leurs transformées de Fourier sont données par

$$\widehat{f^{(q)}}(\omega) = (i\omega)^q \widehat{f}(\omega), \quad q \leq k.$$

Preuve. Pour la démonstration de cette proposition, nous renvoyons à [6]. ■

Corollaire 1.1 Soit f une fonction telle que $(1 + |x|^k)f(x)$ soit sommable. Alors $\widehat{f}$ est de classe C^k , $\forall k \in \mathbb{N}$.

Chapitre 2

Formule sommatoire de Poisson

Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, on peut donner un sens à la somme des valeurs de f aux points $2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$, à celle des valeurs de $\hat{f}$ aux points m , $m \in \mathbb{Z}$, et ces deux sommes ne diffèrent que par un facteur $m \in \mathbb{Z}$. De façon plus précise, on veut démontrer le théorème suivant.

Théorème 2.1 (Formule sommatoire de Poisson) *Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe un réel $\alpha > 1$ tel que*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} (1 + |x|)^\alpha |f(x)| < \infty.$$

Si

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(m)| < \infty,$$

alors, on a

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{f}(m) = 2\pi \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(2\pi m). \quad (2.1)$$

Avant de démontrer ce théorème faisons quelques commentaires.

Remarque 2.1 $\hat{f}$ est bien définie car $f \in L^1(\mathbb{R})$ en vertu de

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt \leq M \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1 + |t|)^\alpha} dt < \infty.$$

Remarque 2.2 Le théorème de Beppo-Levi ou de la convergence monotone nous fournit le résultat suivant :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(x + 2\pi m) \right| dx &\leq \int_0^{2\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} |f(x + 2\pi m)| dx = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} |f(x + 2\pi m)| dx \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{2\pi m}^{2\pi(m+1)} |f(t)| dt = \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt < \infty, \end{aligned}$$

ceci implique que

$$\varphi(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(x + 2\pi m) \in L^1([0, 2\pi]),$$

et en particulier, φ est absolument convergente sur $[0, 2\pi]$. Ceci entraîne que φ est convergente absolument sur $\mathbb{R}$.

Remarque 2.3 Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $m \in \mathbb{Z}$ tel que $2\pi m \neq -x$, on a

$$|f(x + 2\pi m)| \leq \frac{M}{(1 + |x + 2\pi m|)^\alpha}.$$

Puisque $\alpha > 1$, les séries numériques de terme généraux respectifs

$$\frac{M}{(1 + |x + 2\pi m|)^\alpha}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad 2\pi m \neq -x,$$

et

$$\frac{M}{(1 + |x - 2\pi m|)^\alpha}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad 2\pi m \neq x,$$

sont convergentes. De plus, on a

$$\begin{aligned} \left| \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(x + 2\pi m) \right| &\leq \sum_{m \in \mathbb{Z}} |f(x + 2\pi m)| \leq \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{M}{(1 + |x + 2\pi m|)^\alpha} \\ &\leq M \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1 + |x + 2\pi m|)^\alpha} dx < \infty. \end{aligned}$$

On en déduit que chacune des deux séries

$$\sum_{m \geq 0} f(x + 2\pi m) \quad \text{et} \quad \sum_{m \geq 0} f(x - 2\pi m)$$

sont absolument convergentes et donc convergentes. On en déduit que φ existe.

La notion suivante nous sera particulièrement utile [3].

Définition 2.1 (Convergence normale) Soit $(\varphi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On dit que la série de fonctions $\sum_{m \in \mathbb{N}} \varphi_m$ converge normalement sur I lorsqu'il existe une suite $(a_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de nombres réels positifs tels que

- (i) Pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\|\varphi_m\|_\infty \leq a_m$,
- (ii) la série numérique $\sum_{m \in \mathbb{N}} a_m$ converge.

Nous ferons appel au lemme suivant.

Lemme 2.1 Soit $(\varphi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies et continue sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Si la série de fonctions $\sum_{m \in \mathbb{N}} \varphi_m$ converge uniformément sur I , alors la fonction somme est continue sur I .

Preuve. (Voir [3] pour une démonstration de ce résultat). ■

Le lien entre les séries de fonctions et les intégrales est décrit par le lemme suivant (démontré dans [3]).

