REPUBLIC ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Abdelhamid Ibn Badis - Mostaganem

Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique

Le simplifié d'algèbre linéaire

Prof. Berrabah BENDOUKHA

Ce polycopié a été doublement expertisé et validé par décision N° 86/FSEI/CSF/2025 du conseil scientifique de la Faculté des Sciences Exactes et Informatique de l'UMAB

FSEI

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE

0.1 Introduction

Du point de vue contenu, le présent manuscrit couvre le programme officiel d'algèbre linéaire (Algèbre 2) pour les étudiants de première année du domaine "Mathématiques et Informatique". Sur la base d'une expérience de plus années d'enseignement de cette matière, j'ai jugé plus profitable pour l'étudiant de modifier l'ordre officiel des chapitres. Ainsi, les trois premiers chapitres sont consacrés au calcul matriciel, le calcul des déterminants, et la résolution des systèmes linéaires d'équations. Après cela, viennent les chapitres classique "Espaces vectoriels, Applications linéaires et matrices associées". Parmi les avantages (de mon point de vue) de cette nouvelle disposition, on peut en particulier citer :
1. L'étude de la dépendance et l'indépendance linéaire dans les espaces vectoriels se ramène toujours à la résolution de systèmes linéaires dont l'approche matricielle est une méthode pertinente et efficace.
2. Cette nouvelle disposition permet à l'étudiant d'acquérir certains automatismes qui lui permettront d'entamer avec plus d'aisance la partie relative à la liaison "Applications lunéaire - matrices".

Les concepts et résultats fondamentaux sont clairement énoncés et illustrés par des exemples choisis aussi simples que possible afin de faciliter l'assimilation. Chaque chapitre contient à sa fin une série d'exercices corrigés afin de permettre la consolidation des connaissances acquises. Le lecteur du présent manuscrit rencontrera de temps à autre des exprssions du type " Il est clair que, Il est facile de vérifier que, ... Dans ces situations, je l'invite (avec insistance) de s'assurer lui meme qu'en effet, les faits cités sont ou born évidents ou bien ont déjà traités dans les chapitres et sections précédentes. Cela ne peut que consolider ses connaissances ainsi que leur maitrise.

Lors de la conception de cet ouvrage, ma préoccupation principale était rendre l'étudiant capable de :
a) Résoudre les systèmes linéaires à l'aide des matrices, en particulier les systèmes de Crammer et autres s'y rapportant.
b) Reconnaitre une base, la construire soit par complétion, soit par extraction.
c) Reconnaitre les applications linéaires à partir de leurs expressions.
d) Partir des applications linéaires pour arriver aux matrices et inversement.

Table des matières

Chapitre 1

Calcul matriciel

Dans ce chapitre et tout au long du manuscrit, $\mathbb{K} = (\mathbb{K}, +, .)$ est un corps commutatif. $0_{\mathbb{K}}$ son élément neutre pour l'addition (zéro), $\mathbb{K}$ et $1_{\mathbb{K}}$ son élément neutre pour la multiplication (unité). De plus, si x est un élément de $\mathbb{K}$ alors, $-x$ désignera son symétrique pour la loi $+$. L'inverse de tout $x \neq 0_{\mathbb{K}}$ sera noté x^{-1} or $\frac{1}{x}$.

1.1 Définitions générales et exemples

.

Définition 1.1.1. *Une matrice $n \times m$ à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$ est un tableau rectangulaire de la forme :*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \quad , \ a_{ij} \in \mathbb{K}, \quad (i,j) \in \{1, \ ..., n\} \times \{1, \ ..., m\}. \quad (1.1.1)$$

1. Les scalaires a_{ij} sont appelés "**éléments**" ou "**coefficients**" de la matrice.
2. L'éléments a_{ij} est l'intersection de la ligne i avec la colonne j.
3. L'ensemble des matrices $n \times m$ with elements in $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}^{n \times m}$.
4. Si A est un élément de $\mathbb{K}^{n \times m}$, on écrit $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n,m}$.
5. Si $n = m$, on dit que A est une matrice carrée et les scalaires $a_{ii}, i = 1, ..., n$ sont appelés éléments diagonaux de A.
6. Deux matrices $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n,m}$ and $B = (b_{ij})_{i,j=1}^{n,m}$ sont égales si,

$$a_{ij} = b_{ij}, \quad \forall (i,j) \in \{1, \ ..., n\} \times \{1, \ ..., m\}.$$

Définition 1.1.2. *La matrice nulle de* $\mathbb{K}^{n\times m}$ *est la matrice ayant tous ses éléments égaux à* $0_{\mathbb{K}}$. *On la note* $\mathcal{O}_{\mathbb{K}^{n\times m}}$:

$$\mathcal{O}_{\mathbb{K}^{n\times m}} = \begin{pmatrix} 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} \end{pmatrix}. \tag{1.1.2}$$

Définition 1.1.3. *La matrice unité d'ordre* n *est la matrice* $I_n \in \mathbb{K}^{n\times n}$ *vérifiant les conditions : Chaque élément diagonal est égal à* $1_{\mathbb{K}}$ *et tous les autres sont égaux à* $0_{\mathbb{K}}$:

$$I_1 = (1_{\mathbb{K}}), \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} \\ 0_{\mathbb{K}} & 1_{\mathbb{K}} \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} \\ 0_{\mathbb{K}} & 1_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 1_{\mathbb{K}} \end{pmatrix}, \quad \cdots$$

Définition 1.1.4. *Une matrice carrée* $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ *est dite triangulaire supérieure si,*

$$1 \leq j \prec i \leq n \Longrightarrow a_{ij} = 0_{\mathbb{K}},$$

c'est à dire que tous les éléments sous la diagonale sont égaux à $0_{\mathbb{K}}$.
Elle est dite triangulaire inférieure si,

$$1 \leq i \prec j \leq n \Longrightarrow a_{ij} = 0_{\mathbb{K}},$$

c'est à dire que tous les éléments au dessus la diagonale sont égaux à $0_{\mathbb{K}}$.

Exemple 1.1.5. *La matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

est triangulaire inférieure.
La matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est triangulaire supérieure.

Définition 1.1.6. *Une matrice carrée est dite diagonale si elle est triangulaire supérieure et triangulaire inférieure en même temps. En d'autres termes, tous les éléments non diagonaux sont égaux à* $0_{\mathbb{K}}$.

Exemples 1.1.7. *(i) La matrice carrée nulle et la matrice unité sont diagonales.*

(ii) La matrice A ci-dessous est diagonale :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.2 Operations sur les matrices

1.2.1 Somme de matrices

Définition 1.2.1. *Soit* $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n,m}$ *et* $B = (b_{ij})_{i,j=1}^{n,m}$ *deux éléments de* $\mathbb{K}^{n\times m}$. *La somme de A et B est la matrice notée* $A + B = (c_{ij})_{i,j=1}^{n,m}$ *et vérifiant :*

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad (i,j) \in \{1,\cdots,n\} \times \{1,\cdots,m\}.$$

Exemple 1.2.2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Remarque 1.2.3. *(i) Malgré que nous utilisons le même symbole + pour désigner l'addition scalaire et l'addition vectorielle, le lecteur doit être capable de distinguer les deux situations.*

(ii) La somme de deux matrices n'a de sens que si elles ont le même nombre de lignes et le même nombre de colonnes. Par exemple, la somme :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

n'est pas définie car les deux matrices n'ont pas le même nombre de colonnes.

En utilisant les propriétés de l'addition scalaire, il est facile de vérifier que :

(i) La somme matricielle est une opération interne dans $\mathbb{K}^{n\times m}$.

(ii) La somme matricielle est commutative :

$$\forall A, B \in \mathbb{K}^{n\times m}, \quad A + B = B + A.$$

(iii) La somme matricielle est associative :

$$\forall A, B, C \in \mathbb{K}^{n\times m}, \quad (A + B) + C = A + (B + C)\,.$$

(iv) La matrice nulle $\mathcal{O}_{\mathbb{K}^{n\times m}}$ est l'élément neutre pour la loi $+$ dans $\mathbb{K}^{n\times m}$:

$$\forall A \in \mathbb{K}^{n\times m},\; A + \mathcal{O}_{\mathbb{K}^{n\times m}} = \mathcal{O}_{\mathbb{K}^{n\times m}} + A = A.$$

(v) Chaque élément $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$ possède un symétrique notée $-A$ pour la loi $+$. De plus,

$$A = (-a_{ij})_{i,j=1}^{n,m} \Longrightarrow -A = (-a_{ij})_{i,j=1}^{n,m}\,.$$

Résumant les propriétés précédentes, on obtient le résultat suivant

Theorem 1.2.4. *Le couple* $(\mathbb{K}^{n\times m}, +)$ *est un groupe commutatif.*

Remarque 1.2.5. *D'après les notations adoptées, les éléments du symétrique de tout élément de* $\mathbb{K}^{n\times m}$ *sont obtenus en prenant les symétriques dans* $\mathbb{K}$ *des éléments de la matrice initiale. De plus,* $A - B$ *désigne la somme* $A + (-B)$*.*

1.2.2 Multiplication par un scalaire

Définition 1.2.6. *Soit* $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n,m} \in \mathbb{K}^{n\times m}$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$*. La matrice* $\lambda.A$ *est l'élément de* $\mathbb{K}^{n\times m}$ *définie par*

$$\lambda.A := (\lambda.a_{ij})_{i,j=1}^{n,m}\,.$$

Exemple 1.2.7.

$$2.\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 8 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

En utilisant les propriétés de la multiplication scalaire, on obtient le résultat suivant

Proposition 1.2.8. *Soient A et B deux éléments de $\mathbb{K}^{n\times m}$, α et β deux scalaires. Alors,*

(vi) $0_{\mathbb{K}}.A = \mathcal{O}_{\mathbb{K}^{n\times m}}$.

(vii) $\alpha.(A+B) = \alpha.A \ + \ \alpha.B$.

(viii) $(\alpha+\beta).A = \alpha.A \ + \ \beta.A$.

(ix) $\alpha.(\beta.A) = (\alpha.\beta).A$.

(x) $1_{\mathbb{K}}.A = A$.

1.2.3 Produit de matrices

Définition 1.2.9. *Soit $A \in \mathbb{K}^{n\times p}$ et $B \in \mathbb{K}^{p\times m}$. Le produit noté $A \times B$ des matrices A et B est la matrice $C \in \mathbb{K}^{n\times p}$ dont les coefficients c_{ij} sont donnés par la formule :*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} := a_{i1}.b_{1j} + a_{i2}.b_{2j} + \cdots + a_{ip}.b_{pj} \tag{1.2.1}$$

Remarques 1.2.10.

1. *L'élément c_{ij} du produit $A \times B$ s'obtient en multipliant terme à terme les éléments de la ligne i de A avec les éléments de la colonne j de B, puis en sommant les produits obtenus.*
2. *Il faut bien noter que le produit $A \times B$ n'a de sens que si le nombre de colonnes de A coïncide avec le nombre de lignes de B. On exprime ce fait par l'inclusion*
$$\mathbb{K}^{n\times p} \times \mathbb{K}^{p\times m} \subseteq \mathbb{K}^{n\times m}.$$

Exemple 1.2.11. *Considérons les matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors,

$$A \times B = \begin{pmatrix} 2.2 + 3.4 + 1.1 & 2.3 + 3.-1 + 1.1 \\ 4.2 + -1.4 + 1.1 & 4.3 + -1.-1 + 1.1 \\ 0.2 + 0.4 + 0.1 & 0.3 + 0.-1 + 0.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 4 \\ 5 & 14 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par contre, le produit $B \times A$ n'existe pas car, le nombre de colonnes de B diffère du nombre de lignes de A.

Remarque 1.2.12. *Même, si les produits $A\times B$ et $B\times A$ existent, ils ne sont pas forcément égaux. En d'autres termes, le produit matriciel n'est pas commutatif. En effet, si l'on pose*

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1\\ 4 & -1 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 2 & 3\\ 4 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Alors,

$$A\times B=\begin{pmatrix} 17 & 4\\ 5 & 14\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} 16 & 3 & 5\\ 4 & 13 & 3\\ 6 & 2 & 2\end{pmatrix}=B\times A.$$

Proposition 1.2.13. *Soient $A=(a_{ij})_{i,j=1}^{n,p}\in\mathbb{K}^{n\times p}$, $B=(b_{ij})_{i,j=1}^{p,q}\in\mathbb{K}^{p\times q}$ et $C=(c_{ij})_{i,j=1}^{q,m}\in\mathbb{K}^{q\times m}$. Alors, on a la formule d'associativité*

$$(A\times B)\times C=A\times(B\times C).$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
(A\times B)\times C &= \left((a_{ij})_{i,j=1}^{n,p}\times(b_{ij})_{i,j=1}^{p,q}\right)\times(c_{ij})_{i,j=1}^{q,m}=\left(\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}\right)_{i,j=1}^{p,q}\times(c_{ij})_{i,j=1}^{q,m}\\
&= \left(\sum_{r=1}^{q}\left(\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kr}\right)c_{rj}\right)_{i,j=1}^{n,m}=\left(\sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{r=1}^{q}a_{ik}b_{kr}c_{rj}\right)\right)_{i,j=1}^{n,m}\\
&= \left(\sum_{k=1}^{p}a_{ik}\left(\sum_{r=1}^{q}b_{kr}c_{rj}\right)\right)_{i,j=1}^{n,m}=(a_{ik})_{i,k=1}^{n,p}\times\left(\sum_{r=1}^{q}b_{kr}c_{rj}\right)_{k,j=1}^{p,m}\\
&= (a_{ik})_{i,k=1}^{n,p}\times\left((b_{kr})_{kr=1}^{pq}\times(c_{rj})_{rj=1}^{qm}\right)\\
&= A\times(B\times C).
\end{aligned}$$

□

Proposition 1.2.14. *Le produit matriciel est distributif par rapport à la somme des matrices :*

1) $\forall(A,B,C)\in\mathbb{K}^{n\times p}\times\mathbb{K}^{p\times m}\times\mathbb{K}^{p\times m}: A\times(B+C)=A\times B\ +\ A\times C.$

2) $\forall(A,B,C)\in\mathbb{K}^{n\times p}\times\mathbb{K}^{n\times p}\times\mathbb{K}^{p\times m}:(A+B)\times C=A\times C\ +\ B\times C.$

Preuve. 1. On a :

$$\begin{aligned}
A \times (B+C) &= (a_{ij})_{i,j=1}^{n,p} \times \left((b_{ij})_{i,j=1}^{p,m} + (c_{ij})_{i,j=1}^{p,m} \right) = (a_{ij})_{i,j=1}^{n,p} \times (b_{ij} \ + \ c_{ij})_{i,j=1}^{p,m} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik} \left(b_{kj} + c_{kj} \right) \right)_{i,j=1}^{n,m} = \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}.b_{kj} + a_{ik}.c_{kj} \right)_{i,j=1}^{n,m} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}.b_{kj} \right)_{i,j=1}^{n,m} + \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}.c_{kj} \right)_{i,j=1}^{n,m} \\
&= A \times B \ + \ A \times C.
\end{aligned}$$

La deuxième formule de distributivité se démontre de manière analogue. □

Proposition 1.2.15. *Pour toute matrice* $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$,

$$I_n \times A = A = A \times I_m.$$

Preuve. Posons

$$I_n = (\delta_{ij})_{i,j=1}^{n} : \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & si \quad i = j \\ 0 & si \quad i \neq j \end{cases}$$

Alors,

$$I_n \times A \quad = \quad (\delta_{ij})_{i,j=1}^{n} \times (a_{ij})_{i,j=1}^{n,m} = \left(\sum_{k=1}^{n} \delta_{ik} a_{kj} \right)_{i,j=1}^{n,m} = (\delta_{ii} a_{ij})_{i,j=1}^{n,m} = (a_{ij})_{i,j=1}^{n,m} = A.$$

De manière tout à fait analogue, on démontre la relation $A = A \times I_m$. □

Proposition 1.2.16. *Le triplet* $(\mathbb{K}^{n \times n}, \ +, \ \times)$ *est un anneau unitaire.*

Preuve. La preuve découle directement de la définition d'un anneau unitaire et des propositions 1.2.13, 1.2.14. □

1.2.4 Transposition et symétrie

Définition 1.2.17. *Soit* $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n,m} \in \mathbb{K}^{n \times m}$ *une matrice donnée, on appelle transposée de* A *la matrice* $A^T \in \mathbb{K}^{m \times n}$ *définie par* $A^T = (b_{ij} := a_{ji})_{j,i=1}^{m,n}$. *En d'autres termes, la ligne* j *de* A^T *est la colonne* j *de* A.

Exemples 1.2.18. —

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 7 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

—
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Définition 1.2.19. *Une matrice carrée $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ est dite symétrique si, elle coïncide avec sa transposée :*

$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n} \in \mathbb{K}^{n\times n} \quad \textit{symétrique} \Longleftrightarrow a_{ij} = a_{ji} \;, \quad \forall (i,j) \in \{1,...,n\}^2 .$$

Il est clair que pour tout naturel n la matrice unité I_n est symétrique.

Exemple 1.2.20. *La première des deux matrices suivantes est symétrique. La seconde ne l'est pas :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Proposition 1.2.21. *On a les propriétés suivantes :*

(i)
$$(A+B)^T = A^T \; + \; B^T, \quad \forall (A,B) \in \mathbb{K}^{n\times m} \times \mathbb{K}^{n\times m}.$$

(ii)
$$(A\times B)^T = B^T \times A^T, \quad \forall (A,B) \in \mathbb{K}^{n\times p} \times \mathbb{K}^{p\times m}.$$

(iii) La transposée d'une matrice triangulaire supérieure (res. inférieure) est une matrice triangulaire inférieure (resp. supérieure)

Preuve. Les propriétés (i) et (iii) sont directement vérifiables. Montrons cependant la seconde. Pour cela, posons :

$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n,p} \in \mathbb{K}^{n\times p} \quad , \quad B = (b_{ij})_{i,j=1}^{p,m} \in \mathbb{K}^{p\times m}.$$

On a donc,

$$(A\times B)^T = \left(\left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \right)_{i,j=1}^{n,m} \right)^T = \left(\sum_{k=1}^{p} a_{jk} b_{ki} \right)_{i,j=1}^{m,n} . \tag{1.2.2}$$

D'autre part,

$$B^T \times A^T \quad = \quad (b_{ji})_{i,j=1}^{m,p} \times (a_{ji})_{j,i=1}^{p,n} = \left(\sum_{k=1}^{p} b_{jk} a_{ki} \right)_{j,i=1}^{m,n} . \tag{1.2.3}$$

Les relations 1.2.2 et 1.2.3 qu'on a bien $(A\times B)^T = B^T \times A^T$. □

1.2.5 Inversion des matrices

Définition 1.2.22. *Une matrice carrée* $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ *est dite inverse (ou que* A *admet un inverse) s'il existe dans* $\mathbb{K}^{n\times n}$ *une matrice notée* A^{-1} *telle que :*

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I_n.$$

La matrice A^{-1} *est appelée inverse de* A*.*

Notons que pour tout naturel n, la matrice I_n est inversible et $I_n^{-1} = I_n$.

Proposition 1.2.23. *On a les propriétés suivantes des matrices inversibles.*

(i) Si une matrice A *est inversible alors son inverse est unique.*

(ii) le produit de deux matrices inversibles A *et* B *est une matrice inversible et on a :*

$$(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}.$$

(iii) La transposée d'une matrice inversible A *est une matrice inversible et on a :*

$$\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T.$$

Preuve.

(i) Supposons que la matrice A admet deux inverses A^{-1} et B. En utilisant l'associativité du produit de matrices, on obtient,

$$B = B \times I_n = B \times \left(A \times A^{-1}\right) = (B \times A) \times A^{-1} = I_n \times A^{-1} = A^{-1}.$$

(ii) Par définition de la matrice inverse et par associativité du produit de matrices, on a :

$$\left(B^{-1} \times A^{-1}\right) \times (A \times B) = B^{-1} \times \left(A^{-1} \times A\right) \times B = \left(B^{-1} \times I_n\right) \times B = B^{-1} \times B = I_n$$

et

$$(A \times B) \times \left(B^{-1} \times A^{-1}\right) = A \times \left(B \times B^{-1}\right) \times A^{-1} = (A \times I_n) \times A^{-1} = A \times A^{-1} = I_n.$$

Ces deux dernières formules montrent que $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$.

(iii) De manière analogue, on a :

$$\left(A^{-1}\right)^T \times A^T = \left(A \times A^{-1}\right)^T = I_n^T = I_n$$

et

$$A^T \times \left(A^{-1}\right)^T = \left(A^{-1} \times A\right)^T = I_n^T = I_n,$$

ce qui signifie que $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.

□

1.3 Exercices corrigés

Exercice 1.3.1. *On considère les matrices*

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&-1&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1&2&3\\2&1&-3\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}-2&3&4\\3&1&-3\\1&-2&0\end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix}-1&-2&0\\2&1&0\\-2&1&0\end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix}1&1&1\end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Calculer $A+B$, $C+D$, $A\times B$, $A\times C$, $C\times A$, $C\times D$, $D\times C$, $E\times C$, $E\times F$, $F\times E$, $C\times F$.

<u>**Solution**</u> : On a :

1)

$$A+B=\begin{pmatrix}0&4&2\\4&0&-2\end{pmatrix},\quad C+D=\begin{pmatrix}-3&1&4\\5&2&-3\\-1&-1&0\end{pmatrix}.$$

2) Le produit $A\times B$ n'existe car, le nombre de colonnes de A n'est pas égal au nombre de lignes de B. Pour les mêmes raisons, les produits $C\times A$ et $C\times E$ n'existent pas.

3)

$$A\times C=\begin{pmatrix}3&7&-2\\-6&3&11\end{pmatrix}.$$

4)

$$C\times D=\begin{pmatrix}0&11&0\\5&-8&0\\-5&-4&0\end{pmatrix},\quad D\times C=\begin{pmatrix}-8&-5&2\\-1&7&5\\7&5&-11\end{pmatrix}.$$

5)

$$E\times C=\begin{pmatrix}2&2&1\end{pmatrix},\quad C\times F=\begin{pmatrix}6&-6&-1\end{pmatrix}.$$

6)

$$E\times F=\begin{pmatrix}0\end{pmatrix},\quad F\times E=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\0&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}.$$

$\square$

Exercice 1.3.2. *Soient A et B deux matrices données. Montrez que*

1) *Si le produit $A \times B$ existe alors, le produit $B^T \times A^T$ existe aussi.*
2) *Si la somme $A + B$ existe alors, le produit $A^T \times B$ existe aussi.*
3) *Si les produits $A \times B$ et $B \times A$ existent alors, la somme $A + B^T$ existe aussi.*

Solution :

1)

$$\begin{aligned} A \times B \ \text{existe} &\Longrightarrow \quad \text{le nombre de colonnes de } A \text{ est égal à celui des lignes de } B \\ &\Longrightarrow \quad \text{par transposition, le nombre de colonnes de } B^T \text{ est égal à celui des lignes de } A^T \\ &\Longrightarrow \ B^T \times A^T \ \text{ existe.} \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} A + B \ \text{existe} &\Longrightarrow \quad \text{les matrices } A \text{ et } B \text{ ont le même nombre de lignes} \\ &\Longrightarrow \quad \text{par transposition, le nombre de colonnes de } A^T \text{ est égal à celui des lignes de } B \\ &\Longrightarrow \ A^T \times B \ \text{ existe.} \end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned} A \times B \ \text{ et } \ B \times A \ \text{ existent} &\Longrightarrow \begin{cases} \text{le nombre de colonnes de } A \text{ est égal à celui des lignes de } B \\ \text{le nombre de colonnes de } B \text{ est égal à celui des lignes de } A \end{cases} \\ &\Longrightarrow \begin{cases} \text{le nombre de colonnes de } A \text{ est égal à celui des colonnes de } B^T \\ \text{le nombre de lignes de } B^T \text{ est égal à celui des lignes de } A \end{cases} \\ &\Longrightarrow \ A + B^T \ \text{ existe.} \end{aligned}$$

□

Exercice 1.3.3. *Montrer que*

1) *Le produit de deux matrices symétriques et commutantes est une matrice symétrique.*
2) *La transposée d'une matrice triangulaire supérieure est une matrice triangulaire inférieure.*
3) *Le produit de deux matrices diagonales est une matrice diagonale.*
4) *Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure.*
5) *Le produit d'une matrice triangulaire supérieure et d'une matrice triangulaire inférieure peut ne pas être triangulaire (ni inférieure ni supérieure).*

Solution : Rappelons tout d'abord que les concepts de matrice symétrique, triangulaire, diagonale ne sont valables que pour les matrices carrées.

1) Soient $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ et $B = (b_{ij})_{i,j=1}^{n}$ deux matrices symtŕiques commutantes. On a donc,

$$A = A^T, \quad B = B^T, \quad \text{et} \quad A \times B = B \times A.$$

Par conséquent,

$$(A \times B)^T = B^T \times A^T = B \times A = A \times B$$

ce qui signifie que le produit $A \times B$ est symétrique.

2) On a,

$$\begin{aligned} A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n} \text{ triangulaire supérieure } &\Longrightarrow a_{ij} = 0_{\mathbb{K}}, \ \text{ si } i \succ j \\ &\Longrightarrow a_{ji} = 0_{\mathbb{K}}, \ \text{ si } j \prec i \\ &\Longrightarrow A^T = (a_{ji})_{i,j=1}^{n} \text{ triangulaire inférieure.} \end{aligned}$$

3) Soient $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ et $B = (b_{ij})_{i,j=1}^{n}$ deux matrices diagonales. On a donc,

$$a_{ij} = 0_{\mathbb{K}} = b_{ij}, \ \text{ si } i \neq j.$$

D'autre part,

$$A \times B = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right)_{i,j=1}^{n}$$

et

$$i \neq j \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = 0_{\mathbb{K}},$$

ce qui signifie que le produit $A \times B$ est aussi une matrice diagonale.

4) Soient $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ et $B = (b_{ij})_{i,j=1}^{n}$ deux matrices triangulaires supérieures. On a donc,

$$a_{ij} = 0_{\mathbb{K}} = b_{ij}, \ \text{ si } i \prec j.$$

Par ailleurs,

$$i \prec j \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=i}^{n} a_{ik} b_{kj} = 0_{\mathbb{K}}$$

car,

$$k \leq i \ \text{ et } \ i \prec j \Longrightarrow k \prec j \Longrightarrow b_{kj} = 0_{\mathbb{K}}.$$

Ainsi, le produit $A \times B$ est une matrice triangulaire supérieure.

5) Les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

sont respectivement triangulaire supérieure et triangulaire inférieure. Par contre, le produit

$$A \times B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

n'est pas une matrice triangulaire.

□

Exercice 1.3.4. *On considère la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer A^2 puis $A^2 - A$.

2) En déduire que A est inversible et trouver son inverse.

<u>**Solution**</u> : On a

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

et

$$A^2 - A = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = 6.I_2.$$

D'après ce qui précède,

$$I_2 = \frac{1}{6}.\left(A^2 - A\right) = \left(\frac{1}{6}.(A - I_2)\right) \times A = A \times \left(\frac{1}{6}.(A - I_2)\right).$$

On en déduit que A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{6}.(A - I_2) = \frac{1}{6}.\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

□

Exercice 1.3.5. *On considère la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer A^2 puis A^3.

2) Déterminer les trois constantes α, β, γ vérifiant l'égalité

$$A^3 \ + \ \alpha.A^2 \ + \ \beta.A \ + \ \gamma.I_3 = \mathcal{O}_{\mathbb{R}^{3\times 3}}.$$

3) En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1}.

Exercice 1.3.6. *Le présent exercice a pour but de montrer comment à partir des opérations du corps $\mathbb{K}$, on définit les opérations sur les matrices à coefficients dans $\mathbb{K}^{n\times n}$. Soit donc le corps commutatif $(\mathbb{K}, *, \perp)$. On désigne par e_* l'élément neutre de la loi $*$, $e_\perp$ l'élément neutre de la loi $\perp$. De même, $sym(x)$ désignera le symétrique de x pour la loi $*$ et $inv(x)$ le symétrique de $x \neq e_*$ pour la loi $\perp$.*
1) Définir les opérations d'addition, produit et de multiplication par un scalaire dans l'ensemble des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}^{2\times 2}$.
2) Déterminer la matrice nulle et la matrice unité dans $\mathbb{K}^{2\times 2}$.
3) On considère maintenant le corps commutatif $(\mathbb{R}, *, \perp)$ avec,

$$x * y = x + y + 1 \quad , \quad x \perp y = x + y + xy.$$

Calculer $A + B$, $\lambda.A$, $A \times B$, $-A$ dans le cas où,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Solution : 1) L'addition des matrices dans $\mathbb{K}^{2\times 2}$ utilise uniquement la première loi du corps selon la règle suivante :

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} * b_{11} & a_{12} * b_{12} \\ a_{21} * b_{21} & a_{22} * b_{22} \end{pmatrix}.$$

La multiplica d'une matrice dans $\mathbb{K}^{2\times 2}$ par un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$, utilise uniquement la deuxième du corps selon la règle suivante :

$$\lambda.A = \lambda. \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \perp a_{11} & \lambda \perp a_{12} \\ \lambda \perp a_{21} & \lambda \perp a_{22} \end{pmatrix}.$$

La produit de deux matrices dans $\mathbb{K}^{2\times 2}$ utilise successivement la deuxième et la deuxième opérations suivant la règle suivante :

$$\begin{aligned} A \times B &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a_{11} \perp b_{11}) * (a_{12} \perp b_{21}) & (a_{11} \perp b_{12}) * (a_{12} \perp b_{22}) \\ (a_{21} \perp b_{11}) * (a_{22} \perp b_{21}) & (a_{21} \perp b_{12}) * (a_{22} \perp b_{22}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2) Par définition, la matrice nulle et la matrice unité de $\mathbb{K}^{2\times 2}$ sont respectivement données par les formules

$$0_{\mathbb{K}^{2\times 2}} = \begin{pmatrix} e_* & e_* \\ e_* & e_* \end{pmatrix} \quad , \quad I_2 = \begin{pmatrix} e_\perp & e_* \\ e_* & e_\perp \end{pmatrix}.$$

3) On vérifie facilement que dans ce cas, $e_* = -1$, $e_\perp = 0$, $sym(x) = -2 - x$. par conséquent,

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 * -1 & 1 * 3 \\ 0 * 2 & 2 * -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\lambda.A = \begin{pmatrix} \lambda\perp 1 & \lambda\perp 1 \\ \lambda\perp 0 & \lambda\perp 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda+1 & 2\lambda+1 \\ \lambda & 3\lambda+2 \end{pmatrix},$$

$$A\times B = \begin{pmatrix} (1\perp -1)*(1\perp 2) & (1\perp 3)*(1\perp -1) \\ (0\perp -1)*(2\perp 2) & (0\perp 3)*(2\perp -1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1*5 & 7*-1 \\ -1*8 & 3*-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

Enfin,

$$-A = \begin{pmatrix} sym(1) & sym(1) \\ sym(0) & sym(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Chapitre 2

Calcul des déterminants

2.1 Développement suivant une ligne

Définition 2.1.1. *Soit* $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ *une matrice carrée donnée. On appelle déterminant de* A *le scalaire* $\det(A)$ *défini par :*

(i) *Si* $A = (a)$ *alors,* $\det(A) = a$.

(ii) *Si* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ *alors,* $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.

(iii) *Si* $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$, $n \succ 2$ *alors, on choisit une ligne* i *et on définit* $\det(A)$ *par récurrence conformément à la formule :*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) \tag{2.1.1}$$

où A_{ij} *est la matrice carrée obtenue à partir de* A *en supprimant la ligne* i *et la colonne* j. *On dit dans ce cas que le déterminant de* A *est développé suivant la ligne choisie* i.

1) La matrice A_{ij} dans la formule 2.1.1 est un élément de $\mathbb{K}^{(n-1)\times(n-1)}$.
2) Si au moins une ligne de A possède tous ses éléments égaux à $0_{\mathbb{K}}$ alors, $\det(A) = 0_{\mathbb{K}}$.
3) La formule 2.1.1 s'applique même au cas $n = 2$. En effet, en appliquant cette formule pour $i = 1$, on obtient :

$$\det(A) = (-1)^{1+1}a_{11}a_{22} + (-1)^{1+2}a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

De même, si on développe suivant la ligne $i = 2$, on obtient :

$$\det(A) = (-1)^{2+1}a_{21}a_{12} + (-1)^{2+2}a_{22}a_{11} = -a_{21}a_{12} + a_{22}a_{11}.$$

Remarque 2.1.2. *On remarque que dans le cas $n = 2$, le déterminant est indépendant du choix de la ligne i par rapport à laquelle se fait le développement. Cette propriété est en fait vraie pour tout n. Nous allons ici (et à titre d'entrainement) la vérifier pour le cas $n = 3$. Soit donc*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

En développant par rapport à la ligne $i = 1$, on obtient

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1)^{1+1} a_{11} \det(A_{11}) + (-1)^{1+2} a_{12} \det(A_{12}) + (-1)^{1+3} a_{13} \det(A_{13}) \\ &= a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}). \end{aligned}$$

En développant suivant la ligne $i = 2$, on obtient

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1)^{2+1} a_{21} \det(A_{21}) + (-1)^{2+2} a_{22} \det(A_{22}) + (-1)^{2+3} a_{23} \det(A_{23}) \\ &= -a_{21} \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{22} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{23} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \\ &= -a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - a_{23}(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}). \end{aligned}$$

En développant suivant la ligne $i = 3$, on obtient

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1)^{3+1} a_{31} \det(A_{31}) + (-1)^{3+2} a_{32} \det(A_{32}) + (-1)^{3+3} a_{33} \det(A_{33}) \\ &= a_{31} \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} - a_{23} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{pmatrix} + a_{33} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\ &= a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}) - a_{32}(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) + a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}). \end{aligned}$$

On vérifie facilement que ces trois quantités sont égales.

Exemple 2.1.3. *Calculer* $\det(A)$ *avec,*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Puisque le déterminant est indépendant du choix de la ligne suivant laquelle on développe et afin de diminuer le nombre d'opérations, nous allons développer ce déterminant par rapport à *la ligne $i = 2$ qui contient le maximum de zéros. Ainsi,*

$$\begin{aligned}
\det(A) &= (-1)^{2+2}\det\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{2+4}.2.\det\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 2\det\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \left\{-2\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 3\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\} + 2\left\{\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 2\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\} \\
&= \{-2.0 + 3.2\} + 2\{2 + 2.2\} = 18.
\end{aligned}$$

Le déterminant d'une matrice triangulaire A (et donc aussi d'une matrice diagonale) est égal au produit des éléments de la diagonale. En effet, si A est triangulaire supérieure, il suffit de développer suivant la denière ligne. Si A est triangulaire inférieure, il suffit de développer suivant la première ligne. En particulier, le déterminant de la matrice unité I_n est égal à 1.

2.2 Règles de calcul des déterminants

Nous allons dans cette section établir les propriétés fondamentales du déterminant. Ces propriétés sont très utiles et permettent de réduire et simplifier sensiblement les calculs surtout dans le cas des grandes matrices. Soit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

et posons

$$L_1 = (a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}), \; L_2 = (a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n}), \qquad L_n = (a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{nn}).$$

En d'autres termes L_i est la ligne i de la matrice A. Nous allons dans ce qui suit, adopter les écritures suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \det(A) := \det\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$$

Proposition 2.2.1. *Le déterminant est homogène par rapport à chaque ligne, c'est à dire que pour tout* $\lambda \in \mathbb{K}$ *et tout* $1 \leq i \leq n$,

$$\det \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ \lambda.L_i \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} = \lambda.\det \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}.$$

Preuve. En développant suivant la ligne i, on obtient :

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ \lambda.L_i \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \lambda.a_{ij} \det(A_{ij}) = \lambda.\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) \\ &= \lambda.\det(A) = \lambda.\det \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ \lambda.L_i \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

Proposition 2.2.2. *Le déterminant est linéaire par rapport à chaque ligne, c'est à dire, que si pour une ligne* i*, on a* $L_i = L_i^{(1)} + L_i^{(2)}$

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i^{(1)} \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i^{(2)} \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}.$$

Preuve. Si on pose

$$L_i = L_i^{(1)} + L_i^{(2)} = \left(a_{i1} + a'_{i1},\ a_{i2} + a'_{i2},\ \cdots,\ a_{in} + a'_{in}\right),$$

et on développe suivant la ligne i, on obtient :

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}(a_{ij}+a'_{ij})\det(A_{ij}) \\ &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(A_{ij})+\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a'_{ij}\det(A_{ij}) \\ &= \det\begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i^{(1)} \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i^{(2)} \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

□

Proposition 2.2.3. *Si deux lignes L_{i_1} et L_{i_2} coïncident alors le déterminant est égal à $0_{\mathbb{K}}$:*

$$L_{i_1}=L_{i_2}\Longrightarrow\det\begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{i_1} \\ \vdots \\ L_{i_2} \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}=0_{\mathbb{K}}.$$

Preuve. Nous allons raisonner par récurrence. La propriété est triviale si $n=2$ car, dans ce cas, la matrice considèrée est de la forme :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}.$$

Supposons que cette propriété est vraie pour n et montrons qu'elle reste vraie pour $n+1$. Dans ce cas, on a affaire avec une matrice appartenant à $\mathbb{K}^{(n+1)\times(n+1)}$ et possèdant deux lignes L_{i_1} et L_{i_2} égales. Soit $q\notin\{i_1,\ i_2\}$. En développant suivant la ligne q, on obtient :

$$\det\begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{i_1} \\ \vdots \\ L_{i_2} \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}=\sum_{j=1}^{n+1}a_{qj}\det(A_{qj}).$$

Par construction, à la ligne L_{i_1} correspond dans la matrice A_{qj} la ligne L'_{i_1} qui n'est autre que la ligne L_{i_1} privée de l('elément $a_{i_1 j}$. De lamême manière, à la ligne L_{i_2} correspond dans la matrice A_{qj} la ligne L'_{i_2} qui n'est autre que la ligne L_{i_2} privée de l('elément $a_{i_2 j}$. Il est facile de voir que dans la matrice A_{qj}, les lignes L'_{i_1} et L'_{i_2} coïncident. D'autre part, A_{qj} est un élément de $\mathbb{K}^{n\times n}$. Ainsi, d'après l'hypothèse de récurrence, $\det(A_{qj}) = 0_{\mathbb{K}}$. Comme ceci est vrai pour tout $1 \leq j \leq n$ alors,

$$\sum_{j=1}^{n+1} a_{qj} \det(A_{qj}) = \sum_{j=1}^{n+1} a_{qj}.0_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}}.$$

□

Corollaire 2.2.4. *Si on permute deux lignes entre elles en laissant les autres lignes inchangées alors le déterminant change de signe :*

$$\det \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}.$$

Preuve. s'obtient en appliquant les propositions 2.2.2 et 2.2.3 à la quantité

$$\det \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i + L_j \\ \vdots \\ L_i + L_j \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}.$$

□

Proposition 2.2.5. *Si à une ligne donnèe, on ajoute une combinaison linéaire des autres lignes alors, le déterminant ne change pas :*

$$\det\begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i + \sum_{j\neq i}\lambda_j.L_j \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$$

pour tous scalaires λ_j.

Preuve. En utilisant successivement les propositions 2.2.2 et 2.2.1, on obtient :

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i + \sum_{j\neq i}\lambda_j.L_j \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} + \sum_{j\neq i}\det\begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ \lambda_j L_j \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} \\ &= \det\begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} + \sum_{j\neq i}\lambda_j.\det\begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ \neg L_j \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}\end{aligned}$$

En remarquant qu'en fait dans chacun des termes

$$\det\begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix},$$

la ligne L_j figure deux fois (dans sa position initiale j et dans la position i), on conclut d'après la proposition 2.2.3 que

$$\det\begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i + \sum_{j\neq i}\lambda_j.L_j \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} + \sum_{j\neq i}\lambda_j.0_{\mathbb{K}} = \det\begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}.$$

□

La propriété 2.2.5 est surtout utilisée pour faire apparaitre des zéros dans une ou plusieurs lignes ce qui comme souligné plus haut permet dans beaucoup de cas de sensiblement réduire et simplifier les calculs.

Exemple 2.2.6. *Considèrons la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

En remplaçant L_2 par $L_2 + L_3$ et en développant suivant la deuxiieme ligne de la nouvelle matrice, on obtient :

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = -2 \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

En remplaçant maintenant L_2 par $L_2 + \frac{1}{2}L_1$, on aura

$$\det(A) = -2 \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

En remplaçant enfin L_3 par $L_3 - L1$, on arrive à :

$$\det(A) = -2 \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \det(A) = -2 \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

La dernière matrice obtenue est triangulaire et donc, son déterminant est le produit des éléments de diagonale. D'où,

$$\det(A) = -2. \left(2.\frac{-1}{2}.3\right) = 6.$$

Comme le montre le contre-exemple suivant, d'une manière générale, le déterminant de la somme de deux matrices n'est pas pas égal à la somme des deux déterminants correspondants. En effet, pour les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

on a, $\det(A) + \det(B) = -1 + 1 = 0$ mais,

$$\det(A + B) = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2.$$

2.3 Développement suivant une colonne

Nous commençons la présente section par le résultat fondamental suivant.

Theorem 2.3.1. *Le déterminant d'une matrice carrée est égal au déterminant de sa transposée.*

Ce résultat est directement vérifiable pour A appartenant à

$$\mathbb{K}^{n\times n}$$

avec n assez petit. Sa vérifiaction pour n quelconque utilise la définition de déterminant basée sur les propriétés de l'ensemble S_n des permutations d'un ensemble à n éléments [1, 3]. Cette approche étant hors du cadre du présent cours, nous admettrons ce résultat.

Corollaire 2.3.2. *Pour toute matrice* $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n} \in \mathbb{K}^{n\times n}$*, on a la formule :*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}.det(A_{ij}), \quad \forall j \in \{1,\ ...,\ n\} \tag{2.3.1}$$

appelée formule de développement du déterminant suivant la colonne j*.*

Preuve. Notons tout d'abord la différence entre la formule 2.1.1 et la formule 2.3.1. Dans la première, on fixe une ligne de développement et on fait varier l'indice des colonnes. Dans la seconde, c'est une colonne de développement qui est fixée et l'indice des lignes qui varie.
Pour la preuve de ce corollaire, posons : $A^T = (b_{ji} = a_{ij})_{j,i=1}^{n}$. En développant $\det(A^T)$ suivant la ligne j, on obtient d'après le théorème 2.3.1 :

$$\det(A) = \det(A^T) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{j+i} b_{ji}.\det((A^T)_{ji}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}.\det((A^T)_{ji}).$$

Pour avoir le résultat souhaité, il suffit de remarquer que $(A^T)_{ji} = A_{ij}$. $\square$

Exemple 2.3.3. *En développant suivant la première colonne, on obtient :*

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} &= 1.\det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - 0.\det\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + 2.\det\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -4 + 0.(-7) + 2.1 = -2.\end{aligned}$$

Soit $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ une matrice carrée donnée. Pour tout $1 \leq j \leq n$ posons :

$$C_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}.$$

En d'autres termes, C_j est la colonne j de la matrice A. On peut donc écrire :

$$A = (C_1, C_2, \cdots, C_n) \quad \text{et} \quad \det(A) = \det(C_1, C_2, \cdots, C_n).$$

Comme les matrices A et A^T ont le mm̂e déterminant et puisque les colonnes de A sont les lignes de A^T alors, les règles de calcul 2.2.1, 2.2.2, 2.2.3, 2.2.4 et 2.2.5 peuvent être respectivement réécrites somme suit :

Proposition 2.3.4. *le déterminant est homogène par rapport à chaque colonne, c'est à dire que pour tout scalaire λ et tout $1 \leq j \leq n$,*

$$\det(C_1, \cdots, \lambda.C_j, \cdots, C_n) = \lambda.\det(C_1, \cdots, C_j, \cdots, C_n)$$

Proposition 2.3.5. *Le déterminant est linéaire par rapport à chaque colonne, c'est à dire que si pour colonne $j$donnée, on a $C_j = C_{j_1} + C_{j_2}$ alors,*

$$det(A) = \det(C_1, \cdots, C_{j_1}, \cdots, C_n) + \det(C_1, \cdots, C_{j_2}, \cdots, C_n).$$

Proposition 2.3.6. *Si deux colonnes coïncident alors, le déterminant s'annule :*

$$C_{j_1} = C_{j_2} \Longrightarrow \det(C_1, \cdots, C_{j_1}, \cdots, C_{j_2}, \cdots, C_n) = 0_{\mathbb{K}}.$$

Corollaire 2.3.7. *Si on permute deux colonnes entre elles en laissant inchangées les autres colonnes alors, le déterminant change de signe :*

$$\det(C_1, \cdots, C_j, \cdots, C_i, \cdots, C_n) = -\det(C_1, \cdots, C_i, \cdots, C_j, \cdots, C_n).$$

Proposition 2.3.8. *Si à une colonne, on ajoute une combinaison linéaire des autres colonnes alors, le déterminant :*

$$\det\left(C_1, \cdots, C_j + \sum_{i \neq j} \lambda_i.C_i, \cdots, C_n\right) = \det(C_1, \cdots, C_j, \cdots, C_n)$$

pour tous scalaires λ_i.

Exemple 2.3.9. *Considérons la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

En remplaçant C_2 par $C_2 - C_4$, on obtient

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = -3.\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

En remplaçant maintenant C_3 par $C_3 - C_2$, on obtient

$$\det(A) = -3.\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En éveloppant suivant la troisième colonne, on obtient finalement

$$\det(A) = -3.1.\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 6.$$

2.4 Inversion des matrices

Nous commençons cette section par le résultat fondamental suivant.

Theorem 2.4.1. *Si A et B sont deux matrices carrées appartenant à $\mathbb{K}^{n\times n}$ alors,*

$$\det(A \times B) = \det(A).\det(B)$$

et

$$A \times (com(A))^T = (com(A))^T \times A = \det(A).I_n. \tag{2.4.1}$$

Nous admettrons sans preuve ce résultat pour les mêmes raisons citées pour l'égalité entre le déterminant d'une matrice et celui de sa transposée. Cependant, il appartient au lecteur de vérifier sa véracité pour les petites valeurs de n.

Définition 2.4.2. *Soit $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{K}^{n\times n}$ une matrice carrée donnée. On appelle :*

(i) Mineur d'ordre (i,j) le scalaire $\det(A_{ij})$ où A_{ij} est la matrice obtenue à partir de A par suppression de la ligne i et de la colonne j.

(ii) Co-facteur d'ordre (i,j) le scalaire $(-1)^{i+j}\det(A_{ij})$.

(iii) Co-matrice de A, la matrice des co-facteurs. On la note $com(A)$.

Exemple 2.4.3. *Si* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ *alors,* $\det(A) = -2$,

$$com(A) = \begin{pmatrix} \det(A_{11}) & -\det(A_{12}) & \det(A_{13}) \\ -\det(A_{21}) & \det(A_{22}) & -\det(A_{23}) \\ \det(A_{31}) & -\det(A_{32}) & \det(A_{33}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 7 & -3 & -5 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

et

$$A \times (com(A))^T = (com(A))^T \times A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \det(A).I_3$$

Theorem 2.4.4. *Une matrice carrée $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ est inversible si et seulement si, $\det(A) \neq 0$. Dans ce cas,*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \bullet (com(A))^T. \qquad (2.4.2)$$

Preuve. Supposons que A est inversible. Il existe donc une matrice carrée A^{-1} vérifiant $A \times A^{-1} = I_n = A^{-1} \times A$. Par application du théorème 2.4.1,

$$1 = \det(I_n) = \det(A). \det(A^{-1}),$$

ce qui implique que $\det(A) \neq 0$. La formule 2.4.1 nous donne,

$$A \times \left(\frac{1}{\det(A)}(com(A))^T\right) = \left(\frac{1}{\det(A)}(com(A)\right))^T \times A = I_n.$$

On a donc obligatoirement $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \bullet (com(A))^T$.
Inversement, si $\det(A) \neq 0$ alors, la formule 2.4.1 montre clairement que A est inversible. □

Exemple 2.4.5. *Pour la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$*, on a déjà vu que*

$$\det(A) = -2 \quad \text{et} \quad com(A) = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 7 & -3 & -5 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, A est in versible et

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \bullet (com(A))^T = \frac{-1}{2} \bullet \begin{pmatrix} -4 & 7 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 2 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exemple 2.4.6. *Soit la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nous avons déjà vu plus haut (voir section : Règles de calcul des déterminants) que $\det(A) = 6$. *Cette matrice est donc inversible. Sa co-matrice est donnée par la formule :*

$$com(A) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -2 \\ 3 & -6 & 9 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Finalement, en utilisant la formule d'inversion 2.4.2, on obtient :

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \bullet \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & -6 & 0 & 4 \\ 0 & 9 & -3 & -6 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.5 Exercices corrigés

Exercice 2.5.1. *Pour chacune des matrices suivantes, calculer le déterminant et trouver la matrice inverse quand elle existe :*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Solution :

(i) $\det(A) = 1$. De plus,

$$com(A) = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^{-1} = \frac{1}{det(A)}(com(A))^T = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

(ii) En développant suivant la première ligne, on obtient :

$$\det(B) = -\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 + 1 = 2.$$

D'autre part,

$$com(B) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B^{-1} = \frac{1}{det(B)}(com(B))^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(iii) En remplaçant la ligne L_1 par $L_1 - L_2$, on obtient :

$$\det(C) = \det \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

En remplaçant la colonne C_2 par $C_2 + C_1$, on obtient :

$$\det(C) = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 2 \det \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

En remplaçant C_3 par $C_3 - C_2$, on obtient :

$$\det(C) = 2\det\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

En remplaçant finalement L_2 par $L_2 + L_3$, on aura :

$$\det(C) = 2\det\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 4\det\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = 48.$$

Un calcul direct permet de vérifier que $com(C)$ est la matrice symétrique suivante

$$com(C) = \begin{pmatrix} 20 & -4 & -4 & -4 \\ -4 & 20 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & 20 & -4 \\ -4 & -4 & -4 & 20 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent,

$$C^{-1} = \frac{1}{\det(C)}\,(com(C))^T = \frac{1}{48}\begin{pmatrix} 20 & -4 & -4 & -4 \\ -4 & 20 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & 20 & -4 \\ -4 & -4 & -4 & 20 \end{pmatrix}.$$

□

Exercice 2.5.2. *Trouver sans les calculer directement les déterminants des matrices suivantes :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{pmatrix}.$$

Solution :

1) En remplaçant la ligne L_3 par $L_3 + L_2$ et en utilesant les prpositions 2.2.1 et 2.2.3, on obtient :

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a+b+c & b+a+c & c+a+b \end{pmatrix} = (a+b+c)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

2) En remplaçant la ligne L_1 par $L_1 + L_2 + L_3$ et en appliquant la proposition 2.2.1, on obtient :

$$\det(B) = (a+b+c)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{pmatrix}.$$

En remplaçant la colonne C_1 par la colonne $C_1 - C_2$ et en développant suivant la ligne 2, on obtient :

$$\det(B) = (a+b+c)^2 \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2c & c-a-b \end{pmatrix} = -(a+b+c)^3.$$

3) En remplaçant L_2 par $L_2 - L_1$ et L_3 par $L_3 - L_1$, on obtient

$$\begin{aligned} \det(C) &= \det\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 & b^3-a^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 0 & d-c & d^2-c^2 & d^3-c^3 \end{pmatrix} \\ &= \det\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & b-a & (b-a)(b+a) & (b-a)(a^2+ab+b^2) \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 0 & d-c & (d-c)(c+d) & (d-c)(c^2+cd+d^2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où, par application de la proposition 2.2.1,

$$\det(C) = (b-a)(d-c)\det\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & b-a & b+a & a^2+ab+b^2 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 0 & 1 & c+d & c^2+cd+d^2 \end{pmatrix}.$$

En remplaçant maintenant L_3 par $L_3 - L_1$ et en appliquant à nouveau la proposition 2.2.1, on obtient :

$$\begin{aligned} \det(C) &= (b-a)(d-c)\det\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & b+a & a^2+ab+b^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 & c^3-a^3 \\ 0 & 1 & c+d & c^2+cd+d^2 \end{pmatrix} \\ &= (b-a)(d-c)\det\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & b+a & a^2+ab+b^2 \\ 0 & c-a & (c-a)(c+a) & (c-a)(a^2+ac+c^2) \\ 0 & 1 & c+d & c^2+cd+d^2 \end{pmatrix} \\ &= (b-a)(d-c)(c-a)\det\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & b+a & a^2+ab+b^2 \\ 0 & 1 & a+c & a^2+ac+c^2 \\ 0 & 1 & c+d & c^2+cd+d^2 \end{pmatrix} \\ &= (b-a)(d-c)(c-a)\det\begin{pmatrix} 1 & b+a & a^2+ab+b^2 \\ 1 & a+c & a^2+ac+c^2 \\ 1 & c+d & c^2+cd+d^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En remplaçant L_1 par $L_1 - L_2$ et L_3 par $L_3 - L_2$ et toujours d'après la proposition 2.2.1,

$$
\begin{aligned}
\det(C) &= (b-a)(d-c)(c-a)\det\begin{pmatrix} 0 & b-c & (ab-ac)+(b^2-c^2) \\ 1 & a+c & a^2+ac+c^2 \\ 0 & d-a & +(cd-ac)+(d^2-a^2) \end{pmatrix} \\
&= (b-a)(d-c)(c-a)\det\begin{pmatrix} 0 & b-c & (b-c)(a+b+c) \\ 1 & a+c & a^2+ac+c^2 \\ 0 & d-a & +(d-a)(a+c+d) \end{pmatrix} \\
&= (b-a)(d-c)(c-a)(b-c)(d-a)\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & a+b+c \\ 1 & a+c & a^2+ac+c^2 \\ 0 & 1 & a+c+d \end{pmatrix} \\
&= -(b-a)(d-c)(c-a)(b-c)(d-a)\det\begin{pmatrix} 1 & a+b+c \\ 1 & a+c+d \end{pmatrix} \\
&= (b-a)(d-c)(c-a)(b-c)(d-a)(b-d).
\end{aligned}
$$

□

Exercice 2.5.3. *Déterminer les parmètres réels m pour lesquels la matrice A_m est inversible.*

$$
A_m = \begin{pmatrix} m & -1 & 0 & -1 \\ -1 & m & -1 & 0 \\ 0 & -1 & m & -1 \\ -1 & 0 & -1 & m \end{pmatrix}.
$$

Solution : En remplaçant L_1 par $L_1 + L_2 + L_3 + L_4$, on obtient

$$
\det(A_m) = \det\begin{pmatrix} m-2 & m-2 & m-2 & m-2 \\ -1 & m & -1 & 0 \\ 0 & -1 & m & -1 \\ -1 & 0 & -1 & m \end{pmatrix} = (m-2)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & m & -1 & 0 \\ 0 & -1 & m & -1 \\ -1 & 0 & -1 & m \end{pmatrix}
$$

En remplaçant C_1 par $C_1 - C_3$, on a :

$$
\begin{aligned}
\det(A_m) &= (m-2)\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & m & -1 & 0 \\ -m & -1 & m & -1 \\ 0 & 0 & -1 & m \end{pmatrix} = -m(m-2)\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & m & -1 & 0 \\ 1 & -1 & m & -1 \\ 0 & 0 & -1 & m \end{pmatrix} \\
&= m(m-2)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & -1 & 0 \\ 0 & -1 & m \end{pmatrix} = m(m-2)\left\{\det\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & m \end{pmatrix} - m\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & m \end{pmatrix}\right\} \\
&= m(2-m)\left\{-m - m(1+m)\right\} \\
&= -m^2(2-m)(2+m).
\end{aligned}
$$

Par conséquent, la matrice A_m est inversible si et seulement si, $m \notin \{-2, 0, 2\}$. $\square$

Exercice 2.5.4. *On considère le déterminant*

$$D_n = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(i) Calculer $D_1,\ D_2,\ D_3,\ D_4$.
(ii) En développant suivant la première colonne, exprimer D_n en fonction de D_{n-1} et D_{n-2}.
(iii) En déduire D_n.

Solution :
(i) Un calcul direct nous donne :

$$D_1 = 2\ , \quad D_2 = 3\ , \quad D_3 = 4\ , \quad D_4 = 5.$$

(ii) En développant suivant la première colonne, on obtient pour $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} D_n &= 2.\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= 2D_{n-1} - \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En développant le déterminant restant suivant la ligne 1, on aura :

$$D_n = 2.D_{n-1} - D_{n-2}.$$

(iii) On remarque du point (i) que

$$D_1 = 1 + 1, \quad D_2 = 2 + 1, \quad D_3 = 3 + 1, \quad D_4 = 4 + 1.$$

La formule générale qui se dégage est donc $D_n = n + 1$.
Montrons par récurrence que cette formule est vriae pour tout naturel $n \geq 1$. Pour cela, supposons qu'elle est vraie pour toutes les valeurs naturelles inférieures ou égales à n donné et montrons qu'elle est encore vraie pour $n + 1$. D'après le point (ii),

$$D_{n+1} = 2.D_n - D_{n-1} = 2(n+1) - n = n + 2.$$

$\square$

Chapitre 3

Systèmes linéaires d'équations

3.1 Définitions générales et exemples

Définition 3.1.1. *Un système linéaire S à n équations et p inconnues est une expression de la forme :*

$$(S) : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases} \tag{3.1.1}$$

ou sous forme condensée

$$\sum_{j=1}^{p} a_{ij}x_j = b_i \ , \quad 1 \leq i \leq n. \tag{3.1.2}$$

Les a_{ij} appartiennent au corps commutatif $\mathbb{K}$ et sont appelés coefficients du système (S). $x_1, x_2, \cdots, x_p$ sont les inconnues de ce système.

Résoudre le système (S) c'est trouver tous les p -uplets $x_1, x_2, \cdots, x_p$ vérifiant en même temps les n équations de 3.1.1. L'ensemble de ces p -uplets est appelé ensemble solution du système (S) et est noté $Sol(S)$.
Si, l'ensemble $Sol(S)$ est vide, on dit que le système (S) est incompatibe. Cela signifie qu'au moins deux de ses équations sont contradictoires.

Exemple 3.1.2. *Le système à 3 équations et deux uniques inconnues*

$$(S_1) : \begin{cases} x + 2y = 3 \\ x - 2y = -1 \\ x + 3y = 4 \end{cases} \tag{3.1.3}$$

admet une solution unique : $Sol(S_1) = \{(1,1)\}$. En effet, on voit aisément que $(x_0, y_0) = (1,1)$ est le seul couple vérifiant simultanément les équations 1 et 2 du système (S_1). De plus, $(x_0, y_0) = (1,1)$ vérifie aussi la dernière équation.

Exemple 3.1.3. *Le système à 3 équations et deux uniques inconnues*

$$(S_2) : \begin{cases} x + 2y = 3 \\ x - 2y = -1 \\ x + 3y = 5 \end{cases} \tag{3.1.4}$$

est incompatible (n'admet pas de solution). En effet, d'après l'exemple précédent, $(x_0, y_0) = (1,1)$ est le seul couple vérifiant simultanément les équations 1 et 2. Mais, $(x_0, y_0) = (1,1)$ ne vérifie pas la dernière équation.

Exemple 3.1.4. *Le système à 3 équations et deux uniques inconnues*

$$(S_3) : \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 6 \\ 3x + 6y = 9 \end{cases} \tag{3.1.5}$$

admet une infinité de solutions. En effet, ce système se réduit à une seule équation (S_3) : $x + 2y = 3$ dont l'ensemble solution est

$$Sol(S_3) = \left\{ (x, \frac{3-x}{2}) : \ x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Définition 3.1.5. *Le système 3.1.1 est dit homogène si $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0_{\mathbb{K}}$. Dans le cas contraire, il est dit non homogène.*

Il est important de noter que l'ensemble solution d'un système homogène n'est jamais vide car, il contient au moins le p -uplet $(0_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}}, \cdots, 0_{\mathbb{K}})$.

Définition 3.1.6. *Le système (S) est dit réductible si au moins l'une de ses équations s'écrit comme combinaison linéaire des autres équations. Dans le cas contraire, le système est dit irréductible.*

Exemple 3.1.7. *Le système (S_3) est réductible à la seule équation $x + 2y = 4$.*

Définition 3.1.8. *Deux systèmes (S_1) et (S_2) sont dits équivalents si leurs ensembles solutions coïncident : $Sol(S_1) = Sol(S_2)$.*

Exemple 3.1.9. *1) Le système (S_1) est équivalent au système :*

$$(S_4) : \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x - 2y = -1 \\ x + 3y = 4 \end{cases}$$

2) Les systèmes (S_1) et (S_2) ne sont pas équivalents. De même pour les systèmes (S_1) et (S_3).

Remarque 3.1.10. *Il est clair que pour un système réductible, on peut réduire le nombre d'équations en éliminant les équations qui sont combinaisons linéaires des autres. Le nouveau système ainsi obtenu est équivalent à l'initial.*

3.2 Ecriture matricielle d'un système linéaire

Le système 3.1.1 peut être réécrit sous forme d'égalité matricielle comme suit :

$$A \times X = B \tag{3.2.1}$$

où,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2p} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{np} \end{pmatrix} \quad ; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_p \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}. \tag{3.2.2}$$

A est appelée matrice du système, X -vecteur des inconnues et B -second membre.

Exemple 3.2.1. *Les systèmes* $(S_1), (S_4)$ *ci-dessus admettent respectivement les écritures matricielles suivantes :*

$$(S_1) : \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad ; \quad (S_4) : \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Définition 3.2.2. *Le système 3.2.1 est dit homogène si toutes les composantes du second membre* B *sont égales à* $0_{\mathbb{K}}$.

Si le system est homogène alors, son ensemble-solutions n'est jamais vide car, il contient au moins la solution $x_1 = x_2 = \cdots = x_p = 0_{\mathbb{K}}$.

3.3 Systèmes de Cramer

Définition 3.3.1. *Le système 3.1.1 est dit de Cramer si, la matrice associée est carrée et inversible ce qui équivaut à dire qu'elle est carrée et à déterminant non nul.*

Exemples 3.3.2. *1) Aucun des systèmes* $(S_1), (S_2), (S_3), (S_4)$ *n'est de Cramer car, les matrices associées ne sont même pas carrées.*
2) Le système suivant est de Cramer :

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x - 2y = -1 \end{cases} \quad ; \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = -4 \neq 0.$$

Le système suivant n'est pas de Cramer :

$$\begin{cases} x+2y+z=3 \\ x-2y+z=-1 \\ x+z=1 \end{cases} \quad ; \quad \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Theorem 3.3.3. *Tout système de Cramer* (S) *d'écriture matricielle* $A \times X = B$ *admet une solution unique* $X = A^{-1} \times B$.

Preuve. Comme la matrice A est inversible alors,

$$X = I_n \times X = (A^{-1} \times A) \times X = A^{-1} \times (A \times X) = A^{-1} \times B.$$

□

Exemple 3.3.4. *Soit le système* (S) *d'écriture matricielle* $A \times X = B$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On sait déjà (voir chapitre : Calcul des déterminants, section : Inversion des matrices) que A *est inversible avec*

$$det(A) = -2 \quad et \quad A^{-1} = \frac{-1}{2}.\begin{pmatrix} -4 & 7 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 2 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent l'unique solution est donnée par la formule

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{-1}{2}.\begin{pmatrix} -4 & 7 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 2 & -5 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2}.\begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Nous allons maintenant proposer une méthode de résolution plus pratique pour un système de Cramer. Son avantage principal réside dans le fait qu'elle nous évite le calcul de l'inverse de A ce qui en soit constitue un grand acquis dans le cas des matrices de grandes tailles.

Theorem 3.3.5. *Soit (S) un système de Cramer d'écriture matricielle $A \times X = B$ où,*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix} \quad ; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Alors,

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \; \dots \;, \quad x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

où, A_i est la matrice en remplaçant dans A les éléments de la colonne i par les éléments de B.

Preuve. En utilisant les propriétés de linéarité et d'homogeneité des déterminants par rapport aux colonnes, on a d'une part

$$\det \begin{pmatrix} x_1.a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ x_1.a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ x_1.a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix} = x_1. \det(A) \tag{3.3.1}$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} x_1.a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ x_1.a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ x_1.a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} b_1 - \sum_{j=2}^n a_{1j}x_j & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ b_2 - \sum_{j=2}^n a_{2j}x_j & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ b_n - \sum_{j=2}^n a_{nj}x_j & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ b_n & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix} = \det(A_1). \end{aligned}$$

En comparant avec 3.3.1, on obtient que $x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}$.

Pour trouver x_2, on raisonne de manière analogue et on montre que d'une part,

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & x_2.a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & x_2.a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & x_2.a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix} = x_2.\det(A)$$

et que d'autre part,

$$\begin{aligned} \det\begin{pmatrix} a_{11} & x_2.a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & x_2.a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & x_2.a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} a_{11} & b_1 - \sum_{j\neq 2}^{n} a_{1j}x_j & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 - \sum_{j\neq 2}^{n} a_{2j}x_j & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & b_n - \sum_{j\neq 2}^{n} a_{nj}x_j & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \det\begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & b_n & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix} = \det(A_2). \end{aligned}$$

D'où, après comparaison, $x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}$.
Le même raisonnement peut être appliqué pour étendre le théorème aux autres inconnues. □

Si on désigne par Cj la colonne j de la matrice A alors, la solution du système $A \times X = B$ s'écrit sous la forme :

$$x_1 = \frac{\det(B, C_2, \cdots, C_n)}{\det(A)}, \quad x_2 = \frac{\det(C_1, B, C_3, \cdots, C_n)}{\det(A)}, \quad x_n = \frac{\det(C_1, C_2, \cdots, B)}{\det(A)}.$$

Exemple 3.3.6. *A titre d'application, nous allons vérifier la validité du théorème 3.3.5 sur l'exemple précédent. On a :*

$$x_1 = \frac{1}{-2}.\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{-9}{2} \quad , \quad x_2 = \frac{1}{-2}.\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{2},$$

$$x_3 = \frac{1}{-2}.\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \frac{7}{2}$$

3.4 Systèmes linéaires surjectifs

Définition 3.4.1. *Soit (S) un système linéaire d'écriture matricielle $A \times X = B$ où $A \in \mathbb{K}^{n \times p}$, $n \leq p$. Le système (S) est dit surjectif si A contient n colonnes qui forment une matrice carrée inversible.*

Dans un système surjectif, le nombre p des inconnues est supérieur au nombre n d'équations. Si $n = p$ alors, (S) est surjectif si et seulement si, il est de Cramer.

Exemple 3.4.2. *Le système (S) suivant est surjectif :*

$$\begin{cases} x + y - z + t = 1 \\ x + y - 2z - t = 0 \end{cases} .$$

En effet la matrice associée à ce système est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

et (par exemple) la sous-matrice

$$(C_1, C_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

est inversible. Cela permet de regarder x et z comme inconnues par contre, y et t comme paramètres variables. Ainsi, pour y, t fixés, le système (S) est équivalent aus système de Cramer :

$$(S_{y,t}) : \begin{cases} x - z = 1 - y - t \\ x - 2z = -y + t \end{cases} .$$

Pour les ensembles solutions, on a :

$$Sol(S_{y,t}) = \{(x, z) = (2 - y - 3t, 1 - 2t)\},$$

$$Sol(S) = \{(2 - y - 3t, y, 1 - 2t, t) : y, t \in \mathbb{R}\}.$$

Remarque 3.4.3. *On remarque que la matrice*

$$(C_3, C_4) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

est aussi inversible cela signifie qu'on considérer z et t comme inconnues, x et y comme paramètres variables. Dans ce cas, pour x, y fixés, le système (S) est équivalent aus système de Cramer :

$$(S_{x,y}) : \begin{cases} -z + t = 1 - x - y \\ -2z - t = -x - y \end{cases} .$$

Pour les ensembles solutions, on a :

$$Sol(S_{x,y}) = \left\{(x,y) = \left(\frac{2x+2y-1}{3}, \frac{-x-y+2}{3}\right)\right\},$$

$$Sol(S) = \left\{\left(x, y, \frac{2x+2y-1}{3}, \frac{-x-y+2}{3}\right) : x, y \in \mathbb{R}\right\}.$$

Dans le cas général, on procède comme suit : Si (S) est un système linéaire d'écriture matricielle : $A \times X = B$ alors,

1) On choisit dans A p-colonnes $C_{i_1}, C_{i_2}, \cdots, C_{i_p}$ telles que la matrice carrée $A_{i_1,i_2,\cdots,i_p} = \left(C_{i_1}, C_{i_2}, \cdots, C_{i_p}\right)$ soit inversible.

2) On résoude le système de Cramer $(S_{i_1,i_2,\cdots,i_p}$ dans lequel $x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_p}$ sont regardées comme inconnues et $x_j : j \neq i_1$ comme paramétres variables.

3) On écrit les ensembles solutions comme montré dans l'exemple.