Lemme 2.2 Soit $(\varphi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions intégrables sur l'intervalle $I = [a, b]$. Si la série de fonctions $\sum_{m \in \mathbb{N}} \varphi_m$ converge uniformément sur I vers sa somme φ , alors

(i) la série numérique de terme général

$$\int_a^b \varphi_m(x) dx \quad \text{converge,}$$

(ii) la fonction φ est intégrable sur I et

$$\int_a^b \sum_{m \in \mathbb{N}} \varphi_m(x) dx = \sum_{m \in \mathbb{N}} \int_a^b \varphi_m(x) dx.$$

Enfin, nous concluons cette section en rappelant sans démonstration un résultat fondamental de Heine.

Lemme 2.3 Soit $g : K \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue où K un compact de $\mathbb{R}$. Alors g est bornée et atteint ses bornes. En d'autres termes, il existe η et δ dans K tels que

$$g(\eta) = \inf_{x \in K} g(x) \quad \text{et} \quad g(\delta) = \sup_{x \in K} g(x).$$

Introduisons, pour $m \in \mathbb{Z}$, l'application

$$\begin{aligned} \varphi_m &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ x &\mapsto \varphi_m(x) = f(x + 2\pi m) \end{aligned}$$

qui est continue, par continuité de l'application f .

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 2.1.

Preuve. On va commencer par démontrer que la série $\sum_{m \in \mathbb{Z}} \varphi_m(x)$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{R}$. En effet, soit K un compact de $\mathbb{R}$. Alors, il existe un nombre réel $A > 0$ (fixé) tel que $K \subset [-A, A]$. Soit $x \in K$. Alors $x \in [-A, A]$ et soit $m \in \mathbb{Z}$ tel que $|m| \geq A$. On a donc

$$|x + 2\pi m| = |2\pi m - (-x)| \geq 2\pi |m| - |x| \geq (2\pi - 1) |m| \geq |m|.$$

On a alors

$$\begin{aligned} |\varphi_m(x)| &= |f(x + 2\pi m)| \leq M(1 + |x + 2\pi m|)^{-\alpha} \\ &\leq M(1 + |m|)^{-\alpha}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\varphi_m(x)| &\leq \sum_{|m| < A} |\varphi_m(x)| + \sum_{|m| \geq A} |\varphi_m(x)| \\ &\leq \kappa + \sum_{|m| \geq A} M(1 + |m|)^{-\alpha}, \end{aligned}$$

où on a noté

$$\kappa = \max_{x \in K} \sum_{|m| < A} |\varphi_m(x)| < \infty.$$

On remarque que κ est bien défini car l'application $x \mapsto \sum_{|m| < A} |\varphi_m(x)|$ est continue et atteint son maximum sur le compact K . De plus,

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} (1 + |m|)^{-\alpha} < \infty \quad \text{car } \alpha > 1,$$

ce qui garantit la convergence normale de la série de fonctions $\sum_{m \in \mathbb{Z}} \varphi_m(x)$ sur le compact K de $\mathbb{R}$, et donc la continuité de $\varphi = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \varphi_m$, les applications φ_m étant continues. On va montrer maintenant que la fonction φ est 2π -périodique. En effet, $\forall x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \varphi(x + 2\pi) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \varphi_m(x + 2\pi) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(x + 2\pi + 2\pi m) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x + 2\pi k) = \varphi(x), \end{aligned}$$

et donc $\varphi \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$. Donc, on peut écrire ses coefficients de Fourier et on montre que pour tout $m \in \mathbb{Z}$, les coefficients de Fourier sont définis par la relation

$$c_m(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \widehat{f}(m).$$

En effet, d'après les hypothèses, la fonction

$$x \mapsto \varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x + 2\pi k)$$

est définie et continue en tout point $x \in \mathbb{R}$, et elle est 2π -périodique. Ses coefficients de Fourier sont définies par

$$c_m(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x) e^{-imx} dx, \quad \forall m \in \mathbb{Z}.$$