Exemple 3.4.4. *Considèrons le système :*

$$(S) : \begin{cases} 2x + y + 2z + 3t = 1 \\ x - y - t = 2 \end{cases}.$$

La matrice assosciée est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On remarque par exemple que la matrice carrée $A_{1,2}$ formée par les deux premières colonnes est inverssibles. (S) est donc un système surjectif. Le système de Cramer correspondant est :

$$(S_{1,2}) : \begin{cases} 2x + y = 1 - 2z - 3t \\ x - y = 2 + t \end{cases}$$

où z, t sont considérés coomme des paramètres variables. Pour les ensemles solutions, on a :

$$Sol(S_{1,2}) = \left\{(x,y) = \left(\frac{3-2z-2t}{3}, \frac{-3-2z-5t}{3}\right)\right\},$$

$$Sol(S) = \left\{\left(\frac{3-2z-2t}{3}, \frac{-3-2z-5t}{3}, z, t\right) : z, t \in \mathbb{R}\right\}.$$

3.5 Exercices corrigés

Exercice 3.5.1. *Donner l'écriture matricielle de chacun des systèmes suivants, puis le résoudre.*

$$(S_1) : \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2y - z = -2 \\ 3x - 4y + 2z = 0 \end{cases}, \quad (S_2) : \begin{cases} 2x - 5y + 3z + t = 5 \\ 3x + 7y + 3z - t = -1 \\ 5x - 9y + 6z + 2t = -7 \\ 4x - 6y + 3z + t = -8 \end{cases}.$$

Solution : 1) Le système (S_1) admet l'écriture matricielle : $A_1 \times X = B_1$ où,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad , \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Un calcul direct permet de vérifier que $\det(A_1) = 3 \neq 0$. Le système (S_1) est donc de Cramer. En appliquant le théorème 3.3.5, on obtient :

$$x = \frac{1}{3}\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} \;,\; y = \frac{1}{3}\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \;,\; z = \frac{1}{3}\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) Le système (S_2) admet l'écriture matricielle : $A_2 \times X = B_2$ où,

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 3 & -1 \\ 5 & -9 & 6 & 2 \\ 4 & -6 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \quad , \quad B_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Un calcul Un calcul direct nous donne $\det(A_2) = 54 \neq 0$. Le système (S_2) est donc de Cramer. En appliquant le théorème 3.3.5, on obtient :

$$x = \frac{1}{54}\det\begin{pmatrix} 5 & -5 & 3 & 1 \\ -1 & 7 & 3 & -1 \\ -7 & -9 & 6 & 2 \\ -8 & -6 & 3 & 1 \end{pmatrix} \;,\; y = \frac{1}{54}\det\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 3 & -1 \\ 5 & -7 & 6 & 2 \\ 4 & -8 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$z = \frac{1}{54}\det\begin{pmatrix} 2 & -5 & 5 & 1 \\ 3 & 7 & -1 & -1 \\ 5 & -9 & -7 & 2 \\ 4 & -6 & -8 & 1 \end{pmatrix} \;,\; t = \frac{1}{54}\det\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 3 & -1 \\ 5 & -9 & 6 & -7 \\ 4 & -6 & 3 & -8 \end{pmatrix}.$$

□

Exercice 3.5.2. *On considère la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Montrer que A est inversible et calculer son inverse A^{-1}.
2) Résoudre le système

$$(S) : \begin{cases} x - z = 1 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ -3x + z = 3 \end{cases}$$

<u>Solution :</u>
1) Un développement selon la première ligne nous donne $\det(A) = -2 \neq 0$. La matrice A est donc inversible.
La comatrice associée à A est la matrice

$$com(A) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'où,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \left(com(A)\right)^T = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Le système (S) admet l'écriture matricielle

$$A \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Comme A est une matrice inversible alors, on a une solution unique

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

□

Exercice 3.5.3. *Soit le système*

$$(S_\alpha) : \quad \begin{cases} 2\alpha x + y + z = 2 \\ x + 2\alpha y + z = 2\alpha \\ x + y + 2\alpha z = 2\alpha + 2 \end{cases}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

1) Donner l'ecriture matricielle de (S_α).
2) Pour quelles valeurs de α, le système (S_α) est-il de Cramer ?
3) Résoudre (S_α).

<u>Solution :</u> 1) L'écriture matricielle du système (S_α) est :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2\alpha & 1 & 1 \\ 1 & 2\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 2\alpha \end{pmatrix}}_{A_\alpha} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2\alpha \\ 2\alpha + 2 \end{pmatrix}.$$

2) Le système (S_α) est de Cramer si et seulement si, sa matrice A_α est inversible, ce qui revient à $\det(A_\alpha) \neq 0$. En utilisant les propriètés des déterminants, on obtient :

$$\begin{aligned}
\det(A_\alpha) &= \det\begin{pmatrix} 2\alpha & 1 & 1 \\ 1 & 2\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 2\alpha \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2\alpha & 1 & 0 \\ 1 & 2\alpha & 1-2\alpha \\ 1 & 1 & 2\alpha-1 \end{pmatrix} \\
&= (2\alpha-1).\det\begin{pmatrix} 2\alpha & 1 & 0 \\ 1 & 2\alpha & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (2\alpha-1).\det\begin{pmatrix} 2\alpha & 1 & 0 \\ 2 & 2\alpha+1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= (2\alpha-1)(4\alpha^2+2\alpha-2) = 2(\alpha+1)(2\alpha-1)^2.
\end{aligned}$$

Ainsi, (S_α) est de Cramer si et seulement si, $\alpha \notin \left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$.
3) **Résolution du système** : Si, $\alpha \notin \left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$, le système (S_α) admet une solution unique de la forme :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A_\alpha^{-1} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2\alpha \\ 2\alpha+2 \end{pmatrix}.$$

Si $\alpha = \frac{1}{2}$, le système devient :

$$(S_{\frac{1}{2}}) : \quad \begin{cases} x+y+z=2 \\ x+y+z=1 \\ x+y+z=3 \end{cases}.$$

On voit bien que ces trois équations sont incompatibles et donc, le système $(S_{\frac{1}{2}})$ n'admet aucune solution.
Si $\alpha = -1$, le système devient

$$(S_{-1}) : \quad \begin{cases} -2x+y+z=2 \\ x-2y+z=-2 \\ x+y-2z=0 \end{cases}.$$

Il est équivalent au système

$$\begin{cases} x+y=2z \\ x-2y=-2-z \end{cases}.$$

Par rapport aux deux inconnues x et y c'est un système de Cramer dont les solutions pour chaque valeur fixée de z, sont

$$x(z) = \frac{3z-2}{3}\ ,\ y(z) = \frac{3z+2}{3}.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions du système (S_{-1}) est

$$Sol(S_{-1}) = \left\{(x,y,z) = \left(\frac{3z-2}{3}, \frac{3z+2}{3}, z\right) :\ z \in \mathbb{R}\right\}.$$

$\square$

Exercice 3.5.4. *Soit la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Montrer que A est inversible et que son inverse est la matrice

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Déterminer tous les polynômes réels P de degré inférieur ou égal à 4 et vérifiant les conditions :

$$P(1) = 0 = P'(1)\ ,\ \ P'(-1) = 1.$$

<u>Solution :</u> 1) On vérifie facilement que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 4.I_4.$$

Par conséquent, la matrice A est inversible et son inverse est

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Les polynômes recherchés sont de la forme :

$$P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + a_4X^4$$

où, les coefficients réels vérifient le sytème

$$(S_P) : \begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0 & \longrightarrow (P(1) = 0) \\ a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 = 0 & \longrightarrow (P'(1) = 0) \\ a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 = 1 & \longrightarrow (P(-1) = 1) \end{cases}.$$

On a donc un système de trois équations et à cinq inconnues. Son écriture matricielle est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On remarque que les trois premières colonnes de la matrice associée à ce système est la matrice inversible A. Cela signifie que (S_P) est surjective et qu'il est possible d'exprimer (et de manière unique) les coefficients $a_0,\ a_1,\ a_2$ en fonction des coefficients $a_3,\ a_4$ selon la formule :

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = A^{-1} \times \begin{pmatrix} -a_3 - a_4 \\ -3a_3 - 4a_4 \\ 1 + a_3 - a_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 + 4a_3 + 4a_4 \\ 2 + 4a_3 \\ 1 - 4a_3 - 8a_4 \end{pmatrix}.$$

En faisant varier a_3 et a_4 dans $\mathbb{R}$, on on obtient toutes les possibilités pour P. On peut donc conclure que les polynômes reherchés sont de la forme :

$$\frac{1+4a+4b}{4} + \frac{2+4a}{4}X + \frac{1-4a-8b}{4}X^2 + aX^3 + bX^4, \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

$\square$

Chapitre 4

Espaces et sous-espaces vectoriels

4.1 Espaces vectoriels

4.1.1 Définitions et exemples

Définition 4.1.1. *Un espace vectoriel sur un corps commutatif* $\mathbb{K}$ *est un ensemble non vide muni d'une opération interne* $+ : E \times E \longrightarrow E$ *et d'une opération* $. : \mathbb{K} \times E \longrightarrow E$ *"dite opération externe sur* E*" telles que :*

(vect1) Le couple $(E, +)$ *est un groupe commutatif.*

(vect2) Pour tout couple $(x, y) \in E \times E$ *et tout* $\alpha \in \mathbb{K}$ *:*

$$\alpha.(x + y) = (\alpha.x) + (\alpha.y)$$

(vect3) Pour tout $x \in E$ *et tout couple* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ *:*

$$(\alpha + \beta).x = (\alpha.x) + (\beta.x)$$

(vect4) Pour tout $x \in E$ *et tout couple* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ *:*

$$\alpha.(\beta.x) = (\alpha.\beta).x$$

(vect5) $1_{\mathbb{K}}.x = x$ *pour tout* $x \in E$

Le lecteur remarquera que dans la définition, nous avons utilisé les mêmes symbôles $+$ et . pour désigner les opérations dans l'espace vectoriel E et les opérations dans le corps $\mathbb{K}$. Il lui appartient donc à chaque fois de distinguer dans quelle situation on est.

Convention 4.1.2. *Si* E *est un espace vectoriel sur le corps commutatif* $\mathbb{K}$ *alors,*

- *Les éléments de* E *sont appelés vecteurs, les éléments de* $\mathbb{K}$ *sont appelés scalaires.*
- *Les opérations* $+$ *et . sont respectivement appelés " addition ou somme vectorielle " et "*

multiplication d'un vecteur par un scalaire ".

- *L'élément neutre du groupe commutatif $(E,+)$ se note 0_E et est appelé " le vecteur nul de l'espace vectoriel " E.*
- *Si x est un vecteur dans E alors, son symétrique pour l'addition vectorielle $+$ sera noté $-x$. Pour cela, l'écriture $x-y$ signifiera $x+(-y)$.*
- *Afin d'alléger le texte, on écrira (par fois) dans la suite : E est un $\mathbb{K}$ -e.v. pour signifier que E est espace vectoriel sur le corps commutatif $\mathbb{K}$.*
- *Dire que E est un espace vectoriel réel (respectivement complexe) signifie que $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ (respectivement $\mathbb{K}=\mathbb{C}$).*

Exemple 4.1.3. *Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif et $n \geq 1$ un entier naturel. Définissons les opérations $+$ et $.$ comme suit :*

$$\left\{\begin{array}{l} x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{K}^n \\ y=(y_1,\cdots,y_n)\in\mathbb{K}^n \\ \alpha\in\mathbb{K} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y=(x_1+y_1,\cdots,x_n+y_n) \\ \alpha.x=(\alpha.x_1,\cdots,\alpha.x_n) \end{array}\right.$$

Il est clair que $+$ est une opération interne dans E et que $.$ est une externe sur E. Muni de ces deux opérations, l'ensemble $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$ -e.v. En effet, en utilisant les propriétés du corps $\mathbb{K}$ on vérifie son grande difficulté que l'addition vectorielle $+$ est commutative, et associative dans $\mathbb{K}^n$. L'élément neutre pour cette opération est le n-uplet $0_{\mathbb{K}^n}=(O_{\mathbb{K}},\cdots,O_{\mathbb{K}})$. Le symétrique de $x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{K}^n$ est $-x=(-x_1,\cdots,-x_n)$. Ainsi, $(\mathbb{K}^n,\ +)$ est un groupe commutatif.
Par ailleurs, pour tout $(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2$ et tout $(x,y)\in\mathbb{K}^n\times\mathbb{K}^n$

1)

$$\begin{aligned} \alpha.(x+y) &= \alpha.(x_1+y_1,\cdots,x_n+y_n)=(\alpha.(x_1+y_1),\cdots,\alpha.(x_n+y_n)) \\ &= (\alpha.x_1+\alpha.y_1,\cdots,\alpha.x_n+\alpha.y_n) \\ &= (\alpha.x_1,\cdots,\alpha.x_n)+(\alpha.y_1,\cdots,\alpha.y_n) \\ &= (\alpha.x)+(\alpha.y) \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} (\alpha+\beta).x &= (\alpha+\beta).(x_1,\cdots,x_n)=((\alpha+\beta).x_1,\cdots,(\alpha+\beta).x_n) \\ &= (\alpha.x_1+\beta.x_1,\cdots,\alpha.x_n+\beta.x_n) \\ &= (\alpha.x_1,\cdots,\alpha.x_n)+(\beta.x_1,\cdots,\beta.x_n) \\ &= (\alpha.x)+(\beta.x). \end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned} \alpha.(\beta.x) &= \alpha.(\beta.x_1,\cdots,\beta.x_n)=(\alpha.(\beta.x_1),\cdots,\alpha.(\beta.x_n)) \\ &= ((\alpha.\beta).x_1,\cdots,(\alpha.\beta).x_n)=(\alpha.\beta).(x_1,\cdots,x_n) \\ &= (\alpha.\beta).x \end{aligned}$$

4)

$$1_{\mathbb{K}}.x = 1_{\mathbb{K}}.(x_1,\cdots,x_n)=(1_{\mathbb{K}}.x_1,\cdots,1_{\mathbb{K}}.x_n)=(x_1,\cdots,x_n)=x.$$

Remarque 4.1.4. *Il découle de l'exemple 4.1.3 que tout corps commutatif $\mathbb{K}$ peut être regardé comme un espace vectoriel. En d'autres termes, ces éléments peuvent être regardés comme scalaires ou comme vecteurs.*

Exemple 4.1.5. *Soit X un ensemble non vide et soit $\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$ l'ensemble des applications (fonctions) f définies sur X et à valeurs $\mathbb{R}$. Définissons les opérations $+$ et $.$ comme suit :*

$$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall (f,g) \in \mathcal{F}(X,\mathbb{R}) \times \mathcal{F}(X,\mathbb{R}) : \begin{cases} f+g : X \longrightarrow \mathbb{R}; & x \longmapsto (f+g)(x) = f(x)+g(x) \\ \alpha.f : X \longrightarrow \mathbb{R}; & x \longmapsto (\alpha.f)(x) = \alpha.f(x) \end{cases}$$

Par définition, $+$ est une opération interne dans $\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$ et $.$ est une opération externe sur $\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$. Montrons que muni de ces deux opérations $\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$ -e.v.

1) Pour toutes applications f, g appartenant à $\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$ et pour tout $x \in X$:

$$(f+g)(x) = \underbrace{f(x)+g(x) = g(x)+f(x)}_{commutat.\ de\ +\ dans\ \mathbb{R}} = (g+f)(x).$$

Ainsi, $f+g = g+f$ et donc, $+$ est commutative dans $\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$.

2) Pour toutes applications f, g, h appartenant à $\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$ et pour tout $x \in X$:

$$\begin{aligned} [(f+g)+h](x) &= (f+g)(x)+h(x) = \underbrace{(f(x)+g(x))+h(x) = f(x)+(g(x)+h(x))}_{associat.\ de\ +\ dans\ \mathbb{R}} \\ &= f(x)+(g+h)(x) = [f+(g+h)](x). \end{aligned}$$

Ainsi, $(f+g)+h = f+(g+h)$ et donc, $+$ est associative dans $\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$.

3) Soit l'application

$$\mathcal{O} : X \longrightarrow \mathbb{R};\ x \longmapsto \mathcal{O}(x) = 0.$$

C'est un élément de $\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$. De plus, pour tout $f \in \mathcal{F}(X,\mathbb{R})$ et tout $x \in X$,

$$(f+\mathcal{O})(x) = f(x)+\mathcal{O}(x) = f(x).$$

Cela signifie que $f+\mathcal{O} = f$ pour tout $f \in \mathcal{F}(X,\mathbb{R})$. En d'autres termes l'application $\mathcal{O}$ est l'élément neutre pour la loi $+$.

4) Soit $f \in \mathcal{F}(X,\mathbb{R})$ et définissons l'application

$$-f : X \longrightarrow \mathbb{R};\ x \longmapsto (-f)(x) = -f(x).$$

L'application $-f$ est un élément de $\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$. De plus, pour tout $x \in X$,

$$((-f)+f)(x) = (-f)(x)+f(x) = -f(x)+f(x) = 0.$$

Cela signifie que $(-f)+f = \mathcal{O}$. En d'autres termes, tout élément f de $\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$ admet un élément symétrique qui est l'application $-f$.

En résumé, nous avons prouvé que $(\mathcal{F}(X,\mathbb{R}),+)$ est un groupe commutatif.

Montrons maintrenant que l'opération externe $.$ vérifie les propriétés requises pour un espace vectoriel.

Pour tous $f, g \in \mathcal{F}(X,\mathbb{R})$, tous réels α, β et tout $x \in X$, on a :

5)

$$\begin{aligned}[\alpha.(f+g)](x) &= \alpha.(f+g)(x) = \underbrace{\alpha.(f(x)+g(x)) = \alpha.f(x)+\alpha.g(x)}_{distribut.\ dans\ \mathbb{R}} \\ &= (\alpha.f)(x)+(\alpha.g)(x) = [(\alpha.f)+(\alpha.g)]\,(x).\end{aligned}$$

D'où, $\alpha.(f+g) = (\alpha.f)+(\alpha.g)$.

6)

$$\begin{aligned}[(\alpha+\beta).f]\,(x) &= \underbrace{(\alpha+\beta).f(x) = \alpha.f(x)+\beta.f(x)}_{distribut.\ dans\ \mathbb{R}} \\ &= (\alpha.f)(x)+(\beta.f)(x) = [(\alpha.f)\oplus(\beta.f)]\,(x).\end{aligned}$$

D'où, $(\alpha+\beta).f = (\alpha.f)+(\beta.f)$.

7)

$$[\alpha.(\beta.f)]\,(x) = \alpha.\,[(\beta.f)(x)] = \underbrace{\alpha.\,[\beta.f(x)] = [\alpha.\beta]\,.f(x)}_{associat.\ dans\ \mathbb{R}} = [(\alpha.\beta).f]\,(x).$$

D'où, $\alpha.(\beta.f) = (\alpha.\beta).f$.

8)

$$(1_{\mathbb{R}}.f)(x) = (1.f)(x) = 1.f(x) = f(x).$$

D'où, $1_{\mathbb{R}}.f = 1.f = f$.

Remarque 4.1.6. *Sachant que toute suite réelle est une application de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{R}$*, on peut sur la base de l'exemple qu'on vient juste d'étudier affirmer que l'ensemble* $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ *des suites réelles est aussi un espace vectoriel réel (*$\mathbb{R}$ *-e.v.) pour les mêmes opérations + et ..*

Remarque 4.1.7. *Dans l'exemple 4.1.5 et la remarque 4.1.6, on peut remplacer* $\mathbb{R}$ *par n'importe quel autre corps commutatif.*

Exemple 4.1.8. *L'ensemble* $\mathbb{K}^{n\times m}$ *des matrices (*n *-lignes et* m *-colonnes, à coefficients dans* $\mathbb{K}$*) est un* $\mathbb{K}$ *-espace vectoriel pour l'addition + et la multiplication* $\bullet$ *par un scalaire. En effet, on sait déjà (voir chapitre 1) que* $\mathbb{K}^{n\times m}$ *est un groupe commutatif. Le lecteur peut aisément voir que l'opération externe* $\bullet$ *vérifie les conditions requises pour un espace vectoriel.*

4.1.2 Règles de calcul dans un espace vectoriel

Dans un $\mathbb{K}$ -e.v. E, on a les règles de calcul suivantes. Ces règles sont les extensions au cas général de celles connues en analyse vectorielle élémentaire.

Proposition 4.1.9. *En multipliant le vecteur nul de* E *par n'importe quel scalaire, on retrouve le vecteur nul :*

$$\alpha.0_E = 0_E, \quad \forall\alpha\in\mathbb{K}.$$

Preuve. Sachant que 0_E est l'élément neutre pour l'opération $\oplus$, on a

$$\alpha.0_E = \alpha.(0_E + 0_E) = (\alpha.0_E) + (\alpha.0_E).$$

Cela implique que

$$\begin{aligned} 0_E &= (-(\alpha.0_E)) + (\alpha.0_E) \\ &= \underbrace{(-(\alpha.0_E)) + [(\alpha.0_E) + (\alpha.0_E)] = [(-(\alpha.0_E)) + (\alpha.0_E)] + (\alpha.0_E)}_{associat.\ de\ +} \\ &= (0_E) + (\alpha.0_E) = \alpha.0_E. \end{aligned}$$

□

Proposition 4.1.10. *En multipliant n'importe quel vecteur de E par le zéro de $\mathbb{K}$, on retrouve le vecteur nul de E :*

$$0_{\mathbb{K}}.x = 0_E, \quad \forall x \in E.$$

Preuve On a :

$$0_{\mathbb{K}}.x = (0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}}).x = (0_{\mathbb{K}}.x) + (0_{\mathbb{K}}.x).$$

En raisonnant maintenant de manière analogue à la preuve de la proposition précédente, on obtient

$$\begin{aligned} 0_E &= (-(0_{\mathbb{K}}.x)) + (0_{\mathbb{K}}.x) = (-(0_{\mathbb{K}}.x)) + [(0_{\mathbb{K}}.x) + (0_{\mathbb{K}}.x)] \\ &= [(-(0_{\mathbb{K}}.x)) + (0_{\mathbb{K}}.x)] + (0_{\mathbb{K}}.x) = 0_E + (0_{\mathbb{K}}.x) = 0_{\mathbb{K}}.x \end{aligned}$$

□

Proposition 4.1.11. *Le produit d'un vecteur par un scalaire est égal au vecteur nul si et seulement si, l'une des deux composntes du produit est nulle :*

$$\forall(\alpha, x) \in \mathbb{K} \times E : \alpha.x = 0_E \Longleftrightarrow \alpha = 0_{\mathbb{K}} \quad ou \quad x = 0_E.$$

Preuve. L'implication inverse est une conséquence directe des deux précédentes propositions. Pour montrer l'implication directe, nous allons procéder par exclusion des cas. Pour cela, on montrera que si $\alpha.x = 0_E$ avec $\alpha \neq 0_{\mathbb{K}}$ alors, forcément $x = 0_E$. En effet,

$$\alpha \neq 0_{\mathbb{K}} \Longrightarrow \exists \beta \in \mathbb{K} : \alpha.\beta = \beta.\alpha = 1_{\mathbb{K}}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \alpha.x = 0_E &\Longrightarrow \beta.(\alpha.x) = \beta 0_E = 0_E \\ &\Longrightarrow (\beta.\alpha).x = 0_E \Longrightarrow 1_{\mathbb{K}}.x = 0_E \\ &\Longrightarrow x = 0_E. \end{aligned}$$

□

Proposition 4.1.12. *Pour obtenir le symétrique du produit d'un vecteur par un scalaire, il suffit de remplacer dans le produit l'une des deux composantes par son symétrique dans l'ensemble correspondant :*

$$\forall(\alpha, x) \in \mathbb{K} \times E : -(\alpha.x) = (-\alpha).x = \alpha.(-x).$$

Preuve. on a d'après ce qui précède,

$$0_E = 0_{\mathbb{K}}.x = [\alpha + (-\alpha)]\,.x = (\alpha.x) + ((-\alpha).x) \Longrightarrow (-\alpha).x = -(\alpha.x).$$

De manière analogue,

$$0_E = \alpha.0_E = \alpha.\,[x + (-x)] = (\alpha.x) + (\alpha.(-x)) \Longrightarrow \alpha.(-x) = -(\alpha.x).$$

□

4.2 Sous-espaces vectoriels

4.2.1 Définition, exemples et caractérisation

Définition 4.2.1. *Soient E un $\mathbb{K}$ -e.v. et F une partie non vide de E. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E (s.e.v. de E en abrégé) si,*
(i) $\forall(x, y) \in E^2 :\ x + y \in E$ *(stabilité pour la somme vectorielle).*
(ii) $\forall(\alpha, x) \in \mathbb{K} \times E :\ \alpha.x \in E$ *(stabilité pour la multiplication par un scalaire).*

Remarque 4.2.2. *En utilisant la condition de stabilité pour la multiplication par un scalaire et la deuxième règle de calcul (voir section précédente), on voit bien qu'un s.e.v. contient nécessairement le vecteur nul 0_E. Cependant, un sous-ensemble de E peut contenir le vecteur nul sans pour autant être un s.e.v.. Par exemple dans $\mathbb{R}^2$, l'ensemble*

$$F = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

contient le vecteur nul $0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0)$ mais ce n'est pas un s.e.v. de $\mathbb{R}^2$ car, pour tout $\alpha \succ 1$, le coule $\alpha.(1, 0) = (\alpha, 0)$ n'est pas dans F.

Exemple 4.2.3. *L'ensemble $F = \left\{v = (x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x + y = 0\right\}$ est un s.e.v. de l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^2$. En effet, $F \neq \emptyset$ puisque $(0, 0) \in F$. D'autre part, pour tous $v = (x, y), v' = (x', y')$ dans $\mathbb{R}^2$ et tout scalaire réel α :*
(i) $v + v' = (x + x', y + y')$. *De plus,*

$$(x + x') + (y + y') = (x + y) + (x' + y') = 0 + 0 = 0 \Longrightarrow v + v' \in F.$$

(ii) $\alpha.v = (\alpha.x, \alpha.y)$. *De plus,*

$$(\alpha.x) + (\alpha.y) = \alpha.(x + y) = \alpha.0 = 0 \Longrightarrow \alpha.v \in F.$$

Exemple 4.2.4. *L'ensemble* $F = \{(x+y, x+2y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ *est un s.e.v. de l'espace vectoriel réel* $\mathbb{R}^2$*. En effet,*

$$(0,0) = (0+0, 0+2.0) \Longrightarrow (0,0) \in F.$$

D'autre part, pour tous $v = (x+y, x+2y)$, $v' = (x'+y', x'+2y')$ *dans* $\mathbb{R}^2$ *et tout scalaire réel* α *:*

(i)

$$v+v' = ((x+y)+(x'+y'), (x+2y)+(x'+2y')) = ((x+x')+(y+y'), (x+x')+2(y+y')) \Longrightarrow v+v' \in F.$$

(ii)

$$\alpha.v = (\alpha.(x+y), \alpha.(x+2y)) = (\alpha.x+\alpha.y, \alpha.x+2\alpha.y) \Longrightarrow \alpha.v \in F.$$

Theorem 4.2.5. *(de caractérisation). Soit* E *un* $\mathbb{K}$ *-e.v. et* F *une partie non vide de* E*. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes.*

(a) F *est un s.e.v. de* E*.*

(b) Pour tous x, y *dans* F *et tous scalaires* α, β*, le vecteur* $\alpha.x + \beta.y$ *est aussi dans* F*.*

Preuve. L'implication $(b) \Longrightarrow (a)$ est évidente. Montrons donc l'implication $(a) \Longrightarrow (b)$. En utilisant successivement la stabilité pour la multiplication par un scalaire, puis la stabilité pour la somme vectorielle, on obtient :

$$(x,y) \in E^2 \in F \;\text{ et }\; (\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2 \Longrightarrow (\alpha.x, \beta.y) \in E^2 \Longrightarrow (\alpha.x) + (\beta.y) \in F.$$

□

Exemple 4.2.6. *Montrons en utilisant la caractérisation* (b) *que l'ensemble*

$$F = \big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x = t \quad et \quad x - y + z = 0\big\}$$

est un s.e.v. de $\mathbb{R}^4$*.*
Notons tout d'abord que

$$v \in F \Longleftrightarrow v = (x, x+z, z, x)\ , \quad x, z \in \mathbb{R}.$$

Soient donc v_1, v_2 *deux vecteurs de* F *et* α, β *deux scalaires réels. On a :*

$$(v_1, v_2) \in F^2 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} v_1 = (x_1, x_1+z_1, z_1, x_1) : x_1, z_1 \in \mathbb{R} \\ v_2 = (x_2, x_2+z_2, z_2, x_2) : x_1, z_1 \in \mathbb{R} \end{array} \right. .$$

Par conséquent,

$$\begin{array}{rcl} \alpha.v_1 + \beta.v_2 & = & (\alpha.x_1 + \beta.x_2, \alpha.(x_1+z_1) + \beta.(x_2+z_2), \alpha.z_1 + \beta.z_2, \alpha.x_1 + \beta.x_2) \\ & = & (\alpha.x_1 + \beta.x_2, (\alpha.x_1 + \beta.x_2) + (\alpha.z_1 + \beta.z_2), \alpha.z_1 + \beta.z_2, \alpha.x_1 + \beta.x_2). \end{array}$$

On a donc la représentation $\alpha.v_1 + \beta.v_2 = (X, X+Z, Z, X)$ *caractéristique des éléments de* F*.*

Le résultat que nous allons établir maintenant montre le côté héréditaire de la strucure d'espace vectoriel.

Theorem 4.2.7. *Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Alors, tout s.e.v F de E est lui même un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel pour les opérations d'adition vectorielle et de multiplication par un scalaire, induites par E.*

Preuve. Soient $+$ l'addition dans E et . l'opération de multiplication. Si F est un s.e.v. de E. Alors, d'après le théorème 4.2.5, pour tout $(x, y) \in F^2$,

$$x - y = 1_{\mathbb{K}}.x + (-1_{\mathbb{K}}).y \in F.$$

Cela signifie que $(F, +)$ est un sous-groupe du groupe commutatif $(E, +)$. C'est donc lui même un groupe commutatif. D'autre part, en utilisant la condition de stabilité de F pour la multilication par un scalaire, on vérifie facilement que l'application $. : \mathbb{K} \times F \longrightarrow F$ est bien définie et vérifie toutes les conditions requises pour un espace vectoriel. Ceci achève la preuve du théorème. □

Nous allons maintenant utiliser le théorème 4.2.7 pour introduire un exemple important d'espace vectoriel. Il s'agit en l'occurence de l'espace $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à une indéterminée et à coefficients dans le corps commutatif $\mathbb{K}$. Tout élément de $\mathbb{K}[X]$ s'écrit sous la forme :

$$P_n(X) = a_0 + a_1.X + \cdots + a_n.X^n \ , a_n \neq 0, \quad n = \deg(P_n). \tag{4.2.1}$$

Le polynôme P_n est en fait la suite $P_n = (a_0, a_1, \cdots, a_n, 0_{\mathbb{K}}, \cdots)$ dont tous les éléments sont égaux à $0_{\mathbb{K}}$ à partir du rang $n+1$ (voir cours d'algèbre de R. Godement [3]). Conformément à cette définition d'un polynôme, $\mathbb{K}[X]$ est un sous-ensemble du $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des suites à coefficients dans $\mathbb{K}$. D'autre part, une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{K}$. En d'autres termes, c'est un élément du $\mathbb{K}$ -e.v. $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$.
Montrons donc que $\mathbb{K}[X]$ est un s.e.v. de $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$. On a :

$$(P_n, P_m) \in \mathbb{K}^2[X] \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} P_n = (a_0, a_1, \cdots, a_n, 0_{\mathbb{K}}, \cdots) & a_i \in \mathbb{K} \ , \ 1 \leq i \leq n \\ P_m = (b_0, b_1, \cdots, b_m, 0_{\mathbb{K}}, \cdots) & b_i \in \mathbb{K} \ , \ 1 \leq i \leq m \end{cases}.$$

Par conséquent,,

$$P_n + P_m = \begin{cases} (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \cdots, a_m + b_m, a_{m+1}, \cdots, a_n, 0_{\mathbb{K}}, \cdots) & n \succ m \\ (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \cdots, a_m + b_m, 0_{\mathbb{K}}, \cdots) & n = m \\ (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \cdots, a_n + b_n, b_{n+1}, \cdots, b_m, 0_{\mathbb{K}}, \cdots) & n \prec m \end{cases}.$$

De même, pour tout scalaire α,

$$\alpha.P_n = (\alpha.a_0, \alpha.a_1, \cdots, \alpha.a_n, 0_{\mathbb{K}}, \cdots).$$

Conclusion : Dans tous les cas, $\alpha.P_n$ et $P_n + P_m$ sont des suites d'éléments de $\mathbb{K}$ dont tous les éléments sont égaux à $0_{\mathbb{K}}$ à partir d'un certain rang. Ce sont donc aussi des éléments de $\mathbb{K}[X]$, ce qui signifie que $\mathbb{K}[X]$ est un s.e.v. du $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$. Finalemnt, d'après le théorème 4.2.7, $\mathbb{K}[X]$ est aussi un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

4.2.2 Intersection et réunion de sous-espaces vectoriels

Proposition 4.2.8. *Soient E un $\mathbb{K}$ -e.v. et $(E_i)_{i\in I}$ une famille quelconque (finie ou non) de sous-espaces vectoriels de E. Alors l'intersection $\bigcap_{i\in I} E_i$ de tous les E_i est aussi un s.e.v. de E.*

Preuve. Soient x, y deux éléments de l'intersection $\bigcap_{i\in I} E_i$ et α, β deux scalaires quelconques. Alors,

$$\begin{cases} x \in E_i & \forall i \in I \\ y \in E_i & \forall i \in I \end{cases} \Longrightarrow \alpha.x + \beta.y \in E_i \ , \ \forall i \in I \Longrightarrow \alpha.x + \beta.y \in \bigcap_{i\in I} E_i.$$

□

Proposition 4.2.9. *(i) La réunion de deux sous-espaces de E n'est pas forcément un sous-espace de E.*

(ii) La réunion de deux sous-espaces de E est un sous-espace de E si et seulement si, l'un deux est inclus dans l'autre.

Preuve.

(i) Chacun des ensembles $E_1 = \{(x, 0) : \ x \in \mathbb{R}\}$ et $E_2 = \{(0, y) : \ y \in \mathbb{R}\}$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}^2$. Par contre, $E_1 \cup E_2$ n'est pas un s.e.v. de $\mathbb{R}^2$ car,

$$\begin{cases} (1,0) \in E_1 \subset E_1 \cup E_2 \\ (0,1) \in E_2 \subset E_1 \cup E_2 \end{cases} \quad \text{mais} \quad (1,1) = (1,0) + (0,1) \notin E_1 \cup E_2.$$

(ii) Soient maintenant E_1, E_2 deux s.e.v. de E. Il est clair que si l'un de ces deux s.e.v. est inclus dans l'autre alors, leur réunion est aussi un s.e.v. car, elle est égale au plus grand (au sens de l'inclusion) d'entre eux.

Suposons maintenant que $E_1 \cup E_2$ est un s.e.v. de E et que de plus, E_1 n'est pas inclus dans E_2 et montrons que forcément $E_2 \subset E_1$. Si E_1 n'est pas inclus dans E_2 alors, il existe un élément $a \in E$ vérifiant $a \in E_1$ et $a \notin E_2$. De plus,

$$x \in E_2 \quad \Longrightarrow \quad a + x \in E_1 \cup E_2 \Longrightarrow \begin{cases} a + x \in E_1 \\ \text{ou} \\ a + x \in E_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a + x \in E_1 \\ \text{ou} \\ a = (a + x) + (-x) \in E_2 \end{cases}.$$

Par conséquent,

$$x \in E_2 \Longrightarrow a + x \in E_1 \Longrightarrow x = (-a) + (a + x) \in E_1.$$

Ceci, étant vrai pour tout $x \in E_2$, on en déduit que $E_2 \subset E_1$.

□

4.2.3 Somme de sous-espaces vectoriels

Définition 4.2.10. *Soient E_1 et E_2 deux s.e.v. d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E. On définit la somme E_1+E_2 comme étant l'ensemble des vecteurs v de E admettant la représentation :*

$$v = v_1 + v_2 \ , \quad (v_1, v_2) \in E_1 \times E_2.$$

Exemple 4.2.11. *L'espace vectotiel réel $\mathbb{R}^2$ est la somme des sous-espaces vectoriels*

$$E_1 = \{(x, 0) \ , \ x \in \mathbb{R}\} \quad \textit{et} \quad E_2 = \{(0, y) \ , \ y \in \mathbb{R}\}.$$

C'est aussi la somme des sous-espaces vectoriels

$$E_3 = \{(x, x) \ , \ x \in \mathbb{R}\} \quad \textit{et} \quad E_4 = \{(y, -y) \ , \ y \in \mathbb{R}\}.$$

En effet,

$$v = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \Longrightarrow v = \underbrace{(x, 0)}_{v_1 \in E_1} + \underbrace{(0, y)}_{v_2 \in E_2}.$$

De même,

$$v = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \Longrightarrow v = \underbrace{(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2})}_{v_3 \in E_3} + \underbrace{(\frac{x-y}{2}, \frac{y-x}{2})}_{v_4 \in E_4}.$$

Proposition 4.2.12. *Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, E_1, E_2 deux sous-espaces de E. Alors, la somme $E_1 + E_2$ est aussi un sous-espace vectoriel.*

Preuve. Soient u, v deux éléments de E_1+E_2 et α, β deux scalaires dans $\mathbb{K}$. Il faut montrer que :

$$\alpha.u + \beta.v \in E_1 + E_2.$$

On a :

$$u, v \in E_1 + E_2 \Longrightarrow \begin{cases} u = u_1 + u_2 \ , & (u_1, u_2) \in E_1 \times E_2 \\ v = v_1 + v_2 \ , & (v_1, v_2) \in E_1 \times E_2 \end{cases}$$

D'où, en utilisant l'associativité et et la commutativité de l'addition $+$,

$$\alpha.u + \beta.v = \underbrace{[\alpha.u_1 + \beta.v_1]}_{\in \ E_1} + \underbrace{[\alpha.u_2 + \beta.v_2]}_{\in \ E_2} \in E_1 + E_2.$$

□

Définition 4.2.13. *Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, E_1, E_2 et F trois sous-espaces de E. On dit que F est la somme directe de E_1 et E_2 si,*

$$F = E_1 + E_2 \quad \textit{et} \quad E_1 \cap E_2 = \{0_E\}.$$

Dans ce cas, on écrit : $F = E_1 \oplus E_2$.

Exemple 4.2.14. *Dans les deux exemples précédents, on a :*

$$\mathbb{R}^2 = E_1 \oplus E_2 = E_3 \oplus E_4.$$

Exemple 4.2.15. *L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est la somme non directe des sous-espaces*

$$E_1 = \left\{ v_1 = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x = y \in \mathbb{R} \right\} \quad \textit{et} \quad E_2 = \left\{ v_2 = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ y = z \right\}.$$

On remarque facilement que le vecteur $v = (1, 1, 1)$ appartient à l'intersection $E_1 \cap E_2$, c'est à dire que $E_1 \cap E_2 \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\} = \{(0, 0, 0)\}$. Il reste maintenant à montrer que $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_2$. Il nous faut montrer que tout vecteur $v = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ peut s'écrire comme la somme vectorielle $v = (a, a, b) + (c, d, d)$ où, a, b, c, d sont des scalaires réels à déterminer. On a :

$$v = (a, a, b) + (c, d, d) \Longleftrightarrow (x, y, z) = (a + c, a + d, b + d) \Longleftrightarrow \begin{cases} a + c = x \\ a + d = y \\ b + d = z \end{cases}$$

On obtient ainsi un système à 3 équations et 4 inconnues. On va donc le résoudre en considérant par exemple c comme un paramètre. On obtient ainsi une infinité de solutios de la forme :

$$a = x - c \ , \ b = x - y + z - c \ , \ d = -x + y + c.$$

Dans cet exemple, nous avons donné la forme explicite des solutions du système. En fait, il suffit de prouver l'existence d'au moins une solution (sans avoir besoin de la calculer). Pour cela, on note que la matrice associée au système est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & c & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De plus, pour $bc \neq 0$ le déterminant de la matrice carrée constituée par les trois premières colonnes n'est pas nul. Cela signifie que dans ce cas, le système est surjectif (voir chapitre précédent) et donc, possède des solutions.

Theorem 4.2.16. *Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, E_1, E_2 et F trois sous-espaces de E. Alors,*

$$F = E_1 \oplus E_2 \Longleftrightarrow \forall v \in F \ , \ \exists!(v_1, v_2) \in E_1 \times E_2 : \ v = v_1 + v_2.$$

Preuve. ($\Longrightarrow$) Supposons que $F = E_1 \oplus E_2$ et soit $v \in F$ tel que :

$$v = v_1 + v_2 = u_1 + u_2 \ , \ (v_1, u_1) \in E_1^2 \ , \ \ (v_2, u_2) \in E_2^2.$$

Nous devons montrer que $v_1 = u_1$ et $v_2 = u_2$. On a :

$$v = v_1 + v_2 = u_1 + u_2 \Longrightarrow v_1 - u_1 = u_2 - v_2 \Longrightarrow \begin{cases} v_1 - u_1 \in E_1 \cap E_2 \\ \text{et} \\ u2 - v_2 \in E_1 \cap E_2 \end{cases}$$

Comme, $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$ alors, forcément $v_1 = u_1$ et $v_2 = u_2$.
($\Longleftarrow$) supposons que

$$\forall v \in F \ , \ \exists!(v_1, v_2) \in E_1 \times E_2 : \ v = v_1 + v_2.$$

Il est clair que sous cette hypothèse, $F = E_1 + E_2$. Il reste donc à montrer que cette somme est directe, c'est à dire que $E_1 \cap E_2 = 0_E$. On a :

$$v \in E_1 \cap E_2 \Longrightarrow \begin{cases} v = v + 0_E \in E_1 \oplus E_2 \\ v = 0_E + v \in E_1 \oplus E_2 \end{cases}$$

D'après l'hypothèse de l'unité de la décomposition, $v = 0_E$ et donc, $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$. $\square$

4.3 Exercices corrigés

Exercice 4.3.1. *Dans chacun des cas suivants, dire en justifiant votre réponse si, F est un s.e.v. de E.*

(a) $E = \mathbb{R}^2 \ , \ F = \{v = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq y\}$.
(b) $E = \mathbb{R}^2 \ , \ F = \{v = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 3xy = 0\}$.
(c) $E = \mathbb{R}^2 \ , \ F = \{v = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x - y = 2\}$.
(d) $E = \mathbb{R}^3 \ , \ F = \{v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^1 : \ z = 1\}$.
(e) $E = \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \ , \ F =$ *l'ensemble des suites bornées.*
(f) $E = \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \ , \ F =$ *l'ensemble des suites croissantes.*
(g) $E = \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \ , \ F =$ *l'ensemble des suites convergentes.*
(h) $E = \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \ , \ F =$ *l'ensemble des suites convergentes vers* 0.
(i) $E = \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \ , \ F =$ *l'ensemble des suites convergentes vers* $a \neq 0$.

On rappelle que $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des suites réelles (voir remarque 4.1.6).

Solution :
(a) F n'est pas un s.e.v. de E car, $v = (2, 1) \in F$ mais, $-v = (-2, -1) \notin F$.
(b) F n'est pas un s.e.v. de E car, $v = (1, 0) \in F \ , \ u = (0, 1) \in F$ mais, $v + u = (1, 1) \notin F$.
(c) F n'est pas un s.e.v. de E car, $0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0) \notin F$.
(d) F n'est pas un s.e.v. de E car, $0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0) \notin F$.
(e) F est un s.e.v. de E. En effet, $F \neq \emptyset$, il contient en particulier la suite nulle. De plus, si $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ sont deux suites réelles bornées alors, il existe une constante réelle $M \succ 0$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ |x_n| \leq m \ \text{ et } \ |y_n| \leq m.$$

Par conséquent pour tous réels $\alpha, \ \beta$,

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ |\alpha.x_n + \beta.y_n| \leq |\alpha| \, . \, |x_n| + |\beta| \, . \, |y_n| \leq (|\alpha| + |\beta|)m := M.$$

En d'autres termes, la suite $\alpha.(x_n)_n + \beta.(y_n)_n = (\alpha.x_n + \beta.y_n)_n$ est aussi bornée.

(f) F n'est pas un s.e.v. de E car, $(x_n = 1 - \frac{1}{n+1})_n$ est une suite croissante mais, la suite $-(x_n)_n = (-1 + \frac{1}{n+1})_n$ n'est pas croissante.

(g) F est un s.e.v. de E. En effet, $F \neq \emptyset$, il contient en particulier la suite nulle qui converge vers 0. De plus, on sait du cours d'analyse que si $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ sont deux suites réelles convergentes respectivement vers x et y alors, pour tous réels α, β, la suite $\alpha.(x_n)_n + \beta.(y_n)_n = (\alpha.x_n + \beta.y_n)_n$ est aussi convergente et sa limite est $\alpha.x + \beta.y$.

(h) F est un s.e.v. de E. C'est une conséquence directe de la preuve du point (g).

(i) F n'est pas un s.e.v. de E car, il ne contient pas le vecteur nul de E qui n'est autre que la suite nulle.

□

Exercice 4.3.2. *On considère dans l'espace vectoriel* $\mathbb{R}^3$ *les sous-ensembles*

$$E_1 = \{v = (2x, x, z) : x, z \in \mathbb{R}\}\ ,\ E_2 = \{v = (x, x, x) : x \in \mathbb{R}\}\ ,\ E_3 = \{v = (x, y, z) : x - y + 4z = 0\}\,.$$

1) *Montrer que chacun de ces sous-ensembles est un s.e.v. de* $\mathbb{R}^3$.
2) *Montrer que* $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2 = E_2 \oplus E_3$.
3) *Montrer que* $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_3$ *mais que cette somme n'est pas directe.*

<u>Solution</u> :

1) Pour montrer que E_1 est u s.e.v. de $\mathbb{R}^3$, nous devons prouver que pour tous scalaires α, β et tous vecteurs u, v dans E_1, le vecteur $(\alpha.u) + (\beta.v)$ admet la représentation :

$$\alpha.u + \beta.v = (2a, a, b)\ ,\ \ a, b \in \mathbb{R}.$$

On a :

$$u, v \in E_1 \Longrightarrow u = (2x, x, z)\ ,\ \ v = (2y, y, t)\ ;\ \ (x, y, z, t \in \mathbb{R}).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\alpha.u + \beta.v &= (2\alpha.x, \alpha.x, \alpha.z) + (2\beta.y, \beta.y, \beta.t)\\ &= (2(\underbrace{\alpha.x + \beta.y}_{a}), \underbrace{\alpha.x + \beta.y}_{a}, \underbrace{\alpha.z + \beta.t}_{b}) \in E_1.\end{aligned}$$

Pour montrer que E_2 est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$, nous devons prouver que pour tous scalaires α, β et tous vecteurs u, v dans E_2, le vecteur $(\alpha.u) + (\beta.v)$ admet la représentation :

$$\alpha.u + \beta.v = (a, a, a)\ ,\ \ a \in \mathbb{R}.$$

On a :

$$u, v \in E_2 \Longrightarrow u = (x, x, x)\ ,\ \ v = (y, y, y)\ ;\ \ (x, y \in \mathbb{R}).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\alpha.u + \beta.v &= (\alpha.x, \alpha.x, \alpha.x) + (\beta.y, \beta.y, \beta.y)\\ &= (\underbrace{\alpha.x + \beta.y}_{a}, \underbrace{\alpha.x + \beta.y}_{a}, \underbrace{\alpha.x + \beta.y}_{a}) \in E_2.\end{aligned}$$

Pour montrer que E_3 est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$, nous devons prouver que pour tous scalaires α, β et tous vecteurs u, v dans E_3, le vecteur $(\alpha.u) + (\beta.v)$ admet la représentation :

$$\alpha.u + \beta.v = (a, b, c) \text{ avec, } a - b + 4c = 0.$$

On a :

$$u, v \in E_3 \Longrightarrow \begin{cases} u = (x, y, z) \ ; & x - y + 4z = 0 \\ v = (x', y', z') \ ; & x' - y' + 4z' = 0 \end{cases}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \alpha.u + \beta.v &= (\alpha.x, \alpha.y, \alpha.z) + (\beta.x', \beta.y', \beta.z') \\ &= (\underbrace{\alpha.x + \beta.x'}_{a}, \underbrace{\alpha.y + \beta.y'}_{b}, \underbrace{\alpha.z + \beta.z'}_{c}). \end{aligned}$$

D'autre part,

$$a-b+4c = (\alpha.x+\beta.x')-(\alpha.y+\beta.y')+4(\alpha.z+\beta.z') = \alpha.(x-y+4z)+\beta.(x'-y'+4z') = 0+0 = 0.$$

Ainsi, E_3 est aussi un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$.

2) Pour montrer que $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2$, nous allons utiliser la définition d'une somme directe, c'est à dire que

$$\mathbb{R}^3 = E_1 + E_2 \quad \text{et} \quad E_1 \cap E_2 = \{(0, 0, 0)\}.$$

On a :

$$v = (x, y, z) \in E_1 \cap E_2 \iff \begin{cases} v \in E_1 \\ v \in E_2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2y \\ x = y = z \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2y \\ y = 2y \\ x = y = z \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad x = y = z = 0 \Longrightarrow v = (0, 0, 0).$$

Soit maintenant $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on doit montrer qu'il existe trois constantes réelles a, b, c telles que $v = \underbrace{(2a, a, b)}_{\in\ E_1} + \underbrace{(c, c, c)}_{\in\ E_2}$.

On a :

$$(x, y, z) = (2a, a, b) + (c, c, c) \iff \begin{cases} 2a + c = x \longrightarrow (eq1) \\ a + c = y \longrightarrow (eq2) \\ b + c = z \longrightarrow (eq3) \end{cases}$$

D'autre part,

$$(eq1) - (eq2) \Longrightarrow a = x - y.$$

En remplaçant a par sa valeur, on obtient

$$a = x - y \ , \ c = y - a = 2y - x \ , \ b = z - c = x + z - 2y.$$

Pour montrer que $\mathbb{R}^3 = E_2 \oplus E_3$, nous allons au lieu de la définition utiliser le théorème 4.2.16, c'est à dire que tout $v \in \mathbb{R}^3$ s'écrit de maière unique comme la somme d'un vecteur de E_2 et d'un vecteur de E_3. Cela revient à montrer que pour tous x, y, z, il existe des constantes uniques $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ vérifiant simultanément les équations :

$$(x, y, z) = (\alpha, \alpha, \alpha) + (\beta, \gamma, \delta) \ , \ \beta - \gamma + 4.\delta = 0.$$

Sous forme de système d'équations, cela devient

$$(S) : \begin{cases} \alpha + \beta = x \longrightarrow (eq1) \\ \alpha + \gamma = y \longrightarrow (eq2) \\ \alpha + \delta = z \longrightarrow (eq3) \\ \beta - \gamma + 4.\delta = 0 \longrightarrow (eq4) \end{cases} .$$

En utilisant $(eq4)$, on obtient

$$(eq1) - (eq2) + 4(eq3) \Longrightarrow 4\alpha = x - y + 4z \Longrightarrow \alpha = \frac{x-y}{4} + z.$$

En remaplaçant α par sa valeur dans les trois premières équations, on voit que le système (S) admet une solution unique

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \left(\frac{x-y}{4} + z, \frac{3x+y}{4} - z, \frac{-x+5y}{4} - z, \frac{-x+y}{4} \right)$$

et donc, $v = (x, y, z)$ s'écrit de manière unique sous la forme :

$$v = \underbrace{\left(\frac{x-y}{4} + z, \frac{x-y}{4} + z, \frac{x-y}{4} + z \right)}_{\in \ E_2} + \underbrace{\left(\frac{3x+y}{4} - z, \frac{-x+5y}{4} - z, \frac{-x+y}{4} \right)}_{\in \ E_3}.$$

3) Pour montrer que $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_3$, il faut montrer que tout vecteur $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, il existe des constantes réelles $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu$ telles que :

$$v = (2\alpha, \alpha, \beta) + (\gamma, \delta, \mu) \ , \quad \gamma - \delta + 4.\mu = 0.$$

Ces équations conduisent au système :

$$\begin{cases} 2\alpha + \gamma = x \\ \alpha + \delta = y \\ \beta + \mu = z \\ \gamma - \delta + 4.\mu = 0 \end{cases}$$

On a 4 équations et cinq inconnues. Pour résoudre ce système, il faut donc exprimer 4 inconnues une fonction de l'inconnue restante (par exemple α). Dans ce cas,

$$\gamma = x - 2\alpha \ , \ \delta = y - \alpha \ , \ \mu = \frac{\alpha + y - x}{4} \ , \ \beta = z - \frac{y-x}{4}$$

et

$$v = \underbrace{\left(2\alpha, \alpha, z - \frac{\alpha + y - x}{4} \right)}_{\in \ E_1} + \underbrace{\left(x - 2\alpha, y - \alpha, \frac{\alpha + y - x}{4} \right)}_{\in \ E_3}.$$

La représentation précédente montre que tout vecteur v de $\mathbb{R}^3$ s'écrit de plusieurs façons comme la somme d'un vecteur de E_1 et d'un vecteur E_3. On a donc $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_3$ mais d'après le théorème 4.2.16, cette somme n'est pas directe.

□

i) Il était possible de remarquer par exemple que $v = (8, 4, -1) \in E_1 \cap E_3$ et que donc, $E_1 \cap E_3 \neq \{(0, 0, 0)\}$.
ii) Notons aussi que pour prouver que tout vecteur v de $\mathbb{R}^3$ s'écrit de plusieurs façons comme la somme d'un vecteur de E_1 et d'un vecteur E_3, il suffisait de prouver que le système en question est surjectif. En effet, la matrice associée au système est

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

De plus, la matrice formée par les colonnes C_1, C_2, C_3, C_4 possède un déterminant non nul. Le système est donc surjectif.

Exercice 4.3.3. *Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des applications définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Désignons par $\mathcal{F}_p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des éléments pairs de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et par $\mathcal{F}_{imp}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble de ses éléments impairs. Montrer que $\mathcal{F}_p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\mathcal{F}_{imp}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sont deux s.e.v. de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est la somme directe de ces deux sous-espaces.*

Solution :

(a) Soient f, g deux éléments de $\mathcal{F}_p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et soient α, β deux réels. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} (\alpha.f + \beta.g)(-x) &= (\alpha.f)(-x) + (\beta.g)(-x) = \alpha.f(-x) + \beta.g(-x) \\ &= \alpha.f(x) + \beta.g(x) = (\alpha.f)(x) + (\beta.g)(x) \\ &= (\alpha.f + \beta.g)(x). \end{aligned}$$

Cela signifie que $\alpha.f + \beta.g$ est aussi un élément de $\mathcal{F}_p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. En d'autres termes, $\mathcal{F}_p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est un s.e.v. de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(b) De manière analogue, soient f, g deux éléments de $\mathcal{F}_{imp}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et soient α, β deux réels. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} (\alpha.f + \beta.g)(-x) &= (\alpha.f)(-x) + (\beta.g)(-x) = \alpha.f(-x) + \beta.g(-x) \\ &= -\alpha.f(x) - \beta.g(x) = -((\alpha.f)(x) + (\beta.g)(x)) \\ &= -(\alpha.f + \beta.g)(x). \end{aligned}$$

Cela signifie que $\alpha.f + \beta.g$ est aussi un élément de $\mathcal{F}_{imp}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui est donc un s.e.v. de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(c) Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et considérons les fonctions :

$$f_p,\ f_{imp} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ f_p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}\ ,\ f_{imp}(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Il est clair que $f_p \in \mathcal{F}_p(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et que $f_{imp} \in \mathcal{F}_{imp}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\left(f_p + f_{imp}\right)(x) = f_p(x) + f_{imp}(x) = f(x).$$

Cela signifie que $f = f_p + f_{imp}$ et donc, $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \mathcal{F}_p(\mathbb{R},\mathbb{R}) + \mathcal{F}_{imp}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Cette somme est directe car, le seul élément de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ qui est à la fois pair et impair est la fonction nulle (vecteur nul de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$).

$\square$

Exercice 4.3.4. *Montrer que tout espace vectoriel complexe est aussi un espace vectoriel réel et que l'inverse n'est pas vrai.*

Solution : Par définition d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, les scalaires (éléments du corps $\mathbb{K}$) n'interviennent que dans les propriétés de l'opération externe .. Comme $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ et $1_{\mathbb{C}} = 1 = 1_{\mathbb{R}}$ alors, si les propriétés sont vérifiées pour les scalaires complexes, elles sont à plus forte raison vérifiées pour les scalaires réels. En d'autres termes tout espace vectoriel complexe est un espace vectoriel réel.
Montrons maintenant que l'inverse n'est pas vrai. En effet, comme noté dans la remarque 4.1.4, $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel mais, ce n'est pas un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel car, si α est un nombre à partie imaginaire non nulle alors, $\alpha = \alpha.1 \notin \mathbb{R}$. $\square$

Exercice 4.3.5. ***(Transfert de structure).***
Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et F un ensemble non vide quelconque. On suppose qu'il existe une bijection $f : E \longrightarrow F$. On définit dans F une addition vectorielle $\overline{+}$ et une opération externe $\bar{\cdot}$ comme suit :

$$\forall(\alpha,u,v) \in \mathbb{K}\times F^2 : \begin{cases} u\overline{+}v = f\left[f^{-1}(u) + f^{-1}(v)\right] \\ \alpha\bar{\cdot}u = f\left[\alpha.f^{-1}(u)\right] \end{cases}.$$

Montrer que F est un $\mathbb{K}$ -e.v. pour les opérations $\overline{+}$ et $\bar{\cdot}$. On dit dans ce cas qu'on a procédé à un transfert de structure de E vers F.

Solution :
1) Montrons tout d'abord que $(F,\overline{+})$ est un groupe commutatif.
(1.1) On a :

$$\begin{aligned}(u,v)\in F^2 \quad &\Longrightarrow \quad (f^{-1}(u),f^{-1}(v)) \in E^2 \Longrightarrow f^{-1}(u)+f^{-1}(v) \in E \quad (+ \text{ interne dans } E)\\ &\Longrightarrow \quad u\overline{+}v = f\left[f^{-1}(u)+f^{-1}(v)\right] \in F\\ &\Longrightarrow \quad \overline{+} \text{ -opération interne dans } F.\end{aligned}$$

(1.2) En utilisant la commutativité de $+$, on a :

$$\begin{aligned}
(u,v)\in F^2 &\Longrightarrow f^{-1}(u)+f^{-1}(v)=f^{-1}(v)+f^{-1}(u)\\
&\Longrightarrow f\left[f^{-1}(u)+f^{-1}(v)\right]=f\left[f^{-1}(v)+f^{-1}(u)\right]\\
&\Longrightarrow u\overline{+}v=v\overline{+}u\\
&\Longrightarrow \overline{+} \text{ commutative dans } F.
\end{aligned}$$

(1.3) En utilisant l'associativité de $+$ et la bijectivité de f, on a :

$$\begin{aligned}
(u,v,w)\in F^3 &\Longrightarrow \left[f^{-1}(u)+f^{-1}(u)\right]+f^{-1}(w)=f^{-1}(u)+\left[f^{-1}(u)+f^{-1}(w)\right]\\
&\Longrightarrow f^{-1}\left[u\overline{+}v\right]+f^{-1}(w)=f^{-1}(u)+f^{-1}\left[v\overline{+}w\right]\\
&\Longrightarrow f\left\{\left[u\overline{+}v\right]+f^{-1}(w)\right\}=f\left\{f^{-1}(u)+f^{-1}\left[v\overline{+}w\right]\right\}\\
&\Longrightarrow \left[u\overline{+}v\right]\overline{+}w=u\overline{+}\left[v\overline{+}w\right]\\
&\Longrightarrow \overline{+} \text{ associative dans } \; F.
\end{aligned}$$

(1.4) Pour tout $v\in F$,

$$u\overline{+}f(0_E)=f\left[f^{-1}(u)+f^{-1}(f(0_E))\right]=f\left[f^{-1}(u)+0_E\right]=f\left[f^{-1}(u)\right]=u.$$

On en déduit que l'opération $\overline{+}$ admet un élément neutre qui est $0_F:=f(0_E)$.

(1.5) Soient $v\in F$ et $-(f^{-1}(v))$ -le symétrique de $f^{-1}(v)$ pour l'opération $+$ dans E. Alors,

$$\begin{aligned}
v\overline{+}f\left[-(f^{-1}(v))\right] &= f\left\{f^{-1}(v)+f^{-1}\left(f\left[-(f^{-1}(v))\right]\right)\right\}=f\left\{f^{-1}(v)+\left[-(f^{-1}(v))\right]\right\}\\
&= f\left\{f^{-1}(v)-f^{-1}(v)\right\}=f(0_E)\\
&= 0_F.
\end{aligned}$$

On en déduit que tout élément v de F admet un symétrique $\overline{-}(v)=f\left[-(f^{-1}(v))\right]$ pour l'opération $\overline{+}$.

En conclusion, $(F,\overline{+})$ est bel et bien un groupe commutatif.

2) Montrons maintenant que l'opération $\bar{\cdot}$ vérifie toutes les propriétés d'une loi externe dans un espace vectoriel.

(2.1) On a :

$$\begin{aligned}
(\alpha,v)\in\mathbb{K}\times F &\Longrightarrow (\alpha,f^{-1}(v))\in\mathbb{K}\times E\Longrightarrow \alpha.f^{-1}(v)\in E\\
&\Longrightarrow \alpha\bar{\cdot}v=f\left(\alpha.f^{-1}(v)\right)\in F\\
&\Longrightarrow \text{l'opération } \bar{\cdot} \text{ est bien définie de } \mathbb{K}\times F \text{ dans } F.
\end{aligned}$$

Soient maintenant α,β deux scalaires quelconques dans $\mathbb{K}$ et u,v deux vecteurs quelconques de F. En utilisant les propriétés de $\bullet$ on obtient :

(2.2)

$$\begin{aligned}
\alpha\bar{\cdot}\left(u\overline{+}v\right) &= f\left[\alpha.f^{-1}\left(u\overline{+}v\right)\right]=f\left[\alpha.\left(f^{-1}(u)+f^{-1}(v)\right)\right]\\
&= f\left(\alpha.f^{-1}(u)+\alpha.f^{-1}(v)\right)=f\left[f^{-1}(\alpha\bar{\cdot}u)+f^{-1}(\alpha\bar{\cdot}v)\right]\\
&= (\alpha\bar{\cdot}u)\overline{+}(\alpha\bar{\cdot}v).
\end{aligned}$$

(2.3)

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)\bar{.}u &= f\left[(\alpha+\beta).f^{-1}(u)\right] = f\left[\alpha.f^{-1}(u)+\beta.f^{-1}(u)\right]\\ &= f\left[f^{-1}(\alpha\bar{.}u))+f^{-1}(\beta\bar{.}u))\right] = (\alpha\bar{.}u)\overline{+}(\beta\bar{.}u).\end{aligned}$$

(2.4)

$$\begin{aligned}\alpha\bar{.}\,(\beta\bar{.}u) &= f\left(\alpha.f^{-1}\left[\beta\bar{.}u\right]\right) = f\left(\alpha.\left[\beta.f^{-1}(u)\right]\right)\\ &= f\left((\alpha.\beta).\left[f^{-1}(u)\right]\right) = (\alpha.\beta)\bar{.}u.\end{aligned}$$

(5)

$$1_{\mathbb{K}}\bar{.}u = f\left(1_{\mathbb{K}}.f^{-1}(u)\right) = f\left(f^{-1}(u)\right) = u.$$

$\square$

Chapitre 5

Bases et dimensions

5.1 Parties génératrices

Définition 5.1.1. *Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $A = \{v_1, \cdots, v_n\}$ une famille finie de vecteurs de E. On dit qu'un vecteur $v \in E$ est combinaison linéaire des éléments de A, s'il existe des scalaires $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que :*

$$v = \alpha_1.v_1 + \cdots + \alpha_n.v_n := \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot v_k. \tag{5.1.1}$$

L'ensemble des vecteurs de E qui sont combinaisons linéaires des éléments de A est noté $Vect(A)$.

Exemple 5.1.2. *Dans $\mathbb{R}^2$, le vecteur $v = (4, 2)$ est combinaison linéaire des vecteurs $v_1 = (1, 1)$ et $v_2 = (1, -1)$. En effet, $v = 3.v_1 + v_2$.*

Proposition 5.1.3. *Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $A = \{v_1, \cdots, v_n\}$ une famille finie de vecteurs de E. Alors, $Vect(A)$ est un s.e.v. de E.*

Preuve. Soient $v = \alpha_1.v_1 + \cdots + \alpha_n.v_n$ et $w = \beta_1.v_1 + \cdots + \beta_n.v_n$ deux éléments de $Vect(A)$. En utilisant l'associativité et la commutativité de $+$, on a pour tous scalaires α, β,

$$\begin{aligned} \alpha.v + \beta.w &= \alpha.(\alpha_1.v_1 + \cdots + \alpha_n.v_n) + \beta.(\beta_1.v_1) + \cdots + \beta_n.v_n) \\ &= \underbrace{(\alpha.\alpha_1 + \beta.\beta_1)}_{\gamma_1}.v_1 + \cdots + \underbrace{(\alpha.\alpha_n + \beta.\beta_n)}_{\gamma_n}.v_n \in Vect(A). \end{aligned}$$

□

Proposition 5.1.4. *Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $A = \{v_1, \cdots, v_n\}$ une famille finie de vecteurs de E. Alors,*

(i) $Vect(A)$ est le plus petit (au sens de l'inclusion) s.e.v. de E qui contient A.

(ii) $Vect(A)$ est l'intersection de tous les s.e.v. de E qui contiennent A.

Preuve. (i) Remarquons tout d'abord que $\forall k \in \{1, \cdots, n\}$,

$$v_k = 0_{\mathbb{K}}.v_1 + \cdots + 0_{\mathbb{K}}.v_{k-1} + 1_{\mathbb{K}}.v_k + 0_{\mathbb{K}}.v_{k+1} + \cdots + 0_{\mathbb{K}}.v_n.$$

Ceci montre que $A \subset Vect(A)$.
Soit maintenant F un s.e.v. de E contenant A. Par définition d'un s.e.v., F est stable pour l'addition vectoriell $+$ et pour l'opération . de multiplication par un scalaire. Cela entraine que F contient toutes les combinaisons linéaires d'éléments de A. Ainsi, $Vect(A) \subseteq F$.
(ii) Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble de tous les s.e.v. de E qui contiennent A. Posons

$$F_0 := \bigcap_{F \in \mathcal{A}} F = \text{ l'intersection de tous les éléments de } \mathcal{A}.$$

D'après la proposition 4.2.8, l'ensemble F_0 est un s.e.v. de E. De plus, il contient A. Il découle donc du précédent point (i) que

$$Vect(A) \subseteq F_0.$$

D'autre part,

$$Vect(A) \in \mathcal{A} \Longrightarrow F_0 \subseteq Vect(A).$$

En conclusion,

$$F_0 = Vect(A).$$

□

Définition 5.1.5. *Soient F un s.e.v. d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E et $A = \{v_1, \cdots, v_n\}$ une famille finie de vecteurs de F. On dit que A engendre F (ou que A est une partie génératrice de F) si, $F = Vect(A)$.*

Exemples 5.1.6. *(i) La famille $A = \{e_1 = (1, 0),\ e_2 = (0, 1)\}$ engendre $\mathbb{R}^2$. En effet,*

$$v = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \Longrightarrow v = x.e_1 + y.e_2.$$

(ii) La famille $B = \{v_1 = (1, 1),\ v_2 = (1, -1)\}$ aussi engendre $\mathbb{R}^2$. En effet,

$$v = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \Longrightarrow v = \frac{x+y}{2}.v_1 + \frac{x-y}{2}.v_2$$

(iii) La famille $A = \{e_1 = (1, 0, 0),\ e_2 = (0, 1, 0),\ e_3 = (0, 0, 1)\}$ engendre $\mathbb{R}^3$. En effet,

$$v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \Longrightarrow v = x.e_1 + y.e_2 + z.e_3.$$

(iv) La famille $B = \{v_1 = (1, 1, 1),\ v_2 = (1, 1, 0),\ v_3 = (1, 0, 0)\}$ aussi engendre $\mathbb{R}^3$. En effet,

$$v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \Longrightarrow v = z.v_1 + (y - z).v_2 + (x - y).v_3.$$

Exercice 5.1.7. *Trouver une partie génératrice du s.e.v.*

$$F = \{v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x + 2y - z = 0\}$$

Solution :

Comme on est dans $\mathbb{R}^3$ et F est caractérisé par une seule équation alors, il faut exprimer les éléments de F au moyen de deux variables seulement. Ainsi,

$$v \in F \Longleftrightarrow v = (x, y, x + 2y) = (x, 0, x) + (0, y, 2y) = x.(1, 0, 1) + y.(0, 1, 2)$$

La famille $A = \{v_1, v_2\}$ engendre donc F ($\Longleftrightarrow F = Vect\{v_1, v_2\}$). □

Proposition 5.1.8. *Soient F un s.e.v. d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E, A et B deux parties non vides de F. Alors,*

(a) $A \subseteq B \Longrightarrow Vect(A) \subseteq Vect(B)$.

(b) $[A \subseteq B \quad \text{et} \quad F = Vect(A)] \Longrightarrow Vect(B) = F$.