Comme $[0, 2\pi]$ est compact, la convergence normale de $\sum_{m \in \mathbb{Z}} \varphi_m$ sur tout compact nous permet d'appliquer le théorème de permutation des séries et intégrales de Lebesgue, ce qui donne

$$\begin{aligned} c_m(\varphi) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x + 2\pi k) e^{-imx} dx = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} f(x + 2\pi k) e^{-imx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} f(t) e^{-im(t-2\pi k)} dt. \end{aligned}$$

Comme $e^{i2\pi km} = 1$, il vient

$$\begin{aligned} c_m(\varphi) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} f(t) e^{-imt} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-imt} dt = \frac{1}{2\pi} \widehat{f}(m). \end{aligned}$$

La convergence normale de $\sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m(\varphi) e_m$ où $e_m(x) = e^{imx}$ et la continuité de φ assure que φ est développable en série de Fourier, et donc

$$\varphi(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m(\varphi) e^{imx} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(x + 2\pi m)$$

et en spécialisant en $x = 0$, on obtient

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} f(2\pi m) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(m) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-imt} dt.$$

Le théorème est démontré. ■

Une conséquence

Corollaire 2.1 *Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ tel que la formule sommatoire de Poisson est vraie, et si $\delta > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $\forall x \in \mathbb{R}$,*

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} f(x + m\delta) e^{-im\alpha} = \frac{1}{\delta} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \widehat{f}\left(\frac{2\pi m + \alpha}{\delta}\right) e^{ix\left(\frac{2\pi m + \alpha}{\delta}\right)}.$$

En particulier, on pose encore $\alpha = 0$ et $\delta = 2\pi$ et l'on a

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} f(x + 2\pi m) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(m) e^{imx}.$$

Remarque 2.4 *Cette identité doit être satisfaite pour tout $x, \alpha \in \mathbb{R}$ et tout $\delta > 0$. En particulier, pour $x = \alpha = 0$ et $\delta = 1$, on obtient*

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} f(m) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(2\pi m). \quad (2.2)$$

Remarque 2.5 *Remarquons que la formule sommatoire de Poisson réalise un lien entre les séries de Fourier et la transformée de Fourier. De plus, observons que si $m = 0$, alors*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-imt} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt.$$

En général, on s'attend à ce que

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} f(2\pi m) \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt,$$

donc on considère le terme avec $m = 0$ comme le terme principal et tous les autres termes comme une erreur, qui devraient être petits à cause de l'oscillation de e^{-imt} pour $m \neq 0$.

On peut alors démontrer la relation suivante.

Corollaire 2.2 (sommes de Riemann) Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ à support compact. Pour tout entier naturel $k > 1$, il existe une constante $C_k > 0$ telle que $\forall N \geq 1$, on ait

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt - \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{N} f\left(\frac{m}{N}\right) \right| \leq \frac{C_k}{N^k}.$$

Preuve. Pour démontrer ce résultat, on désigne par g la fonction définie par $g(x) = f\left(\frac{x}{N}\right)$. Il est clair que g vérifie les hypothèses du théorème 2.1 et d'après (2.2), on a

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} g(m) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \widehat{g}(2\pi m). \quad (2.3)$$

On calcule alors si $m \in \mathbb{Z}$, $\widehat{g}(2\pi m)$ comme

$$\begin{aligned} \widehat{g}(2\pi m) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-i(2\pi m)t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{t}{N}\right) e^{-i(2\pi m)t} dt \\ &= N \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{-i(2\pi mN)s} ds \\ &= N \widehat{f}(2\pi mN), \end{aligned}$$

et donc en particulier pour $m = 0$, on écrit

$$\widehat{g}(0) = N \widehat{f}(0) = N \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt.$$

D'où, d'après (2.3), on obtient

$$\begin{aligned}
\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt - \frac{1}{N} \sum_{m \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{m}{N}\right) \right| &= \frac{1}{N} \left| N \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt - \sum_{m \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{m}{N}\right) \right| \\
&= \frac{1}{N} \left| \widehat{g}(0) - \sum_{m \in \mathbb{Z}} g(m) \right| \\
&= \frac{1}{N} \left| \widehat{g}(0) - \sum_{m \in \mathbb{Z}} \widehat{g}(2\pi m) \right| \\
&= \frac{1}{N} \left| \sum_{m \in \mathbb{Z}^*} \widehat{g}(2\pi m) \right| \\
&\leq \frac{1}{N} \sum_{m \in \mathbb{Z}^*} |\widehat{g}(2\pi m)| \\
&= \sum_{m \in \mathbb{Z}^*} \left| \widehat{f}(2\pi m N) \right|.
\end{aligned}$$