Preuve. (a) Posons $A = \{v_1, \cdots, v_n\}$. dans ce cas, $B = \{v_1, \cdots, v_n, v_{n+1}, \cdots, v_{n+p}\}$. Alors,

$$\begin{aligned} v \in Vect(A) \Longrightarrow v &= \alpha_1.v_1 + \cdots + \alpha_n.v_n + 0_E \\ &= \alpha_1.v_1 + \cdots + \alpha_n.v_n + \underbrace{0_{\mathbb{K}}.v_{n+1} + \cdots + 0_{\mathbb{K}}.v_{n+p}}_{= 0_E} \in Vect(B). \end{aligned}$$

(b) En ayant présent à l'esprit le fait que $Vect(B)$ est le plus petit s.e.v. de E contenant B (voir Proposition 5.1.4 , on a :

$$[A \subseteq B \quad \text{et} \quad F = Vect(A)] \Longrightarrow F = Vect(A) \subseteq Vect(B) \Longrightarrow Vect(B) = F$$

car, F est un s.e.v. de E contenant B. □

5.2 Parties libres, parties liées

Définition 5.2.1. *Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $A = \{v_1, \cdots, v_n\}$ une famille finie de vecteurs de E. A est dite libre si, l'égalité*

$$\alpha_1.v_1 + \cdots + \alpha_n.v_n = 0_E$$

n'est possible que pour $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0_{\mathbb{K}}$. Dans le cas contraire, A est dite partie liée. Les vecteurs $v_1, \cdots, v_n$ sont dits linéairement indépendants si A est libre et linéairement dépendants si, A est liée.

Exemple 5.2.2. *Dans $\mathbb{R}^2$, les vecteurs $u = (1, 1)$ et $v = (1, -1)$ sont linéairement indépendants. En effet,*

$$\alpha.u + \beta.v = (0, 0) \Longrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases} \Longrightarrow \alpha = \beta = 0.$$

Exemple 5.2.3. *Dans $\mathbb{R}^2$, les vecteurs $u = (1, 1)$, $v = (1, -1)$ et $w = (4, 2)$ sont linéairement dépendants. En effet,*

$$\alpha.u + \beta.v + \gamma.w \Longrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + 4\gamma = 0 \\ \alpha - \beta + 2\beta = 0 \end{cases}$$

On voit facilement que ces deux équations ne sont pas vérifiées uniquement pour $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Elles sont aussi vérifiées par exemple pour $\alpha = 3,\ \beta = 1,\ \gamma = -1$.

Proposition 5.2.4. *A est liée si et seulement si, l'un des vecteurs de A est combinaison linéaire des autres.*

Preuve. Supposons que A est liée. Il existe donc des scalaires $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ non tous égaux à $0_{\mathbb{K}}$ et tels que :

$$\alpha_1.v_1 + \cdots + \alpha_n.v_n = 0_E.$$

Soit (à titre d'exemple seulement) $\alpha_1 \neq 0_{\mathbb{K}}$. Comme $\mathbb{K}$ est un corps, il existe $\beta_1 \in \mathbb{K}$ tel que $\beta.\alpha_1 = 1_{\mathbb{K}}$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \alpha_1.v_1 + \cdots + \alpha_n.v_n = 0_E \quad &\Longrightarrow \quad \alpha_1.v_1 = -\{\alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_n.v_n)\} \\ &\Longrightarrow \quad \alpha_1.v_1 = -\alpha_2.v_2) - \cdots - \alpha_n.v_n \\ &\Longrightarrow \quad v_1 = (\beta.\alpha_1).v_1 = \beta.(-\alpha_2.v_2) - \cdots - \alpha_n.v_n) \\ &\Longrightarrow \quad v_1 = -(\beta.\alpha_2).v_2 + \cdots - (\beta.\alpha_n).v_n. \end{aligned}$$

□

Proposition 5.2.5. *Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Alors,*

(i) Toute partie de E contenant un seul vecteur non nul est une partie libre.
(ii) Toute partie de E contenant le vecteur nul est liée.
(iii) Toute partie contenue dans une partie libre, est elle-même une partie libre.
(iv) Toute partie contenant une partie liée, est elle-même une partie liée.

Preuve. (i) Soit $A = \{v\}$ tel que $v \neq 0_E$. Alors, d'après la proposition 4.1.11,

$$\alpha.v = 0_E \Longrightarrow \alpha = 0_{\mathbb{K}} \Longrightarrow A \text{ est libre.}$$

(ii) Supposons que $A = \{0_E, v_1, \cdots, v_n\}$. Alors,

$$1_{\mathbb{K}}.0_E + 0_{\mathbb{K}}.v_1 + \cdots + 0_{\mathbb{K}}.v_n = 0_E \Longrightarrow A \text{ est liée.}$$

(iii) Soient $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$, $A = \{v_1, \cdots, v_n, v_{n+1}, \cdots, v_{n+p}\}$. Si A est libre alors,

$$\begin{aligned} 0_E \quad &= \quad \alpha_1.v_1 + \cdots + \alpha_n.v_n) = \alpha_1.v_1 + \cdots + \alpha_n.v_n + 0_E \\ &= \quad \alpha_1.v_1 + \cdots + \alpha_n.v_n + \underbrace{0_{\mathbb{K}}.v_{n+1} + \cdots + 0_{\mathbb{K}}.v_{n+p}}_{=0_E} \\ &\Longrightarrow \quad \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0_{\mathbb{K}} \\ &\Longrightarrow \quad B \text{ est libre.} \end{aligned}$$

(iv) Soient $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$, $A = \{v_1, \cdots, v_n, v_{n+1}, \cdots, v_{n+1}\}$.

$$\begin{aligned} B \text{ liée} &\Longrightarrow \exists (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n : \begin{cases} (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \neq 0_{\mathbb{K}^n} \\ (\alpha_1.v_1 + \cdots + \alpha_n.v_n = 0_E \end{cases} \\ &\Longrightarrow \alpha_1.v_1 + \cdots + \alpha_n.v_n + 1_{\mathbb{K}}.v_{n+1} + \cdots + 1_{\mathbb{K}}.v_{n+p}) = 0_E \\ &\Longrightarrow A \text{ liée.} \end{aligned}$$

□

Lemma 5.2.6. *(fondamental).*
Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel engendré par n vecteurs. Alors, toute partie libre de E contient au plus n éléments. En d'autres termes, toute partie de E de cardinal strictement supérieur à n est liée.

Preuve. La preuve de ce résultat est très technique. Afin de permettre au lecteur en général et à l'apprenant débutant en particulier de bien l'assimiler, nous nous bornerons uniquement à l'étude de deux cas.

Premier cas : E est engendré par un seul vecteur non nul u.

Soit $A = \{v_1, \cdots, v_n\}$, $n \succ 1$ une famille de vecteurs qu'on peut supposer tous non nuls (Pourquoi ?). Dans ce cas,

$$v_1 = \lambda_1.u,\ v_2 = \lambda_2.u\ , \cdots, v_n = \lambda_n.u$$

Puisque $\lambda_1 \neq 0$ (Pourquoi ?) alors,

$$v_2 = (\lambda_2.\lambda_1^{-1}).v_1\ , \cdots, v_n = (\lambda_n.\lambda_1^{-1}).v_1,$$

ce qui signifie que A est liée.

Deuxième cas : E est engendré par deux vecteurs non nuls $u_1,\ u_2$.

Soit $A = \{v_1, \cdots, v_n\}$, $n \succ 2$ une famille de vecteurs tous non nuls. Dans ce cas,

$$\forall i \in \{1, 2, \cdots, n\} :\ v_i = a_{i1}.u_1 + a_{i2}.u_2$$

Comme v_1 est non nul alors, au moins l'un des deux scalaires $a_{11},\ a_{12}$ est non nul. Supposons par exemple que $a_{11} \neq 0$. Dans ce cas,

$$u_1 = a_{11}^{-1}.(v_1 - a_{12}.u_2) = a_{11}^{-1}.v_1 - \left(a_{11}^{-1}.a_{12}\right).u_2$$

Par conséquent,

$$\forall i \in \{2, \cdots, n\} :\ v_i = a_{i1}.u_1 + a_{i2}.u_2 = \underbrace{\left(a_{i1}.a_{11}^{-1}\right)}_{\lambda_{i1}}.v_1 + \underbrace{\left(a_{i2} - a_{i1}.a_{11}^{-1}.a_{12}\right)}_{\lambda_{i2}}.u_2 \qquad (5.2.1)$$

D'autre part, si tous les $\lambda_{i2},\ i \in \{2, \cdots, n\}$ étaient nuls, on obtiendrait que

$$\forall i \in \{2, \cdots, n\} :\ v_i = \lambda_{i1}.v_1,$$

ce qui signifierait que la famille $\{v_2, \ldots, v_n\}$ est liée, de même que la famille A en vertu de propriété (iv) de la proposition 5.2.5.
Soit donc $p \in \{2, \cdots, n\}$ tel que $\lambda_{p2} \neq 0$. Dans ce cas,

$$u_2 = \lambda_{p2}^{-1}.v_p - \left(\lambda_{p2}^{-1}.\lambda_{p1}\right).v_1$$

D'où, en reportant dans 5.2.1,

$$\begin{aligned} i \in \{2, \cdots, n\} \Longrightarrow v_i &= \lambda_{i1}.v_1 + \lambda_{i2}.u_2 \\ &= \lambda_{i1}.v_1 + \lambda_{i2}.\left(\lambda_{p2}^{-1}.v_p - \left(\lambda_{p2}^{-1}.\lambda_{p1}\right).v_1\right) \\ &= \left(\lambda_{i1} - \lambda_{i2}.\lambda_{p2}^{-1}.\lambda_{p1}\right).v_1 + \left(\lambda_{i2}.\lambda_{p2}^{-1}\right).v_p \end{aligned}$$

Cette dernière formule montre que chaque $v_i,\ 2 \leq i \leq n$ s'écrit comme combinaison de v_1 et v_p. Ceci prouve que la famille A est liée.
Le lemme 5.2.6 est ainsi entièrement démontré. □

5.3 Bases

Définition 5.3.1. *Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, F un s.e.v. de E e $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ une famille finie de vecteurs de F. On dit que B est une base de F si, B est libre et $Vect(B) = F$.*

Exemples 5.3.2. *Les exemples traités dans les deux sections précédentes montrent que*
ex1) $B = \{v_1 = (1,1), v_2 = (1,-1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
ex2) $B = \{v_1 = (1,1,1), v_2 = (1,1,0), v_3 = (1,0,0)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 5.3.3. *Considèrons dans $\mathbb{R}^4$ le sous-espace*

$$F = \left\{v = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x = y \ \wedge y - z + t = 0\right\}.$$

On a 4 variables et deux équations. On va donc exprimer les éléments de F gràce à deux variables seulement. Ainsi,

$$\begin{aligned} v \in F &\Longleftrightarrow v = (x,x,z,z-x), \quad x,z \in \mathbb{R} \\ &\Longleftrightarrow v = (x,x,0,-x) + (0,0,z,z), \quad x,z \in \mathbb{R} \\ &\Longleftrightarrow v = x.\underbrace{(1,1,0,-1)}_{v_1} + z.\underbrace{(0,0,1,1)}_{v_2}), \quad x,z \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

On en déduit que $F = Vect(\{v_1, v_2\})$. Comme v_1, v_2 sont deux éléments de F et linéairement indépendants alors, $B = \{v_1, v_2\}$ est une base de F.

Proposition 5.3.4. *Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif et n un entier naturel non nul. Posons :*

$$e_i = \left(\underbrace{0_{\mathbb{K}}, \cdots, 0_{\mathbb{K}}, 1_{\mathbb{K}}}_{i}, 0_{\mathbb{K}}, \cdots, 0_{\mathbb{K}} \right) \quad , \quad \forall i \in \{1, \cdots, n\}. \tag{5.3.1}$$

Alors, la famille $B_c = \{e_1, \cdots, e_n\}$ est une base de $\mathbb{K}^n$. On l'appelle la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Preuve. Pour tout $v = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, on a :

$$\begin{aligned} v &= (x_1, 0_{\mathbb{K}}, \cdots, 0_{\mathbb{K}}) + \cdots + (0_{\mathbb{K}}, \cdots, 0_{\mathbb{K}}, x_n) \\ &= x_1.(1_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}}, \cdots, 0_{\mathbb{K}}) + \cdots + x_n.(0_{\mathbb{K}}, \cdots, 0_{\mathbb{K}}, 1_{\mathbb{K}}) \\ &= x_1.e_1 + \cdots + x_n.e_n. \end{aligned}$$

Ceci montre que $Vect(B) = \mathbb{K}^n$.
La preuve du caractère libre de B étant triviale et immédiate, elle est laissée à l'étudiant. □

La proposition 5.3.4 et les exemples traités précédemment montrent que dans $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ et plus généralement dans un espace vectoriel, il existe plus d'une base.

Définition 5.3.5. *Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et F un s.e.v. de E. F est dit de dimension finie s'il admet une partie génératrice finie d'éléments de F.*

Dans la définition précédente de la dimension, on peut avoir $F = E$.

Exemples 5.3.6. *1. Pour tout naturel n, l'epace vectoriel $\mathbb{K}^n$ est de dimension finie car, il est engendré par sa base canonique (voir proposition 5.3.4).*
2. Dans l'exemple 5.3.3, le sous-espace F est de dimension finie car, engendré par deux vecteurs.
3. D'une manière générale, tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$, $n \in \mathbb{N}$ est de dimensuion finie (voir série d'exercices corrigés à la fin du chapitre).
4. L'espace $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est de dimension infinie. En effet, pour toute famille finie B d'éléments de $\mathbb{K}[X]$, posons :

$$n = \max_{P \in B} \deg(P) \ , \ (\deg(P) \textit{désigne le degré du polynôme } P).$$

Alors, le polynôme $Q = X^{n+1}$ ne peut pas s'écrire comme combinaison linéaire des éléments de B.
5. Pour tout naturel non nul n, l'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n est un sous-espace de dimension finie de l'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$ (voir série d'exercices corrigés à la fin du chapitre).

Nous allons maintenant voir qu'en dimension finie, une partie génératrice contient toujours une base du sous-espace qu'elle engendre.

Theorem 5.3.7. *(Méthode d'extraction).*
Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $F \neq \{0_E\}$ un s.e.v. de E. Si F est de dimension finie alors, il admet une base de cardinal fini.

Preuve. Puisque F est de dimension finie alors, il existe dans F une famille finie $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ qui engendre F. Nous allons extraire de B une base de F (d'où, l'appellation "méthode d'extraction"). Pour cela, on procède comme suit :
a) Si B est libre alors, B est une base à n éléments de F et le problème est résolu.
b) Sinon, au moins un des vecteurs de B (par exemple v_1) est combinaison des autres. Posons

$$B_1 = B \setminus \{v_1\} = \{v_2, \cdots, v_n\}.$$

Il est clair que $B_2 \subset B_1$ et que B_2 est aussi une partie génératrice de F. Si B_2 est libre alors, B_2 est une base à $(n-1)$ éléments de F.
c) Sinon, B_2 contient un élément qui est combinaison linéaire des autres. En excluant cet élément, on obtient une nouvella famille B_2 vérifiant :

$$B_2 \subset B_1 \subset B \quad \wedge \quad Vect(B_2) = F.$$

d) Ce processus peut être répété au maximum $(n-1)$ fois et le résultat final est une base de F de cardinal au plus égal à n. $\square$

Exemple 5.3.8. *La famille $B = \{v_1 = (1,1), v_2 = (1,-1), v_3 = (2,0)\}$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$ (vérifiez !) mais ça n'en est pas une base car, $v_3 = v_1 + v_2$. En éliminant v_3 on obtient la base $\{v_1, v_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ car, v_1 et v_2 sont linéairement indépendants.*

Theorem 5.3.9. *Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et F un s.e.v. de E. Si B est une base de F de cardinal fini alors, toute autre base de F est de cardinal égal à celui de B.*

Preuve. C'est une conséqunce directe et immédiate de la proposition 5.2.6. $\square$

Définition 5.3.10. *Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et F un s.e.v. de E.*
On dit que F est de dimension n s'il admet une base formée de n éléments. Dans ce cas, on écrit : $n = \dim_{\mathbb{K}}(F)$ (ou simplement, $n = \dim(F)$ s'il n' y a pas de risque de confusion sur le corps $\mathbb{K}$). Si, $f = \{0_E\}$, on pose par convention : $\dim(F) = 0$.

i) En vertu du théorème 5.3.9, la dimension d'un sous-espace est unique et donc, la définition 5.3.10 est correcte.
ii) En vertu de la proposition 5.3.4, la dimension du $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ est égale à n.
iii) La dimension dépend du corps de base. En effet, d'après le point ii), $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$. Mais $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$ car,

$$z = a + ib \in \mathbb{C} \Longrightarrow z = a.1 + b.i$$

et $B = \{v_1 = 1, v_2 = i\}$ est une base du $\mathbb{R}$ espace vectoriel $\mathbb{C}$.

Proposition 5.3.11. *Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et F un s.e.v. de E. Alors, $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ est une base de F si et seulement si, pour tout vecteur v de F, il existe un n -uplets unique $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que :*

$$v = \alpha_1.v_1 + \cdots + \alpha_n.v_n$$

Les scalaires $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ sont appelés composantes du vecteur v selon la base B et on écrit :

$$v = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)_B.$$

Preuve. Supposons que B est une base et que $v \in E$ admette les deux écritures :

$$v = \alpha_1.v_1 + \cdots + \alpha_n.v_n = \beta_1.v_1 + \cdots + \beta_n.v_n)$$

Dans ce cas,

$$(\alpha_1 - \beta_1).v_1 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n).v_n = 0_E.$$

Comme B est libre alors,

$$\alpha_1 - \beta_1 = \cdots, \alpha_n - \beta_n = 0 \quad (\Longleftrightarrow \alpha_1 = \beta_1, \cdots, \alpha_n = \beta_n).$$

Inversement, supposons que tout vecteur $v \in F$ s'écrit d'une manière unique comme combinaison linéaire des éléments de B. Dans ce cas, $Vect(B) = F$ et de plus,

$$\begin{aligned} \alpha_1.v_1 + \cdots + \alpha_n.v_n = 0_E \quad &\Longrightarrow \quad \alpha_1.v_1 + \cdots + \alpha_n.v_n = 0_{\mathbb{K}}.v_1 + \cdots + 0_{\mathbb{K}}.v_n \\ &\Longrightarrow \quad \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0_{\mathbb{K}}. \end{aligned}$$

Par conséquent, B est une base de F. $\square$

Remarque 5.3.12. *Il est clair que*

$$\begin{cases} u = (x_1, \cdots, x_n)_B \\ v = (y_1, \cdots, y_n)_B \end{cases} \Longrightarrow \alpha.u + \beta.v = (\alpha.x_1 + \beta.y_1, \cdots, \alpha.x_n + \beta.y_n)_B, \ \forall \alpha, \beta.$$

Exemple 5.3.13. *On considère dans $\mathbb{R}^3$ le sous-espace $F = \{v = (x, y, x + 2y) : \ x, y \in \mathbb{R}\}$. On a :*

$$v \in F \quad \Longleftrightarrow \quad v = (x, 0, x) + (0, y, 2y) = x.\underbrace{(1, 0, 1)}_{v_1} + y.\underbrace{(0, 1, 2)}_{v_2}$$

Comme x et y sont définis de manière unique par le vecteur v alors, on peut affirmer que $\{v_1 = (1,0,1), v_2 = (0,1,2)\}$ est une base de F.

Lemma 5.3.14. *Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et F un s.e.v. de E. On suppose que F est de dimension finie ($\dim(F) = n \prec +\infty$). Alors,*

(i) Toute partie libre B de F contenant n éléments, est une base de F.

(ii) Toute partie génératrice B de F contenant n éléments, est une base de F.

Preuve. i) Soit B une partie libre de F contenant n éléments. Alors,

$$\begin{aligned} B \text{ n'est pas une base de } F &\iff B \text{ n'est pas génératrice de } F \\ &\iff \text{Il existe dans } F \text{ un vecteur } v \text{ tel que } v \notin Vect(B) \\ &\iff \text{Il existe dans } F \text{ un vecteur } v \text{ tel que } B \cup \{v\} \text{ est libre.} \end{aligned}$$

Or, ceci est impossible d'après le théorème 5.2.6 car, $Card(B \cup \{v\}) = n + 1 \succ n$.
ii) Soit B une partie génératrice de F contenant n éléments. Alors,

$$B \text{ n'est pas une base de } F \iff B \text{ n'est pas libre.}$$

D'après le théorème d'extraction 5.3.7, B contient une base B' de F. On arrive ainsi à la contradiction suivante :

$$\dim(F) = Card(B') \prec Card(B) = n = \dim(F).$$

□

Si le théorème d'extraction 5.3.7 montre qu'une partie génératrice contient en général plus qu'il n'en faut de vecteurs pour avoir une base, le théorème que nous allons maintenant énoncer et établir montre qu'au contraire, une partie libre contient en général un nombre insuffisant de vecteurs pour avoir une base.

Theorem 5.3.15. *(Théorème de la base incomplète).*
Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et F un s.e.v. de E. On suppose que $\dim(F) = n \prec +\infty$. Alors, pour toute partie libre A de F, vérifiant $Card(A) = p \prec n$, il existe $(n-p)$ vecteurs $\{v_{p+1}, \cdots v_n\}$ appartenant à F et tels que $B = A \cup \{v_{p+1}, \cdots v_n\}$ est une base de F.

Preuve. Posons $A = \{v_1, \cdots, v_p\}$. Comme $p \prec n = \dim(F)$, il existe dans F un vecteur v_{p+1} tel que la famille $A_1 = \{v_1, \cdots, v_p, v_{p+1}\}$ est libre dans F. En effet, il suffit de prendre $v_{p+1} \notin Vect(A)$.
Si $p + 1 = n$ alors, d'après le lemme 5.3.14 A_1 est une base de F et le problème est résolu. Sinon, il existe dans F un vecteur v_{p+2} tel que $A_2 = A_1 \cup \{v_{p+2}\} = \{v_1, \cdots, v_p, v_{p+1}, v_{p+2}\}$ est libre dans F.
Si, $p + 2 = n$ alors, d'après le lemme 5.3.14 A_2 est une base de F et le problème est résolu. Sinon, on recommence le même raisonnement et à chaque fois on compare le cardinal de la partie libre obtenue avec n. Après exactement $(n - p)$ étapes, on obtient une partie libre de F constituée de n éléments. D'après le lemme 5.3.14, c'est fotcément une base de F. □

Exemple 5.3.16. *Soit $v = (a, b)$ un vecteur non nul donné de $\mathbb{R}^2$. Pour trouver toutes les bases de $\mathbb{R}^2$ contenant v, il suffit de trouver tous les vecteurs $u = (x, y)$ de $\mathbb{R}^2$ tels que $A = \{v, u\}$ est libre. Cela est équivalent à :*

$$\alpha.v + \beta.u = (0, 0) \Longrightarrow \alpha = \beta = 0.$$

Sous forme de système, cela devient :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{l} \alpha.a + \beta.x = 0 \\ \alpha.b + \beta.y = 0 \end{array} \right. .$$

La méthode de Cramer montre que pour que $\alpha = \beta = 0$ soit l'unique solution de ce système, il faut et il suffit que le déterminant $a.y + b.x \neq 0$. On voit bien qu'il y a une infinité de possibilités pour le choix de u.

Exemple 5.3.17. *Considèrons dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ la famille $A = \{v = (1, -1, 1)\}$. C'est une partie libre de $\mathbb{R}^3$. Pour la compléter en une base de $\mathbb{R}^3$, il faut trouver deux vecteurs $u = (a, b, c)$ et $w = (e, f, g)$ tels que $\{v, u, w\}$ soit une partie libre de $\mathbb{R}^3$. Cela signifie que*

$$\alpha.v + \beta.u + \gamma.w = (0, 0, 0) \Longrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Ecrite sous forme de système d'équations, l'égalité précédente nous donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha + \beta.a + \gamma.e = 0 \\ -\alpha + \beta.b + \gamma.f = 0 \\ \alpha + \beta.c + \gamma.g = 0 \end{array} \right. .$$

On a donc un système de trois équations et trois inconnues α, β, γ. Pour que $\alpha = \beta = \gamma = 0$ soit la seule solution, il suffit que le déteminant de la matrice associée à ce système soit différent de 0. C'est à dire :

$$\det \begin{pmatrix} 1 & a & e \\ -1 & b & f \\ 1 & c & g \end{pmatrix} \neq 0.$$

On voit bien qu'il existe une infinité de possibilités par exemple,

$$[u = (a, b, c) = (1, 0, 0),\ w = (e, f, g) = (0, 1, 0)] \ \vee \ [u = (a, b, c) = (1, 0, 0),\ w = (e, f, g) = (0, 0, 1)] .$$

Exemple 5.3.18. *Considèrons dans $\mathbb{R}^3$ le sous-espace $F = \{v = (x, y, x + 2y) : \ x, y \in \mathbb{R}\}$. On a déjà vu plus haut qu'il est de dimension 2. Par ailleurs, le vecteur $u = (1, 1, 3)$ appartient à F. Pour construire une base de F contenant u, il faut trouver deux réels a et b tels que les vecteurs $u, v = (a, b, a + 2b)$ sont linéairement indépendants. Cela signifie que l'égalité*

$$(\alpha + \beta.a, \alpha + \beta.b, 3\alpha + \beta(a + 2b) = (0, 0, 0).$$

Comme,

$$3\alpha + \beta(a + 2b) = (\alpha + \beta.a) + 2(\alpha + \beta.b),$$

alors, tout revient à montrer que le système

$$(S) : \left\{ \begin{array}{l} \alpha + \beta.a = 0 \\ \alpha + \beta.b = 0 \end{array} \right.$$

est de Cramer. En d'autres termes, $a \neq b$.

Nous allons maintenant utiliser le théorème de la base incomplète pour établir l'un des principaux résultats sur les dimensions. Il s'agit de la formule de Grassmann.

Theorem 5.3.19. *(Formule de Grassmann).*
Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces d'un espace vectoriel de dimension finie E. Alors,

$$\dim(E_1 + E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2) - \dim(E_1 \cap E_2). \tag{5.3.2}$$

Preuve. Soient

$$p_1 = \dim(E_1)\ ,\ p_2 = \dim(E_2)\ ,\ p = \dim(E_1 \cap E_2)\ \ ,\ \ p < \min(p_1, p_2)$$

et soit $B_{E_1 \cap E_2} = \{v_1, v_2, \cdots, v_p\}$ une base de $E_1 \cap E_2$. D'après le théorème 5.3.15 de la base incomplète, on peut trouver dans E_1 un nombre de $p_1 - p$ vecteurs $u_1, u_2, \cdots, u_{p_1-p}$ tels que la famille $B_1 = \{u_1, u_2, \cdots, u_{p_1-p}, v_1, v_2, \cdots, v_p\}$ est une base de E_1. De la même manière, on peut trouver dans E_2 un nombre de $p_2 - p$ vecteurs $w_1, w_2, \cdots, w_{p_2-p}$ tels que la famille $B_2 = \{v_1, v_2, \cdots, v_p, w_1, w_2, \cdots, w_{p_2-p}\}$ est une base de E_2. Posons :

$$B_{E_1+E_2} := B_1 \cup B_2 = \{u_1, u_2, \cdots, u_{p_1-p}, v_1, v_2, \cdots, v_p, w_1, w_2, \cdots, w_{p_2-p}\}\,.$$

On a clairement,

$$Card(B_{E_1+E_2}) = p_1 + p_2 - p = \dim(E_1) + \dim(E_2) - \dim(E_1 \cap E_2).$$

Par conséquent, le théorème sera démontré si on prouve que $B_{E_1+E_2}$ est une base de $E_1 + E_2$. On a,

$$B_{E_1+E_2} \subset E_1 + E_2 \Longrightarrow Vect(B_{E_1+E_2}) \subseteq E_1 + E_2.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} v \in E_1 + E_2 \quad &\Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} v = u + w \\ u \in E_1 = Vect(B_1) \\ w \in E_2 = Vect(E_2) \end{array} \right. \Longrightarrow v \in Vect(B_1 \cup B_2) = Vect(B_{E_1+E_2}) \\ &\Longrightarrow \quad E_1 + E_2 \subset Vect(B_{E_1+E_2}). \end{aligned}$$

Ainsi, $E_1 + E_2 = Vect(B_{E_1+E_2})$, c'est à dire que $Vect(B_{E_1+E_2})$ engendre $E_1 + E_2$. Il reste à montrer que $B_{E_1+E_2}$ est libre. De l'égalité

$$\alpha_1.u_1 + \cdots + \alpha_{p_1-p}.u_{p_1-p} + \beta_1.v_1 + \cdots + \beta_p.v_p + \gamma_1.w_1 + \cdots + \gamma_{p_2-p}.w_{p_2-p}) = 0_E$$

découle que le vecteur $\gamma_1.w_1 + \cdots + \gamma_{p_2-p}.w_{p_2-p}$ appartient à l'intersection $E_1 \cap E_2$. On peut donc l'écrire sous la forme

$$\gamma_1.w_1 + \cdots + \gamma_{p_2-p}.w_{p_2-p} = \delta_1.v_1 + \cdots + \delta_p.v_p$$

En reportant dans la formule de départ, on obtient

$$\alpha_1.u_1 + \cdots + \alpha_{p_1-p}.u_{p_1-p} + (\beta_1 + \delta_1).v_1 + \cdots + (\beta_p + \delta_p).v_p = 0_E.$$

Ceci implique forcément que

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{p_1-p} = 0_{\mathbb{K}}. \tag{5.3.3}$$

En reportant à nouveau les valeurs des α_i dans la formule de dépert, on obtient :

$$\beta_1.v_1 + \cdots + \beta_p.v_p + \gamma_1.w_1 + \cdots + \gamma_{p_2-p}.w_{p_2-p} = 0_E$$

ce qui donne,

$$\beta_1 = \beta_p = \gamma_1 = \cdots \gamma_{p_2-p} = 0_{\mathbb{K}}. \tag{5.3.4}$$

Les formules 5.3.3 et 5.3.4 montrent que $B_{E_1+E_2}$ est libre. □

Corollaire 5.3.20. *Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces d'un espace vectoriel de dimension finie E. Alors,*

$$E = E_1 \oplus E_2 \Longleftrightarrow \begin{cases} \dim(E) = \dim(E_1) + \dim(E_2) \\ \dim(E_1 \cap E_2) = 0 \end{cases}.$$

Preuve. ($\Longrightarrow$) On a,

$$\begin{aligned} E = E_1 \oplus E_2 \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} E = E_1 + E_2 \\ E_1 \cap E_2 = \{0_E\} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dim(E) = \dim(E_1) + \dim(E_2) - \dim(E_1 \cap E_2) \\ \dim(E_1 \cap E_2) = 0 \end{cases} \\ &\Longrightarrow \quad \begin{cases} \dim(E) = \dim(E_1) + \dim(E_2) \\ \dim(E_1 \cap E_2) = 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

($\Longleftarrow$) Inversement,

$$\begin{aligned} \begin{cases} \dim(E) = \dim(E_1) + \dim(E_2) \\ \dim(E_1 \cap E_2) = 0 \end{cases} \quad &\Longrightarrow \quad \begin{cases} \dim(E) = \dim(E_1 + E_2) \\ E_1 \cap E_2 = \{0_E\} \end{cases} \\ &\Longrightarrow \quad \begin{cases} E = E_1 + E_2 \quad (\text{car}, E_1 + E_2 \subseteq E) \\ E_1 \cap E_2 = \{0_E\} \end{cases} \\ &\Longrightarrow \quad E = E_1 \oplus E_2. \end{aligned}$$

□

Nous terminons cette section par un résultat pratique permettant de reconnaitre les bases via les déteminants.

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n et $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ une base de E. Soit aussi $B' = \{u_1, \cdots, u_n\}$ une famille de n vecteurs de E. Pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, posons :

$$u_i = a_{1i}.v_1 + \cdots + a_{ni}.v_n = (a_{1i}, \cdots, a_{ni})_B \quad \text{(voir proposition 5.3.11)}.$$

Définition 5.3.21. *La matrice*

$$M_B(B') := M_B(u_1, \cdots, u_n) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

est appelée matrice des coefficients des vecteurs $u_1, \cdots, u_n$ dans la base B.

Theorem 5.3.22. *Si,* $\det(M_B(B')) \neq 0_{\mathbb{K}}$ *alors, B' est une base de E.*

Preuve. D'après le lemme 5.3.14, tout revient à montrer que si $\det(M_B(B')) \neq 0_{\mathbb{K}}$ si et seulement si, B' est une partie libre de E.
On a B' est libre si et seulement si, $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0_{\mathbb{K}}$ est l'unique solution de l'équation

$$\alpha_1.u_1 + \cdots + \alpha_n.u_n = 0_E.$$

En remplaçant les u_i par leurs écritures dans la base B, on obtient l'équation :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k.a_{1k}\right).v_1 + \cdots + \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k.a_{nk}\right).v_n = 0_E. \tag{5.3.5}$$

Puisque B' est libre, cette équation est équivalente au système homogène

$$(S) : \begin{cases} \alpha_1.a_{11} + \cdots + \alpha_n.a_{1n} = 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots \\ \alpha_1.a_{n1} + \cdots + \alpha_n.a_{nn} = 0_{\mathbb{K}} \end{cases}$$

On voit bien que la matrice de ce système est exactement la matrice carrée $M_B(B')$. Par conséquent, dire que la seule solution possible de ce système homogène est

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0_{\mathbb{K}}$$

équivaut à dire que le déterminant $\det(M_B(B'))$ est non nul. Ceci achève la démonstration. □

Exemple 5.3.23. *Soit $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ une base d'un espace vectoriel E. Considérons les vecteurs*

$$w_1 = v_1 + v_2 + v_3 - v_4,\ w_2 = v_1 + v_2 - v_3 + v_4,\ w_3 = v_1 - v_2 + v_3 + v_4,\ w_4 = -v_1 + v_2 + v_3 + v_4.$$

La matrice des coefficients des vecteurs w_1, w_2, w_3, w_4 dans la base B est :

$$M_B(w_1, w_2, w_3, w_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

De plus,

$$\det\left(M_B(w_1, w_2, w_3, w_4)\right) = -16 \neq 0.$$

Par conséquent, la famille $B_1 = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ est une autre base de E.
On peut de manière identique prouver que la famille

$$B_2 = \{v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3, v_1 + v_2 + v_3 + v_4\}$$

est aussi une base de E.

5.4 Formule de changement de base et matrice de passage

Position du problème Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ et $B^{'} = \{v_1', \cdots, v_n'\}$ deux bases de E. On sait que pour tout $w \in E$, il existe deux n -uplets unique $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ et $(\alpha_1', \cdots, \alpha_n') \in \mathbb{K}^n$ tels que :

$$w = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)_B := \alpha_1.v_1 + \cdots + \alpha_n.v_n$$

et

$$w = (\alpha_1', \cdots, \alpha_n')_{B'} := \alpha_1'.v_1' + \cdots + \alpha_n'.v_n'$$

Les scalaires $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ sont alors appelés composantes de w dans la base B et $\alpha_1', \cdots, \alpha_n'$ ses compsantes dans la base $B^{'}$.

La question naturelle qui se pose est :

Comment passer des composantes $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ aux composantes $\alpha_1', \cdots, \alpha_n'$?

Comme B est une base alors,

$$\begin{cases} v_1' = a_{11}.v_1 + a_{21}.v_2 + \cdots + a_{n1}.v_n \\ v_2' = a_{12}.v_1 + a_{22}.v_2 + \cdots + a_{n2}.v_n \\ \vdots \\ v_n' = a_{1n}.v_1 + a_{2n}.v_2 + \cdots + a_{nn}.v_n \end{cases} . \tag{5.4.1}$$

Définition 5.4.1. *La matrice*

$$P_{(B',\ B)} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{5.4.2}$$

est appelée matrice de passage de la base B à la base $B^{'}$. La colonne j est constituée des composantes du vecteur $v_j' \in B^{'}$ dans la base B.

Dans l'écriture $P_{(B',\ B)}$, l'ordre est important. En effet, $P_{(B',\ B)}$ permet d'exprimer les éléments de $B^{'}$ en fonction de ceux de B. Par contre $P_{(B,\ B')}$ qui est la matrice de passage de $B^{'}$ vers B permet d'exprimer les éléments de B en fonction de ceux de $B^{'}$.

Exemples 5.4.2. *1) Si* $E = \mathbb{R}^2$, $B_c(\mathbb{R}^2) = \{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$ *est la base canonique de* $\mathbb{R}^2$ *et* $B^{'} = \{v_1 = (1,1), v_2 = (1,-1)\}$ *alors,*

$$P_{(B',B_c(\mathbb{R}^2))} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad P_{(B_c(\mathbb{R}^2),B')} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

2) Si $E = \mathbb{R}^2$, $B_c(\mathbb{R}^3) = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ *est la base canonique de* $\mathbb{R}^3$ *et* $B^{'} = \{v_1 = (1,0,0), v_2 = (1,1,0), v_3 = (1,1,1)\}$ *alors,*

$$P_{(B',B_c(\mathbb{R}^3))} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad P_{(B_c(\mathbb{R}^3),B')} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nous allons maintenant énoncer certaines propriétés fondamentales des matrices de passage.

Proposition 5.4.3. *Si* $B, B^{'}, B^{''}$ *sont trois bases du* $\mathbb{K}$ *-espace vectoriel* E *alors,*
1) $P_{(B,\ B)} = I_n$, $(n = \dim(E))$.
2) $P_{(B'',\ B)} = P_{(B',\ B)} \times P_{(B'',\ B')}$.
3) Une matrice de passage est toujours inversible et :

$$\Big(P_{(B',\ B)}\Big)^{-1} = P_{(B,\ B')}.$$

Preuve. La preuve du point 1) est évidente car, si v_j est de la base $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ alors,

$$v_j = 0_{\mathbb{K}}.v_1 + \cdots + 0_{\mathbb{K}}.v_{j-1} + 1_{\mathbb{K}}.v_j + 0_{\mathbb{K}}.v_{j+1} + \cdots 0_{\mathbb{K}}.v_n$$

Pour la preuve de 2), on écrit premièrement les éléments de $B^{''}$ en fonction de ceux de $B^{'}$, puis ceux de $B^{'}$ en fonction de ceux de B et on remplace dans la première formule. c'est un calcul simple et direct, attention seulement aux erreurs de calcul.
Pour prouver le point 3), on utilise les deux premiers points. En effet,

$$I_n = P_{(B,\ B)} = P_{(B',\ B)} \times P_{(B,\ B')}.$$

□

Le résultat suivant fournit la réponse à la question posée plus haut.

Theorem 5.4.4. *Soient* $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ *et* $B^{'} = \{v_1', \cdots, v_n'\}$ *deux bases d'un* $\mathbb{K}$ *-espace vectoriel* E*. Soit aussi* $w \in E$ *tel que :*

$$w = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)_B = (\alpha_1', \cdots, \alpha_n')_{B'}.$$

Alors,

$$\begin{pmatrix} \alpha_1' \\ \vdots \\ \alpha_n' \end{pmatrix} = P_{(B,B')} \times \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Preuve. Soit $w \in E$ et supposons que

$$w = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)_B = (\alpha'_1, \cdots, \alpha'_n)'_B.$$

En tenant compte de 5.4.1, on obtient

$$\begin{array}{rcl} w & = & \alpha'_1.v'_1 + \alpha'_2.v'_2 \cdots + \alpha'_n.v'_n \\ & = & \alpha'_1.\left(a_{11}.v_1 + a_{21}.v_2 + \cdots + a_{n1}.v_n\right) \\ & & +\alpha'_2.\left(a_{12}.v_1 + a_{22}.v_2 + \cdots + a_{n2}.v_n\right)) \\ & & \vdots \\ & & +\alpha'_n.\left(a_{1n}.v_1 + a_{2n}.v_2 + \cdots + a_{nn}.v_n\right). \end{array}$$

Après arrangement, on aura

$$\begin{array}{rcl} w & = & \left(\alpha'_1.a_{11} + \alpha'_2.a_{12} + \cdots + \alpha'_n.a_{1n}\right).v_1 \\ & & + \left(\alpha'_1.a_{21} + \alpha'_2.a_{22} + \cdots + \alpha'_n.a_{2n}\right).v_2 \\ & & \vdots \\ & & + \left(\alpha'_1.a_{n1} + \alpha'_2.a_{n2} + \cdots + \alpha'_n.a_{nn}\right).v_n \end{array}$$

D'après l'unicité des coeffeicients selon une base donnée (voir Proposition 5.3.11), on a forcément

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha'_1.a_{11} + \alpha'_2.a_{12} + \cdots + \alpha'_n.a_{1n} \\ \alpha'_1.a_{21} + \alpha'_2.a_{22} + \cdots + \alpha'_n.a_{2n} \\ \vdots \\ \alpha'_1.a_{n1} + \alpha'_2.a_{n2} + \cdots + \alpha'_n.a_{nn} \end{pmatrix} = P_{(B',\ B)} \times \begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{pmatrix}$$

ou sous forme équivalente,

$$\begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{pmatrix} = \left(P_{(B',\ B)}\right)^{-1} \times \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = P_{(B,\ B')} \times \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

□

Exemples 5.4.5. *1) Considérons dans $\mathbb{R}^2$ la base $B = \{v_1 = (1,1),\ v_2 = (1,-1)\}$ (voir 5.4.2). Tout vecteur $v = (x,y)$ de $\mathbb{R}^2$ s'écrit dans cette base sous la forme : $v = (x,y) = \alpha.v_1 + \beta.v_2$ où,*

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = P_{(B_c(\mathbb{R}^2),\ B)} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x+y}{2} \\ \frac{x-y}{2} \end{pmatrix}.$$

2) Considérons dans $\mathbb{R}^3$ la base $B = \{v_1 = (1,0,0),\ v_2 = (1,1,0),\ v_3 = (1,1,1)\}$ (voir 5.4.2). Tout vecteur $v = (x,y,z)$ de $\mathbb{R}^3$ s'écrit dans cette base sous la forme : $v = (x,y,z) = \alpha.v_1 + \beta.v_2 + \gamma.v_3$ où,

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = P_{(B_c(\mathbb{R}^3),\ B)} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ y-z \\ z \end{pmatrix}.$$

5.5 Complément : L'espace quotient

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et F un sous-espace de E. Considérons dans E la relation binaire $\mathcal{R}$:

$$\forall (u,v) \in E^2 : \quad u\mathcal{R}v \Longleftrightarrow u - v \in F.$$

On vérifie facilement que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. De plus, pour tout $u \in E$, sa classe d'équivalence $\widehat{u}$ est l'ensemble

$$\widehat{u} = u + F := \{u + v : \quad v \in F\}.$$

En particulier, $\widehat{0_E} = F$.

Remarque 5.5.1. *La relation $\mathcal{R}$ est compatible avec les opérations + et . de l'espace vectoriel E. Cela veut dire ce qui suit :*

$$\forall (u_1,u_2,u_3,u_4) \in E^4 \ , \ \forall \alpha \in \mathbb{K} : \quad \begin{cases} u_1\mathcal{R}u_2 \\ u_3\mathcal{R}u_4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (u_1+u_3)\mathcal{R}(u_2+u_4) \\ (\alpha.u_1)\mathcal{R}(\alpha.u_2) \end{cases}$$

Notre but immédiat est de munir l'ensemble quotient E/F (ensemble de toutes les classes d'équivalence) d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Pour cela, définissons l'addition vectorielle + et la multiplication . par un scalaire dans E comme suit :

$$\forall (u,v) \in E^2 \ , \ \forall \alpha \in \mathbb{K} : \quad \begin{cases} \widehat{u} \ + \ \widehat{v} = \widehat{a+b} \\ \alpha.\widehat{u} = \widehat{\alpha.a} \end{cases}$$

où, a est un représentant de la classe $\widehat{u}$ et b est un représentant de la classe $\widehat{v}$.

Proposition 5.5.2. *Les opérations + et . sont indépendantes du choix des représentants. En particulier, on peut prendre $a = u$ et $b = v$.*

Proof C'est une interprétation directe de la compatibilité de la relation $\mathcal{R}$ avec les opérations de l'espace vectorielle E. □

Proposition 5.5.3. $(E/F, +)$ *est un groupe commutatif.*

Preuve. i) Pour tout couple (u, v) dans E/F,

$$\widehat{u} + \widehat{v} = \widehat{u+v} = \widehat{v+u} = \widehat{v} + \widehat{u}.$$

Par conséquent, + est commutative dans E/F.
ii) Pour tout triplet (u, v, w) dans E/F,

$$\begin{aligned} (\widehat{u} + \widehat{v}) + \ \widehat{w} \quad &= \quad \widehat{u+v} + \widehat{w} = (u \widehat{+ v) +} w \\ &= \quad u \widehat{+ (v +} w) = \widehat{u} + \widehat{v+w} = \widehat{u} + (\widehat{v} + \widehat{w}). \end{aligned}$$

D'où, l'associativité de $+$ dans E/F.
iii) Pour tout $\widehat{u} \in E/F$,

$$\widehat{u} + F = \widehat{u} + \widehat{0_E} = \widehat{u + 0_E} = \widehat{u}.$$

Ainsi, $+$ admet dans E/F un élément neutre qui est l'ensemble $F = \widehat{0_E}$.
iv) Pour tout $\widehat{u} \in E/F$,

$$\widehat{u} + \widehat{-u} = \widehat{u + (-u)} = \widehat{u - u} = \widehat{0_E} = F.$$

Par conséquent, tout élément $\widehat{u} \in E/F$ admet un symétrique pour l'opération $+$. Ce symétrique est $\widehat{-u}$. En résumé, $(E/F,\ +)$ est bien un groupe commutatif. □

Proposition 5.5.4. *L'opération . de multiplication d'un élément de E/F par un scalaire satisfait aux conditions d'une opération externe dans un espace vectoriel.*

Preuve. Pour tout $\widehat{u},\ \widehat{v}$ dans E/F et tous scalaires $\alpha,\ \beta$ dans $\mathbb{K}$,
v)

$$\begin{aligned} \alpha.\left(\widehat{u} + \widehat{v}\right) &= \alpha.\left(\widehat{u + v}\right) = \alpha.\widehat{(u + v)} \\ &= \widehat{\alpha.u + \alpha.v} = \widehat{\alpha.u} + \widehat{\alpha.v} = \alpha.\widehat{u} + \alpha.\widehat{v}. \end{aligned}$$

vi)

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta).\widehat{u} &= \widehat{(\alpha + \beta).u} = \widehat{\alpha.u + \beta \bullet u} = \widehat{\alpha.u} + \widehat{\beta.u} \\ &= \alpha.\widehat{u} + \beta.\widehat{u}. \end{aligned}$$

vii)

$$\alpha.\left(\beta.\widehat{u}\right) = \alpha.\widehat{(\beta.u)} = \widehat{\alpha.(\beta.u)} = \widehat{(\alpha.\beta).u} = (\alpha.\beta).\widehat{u}.$$

viii)

$$1_{\mathbb{K}}.\widehat{u} = \widehat{1_{\mathbb{K}}.u} = \widehat{u}.$$

□

Il découle des propositions 5.5.3 et 5.5.4 que muni des opérations $+$ et ., l'ensemble E/F est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Theorem 5.5.5. *Si E est de dimension finie alors,* $\dim(E/F) = \dim(E) - \dim(F)$.

Preuve. Supposons que $\dim(E) = n$ et $\dim(F) = p$, $p \leq n$. Soit $B_F = \{v_1, \cdots, v_p\}$ une base quelconque de F. D'après le théorème 5.3.15 de la base incomplète, il existe dans E des vecteurs $v_{p+1}, \cdots, v_n$ tels que la famille $B_E = \{v_1, \cdots, v_p, v_{p+1}, \cdots, v_n\}$ est une base de E. Pour établir le résultat recherché, nous allons montrer que la famille $\widehat{B} = \{\widehat{v_{p+1}}, \cdots, \widehat{v_n}\}$ est une base de E/F. On a

$$\begin{aligned} v \in E \quad &\Longrightarrow \quad v = \underbrace{\alpha_1.v_1 + \cdots + \alpha_p.v_p}_{\in F} + \alpha_{p+1}.v_{p+1} + \cdots + \alpha_n.v_n \\ &\Longrightarrow \quad \widehat{v} = \widehat{\alpha_{p+1}.v_{p+1} + \cdots + \alpha_n.v_n} \\ &\Longrightarrow \quad \widehat{v} = \alpha_{p+1}.\widehat{v_{p+1}} + \cdots + \alpha_n.\widehat{v_n} \end{aligned}$$

Ceci prouve que $E/F = Vect(\widehat{B})$. Il reste à montrer que $\widehat{B}$ est libre. On a :

$$\begin{aligned}\alpha_{p+1}.\widehat{v_{p+1}} + \cdots + \alpha_n.\widehat{v_n} = 0_{E/F} = \widehat{0_E} &\implies \alpha_{p+1}.\widehat{v_{p+1} + \cdots} + \alpha_n.v_n = \widehat{0_E} \\ &\implies \alpha_{p+1}.v_{p+1} + \cdots + \alpha_n.v_n \in F \\ &\implies \alpha_{p+1}.v_{p+1} + \cdots + \alpha_n.v_n = 0_E.\end{aligned}$$

Cette dernière affirmation découle du fait que par construction,

$$F \cap Vect\left(\{v_{p+1}, \cdots, v_n\}\right) = \{0_E\}.$$

Ainsi, en utilisant le fait que les vecteurs $v_{p+1}, \cdots, v_n$ sont linéairement indépendants, on a :

$$\begin{aligned}\alpha_{p+1}.\widehat{v_{p+1}} + \cdots + \alpha_n.\widehat{v_n} = 0_{E/F} = \widehat{0_E} &\implies \alpha_{p+1}.v_{p+1} + \cdots + \alpha_n.v_n = 0_E \\ &\implies \alpha_{p+1} = \cdots = v_n = 0_{\mathbb{K}}.\end{aligned}$$

□

5.6 Exercices corrigés

Exercice 5.6.1. *Montrer que si E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n alors, tout sous-espace de E est de dimension inférieure ou égale à n.*

Solution : Soit F un sous-espace de E. Supposons que $\dim(F) = m \succ n$. Cela signifie qu'on peut trouver dans E une famille libre de cardinal strictement supérieur à $n = \dim(E)$. Or, ceci est impossible en vertu du lemme 5.2.6. □

Exercice 5.6.2. *Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces d'un espace vectoriel de dimension finie E. On suppose que B_1 est une base de E_1, B_2 est une base de E_2. Montrer que*

1) $E = E_1 + E_2 \iff E = Vect(B_1 \cup B_2)$.

2) $E_1 \cap E_2 = \{0_E\} \iff B_1 \cup B_2$ libre.

3) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $E = E_1 \oplus E_2$.

*4) **Application :** Appliquer les résultats obtenus au cas $E = \mathbb{R}^3$,*

$$E_1 = \left\{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x + y - z = 0\right\},$$

$$E_2 = \left\{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x - y + z = 0\right\},$$

$$E_3 = \left\{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x + y - z = 0 \quad \wedge \quad 2x = y\right\}.$$

Pour quels couples $(i, j) \in \{1, 2, 3\}^2$, a-t-on $E = E_i \oplus E_j$?

***Attention :** Si un élément u appartient à B_1 et B_2 en même temps alors, il figurera dans la réunion $B_1 \cup B_2$ deux fois.*

<u>Solution :</u>

1) Supposons que $E = E_1 + E_2$. Alors,

$$u \in E \Longrightarrow \begin{cases} u = u_1 + u_2 \\ u_1 \in E_1 = Vect(B_1) \subset Vect(B_1 \cup B_2) \\ u_2 \in E_2 = Vect(B_2) \subset Vect(B_1 \cup B_2) \end{cases} \Longrightarrow u \in Vect(B_1 \cup B_2).$$

Par conséquent, $E = E_1 + E_2 \subset Vect(B_1 \cup B_2)$. Comme $B_1 \cup B_2$ est une partie de $E = E_1 + E_2$ alors, on a l'inclusion inverse $Vect(B_1 \cup B_2) \subset E = E_1 + E_2$ car, $Vect(B_1 \cup B_2)$ est le plus petit sous-espace contenant $B_1 \cup B_2$. Ainsi,

$$E = E_1 + E_2 \Longrightarrow E = Vect(B_1 \cup B_2).$$

Inversement, supposons que $E = Vect(B_1 \cup B_2)$. Tout élément u de $Vect(B_1 \cup B_2)$ est une combinaison linéaire d'éléments de $B_1 \cup B_2$. Comme la somme vectorielle est commutative et associative, u peut s'écrire sous la forme : $u = u_1 + u_2$ où, u_i , $i = 1, 2$ est un élément de $Vect(B_i)$. Cela signifie que :

$$Vect(B_1 \cup B_2) \subset Vect(B_1) + Vect(B_2) = E_1 + E_2.$$

Par conséquent,

$$E = Vect(B_1 \cup B_2) \Longrightarrow E \subset E_1 + E_2.$$

Comme on a trivialement $E_1 + E_2 \subset E$ alors,

$$E = Vect(B_1 \cup B_2) \Longrightarrow E = E_1 + E_2.$$

2) Supposons que $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$. D'après la formule de Grassmann (voir théorème 5.3.19),

$$\dim(E_1 + E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2) = Card(B_1) + Card(B_2). \tag{5.6.1}$$

Par ailleurs, d'après la preuve de la question (1), $B_1 \cup B_2$ engendre $E_1 + E_2$. Donc, si $B_1 \cup B_2$ est liée, on peut affirmer d'après le théorème d'extraction 5.3.7 que $B_1 \cup B_2$ contient strictement une base B de $E_1 + E_2$. Mais dans ce cas, on aura

$$\dim(E_1 + E_2) \prec Card(B_1 \cup B_2) \leq Card(E_1) + Card(E_2).$$

Or, cette dernière formuule est en contradiction avec 5.6.1. Par conséquent,

$$E_1 \cap E_2 = \{0_E\} \Longrightarrow (B_1 \cup B_2) \ libre.$$

Inversement, supposons que $(B_1 \cup B_2)$ est libre et que $E_1 \cap E_2 \neq \{0_E\}$. Il existe donc un vecteur $u \neq 0_E$ appartenant à l'intersection $E_1 \cap E_2$. Donc, si on pose

$$B_1 = \{u_1, \cdots, u_p\} \quad , \quad B_2 = \{v_1, \cdots, v_q\},$$

on peut affirmer qu'il existe des scalaires $\alpha_1, \cdots, \alpha_p$ non tous nuls et des scalaires $\beta_1, \cdots, \beta_p$ aussi non tous nuls et vérifiant :

$$u = \alpha_1.u_1 + \cdots + \alpha_p.u_p = \beta_1.v_1 + \cdots + \beta_p.v_p.$$

Mais dans ce cas,

$$\alpha_1.u_1 + \cdots + \alpha_p.u_p - \beta_1.v_1 - \cdots \beta_p.v_p = 0_E$$

avec des coefficients qui ne sont pas tous nuls. Or, ceci contredit l'hypothèse $B_1 \cup B_2$ libre. Par conséquent,

$$(B_1 \cup B_2)\ libre \Longrightarrow E_1 \cap E_2 = \{0_E\}.$$

3) On a :

$$\begin{aligned} E = E_1 \oplus E_2 \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} E = E_1 \oplus E_2 \\ E_1 \cap E_2 = \{0_E\} \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} E = Vect(B_1 \cup B_2) \\ (B_1 \cup B_2)\ libre \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \quad (B_1 \cup B_2)\ base\ de\ E. \end{aligned}$$

4) **Application :** On vérifie facilement que

$$\begin{aligned} E_1 &= \left\{u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x + y - z = 0\right\} = \left\{u = (x,y,x+y) \in \mathbb{R}^3 :\ x,\ y \in \mathbb{R}\right\} \\ &= Vect(\underbrace{u_1 = (1,0,1)\ ;\ u_2 = (0,1,1)}_{B_1}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_2 &= \left\{u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x - y + z = 0\right\} = \left\{u = (x,x+z,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x,\ z \in \mathbb{R}\right\} \\ &= Vect(\underbrace{v_1 = (1,1,0)\ ;\ v_2 = (0,1,1)}_{B_2}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_3 &= \left\{u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x + y - z = 0 \quad \wedge \quad 2x = y\right\} = \left\{u = (x,2x,3x) \in \mathbb{R}^3 :\ x \in \mathbb{R}\right\} \\ &= Vect(\underbrace{w_1 = (1,2,3)}_{B_3}). \end{aligned}$$

D'autre part,

$$0.u_1 + 1.u_2 - 1.v_1 + 0.v_2 = (0,0,0).$$

Cela signifie que la famille $B_1 \cup B_2$ n'est pas libre et donc, on ne peut pas avoir de somme directe $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_2$. Par contre, on a la somme simple $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_2$. En effet, pour tout $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, l'équation

$$u = a.u_1 + b.u_2 + c.v_1 + d.v_2$$

est équivalente au système

$$(S) : \begin{cases} a + c = x \\ b + c + d = y \\ a + b + d = z \end{cases}$$

La matrice associée est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On remarque que la matrice carrée formée par les trois premières colonnes est de déterminant non nul. Cela signifie que le système (S) est surjectif et donc admet une infinité de solutions. En d'autres termes, $\mathbb{R}^3 = Vect(B_1 \cup B_2)$ ce qui d'après la question (1) équivaut à $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_2$.
D'autre part,

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 0.$$

La famille $B_1 \cup B_3$ n'est donc pas libre et on n'a pas la somme directe $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_3$. Par contre, on a la somme simple $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_3$. En effet, pour tout $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, l'équation

$$u = a.u_1 + b.u_2 + c.w_1$$

est équivalente au système

$$(S') : \begin{cases} a + c = x \\ b + 2c = y \end{cases}$$

La matrice associée est :

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On remarque que la matrice carrée formée par les deux premières colonnes est de déterminant non nul. Comme dans le cas précédent, cela signifie que $\mathbb{R}^3 = Vect(B_1 \cup B_2)$ et donc, $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_3$.
Finalement, on a

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 2 \neq 0.$$

Cela signifie que la famille $B_2 \cup B_3$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donc, on a la somme directe $\mathbb{R}^3 = E_2 \oplus E_3$. □

Exercice 5.6.3. *Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces d'un espace vectoriel de dimension finie E. On dit que E_1 et E_2 sont supplémentaires dans E si, $E = E_1 \oplus E_2$.*

1) *Montrez en utilisant la méthode de la base incomplète (voir théorème 5.3.15) que tout sous-espace propre d'un espace vectoriel de dimension finie, admet un supplémentaire.*
2) *Montrez par un exemple dans $\mathbb{R}^2$ que le supplémentaire n'est pas forcément unique.*

Solution : 1) Soit F un sous-espace propre de E, (c'est à dire strictement inclus dans E et non réduit à 0_E) et posons $n = \dim(E)$, $p = \dim(F)$. Désignons par $B_F = \{u_1, \cdots, u_p\}$ une base quelconque de F. On a clairement $F = Vect(B_F)$. D'après le théorème de la base incomplète, il existe dans E un nombre fini de $n - p$ vecteurs $u_{p+1}, \cdots, u_n$ tels que la famille

$B = \{u_1, \cdots, u_p,\ u_{p+1}, \cdots, u_n\}$ est unne base de E. Posons

$$B_G = \{u_{p+1}, \cdots, u_n\} \quad \wedge \quad G = Vect(B_G).$$

Il est clair que B_G est une base de G. Puisque $B = B_F \cup B_G$ alors, d'après le point (3) de l'exercice 5.6.2, on a : $E = F \oplus G$ et donc, G est un supplémentaire de F dans E.
2) Dans $\mathbb{R}^2$, tout sous-espace propre F est de dimension 1. On a donc forcément $F = Vect(u_1 = (a, b),\ \ a^2+b^2 \neq 0$. Comme $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$ alors, tout sous-espace supplémentaire G de F est aussi de dimension 1 (voir corollaire 5.3.20). G est donc de la forme : $G = Vect(u_2 = (c, d),\ \ c^2+d^2 \neq 0$. D'après toujours le point (3) de l'exercice 5.6.2,

$$\mathbb{R}^2 = F \oplus G \Longleftrightarrow \{u_1, u_2\} \quad \text{base de } \mathbb{R}^2.$$

Cela équivaut à dire que

$$\det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = ad - bc \neq 0.$$

On voit bien que pour $a,\ b$ donnés, il existe une infinité de valeurs de $c,\ d$ vérifiant la condition du déterminant non nul. En d'autres termes, tout sous-espace propre de $\mathbb{R}^2$ admet une infinité de sous-espaces supplémentaires. □

Exercice 5.6.4. *On considère dans $\mathbb{R}^4$ le sous-espace*

$$F = \left\{u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - 3y + 2z - t = 0\right\}.$$

1) Donner une base B_F de F.
2) Montrer que la famille

$$B'_F = \{v_1 = (1, 0, 0, 1);\ v_2 = (1, 1, 0, -2);\ v_3 = (1, 1, 1, 0)\}$$

est une base de F.
3) Donner les composantes du vecteur $w = (2, -2, -3, 2)$ dans chacune des bases B_F et B'_F.
4) Trouver la matrice de passage de la base B_F vers la base B'_F.
5) Utiliser la matrice de passage pour retrouver les résultats de la question (4).
6) Compléter chacune des bases B_F et B'_F en une base de $\mathbb{R}^4$.
7) Donner deux supplémentaires de F dans $\mathbb{R}^4$.

solution :
1) On a :

$$\begin{aligned} u \in F \quad &\Longleftrightarrow \quad u = (x, y, z, x - 3y + 2z) = (x, 0, 0, x) + (0, y, 0, -3y) + (0, 0, z, 2z) \\ &\Longleftrightarrow \quad u = x.\underbrace{(1, 0, 0, 1)}_{u_1} + y.\underbrace{(0, 1, 0, -3)}_{u_2} + z.\underbrace{(0, 0, 1, 2)}_{u_3}. \end{aligned}$$

Ceci montre que

$$F = Vect(B_F)\ ,\quad \text{où}\quad B_F = \{u_1, u_2, u_3\}\,.$$

Comme B_F est libre (très facilement vérifiable) alors, B_F est une base de F et $\dim(F) = 3$.
2) Remarquons tout d'abord que $B'_F \subset F$. De plus, d'après la question (1), $\dim(F) = 3 = Card(B'_F)$. Donc pour prouver que c'est aussi une base de F, il suffit de montrer qu'elle est libre ou qu'elle engendre F. Pour les besoins de la suite et afin d'éviter la répétition des calculs, nous allons montrer que B'_F engendre F. Pour tous x, y, z dans $\mathbb{R}$, on a :

$$F \ni v = (x, y, z, x - 3y + 2z) = \alpha.v_1 + \beta.v_2 + \gamma.v_3$$

équivaut le système

$$(S') : \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = x \\ \beta + \gamma = y \\ \gamma = z \\ \alpha - 2.\beta = x - 3y + 2z \end{cases}$$

qui admet une solution unique $(\alpha,\ \beta,\ \gamma) = (x - y,\ y - z,\ z)$. On peut donc conclure que B'_F engendre F.
3) En posant dans le système (S') précédent : $x = 2,\ y = -2,\ z = -3,\ t = 2$, on obtient que

$$F \ni v = (2, -2, -3, 2) = 4.v_1 + 1.v_2 - 3.v_3 = (4,\ 1,\ -3)_{B'_F}.$$

De la même manière, pour trouver les composantes de v dans la base B_F, il faut trouver les scalaires $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ vérifiant la relation :

$$F \ni v = (2, -2, -3, 2) = \alpha.u_1 + \beta.u_2 + \gamma.u_3.$$

Sous forme de système, cela devient

$$(S) : \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = -2 \\ \gamma = -3 \\ \alpha - 3.\beta + 2.\gamma = 2 \end{cases}$$

Le système (S) admet une solution unique $(\alpha,\ \beta,\ \gamma) = (2,\ -2,\ -3)$. Part conséquent,

$$F \ni v = (2, -2, -3, 2) = 2.u_1 - 2.u_2 - 3.u_3 = (2,\ -2,\ -3)_{B_F}.$$

4) On remarque que

$$v_1 = (1, 0, 0)_{B_F};\ v_2 = (1, 1, 0)_{B_F};\ v_3 = (1, 1, 1)_{B_F}.$$

Par conséquent, la matrice $P_{(B'_F,\ B_F)}$ de passage de la base B'_F à la base B_F est donnée par la formule :

$$P_{(B'_F,\ B-F)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5) En appliquant le théorème 5.4.4 pour la recherche des compsantes par la matrice de passage,

$$P_{(B'_F,\ B_F)} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on retrouve comme annoncé par la théorie les composantes du vecteur $v = (2,\ -2,\ -3,\ 2)$ dans la base B_F.

6) Pour compléter B_F en une base de l'espace entier $\mathbb{R}^4$ dont la dimension est 4, il suffit de trouver un vecteur $u_4 = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $B = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ est une partie libre de $\mathbb{R}^4$. Ceci est équivalent à :

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 1 & -3 & 2 & d \end{pmatrix} = a + 3b - 2c + d \neq 0.$$

On peut par exemple prendre $u_4 = (1, 1, 1, 1)$ ou $u_4 = (1, 1, 0, 0)$ et ainsi de suite.

De la même manière, pour compléter B'_F en une base de l'espace entier $\mathbb{R}^4$ dont la dimension est 4, il suffit de trouver un vecteur $v_4 = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ est une partie libre de $\mathbb{R}^4$. Ceci est équivalent à :

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 1 & -2 & 0 & d \end{pmatrix} = a + b - 2c + d \neq 0.$$

7) On a vu qu'en rajoutant à B_F le vecteur $u = (1, 1, 1, 1)$, on obtient une base de $\mathbb{R}^4$. Cela signifie que le sous-espace $G_1 := Vect\left((1, 1, 1, 1)\right)$ est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$. Pour les mêmes raisons, $G_2 := Vect\left((1, 1, 0, 0)\right)$ est un autre supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$. □

Exercice 5.6.5. *On considère dans* $\mathbb{R}^4$ *le sous-espace*

$$F = \left\{u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 3x - y + z - 2t = 0\right\}.$$

1) Donner une base de F.

2) Compléter la partie $B_0 = \{u_0 = (1, 1, 2, 2)\}$ *en une base de* F.

Solution :

1) En exprimant y en fonction de x, z et t, on voit facilement que

$$u \in F \Longleftrightarrow u = (x, 3x + z - 2t, z, t) = x.\underbrace{(1, 3, 0, 0)}_{u_1} + z.\underbrace{(0, 1, 1, 0)}_{u_2} + t.\underbrace{(0, -2, 0, 1)}_{u_3}.$$

Ceci prouve que $B_F = \{u_1, u_2, u_3\}$ engendre le sous-espace F. Comme c'est une partie libre (facile à vérifier), elle constitue une base de F qui est donc de dimmension 3.