En utilisant le fait que $f \in C^k(\mathbb{R})$ pour tout $k > 1$ et est à support compact, on a $\forall x \in \mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned}
\left| \widehat{f}(x) \right| &= \left| x^{-k} \widehat{f^{(k)}}(x) \right| \leq |x|^{-k} \left\| \widehat{f^{(k)}} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \\
&\leq |x|^{-k} \left\| f^{(k)} \right\|_{L^1(\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

En particulier, pour $x = 2\pi m N$, cette dernière majoration donne que

$$\begin{aligned}
\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt - \frac{1}{N} \sum_{m \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{m}{N}\right) \right| &\leq \sum_{m \in \mathbb{Z}^*} |2\pi m N|^{-k} \left\| f^{(k)} \right\|_{L^1(\mathbb{R})} \\
&= \frac{\left\| f^{(k)} \right\|_{L^1(\mathbb{R})}}{(2\pi N)^k} \sum_{m \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{|m|^k} \\
&= \frac{2 \left\| f^{(k)} \right\|_{L^1(\mathbb{R})}}{(2\pi N)^k} \sum_{m \geq 1} \frac{1}{m^k} \\
&= \frac{C_k}{N^k}.
\end{aligned}$$

Le corollaire est donc démontré. ■

Chapitre 3

Applications

3.1 Développement eulérien de $\coth$

Proposition 3.1 (Développement eulérien de $\coth$) *Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, on a*

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{a^2 + m^2} = \frac{\pi}{a} \coth(\pi a).$$

Remarque 3.1 *Pour $a \in \mathbb{R}_+$, la fonction $a \mapsto \sum_{m \geq 1} \frac{1}{a^2 + m^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, comme somme d'une série normalement convergente de fonctions continues.*

Preuve. Soit $a > 0$. Considérons la fonction $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\theta(x) = \frac{a}{a^2 + x^2}$. Il est clair que θ est intégrable sur $\mathbb{R}$, puisque

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |\theta(t)| dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{a}{a^2 + t^2} \right| dt = \frac{2}{a} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{t}{a}\right)^2} dt \\ &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + u^2} du = \pi < \infty. \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \widehat{\theta}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{a^2 + t^2} e^{-i\omega t} dt \\ &= a \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2 + t^2} \cos(\omega t) dt - ia \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2 + t^2} \sin(\omega t) dt \\ &= \pi e^{-a|\omega|}. \end{aligned}$$

On vérifie facilement que

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\theta}(2\pi m) \right| = \pi \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-2\pi a|m|} = \pi \left(1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} e^{-2\pi a m} \right) < \infty$$

car est une série géométrique de raison $q = e^{-2\pi a}$. Comme $a > 0$, il vient que $|q| < 1$ et la série géométrique converge. Dans ce cas,

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-2\pi a|m|} = 1 + 2 \frac{e^{-2\pi a}}{1 - e^{-2\pi a}} = \frac{1 + e^{-2\pi a}}{1 - e^{-2\pi a}} = \coth(\pi a).$$

La condition sur la fonction $\theta(x)$ est aussi facile à vérifier car : pour $x \neq 0$, on a

$$|\theta(x)| \leq \frac{a}{x^2}.$$

Par ailleurs, la formule sommatoire de Poisson donne que

$$\begin{aligned} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{a^2 + m^2} &= \frac{\pi}{a} \frac{1 + e^{-2\pi a}}{1 - e^{-2\pi a}} = \frac{\pi}{a} \left(\frac{2 - 1 + e^{-2\pi a}}{1 - e^{-2\pi a}} \right) \\ &= \frac{\pi}{a} \left(\frac{2}{1 - e^{-2\pi a}} - 1 \right) \\ &= \frac{\pi}{a} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-2\pi a|m|} \end{aligned}$$

Ceci implique que pour tout $a > 0$, on a

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{a^2 + m^2} = \frac{\pi}{2a} \frac{1 + e^{-2\pi a}}{1 - e^{-2\pi a}} - \frac{1}{2a^2}.$$