2) Notons tout d'abord que $u_0 \in F$. Comme $\dim(F) = 3$ alors, pour compléter B_0 en une base de F, il faut trouver deux vecteurs u_1 et u_2 vérifiant chacun la condition d'appartenance à F, c'est à dire :

$$u_1 = (a_1, 3a_1 + b_1 - 2c_1, b_1, c_1) \ ; \ u_2 = (a_2, 3a_2 + b_2 - 2c_2, b_2, c_2).$$

Pour déterminer u_1, on utilise le fait que le fait que u_0 et u_1 doivent être linéairement indépendants. Cela signifie que $\alpha = \beta = 0$ est l'unique solution du système :

$$(S_1) : \begin{cases} \alpha + \beta.a_1 = 0 \\ \alpha + \beta.(3a_1 + b_1 - 2c_1) = 0 \\ 2.\alpha + \beta.b_1 = 0 \\ 2.\alpha + \beta.c_1 = 0 \end{cases} .$$

En soustrayant la quatrième équation de la troisième, en obtient l'équation $\beta.(b_1 - c_1) = 0$. Il est clair que pour avoir $\alpha = \beta = 0$ comme unique solution, il suffit que l'on ait $b_1 \neq c_1$. On peut donc prendre par exemple $u_1 = (1, 1, 0, 1)$.
Pour déterminer u_2, on utilise le fait que les vecteurs u_0, u_1 et u_2 sont linéairement indépendants. Cela signifie que $\alpha = \beta = \gamma = 0$ est l'unique solution du système :

$$(S_2) : \begin{cases} \alpha + \beta.a_1 = 0 \\ \alpha + \beta.(3a_1 + b_1 - 2c_1) = 0 \\ 2.\alpha + \beta.b_1 = 0 \\ 2.\alpha + \beta.c_1 = 0 \end{cases} .$$

En soustreyant la première équation de la deuxième, on obtient l'équation $\gamma.(2a_2 + b_2 - 2c_2) = 0$. Il est clair que pour avoir $\gamma = 0$ comme unique solution, il suffit que $2a_2 + b_2 - 2c_2 \neq 0$. On peut donc prendre par exemple $u_2 = (1, 2, 1, 1)$. Ainsi, la famille

$$B'_F = \{u_0 = (1, 1, 2, 2); \ u_1 = (1, 1, 0, 1); \ u_2 = (1, 2, 1, 1)\}$$

est une base de F. □

Chapitre 6

Applications linéaires

6.1 Définition, exemples et premières propriétés

Définition 6.1.1. *Soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps commutatif $\mathbb{K}$. Une application $f : E \longrightarrow F$ est dite linéaire si, elle satisfait aux deux conditions suivantes :*

(lin1) Condition de linéarité

$$\forall (u_1,\ u_2) \in E^2 : \ f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2).$$

(lin2) Condition d'homogeneité

$$\forall (\alpha,\ u) \in \mathbb{K} \times E : \ f(\alpha.u) = \alpha.f(u).$$

1) De la définition, découle immédiatement que

$$f(0_E) = 0_F \ , \ f(-u) = -f(u).$$

En effet, pour la première égalité, il suffit de prendre $\alpha = 0_{\mathbb{K}}$ et pour la seconde $\alpha = -1_{\mathbb{K}}$.
2) Il faut noter que dans la condition (lin1), le symbole $+$ à gauche désigne la somme vectorielle dans E alors qu'à droite, il signifie la somme vectorielle dans F. De même, dans la condition (lin2), le symbole . à gauche désigne la multiplication par un scalaire dans E alors qu'à droite, il désigne la multiplication par un scalaire dans F.
3) Un simple raisonnement par récurrence, montre que si une $f : E \longrightarrow F$ est linéaire alors, pour tout $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ et tout $(u_1, \cdots, u_n) \in E^n$

$$f\left(\alpha_1.u_1 + \cdots + \alpha_1.u_1\right) = \alpha_1.f(u_1) + \cdots + \alpha_n.f(u_n).$$

Exemples 6.1.2. *Voici une première liste d'exemples triviaux d'applications linéaires*
a) L'identité dans E :

$$I_E : E \longrightarrow E; \quad u \longmapsto I_E(u) = u.$$

b) L'application nulle dans E :

$$\mathcal{O}_E : E \longrightarrow E; \quad u \longmapsto \mathcal{O}_E(u) = 0_E.$$

c) L'application nulle de E dans F :

$$\mathcal{O}_{(E,F)} : E \longrightarrow F; \quad u \longmapsto \mathcal{O}_{(E,F)}(u) = 0_F.$$

d) L'homothétie vectorielle de rapport $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$H_\lambda : E \longrightarrow E; \quad u \longmapsto H_\lambda(u) = \lambda.u$$

Si $E = \mathbb{K}$ alors, l'homthétie vectorielle coïncide avec la multiplication usuelle dans $\mathbb{K}$.
E) Fonctions linéaires entre espaces numériques :

$$f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m; \quad f(x_1, \ \cdots \ , \ x_n) = (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n, \ \cdots \ , \ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n).$$

Nous verrons plus loin que ce sont les seules applications linéaires possibles entre $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^m$.

Proposition 6.1.3. *Si E est de dimension finie alors, toute application linéaire $f : E \longrightarrow F$ est parfaitement définie par la donnée des images par f des éléments d'une partie génératrice de E.*

Preuve. Soit $B = \{u_1, \cdots, u_n\}$ une partie génératrice de E. Cela signifie que

$$\forall u \in E, \ \exists (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n : \ u = \alpha_1.u_1 + \cdots + \alpha_n.u_n.$$

Par conséquent,

$$f(u) = f(\alpha_1.u_1 + \cdots + \alpha_n.u_n) = \alpha_1.f(u_1) + \cdots + \alpha_n.f(u_n).$$

Puisque par hypothèse, les images $f(u_1), \cdots, f(u_n)$ sont bien connues alors, $f(u)$ est aussi connue et bien définie dans F. □

Exemple 6.1.4. *Déterminer l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ vérifiant les conditions :*

$$f(1,0,0) = (1,1); \ f(0,1,0) = (1,0); \ f(0,0,1) = (0,1).$$

On sait déjà que la famille

$$B = \{e_1 = (1,0,0); \ e_2 = (0,1,0); \ e_3 = (0,0,1)\}$$

est une base de $\mathbb{R}^3$ (appelée base canonique de $\mathbb{R}^3$). C'est donc une partie génératrice de $\mathbb{R}^3$. De plus,

$$u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Longrightarrow u = x.e_1 + y.e_2 + z.e_3.$$

En appliquant donc la proposition précédente, on obtient :

$$f(u) = x.f(e_1) + y.f(e_2) + z.f(e_3)) = (x+y, x+z).$$

Le résultat suivant est une conséquence immédiate de la proposition précédente

Proposition 6.1.5. *Deux applications $f, g : E \longrightarrow F$ sont égales si et seulement si, elles coïncident pour au moins une partie génératrice de E.*

6.2 Opérations sur les applications linéaires

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. On désignera par $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F. Si $E = F$, on écrira $\mathcal{L}(E)$ au lieu de $\mathcal{L}(E, E)$. Nous allons dans cette section voir (entre-autres) que $\mathcal{L}(E, F)$ peut être muni d'une structure de $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Pour cela, nous commençons par donner la caratérisation suivante des applications linéaires.

Proposition 6.2.1. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Une application $f : E \longrightarrow F$ est un élément de $\mathcal{L}(E, F)$ si et seulement si,*

$$f\left(\alpha.u + \beta.v\right) = \alpha.f(u) + \beta.f(v)\ ,\ \forall (u, v) \in E^2\ ,\ \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2. \tag{6.2.1}$$

Preuve. laissée au lecteur à titre d'exercice. □

Définissons dans $\mathcal{L}(E, F)$ l'addition vectorielle et la multiplication par un scalaire comme suit :

$$\forall (f, g) \in \left(\mathcal{L}(E, F)\right)^2,\ \forall u \in E,\ \forall \alpha \in \mathbb{K} : \quad \left\{ \begin{array}{l} (f+g)(u) = f(u) + g(u) \\ \\ f(\alpha.u) = \alpha.f(u) \end{array} \right. .$$

Proposition 6.2.2. *Muni de ces deux opérations, $\mathcal{L}(E, F)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.*

Preuve. La preuve de ce résultat est une adaptation simple et directe au cas présent de la preuve donnée pour l'exemple 4.1.5. C'est un très bon exercice d'entrainement et de consolidation des concepts relatifs aux espaces vectoriels. □

Proposition 6.2.3. *Si, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est inversible alors, $f^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$.*

Preuve. Il s'agit de montrer que si $f : E \longrightarrow F$ est linéaire et bijective alors, $f^{-1} : F \longrightarrow E$ est aussi linéaire. Soient donc $v_1 = f(u_1), v_2 = f(u_2)$ deux éléments de F et α, β deux scalires. Alors,

$$\begin{aligned} f^{-1}\left(\alpha.v_1 + \beta.v_2\right) &= f^{-1}\left(\alpha.f(u_1) + \beta.f(u_2)\right) = f^{-1}\left(f\left[\alpha.u_1 + \beta.u_2\right]\right) \\ &= \left(f^{-1} \circ f\right)\left[\alpha.u_1 + \beta.u_2\right] = \alpha.u_1 + \beta.u_2 \\ &= \alpha.f^{-1}(v_1) + \beta.f^{-1}(v_2). \end{aligned}$$

□

Définition 6.2.4. *Un élément bijectif de $\mathcal{L}(E,F)$ est appelé isomorphisme linéaire de E dans F. Si de plus, $E = F$, on parle d'automorphisme linéaire dans E. L'ensemble des isomorphismes linéaires de E dans F est noté $Iso(E,F)$ et $Iso(E,E)$ est noté $Aut(E)$.*

Proposition 6.2.5. *Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Alors,*

$$[f \in \mathcal{L}(E,F) \quad \wedge \quad g \in \mathcal{L}(F,G)] \Longrightarrow g \circ f \in \mathcal{L}(E,G).$$

Preuve. Laissée au lecteur à titre d'exercice. □

6.3 Noyau et image d'une application linéaire

Définition 6.3.1. *Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On appelle noyau de f le sous-ensemble (noté $\ker(f)$ de l'anglais kernel qui signifie noyau) de E, défini par :*

$$\ker(f) = \{u \in E : f(u) = 0_F\}.$$

Exemple 6.3.2. *Si f est l'application linéaire définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ par : $f((x,y,z)) = (x+y-z, x+y+z)$ alors,*

$$v = (x,y,z) \in \ker(f) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x+y-z = 0 \\ x+y+z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x+y = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

D'où,

$$\ker(f) = \{v = (x,-x,0) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Proposition 6.3.3. *Pour tout $f \in \mathcal{L}(E,F)$, l'ensemble $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Preuve. Il faut montrer que

$$\left[(u,v) \in (\ker(f))^2 \quad \wedge \quad (\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2\right] \Longrightarrow f(\alpha.u + \beta.v) = 0_F.$$

On a :

$$\begin{aligned} f(\alpha.u + \beta.v) &= f(\alpha.u) + f(\beta.v) = \alpha.f(u) + \beta.f(v) \\ &= \alpha.0_F + \beta.0_F = 0_F + 0_F = 0_F. \end{aligned}$$

□

Nous allons maintenant donner différentes caractérisations d'une application linéaire injective

Proposition 6.3.4. *Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes.*
1) f est injective.
2) $\ker(f) = \{0_E\}$.
3) L'image par f de toute partie libre de E est une partie libre de F.

Preuve. 1) $\Longrightarrow$ 2) : Supposons que f est injective et soit $u \in \ker(f)$. Dans ce cas,

$$f(u) = 0_F = f(0_E) \underbrace{\Longrightarrow}_{f injective} u = 0_E \Longrightarrow \ker(f) = \{0_E\}.$$

2) $\Longrightarrow$ 3) : Supposons que $\ker(f) = \{0_E\}$ et soit $B = \{u_1, \cdots, u_p\}$ une partie libre de E. Il faut montrer que $f(B) = \{f(u_1), \cdots, f(u_p)\}$ est une partie libre de F. On a :

$$\begin{aligned} \alpha_1.f(u_1) + \cdots + \alpha_p.f(u_p) = 0_F \quad & \Longrightarrow \quad f(\alpha_1.u_1 + \cdots \alpha_p.u_p) = 0_F \\ & \underbrace{\Longrightarrow}_{par\ hypoth.} \quad \alpha_1.u_1 + \cdots \alpha_p.u_p = 0_E \\ & \underbrace{\Longrightarrow}_{B\ libre} \quad \alpha_1 = \cdots = \alpha_p = 0_{\mathbb{K}}. \end{aligned}$$

La famille $f(B)$ est donc une partie libre de F.
3) $\Longrightarrow$ 2)) : Soient u_1, u_2 deux vecteurs de E vérifiant $f(u_1) = f(u_2)$. Dans ce cas, la famille $\{f(u_1 - u_2) = 0_F\}$ n'est pas libre dans F. Si on suppose que $u_1 \neq u_2$, on obtient que la famille $\{u_1 - u_2\}$ est libre dans E et donc par hypothèse, $\{f(u_1 - u_2) = 0_F\}$ est libre dans F. On a ainsi une contradiction. □

Nous allons maintenant donner un critère nécessaire numérique (il s'exprime en termes de dimensions) d'injectivité d'une application linéaire.

Proposition 6.3.5. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies. Alors,*

$$f \in \mathcal{L}(E, F) \ \ \textit{injective} \Longrightarrow \dim(E) \leq \dim(F).$$

Preuve. Soit $B = \{u_1, \cdots, u_n\}$, $(n = \dim(E))$ une base de E. D'après le point (3) de la proposition 6.3.4, $f(B)$ est une partie libre de F. D'après le théorème de la base incomplète 5.3.15, on a $Card(f(B)) \leq \dim(F)$. D'autre part, $Card(f(B) = n = \dim(E))$ car, f est injective. Par conséquent, $\dim(E) \leq \dim(F)$. □

Définition 6.3.6. *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle image de f le sous-ensemble (noté $Im(f)$) de F, défini par*

$$Im(f) := f(E) = \{v = f(u) : \ u \in E\}.$$

Par définition de l'image, f est surjective si et seulement si, $Im(f) = F$.

Proposition 6.3.7. *Pour tout $f \in \mathcal{L}(E, F)$, l'ensemble $Im(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.*

Preuve.

$$\left[(v_1, v_2) \in (Im(f))^2 \quad \wedge \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2\right] \Longrightarrow (\alpha \bullet v_1) \oplus (\beta \bullet v_2) = Im(f).$$

On a :

$$\begin{aligned}
(v_1, v_2) \in (Im(f))^2 &\Longrightarrow \exists (u_1, u_2) \in E^2 : \; (v_1, v_2) = (f(u_1), f(u_2)) \\
&\Longrightarrow \alpha.v_1 + \beta.v_2 = \alpha.f(u_1) + \beta.f(u_2) \\
&\Longrightarrow \alpha.v_1 + \beta.v_2 = f(\underbrace{\alpha.u_1 + \beta.u_2}_{u \in E}) \in Im(f).
\end{aligned}$$

□

Proposition 6.3.8. *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors, les deux assertions suivantes sont équivalentes.*
1) f surjective.
2) L'image par f de toute partie génératrice de E est une partie génératrice de F.

Preuve. Soient $B = \{u_1, \cdots, u_q\}$ une partie génératrice de E et v un élément quelconque de F. Alors,

$$\begin{aligned}
[f \text{ surjective } \;\wedge\; Vect(B) = E] &\Longleftrightarrow \forall v \in F, \; \exists u \in E : v = f(u) \\
&\Longleftrightarrow \forall v \in F, \; \exists (\alpha_1, \cdots, \alpha_q) \in \mathbb{K}^q : v = f\left(\underbrace{\alpha_1.u_1 + \cdots + \alpha_q.u_q}_{u}\right) \\
&\Longleftrightarrow \forall v \in F, \; \exists (\alpha_1, \cdots, \alpha_q) \in \mathbb{K}^q : \; v = \alpha_1.f(u_1) + \cdots + \alpha_q.f(u_q) \\
&\Longleftrightarrow Vect(f(B)) = F \\
&\Longleftrightarrow f(B) \text{ partie génératrice de} F.
\end{aligned}$$

□

Il découle de la preuve précédente le résultat suivant.

Corollaire 6.3.9. *$f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors, pour toute partie B génératrice de E, la famille $f(B)$ est une partie génératrice du sous-espace $Im(f)$.*

Exemple 6.3.10. *Soit l'apllication linéaire*

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : \; u = (x, y, z) \longmapsto f(u) = (x + y, y - z).$$

D'après le corollaire précédent, la famille

$$v_1 = f(1, 0, 0) = (1, 0); \; v_2 = f(0, 1, 0) = (1, 1); \; v_3 = f(0, 0, 1) = (0, -1)$$

est une parrtie génératrice de de $Im(f)$, c'est à dire que $Vect(v_1, v_2, v_3) = Im(f)$. Ce résultat peut être amélioré en remarquant que $v_2 = v_1 - v_3$ et on aura $Im(f) = Vect(v_1, v_3)$.

Comme dans le cas d'une application linéaire injective (voir proposition 6.3.5), nous allons maintenant donner un critère numérique nécéssaire de surjectivité.

Proposition 6.3.11. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies et soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors*

$$f \textit{ surjective} \Longrightarrow \dim(E) \geq \dim(F).$$

Preuve. Soit $B = \{u_1, \cdots, u_n\}$, $(n = \dim(E))$ une base de E. Comme déjà vu, la famille $f(B) = \{f(u_1), \cdots, f(u_n)\}$ est une partie génératrice de $Im(f) = F$. D'après le théorème d'extraction 5.3.7, la famille de $f(B)$ contient une base de F. D'où,

$$\dim(F) \leq Card(f(B)) = n = \dim(E).$$

□

Le théorème que nous allons maintenant énoncer et établir est fondamental dans l'étude des applications linéaires en dimension finie.

Theorem 6.3.12. *(des trois dimensions).*
Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies et soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors,

$$\dim(E) = \dim(ker(f)) + \dim(Im(f)).$$

Preuve. Considérons l'espace quotient $E/\ker(f)$. On sait (voir chapitre précédent) que c'est un espace vectoriel de de dimension $\dim(E) - \dim(\ker(f))$. Ses éléments sont des classes d'équivalence de la forme :

$$\widehat{x} := x + \ker(f) = \{x + u : \ u \in \ker(f)\} \ , \ x \in E.$$

Soit Π la surjection canonique de E dans $E/\ker(f)$. Elle est définie par :

$$\Pi : x \in E \longmapsto \widehat{x} \in E/\ker(f).$$

Comme son nom l'indique, c'est une application trivialement surjective. Elle est de plus linéaire. En effet, comme déjà vu au chapitre précédent, pour tout $(u, v) \in E^2$ et tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$:

$$\Pi\,(\alpha.u + \beta.v) = \alpha.\widehat{u + \beta}.v = \alpha.\widehat{u} + \beta.\widehat{v} = \alpha.\Pi(u) + \beta.\Pi(v).$$

Soit maintenant l'application

$$\widehat{f} : E/\ker(f) \longrightarrow F \ ; \ \widehat{u} \longmapsto \widehat{f}(\widehat{u}) = f(u).$$

Montrons tout d'abord que $\widehat{f}$ est indépendante du choix du représentant. C'est à dire qu'on peut remplacer $f(u)$ par $f(a)$ où, a est n'importe quel autre représentant de la classe $\widehat{u}$. En effet, soit a un autre représentant de la classe $\widehat{u}$. Dans ce cas, $a = u + v$, $v \in \ker(f)$. par conséquent,

$$f(a) = f(u + v) = f(u) + f(v) = f(u) + 0_F = f(u) = \widehat{f}(\widehat{u}).$$

La linéarité de f entraine de manière naturelle la linéarité de $\widehat{f}$. Enfin, $\widehat{f}$ est injective. En effet,

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\widehat{u}) = 0_F \quad &\Longrightarrow \quad f(u) = 0_F \\ &\Longrightarrow \quad u \in \ker(f) \\ &\Longrightarrow \quad \widehat{u} = \ker(f) := 0_{E/F}.\end{aligned}$$

On vérifie facilement que

$$f = \widehat{f} \circ \Pi \quad \wedge \quad Im(f) = Im(\widehat{f}).$$

En utilisant maintenant la proposition 6.3.4 et le corollaire de la proposition 6.3.8, on obtient

$$\dim(Im(f)) = \dim(Im(\widehat{f})) = \dim(E/\ker(f)) = \dim(E) - \dim(\ker(f)).$$

Ceci, est exactement le résultat recherché. □

Comme conséquence immédiate du théorème des trois dimensions, on a le résultat pratique suivant.

Theorem 6.3.13. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de même dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors, on a les équivalences :*

$$f \text{ bijective} \Longleftrightarrow f \text{ injective} \Longleftrightarrow f \text{ surjective.}$$

Preuve. Il suffit démontrer l'équivalence

$$f \text{ injective} \Longleftrightarrow f \text{ surjective.}$$

En utilisnat le théorème des trois dimensions et l'hypothèse $\dim(E) = \dim(F)$, on obtient

$$\begin{aligned}f \text{ injective} \quad &\Longleftrightarrow \quad \ker f = \{0_E\} \\ &\Longleftrightarrow \quad \dim(\ker(f)) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \dim(E) = \dim(Im(f)) \\ &\Longleftrightarrow \quad \dim(Im(f)) = \dim(F) \\ &\Longleftrightarrow \quad Im(f) = F \\ &\Longleftrightarrow \quad f \text{ surjective.}\end{aligned}$$

□

Exemple 6.3.14. *Montrer que l'application linéaire f défini de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ par :*

$$f(u = (x, y, z)) = (x + y - z, x - y + z, -x + y + z)$$

est bijective. D'après le corollaire qu'on vient juste de démontrer, il suffit de prouver que f est *injective. On a*

$$\begin{aligned} v=(x,y,z)\in\ker(f) \quad &\Longleftrightarrow \quad (S):\begin{cases} x+y-z=0\\ x-y+z=0\\ -x+t+z=0\end{cases}\\ &\Longleftrightarrow \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}}_{A}\times\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Il est clair que $(x,y,z)=(0,0,0)$ est solution dus ystème (S). Puisque $\det(A)=-2\neq 0$ alors, A est inversible et donc (S) est un système de Cramer. Cela signifie que $(x,y,z)=(0,0,0)$ est l'unique solution de ce système. En d'autres termes, f est injective et donc bijective.

6.4 Matrice associée à une application linéaire

Dans tout ce qui et sauf indication contraire, l'écriture (X,B_X) signifiera que X est un espace vectoriel de dimension finie dans lequel, une base B_X a été choisie.

6.4.1 Définition et propriétés fondamentales

Soit $f:(E,B_E)\longrightarrow(F,B_F)$ une application linéaire. On suppose que

$$B_E=\{u_1,\cdots,u_n\} \quad \wedge \quad B_F=\{v_1,\cdots,v_m\}.$$

Définition 6.4.1. *On appelle matrice de f (ou associée à f) dans les bases B_E, B_F la matrice :*

$$M(f,B_E,B_F)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{m\times n}(\mathbb{K}). \tag{6.4.1}$$

où, la colonne j , $1\leq j\leq n$ est constituée des composantes du vecteur $f(u_j)$ dans la base B_F. En d'autres termes,

$$f(u_j)=a_{j1}.v_1+a_{j2}.v_2+\cdots+a_{jm}.v_m=(a_{j1},a_{j2},\cdots,a_{jm})_{B_F}.$$

De la définition découle que :
i) le nombre de lignes de la matrice associée à une application linéaire est égal à la dimension de l'espace d'arrivée F et le nombre de colonnes à la dimension de l'espace de départ E.
ii) Si f est l'application nulle alors, la matrice correspondante est la matrice nulle dans $\mathbb{R}^{m\times n}(\mathbb{K})$ indépendemment du choix des bases au départ et à l'arrivée.
iii) Si $f = Id_E$ alors, $M(f = Id_E,\ B_E,\ B'_E)$ est la matrice de passage de la base B'_E vers la base B_E (voir définition au chapitre 5). En particulier, si $B_E = B'_E$ alors $M(Id_E, B_E) := M(Id_E, B_E, B_E) = I_n$ avec $n = \dim(E)$.

Exemple 6.4.2. *Soit l'application linéaire*

$$f : (\mathbb{R}^2,\ B_{\mathbb{R}^2}) \longrightarrow (\mathbb{R}^3,\ B_{\mathbb{R}^3})\ ;\ f(x,y) = (x, x-y, y).$$

1) Si, $B_{\mathbb{R}^2}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $B_{\mathbb{R}^3}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ alors,

$$\begin{cases} f(1,0) = (1,1,0) = (1,0,0) + (0,1,0) \\ \\ f(0,1) = (0,-1,1) = -(0,1,0) + (0,0,1) \end{cases} \Longrightarrow M(f, B_{\mathbb{R}^2}, B_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Si, $B_{\mathbb{R}^2} = \{u_1 = (1,0);\ u_2 = (1,1)\}$ et $B_{\mathbb{R}^3} = \{1_1 = (1,0,0);\ v_2 = (1,1,0);\ v_3 = (1,1,1)\}$ alors,

$$\begin{cases} f(u_1) = (1,1,0) = v_2 \\ \\ f(u_2) = (1,0,1) = v_1 - v_2 + v_3 \end{cases} \Longrightarrow M(f, B_{\mathbb{R}^2}, B_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cet exemple illustre bien le fait que la matrice associée à une application linéaire dépend du choix des bases au départ et à l'arrivée. Nous verrons plus loin comment s'effetue le passage d'une situation à une autre.
Nous allons maintenant voir comment retrouver l'expression d'une application linéaire à partir de sa matrice associée.

Proposition 6.4.3. *Soit $f : (E, B_E) \longrightarrow (F, B_F)$ une application linéaire et soit $u \in E$. Si, $u = (x_1, \cdots, x_n)_{B_E}$ et $f(u) = (y_1, \cdots, y_m)_{B_F}$ alors,*

$$(y_1, \cdots, y_m) = (x_1, \cdots, x_n) \times [M(f, B_E, B_F)]^T$$

où, $[M(f, B_E, B_F)]^T$ est la transposée de la matrice $M(f, B_E, B_F)$.

Preuve. Posons

$$B_E = \{u_1, \cdots, u_n\} \quad \wedge \quad B_F = \{v_1, \cdots, v_m\}$$

et

$$M(f, B_E, B_F) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Soit aussi $u \in E$ tel que $u = (x_1, \cdots, x_n)_{B_E}$ et $f(u) = (y_1, \cdots, y_m)_{B_F}$. Par définition des composantes d'un vecteur dans une base, on a :

$$u = x_1.u_1 + \cdots + x_n.u_n, \quad f(u) = y_1.v_1 + \cdots + y_m.v_m.$$

En utilisant maintenant la linéarité de f et la définition des colonnes de la matrice associée, on obtient :

$$\begin{aligned}
f(u) &= f(x_1.u_1 + \cdots + x_n.u_n) = x_1.f(u_1) + \cdots + x_n.f(u_n) \\
&= x_1.\{a_{11}.v_1 + \cdots + a_{m1}.v_m\} + \cdots + x_n.\{a_{1n}.v_1 + \cdots + a_{mn}.v_m\} \\
&= \{a_{11}x_1 + \cdots a_{1n}x_n\}.v_1 + \cdots + \{a_{m1}x_1 + \cdots a_{mn}x_n\}.v_m \\
&= (a_{11}x_1 + \cdots a_{1n}x_n, \cdots, a_{m1}x_1 + \cdots a_{mn}x_n)_{B_F}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$f(u) = (y_1, \cdots, y_m)_{B_F} = (a_{11}x_1 + \cdots a_{1n}x_n, \cdots, a_{m1}x_1 + \cdots a_{mn}x_n)_{B_F}.$$

D'après l'unicité des composantes (voir proposition 5.3.11), on a obligatoirement

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\
&= M(f, B_E, B_F) \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = M(f, B_E, B_F) \times \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}.$$

En prenant la transposée dans chacun des deux cotés de cette dernière inégalité, on obtient le résultat recherché. □

Exemple 6.4.4. *On suppose que l'espace $\mathbb{R}^2$ est muni de la base $B_{\mathbb{R}^2} = \{u_1 = (1,0)\ ; u_2 = (1,1)\}$ et que l'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de la base $B_{\mathbb{R}^3} = \{v_1 = (1,0,0)\ ; v_2 = (1,1,0)\ ; v_3 = (1,1,1)\}$. Donner l'expression de l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ vérifiant :*

$$M(f, B_{\mathbb{R}^2}, B_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$u = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \Longrightarrow u = (x-y).u_1 + y.u_2 = (x-y,\ y)_{B_{\mathbb{R}^2}}.$$

Ceci nous donne

$$(x-y,y)\times[M(f,B_{\mathbb{R}^2},B_{\mathbb{R}^3})]^T=(x-y,y)\times\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}=(x-2y,x-y,y).$$

Par conséquent, l'expression de f est

$$f(x,y)=(x-2y).v_1+(x-y).v_2+y.v_3=(2x-2y,x,y)\,.$$

De la proposition précédente, on déduit immédiatement le résultat suivant :

Proposition 6.4.5. *Soient $f,\ g:(E,B_E)\longrightarrow(F,B_F)$ deux applications linéaires. Alors,*

$$f=g\Longleftrightarrow M(f,B_E,B_F)=M(g,B_E,B_F)$$

Proposition 6.4.6. *Soient $f,\ g:(E,B_E)\longrightarrow(F,B_F)$ deux applications linéaires. Alors, pour tous scalaires $\alpha,\ \beta$ dans $\mathbb{K}$,*

$$M(\alpha.f+\beta.g,\ B_E,\ B_F)=\alpha\bullet M(f,B_E,B_F)+\beta\bullet M(g,B_E,B_F)).$$

Preuve. C'est un calcul direct qu'on recommande au lecteur d'effectuer à titre d'exercice. □

Proposition 6.4.7. *Soient $f:(E,B_E)\longrightarrow(F,B_F)$ et $g:(F,B_F)\longrightarrow(G,B_G)$ deux applications linéaires alors,*

$$M(g\circ f,B_E,B_G)=M(g,B_F,B_G)\times M(f,B_E,B_F).$$

Preuve. Posons :

$$B_E=\{u_1,\cdots,u_n\}\,,\quad B_F=\{v_1,\cdots,v_m\}\,,\quad B_G=\{w_1,\cdots,w_p\}$$

et

$$M(f,B_E,B_F)=(a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}\,,\quad M(g,B_F,B_G)=(b_{ij})_{i,j=1}^{p,m}\,.$$

La colonne j de la matrice produit $M(g,B_F,B_G)\times M(f,B_E,B_F)$ est le vecteur colonne

$$\begin{pmatrix}c_{1j}\\ \vdots\\ c_{pj}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{11}a_{1j}+b_{12}a_{2j}+\cdots+b_{1m}a_{mj}\\ \vdots\\ b_{p1}a_{1j}+b_{p2}a_{2j}+\cdots+b_{pm}a_{mj}\end{pmatrix}. \tag{6.4.2}$$

Ainsi, pour démontrer la proposition, il suffit de prouver que

$$(g\circ f)(u_j)=(c_{1j},c_{2j},\cdots,c_{pj})_{B_G}\,,\ (1\le j\le n).$$

En utilisant la remarque 5.3.12, on obtient pour tout $1 \leq j \leq n$,

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(u_j) &= g\left(f(u_j)\right) \\
&= g\left(a_{1j}.v_1 + a_{2j}.v_2 + \cdots + a_{mj}.v_m\right) \\
&= a_{1j}.g(v_1) + a_{2j}.g(v_2) + \cdots + a_{mj}.g(v_m) \\
&= a_{1j}.\left\{b_{11}.w_1 + b_{21}.w_2 + \cdots + bp1.wp\right\} + a_{2j}.\left\{b_{12}.w_1 + b_{22}.w_2 + \cdots + b_{p2}.wp\right\} \\
&\quad + \cdots + a_{mj}.\left\{b_{1m}.w_1 + b_{2m}.w_2 + \cdots + b_{pm}.wp\right\} \\
&= \left\{b_{11}.a_{1j} + b_{12}.a_{2j} + \cdots + b_{1m}.a_{mj}\right\}.w_1 + \left\{b_{21}.a_{1j} + b_{22}.a_{2j} + \cdots + b_{pm}.a_{mj}\right\}.w_2 \\
&\quad + \cdots + \left\{b_{p1}.a_{1j} + b_{p2}.a_{2j} + \cdots + b_{pm}.a_{mj}\right\}.w_p \\
&= \left(c_{1j}, c_{2j}, \cdots, c_{pj}\right)_{B_G}.
\end{aligned}$$

□

Proposition 6.4.8. *Soit* $f : (E, B_E) \longrightarrow (F, B_F)$ *une application linéaire. On suppose que* $\dim(E) = \dim(F) = n$. *ALors,*

$$f \text{ bijective} \Longleftrightarrow M(f, B_E, B_F) \text{ inversible.}$$

Dans ce cas,

$$M(f^{-1}, B_F, B_E) = \left[M(f, B_E, B_F)\right]^{-1}.$$

En d'autres termes, la matrice de l'application inverse est égale à l'inverse de la matrice de l'application initiale.

Preuve. Supposons que f est bijective. Dans ce cas,

$$f^{-1} \circ f = Id_E \quad \wedge \quad f \circ f^{-1} = Id_F.$$

En utilisant la proposition 6.4.7, on obtient :

$$I_n = M(Id_E, B_E) = M(f^{-1} \circ f, B_E) = M(f^{-1}, B_F, B_E) \times M(f, B_E, B_F)$$

et

$$I_n = M(Id_F, B_F) = M(f \circ f^{-1}, B_F) = M(f, B_E, B_F) \times M(f^{-1}, B_F, B_E).$$

Ainsi,

$$M(f^{-1}, B_F, B_E) \times M(f, B_E, B_F) = I_n = M(f, B_E, B_F) \times M(f^{-1}, B_F, B_E).$$

Ce qui signifie que la matrice $M(f, B_E, B_F)$ est inversible et que $M(f^{-1}, B_F, B_E)$ est son inverse.

Supposons maintenant que la matrice $M(f, B_E, B_F)$ est inversible et montrons que l'application f est bijective. Comme $\dim(E) = \dim(F) \prec +\infty$, il suffit pour cela de prouver que f est injective, ce qui est équivalent à $\ker(f) = \{0_E\}$. La proposition 6.4.3 nous donne :

$$\begin{cases} u = (x_1, \cdots, x_n)_{B_E} \\ \wedge \\ f(u) = (0_{\mathbb{K}}, \cdots, _{\mathbb{K}})_{B_F} \end{cases} \implies (x_1, \cdots, x_n) \times (M(f, B_E, B_F))^T = (0_{\mathbb{K}}, \cdots, 0_{\mathbb{K}})$$

$$\implies (x_1, \cdots, x_n) = (0_{\mathbb{K}}, \cdots, 0_{\mathbb{K}}) \times \underbrace{\left((M(f, B_E, B_F))^T\right)^{-1}}_{(M(f^{-1}, B_F, B_E)^T)}$$

$$\implies (x_1, \cdots, x_n) = (0_{\mathbb{K}}, \cdots, 0_{\mathbb{K}})$$

$$\implies v = 0_E.$$

$$\implies f \text{ injective.}$$

□

Exemple 6.4.9. *Soit l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par :*

$$u = (x, y, z) \Longrightarrow f(u) = (x + y - z, x - y + z, -x + y + z).$$

On vérifie facilement que f est injective et donc aussi bijective. Si B_c est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ alors,

$$M(f, B_c, B_c) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est inversible est son inverse est

$$M(f^{-1}, B_c, B_c) = \frac{1}{2} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour trouver l'expression de f^{-1}, on utilise la proposition 6.4.3 et on obtient :

$$\begin{aligned} f^{-1}(v = (x, y, z)) &= (x, y, z) \times \left(M(f^{-1}, B_c, B_c)\right)^T = \frac{1}{2}.(x, y, z) \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+z}{2}, \frac{y+z}{2}\right). \end{aligned}$$

6.4.2 Matrice associée et changement de bases

Position du problème : Soient $f : (E, B_E) \longrightarrow (F, B_F)$ une application linéaire et $M(f, B_E, B_F)$ la matrice de f dans ces deux bases. Soit maintenant B'_E une autre base de E et B'_F une autre base de F. La question naturelle qui se pose est comment passer de la matrice $M(f, B_E, B_F)$ à la matrice $M(f, B'_E, B'_F)$?
Conformément à la chaine suivante

$$(E, B'_E) \stackrel{Id_E}{\to} (E, B_E) \stackrel{f}{\to} (F, B_F) \stackrel{Id_F}{\to} (F, B'_F),$$

et la proposition 6.4.7,

$$M(f,B'_E,B'_F) = M(Id_F \circ f \circ Id_E, B'_E, B'_F) = M(Id_F, B_F, B'_F) \times M(f, B_E, B_F) \times M(Id_E, B'_E, B_E).$$

En ayant présent à l'esprit le fait que $M(Id_E, B'_E, B_E)$ est la matrice $P_{(B'_E, B_E)}$ de passage de B_E à B'_E et que $M(Id_F, B_F, B'_F)$ est la matrice $P_{(B_F, B'_F)}$ de passage de B'_F à B_F, on obtient finalement le résultat suivant.

Theorem 6.4.10. *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire et soient B_E, B'_E (respectivement, B_F, B'_F) deux bases de E (respectivement de F). Alors,*

$$M(f,B'_E,B'_F) = P_{(B_F,B'_F)} \times M(f,B_E,B_F) \times P_{(B'_E,B_E)}.$$

La formule précédente admet les cas particuliers suivants :
1)

$$B_E = B'_E \Longrightarrow M(f,B'_E,B'_F) = M(f,B_E,B'_F) = P_{(B_F,B'_F)} \times M(f,B_E,B_F)$$

car, dans ce cas, $P_{(B'_E,B_E)} = P_{(B_E,B_E)} = I_n, \; n = \dim(E)$.
2) De manière analogue,

$$B_F = B'_F \Longrightarrow M(f,B'_E,B'_F) = M(f,B'_E,B_F) = M(f,B_E,B_F) \times P_{(B'_E,B_E)}.$$

3) Si, $E = F, \; B_E = B_F, \; B'_E = B'_F$ alors,

$$M(f,B'_E,B'_E) = P_{(B_E,B'_E)} \times M(f,B_E,B_E) \times P_{(B'_E,B_E)} = \left(P_{(B'_E,B_E)}\right)^{-1} \times M(f,B_E,B_E) \times P_{(B'_E,B_E)}.$$

Exemple 6.4.11. *Soit $f : (\mathbb{R}^2, B) \longrightarrow (\mathbb{R}^3, B')$ l'application linéaire définie par :*

$$u = (x,y) \longmapsto f(u) = v = (x, y, x+y).$$

1) Si, B est la base canonique $B_c(\mathbb{R}^2) = \{e_1, \; e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ et B' est la base canonique $B'_c(\mathbb{R}^3) == \{e'_1, \; e'_2, \; e'_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ alors,

$$\begin{cases} f(e_1) = f(1,0) = (1,0,1) = e'_1 + e'_3 \\ f(e_2) = f(0,1) = (0,1,1) = e'2 + e'_3 \end{cases} \Longrightarrow M(f, B_c(\mathbb{R}^2), B_c(\mathbb{R}^3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Si $B = B_c(\mathbb{R}^2)$ et $B'_1 = \{v'_1 = (1,0,0), \; v'_2 = (1,1,0), \; v'_3 = (1,1,1)\}$ est la nouvelle base de $\mathbb{R}^3$ alors,

$$\begin{cases} e'_1 = (1,0,0) = v'_1 \\ e'_2 = (0,1,0) = -v'_1 + v'_2 \\ e'_3 = (0,0,1) = -v'_2 + v'_3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et donc,

$$\begin{aligned}
M(f, B_c(\mathbb{R}^2), B'_1) &= P_{(B_c(\mathbb{R}^3), B'_1)} \times M(f, B_c(\mathbb{R}^2), B_c(\mathbb{R}^3)) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

3) Si on choisit dans $\mathbb{R}^2$ une nouvelle base $B_1 = \{u_1 = (1,0),\ u_2 = (1,1)\}$ alors,

$$\begin{cases} u_1 = e_1 \\ u_2 = e_1 + e_2 \end{cases} \Longrightarrow P_{(B_1, B_c(\mathbb{R}^2))} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et donc,

$$\begin{aligned}
M(f, B_1, B_c(\mathbb{R}^3)) &= M(f, B_c(\mathbb{R}^2), B_c(\mathbb{R}^3)) \times P_{(B_1, B_c(\mathbb{R}^2))} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

4) Finalement, d'après le théorème 6.4.10,

$$\begin{aligned}
M(f, B_1, B'_1) &= P_{(B_c(\mathbb{R}^3), B'_1)} \times M(f, B_c(\mathbb{R}^2), B_c(\mathbb{R}^3)) \times P_{(B_1, B_c(\mathbb{R}^2))} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

6.4.3 Rang d'une application linéaire, rang d'une matrice

Définition 6.4.12. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions respectives n et m finies et soient $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. On appelle rang de f l'entier naturel $rg(f) := \dim(Im(f))$.*

De la formule

$$n = \dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(Im(f))$$

découle immédiatement que $rg(f) \leq \min(n, m)$. De plus,

$$[rg(f) = n \Longleftrightarrow f \text{ injective}] \ \wedge \ [rg(f) = m \Longleftrightarrow f \text{ surjective}].$$

Soit maintenant $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ une matrice à m lignes et n colonnes. Soit $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ l'application linéaire vérifiant

$$M(f, B_c(\mathbb{K}^n), B_c(\mathbb{K}^m)) = A$$

où, $B_c(\mathbb{K}^n)$ (respectivement $B_c(\mathbb{K}^m)$) est la base canonique de $\mathbb{K}^n$ (respectivement $\mathbb{K}^m$).

Définition 6.4.13. *On appelle rang de la matrice A (noté $rg(A)$ le rang de l'application linéaire associée f.*

Supposons que $B_c(\mathbb{K}^n) = \{e_1, \cdots, e_n\}$. Comme la colonne j de la matrice A est constituée des composantes du vecteur $f(e_j)$ et que la famille $f(e_1), \cdots, f(e_n)$ engendre $Im(f)$ alors, on peut énoncer le résultat suivant.

Proposition 6.4.14. *Soit A une matrice à m lignes et n colonnes. Alors, $rg(A)$ est le plus grand nombre de colonnes linéairement indépendantes de A. De plus, $rg(A) \leq min(n, m)$.*

Exemple 6.4.15. *Considérons la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

C'est une matrice à 2 lignes et 3 colonnes. Donc, $rg(A) \leq 2$. Comme les colonnes 1 et 2 sont linéairement indépendantes alors, $rg(A) = 2$.

Exemple 6.4.16. *Considérons la matrice*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

C'est une matrice à 2 lignes et 3 colonnes. Donc, $rg(A) \leq 2$. Comme il est impossible de trouver deux colonnes linéairement indépendantes alors, $rg(A) = 1$.

Nous terminons cette section par énoncer le résultat pratique suivant.

Theorem 6.4.17. *Soit A une matrice à m lignes et n colonnes. Alors,*
1) $rg(A)$ est plus grand nombre de colonnes linéairement indépendantes de A.
2) $rg(A)$ est plus grand nombre de lignes linéairement indépendantes de A.
3) Si, $rg(A) = n$ alors, l'application linéaire associée est injective.
4) Si, $rg(A) = m$ alors, l'application linéaire associée est surjective.
5) Si $n = m$ alors, $rg(A) = n$ si et seulement si, l'application linéaire associée est bijective.

6.5 Exercices corrigés

Exercice 6.5.1. *Déterminer l'application linéaire* $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$*, vérifiant les conditions :*

$$f(1,1,1) = (0,1), \quad f(1,1,0) = (1,0), \quad f(0,1,1) = (1,-1).$$

Solution : Soit $u = (x,y,z)$ un élément de $\mathbb{R}^3$. Pour trouver $f(u)$, on écrit d'abord u sous la forme :

$$u = \alpha.(1,1,1) + \beta.(1,1,0) + \gamma.(0,1,1).$$

Cela conduit à résoudre le système :

$$(S) : \begin{cases} \alpha + \beta = x \\ \alpha + \beta + \gamma = y \\ \beta + \gamma = z \end{cases}$$

dont la solution est :

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (x - y + z, y - z, y - x).$$

Par conséquent, en utilisant la linéarité de f,

$$\begin{aligned} f(u = (x,y,z)) &= \alpha.f(1,1,1)) + \beta.f(1,1,0) + \gamma.f(0,1,1)) \\ &= (x - y + z).(0,1) + (y - z).(1,0) + (y - x).(1,-1)) \\ &= (-x + 2y - z, 2x - 2y + z). \end{aligned}$$

□

Exercice 6.5.2. *Déterminer l'application linéaire* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$*, vérifiant les conditions :*

$$f(0,1) = (1,1,1), \quad f(1,-1) = (0,1,1).$$

Solution : On raisonne comme dans l'exercice précédent. On écrit d'abord le vecteur $u = (x,y)$ sous la forme :

$$u = \alpha.(0,1) + \beta.(1,-1))$$

puis, on calcule $f(u)$ en utilisant la linéarité de f. Si vous avez bien fait les calculs (qui sont simples), vous trouverez :

$$f(u = (x,y)) = (x + y, 2x + y, 2x + y).$$

□

Exercice 6.5.3. *Montrer que si E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 1 alors, toute application linéaire de E dans E est une homothétie vectorielle dont on déterminera le rapport.*

Solution : Puisque E est de dimension 1 alors, il existe un vecteur non nul $u_0 \in$ tel que

$$\forall u \in E, \ \exists \alpha_u \in \mathbb{K} : \ u = \alpha_u . u_0.$$

Cela implique en particulier qu'il existe $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ tel que $f(u_0) = \lambda_0 \bullet u_0$. Par conséquent et en vertu de la linéarité de f,

$$f(u) = f(\alpha_u . u_0) = \alpha_u . f(u_0) = (\alpha_u . \lambda_0) . u_0 = \lambda_0 . u.$$

Cela signifie que f est l'homothétie vectorielle de rapport λ_0 vérifiant : $f(u_0) = \lambda_0 . u_0$. $\square$

Exercice 6.5.4. *Répondre en justifiant aux questions et affirmations suivantes :*
1) Existe-t-il des applications linéaires injectives de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$?
2) Toutes les apllications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ sont injectives.
3) Existe-t-il des applications linéaires surjectives de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$?
4) Toutes les apllications linéaires de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ sont surjectives.

Solution : 1) Non il n'existe aucune application linéaire injective de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ car, dans ce cas, on aura $\dim(\ker(f)) = 0$ et donc, d'après le théorème des trois dimensions 6.3.12, on aboutit à la contradiction suivante :

$$3 = \dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\ker(f)) + \dim(Im(f)) \leq 0 + 2 = 2.$$

2) Une application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ peut être injective, comme elle peut ne pas l'être. Par exemple l'application $f(x, y) = (x, y, 0)$ est linéaire injective. Par contre, l'application $g(x, y) = (x - y, 0, 0)$ est linéaire mais non injective.
3) Il n'existe aucune application linéaire surjective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ car dans ce cas, on aura $\dim(Im(f)) = 3$ et donc, toujours d'après le théorème des trois dimensions, on aboutit à la contradiction suivante :

$$2 = \dim(\mathbb{R}^2) = \dim(\ker(f)) + \dim(Im(f)) \geq \dim(Im(f)) = 3.$$

4) Une application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ peut être surjective comme, elle peut ne pas l'être. Par exemple, l'application $f(x, y, z) = (x, y)$ est linéaire surjective. Par contre, l'application $g(x, y, z) = (x, 0)$ est linéaire mais non sutjective puisque l'élément $(0, 1) \in \mathbb{R}^2$ n'est l'image par g d'aucun élément de $\mathbb{R}^3$. $\square$

Exercice 6.5.5. *Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une application. Montrer que f est linéaire si et seulemnt si, il existe $n \times m$ constantes réelles a_{ij}, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$ telles*

$$f(x_1, \cdots, x_n) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \ \cdots, a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n) \quad (6.5.1)$$

__**Solution :**__ Il n'est pas difficile en appliquant la définition de vérifier que si une application f est de la forme 6.5.1 alors, elle est linéaire.
Inversement, supposons que $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est une application linéaire et soient $B_c(\mathbb{R}^n) = \{e_1, \cdots, e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, $B_c(\mathbb{R}^m) = \{e'_1, \cdots, e'_m\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^m$. La matrice associée à f dans c'est deux bases est de la forme :

$$M(f, B_c(\mathbb{R}^n), B_c(\mathbb{R}^m)) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}, \ b_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Posons

$$(M(f, B_c(\mathbb{R}^n), B_c(\mathbb{R}^m)))^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}, \ a_{ij} = b_{ji}.$$

D'après la proposition 6.4.3,

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \times \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

ce qui donne l'expression 6.5.1 recherchée de f. □

Exercice 6.5.6. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application définie par :*

$$u = (x, y) \longmapsto f(u) = (y, x, x + y).$$

1) Montrer que f est linéaire.
2) Trouver $\ker(f)$. Que peut-on dire de f ?
3) Montrer que $Im(f) = \{(v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a + b - c = 0\}$.
4) Soit maintenant l'application linéaire g définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ par :

$$v = (x, y, z) \longmapsto g(v) = (-x + y + z, x - y + z).$$

Montrer que $f \circ g$ est linéaire. Trouver $\ker(f \circ g)$ et $Im(f \circ g)$.

Solution : 1) L'application f est linéaire en vertue de l'exercice 6.5.5.
2) Calcul de $\ker(f)$. On a

$$\begin{aligned} u=(x,y)\in\ker(f) &\iff f(u)=(y,x,x+y)=(0,0,0)\iff x=y=0\\ &\iff \ker(f)=\{(0,0)\}\,. \end{aligned}$$

On en déduit que $\dim(ker(f)=0$ et que f est injective.
3) On vérifie facilement que l'ensemble $F=\big\{(v=(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 : a+b-c=0\big\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2 (ça, on sait déjà le faire depuis le chapitre précédent). De plus,

$$\forall a,b\in\mathbb{R} : (a,b,a+b)=f(a,b).$$

Par conséquent, on a l'inclusion $F\subseteq Im(f)$. Donc, pour montrer qu'on a égalité ensembliste, il suffit d'établir qu'on a égalité des dimensions. D'après le théorème des trois dimensions,

$$\dim(Im(f))=\dim(\mathbb{R}^2)-\dim(\ker(f))=2-0=2=\dim(F).$$

4) L'application $f\circ g$ est définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ par :

$$v=(x,y,z)\longmapsto(f\circ g)(v)=(x-y+z,-x+y+z,2z).$$

Elle est linéaire car, c'est la composée de deux applications linéaires. D'autre part,

$$\begin{aligned} v=(x,y,z)\in\ker(f\circ g) &\iff (x-y+z,-x+y+z,2z)=(0,0,0)\iff v=(x,x,0)\\ &\iff \ker(f\circ g)=Vect(v_0=(1,1,0)). \end{aligned}$$

Soit maintenant $B_c(\mathbb{R}^3)=\{e_1,\ e_2,\ e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. D'après le corollaire de la proposition 6.3.8, $(f\circ g)(B_c(\mathbb{R}^3))=\{(f\circ g)(e_1),\ (f\circ g)(e_2),\ (f\circ g)(e_3)\}$ est une partie génératrice de $Im(f)$. Comme

$$(f\circ g)(e_2)=(f\circ g)(0,1,0)=(-1,1,0)=-(f\circ g)(e_1)$$

alors, on peut conclure que

$$Im(f)=Vect(\{(f\circ g)(e_1)=(1-1,0),\ (f\circ g)(e_3)=(1,1,2)\}\,.$$

D'après ce qui précède $B_0=\{v_0=(1,1,0)\}$ est une base de $\ker(f\circ g)$ et $B_1=\{(f\circ g)(e_1),\ (f\circ g)(e_3)\}$ est une base de $Im(f\circ g)$. On peut donc affirmer que $B_0\cup B_1=\{v_0,\ (f\circ g)(e_1),\ (f\circ g)(e_3)\}$ est une partie génératrice de $\ker(f)+Im(f)$. Par ailleurs,

$$\det(v_0,\ (f\circ g)(e_1),\ (f\circ g)(e_3))=\det\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\0&0&2\end{pmatrix}=-4\neq 0.$$

Donc, d'après le théorème 5.3.22, $\{v_0,\ (f\circ g)(e_1),\ (f\circ g)(e_3)\}$ est une base de l'espace somme $\ker(f\circ g)+Im(f\circ g)$. On a donc forcément $\ker(f\circ g)\oplus Im(f\circ g)=\mathbb{R}^3$. De plus, d'après la question (3) de l'exercice 5.6.2, cette somme est directe. Ainsi,

$$\mathbb{R}^3=\ker(f\circ g)\oplus Im(f\circ g).$$

□

Exercice 6.5.7. *Soit l'application* $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *définie par :*

$$u = (x, y, z) \longmapsto f(u) = (x - y, y - z, z - x).$$

1) Montrer que f *est linéaire.*
2) Trouver $\dim(\ker(f)$ *et* $\dim(Im(f))$.
3) Montrer que $Im(f) = \{v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$.

Solution : 1) L'application f est linéaire en vertu de l'exercice 6.5.5.
2) On a,

$$\begin{aligned} u = (x, y, z) \in \ker(f) &\iff f(u) = (x - y, y - z, z - x) = (0, 0, 0) \iff x = y = z \\ &\iff \ker(f) = Vect\{u_0 = (1, 1, 1)\}. \end{aligned}$$

Par conséquent, d'après le théorème des trois dimensions, $\dim(\ker(f)) = 1$ et $\dim(Im(f)) = 2$.
3) Posons

$$F = \{v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}.$$

On montre facilement que $\dim(F) = 2$. Donc, pour montrer l'égalité $Im(f) = F$, il suffit de montrer l'inclusion $Im(f) \subseteq F$. Soit donc e_1, e_2, e_3 les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$. D'après le cours, $Vect(\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}) = Im(f)$. Puisque,

$$f(e_1) = (1, 0, -1) \in F, \ \ f(e_2) = (-1, 1, 0) \in F, \ \ f(e_3) = (0, -1, 1) \in F$$

alors,

$$Im(f) = Vect(\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}) \subseteq F.$$

□

Exercice 6.5.8. *Soit* $\mathbb{R}_3[X]$ *l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et degré inférieur ou égal à* 3. *On rappelle que* $B_c(\mathbb{R}_3[X]) = \{1,\ X,\ X^2,\ X^3\}$ *est une base (dite canonique) de* $\mathbb{R}_3[X]$. *On considère l'application*

$$\Phi : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]; \ \ P \longmapsto \Phi(P) = X^2P''.$$

1) Montrer que Φ *est une application linéaire.*
2) Donner une base de $\ker(\Phi)$.
3) Donner une base de $Im(\Phi)$.
4) Montrer que $\mathbb{R}_3[X] = \ker(\Phi) \oplus Im(\phi)$.
5) Trouver la matrice associée à Φ *dans la base canonique.*

Solution : 1) Soient $P,\ Q$ deux éléments de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\alpha,\ \beta$ deux réels. Alors, en utilisant les propriétés de la dérivation,

$$\begin{aligned}\Phi(\alpha.P+\beta.Q) &= X^2(\alpha.P+\beta.Q)'' = X^2(\alpha.P''+\beta.Q'')\\ &= \alpha.\Phi(P)+\beta.\Phi(Q).\end{aligned}$$

L'application Φ est donc linéaire.
2) On a

$$P\in\mathbb{R}_3[X] \Longleftrightarrow P = a_0 + a_1.X + a_2.X^2 + a_3.X^3.$$

Par conséquent,

$$\Phi(p) = 0 \Longleftrightarrow 2a_2.X^2 + 6a_3.X^3 = 0 \Longleftrightarrow a_2 = a_3 = 0.$$

D'où,

$$\ker(\Phi) = \{P = a_0 + a_1.X,\ a_0,\ a_1\in\mathbb{R}\} = Vect(\{1,\ X\}).$$

On en déduit que $B_0 = \{1,\ X\}$ est une base de $\ker(\Phi)$.
3) D'après le cours,

$$Im(f) = Vect\left(\Phi(1),\ \Phi(X),\ \Phi(X^2),\ \Phi(X^3)\right) = Vect\left(\left\{2.X^2,\ 6.X^3\right\}\right) = Vect\left(\left\{X^2,\ X^3\right\}\right)$$

et donc, $B_1 = \left\{X^2,\ X^3\right\}$ est une base de $Im(\Phi)$.
4) D'après le cours, on a :

$$\left\{\begin{array}{l} B_0\cup B_1 = B_c(\mathbb{R}_3[X])\\ B_0\cap B_1 = \emptyset\end{array}\right. \Longrightarrow \mathbb{R}_3[X] = \ker(\Phi)\oplus Im(\Phi).$$

5) On a,

$$\left\{\begin{array}{l} \Phi(1) = 0 = (0,0,0,0)_{B_c(\mathbb{R}_3[X])}\\ \Phi(X) = 0 = (0,0,0,0)_{B_c(\mathbb{R}_3[X])}\\ \Phi(X^2) = 2.X^2 = (0,0,2,0)_{B_c(\mathbb{R}_3[X])}\\ \Phi(X^3) = 6.X^3 = (0,0,0,6)_{B_c(\mathbb{R}_3[X])}\end{array}\right. \Longrightarrow M(\Phi,\ B_c(\mathbb{R}_3[X])) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 6\end{pmatrix}.$$

□

Exercice 6.5.9. *On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, définie par :*

$$u = (x, y, z) \longmapsto f(u) = (x - y, x + y, 2x - 3y).$$

1) Trouver $M(f, B_c(\mathbb{R}^2), B_c(\mathbb{R}^3))$.
2) Trouver par la méthode directe la matrice $M(f, B'_1, B'_2)$ où, $B'_1 = \{u_1 = (1, 0);\ u_2 = (1, 1)\}$ et $B'_2 = \{v_1 = (1, 0, 0);\ v_2 = (1, 1, 0);\ v_3 = (1, 1, 1)\}$.
3) Retrouver ce résultat par la méthode des matrices de passage.
4) Soit maintenant $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire vérifiant :

$$M(g, B_c(\mathbb{R}^3), B_c(\mathbb{R}^2)) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.1) Donner l'expression de g.
4.2) Trouver $M(g \circ f, B_c(\mathbb{R}^2), B_c(\mathbb{R}^2))$. En déduire si $g \circ f$ est bijective.
4.3) Donner l'expression de $(g \circ f)^{-1}$.

Solution : 1) On a

$$\begin{cases} f(1, 0) = (1, 1, 2) \\ f(0, 1) = (-1, 1, -3) \end{cases} \Longrightarrow M(f, B_c(\mathbb{R}^2), B_c(\mathbb{R}^3)) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

2) Calcul de $M(f, B'_1, B'_2)$ par la méthode directe.

$$\begin{cases} f(u_1) = (1, 1, 2) = -v_2 + 2.v_3 \\ f(u_2) = (0, 2, 1) = -2.v_1 + 3.v_2 - v_3 \end{cases} \Longrightarrow M(f, B'_1, B'_2) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

3) Calcul de $M(f, B'_1, B'_2)$ par la méthode des matrices de passage. D'après la formule de changement de base (voir théorème 6.4.10),

$$M(f, B'_1, B'_2) = P_{(B_c(\mathbb{R}^3),\ B'_2)} \times M(f, B_c(\mathbb{R}^2), B_c(\mathbb{R}^3)) \times P_{(B'_1,\ B_c(\mathbb{R}^2))}.$$

Par ailleurs,

$$\begin{cases} u_1 = e_1 \\ u_2 = e_1 + e_2 \end{cases} \Longrightarrow P_{(B'_1,\ B_c(\mathbb{R}^2))} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{cases} e'_1 = v_1 \\ e'_2 = -v_1 + v_2 \\ e'_2 = -v_2 + v_3 \end{cases} \Longrightarrow P_{(B_c(\mathbb{R}^3),\ B'_2)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En reportant les expressions des matrices de passage dans la formule initiale, on obtient :

$$M(f, B'_1, B'_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

4.1) On a :

$$\begin{aligned} g(x,y,z) &= (x,y,z) \times \left(M(g, B_c(\mathbb{R}^3), B_c(\mathbb{R}^2))\right)^T \\ &= (x,y,z) \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= (x-y+z, x+2y). \end{aligned}$$

4.2) D'après le cours,

$$\begin{aligned} M(g\circ f, B_c(\mathbb{R}^2), B_c(\mathbb{R}^2)) &= M(g, B_c(\mathbb{R}^3), B_c(\mathbb{R}^2)) \times M(f, B_c(\mathbb{R}^2), B_c(\mathbb{R}^3)) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

L'application $g \circ f$ est bijective car, $\det\left(M(g\circ f, B_c(\mathbb{R}^2), B_c(\mathbb{R}^2))\right) \neq 0$.
4.3) D'après la théorie,

$$\begin{aligned} M((g\circ f)^{-1}, B_c(\mathbb{R}^2), B_c(\mathbb{R}^2)) &= \left(M(g\circ f, B_c(\mathbb{R}^2), B_c(\mathbb{R}^2))\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$(g\circ f)^{-1}(u) = (x,y) \times \left\{ \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \right\} = \left(\frac{x+5y}{17}, \ \frac{-3x+2y}{17} \right).$$

□

Exercice 6.5.10. *On considère dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique B_c l'application linéaire f, vérifiant les conditions : $f(e_1) = e_2, \ f(e_2) = e_3, \ f(e_3) = e_1$.*
1) Trouver $M(f, B_c) := M(f, B_c, B_c)$.
2) Donner l'expression de f.
3) Montrer que f est bijective et trouver $M(f^{-1}, B_c)$.
4) Donner l'expression de f^{-1}.
5) Calculer de deux manières différentes $M(f, B_1)$ où, $B_1 = \{v_1 = (1,0,0); \ v_2 = (1,1,0); \ v_3 = (1,1,1)\}$.

Solution : 1) Par définition de la matrice associée à une application linéaire,

$$M(f, B_c) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) D'après le cours, pour tout $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$f(u) = (x, y, z) \times (M(f, B_c))^T = (x, y, z) \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (z, x, y).$$

3) On a $\det(M(f, B_c)) = 1 \neq 0$. Cela signifie (voir cours) que $M(f, B_c)$ est inversible et donc, f est bijective. De plus,

$$M(f^{-1}, B_c) = (M(f, B_c))^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4) Comme pour la question (2), pour tout $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$f^{-1}(v) = (x, y, z) \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T = (x, y, z) \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (y, z, x).$$

5.1) Calcul de$M(f, B_1)$ par la méthode directe : On a,

$$\begin{cases} f(v_1) = (0, 1, 0) = -v_1 + v_2 \\ f(v_2) = (0, 1, 1) = -v_1 + v_3 \\ f(v_3) = v_3 \end{cases} \Longrightarrow M(f, B_1) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.2) Calcul de$M(f, B_1)$ par la méthode des matrices de passage : On a,

$$\begin{aligned} M(f, B_1) &= P_{(B_c,\ B_1)} \times M(f, B_c) \times P_{(B_1,\ B_c)} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$\square$

Exercice 6.5.11. *Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On suppose que $E = E_1 \oplus E_2$ somme directe de deux sous-espaces E_1 et E_2. On sait d'après le cours que tout vecteur u de E s'écrit de manière unique sous la forme :*

$$u = u_1 + u_2, \ u_1 \in E_1, \ u_2 \in E_2.$$

Considérons l'application

$$P_1 : E \longrightarrow E_1; \ u = u_1 + u_2 \longmapsto P_1(u) = u_1.$$

Cette application est appelée la projection de E sur E_1 parallèlement à la direction E_2. La projection de E sur E_2 parallèlement à E_1 se définit de manière analogue et on a trivialement $P_1 + P_2 = Id_E$.
1) Montrer que P_1 est linéaire.
2) Déterminer $\ker(P_1)$ et $Im(P_1)$.
3) Montrer que $P_1 \circ P_1 = P_1$.
4) On suppose maintenant E est de dimension finie n. Montrer qu'il existe dans E une base B telle que

$$M(f, B) = \begin{pmatrix} I_r & \mathcal{O}_{(n-r)\times r} \\ \mathcal{O}_{r\times(n-r)} & \mathcal{O}_{(n-r)\times(n-r)} \end{pmatrix}$$

où, I_r est la matrice unité $(r \times r)$ et $\mathcal{O}_{s\times t}$ - la matrice nulle $(s \times t)$.
5) Montrer que si une application linéaire $f : E \longrightarrow E$ vérifie $f \circ f = f$ alors,

$$E = Im(f) \oplus Im(Id_E - f).$$

6) En déduire que toute application linéaire $f : E \longrightarrow E$, satisfaisant à la condition $f \circ f = f$ est une projection dont on déterminera la direction et le sous-espace de projection.

Solution : 1) Pour tous u, v dans E et tous scalaires α, β,

$$\begin{cases} u = u_1 + u_2 : \ u_1 \in E_1, \ u_2 \in E_2 \\ v = v_1 + v_2 : \ v_1 \in E_1, \ v_2 \in E_2 \end{cases} \Longrightarrow \alpha.u + \beta.v = \underbrace{(\alpha.u_1 + \beta.v_1)}_{\in E_1} + \underbrace{(\alpha.u_2 + \beta.v_2)}_{\in E_2}.$$

On en déduit que

$$P_1(\alpha.u + \beta.v) = \alpha.u_1 + \beta.v_1 = \alpha.P_1(u) + \beta.P_1(v).$$

La projection P_1 est donc une application linéaire.
2) On a $Im(P_1) = E_1$ par définition de la projection P_1. De plus,

$$u = u_1 + u_2 \in \ker(P_1) \Longleftrightarrow u_1 = P_1(u) = 0_E \Longleftrightarrow u \in E_2.$$

Par conséquent, $\ker(P_1) = E_2$.

3) Pour tout $u = u_1 + u_2 \in E$,

$$(P_1 \circ P_1)(u) = P_1(u_1) = P_1(\underbrace{u_1}_{\in E_1} + \underbrace{0_E}_{\in E_2}) = u_1 = P_1(u).$$

D'où, $P_1 \circ P_1 = P_1$.
4) Soient $B_1 = \{w_1, \cdots, w_r\}$ une base de E_1 et $B_2 = \{w_{r+1}, \cdots, w_n\}$ une base de E_2. Puisqu'on a la somme directe $E = E_1 \oplus_d E_2$ alors, $B = B_1 \cup B_2$ est une base de E. On vérifie facilement que

$$P_1(w_i) = \begin{cases} w_i & 1 \leq i \leq r \\ 0_E & r+1 \leq i \leq n \end{cases}.$$

La matrice $M(P_1, B_1)$ est donc nécessairement de la forme annoncée dans la question (4).
5) Supposons que $f : E \longrightarrow E$ est une application linéaire vérifiant $f \circ f = f$. On a alors,

$$u \in E \Longrightarrow u = f(u) + (u - f(u)) = \underbrace{f(u)}_{\in Im(f)} + \underbrace{(Id_E + f)(u)}_{\in Im(Id_E - f)}.$$

On en déduit que $E = Im(f) + Im(Id_E - f)$. Pour montrer que cette somme est directe, il faut montrer que $Im(f) \cap Im(Id_E - f) = \{0_E\}$.
On a,

$$v \in Im(f) \cap Im(Id_E - f) \Longleftrightarrow \begin{cases} v = f(u) & u \in E \\ v = w - f(w) & w \in E \end{cases}. \tag{6.5.2}$$

La condition $f \circ f = f$ nous donne,

$$f(v) = (f \circ f)(u) = f(u) = v.$$

En reportant dans la seconde égalité de 6.5.2, on obtient :

$$v = f(v) = f(w - f(w)) = f(w) - (f \circ f)(w) = f(w) - f(w) = 0_E.$$

Ainsi, $Im(f) \cap Im(Id_E - f) = \{0_E\}$.
6) Supposons que $f : E \longrightarrow E$ est une application linéaire vérifiant $f \circ f = f$. D'après la question précédente, tout vecteur v de E, s'écrit de manière unique sous la forme :

$$v = \underbrace{f(u)}_{v_1} + \underbrace{(Id_E - f)(w)}_{v_2};\ u, w \in E.$$

De plus,

$$f(v) = (f \circ f)(u) + (f \ominus (f \circ f))(w) = f(u) + 0_E = v_1.$$

On peut donc conclure que f est la projection sur $Im(f)$ parallélement à $Im(Id_E - f)$. □

On peut sans difficulté établir qu'une projection est toujours surjective mais non injective (sauf si $E = E_1$ car, dans ce cas, $P_1 = Id_E$).

Exercice 6.5.12. *Le présent exercice est une application simple et directe du précédent.*
1) Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, définie par :

$$u = (x, y, z) f(u) = (x, y, 0)$$

est une projection.
2) Définir une projection de $\mathbb{R}^4$ sur le sous-espace

$$F = \{u = (x, y, z, t) : x + y + z - t = 0\}.$$

Solution : 1) Un calcul direct nous donne $f \circ f = f$. Par conséquent, f est la projection sur $Im(f)$ parallèlement au sous-espace $Im(Id_{\mathbb{R}^3} - f)$. On vérifie facielement que

$$Im(f) = \{v = (x, y, 0) : \ x, y \in \mathbb{R}\}$$

et

$$Im(Id_{\mathbb{R}^3} - f = \{v = (0, 0, z) : \ z \in \mathbb{R}\}.$$

2) On a

$$\begin{aligned} F &= \{v = (x, y, z, x + y + z : \ x, y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= Vect(\{v_1 = (1, 0, 0, 1); \ v_2 = (0, 1, 0, 1); \ v_3 = (0, 0, 1, 1)\}) \end{aligned}$$

De plus, $B_F = \{v_1 = (1, 0, 0, 1); \ v_2 = (0, 1, 0, 1); \ v_3 = (0, 0, 1, 1)\}$ est une base de F. D'après le théorème de la base incomplète, il existe $v_4 \in E$ tel que $B = \{v_1, \ v_2, \ v_3, \ v_4\}$ est une base de E. Dans ce cas, $\mathbb{R}^4 = F \oplus Vect(v_4)$. C'est à dire, que tout vecteur $v \in E$ s'écrit de manière unique sous la forme :

$$v \in \mathbb{R}^4 \Longrightarrow v = \alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \alpha_3.v_3 + \alpha_4.v_4.$$

Finalement, une projection de $\mathbb{R}^4$ sur F est l'application

$$v \longmapsto P_F(v) = \alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \alpha_3.v_3.$$

□

Comme le supplémentaire de F n'est pas unique (voir exercice 5.6.3, question (2)) alors, la projection P_F qu'on vient de définir n'est pas unique. C'est pour cela que dans l'énoncé, il est dit : Définir une projection de $\mathbb{R}^4$ sur F et non pas : Définir la projection de $\mathbb{R}^4$ sur F.

Bibliographie

[1] E. Azoulay et J. Avignon, Mathématiques, Tome 1, Analyse, Mc-Graw Hill,1983.

[2] J. Franchini et J. C. Jacquens, Algèbre : Cours, Exrcicres corrigés, Travaux dirigés, Ellipses, Paris, 1999.

[3] R. Godement, Cours d'algèbre, troisième édition, collection Enseignement Des Sciences, Hermann, Paris, 1997.

[4] S. Lang, Algèbre : Cours et exercices, Troisième édition, Dunod, 2004.

[5] M. Mignotte et J. Nervi, Licences sciences première année, Ellipses, Paris, 2004.