Faisons tendre $a \rightarrow 0$, on obtient par application de formule de l'hôpital (3 fois)

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} = \lim_{a \rightarrow 0} \left[\frac{\pi}{2a} \frac{1 + e^{-2\pi a}}{1 - e^{-2\pi a}} - \frac{1}{2a^2} \right] = \frac{\pi^2}{6}.$$

■

Remarque 3.2 *A l'aide d'un développement limité à l'ordre trois de la fonction $\coth$, on obtient facilement*

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\pi}{2a} \coth(\pi a) - \frac{1}{2a^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Remarque 3.3 *On pourrait l'écrire de manière plus symétrique sous la forme*

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{a + im} = \pi \coth(\pi a),$$

mais la série n'est pas convergente, et l'on doit sommer symétriquement en interprétant $\sum_{m \in \mathbb{Z}}$

par $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{|m| \leq N}$.

3.2 Fonction θ de Jacobi

On va établir une équation fonctionnelle pour la fonction de Jacobi. On définit la fonction thêta de Jacobi par

$$\begin{aligned}\theta &: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \theta(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\pi m^2 x}.\end{aligned}$$

Proposition 3.2 (Fonction θ de Jacobi) *Pour $x > 0$, on a la relation suivante*

$$\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \theta\left(\frac{1}{x}\right).$$

Preuve. Considérons pour cela la fonction périodique f définie par

$$f(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\pi(m + \frac{z}{2\pi})^2 x}$$

et ses coefficients de Fourier sont

$$c_m(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-\pi(k + \frac{z}{2\pi})^2 x} e^{-imz} dz.$$

Mais pour chaque $x > 0$ fixé, la série de fonction en z est uniformément convergente, donc on peut intervertir la sommation et l'intégrale on obtient

$$c_m(f) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} e^{-\pi(k + \frac{z}{2\pi})^2 x - imz} dz.$$

En faisant le changement de variable $u = k + \frac{z}{2\pi}$, on a

$$\begin{aligned}c_m(f) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_k^{k+1} e^{-\pi u^2 x - 2\pi i m(u-k)} du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi u^2 x - 2\pi i m u} du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x [(u + i\frac{m}{x})^2 - (i\frac{m}{x})^2]} du = e^{-\pi \frac{m^2}{x}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x (u + i\frac{m}{x})^2} du \\ &= e^{-\pi \frac{m^2}{x}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x t^2} dt \quad \text{avec } t = u + i\frac{m}{x} \\ &= e^{-\pi \frac{m^2}{x}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\sqrt{\pi x} t)^2} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi x}} e^{-\pi \frac{m^2}{x}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy \quad \text{avec } y = \sqrt{\pi x} t \\ &= \frac{e^{-\pi \frac{m^2}{x}}}{\sqrt{x}} \quad \text{car } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}.\end{aligned}$$

D'après la formule sommatoire de Poisson, on en déduit

$$f(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m(f) e^{imz} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\pi \frac{m^2}{x}} e^{imz}.$$

Prenons $z = 0$, on obtient

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\pi m^2 x} = f(0) = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\pi \frac{m^2}{x}},$$

i.e. à écrire

$$\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \theta\left(\frac{1}{x}\right), \quad \forall x > 0.$$

■

Conclusion

En conclusion, nous voyons que nous avons obtenu un critère presque optimal de validité pour la formule sommatoire de Poisson à l'aide d'hypothèses de taille sur f et $\widehat{f}$.

Bibliographie

- [1] M.J. Lighthill, Introduction to Fourier Analysis and Generalized Functions, pp. 67–71.
- [2] N. Bourbaki, Théories spectrales : Chapitres II, Hermann, Paris 1967.
- [3] X. Gourdon. Analyse (2e édition) . Ellipses, 2008.
- [4] Y. Katznelson, Une remarque concernant la formule de Poisson, Studia Math. (1967) 29, 107-108.
- [5] Y. Katznelson, An introduction to harmonic analysis, Wiley, New York, 1968.
- [6] C. Gasquet et P.Witomski, Analyse de Fourier et applications. Filtrage. Calcul numérique. Ondelettes. Masson, 1990.